



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

Centro de Estudios de Postgrado

TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: Cabrera Matas, María Isabel
Francisca

Tutor/a: Prof. D. Antonio Jesús López Moreno
Dpto: Matemática Aplicada

Junio, 2022

Índice

Resumen	3
Abstract.....	4
1. Introducción	5
2. Objetivos	7
3. Fundamentación curricular.	9
3.1. Análisis del currículo.....	9
3.2. Análisis libros de texto.....	18
3.2.1 Editorial Anaya	19
3.2.2 Editorial SM Savia Digital	23
3.2.3 Conclusiones del análisis.	24
4. Fundamentación epistemológica.....	27
4.1 Introducción	27
4.2 El arco y el ángulo.....	28
4.2.1. Definiciones.....	28
4.2.2. Unidades de medida.	29
4.2.3. Rango de un ángulo.....	30
4.3 Propiedades fundamentales de los triángulos.	31
4.4 Razones trigonométricas	33
4.4.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.....	33
4.4.2. Razones trigonométricas de cualquier ángulo.....	35
4.4.3. Razones trigonométricas de ángulos complementarios.	36
4.4.4. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios.	37
4.4.5. Razones trigonométricas de ángulos que difieren π	38
4.4.6. Razones trigonométricas de ángulos que suman 2π	39
4.4.7. Razones trigonométricas de ángulos cuya diferencia es $\pi/2$	39
4.5 Fórmulas generales de trigonometría plana	40
4.5.1. Razones trigonométricas del ángulo $(\alpha+\beta)$	40
4.5.2. Razones trigonométricas del ángulo opuesto $(-\alpha)$	42
4.5.3. Razones trigonométricas del ángulo $(\alpha-\beta)$	43
4.5.4. Razones trigonométricas del ángulo doble 2α	44
4.5.5. Razones trigonométricas del ángulo mitad $\alpha/2$	44
4.5.6. Transformaciones en producto de la suma y diferencia de razones trigonométricas.....	45
4.5.7. Transformaciones en suma de los productos de razones trigonométricas.	47
4.6 Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.....	48
4.6.1. Teorema del <i>seno</i>	48
4.6.2. Teorema del <i>coseno</i>	51

4.6.3. Teorema de la tangente	54
4.6.4. Fórmula de Briggs.....	55
4.6.5. Superficie de un triángulo. Fórmula de Herón.	57
4.7 Resolución de triángulos.	58
4.7.1. Resolución de triángulos rectángulos.	58
4.7.2. Resolución de triángulos oblicuángulos.....	60
4.8 Aplicaciones.....	62
4.8.1. Topografía	62
4.8.2. Otras aplicaciones.	67
5. Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza.....	69
6. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica.	81
6.1. Título.....	81
6.2. Justificación	81
6.3. Contextualización del centro y del aula.....	82
6.4. Objetivos.....	86
6.4.1 Objetivos generales de etapa.....	86
6.4.2 Objetivos específicos del área de matemáticas.	86
6.4.3 Objetivos de la unidad didáctica.	88
6.5. Competencias clave	89
6.6. Contenidos.....	89
6.7. Metodología	90
6.8. Actividades y recursos.	91
6.8.1. Actividades.	91
6.8.2. Recursos.	92
6.9. Atención a la diversidad	93
6.10. Temporalización	94
6.11. Evaluación.....	96
7. Conclusiones	97
8. Referencias bibliográficas	99
ANEXOS.....	101
Anexo I. Sesiones Unidad Didáctica.....	101
Anexo II. Actividades.	114
Anexo III. Rúbricas para evaluación.....	144

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la realización del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, en el curso 2021/2022. El tema elegido para el desarrollo de dicho documento es “Trigonometría Plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones” que corresponde al tema 38 de las Oposiciones para Profesor de Enseñanza Secundaria en la especialidad de Matemáticas, cuyo desarrollo también se recoge en este documento.

Se proyecta una unidad didáctica de trigonometría para la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º ESO, siguiendo en todo momento el currículo escolar establecido por el Real Decreto 1105/2014. Previamente al diseño de esta unidad, se analizan dos libros de texto que permiten realizar una primera aproximación a aquellas metodologías y conocimientos científicos sobre trigonometría que se deben enseñar en el aula. Además, se desarrolla el tema de oposiciones que proporciona una profundización en el denominado “saber sabio” matemático de la trigonometría. Como último paso introductorio a la unidad, se analizan investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza de otros autores en la búsqueda de aspectos que sean de interés.

ABSTRACT

The objective of this Master's Thesis is to put into practice the knowledge acquired during the Master's Degree in Teaching Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, in the specialty of Mathematics, in the 2021/2022 academic year. The topic chosen for the development of said document is "Flat Trigonometry. Solving triangles. Applications" that corresponds to topic 38 of the Oppositions for Secondary Education Teacher in the specialty of Mathematics, whose development is also included in this document.

A didactic unit of trigonometry is projected for the subject "Mathematics oriented to academic teachings" of 4th ESO, following at all times the school curriculum established by Royal Decree 1105/2014. Prior to the design of this unit, two textbooks are analyzed that allow a first approximation to those methodologies and scientific knowledge about trigonometry that should be taught in the classroom. In addition, the theme of oppositions is developed, which provides a deepening in the so-called mathematical "wise knowledge" of trigonometry. As a last introductory step to the unit, research on learning and/or teaching by other authors is analyzed in search of aspects that are of interest.

Palabras clave

Matemáticas, trigonometría, unidad didáctica, educación secundaria

Keywords

Mathematics, Trigonometry, Didactic Unit, Compulsory Secondary Education

1. INTRODUCCIÓN

El Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas se corona con la elaboración y la defensa de un Trabajo Fin de Máster (en adelante, TFM). En este trabajo se pone de manifiesto el aprendizaje adquirido durante el transcurso del curso académico, así como las competencias docentes desarrolladas que quedarán plasmada en la elaboración de una unidad didáctica.

El tema elegido, Trigonometría, ha supuesto un gran reto para mí. En primer lugar, durante mi periodo de prácticas he sido la responsable de impartir este tema para los dos cursos asignados de 4º ESO de MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS. En segundo lugar, los alumnos están predispuestos a considerar incomprensible la trigonometría, ya que es un tema novedoso para ellos.

La unidad didáctica que se desarrolla forma parte de una programación de aula compuesta por tres bloques, siendo el tercero dedicado a Geometría donde el capítulo 7 es la unidad didáctica correspondiente a Trigonometría. Esta unidad ha sido objetivo de mi trabajo durante 3 de las 5 semanas de duración de las prácticas. Por ese motivo, he podido experimentar en primera persona la implementación de dicha unidad didáctica. Es importante destacar que independientemente de que programar es imprescindible, y de hecho la programación para las dos clases de 4º ESO ha sido exactamente igual, pero la práctica ha sido necesario realizar adaptaciones por tratarse de grupos de distinto nivel académico.

La estructura del TFM es la que sigue a continuación:

1. *Objetivos*: capacidades y habilidades a adquirir por el futuro docente.
2. *Fundamentación curricular*: se tiene en cuenta el concepto de transposición didáctica y se comparan libros de texto de diferentes editoriales con el currículo de matemáticas de 4º de E.S.O. del Real Decreto (RD) 1105/2014.
3. *Fundamentación epistemológica*: se desarrolla desde el rigor matemático un tema correspondiente al temario de oposiciones para profesor de Matemáticas.

4. *Fundamentación didáctica*: basada en el análisis de una investigación relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos matemáticos expuestos en la unidad didáctica. Principalmente se revisan las dificultades y errores que presenta el alumnado en la adquisición de conocimientos trigonométricos y algunas estrategias y recursos utilizados para obtener resultados de aprendizaje basados en el éxito.
5. *Proyección didáctica*: se desarrolla la unidad didáctica de Trigonometría donde se pretende emplear una metodología que incorpore estrategias innovadoras y motivadoras y permitan alcanzar los objetivos y competencias recogidos en el RD 1105/2014 y la Orden 15 de enero de 2021 para el curso 4º de E.S.O. dentro de las Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.
6. *Conclusiones*: Valoración global del proceso de realización del TFM. Contribuciones al desarrollo de las competencias profesionales.

El presente trabajo pretende conseguir una mezcla de las metodologías tradicionales con aquellas que permitan obtener un aprendizaje significativo, sin olvidar que la importancia radica en el estrecho vínculo que se debe formar entre lo asimilado y lo nuevo por conocer, para poder conseguir un Aprendizaje Cooperativo.

Tras mi experiencia como docente, en la especialidad de matemáticas, durante la fase de prácticas del Máster de profesorado, me parece evidente la necesidad de cambiar de tarea con relativa frecuencia a lo largo de las sesiones. La implantación de metodologías donde los alumnos descubran por sí mismos conceptos matemáticos contenidos en ciertos problemas permite mejorar muchas de sus competencias como el modelado, la argumentación y el desarrollo del pensamiento.

2. OBJETIVOS

La finalidad de este TFM es la puesta en práctica de las competencias y contenidos formativos adquiridos para el ejercicio de la docencia durante la realización del Máster, de manera que integre los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del Máster y sea una herramienta preparatoria y formativa para una posterior función docente.

Los objetivos del presente TFM se describen a continuación:

1. Aplicar los conocimientos adquiridos en el transcurso de la realización del Máster de Profesor de Educación secundaria en la especialidad de Matemáticas.
2. Conocer y aplicar la normativa y organización institucional del sistema educativo español a nivel estatal y autonómico.
3. Profundizar en el saber matemático de la Trigonometría e identificar y analizar los problemas que surgen en el alumnado derivados de sus capacidades y ritmos de aprendizaje distintos, para poder intervenir de forma adecuada.
4. Identificar y aplicar investigaciones relevantes de otros autores sobre la materia de Trigonometría en busca de las dificultades mencionadas en el punto anterior y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.
5. Efectuar un examen crítico donde se observen fenómenos ligados al proceso de transposición didáctica de los libros de texto relativos a Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO.
6. Desarrollar una unidad didáctica para la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO, cumpliendo lo establecido en el currículo y legislación vigentes.
7. Conocer las características del alumnado, así como el entorno de desarrollo docente, aplicando metodologías que conlleven un aprendizaje significativo del alumno dentro de un contexto motivador y comunicativo, sin olvidar las capacidades y ritmos de cada estudiante.
8. Tener información de las competencias como profesor en la asignatura de Matemáticas, así como la relación que se establece entre estas y el resto de las competencias.

9. Alcanzar el conocimiento, las destrezas y actitudes necesarias para el uso y aprovechamiento de las TICs en la función docente.
10. Revisar la propia experiencia y los conocimientos previos desde el punto de vista de las competencias adquiridas o desarrolladas durante la realización del practicum.
11. Favorecer los procesos de interacción y de comunicación en el aula.
12. Alentar el esfuerzo del alumno y promover su capacidad de aprendizaje por sí mismo y mediante interacción entre iguales, de modo que le posibilite desarrollar habilidades de pensamiento y decisión, y de esta manera puedan facilitar su autonomía, confianza e iniciativa personal.
13. Detectar y analizar situaciones y dificultades que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y ritmos de aprendizaje y saber intervenir mediante una adecuada atención a la diversidad.

Cada objetivo se desarrolla lo largo del presente TFM con la finalidad de dar una visión específica y global de lo estudiado a lo largo del máster.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.

El análisis del currículo junto al de los libros de texto permite hacer una valoración de la transposición didáctica y detectar la existencia de posibles desviaciones, falta de objetivos presentes en el currículo, errores, estructura, tipos de ejercicios y problemas..., de forma que se valoren objetivamente estos libros respecto al currículo vigente.

3.1. Análisis del currículo.

La Unidad Didáctica de Trigonometría, que se desarrolla en el presente documento, está dirigida a alumnos de 4º de E.S.O. de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

En el anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se recogen todos los contenidos que deben ser explicados en las materias de las asignaturas troncales.

En concreto, en 4º de E.S.O de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, la materia se divide en 5 Bloques. Para desarrollar la Unidad de Trigonometría se sigue lo establecido en los bloques 1 y 3. En la tabla que se muestra a continuación se definen los distintos contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) La recogida ordenada y la organización de datos. b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje,	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o

	buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.
--	---	--

		12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

*Tabla 1. Bloque 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”. Bloque 3: “Geometría”.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º ESO. Elaboración propia*

Asimismo, en la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA Extraordinario nº 7 de 18/01/2021), por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, se encuentran los objetivos de la etapa, las estrategias metodológicas además de los contenidos, criterios de evaluación

y estándares de aprendizaje evaluable identificados anteriormente. Estos dos últimos aspectos se encuentran asociados a una competencia a desarrollar como se refleja en la siguiente tabla:

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) La recogida ordenada y la organización de datos. b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. CCL, CMCT. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. CMCT, CAA. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. CCL, CMCT, CAA. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. CMCT, CAA. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. CCL, CMCT, CAA, SIEP. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. CMCT, CAA, CSC, SIEP. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. CMCT, CAA. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. CMCT. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. CMCT, CAA, SIEP. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. CMCT, CAA, SIEP. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos,	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

	haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. CMCT, CD, CAA. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción. CCL, CMCT, CD, CAA.	6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar,
--	--	---

		analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. CMCT, CAA. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. CMCT, CEC, CAA. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas. CCL, CMCT, CD, CEC, CAA.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

*Tabla 2. Bloque 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”. Bloque 3: “Geometría”.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º ESO. Elaboración propia*

A modo resumen, se muestran los criterios de evaluación de ambos bloques relacionados con sus respectivas competencias:

<i>BLOQUE I: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS</i>	
CRITERIO DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA
1.1 Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
1.2 Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
1.3 Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
1.4 Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
1.5 Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
1.6 Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
1.7 Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	CMCT, CAA
1.8 Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
1.9 Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
1.10 Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
1.11 Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma	CMCT, CD, CAA

autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	
1.12 Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de estos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 3. Competencias criterios de evaluación del Bloque 1. Elaboración propia.

BLOQUE 3: GEOMETRÍA	
CRITERIO DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA
3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT, CAA
3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT, CAA
3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 4. Competencias criterios de evaluación del Bloque 3. Elaboración propia.

Las competencias existentes en ambos bloques son:

CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
CD	Competencia digital
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencia Sociales y Cívicas

Tabla 5. Competencias criterios de evaluación del Bloque 3. Elaboración propia.

3.2. Análisis libros de texto.

A continuación, se analiza el tema de Trigonometría en dos libros de texto que corresponden a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO. El libro es una herramienta que adquiere una gran importancia en la mayoría de los centros por ser un apoyo tanto para el profesorado como para el alumnado ya que permite desarrollar los contenidos matemáticos.

En el período de prácticas he utilizado la editorial Anaya principalmente, por ser de la que disponía el alumnado. Además, he consultado otras como SM, Santillana y Ecir para preparar el material de clase.

Los libros seleccionados para su comparación son:

1. 4º E.S.O. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Proyecto Suma Piezas. Proyecto Suma Piezas. Editorial Anaya (Colera et al., 2021)



Ilustración 1. Portada libro Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

2. 4º E.S.O. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Editorial SM Savia Digital (Alcaide-Guindo, Hernández-Gómez, Moreno-Warleta, Serrano-Marugán, Donaire-Moreno y Pérez, 2016).



Ilustración 2. Portada libro Editorial SM Savia Digital (Alcaide et al., 2016)

3.2.1 Editorial Anaya

La unidad 7 del libro de texto, cuyo contenido es el que sigue, es la dedicada a Trigonometría.

7 TRIGONOMETRÍA		Pág. 158
1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.....	160	
2. Relaciones trigonométricas fundamentales.....	162	
3. La calculadora en trigonometría.....	164	
4. Resolución de triángulos rectángulos.....	166	
5. Resolución de triángulos no rectángulos.....	167	
6. Razones trigonométricas de 0° a 360°.....	168	
7. Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas.....	171	
8. Funciones trigonométricas. El radián.....	172	
Ejercicios y problemas resueltos	174	
Ejercicios y problemas	175	
Taller de Matemáticas	180	
Autoevaluación	181	

Ilustración 3. Contenido Unidad 7 Trigonometría. Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Las unidades se estructuran de la siguiente forma:

Apertura de unidad. Cada unidad comienza con una breve introducción histórica de los contenidos que se van a estudiar. Incluye una sección denominada “Resuelve” donde se ofrecen actividades motivadoras con el fin de poner en funcionamiento los conocimientos previos que ya posee el alumnado.

Desarrollo de los contenidos y actividades. Existen epígrafes y subepígrafes. Los contenidos más importantes están resaltados. Para practicar los procedimientos más importantes se dispone de ejemplos y ejercicios resueltos. Los iconos incluidos en algunas actividades sugieren la clave del proyecto que puede aplicarse en cada caso.

Ejemplos de estos son:

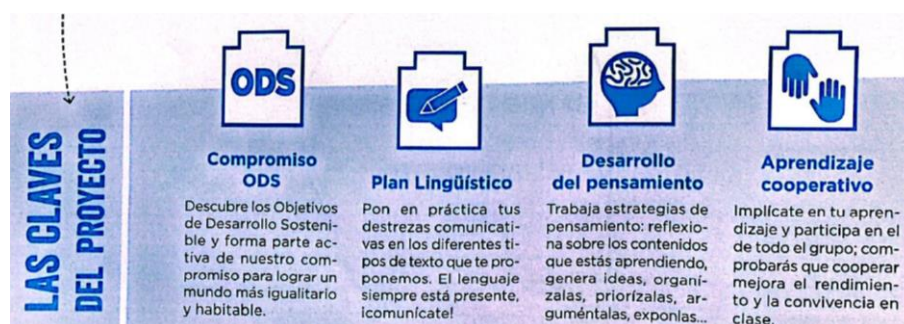


Ilustración 4. Iconos clave de proyecto. Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Ejercicios y problemas. Donde se muestran estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar que les serán útiles para enfrentarse a la resolución de problemas similares y se ponen en práctica.

Taller de matemáticas. Se pueden encontrar lecturas, actividades, consejos, etc. y entrenamientos resolviendo otros problemas. Para finalizar se puede realizar una autoevaluación donde comprobar si el aprendizaje ha sido el deseado.

En particular, la estructura de la unidad 7 es la siguiente:

1. Introducción sobre el origen de la trigonometría con unas cuestiones previas al comienzo al tema de resuelve.
2. Desarrollo de los contenidos especificados anteriormente con las siguientes características:
 - Se presentan de forma deductiva. Existen unos ejemplos que ponen en práctica lo explicado anteriormente.
 - Se plantean ejercicios de “Piensa y practica” y otros para emplear GeoGebra y recursos web, así como “Ejercicios y problemas resueltos”.
3. Para finalizar la unidad se dispone de “Ejercicios y problemas propuestos”, “Taller de matemáticas” y “Autoevaluación”.

Además, en el margen izquierdo, se presentan anotaciones de interés para el alumnado.

3 LA CALCULADORA EN TRIGONOMETRÍA

Las calculadoras científicas nos dan directamente el valor del seno, del coseno o de la tangente de cualquier ángulo. También nos dicen cuál es el ángulo del que conocemos el valor de una de sus razones trigonométricas. Veamos, paso a paso, cómo se recurre a la calculadora para trabajar en trigonometría.

→ **SELECCIÓN DEL MODO DEG (GRADOS SEXAGESIMALES)**

Las calculadoras manejan tres unidades de medida de ángulos:

- Grados sexagesimales (sex). Son los que utilizamos normalmente.
- Grados centesimales (cent). Un ángulo recto tiene 100 grados centesimales. Nunca usaremos esta unidad de medida.
- Radianes (rad). Esta unidad de medida de ángulos está relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas (funciones trigonométricas). En este curso utilizaremos, casi siempre, los grados sexagesimales. Por tanto, selección en la calculadora el modo DEG de la forma siguiente:

 Palamos 2 

Elegimos, entonces, el 1°Grado sexag (D).

→ **ANOTAR UN ÁNGULO. TECLA $\square$**

Para escribir el ángulo $38^\circ 25' 36''$, se procede así:

$38 \square 25 \square 36 \square \square$ 38,42666667

Al pulsar $\square$, obtenemos el ángulo en forma decimal. Si pulsamos $\square$, aparece el resultado en forma sexagesimal. Cada vez que pulsamos la tecla $\square$, aparece el resultado de una forma o de la otra.

→ **CÁLCULO DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA. TECLAS $\square$ $\square$ $\square$**

Para calcular $\sin(47^\circ 25')$, se procede así:

$\square 47 \square 25 \square \square$ 0,73629395121

Es decir, $\sin 47^\circ 25' = 0,736$

Asimismo, se procede con coseno, $\square$, y tangente, $\square$.

Etimología

- *sex*, del inglés *degrees*, que significa "grados" y se utiliza para los grados sexagesimales.
- *cent*, del inglés *grades*, y en castellano "grados". Se utiliza para los grados centesimales.

Atención

Si la calculadora está configurada con *Sistema Matemático*, nos da las razones trigonométricas de algunos ángulos mediante radianes. Por ejemplo:

$\square 30 \square \square$ 0,5

En algunas calculadoras antiguas, las teclas de las razones trigonométricas y su inversa se pulsan después del número correspondiente.

Para hallar $\sin 47^\circ$:

$\square 47 \square \square$

Piensa y practica

1. Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas:

a) $\sin 86^\circ$ b) $\cos 59^\circ$ c) $\tan 22^\circ$ d) $\sin 15^\circ 25' 43''$
e) $\cos 59^\circ 27'$ f) $\tan 86^\circ 52'$
g) $\sin 10^\circ 30'$ (atención, $10^\circ 0' 30''$)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1 Visión de la Tierra desde un satélite

Desde un satélite artificial se ve la Tierra bajo un ángulo de 140° . Calcula:

a) La distancia a la que se encuentra de la Tierra.

b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre hemos de subir para ver un lugar situado a 1000 km de distancia?

Radio de la Tierra: 6371 km

a) En el triángulo OTS:

$$\cos 20^\circ = \frac{OT}{OS} = \frac{R}{R+d}$$

$$R+d = \frac{R}{\cos 20^\circ} \rightarrow d = \frac{R}{\cos 20^\circ} - R = 408,88 \text{ km}$$

El satélite se encuentra a unos 410 km de la Tierra.

b) Un cuadrante de meridiano terrestre tiene 10000 km y corresponde a un ángulo de 90° . Por tanto, a un arco de 1000 km le corresponde un ángulo de 9° .

En $\triangle OTS$: $\cos 9^\circ = \frac{OT}{OS} = \frac{R}{R+d} \rightarrow R+d = \frac{R}{\cos 9^\circ} \rightarrow d = \frac{R}{\cos 9^\circ} - R \rightarrow d = 6371 \left(\frac{1}{\cos 9^\circ} - 1 \right) = 79,415 \text{ km}$

Deberíamos elevarnos unos 80 km.

2 Velocidad de un avión

Desde un punto P, observamos un avión que se acerca bajo un ángulo de 30° . Quince segundos después, el ángulo es de 55° . Si el avión vuela a 3000 m de altura, ¿cuál es su velocidad?

Hazlo tú Si conocemos la distancia $NM = 5000$ m y no sabemos a qué altura vuela el avión, ¿cómo podemos hallarla?

Para hallar la velocidad del avión, necesitamos calcular NM .

En el triángulo PMQ : $\tan 30^\circ = \frac{3000}{PQ} \rightarrow PQ = \frac{3000}{\tan 30^\circ} = 5196,15 \text{ m}$

En el triángulo PNR : $\tan 55^\circ = \frac{3000}{PR} \rightarrow PR = \frac{3000}{\tan 55^\circ} = 2100,62 \text{ m}$

$NM = PQ - PR = 3095,53 \text{ m} \rightarrow \text{velocidad} = \frac{3095,53}{15} = 206,37 \text{ m/s}$

3 Altura del árbol y anchura del río

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que formas con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo. Ahora son 23° .

Hacemos una representación. Llamamos x al ancho del río e y a la altura del árbol.

$\tan 41^\circ = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \cdot \tan 41^\circ$
 $\tan 23^\circ = \frac{y}{x+25} \rightarrow y = (x+25) \cdot \tan 23^\circ$

$x \cdot \tan 41^\circ = (x+25) \cdot \tan 23^\circ \rightarrow 0,87x = 0,42x + 25 \cdot 0,42 \rightarrow 0,45x = 10,5 \rightarrow x = 23,3; y = 23,3 \cdot 0,87 = 20,3$

Solución: El ancho del río es 23,3 m, y la altura del árbol, 20,3 m.

Hazlo tú Repite el problema con estos datos: 1ª medición, 50° ; camina 10 m; 2ª medición, 25° .

Ilustraciones 5 y 6. Página de contenidos de la unidad y ejercicios propuestos "Piensa y practica" del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2021)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

20 a) ¿Qué ángulo y en qué triángulo tiene por cateto contiguo ABE y por cateto opuesto BHF ?
b) Si $\frac{HC}{AC} = 5,4$ cm y $\angle C = 40^\circ$, halla BH , BC , AB y AH .

21 Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50° . ¿Cuánto mide el árbol?

22 Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60° . ¿A qué altura está la cometa?

23 Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

24 El radar de un barco detecta un objeto a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?

25 Halla la altura de la colina.

26 Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

27 Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

28 Calcula la altura, h , y el área de cada triángulo:

29 Esta señal nos indica una pendiente del 10%. Es decir, cada 100 m en horizontal se suben 10 m en vertical. ¿Qué ángulo corresponde a esa pendiente?

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

25 Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas:

a) 128° b) 198° c) 87°
d) 98° e) 285° f) 305°
g) 1320° h) 740° i) -105°

Compruébalo con la calculadora.

26 Explica en qué cuadrante está α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:

a) $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha < 0$ b) $\cos \alpha = -1/3$; $\tan \alpha > 0$
c) $\tan \alpha = -2$; $\sin \alpha > 0$ d) $\sin \alpha = -2/3$; $\alpha > 270^\circ$
e) Representa el ángulo α en una circunferencia goniométrica en cada caso.

27 Justifica en qué cuadrante está α , en cada caso, y calcula los restantes razones trigonométricas:

a) $\sin \alpha = 4/5$; $\alpha < 90^\circ$ b) $\cos \alpha = 2/3$; $\alpha > 270^\circ$
c) $\tan \alpha = 3$; $\alpha > 180^\circ$ d) $\cos \alpha = -3/4$; $\alpha < 180^\circ$

28 a) Expresa en radianes los ángulos de 30° , 45° , 60° y 90° a partir de la equivalencia $180^\circ = \pi$ rad.
b) Expresa en radianes los siguientes ángulos teniendo en cuenta que son múltiplos de los anteriores: 150° ; 135° ; 240° ; 300° y 270° .
c) Halla, con la calculadora, las razones de los ángulos del apartado anterior expresados en radianes.

29 a) Expresa en grados los siguientes ángulos:

$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$

b) Di cuál es el signo de sus razones trigonométricas.

30 Indica en qué cuadrante se encuentra el ángulo α en cada caso:

a) $\sin \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$ b) $\sin \alpha > 0$ y $\tan \alpha > 0$
c) $\sin \alpha < 0$ y $\tan \alpha > 0$ d) $\sin \alpha < 0$ y $\tan \alpha < 0$

31 Considera las siguientes razones trigonométricas:

• $\sin 25^\circ = 0,42$
• $\cos 25^\circ = 0,91$
• $\tan 25^\circ = 0,47$

Observa la figura e indica el valor de estas otras:

a) $\sin 205^\circ$ b) $\cos 65^\circ$ c) $\cos 245^\circ$
d) $\tan 115^\circ$ e) $\sin 295^\circ$ f) $\tan 335^\circ$

TALLER DE MATEMÁTICAS

LEE Y COMPRENDE

Geometrías varias

La geometría convencional e intuitiva, con la que analizamos el espacio próximo, es decir, lo que vemos a nuestro alrededor, se llama **geometría euclidiana**. Piensa, por ejemplo, en el principio *La suma de los ángulos de un triángulo vale 180°* , que es cierto cuando dibujas en un papel las rectas que unen tres puntos.

Sin embargo, hay otras geometrías, igual de consistentes desde el punto de vista teórico, pero más efectivas y realistas si se amplía el objetivo a la explicación del universo. Piensa ahora que construimos un triángulo mayor, sobre la superficie terrestre, con segmentos de círculos máximos. Los lados serían arcos de circunferencias, y podríamos enunciar el principio *La suma de los ángulos del triángulo es mayor que 180°* .

La geometría que asume este principio se le llama **geometría elíptica**.

Y si construimos un triángulo enorme, en un espacio curvo deformado por una masa estelar, o por un agujero negro (parece que así son las cosas en el universo), obtendríamos un triángulo diferente a los anteriores. En estas condiciones *La suma de los ángulos del triángulo es menor que 180°* . (Geometría hiperbólica).

GEOMETRÍA EUCLIDIANA
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

GEOMETRÍA ELÍPTICA
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$

La utilización de estas «otras» geometrías más generales, que engloban como caso particular a la euclidiana, ha permitido grandes avances de la física moderna (astrofísica, teoría de la relatividad, análisis de la propagación de ondas, etc.).

INFÓRMATE

Hiparco: padre de la trigonometría

Hiparco fue un astrónomo griego nacido en Nicaea (hoy Izmit, en Turquía) hacia el año 190 a.C.

Estableció su observatorio en la isla de Rodas (SE del mar Egeo), dedicando sus esfuerzos a medir las distancias y tamaños del Sol y la Luna. Para estos estudios, aplicó procedimientos matemáticos que pueden ser considerados como el punto de partida de la trigonometría.

COMPRENDE Y CALCULA

Fotos vía satélite

La península ibérica cabe en un círculo de 600 km de radio.

¿A qué altura debe colocarse un satélite para hacer una fotografía de la Península sabiendo que el objetivo de la cámara fotográfica tiene una amplitud de 120° ?

NOTA: Considera la Península como una superficie plana.

Ilustraciones 7 y 8. Ejercicios y problemas y "Taller de Matemáticas" del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2021)

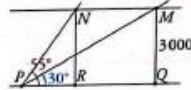
Un aspecto importante es que el libro muestra a lo largo de la unidad situaciones de la vida real donde se aplican conceptos matemáticos, de forma que capta la atención del alumnado sobre este tema novedoso para ellos. Asimismo, se emplean problemas con la resolución por pasos.

2 Velocidad de un avión

Desde un punto P , observamos un avión que se acerca bajo un ángulo de 30° . Quince segundos después, el ángulo es de 55° . Si el avión vuela a 3000 m de altura, ¿cuál es su velocidad?

Hazlo tú Si conocemos la distancia $NM = 5000$ m y no sabemos a qué altura vuela el avión, ¿cómo podemos hallarla?

Para hallar la velocidad del avión, necesitamos calcular NM .



En el triángulo PMQ : $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{3000}{PQ} \rightarrow \overline{PQ} = \frac{3000}{\operatorname{tg} 30^\circ} \rightarrow \overline{PQ} = 5196,15$ m

En el triángulo PNR : $\operatorname{tg} 55^\circ = \frac{3000}{PR} \rightarrow \overline{PR} = \frac{3000}{\operatorname{tg} 55^\circ} \rightarrow \overline{PR} = 2100,62$ m

$\overline{NM} = \overline{PQ} - \overline{PR} = 3095,53$ m $\rightarrow$ velocidad = $\frac{3095,53}{15} = 206,37$ m/s

3 Altura del árbol y anchura del río

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo. Ahora son 23° .



Hacemos una representación.

Llamamos x al ancho del río e y a la altura del árbol.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 41^\circ = y/x \\ \operatorname{tg} 23^\circ = y/(x + 25) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x \cdot 0,87 \\ y = (x + 25) \cdot 0,42 \end{array} \right\} \rightarrow 0,87x = 0,42x + 25 \cdot 0,42 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,45x = 10,5 \rightarrow x = 23,3; y = 23,3 \cdot 0,87 = 20,3$$

Solución: El ancho del río es 23,3 m, y la altura del árbol, 20,3 m.

Hazlo tú Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50° ; camina 10 m; 2.ª medición, 25° .

Ilustración 9. Ejercicios resueltos del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2021)

Resulta destacable la forma de comenzar la unidad ya que en lugar de explicar las medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes, tal y como indica el RD 1105/2014, se definen las razones trigonométricas de un ángulo agudo, siendo el punto 8 de la unidad donde se introduce el concepto de radián. La explicación por tanto se realiza desde un punto de vista geométrico (razón entre dos lados de un triángulo rectángulo). La definición analítica mediante la circunferencia goniométrica se realiza en el punto 6, cuando sería más lógico partir de ahí. No obstante, hay un apartado al final del punto 1 donde se dibuja sobre papel milimetrado un cuadrante de circunferencia de radio 10 cm, que se toma como unidad, para calcular las razones trigonométricas del ángulo 34° .

Se puede concluir que el alumnado dispone de una gran diversidad de ejercicios, de carácter individual, para practicar los contenidos explicados en el libro. Una vez finalizado el bloque de contenidos aparece una sección de ejercicios y problemas identificados por su nivel de dificultad sirviendo esto de ayuda poder utilizarlos con los estudiantes dependiendo de su nivel de aprendizaje. Además, existen recursos en la web

para Geogebra. Con la sección “Taller de Matemáticas” se busca introducir elementos innovadores y conseguir la activación de capacidades como la autoestima, la creatividad o la motivación. No obstante, podría recomendarse la inclusión de actividades que fomenten un trabajo cooperativo.

3.2.2 Editorial SM Savia Digital

En este libro de texto, la Trigonometría se estudia en dos unidades distintas: Unidad 5 “Semejanza y trigonometría” y Unidad 6 “Aplicaciones de la trigonometría”.

La estructura de las unidades es la siguiente:

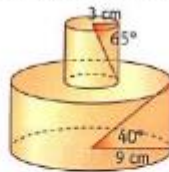
1. Introducción sobre el contenido de la unidad y anécdotas relacionadas con trigonometría. En este punto difiere con el libro de Anaya.
2. Desarrollo de los contenidos con las siguientes características:
 - Se presentan de forma deductiva. Existen unos ejemplos que ponen en práctica lo explicado anteriormente.
 - Ejercicios.
 - Se plantean ejercicios de para practicar con GeoGebra y recursos web.
 - Secciones: “Organiza tus ideas” y “Actividades Clave”. La primera presenta conceptos clave y la segunda ofrece actividades tipo para poner en práctica dichos conceptos.
3. Para finalizar la unidad se dispone de ejercicios y problemas y una autoevaluación denominada “Ponte a prueba”.

Se puede observar a diferencia del otro libro de texto la inclusión de la sección donde se resumen los conceptos clave de la unidad, muy útil para la asimilación de estos por parte del alumnado.

En este libro se comienza la unidad explicando las medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes, tal y como indica el RD 1105/2014 y posteriormente se definen las razones trigonométricas de un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo (como se determinó en el libro de Anaya). A continuación, se trata desde el punto de vista analítico mediante la circunferencia goniométrica.

Existe una unidad independiente a las mencionadas anteriormente donde se plantean distintos problemas de aplicación de trigonometría en situaciones de la vida real.

5. Calcula el área y el volumen del cuerpo geométrico:



6. La Luna tiene una superficie de 38000000 km^2 y se encuentra a 380000 km de la Tierra. ¿Qué ángulo ocupa en el cielo?



Ilustración 10. Problemas aplicaciones de la trigonometría Libro Editorial SM Savia Digital (Alcaide et al., 2016)

Al igual que ocurre con el libro de Anaya, integra muchos recursos web y de Geogebra pero no se incluyen actividades para trabajo en cooperativo.

3.2.3 Conclusiones del análisis.

Sobre la contextualización del tema dentro del desarrollo propuesto del currículo, en ambas editoriales se encuentra la unidad de la semejanza antes que la de trigonometría y posteriormente la unidad de geometría analítica.

Se observa que los autores no emplean la historia de las matemáticas como medio práctico para generar motivación en el alumnado, de forma que entiendan el fundamento y el porqué de los nuevos conceptos

Se detecta que existen contenidos no incluidos en los marcados por el RD1105/2014, perteneciendo estos a 1º de Bachillerato de Matemáticas I. En la siguiente tabla se comparan los puntos esenciales del análisis que hemos realizado para estas dos editoriales:

Editorial Anaya	Editorial SM Savia Digital
Unidad 7: Trigonometría	Unidad 5: Semejanza y trigonometría
Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones trigonométricas fundamentales. La calculadora en trigonometría. Resolución de triángulos rectángulos. Resolución de triángulos no rectángulos. Razones trigonométricas de 0 a 360 Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas. Funciones trigonométricas. El radián.	Figuras semejantes. Teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos. Consecuencias. Medida de ángulos: Aplicación de la razón de semejanza. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Identidades trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas
	Unidad 6: Aplicaciones de la trigonometría
	Resolución de triángulos rectángulos. Teorema del seno y del coseno. Resolución de triángulos cualesquiera. Aplicaciones de la trigonometría: longitudes, áreas y volúmenes.
Nota: El texto marcado en verde no corresponde al temario de 4ºESO según RD 1105/2014.	

Tabla 6. Comparativa contenidos trigonometría entre las dos editoriales. Elaboración propia.

Se puede apreciar cómo la definición de radián en ambos libros de texto es sencilla, pero se emplean distintas expresiones gramaticales.

■ El radián

La unidad de medida de ángulos que acabamos de ver es el *radián* y se define así:

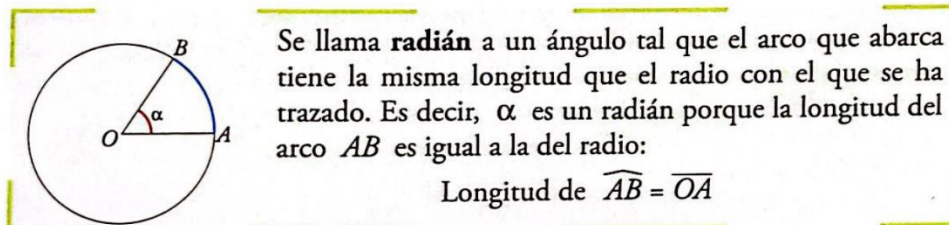


Ilustración 11. Definición de radián. Libro Editorial Anaya (Colera et al., 2021)

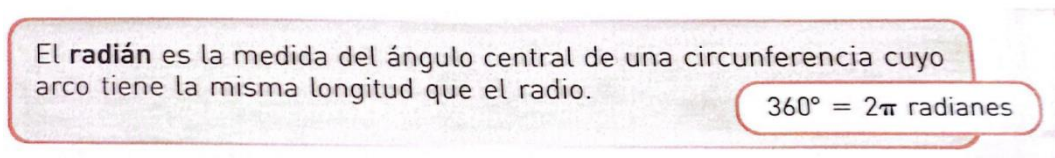


Ilustración 12. Definición de radián. Libro Editorial SM Savia Digital (Alcaide et al.)

Las dos editoriales clasifican los problemas de forma que el alumnado conoce la metodología a emplear sin leer el enunciado a excepción de los ejercicios de autoevaluación.

En general, se puede concluir que existe una muestra representativa de actividades y aplicaciones, se emplea un lenguaje adecuado al nivel académico con unas definiciones y procedimientos claros y presentando una correcta conexión entre todos los elementos de la unidad.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.

Con la finalidad de profundizar en el “saber sabio” matemático de la trigonometría, se procede a desarrollar el tema 38: Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones.

4.1 *Introducción*

“No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las Ciencias Matemáticas.” (Vinci, s.f.)

Aunque la historia de la trigonometría y de las funciones trigonométricas se extiende por más de 3000 años a través de los babilonios y los egipcios, fue desarrollada por los astrónomos griegos, quienes consideraban el firmamento como el interior de una esfera, por lo que fue natural que los triángulos sobre la esfera se estudiaran tempranamente (por Menelao de Alejandría alrededor del año 100 d.C.) y que los triángulos sobre un plano se estudiaran mucho después. El primer libro con un tratamiento sistemático de la trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasîr ed-dîn (aproximadamente en el año 1250 d.C)

A Regiomontano (1436-1476) se le atribuye haber llevado la trigonometría al campo de las matemáticas. Su trabajo fue mejorado por Copérnico. El libro de Retico fue el primero en definir las seis funciones trigonométricas como relaciones entre los lados de un triángulo, aunque no fue ahí donde recibieron sus nombres actuales. El crédito de esto se le debe a Thomas Fincke(1583) aunque en su época no se aceptó universalmente la notación utilizada por él. La notación actual se estableció finalmente en los libros de texto de Leonhard Euler (1707-1783).

La trigonometría ha evolucionado desde entonces, de ser usada por topógrafos, navegantes e ingenieros hasta las aplicaciones actuales en el estudio, por ejemplo, de las mareas oceánicas, el alza y caída de la producción de alimentos en ciertos ambientes ecológicos, los patrones de ondas cerebrales y otros muchos fenómenos.

Existen dos enfoques ampliamente aceptados para la introducción de las funciones trigonométricas: emplear círculos, en particular el círculo unitario, o triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo es hallar 3 de los 6 elementos de los que se compone (tres ángulos y tres lados) conociendo los otros tres. Para que este problema general sea determinado, se necesita que entre los datos al menos haya un lado. De otro modo, el número de soluciones sería infinito, pues todos los triángulos semejantes tienen sus ángulos respectivamente iguales. La resolución numérica de un triángulo exige necesariamente fórmulas que ligen entre sí los seis elementos (lados y ángulos) que lo forman. Aunque en el tema 37 de oposición se ven las razones trigonométricas de un ángulo, se incluye en este el último epígrafe del tema anterior ya que el título de este tema “Trigonometría plana” requiere hablar de las razones trigonométricas de un ángulo, así como de las fórmulas generales de la trigonometría que junto con los teoremas relativos a triángulos permiten resolverlos.

4.2 El arco y el ángulo.

4.2.1. Definiciones.

Se define arco circular como toda porción de circunferencia que está limitada por dos puntos llamados extremos. Dos puntos limitan dos arcos en la circunferencia. Para determinar un arco hay que dar un punto interior además de los extremos.

Se define ángulo como la porción del plano comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen.

Dos semirrectas con un origen común determinan siempre dos porciones del plano y por tanto dos ángulos, α y β . Al ángulo α se le llama ángulo convexo, mientras que el ángulo β es cóncavo.

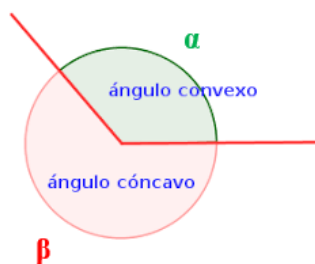


Ilustración 13. Ángulo cóncavo y ángulo convexo. Fuente: <https://es.plusmaths.com/angulo-concavo.html>

4.2.2. Unidades de medida.

Para medir los arcos y los ángulos se emplean tres escalas de medida, todas basadas en la circunferencia:

1. Grados sexagesimales: el valor de un ángulo en grados sexagesimales se basa en asignar al ángulo de una circunferencia el valor de 360° . Para calcular el ángulo formado por dos semirrectas se hace por proporcionalidad entre la superficie del sector circular y el círculo de mismo radio: $\alpha = 360^\circ \cdot \text{área sector} / \text{área círculo}$.
2. Grados centesimales: en esta escala la circunferencia forma un ángulo de 400° . Al igual que los grados sexagesimales se calcula por proporcionalidad con el área del sector que ocupa y el del círculo de mismo radio: $\alpha = 400^\circ \cdot \text{área sector} / \text{área círculo}$.
3. Radianes: un radian es el ángulo que hace que el arco que ocupa el ángulo sea igual al radio de la circunferencia. En una circunferencia hay 2π rad, luego podemos calcular de forma equivalente a los casos anteriores los grados en radianes como $\alpha = 2\pi \cdot \text{área sector} / \text{área círculo}$.

Si en una circunferencia de centro O, al que se denomina origen, se considera una unidad de medida para los arcos y un sentido del recorrido, diremos que la circunferencia está orientada. El sentido de la orientación se dice positivo si el recorrido es en sentido contrario a las agujas del reloj y sentido negativo en caso contrario. Al igual ocurre en los ángulos.

Un ángulo agudo es un ángulo cuya medida está entre 0° y 90° . Un ángulo recto es un ángulo que mide 90° . Un ángulo obtuso es un ángulo que mide entre 90° y 180° . Un ángulo llano es el que mide 180° . Cuando la suma de la medida de dos ángulos es 90° se dice que son complementarios y cuando la suma es 180° , suplementarios.

Si dos rectas se intersecan los ángulos enfrentados se llaman opuestos. Cuando los dos ángulos tienen el origen y un lado en común se denominan adyacentes.

4.2.3. Rango de un ángulo.

Desde un punto de vista geométrico los ángulos están definidos entre el ángulo nulo, el interior de dos semirrectas coincidentes ($0^\circ=0^\circ g=0\text{rad}$) y el ángulo abarcado por toda la circunferencia exterior de las anteriores dos semirrectas ($360^\circ=400^\circ g=2\pi\text{rad}$).

Si el estudio se hace desde un punto de vista analítico (funciones circulares) el ángulo puede tomar cualquier valor real, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si queremos definir a un ángulo fuera del rango $[0,360^\circ)$ de manera geométrica no tenemos más que tomar módulo 360, es decir quedarnos con el resto de dividir el valor de α entre 360° . Ejemplo: $760^\circ=40^\circ$.

El ángulo tiene como referencia una recta que gira en torno al origen del sistema cartesiano. Ese giro es fundamental para determinar el signo de este ya que, el sentido en el que gira permite identificar los ángulos positivos y negativos en el plano cartesiano. Por lo tanto, nos encontramos con dos tipos de ángulos:

Ángulos positivos: Giros en sentido antihorario. La magnitud de dicho ángulo se toma desde el eje de abscisas hasta el punto en la recta más cercano al seguir el giro en el sentido mencionado.

Ángulos negativos: Giros en sentido horario. En este caso, se toma tomando como referencia el eje de las abscisas y la magnitud es que existe entre el eje ya mencionado y el punto de la recta más cercano en el sentido de las agujas del reloj.

4.3 Propiedades fundamentales de los triángulos.

Definición de triángulo: en geometría plana, es un polígono con tres lados.

Un triángulo dispone, entre otros elementos, de tres ángulos interiores, tres lados y tres vértices.

Clasificación de los triángulos: se pueden clasificar en función de dos aspectos.

1. Por la medida de sus lados:
 - Triángulo equilátero: los tres lados tienen la misma longitud.
 - Triángulo isósceles: dos lados miden igual.
 - Triángulo escaleno: los tres lados tienen longitudes distintas.
2. Por la amplitud de sus ángulos:
 - Triángulo rectángulo: dispone de un ángulo interior recto (90°).
 - Triángulo oblicuángulo: ninguno de sus ángulos interiores es recto.
 - Triángulo obtusángulo: cuando uno de sus ángulos interiores es obtuso ($>90^\circ$). Los otros dos son agudos.
 - Triángulo acutángulo: sus tres ángulos interiores son agudos ($<90^\circ$).

Existen tres propiedades fundamentales (teoremas) para la resolución de los triángulos son: *Teorema de Pitágoras*, *Teorema de los ángulos de un triángulo* y *Teorema de Tales*

Teorema de Pitágoras: Es uno de los teoremas más importantes en las matemáticas. Permite relacionar los lados de un triángulo rectángulo usando una ecuación algebraica. En todo triángulo rectángulo (un ángulo recto o de 90°) el cuadrado de la hipotenusa (el opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los otros dos lados). $a^2=b^2+c^2$

Demostración: aunque se trata de uno de los teoremas más demostrados, a continuación, se utiliza la más clásica y sencilla. Está basada en el cálculo del área de un cuadrado de lado $(b+c)$ compuesto por 4 triángulos rectángulos (de lados a , b y c) y un cuadrado de lado c .

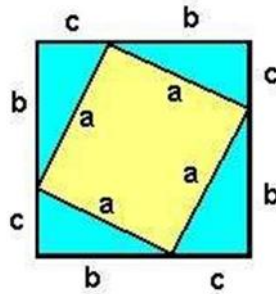


Ilustración 14. Tema 38. Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones. Fuente: José Luis Lorente (www.joseluislorente.es)

$$\text{Área total} = a_{\text{cuadrado grande}} = (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c$$

$$\text{Área total} = a_{\text{cuadrado pequeño}} + 4 \cdot a_{\text{triángulo}} = a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = a^2 + 2 \cdot b \cdot c$$

$$\text{Igualando: } b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c = a^2 + 2 \cdot b \cdot c,$$

$$\text{Despejando: } \boxed{a^2 = b^2 + c^2} \text{ csqd. } \square$$

Teorema de los ángulos: la suma de los ángulos de todo triángulo es 180° :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Demostración: Se traza por un vértice del triángulo una recta paralela al lado opuesto, formándose tres ángulos que por paralelismo son iguales a los del triángulo, y por tanto suma un ángulo llano, es decir 180° :

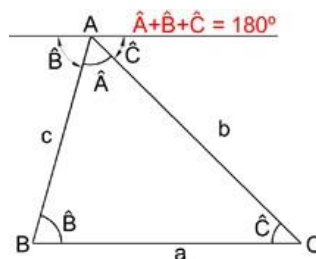


Ilustración 15. Tema 38. Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones. Fuente: José Luis Lorente (www.joseluislorente.es)

Teorema de Tales: Establece la proporcionalidad entre las longitudes de los lados de triángulos semejantes (los que tienen similar forma). Uno de los criterios de semejanza en triángulos rectángulos es que tengan entre sí un ángulo común (además del ángulo recto). Como los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, por tanto, sabiendo el ángulo de este triángulo rectángulo quedarán determinados los valores de las relaciones de los lados de cualquier triángulo rectángulo con este ángulo fijado.

Estas razones entre los lados se llaman razones trigonométricas:

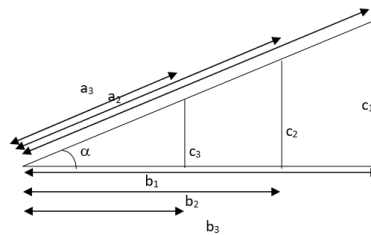


Ilustración 16. Tema 38. Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones. José Luis Lorente (www.joseluislorente.es)

4.4 Razones trigonométricas

4.4.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Seno: Se define el seno de un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo, como la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c1}{a1} = \frac{c2}{a2} = \frac{c3}{a3}$$

Coseno: Se define el coseno de un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo, como la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b1}{a1} = \frac{b2}{a2} = \frac{b3}{a3}$$

Tangente: Se define la tangente de un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo, como la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{c1}{b1} = \frac{c2}{b2} = \frac{c3}{b3}$$

Teorema: las razones trigonométricas de un ángulo son independientes de las longitudes de sus lados, solo dependen de la medida del ángulo.

A partir del teorema de Pitágoras se sabe que el valor de la hipotenusa (a) de un triángulo es mayor que el de los dos catetos (b y c), por tanto, se cumple que: $0 < \sin(\alpha) < 1$, $0 < \cos(\alpha) < 1$ cuando $\alpha \in (0, 90^\circ)$.

A partir de estas razones trigonométricas fundamentales se definen las siguientes:

Cosecante: Se define la cosecante de un ángulo agudo α como la inversa del seno, es decir, como la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Secante: Se define la secante de un ángulo agudo α como la inversa del coseno, es decir, como la razón entre la hipotenusa y el cateto contiguo.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

Cotangente: Se define la cotangente de un ángulo agudo α como la inversa de la tangente, es decir, como la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

Relación entre el seno, coseno y la tangente de un ángulo.

Según las definiciones anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c1}{a1}, \\ \cos \alpha &= \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b1}{a1}.\end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro nos queda:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c1}{b1} = \tan \alpha.$$

Elevando cada miembro al cuadrado y sumando nos queda:

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \left(\frac{c1}{a1}\right)^2 + \left(\frac{b1}{a1}\right)^2 = \frac{c1^2 + b1^2}{a1^2} = \frac{a1^2}{a1^2} = 1,$$

donde se aplica el teorema de Pitágoras quedando la expresión de la siguiente forma:

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

se conoce como fórmula fundamental de la trigonometría.

4.4.2. Razones trigonométricas de cualquier ángulo.

De forma alternativa, la definición de las razones trigonométricas de un ángulo genérico (agudo o no) se puede formular utilizando una circunferencia de radio 1 centrada en el origen trazada sobre unos ejes cartesianos (a tal circunferencia se la denomina circunferencia goniométrica):

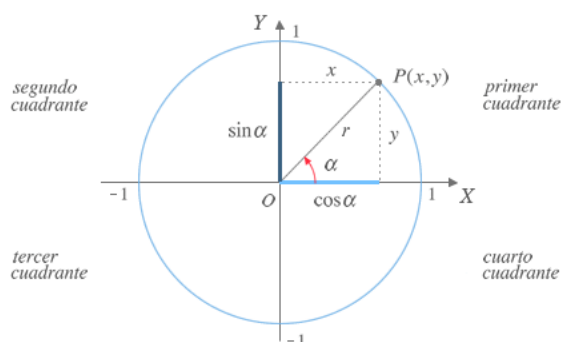


Ilustración 17. Razones trigonométricas de cualquier ángulo. Fuente: <https://www.fisicalab.com>

Si $P(x,y)$ es un punto de la circunferencia, se tiene:

$\text{sen } \alpha = y$	$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{y}$
$\cos \alpha = x$	$\sec \alpha = \frac{1}{x}$
$\tan \alpha = \frac{y}{x}$	$\cotan \alpha = \frac{1}{y}$

Basándonos en esto podemos estudiar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo:

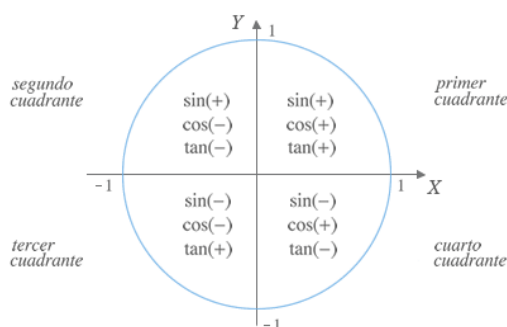


Ilustración 18. Signos de las razones trigonométricas de un ángulo. Fuente: <https://www.fisicalab.com>

4.4.3. Razones trigonométricas de ángulos complementarios.

Dos ángulos se dicen complementarios si su suma es el ángulo recto 90° ($\frac{\pi}{2} \text{ rad}$). Es decir, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

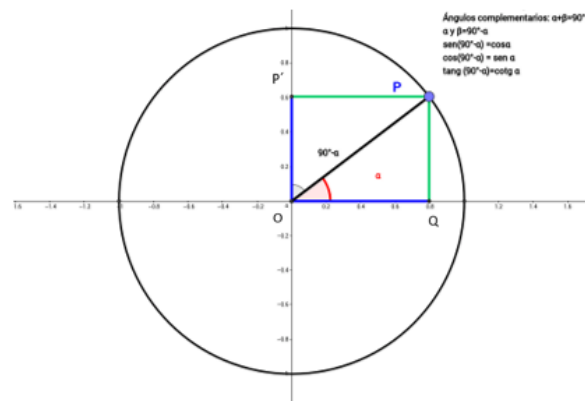


Ilustración 19. Razones trigonométricas de ángulos complementarios. GeoGebra. Elaboración propia.

Sea β el ángulo complementario de α , siendo $\beta = 90^\circ - \alpha$, las razones trigonométricas del ángulo complementario se pueden obtener en función de las razones trigonométricas de α tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= x = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= y = \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \frac{x}{y} = \cotan \alpha.\end{aligned}$$

Basta con tener en cuenta que los triángulos ΔPQO y $\Delta P'Q'O$ son iguales.

4.4.4. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios.

Dos ángulos se dicen suplementarios si su suma es el ángulo 180° ($\pi \text{ rad}$). Es decir, $\alpha + \beta = 180^\circ$.

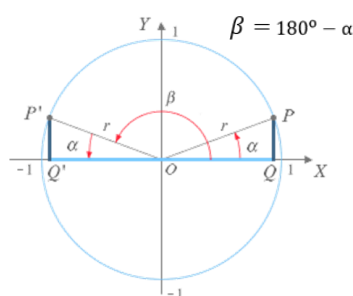


Ilustración 20. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios. Fuente: <https://www.fisicalab.com>

Sea β el ángulo suplementario de α , siendo $\beta = 180^\circ - \alpha$, las razones trigonométricas del ángulo suplementario se pueden obtener en función de las razones trigonométricas de α tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= y = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -x = -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\frac{y}{x} = -\tan \alpha\end{aligned}$$

Al igual que con los ángulos complementarios, basta con tener en cuenta que los triángulos ΔPQO y $\Delta P'Q'O$ son iguales

4.4.5. Razones trigonométricas de ángulos que difieren π .

Sean α y β dos ángulos tales que $\beta - \alpha = 180^\circ$ (π rad). Es decir, $\beta = 180^\circ + \alpha$.

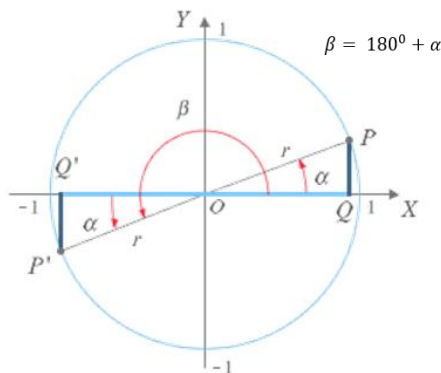


Ilustración 21. Razones trigonométricas de ángulos que difieren π . Fuente: <https://www.fisicalab.com>

Se puede observar en la figura que los triángulos ΔPQO y $\Delta P'Q'O$ son iguales, por lo tanto, se cumple que:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -y = -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -x = -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \frac{y}{x} = \tan \alpha\end{aligned}$$

4.4.6. Razones trigonométricas de ángulos que suman 2π .

Sean α y β dos ángulos tales que $\alpha + \beta = 360$ (2π rad). Es decir, $\beta = 360^\circ - \alpha$.

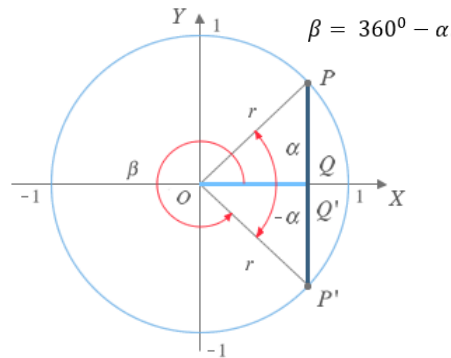


Ilustración 22. Razones trigonométricas de ángulos que suman 2π . Fuente: <https://www.fiscalab.com>

Se puede observar en la figura que los triángulos ΔPQO y $\Delta P'Q'O$ son iguales, por lo tanto, se cumple que:

$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \alpha) &= -y = -\sin \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= x = \cos \alpha \\ \tan(360^\circ - \alpha) &= \frac{-y}{x} = -\tan \alpha\end{aligned}$$

4.4.7. Razones trigonométricas de ángulos cuya diferencia es $\pi/2$.

Sean los ángulos α y β tales que $\beta - \alpha = 90^\circ$ ($\frac{\pi}{2}$ rad). Es decir, $\beta = 90^\circ + \alpha$.

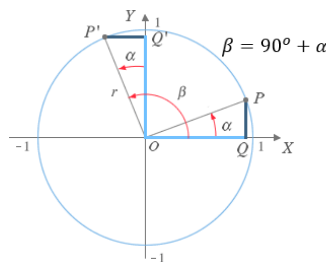


Ilustración 23. Razones trigonométricas de ángulos cuya diferencia es $\pi/2$. Fuente: <https://www.fiscalab.com>

Se puede observar en la figura que los triángulos ΔPQO y $\Delta P'Q'O$ son iguales, por lo tanto, se cumple que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) &= x = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -y = -\operatorname{sen} \alpha \\ \tan(90^\circ + \alpha) &= \frac{-x}{y} = -\cotan \alpha\end{aligned}$$

4.5 Fórmulas generales de trigonometría plana

4.5.1. Razones trigonométricas del ángulo $(\alpha + \beta)$.

Sean α y β dos ángulos como se muestran en la figura:

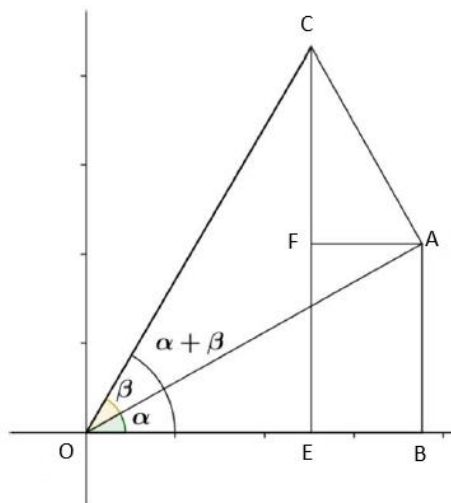


Ilustración 24. Razones trigonométricas del ángulo suma. Elaboración propia

Entonces se puede escribir:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CF} + \overline{FE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{FE}}{\overline{OC}},$$

como

$$\overline{CF} = \overline{CA} \cdot \cos \alpha \quad \text{y} \quad \overline{FE} = \overline{AB} = \overline{OA} \cdot \sin \alpha,$$

sustituyendo,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{CA}}{\overline{OC}} \cdot \cos \alpha + \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \cdot \sin \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Razonando de igual forma se obtiene:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB} - \overline{EB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} - \frac{\overline{EB}}{\overline{OC}},$$

como

$$\overline{OB} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha \quad \text{y} \quad \overline{EB} = \overline{FA} = \overline{CA} \cdot \sin \alpha,$$

sustituyendo,

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \cdot \cos \alpha - \frac{\overline{CA}}{\overline{OC}} \cdot \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Dividiendo las expresiones anteriores:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

y dividiendo numerador y denominador por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ se obtiene:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{(\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}$$

Simplificando:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

4.5.2. Razones trigonométricas del ángulo opuesto $(-\alpha)$.

Se representa el ángulo α y su opuesto $(-\alpha)$ en la siguiente figura:

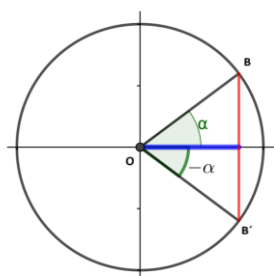


Ilustración 25. Razones trigonométricas del ángulo opuesto. Elaboración propia

$$OB = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \cos(\alpha)\vec{i} + \operatorname{sen}(\alpha)\vec{j}$$

$$OB = x \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} = \cos(-\alpha)\vec{i} + \operatorname{sen}(-\alpha)\vec{j}.$$

Por simetría respecto del eje OX:

$$OB = x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j},$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

4.5.3. Razones trigonométricas del ángulo $(\alpha - \beta)$.

Haciendo uso de las fórmulas anteriores y sustituyendo $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, se obtiene:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha + (-\beta)) = \text{sen } \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \text{sen}(-\beta),$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta$$

Análogamente:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen}(-\beta),$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen} \beta$$

De la misma forma, se deduce:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(-\beta)},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

4.5.4. Razones trigonométricas del ángulo doble 2α .

Si sustituimos α por β en las fórmulas de la suma:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos(2\alpha) &= (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 \\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 - (\tan(\alpha))^2}\end{aligned}$$

4.5.5. Razones trigonométricas del ángulo mitad $\alpha/2$.

Partiendo de la fórmula del ángulo doble:

$$\cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2$$

y la fórmula Fundamental de Trigonometría:

$$1 = (\cos a)^2 + (\sin a)^2,$$

si se restan, se simplifica de la siguiente forma:

$$1 - \cos(2a) = 2(\sin a)^2 \Rightarrow \sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos(2a)}{2}}.$$

Si se suman, se simplifica de la siguiente forma:

$$1 + \cos(2a) = 2(\cos a)^2 \Rightarrow \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos(2a)}{2}}.$$

Haciendo $2a = \alpha$ y sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

4.5.6. Transformaciones en producto de la suma y diferencia de razones trigonométricas.

Estas transformaciones convierten las sumas y diferencias de razones trigonométricas en productos; muy útil, por ejemplo, si es necesario utilizar logaritmos.

Partiendo de las fórmulas vistas en los puntos anteriores se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta .$$

Sumando y restando:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta .$$

Si se resuelve partiendo del coseno de la suma y de la resta:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta .$$

Sumando y restando:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Si se llama $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$, entonces $\frac{A+B}{2} = \alpha$ y $\frac{A-B}{2} = \beta$ y sustituimos en las fórmulas anteriores, se obtiene las fórmulas de la transformación buscadas para el seno y el coseno:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

Para la tangente se verifica lo siguiente:

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B},$$

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B}.$$

Y de la misma manera:

$$\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B}$$

Para hallar la suma o diferencia de un seno y de un coseno, se cambia uno de estos por el coseno o el seno de su complementario. Por ejemplo:

$$\sin A + \sin \left(\frac{\pi}{2} - B \right) = 2 \sin \frac{A + \left(\frac{\pi}{2} - B \right)}{2} \cdot \cos \frac{A - \left(\frac{\pi}{2} - B \right)}{2}.$$

Con lo que queda:

$$\sin A + \cos B = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

4.5.7. Transformaciones en suma de los productos de razones trigonométricas.

Al igual que en el apartado anterior, se parte de:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta .\end{aligned}$$

Se suma y se divide entre 2, obteniéndose:

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)].$$

De igual manera se llega a:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

4.6 Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.

4.6.1. Teorema del seno.

Teorema: Los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos. La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Por lo tanto, en cualquier triángulo ABC donde las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a , b , c , se cumple que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Demostración:

Sea el siguiente triángulo ABC:

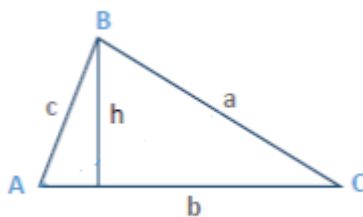


Ilustración 26. Representación del triángulo acutángulo ABC. Elaboración propia.

Si se traza la altura h desde el vértice B se obtienen dos triángulos rectángulos AHC y BHC y se verifica que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen} A, \quad \operatorname{sen} C = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen} C,$$

igualando:

$$c \cdot \operatorname{sen} A = a \cdot \operatorname{sen} C,$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

En el caso que el trazado de la altura se realiza desde el vértice A:

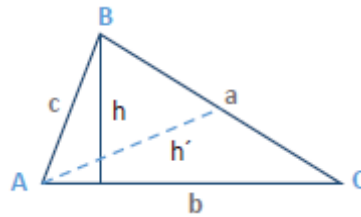


Ilustración 27. Representación del triángulo acutángulo ABC. Elaboración propia.

y razonando de igual modo, se llega a:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}.$$

Por consiguiente, en el triángulo ABC se verifica que:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

En el caso de que uno de los ángulos del triángulo sea obtusángulo, se procede de forma análoga, pero cambiando $\hat{C}$ por $\pi - \hat{C}$, ya que se aplica que dos ángulos suplementarios tienen el mismo seno.

A continuación, se demuestra que la constante de proporcionalidad es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

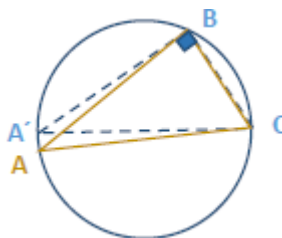


Ilustración 28. Circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Elaboración propia.

En este caso, el ángulo $\hat{B} = 90^\circ$ del triángulo $A'BC$ y $\hat{A}=\hat{A}'$ pues son ángulos inscritos que abarcan el mismo arco BC . Obtenemos aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{a}{\text{sen } A'}.$$

En el triángulo $A'BC$ por ser rectángulo e inscrito en la circunferencia se tiene

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{2R}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{a}{\text{sen } A'},$$

entonces

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R}$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita.

4.6.2. Teorema del coseno.

Teorema: El cuadrado del lado opuesto a un ángulo de un triángulo es la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto del coseno de dicho ángulo por los otros dos lados.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Demostración:

Sea el siguiente triángulo ABC:

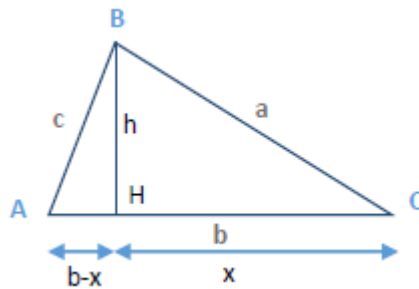


Ilustración 29. Representación del triángulo acutángulo ABC. Elaboración propia.

Sea “h” la altura desde el vértice B.

Obtenemos dos triángulos rectángulos: AHB y CHB a los cuales aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos respectivamente:

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2,$$

$$a^2 = h^2 + x^2.$$

Sustituyendo el valor de h de la segunda igualdad en la primera y simplificando se obtiene:

$$c^2 - (b - x)^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow c^2 - b^2 - x^2 + 2bx = a^2 - x^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

Por lo tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

En el triángulo BHC se verifica:

$$\cos C = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos C,$$

sustituyendo en la igualdad anterior se obtiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Análogamente, se demostraría que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

En el caso de que uno de los ángulos del triángulo sea obtusángulo:

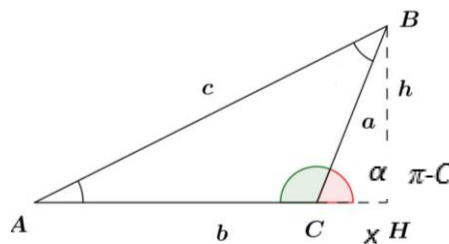


Ilustración 30. Representación del triángulo obtusángulo ABC. Elaboración propia.

Se traza la altura correspondiente al vértice C. Se obtienen los triángulos AHB y BHC que son rectángulos, y por lo tanto se tiene:

$$h^2 = a^2 - x^2,$$

$$c^2 = h^2 + (b + x)^2 = h^2 + b^2 + x^2 + 2bx = a^2 + b^2 + 2bx.$$

En el triángulo BHC se verifica que $\alpha = \pi - C$ entonces:

$$\cos \alpha = \cos (\pi - C) = -\cos C = \frac{x}{a} \Rightarrow x = -a \cdot \cos C,$$

obteniéndose:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Análogamente se obtienen las otras dos expresiones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

De las fórmulas anteriores se puede despejar los cosenos de los ángulos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4.6.3. Teorema de la tangente.

Teorema: En un triángulo cualquiera, la suma de dos de sus lados entre su diferencia es igual a la tangente de la semisuma de sus ángulos opuestos dividido entre la tangente de la semidiferencia de dichos ángulos.

Demostración:

De la igualdad obtenida anteriormente en el Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

y aplicando que en toda proporción la suma de antecedentes es a su diferencia como la suma de consecuentes es a su diferencia, se tiene:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}$$

y donde se obtiene simplificando:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

4.6.4. Fórmula de Briggs.

Teorema: Existe una relación entre la tangente de los tres ángulos mitad del triángulo con los tres lados (a, b y c).

Por lo tanto, permite calcular los ángulos de un triángulo conocidos los tres lados.

Demostración:

Del teorema del coseno se sabe que

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Si en la expresión anterior sumamos 1 y le restamos 1 a los miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} \\ &= \frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a)}{2bc} \\ 1 - \cos A &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \\ &= \frac{(a + b - c) \cdot (a - b + c)}{2bc}. \end{aligned}$$

Si se llama $2p$ al perímetro del triángulo, resulta que:

$$a + b + c = 2p \Rightarrow b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Sustituyendo en lo anterior:

$$1 + \cos A = \frac{2p \cdot 2(p - a)}{2bc} = 2 \cos^2 \frac{A}{2},$$

$$1 - \cos A = \frac{2(p-c) \cdot 2(p-b)}{2bc} = 2 \sin^2 \frac{A}{2},$$

y utilizando las fórmulas del ángulo mitad:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{bc}} \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p \cdot (p-a)}{bc}}.$$

Se dividen las expresiones anteriores y razonando igual con los demás ángulos, aparecen las fórmulas de Briggs:

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{ac}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p \cdot (p-b)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{ab}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p \cdot (p-c)}{ab}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-a)}} \quad \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{p \cdot (p-c)}}$$

4.6.5. Superficie de un triángulo. Fórmula de Herón.

Sea el triángulo ABC y h la altura relativa al lado $\overline{AC}$

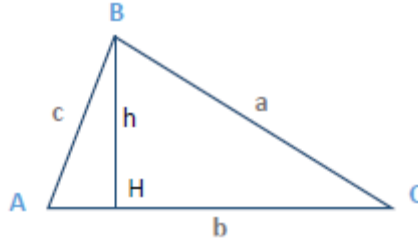


Ilustración 31. Representación del triángulo ABC . Elaboración propia.

De la figura se tiene:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h.$$

Como $\text{sen } C = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen } C$, con lo que nos queda

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \text{sen } C.$$

Si se hace

$$\text{sen } C = \text{sen } 2\frac{C}{2} = 2 \text{sen } \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2},$$

se tiene

$$S = c \cdot a \cdot \text{sen } \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Sustituyendo las fórmulas de Briggs:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

que se conoce como fórmula de Herón, ya que fue descubierta por Herón de Alejandría en el siglo III d.C.

4.7 Resolución de triángulos.

4.7.1. Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo consiste en, dados dos elementos cualesquiera distintos del ángulo recto, de manera que uno al menos sea un lado, hallar los demás.

Supongamos el triángulo ABC rectángulo en A y tal que a es su hipotenusa y b y c sus catetos:

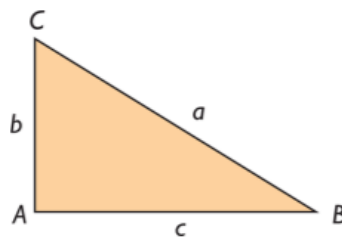


Ilustración 32. Representación del triángulo ABC. Elaboración propia.

De las definiciones de las razones trigonométricas se tiene

$$b = a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \sen C$$

$$c = b \cdot \tan C$$

$$b = c \cdot \cotan C,$$

junto con el Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

y el hecho de que $B = 90^\circ - C$; todo ello permite resolver los triángulos rectángulos.

El estudio de la resolución de triángulos rectángulos se divide en cuatro casos bien diferenciados:

Primer caso. Conocidos la hipotenusa y un cateto: a y b .

Se usan las fórmulas:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad y \quad \cos C = \frac{b}{a}$$

Segundo caso. Conocidos la hipotenusa y un ángulo: a y C .

Entonces se tiene:

$$B = 90^\circ - C$$

$$b = a \cdot \operatorname{sen} B \quad y \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Tercer caso. Conocidos un cateto y un ángulo: b y C .

$$B = 90^\circ - C$$

$$c = b \cdot \operatorname{tag} C \quad y \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Cuarto caso. Conocidos los dos catetos: c y b .

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \quad y \quad C = 90^\circ - B$$

4.7.2. Resolución de triángulos oblicuángulos.

Se presentan cuatro casos:

Primer caso. Conocidos los tres lados: a , b y c .

Se puede resolver de dos maneras distintas:

a) Utilizando el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

b) Utilizando las fórmulas de Briggs:

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-a)}} \quad \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{p \cdot (p-c)}}$$

Segundo caso. Conocidos dos lados y el ángulo comprendido: a , b y C .

También puede resolverse de dos formas distintas:

a) Utilizando el teorema del coseno hallamos el valor del lado c :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Y a continuación por el teorema del seno, se calcula A y B .

$$\sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} \quad \sin B = \frac{b \cdot \sin C}{c}$$

b) Utilizando el teorema de la tangente, como $A + B = 180^\circ - C \Rightarrow$

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} = \frac{\tan \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)}{\tan \frac{A-B}{2}} \Rightarrow \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \cotan \frac{C}{2}$$

de donde se obtiene el valor de $A - B$, como conocemos $A + B$, tenemos los ángulos A y B . El otro lado lo obtenemos por el teorema del seno:

$$c = \frac{b \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

Tercer caso. Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: a , b y A .

Para calcular el ángulo B se utiliza el teorema del seno:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}.$$

Sin embargo, este valor puede corresponder a un ángulo del primer o del segundo cuadrante, es decir el ángulo B puede ser agudo u obtuso, siendo este caso un caso dudoso. Se tiene la siguiente discusión:

- Si el ángulo $A > 90^\circ$, el lado a es el mayor del triángulo y sólo existe un triángulo que satisface los datos del problema, por tanto, B es un ángulo agudo.
- Si el ángulo $A = 90^\circ$, el triángulo es rectángulo, tiene solución única y se resuelve como tal triángulo rectángulo.
- Si el ángulo $A < 90^\circ$, el problema puede tener dos o ninguna solución. No tiene solución si $a < b \cdot \operatorname{sen} A$ ya que entonces $\operatorname{sen} B > 1$. Tiene solución única si $a = b \cdot \operatorname{sen} A$ y entonces el triángulo es rectángulo. Tiene dos soluciones si $b > a > b \cdot \operatorname{sen} A$, una corresponde al ángulo agudo B cuyo seno es $\frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}$ y la otra al ángulo B' suplementario de B , que tiene el mismo seno.

Si $a > b$ tampoco hay solución, ya que en este caso la posición del ángulo B' correspondería a un ángulo obtuso en A .

En general, para que exista solución debe ocurrir que:

$$0 < \frac{b \cdot \text{sen} A}{a} \leq 1.$$

Calculado B, C se obtiene de $C = 180^\circ - (A + B)$ y el lado c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

Cuarto caso. Conocidos un lado y dos ángulos cualesquiera: b , A y B .

Si se emplea el teorema del seno:

$$a = \frac{b \cdot \text{sen} A}{\text{sen} B} \quad c = \frac{b \cdot \text{sen} C}{\text{sen} B} \quad C = 180^\circ - (A + B)$$

4.8 Aplicaciones.

4.8.1. Topografía.

Se puede definir la Topografía como la Ciencia que tiene por objeto el estudio de los métodos de representación sobre un plano de los accidentes (naturales o producidos por el hombre) de un terreno y el de los instrumentos necesarios para lograrlo.

Muchos de los problemas que se presentan en la medición de magnitudes no se pueden resolver directamente porque alguno de los puntos necesarios para tal medición no es accesible. Para llevar a cabo los cálculos se necesita un teodolito, instrumento empleado para medir ángulos horizontales y verticales con una gran precisión de forma óptico-mecánica. Según se puede observar en la imagen que sigue, que está compuesto por un trípode donde se acopla el telescopio con dos círculos graduados, uno en vertical y otro en horizontal. Estos círculos unidos a las lentes hacen posible la medición de ángulos.



Ilustración 33. Teodolito.

- *Cálculo de una altura de pie accesible.*

Sea h la distancia a medir. Se ve el punto C con un teodolito colocado a cierta distancia, en B , se pone en posición horizontal y se restan ambas lecturas, lo cual nos da el ángulo.

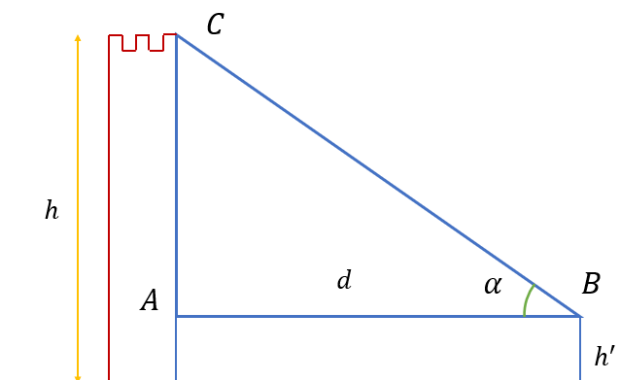


Ilustración 34. Representación de una torre de pie accesible. Elaboración propia.

Se mide la distancia AC obteniendo:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \tan \alpha.$$

La altura será:

$$h = h' + \overline{AB} \cdot \tan \alpha.$$

Si la base BA no es horizontal, además de medir el ángulo α y la base, se puede medir el ángulo que forma la horizontal con la visual dirigida a C (los teodolitos llevan niveles):

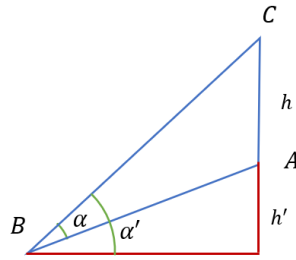


Ilustración 35. Cálculo de la altura h con base no horizontal. Elaboración propia.

Por lo tanto, se pueden calcular, además de BA , los ángulos α y α' . El ángulo ACB será $90^\circ - \alpha'$, con lo que se conocen tres elementos del triángulo ABC . Para hallar h se utiliza el teorema del seno, teniendo:

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{BA}{\sin (90^\circ - \alpha')} \Rightarrow h = \frac{BA \sin \alpha}{\sin (90^\circ - \alpha')} = \frac{BA \sin \alpha}{\cos \alpha'}$$

- *Cálculo de una altura de pie inaccesible.*

En la siguiente ilustración, se supone que B es el punto más alto de una montaña y se quiere conocer la altura de esta. Existe acceso a los puntos A y C por lo que es posible medir la distancia AC y los ángulos α , β y γ (nótese la tridimensionalidad de la figura siguiente):

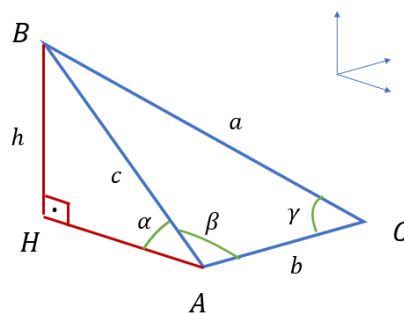


Ilustración 36. Cálculo de la altura h de un punto de pie inaccesible. Elaboración propia.

Se puede resolver el triángulo ABC y el lado AB permite calcular h en el triángulo ABH . En primer lugar, se calcula el ángulo B del triángulo ABC como $180^\circ - (\beta + \gamma)$ y después se aplica el teorema del seno, con lo que se obtiene:

$$\frac{c}{\sen \gamma} = \frac{b}{\sen B} \Rightarrow c = \frac{b \sen \gamma}{\sen B}$$

Considerando el triángulo ABH :

$$h = c \sen \alpha = \frac{b \cdot \sen \gamma \cdot \sen \alpha}{\sen B}$$

Otra posibilidad en el cálculo de la altura de un punto de pie inaccesible es el método de la doble observación. Se emplea cuando la base se encuentra alineada con los puntos de observación, tal y como se aprecia en la siguiente ilustración:

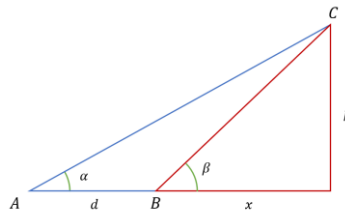


Ilustración 37. Método de la doble observación. Elaboración propia.

Si se mide la distancia $\overline{AB}$ y los ángulos α y β . De los triángulos rectángulos obtenidos se tiene que:

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{h}{d+x} \Rightarrow d+x = h \cdot \cotan \alpha \\ \tan \beta = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h \cdot \cotan \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = h \cdot (\cotan \alpha - \cotan \beta).$$

De donde

$$h = \frac{d}{\cotan \alpha - \cotan \beta}.$$

- *Cálculo de la distancia entre dos puntos siendo uno de ellos inaccesible.*

Si se pretende calcular la distancia desde un punto A de una orilla de un río a otro punto C que se encuentra en la otra orilla a la que no se tiene acceso:

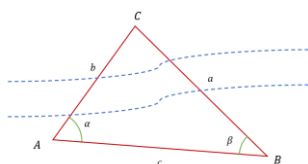


Ilustración 38. Cálculo de la distancia entre dos puntos siendo uno de ellos inaccesible. Elaboración propia.

En el triángulo de la ilustración es posible medir la distancia AB , así como los ángulos α y β . Ya que $C = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, se aplica el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin C}$$

Por lo que ya se conoce la distancia entre A y B .

- *Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles.*

Se quiere hallar la distancia entre dos puntos A y B inaccesibles. Para ello, se eligen dos puntos accesibles C y D y desde ahí, con el teodolito, se miden los ángulos que forman las visuales tal y como se puede observar en la siguiente ilustración:

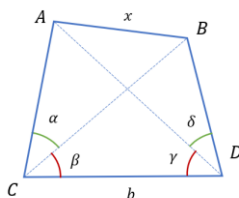


Ilustración 39. Cálculo de la distancia entre dos puntos siendo uno de ellos inaccesible. Elaboración propia.

Para resolverlo, se estudian dos triángulos por separado. Por una parte, el ACD donde se calcula AC , y por otra, el BCD , con el que se puede hallar CB , y ABC , y a su vez, partiendo de los datos anteriores, permite obtener AB , que es la distancia buscada. En el triángulo ACD , ya que $A=180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$:

$$\frac{b}{\sin A} = \frac{AC}{\sin \gamma} \Rightarrow AC = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin A} = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}$$

En el triángulo BCD , al ser $B=180^\circ - (\beta + \gamma + \delta)$:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{AC}{\sin (\gamma + \delta)} \Rightarrow CB = \frac{b \cdot \sin (\gamma + \delta)}{\sin B} = \frac{b \cdot \sin (\gamma + \delta)}{\sin (\beta + \gamma + \delta)}$$

Y en el triángulo ABC se obtiene que: $x = \sqrt{AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos \alpha}$.

4.8.2. Otras aplicaciones.

Movimiento vibratorio oscilatorio.

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación del movimiento vibratorio oscilatorio, como lo es el movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra o en un resorte que haya sido comprimido y alargado y luego puesto en libertad de oscilar.

Definición: Un punto que se mueve en una línea coordenada está en movimiento armónico simple si su distancia d desde el origen en el tiempo t está dada por:

$$d = a \cdot \cos \omega t$$

o bien por:

$$d = a \cdot \sin \omega t$$

Donde a , w son constantes, con $w > 0$.

Presión en el tímpano.

Si se golpea ligeramente un diapason y luego se mantiene a cierta distancia del tímpano, la presión $p_1(t)$ en la parte exterior del tímpano en el tiempo t se puede expresar por:

$$p_1(t) = A \cdot \text{sen } \omega t$$

Donde a , w son constantes positivas. Si otro diapason idéntico golpea con una fuerza diferente y se sostiene a una distancia distinta, su efecto se puede representar por

$$p_2(t) = B \cdot \text{sen } (\omega t + \gamma)$$

Para $0 \leq t \leq 2\pi$, en donde B es una constante positiva. La presión total $p(t)$ en el tímpano está dada por

$$p(t) = A \cdot \text{sen } \omega t + B \cdot \text{sen } (\omega t + \gamma),$$

que utilizando las fórmulas trigonométricas se puede escribir de la siguiente forma:

$p(t) = a \cdot \cos \omega t + b$, donde $a = B \cdot \text{sen } \gamma$ y $b = A + B \cdot \cos \gamma$ son constantes.

Bifurcación arterial.

Una forma común de ramificación cardiovascular es la bifurcación en que una arteria se divide en dos vasos sanguíneos más pequeños. El ángulo θ de bifurcación es el formado por las dos arterias más pequeñas. La longitud l de la arteria de A a B está dada por:

$$l = a + \frac{b}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{4}$$

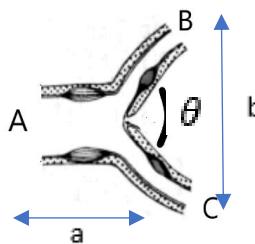


Ilustración 40. Cálculo de la distancia entre dos puntos siendo uno de ellos inaccesible. Elaboración propia.

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA: INVESTIGACIONES SOBRE APRENDIZAJE Y/O LA ENSEÑANZA.

El pedagogo alemán Heinz Griesel define: “La Didáctica de las Matemáticas es la ciencia del desarrollo de las planificaciones realizables en la enseñanza de la matemática”. Una interpretación que da importancia a los programas, a las secuencias de enseñanza, a la elaboración de manuales; es decir, reducida al método.

Según Socas (1997), en el ámbito de la educación matemática constantemente aparecen errores en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes: dificultades de diversa índole que nacen en el proceso de asimilación y se enlazan y refuerzan en redes complejas que lo impiden. Estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas incorrectas. Los errores pueden tener procedencias distintas, pero siempre se consideran derivados de la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno. Si se conocen las razones que lo originan, se puede llevar a cabo una enseñanza adecuada de manera que se facilite el aprendizaje de las Matemáticas.

A continuación, se analizan dos investigaciones que tratan aspectos vinculados con el aprendizaje de contenidos relacionados con trigonometría por parte de los estudiantes, así como posibles dificultades y fenómenos didácticos que puedan incorporarse en la enseñanza de esta materia:

1. Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.
2. Sánchez Rosal, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. *EduTec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, (31), a130. <https://doi.org/10.21556/edutec.2010.31.443>

Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato (Martín-Fernández et al., 2014).

La investigación de Martín-Fernández et al., (2014) examina la información recogida en alumnos de bachillerato acerca de concepciones del seno y coseno. Se trata de un estudio exploratorio, descriptivo e interpretativo. Los alumnos muestreados disponen de los conocimientos adquiridos en 4º de E.S.O. y en función del grupo en el que se encontrasen, o estaban desarrollando la unidad didáctica de Trigonometría o la acababan de terminar. La recogida de datos fue llevada a cabo mediante dos cuestionarios de respuesta abierta, uno sobre el seno y otro sobre el coseno. Con objeto de realizar una mejor interpretación del estudio se indican a continuación algunas preguntas de las que se realizaron al alumnado:

- Ítem 1 (cuestionario seno). «Haz un dibujo en el que se muestre $\sin(30^\circ)$ ».
- Ítem 1 (cuestionario coseno). «Haz un dibujo en el que se muestre $\cos(30^\circ)$ ».
- Ítem 6 (ambos cuestionarios). «Haz un dibujo que muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo».
- Ítem 2 (cuestionario seno). «Explica verbalmente qué entiendes por $\sin(45^\circ)$ ».
- Ítem 2 (cuestionario coseno). «Explica verbalmente qué entiendes por $\cos(45^\circ)$ ».

En este estudio se efectúa un análisis de contenidos simples que describen hechos, conceptos y habilidades obteniéndose distintos niveles a través de su análisis y comparación.

Como conclusiones al estudio (Martín-Fernández et al., 2014) se pueden destacar:

- En la explicación verbal del concepto de seno y coseno existen respuestas muy diversas: razón entre los lados de un triángulo, ordenada de una función trigonométrica, longitud en relación con los lados de un triángulo, etc. Ambos conceptos entrañan la misma dificultad para el alumnado.
- El análisis realizado muestra las maneras en que los estudiantes utilizan una serie de nociones y conceptos para representar y dar sentido al seno y coseno, que son fundamentales para determinar el significado escolar de dichas ideas. Las más empleadas son la circunferencia, los ejes coordenados, el triángulo

rectángulo, el ángulo central y otros. Esto indica que manejan una diversidad de sentidos (sin trivialidad) para los dos conceptos. Por lo tanto, hay muchos significados que revelan, acercan y explican estos conceptos trigonométricos. Además, la coincidencia en los conceptos utilizados no impide que transmitan significados diferentes. Por lo tanto, un mismo método de representación puede dar lugar a diferentes significados. Factores como el contexto de la presentación, el enfoque que se da a los conceptos y los conceptos subyacentes de las representaciones juegan un papel importante en el significado que piensan los estudiantes.

- Los estudiantes usan una variedad de signos, gráficos y símbolos para expresar sus ideas y desarrollar su significado. Estas presentaciones se hacen no solo por la forma en que el docente presenta los temas sino también por la forma en que los preguntamos. A medida que los estudiantes comunican conceptos matemáticos a través de símbolos, que son esenciales para su dominio y comprensión, les brindan un conjunto de herramientas que mejoran su capacidad para modelar y resolver problemas. A través de su uso, estas representaciones e ideas se convierten en objetos de reflexión, lo que permite construir el significado del concepto.
- La relación entre las razones trigonométricas y los valores dados por una función trigonométrica no es reconocida por los alumnos.
- Vinculan los conceptos de seno y coseno como segmentos no solo a la circunferencia, sino también al triángulo.
- Al no ver relación alguna de las razones trigonométricas con la vida real, no consideran que sean útiles.
- En la gran parte de las representaciones para la definición del seno y coseno de un ángulo se emplea la circunferencia, pero de forma incorrecta. Finalmente utilizan el triángulo para definir las razones trigonométricas, siendo el triángulo rectángulo el más empleado.
- No existe una correcta concepción de la circunferencia goniométrica (obvian el valor de su radio).

La identificación del lenguaje matemático, el uso de nociones y conceptos matemáticos, el empleo de representaciones, la interpretación y planteamiento de cuestiones, contribuyen al desarrollo de significado para los estudiantes. Los resultados obtenidos muestran la necesidad de profundizar en el tema a través del diseño e implementación.

Es imprescindible poner en curso diferentes situaciones que abarquen las diferentes componentes del significado de un concepto matemático.

Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs Sánchez Rosal, A. A. (2010).

En su investigación, Sánchez Rosal (2010), indica que las estrategias didácticas según Cammaroto (1999) suponen un proceso enseñanza-aprendizaje, con o sin ausencia del docente. La instrucción se imparte mediante materiales didácticos o relaciones interpersonales, permitiendo adquirir al alumnado habilidades predefinidas a partir de conductas iniciales. Asimismo, Díaz et al. (2002) define las estrategias de instrucción como un conjunto de acciones que los discentes adquieren y usan intencionalmente para aprender a resolver problemas deliberadamente en respuesta a las necesidades de aprendizaje. Este tipo de estrategia en la práctica docente actual debe intentar alejarse del método tradicional de enseñanza, conduciendo a un proceso de enseñanza y aprendizaje que conduzca a la formación de un estudiante independiente, crítico y capaz, totalmente dinámico.

En un mundo globalizado, la educación ha trascendido las paredes de la escuela para conectar a los estudiantes con exterior y los medios de comunicación, donde existe un enfoque holístico del aprendizaje donde se fomenta una actitud creativa y positiva en el alumnado hacia la innovación tecnológica. De hecho, Cartier (1992) alertó sobre la emergencia de un proceso educativo mediado por sistemas de telecomunicaciones, dotado de interacción, indispensable para que los usuarios generen conocimientos nuevos.

Por consiguiente, es necesario utilizar la tecnología en la educación, con todos sus progresos y de la forma más eficaz, entender su uso en todos los contextos educativos como la creatividad humana, y actuar como facilitadores de la conciliación que requiere la enseñanza y el aprendizaje en cualquier nivel educativo, tanto formal como informal (Guitert, 2001).

Los profesores de matemáticas deben ser conscientes de este cambio y aprovechar el interés del alumnado por las nuevas tecnologías, creando actividades escolares que se

basen en ello. De esta forma, se facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje, que se enmarca en la planificación de la práctica docente.

El estudio se enmarca en el método de trabajo de campo y según Tamayo (1997) este diseño se aplica cuando “los datos se recogen directamente de la realidad y su valor radica en que permiten cerciorarse de las verdaderas condiciones en que se han obtenido los datos, lo cual facilita su revisión o modificación en caso de surgir dudas”

Asimismo, esta investigación tiene un diseño transversal y no experimental, en la que no hay manipulación intencional ni asignación aleatoria, ya que los sujetos estudiados ya pertenecen a un grupo o nivel en particular y se recolectan datos en un tiempo único. El objetivo es describir variables y analizar sus efectos o asociaciones en un momento dado (Sierra, 1995).

La población objeto de estudio está formada por docentes y alumnos del primer año del Ciclo Diversificado de la asignatura de Matemáticas (equivalente a 4º de E.S.O.).

Unos de los instrumentos empleados son dos cuestionarios:

- Uno de modalidad de preguntas cerradas con dos opciones de respuesta (SI/NO) para los alumnos. Está diseñado para solicitar su opinión en la definición de las estrategias de enseñanza y los recursos que los profesores usan en sus lecciones de trigonometría. Además, la herramienta busca conocer, en su opinión, si el aprendizaje es significativo y diagnosticar la existencia de un perfil de competencias del estudiante.
- El otro cuestionario de respuestas actitudinales tipo Likert dirigido a los docentes. Está proyectado con el propósito de obtener su opinión sobre las estrategias y recursos didácticos que utiliza en la enseñanza de la trigonometría. Además, se pretende determinar la presencia del aprendizaje significativo y las competencias adquiridas en los estudiantes.

Como resultados destacables del estudio se encuentran los siguientes:

El nivel de conocimiento que los estudiantes evidencian en la adquisición de conceptos de trigonometría fue superficial, lo cual quedó probado en la falta de dominio de la

resolución de los problemas planteados. Puede ser debido a una limitada profundización en las teorías y conceptos en esta materia.

La estrategia educativa utilizada por los docentes es la expositiva, siendo estos meros transmisores de conocimiento (enseñanza tradicional). Como consecuencia se obtiene un alumnado pasivo, sin participación en la resolución de problemas.

Los medios empleados para impartir las clases son los tradicionales: pizarras, libros de texto. Los institutos investigados disponen de aulas de informática que no se utilizan para aplicar otro tipo de recursos.

El aprendizaje de los estudiantes en trigonometría no es significativo. Se observa un nivel de integración, asimilación, construcción y transferencia muy bajo según transmite el profesorado. Es obvia la ausencia de contenidos actitudinales por parte de los docentes quienes además no planifican la obtención de competencias matemáticas y comunicativas en el alumnado.

Por todo lo anterior, se propone la incorporación de la TICs para la enseñanza matemática en este nivel. Se establece una propuesta sustentada en los resultados obtenidos en el estudio compuesta por objetivos generales y específicos, orientados en la forma de programar un plan de acción del docente donde se apoye en estas herramientas. Es imprescindible que las competencias queden correctamente planificadas, así como todos los contenidos a explicar identificados.

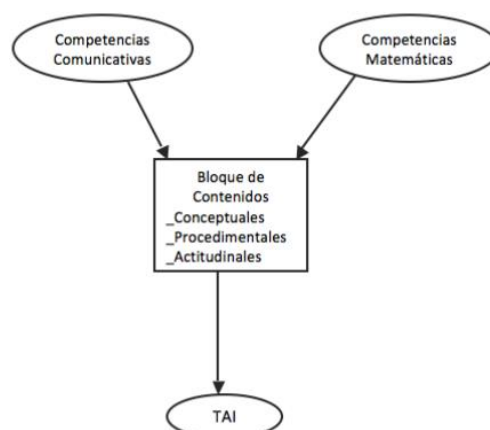


Ilustración 41. Metodología general. Fuente: Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. Sánchez Rosal (2010). Universidad Rafael Bellosó Chacín Maracaibo, Venezuela.

El diagrama anterior describe la metodología de manera general, donde se detalla y sugiere que antes de implementar la estrategia didáctica propuesta TAI (Team assisted individuation) con el apoyo de las TICs, se tenga en cuenta las competencias que deben adquirir los estudiantes en el estudio inicial de la trigonometría con el fin de identificar el bloque de contenidos explicados a través de las TIC.

El plan de acción que se propone está basado en el aprendizaje cooperativo utilizando específicamente la estrategia TAI (Grupo de Apoyo Individual), que según Díaz (2002) es una estrategia óptima aplicada en matemáticas en todos los niveles, consistente principalmente en realizar una combinación de la cooperación y la enseñanza individualizada. Las actividades se desarrollan principalmente en tres sesiones en la sala de ordenadores, con una duración de 80 minutos cada una.

Primera sesión.

Competencia matemática: Reconoce las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en un triángulo rectángulo. Competencia comunicativa: Manifiesta coherencia al transmitir en forma oral o escrita las razones trigonométricas.		
Estrategia	Actividades	Recursos
Momento de apertura: 20 min a 25 min aproximadamente.		
TAI	❖ Aplicar una prueba diagnóstica a cada alumno.	Pizarra Papel Lápiz
Momento de desarrollo: 40 min a 45 min aproximadamente		
Estrategia	Actividades	Recursos
TAI	❖ Formar pareja o triadas de alumnos con la finalidad de intercambiar conocimientos por medio de mapas conceptuales sobre la definición de las razones trigonométricas.	Guía de estudio. Computador. Cmap Tools. Internet. RENA. Chat. Correo electrónico.
Momento de cierre: 10 min aproximadamente		
Estrategia	Actividades	Recursos
TAI	❖ Revisar el avance de cada equipo	Computador. Internet.

Ilustración 42. Ejemplo Primera Sesión. Fuente: Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. Sánchez Rosal (2010). Universidad Rafael Belloso Chacín Maracaibo, Venezuela.

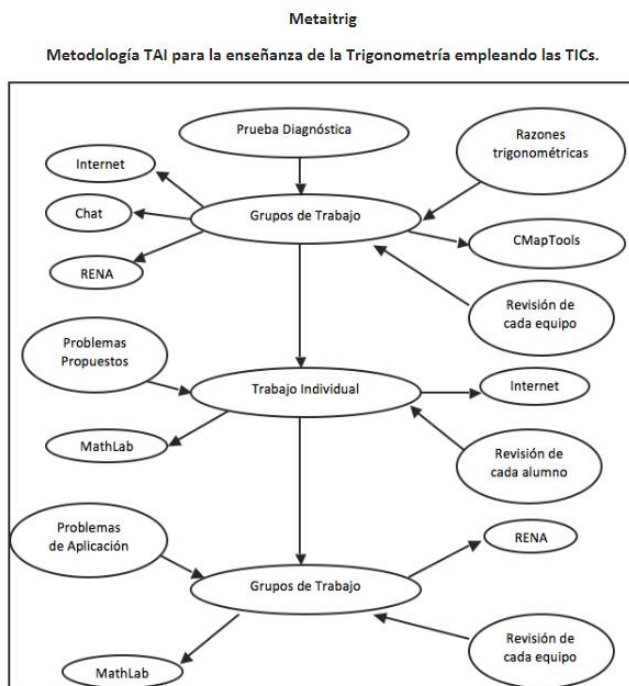


Ilustración 43. Metodología TAI para la enseñanza de la Trigonometría empleando las TICs. Fuente: Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. Sánchez Rosal (2010). Universidad Rafael Bellosó Chacín Maracaibo, Venezuela.

El estudio concluye que la metodología Metaitrig sugerida al personal docente que pretende apoyarse en las nuevas tecnologías para impartir sus clases de Trigonometría, detalla aquellas acciones y recursos necesarios a incorporar. El objetivo es orientar al profesorado de Matemáticas en el manejo de las TICs.

Aportaciones de otros autores

Oliveira-Reis-Júnior, et al. (2018) consideran que las representaciones tienen una función importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, esencialmente a lo que se refiere a los conceptos de la trigonometría. La interacción y la viabilidad suministradas por el uso de las nuevas TICs, en concreto, de los entornos informáticos de aprendizaje como el software educativo y gratuito Geogebra, son recursos fundamentales en el proceso de comprensión de conceptos de un determinado objeto matemático.

El objetivo de los autores es realizar una secuencia didáctica para enseñar la trigonometría con Geogebra, para lo cual desarrollan unas tareas donde trabajar los

conceptos trigonométricos, el Teorema de Pitágoras o las razones trigonométricas con Geogebra.

Geogebra es una herramienta útil para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en concreto, de la trigonometría. Por ello, los autores animan a utilizar los recursos tecnológicos como mediadores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Beirigo-Lopes et al. (2018) observan que uno de los mayores problemas del profesorado es realizar actividades que se desarrollen adecuadamente durante las clases, las cuales generen el aprendizaje del alumnado. Por ello, al igual que en el campo de las ciencias naturales donde el alumnado está en contacto directo con el objeto de estudio y le resulta un recurso más interesante, los autores estiman que las actividades de campo favorecen la enseñanza de las matemáticas porque el alumnado está más motivado, integrado en el proceso y estimula más su creatividad que en una clase habitual.

La metodología seguida comienza primero en el aula, se explican las razones trigonométricas mediante dibujos, y se realizan ejercicios y problemas.

Posteriormente, el alumnado debe realizar una actividad de campo que resulta útil para enseñar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo ya que se miden alturas de difícil acceso. No obstante, el éxito también se debe a la planificación previa y una metodología de enseñanza de redescubrimiento del conocimiento.

Las actividades de campo favorecen la capacidad de aprender y almacenar mejor la información al interactuar directamente con el contexto; así como, fomentan el pensamiento matemático al buscar la solución en la situación establecida y unen la teoría aprendida en clase por los discentes con la práctica en ambientes donde vive.

Además, se favorece la sociabilidad entre el alumnado y mejora la relación entre profesorado, alumnado y conocimiento.

Para finalizar, se debe reflexionar sobre el análisis de Giacomone, et al. (2017) quienes consideran que tener conocimiento matemático no conlleva desarrollar adecuadamente la tarea docente, es decir, es fundamental para la formación del futuro profesor saber matemáticas, cómo las conoce y que es capaz de desarrollarlas en la enseñanza. El profesor debe tener conocimientos tanto matemáticos como didácticos, y ser competente en la utilización del conocimiento, y para ello, existen estrategias para reflexionar sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La competencia de análisis ontosemiótico trata la capacidad y el conocimiento para identificar y describir objetos y procesos involucrados en las tareas matemáticas escolares. La modelización del conocimiento matemático permite comprender y describir los procesos de formación del conocimiento basado en la resolución de problemas. El profesor de matemáticas debe desarrollar una competencia instrumental para reconocer la complejidad de significados y objetos presentes en las actividades matemáticas, prever conflictos potenciales, y adaptar las actividades a las capacidades del alumnado y a los objetivos de aprendizaje.

Conclusiones de las investigaciones

La conclusión personal, tras realizar el apartado de fundamentación didáctica y como futura profesora, es que es relevante realizar al principio de la unidad didáctica una evaluación inicial (no tiene que ser mediante prueba escrita) para conocer el nivel educativo de cada alumno, y analizar su evolución a lo largo de cada unidad para tomar medidas rápidamente tras detectar algún problema o dificultad. Es decir, no se debe esperar a la evaluación final para adoptar medidas correctoras.

Por otro lado, se ha de tener en cuenta que el alumnado no sólo tiene deficiencias de conocimientos con respecto a la geometría, sino que también tiene errores básicos de álgebra, y estos errores provocan que los ejercicios o problemas de trigonometría no se resuelvan correctamente. Sin embargo, el alumnado puede aprender a partir de los errores debido a que son una fuente de información, y le permiten ser ayudado tanto por el profesorado como por otros compañeros. Durante el desarrollo de la unidad didáctica, es importante que entienda el enunciado del ejercicio o problema a realizar, seleccione los datos necesarios y realice un esquema o dibujo para visualizar mejor el problema. Por ello, es necesario que los problemas planteados estén contextualizados en la vida real del alumnado, y se utilicen diversos recursos didácticos motivadores.

El uso de TICs como Geogebra permite al alumnado comprender mejor los nuevos contenidos y procedimientos explicados por el profesorado, y le ayuda a visualizar mejor los problemas a resolver. También, las actividades de campo fomentan la conexión entre los conocimientos de clase con la práctica en la vida real.

Es importante fomentar el trabajo en grupo porque se fomenta la colaboración entre el alumnado, la sociabilidad, la solidaridad, la empatía, y favorece el aprendizaje horizontal entre el alumnado heterogéneo. Es decir, se deben diversificar las actividades para llegar a todos los estilos de aprendizaje.

Finalmente, se debe tener en cuenta que los futuros profesores deben aprender cómo fusionar las matemáticas y la didáctica, prever las dificultades del alumnado y adaptar las actividades al nivel educativo del alumnado.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA.

En el presente apartado del TFM se desarrolla una unidad didáctica de Trigonometría de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O.

Se contextualiza el centro y el aula donde se desarrolla la unidad didáctica, definiendo unos objetivos basados en las competencias clave y contenidos establecidos en la normativa vigente y estableciendo una metodología con sus correspondientes actividades y recursos, indicando la temporalización, sin olvidar la atención a la diversidad e incluyendo una evaluación al finalizar la unidad didáctica.

6.1. Título

Trigonometría es el título que define a la presente Unidad Didáctica objeto de desarrollo en este apartado correspondiente con el tema 38 “Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones.” del temario de oposiciones a Enseñanza Secundaria de la especialidad de matemáticas.

6.2. Justificación

En esta unidad didáctica de Trigonometría se pretende emplear una metodología que incorpore estrategias innovadoras y motivadoras que a su vez permitan alcanzar los objetivos y competencias recogidos en el RD 1105/2014 y la Orden 15 de enero de 2021 para el curso 4º de E.S.O. dentro de las Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Especial mención a lo indicado en el RD 1105/2014 acerca de competencia matemática, reconocida como clave por la Unión Europea, que se genera especialmente a través de la asignatura de Matemáticas. Con ella se desarrolla la habilidad de razonamiento matemático con la finalidad de conseguir la resolución de diversos problemas en situaciones cotidianas, principalmente con el objetivo de pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas,

utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas. Un buen pensamiento matemático ayuda en la obtención del resto de competencias y contribuye a la formación intelectual del alumnado, lo que permite que se desenvuelva mejor tanto en el ámbito personal como social.

La Trigonometría es una rama de las matemáticas con mayor riqueza íntimamente ligada a otras disciplinas como Geometría, Álgebra, Aritmética y Mecánica. Aplicaciones en campos como la Arquitectura, Ingeniería, Astronomía, Topografía, Geografía, Comunicaciones y Electricidad, entre otros, revela su gran importancia en la vida real. Se pueden encontrar muchas fórmulas diferentes, extraídas y desarrolladas a lo largo de la historia para su aplicación en distintos ámbitos de nuestro entorno.

El conocimiento de conceptos básicos del tema de trigonometría de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, es imprescindible para asegurar el desarrollo de contenidos posteriores en el curso escolar en curso, así como en posteriores o en otras asignaturas de ciencias.

6.3. Contextualización del centro y del aula.

La presente unidad didáctica se contextualiza en el Instituto de Educación Secundaria (I.E.S.) Salvador Serrano en Alcaudete (Jaén), lugar donde he realizado de prácticas del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

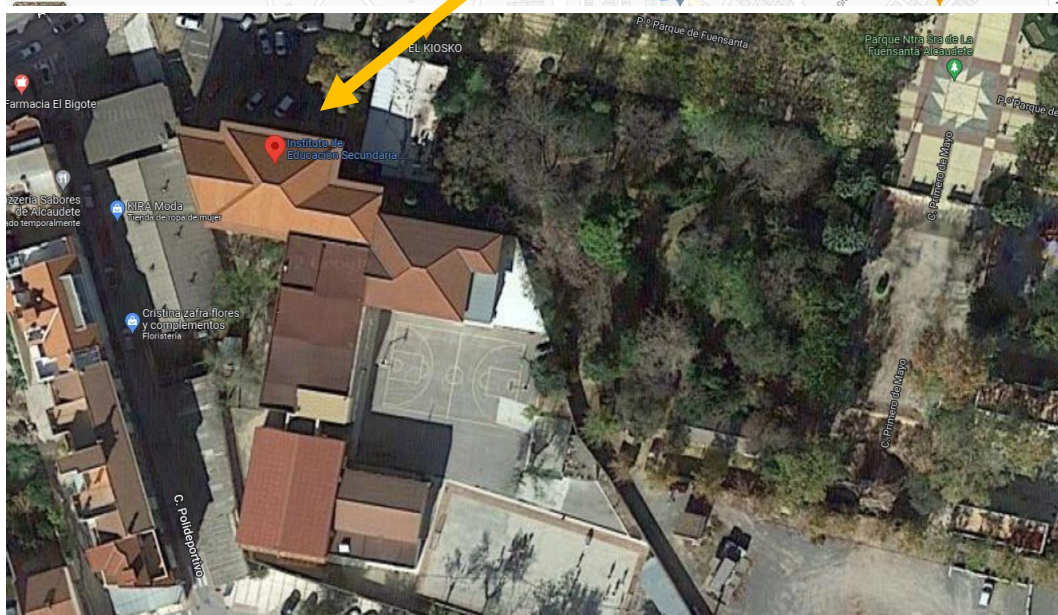
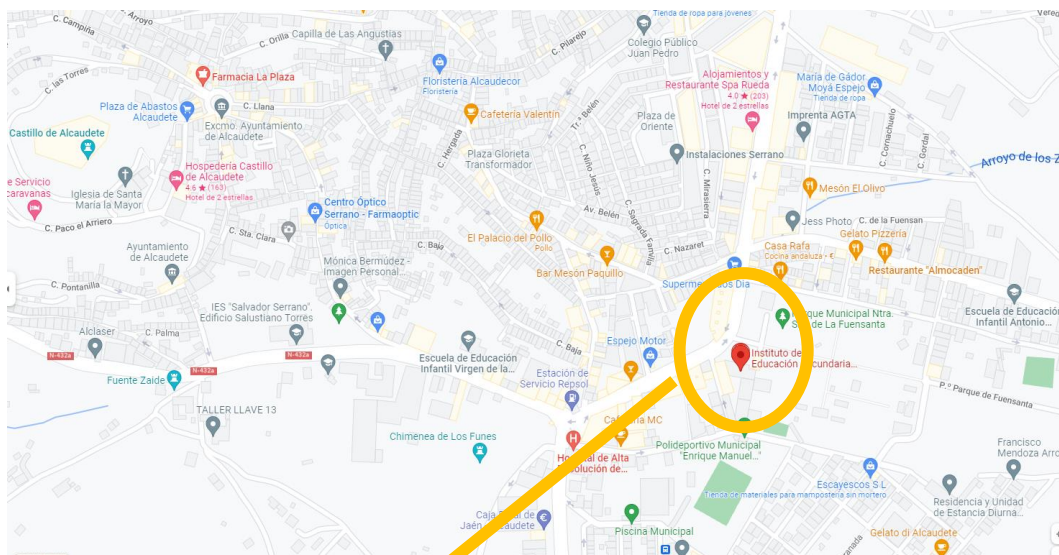


Ilustración 44. Mapa de la localización del I.E.S. Salvador Serrano.



Ilustraciones 45 y 46. Edificio Príncipe Felipe del I.E.S. Salvador Serrano y Edificio Salustiano Torres del I.E.S. Salvador Serrano.

Se trata de un centro dividido en dos edificios que distan 700 m. A nivel general se puede decir que la zona es de nivel socioeconómico y cultural medio. El citado centro es un instituto bilingüe y tiene una oferta educativa que abarca la Educación Secundaria, Bachillerato en las modalidades de Ciencias, Humanidades y Ciencias Sociales, FPB de Servicios Administrativos y ciclos formativos de grado medio y superior de la familia profesional de Administración y Electricidad. En horario de tarde se imparte la Educación Secundaria de Adultos semipresencial.

La mayoría del alumnado reside en la localidad de Alcaudete, mientras que un pequeño porcentaje procede otras pedanías. El porcentaje de alumnado de nacionalidad extranjera es muy bajo y en su mayoría ha estado escolarizado previamente en el sistema educativo español. No existen problemas de convivencia de componente xenófoba.

En general, el IES Salvador Serrano se caracteriza por la ausencia de conflictos destacables entre los distintos miembros de la comunidad educativa y, especialmente, por un clima de convivencia bastante favorable para el desarrollo del trabajo del alumnado, del profesorado y del personal no docente.

Las instalaciones y materiales son las adecuadas para el desarrollo normal de las actividades del centro.

La directiva está formada por: Dirección, Vicedirección, Jefatura de estudios, Secretaría, Jefatura de estudios adjunta, Jefatura de estudios de adultos

Los departamentos existentes en este centro son: Actividades Extraescolares, Administración, Biología y Geología, Clásicas, Música y Artes Plásticas, Educación Física, Electricidad y Electrónica, Filosofía, Física y Química, FOL – Economía, DFEIE, Francés, Geografía e Historia, Informática, Inglés, Lengua Castellana, Matemáticas, Música, Orientación, Religión y Tecnología.

En este centro se consideran espacios de riesgo las zonas de los patios que constituyen sombras de vigilancia. Se consideran tiempos de riesgo los recreos, los intercambios de clase, las entradas y salidas del centro y el desarrollo de actividades complementarias.

No obstante, la adecuada vigilancia de estos tiempos requiere unas medidas o normas de carácter organizativo que afectan sobre todo al profesorado.

Se dispone de un plan de apertura de centro con el objetivo de intensificar la implicación de los distintos sectores de la comunidad educativa en la vida académica del centro, favorecer la convivencia de estos y facilitar y dar continuidad a la formación integral del alumnado. Para llevar a cabo este plan se dispone de espacios tales como aulas específicas, salón de actos y aulas de informática.

Características del alumnado

El nivel y grupo seleccionado ha sido 4º de E.S.O. B. y he tenido la suerte de conocerlos de primera mano, pues he sido la responsable de impartir la unidad didáctica de Trigonometría durante el período de prácticas.

Está compuesto por 27 alumnos. A nivel global son alumnos con un expediente académico excelente pero que no colaboran entre sí.

Se pueden clasificar académicamente de la siguiente forma:

- 20 alumnos superan el 7, de los cuales 5 son de 10.
- 3 alumnos se posicionan entre el aprobado y el 7.
- 2 alumnos que no trabajan y obtienen calificaciones inferiores al 1.
- 1 alumno de altas capacidades.
- 1 alumna con TEA.

6.4. Objetivos

En este apartado se desarrollan los objetivos desde tres puntos de vista: generales de etapa, específicos del área de matemáticas y los didácticos de la unidad.

6.4.1 Objetivos generales de etapa

Se encuentran recogidos en artículo 11 del Real Decreto 1105/2014 y en la presente unidad didáctica se desarrollan los que siguen a continuación:

- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

6.4.2 Objetivos específicos del área de matemáticas.

La Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía establece que los objetivos de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria son los que siguen:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3 Objetivos de la unidad didáctica.

A continuación, se proponen los objetivos didácticos que se pretenden conseguir como resultado de la experiencia enseñanza-aprendizaje durante el desarrollo de la unidad didáctica de Trigonometría.

1. Conocimiento del origen de la trigonometría y la importancia de su estudio.
2. Familiarización con la medida de ángulos tanto en el sistema sexagesimal como en radianes, así como su conversión de un sistema a otro.
3. Aplicación de las razones trigonométricas elementales (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo y las relaciones existentes entre estas.
4. Obtención de las razones trigonométricas mediante la circunferencia goniométrica.
5. Relación de razones trigonométricas de ángulos que se encuentren en cualquiera de los cuatro cuadrantes
6. Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos mayores de 360° .
7. Aplicación adecuada las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo en la resolución de distintos problemas.
8. Resolución de triángulos oblicuángulos mediante la relación con los triángulos rectángulos previamente estudiados.
9. Razonamiento de los resultados de los problemas, respecto a la variación de datos, aplicando la lógica para identificar soluciones incoherentes.
10. Resolución de problemas relacionados con el entorno cotidiano del alumno, mediante contextualización de estos.

11. Aumento de la seguridad en la resolución de ejercicios en situaciones que sobrepasen la zona de confort del alumnado.
12. Utilización correcta de los comandos trigonométricos de las calculadoras en la obtención de resultados, expresando un mismo ángulo en diferentes sistemas.
13. Utilización de recursos web a través de las TICs que ayuden a los alumnos en la resolución de problemas, por ejemplo, Geogebra.
14. Conocimiento de las características de las distintas funciones trigonométricas (dominio, período, etc.)
15. Fomento de la participación en clase y la sociabilidad entre el alumnado mediante los trabajos en grupo.
16. Práctica de modelización matemática como recurso de enseñanza para la resolución de problemas en contextos reales.

6.5. Competencias clave

De acuerdo con lo establecido en el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014 de 26 de Diciembre, a efectos del presente Decreto, se entenderá por Competencias: capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

Según lo dispuesto en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, las competencias del currículo están recogidas en la tabla 5 del apartado 3.1.

6.6. Contenidos

Los contenidos que se van a abordar en esta unidad didáctica corresponden al “Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” y parte del “Bloque III. Geometría” de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, según queda establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Se encuentran especificados en el apartado 3.1 del presente trabajo. Con respecto al Bloque III no se van a desarrollar todos los contenidos. Se comenzará recordando el

concepto de semejanza enfocada a triángulos seguido de trigonometría. La Geometría Analítica no es objeto de la presente unidad didáctica.

6.7. Metodología

El presente trabajo pretende conseguir una mezcla de las metodologías tradicionales con aquellas que permitan obtener un aprendizaje significativo, sin olvidar que la importancia radica en el estrecho vínculo que se debe formar entre lo asimilado y lo nuevo por conocer, para poder conseguir un Aprendizaje Cooperativo.

La idea es realizar cambio de tareas frecuentemente a lo largo de las sesiones. La implantación de metodologías donde los alumnos descubran por sí mismos conceptos matemáticos contenidos en ciertos problemas permite mejorar muchas de sus competencias como el modelado, la argumentación y el desarrollo del pensamiento.

A modo resumen se realiza una breve descripción de cada metodología:

Metodología transmisiva: Se basa en la explicación de los contenidos por parte del docente mediante su exposición. Conlleva que el discente trabaje de forma autónoma e individual realizando determinadas tareas que se explican en el siguiente apartado. Se apoya en el libro de texto, incluyendo apuntes facilitados por el profesor. Es importante repetir ejercicios similares que permitan que se desenvuelvan en la aplicación de los conceptos explicados.

El éxito de esta metodología está en mantener el interés del alumnado intercalando cuestiones que generen debates abiertos sobre temas de su entorno, así como realizando preguntas relacionadas con la teoría explicada para valorar tanto su grado de comprensión como de atención. Por lo tanto, es importante una constante combinación de una metodología activa donde los alumnos siguen una dinámica general de clase, reflexionan de manera crítica sobre su aprendizaje, dificultades, logros y dificultades. haciendo que reflexionen de manera crítica sobre su propio aprendizaje, sus logros y dificultades.

Trabajo cooperativo: Se pretende conseguir una metodología activa, donde los estudiantes participen y se motiven. Entre iguales se comparten estrategias con un mismo fin, se resuelven tareas en grupo, se evita la competitividad, se favorece la comunicación y todo ello a la vez que aprenden.

Modelización: Esta herramienta didáctica genera aprendizaje a partir de situaciones reales donde el alumnado conecta los conceptos aprendidos con un modelo que asocian a su día a día, es decir se les muestra la utilidad de las matemáticas. Además, se consigue reforzar el conocimiento y un considerable aumento de la creatividad.

Herramientas TIC: calculadora o el uso de programas de sistemas de geometría dinámica como Geogebra, son muy útiles para el tema de Trigonometría ya que ayudan a la conformación de su pensamiento matemático. Son un complemento para el trabajo cooperativo. Además, el uso de páginas web para realizar determinadas actividades puede resultar de gran interés para afianzar los conceptos.

6.8. Actividades y recursos.

6.8.1. Actividades.

Para el diseño y selección de las actividades se tiene en cuenta el contenido de la unidad didáctica enfocado a la consecución de objetivos y competencias, superando las dificultades encontradas en la comprensión de los conceptos. Se aplicarán las diferentes metodologías y herramientas mencionadas en el apartado anterior.

En el **Anexo II** se recogen todas las actividades propuestas. Se pretende subsanar los errores cometidos habitualmente por los estudiantes, así como las dificultades recogidas en el apartado 5.

Las actividades propuestas en esta unidad son:

- Vídeo introductorio para explicar el origen de la trigonometría.
- Ejercicios de “Piensa y práctica” y problemas por bloque de contenidos impartidos por el docente para trabajar en el aula. No obstante, algunos

ejercicios y problemas se propondrán para trabajar en casa. Estas actividades han sido realizadas siguiendo información del libro de texto de Anaya del curso 4º de E.S.O. de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

- Se desarrolla una actividad individual que posteriormente se pondrá en común con el resto de los compañeros con la formación de grupos de trabajo y finalmente una exposición al resto de la clase explicando las estrategias de resolución empleadas.
- Actividad fuera del aula para poner en práctica conocimientos vistos en clase, pero donde los estudiantes son los protagonistas. De esta manera, pueden comprobar que tomando algunas mediciones es posible calcular la altura de un edificio de forma muy sencilla.
- El uso de la herramienta Geogebra permite resolver ejercicios trigonométricos con un enfoque lúdico que estimula la motivación del alumnado.
- Ejercicios de evaluación de los contenidos de la unidad didáctica. Hace posible valorar los conocimientos adquiridos.

6.8.2. Recursos.

Los recursos materiales empleados para el desarrollo de la unidad en el aula son los que siguen:

Recursos materiales:

- Pizarra tradicional y minipizarras.
- Proyector.
- Ordenador de clase con acceso a internet.
- Libro de texto: “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O. de la editorial Anaya”.
- Material de apoyo elaborado por el docente.
- Calculadora
- Instrumentos de medición: cinta métrica, regla, etc

Recursos informáticos (TICs):

- Google Classroom para entrega de actividades de clase.
- Software GeoGebra.

Recursos humanos:

- Profesor de matemáticas.
- Discentes.
- Profesores del departamento de matemáticas.
- Equipo directivo.
- Departamento de Orientación.
- Familiares del alumnado.

6.9. Atención a la diversidad

Vivimos en un mundo heterogéneo y desigual, con grandes diferencias culturales, económicas, políticas y sociales, y estas son las verdaderas razones que separan a las personas, sin importar el color de su piel, religión o idioma como menciona Frutos et al. (2012) “representa un importante desafío para los sistemas educativos, y difícilmente estos harán que se pueda desarrollar una interacción positiva entre el alumnado que genere conocimiento, aceptación y valoración de los otros si se antepone asimilación a inclusión”.

El artículo 15 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, establece que los centros educativos tendrán en cuenta la atención a la diversidad en función de los distintos ritmos de aprendizaje, facilitando el aprendizaje autónomo, promoviendo el aprendizaje en equipo y se prestará atención especial a la adquisición y desarrollo de las competencias, fomentando la expresión oral y escrita de las matemáticas. Del mismo modo, establece que son las Administraciones educativas quienes han de regular medidas específicas para favorecer la integración de los alumnos que presentan dificultades de aprendizaje o de relación en la actividad diaria de los centros, así como aquellos detectados como altas capacidades.

Tal y como se recoge en el apartado 6.3, en el aula se presentan dos casos a los que habrá que hacer mención especial: un alumno de altas capacidades y una alumna con TEA.

En el caso de altas capacidades, se establece un programa donde se lleva a cabo el enriquecimiento curricular de forma que se favorece un mayor desarrollo de sus

capacidades. Aunque el alumno no abandona la clase para llevarlo a cabo, se le aportan actividades enriquecedoras que le permitan profundizar más en el contenido de la unidad didáctica. Además, se ampliarán algunos contenidos de un curso superior según establece el RD 1105/2014.

Para la alumna con TEA, se presta más atención a la resolución de sus dudas y se preparan actividades de refuerzo (incluidas las visuales) para que no queden atrás con respecto al resto de la clase y se trabaje la eliminación de bloqueos. Las actividades tienen que estar correctamente estructuradas y darle más tiempo para realizarlas.

6.10. Temporalización

La unidad Didáctica se organiza según la siguiente secuenciación que corresponde al horario del curso de 4º E.S.O B que se ha elegido como referente para el desarrollo de la unidad.

SEMANA 1						SEMANA 2					
	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES		LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
10:15-11:15	SESIÓN 1					10:15-11:15	SESIÓN 5				
11:15-11:45						11:15-11:45					
11:45-12:45			SESIÓN 3	SESIÓN 4		11:45-12:45			SESIÓN 7	SESIÓN 8	
12:45-13:45		SESIÓN 2				12:45-13:45		SESIÓN 6			

SEMANA 3					
	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
10:15-11:15	SESIÓN 9				
11:15-11:45					
11:45-12:45			SESIÓN 11	SESIÓN 12	
12:45-13:45		SESIÓN 10			

Tabla 7: Distribución de las sesiones de la Unidad Didáctica de Trigonometría. Elaboración propia.

Los contenidos a tratar en las distintas sesiones son:

SESIÓN 1: Introducción a la Trigonometría.

SESIÓN 2: Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

SESIÓN 3: Relaciones trigonométricas fundamentales.

SESIÓN 4: Razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° . Introducción a la resolución de triángulos rectángulos.

SESIÓN 5: Resolución de triángulos rectángulos.

SESIÓN 6: Actividad: torre de triángulos.

SESIÓN 7: Resolución de triángulos no rectángulos.

SESIÓN 8: Razones trigonométricas de 0° a 360° .

SESIÓN 9: Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas. Funciones trigonométricas.

SESIÓN 10: Actividad en exterior. Modelización.

SESIÓN 11: Presentación de resultados tarea de modelización. Resolución de dudas para examen.

SESIÓN 12: Evaluación.

Se debe tener en cuenta que el ritmo de las clases puede condicionar la temporalización ya que dependerá de la asimilación de contenidos por parte del alumnado.

Las sesiones anteriormente citadas se encuentran desarrolladas en el **Anexo I** del presente trabajo. Asimismo, las actividades asociadas se detallan en el **Anexo II**.

Las actividades elegidas para desarrollar las distintas sesiones, como se ha indicado en el apartado 6.8.1, comprenden las incluidas en el libro de texto, uso de ejercicios existentes en la web, bien sean problemas de la vida cotidiana o de Geogebra, previamente contrastados con el contenido objeto de la sesión de la unidad en la que se emplean, tareas para el fomento del trabajo cooperativo tanto en clase como en el patio del colegio.

6.11. Evaluación

La Tabla 2 del Apartado 3.1. recoge los criterios de evaluación, no solo asociados a los estándares de aprendizaje evaluables, sino también a las competencias adquiridas por los discentes al integrar conocimientos, procesos, actitudes y contextos según lo indicado en la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA Extraordinario nº 7 de 18/01/2021).

Además, se asumen dentro de los criterios de calificación propuestos por el departamento de Matemáticas del IES Salvador Serrano, donde se indica que la penalización máxima asignada por el no cumplimiento de las normas ortográficas es del 10%. Se tiene en cuenta los errores en la escritura, acentuación o puntuación, vocabulario adecuado, evitar repeticiones, concordancias, caligrafía, pulcritud y limpieza, márgenes, empleo de léxico conveniente y transmisión con claridad de la idea.

Las ponderaciones y rúbricas aplicadas a cada uno de los instrumentos de calificación son:

- Prueba escrita: ponderación del 60%. Para su calificación se utiliza la **rúbrica 1 (Anexo III)**
- Intervención en clase: ponderación del 10%. Se emplea la **rúbrica 2 (Anexo III)**
- Actividades individuales (incluidos resolución de ejercicios y problemas): ponderación del 20%. Se califica con la **rúbrica 3 (Anexo III)**
- Hábitos personales y actitud: ponderación del 5%. Se usa la **rúbrica 4 (Anexo III)**
- Trabajo en grupo: para su calificación se utiliza la **rúbrica 5 (Anexo III)** y su ponderación es del 5%.

Finalmente, el docente elabora un cuestionario de autoevaluación del diseño de la unidad didáctica. (Anexo III)

7. CONCLUSIONES

Una vez elaborado el presente TFM, es posible realizar una evaluación positiva de los conocimientos y habilidades adquiridas durante el desarrollo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, todo ello imprescindible para poder desarrollar la profesión docente en un futuro próximo.

Cuando se comienza un proyecto con mucha ilusión es importante tener claro el objetivo que se pretende conseguir. El reto de todo profesor debe ser conectar con los alumnos y lograr que tengan interés por la asignatura de matemáticas, lo cual facilita el aprendizaje.

La observación en el aula es fundamental. Saber reconocer el momento en el que la forma de explicar un determinado concepto no está siendo la adecuada, ayuda a retomar la clase antes de que los alumnos desconecten de ella.

En todo caso las ventajas derivadas de la aplicación de estrategias activas de enseñanza más destacables son:

- La posibilidad de lograr la integración de los conocimientos teóricos y prácticos y de motivar a los discentes hacia la resolución de problemas de forma cooperativa.
- El fortalecimiento del manejo de diversas fuentes de información para identificar y analizar datos de un modo crítico.
- Encuentran sentido a aquello que estudian.
- Detectan sus necesidades de aprendizaje.
- Fomento de la cultura del esfuerzo, la creatividad y la comunicación de ideas.

Como conclusión, resulta muy apropiado el siguiente proverbio que resume la propuesta definida en el presente trabajo: “Cuéntame y lo olvidaré. Muéstrame y lo recordaré. Involúcrame y lo entenderé”.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaide Guindo, F., Pérez Álvarez, J., Hernández Gómez, J., Moreno Warleta, M., Serrano Marugán, E., Donaire Moreno, J., . . . Sada, M. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. SM Savia Digital.
- Beirigo Lopes y Lopes Hardoim (2018). Utilização de aplicativos gratuitos para atividade de campo no ensino de trigonometria no triângulo retângulo. *Revista Exitus, Santarém/PA*, 8(2), 219 – 243. <https://doi.org/10.24065/2237-9460.2018v8n2ID535>.
- Colera Jiménez, Oliveira González, Gaztelu Albero, & Colera Cañas. (2021). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Proyecto Suma Piezas. Madrid: Anaya.
- Díaz, F. & Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. *Una interpretación constructivista*, 2, 1-27.
- Frutos et al. (2012). La atención a la diversidad: la educación inclusiva. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 15(1), 135-144.
- Giacomone et al. (2017). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, 29(4), 1109-1131.
- IES Salvador Serrano. (s.f.). Proyecto Educativo de Centro. Consultado el 30 de marzo de 2022. <https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/iessalvadorserrano/plan-centro/>.
- Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. & Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. Salamanca: SEIEM.
- Oliveira Reis Júnior, Delcídes Bernardes y dos Santos Reis (2018). Ensino e aprendizagem da trigonometria com o auxílio do software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 7(2), 03-28.
- Polgorélov A.V. (1974). *Geometría elemental*. Moscú.
- Puig Adem P. (1986). *Curso de Geometría métrica I*. Euler.
- Sánchez Rosal, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. Edutec. *Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, (31), a130. <https://doi.org/10.21556/edutec.2010.31.443>
- Smith. (1997). *Algebra y Trigonometría*. Addison-Wesley.
- Sullivan M. (1997). *Trigonometría y Geometría Analítica*. Prentice Hall Iberoamericana.
- Universidad de Jaén. (s.f.). *Guías docentes UJA*. Consultado el 25 de abril de 2022. <https://www.ujaen.es/estudios/oferta-academica/masteres/master-universitario-en-profesorado-de-educacion-secundaria-obligatoria-y-bachillerato>.

➤ *Legislación*

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, sec. I, pp. 169-546.

Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas.

➤ *Geogebra*

Larrosa, I. (2014). Razones trigonométricas de ángulos agudos. Consultado el 30 de abril de 2022. <https://www.geogebra.org/m/hvjz6wsv#material/FVMgHfDN>

Grafulla, M. (2015). *Halla la tangente sabiendo seno o coseno*. Consultado el 2 de mayo de 2022. <https://www.geogebra.org/m/APvXXgfp#material/Zgh3ceMw>

Valdés, P. (2019). *Relación fundamental de la trigonometría*. Consultado el 10 de mayo de 2022. <https://www.geogebra.org/m/meadu4hg>

Omatos, A. (2015). *Circunferencia goniométrica*. Consultado el 31 de mayo de 2022. <https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc>

Larrosa, I. (2019). *Funciones trigonométricas*. Consultado el 25 de mayo de 2022. <https://www.geogebra.org/m/zF5GzAKV>

➤ *Videos*

Godoy M. (2013). *Trigonometría: Orígenes y Aplicaciones*. Consultado el 3 de junio de 2022. <https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4i>

➤ *Páginas web y blogs*

Didáctica de la matemática (2022, 8 de mayo). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 16:32, mayo 10, 2022 desde https://es.wikipedia.org/wiki/Did%C3%A1ctica_de_la_matem%C3%A1tica#cite_note-1

Lorente, J.L. (s.f.). Tema 38. Trigonometría Plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones. www.joseluislorente.es

Sumon Press S.L. (s.f.). Ángulo cóncavo. <https://es.plusmaths.com/angulo-concavo.html>

Coronado, G. & Fernández, J.L. (s.f). Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica. <https://www.fisicalab.com>

ANEXOS

Anexo I. Sesiones Unidad Didáctica.

SESIÓN 1: Introducción a la Trigonometría	
Desarrollo: Previo al comienzo de la Trigonometría, se repasan conceptos que necesita el alumnado para afrontar el aprendizaje de esta unidad didáctica: - Definición y medidas de ángulos en grados sexagesimales y radianes. Ángulos complementarios y suplementarios. (Actividad 1, Anexo II) - Tipos de triángulos. (Actividad 2, Anexo II) - Suma de los ángulos interiores de un triángulo. (Actividad 3, Anexo II) - Perímetro de un triángulo. (Actividad 4, Anexo II) - Teorema de Pitágoras. (Actividad 5, Anexo II) - Semejanza de Triángulos que es donde se sustenta la trigonometría. (Actividad 6, Anexo II) A continuación, vídeo introductorio de orígenes y aplicaciones de la Trigonometría: https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4i Tras la proyección del vídeo se abre debate sobre las impresiones causadas por este y una reflexión sobre sus aplicaciones.	
Contenidos:	1.6, 1.7, 3.1, 3.6.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.7, CE.1.12.
Objetivos:	1,2.
Competencias clave:	CCL, CMCT, CAA, CD.
Metodología:	Transmisiva, uso de las TICs.
Recursos:	Pizarra tradicional, material de apoyo elaborado por el docente ordenador de clase, Proyector y conexión a internet.
Organización:	Individual.

Tabla 8. Sesión 1. Elaboración propia

SESIÓN 2: Razones trigonométricas de un ángulo agudo.	
Desarrollo: Explicación de las razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente. Uso de los comandos de la calculadora. Empleo de Geogebra para el refuerzo de los conceptos de seno, coseno y tangente: https://www.geogebra.org/m/hviz6wsv#material/FVMgHfDN A continuación, el docente realizará una actividad con Geogebra (https://www.geogebra.org/m/APvXXgfp#material/Zgh3ceMw) desde el ordenador de clase. El alumno tendrá que resolver en su cuaderno y posteriormente se corregirá a nivel grupal y el alumno se autoevaluará de forma que se detectan los aspectos con que representan más dificultad. Se propondrá la actividad 7 para realizar en casa. Además, los alumnos pueden ir realizando los ejercicios voluntarios que existen en el Google Classroom referentes a la unidad de trigonometría.	
Contenidos:	1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 3.2,3.7.
Criterios de evaluación:	CE.1.2, CE.1.11, CE.1.12, C.E.3.1.
Objetivos:	3,12,13.
Competencias clave:	CMCT, CAA, CD.
Metodología:	Transmisiva, uso de las TICs, activa.
Recursos:	Pizarra tradicional, ordenador de clase, proyector, conexión a internet, calculadora, libro de texto.
Organización:	Individual.

Tabla 9. Sesión 2. Elaboración propia

SESIÓN 3: Relaciones trigonométricas fundamentales.	
Desarrollo: Se comienza la clase corrigiendo la actividad 7 propuesta el día anterior. Para ello un alumno voluntario sale a la pizarra a resolverla. El alumno debe justificar los pasos seguidos para la resolución del ejercicio. Posteriormente el profesor explica las relaciones trigonométricas fundamentales: $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\operatorname{cos}\alpha)^2 = 1$ $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ A continuación, desarrolla un ejemplo donde dando el valor de una razón trigonométrica se deben obtener las otras dos (Actividad 8) Los alumnos realizan los ejercicios de Piensa y Práctica del libro de texto y se resuelven en la pizarra por voluntarios. (Actividad 9) Uso de Geogebra para comprobar que la primera relación trigonométrica se cumple independientemente del ángulo α empleado (https://www.geogebra.org/m/meadu4hg) Se propone la actividad 10 (Piensa y práctica) para trabajar en casa	
Contenidos:	1.2, 1.6, 1.7, 3.2,3.7.
Criterios de evaluación:	CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.1.12, C.E.3.1.
Objetivos:	3,9,11,13.
Competencias clave:	CMCT, CAA, CD, SIEP.
Metodología:	Transmisiva, activa y uso de las TICs.
Recursos:	Pizarra tradicional, ordenador de clase, proyector, conexión a internet, calculadora, libro de texto.
Organización:	Individual.

Tabla 10. Sesión 3. Elaboración propia

SESIÓN 4: Razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° . Introducción a la resolución de triángulos rectángulos.	
Desarrollo: Se comienza la clase corrigiendo las actividades propuestas. Se debe motivar que los alumnos salgan de forma voluntaria a la pizarra. En el caso de que no quieran, se comenzará a llamar por orden de lista ya que el objetivo es que todos superen el miedo a explicar un ejercicio en público. La clase prosigue con la exposición por parte del profesor de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60° por ser ángulos que aparecen con mucha frecuencia. Actividad 11: completar una tabla de razones trigonométricas. Esta actividad permite practicar con la calculadora. Se forman parejas para realizar este ejercicio y se finaliza con una puesta en común en la pizarra. Para finalizar la clase, se realiza la introducción a la resolución de triángulos rectángulos. Se plantean los dos casos que pueden presentarse: - Conocidos dos lados. - Conocidos un lado y un ángulo agudo.	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 3.2.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.1
Objetivos:	3, 7, 9, 11.
Competencias clave:	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
Metodología:	Transmisiva, activa.
Recursos:	Pizarra tradicional, calculadora, libro de texto.
Organización:	Individual y por parejas.

Tabla 11. Sesión 4. Elaboración propia

SESIÓN 5: Resolución de triángulos rectángulos. Continuación.	
Desarrollo: Al inicio de la clase se realiza un resumen de los conceptos estudiados en la unidad didáctica. A continuación, se prosigue con la resolución de triángulos rectángulos. El profesor resuelve dos ejemplos, uno correspondiente a cada uno de los casos que pueden presentarse. (Actividad 12) Se proponen una relación de problemas de aplicación en la vida real para comenzar a resolver en clase (Actividad 13). En este caso, el profesor lo organiza por parejas heterogéneas que favorezca el aprendizaje entre iguales. El docente irá resolviendo las dudas que surjan en la resolución de estos problemas. Aquellos problemas que no se hayan realizado en casa, deben estar finalizados para la sesión 7. Antes de finalizar la clase se les avisa que en la próxima sesión se realizará una prueba de evaluación.	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE. 1.4, CE. 1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE. 1.10, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos:	3, 7, 9, 10, 11, 15, 16.
Competencias clave:	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
Metodología:	Transmisiva, activa, cooperativa y modelización.
Recursos:	Pizarra tradicional, calculadora, libro de texto y material de apoyo elaborado por el docente.
Organización:	Individual y por parejas.

Tabla 12. Sesión 5. Elaboración propia

SESIÓN 6: TORRE DE TRIÁNGULOS.

Desarrollo:

Actividad 14

En la sesión anterior se les indica a los alumnos que se va a realizar una prueba de evaluación. Se pretende que repasen lo explicado en las sesiones anteriores, ya que para un alto porcentaje del alumnado es la única forma de conseguirlo.

Cuando comienza la clase, se les indica que se trata de una actividad que deberán realizar en individual para que puedan verificar si tienen claros los conceptos trigonométricos ya explicados.

Transcurridos 30 minutos del inicio de la actividad, tiempo suficiente para resolverlo si se tienen los conceptos claros, se forman grupos de 4 alumnos (hay un grupo que cuenta con 3 alumnos) y se decide cual de los procedimientos seguidos para su resolución ha sido el correcto para posteriormente explicarlo al resto de la clase.

Se trata de que interpreten correctamente las razones trigonométricas y analicen razonamientos y soluciones. Con esta actividad se busca generar un ambiente adecuado para la concentración y la observación que permita aplicar los conceptos estudiados en clase.

La actividad se basa en calcular un lado de un triángulo rectángulo (hipotenusa) que se encuentra ubicado en la cima de una torre de triángulos rectángulos.

El alumno debe utilizar el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente). La clave está en ser muy ordenado y escoger la razón trigonométrica que facilita el cálculo. En cualquier caso, debe comenzar por el triángulo de la base e ir calculando el lado que necesita para el siguiente triángulo.

Si el alumno emplea siempre el coseno del ángulo dado, resolverá el ejercicio de forma más rápida.

Puede ser que lo determine de forma correcta pero no lo haga por el camino más corto, por ejemplo, usando el seno del complementario o con la tangente del ángulo dado calcule un lado del triángulo que no necesite y después aplique el teorema de Pitágoras. En este caso se da por válido el ejercicio, pero tendrá que hacerse hincapié en la importancia de una correcta observación del problema presentado, para que entiendan que podían haberlo simplificado más y haber llegado al resultado con menos pasos.

Consideraciones metodológicas para la sesión de discusión en grupo de la actividad:

- El aula se organiza en islas ya que de esta forma se favorece la discusión dentro del grupo y se facilita el intercambio de ideas.
- Se emplean minipizarras para que los alumnos puedan expresar sus pensamientos en un golpe de vista.
- El profesor favorecerá la discusión en aquellos grupos donde detecte que no han empleado el método más rápido para la resolución del ejercicio.
- Asimismo, si coinciden en un mismo grupo alumnos que hayan resuelto el ejercicio usando solo el coseno, se les puede sugerir que si están seguros de que es la única forma de hacerlo. De esta forma se puede abrir un debate que en un primer momento no existía por haber llevado a cabo el mismo procedimiento.

- Al final de la clase, cada grupo expondrá las ideas claves de la aplicación de la trigonometría en la resolución de triángulos rectángulos.	
Contenidos:	1,5, 1.6, 3.2.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos:	3, 11, 15.
Competencias clave:	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
Metodología:	Activa y cooperativa.
Recursos:	Minipizarras y calculadora.
Organización:	Individual y en grupos.

Tabla 13. Sesión 6. Elaboración propia

SESIÓN 7: Resolución de triángulos no rectángulos.	
Desarrollo: El docente comienza preguntando sobre las posibles dudas existentes en la resolución de problemas propuestos de la sesión 5. Sólo se resolverán aquellos que los alumnos soliciten. Seguidamente continúa con la resolución de triángulos que no son rectángulos. Para ello se apoya en la actividad 15. Se trata de dos ejemplos donde se dividen en dos triángulos rectángulos mediante la altura desde un vértice. El alumnado practica este tipo de ejercicios mediante la actividad 16. Los van a ir corrigiendo en la pizarra conforme los vayan terminando. Es en esta sesión donde el profesor aprovecha para ampliar conocimientos al alumno de altas capacidades, explicándole el teorema del seno y del coseno (actividad 17) Para la alumna con TEA se proponen ejercicios de refuerzo para que realice en casa. (actividad 18)	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE. 1.4, CE. 1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE. 1.10, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos:	3, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16.
Competencias clave:	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
Metodología:	Transmisiva, activa y modelización.
Recursos:	Pizarra tradicional, calculadora, libro de texto y material de apoyo elaborado por el docente.
Organización:	Individual.

Tabla 14. Sesión 7. Elaboración propia

SESIÓN 8: Razones trigonométricas de 0° a 360°	
Desarrollo: Se inicia la clase con un resumen de los conceptos más importantes aprendidos en las anteriores sesiones. Posteriormente, se avanza en la teoría, definiendo la circunferencia goniométrica como aquella de centro en el origen y radio 1. En ella, resulta sencillo definir y visualizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Como apoyo se empleará el siguiente recurso de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc. Es una plantilla realizada en Geogebra que permite ver la variación de las distancias seno, coseno y tangente en función de la variación del ángulo α. Se explica el método de reducción de ángulos al primer cuadrante y los signos del seno y coseno en los cuatro cuadrantes. Se plantea la actividad 19 para realizar y corregir en clase.	
Contenidos:	1.2, 1.7, 3.1.
Criterios de evaluación:	CE.1.2, CE.1.8, CE.1.11, CE.1.12, C.E.3.1.
Objetivos:	4, 5, 6, 13.
Competencias clave:	CMCT, CCL, CAA, CD
Metodología:	Transmisiva, activa y uso de las TICs.
Recursos:	Pizarra tradicional, ordenador de clase, proyector, conexión a internet, calculadora, libro de texto.
Organización:	Individual.

Tabla 15. Sesión 8. Elaboración propia

SESIÓN 9: Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas. Funciones trigonométricas.	
Desarrollo: El docente explica los ángulos de medidas cualesquiera, indicando que los valores comprendidos entre 0° y 360° nos permiten medir cualquier ángulo, es decir, se puede interpretar 410° como una vuelta completa (360°) más un ángulo de 50°, lo cual quiere decir, que las razones trigonométricas de 410° son las mismas que las 50°. El alumnado realiza la actividad 20 que además de lo explicado en clase incluye ejercicios de repaso de conversión del sistema sexagesimal a radianes o viceversa. Mientras que el alumnado realiza la actividad propuesta, el docente introduce al alumno de altas capacidades las funciones trigonométricas. Para ello, además de lo incluido en el libro de texto, emplea Geogebra (https://www.geogebra.org/m/zF5GzAKV). A continuación, se completa una tabla con los valores de unos ángulos y sus razones trigonométricas y posteriormente se representa gráficamente para estudiar el dominio de las funciones trigonométricas. (actividad 21)	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 3.1, 3.2,
Criterios de evaluación:	CE.1.2, CE.1.3, CE.1.4, CE.1.8, CE.1.11, CE.1.12, C.E.3.1.
Objetivos:	2, 4, 5, 6, 11, 13, 14
Competencias clave:	CMCT, CCL, CAA, CD
Metodología:	Transmisiva, activa y uso de las TICs.
Recursos:	Pizarra tradicional, ordenador de clase, proyector, conexión a internet, calculadora, libro de texto.
Organización:	Individual.

Tabla 16. Sesión 9. Elaboración propia

SESIÓN 10: Actividad en exterior. Modelización.	
Desarrollo: Se propone a los alumnos la realización de un trabajo de una actividad en el patio de modelización. Las especificaciones de esta tarea se recogen en la actividad 22.	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 3.3.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.4, CE.1.5, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.10, CE.1.11, C.E.3.1, CE.3.2, CE.3.3.
Objetivos:	2, 4, 5, 6, 11, 13, 14, 15.
Competencias clave:	CMCT, CCL, CAA, SIEP, CSV
Metodología:	Modelización y trabajo cooperativo.
Recursos:	Instrumentos de medición: cinta métrica, teodolito.
Organización:	Grupos.

Tabla 17. Sesión 10. Elaboración propia

SESIÓN 11: Presentación de resultados tarea de modelización. Resolución de dudas para prueba de evaluación.	
Desarrollo: Se inicia la clase con la presentación de los resultados de la tarea de modelización por grupos. La intervención del profesor solo se hace necesaria si detecta que las respuestas que se están dando por parte del alumnado no son correctas. Una vez finalizadas las intervenciones se resolverán las dudas que haya por parte de los discentes para la prueba de evaluación que se realiza en la sesión 12. Si se dispone de tiempo tras la resolución de las dudas, se propone resolver aquellos ejercicios y problemas de la relación final del libro de texto que no se hayan realizado anteriormente.	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 3.3.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.4, CE.1.5, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.10, CE.1.11, C.E.3.1, CE.3.2, CE.3.3.
Objetivos:	2, 4, 5, 6, 11, 13, 14, 15.
Competencias clave:	CMCT, CCL, CAA, SIEP, CSV
Metodología:	Modelización y trabajo cooperativo. Transmisiva y activa en la resolución de dudas.
Recursos:	Pizarra tradicional, calculadora, libro de texto.
Organización:	Grupal e individual.

Tabla 18. Sesión 11. Elaboración propia

SESIÓN 12: Evaluación.	
Desarrollo: En esta última sesión de la unidad didáctica, se realiza la prueba escrita, con ejercicios y problemas muy similares a los que se han trabajado en clase. Los ejercicios y problemas de la prueba se recogen en la actividad 23.	
Contenidos:	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6.
Criterios de evaluación:	CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.6, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.10, C.E.3.1, CE.3.2, CE.3.3.
Objetivos:	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.
Competencias clave:	CMCT, CCL, CAA, SIEP.
Metodología:	Modelización y trabajo cooperativo. Transmisiva y activa en la resolución de dudas.
Recursos:	Calculadora.
Organización:	Individual.

Tabla 19. Sesión 12. Elaboración propia

Anexo II. Actividades.

Actividad 1.

1. Identifica en la siguiente figura los ángulos de 15° y 60° .

Dibuja aproximadamente los ángulos de 40° y 80° .

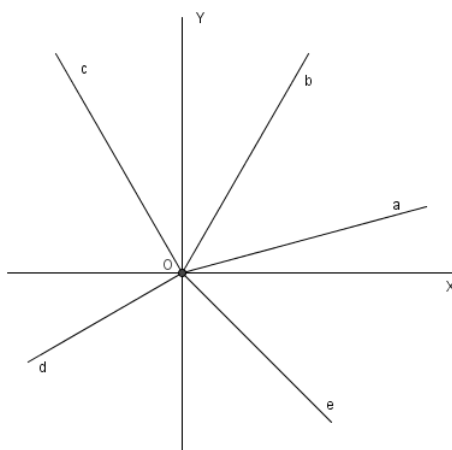


Ilustración 47. Identificación de ángulos. Elaboración propia.

2. Identifica los ángulos que son complementarios y los que son suplementarios.

Un ángulo complementario es aquel con el cual se puede formar un ángulo recto, es decir, dos ángulos son complementarios si suman 90° .

Asimismo, un ángulo suplementario es aquel con el que se puede configurar un ángulo llano. Es decir, dos ángulos suplementarios suman 180° .

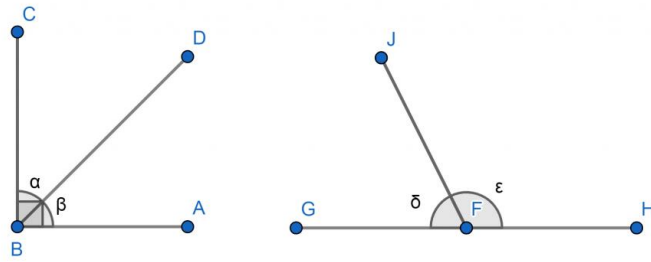


Ilustración 48. Ángulos complementarios y ángulos suplementarios. Fuente: <https://economipedia.com/definiciones/angulo-complementario-y-suplementario.html>

En la imagen superior, por ejemplo, α y β son ángulos complementarios, mientras que δ y ϵ son suplementarios.

3. Convierte las siguientes medidas de ángulos de grados a radianes:

a) 65° b) 136° c) -75° d) 210°

4. A continuación, convierte la medida de los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) π rad c) $2,5\pi$ rad d) $\frac{5\pi}{2}$ rad

Actividad 2.



Ilustración 48. Tipos de triángulos. Fuente:

https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Tri%C3%A1ngulos/Clasificaci%C3%B3n_de_Tri%C3%A1ngulos_mi369842vp

Actividad 3.

Hallar el valor de x en los siguientes triángulos:

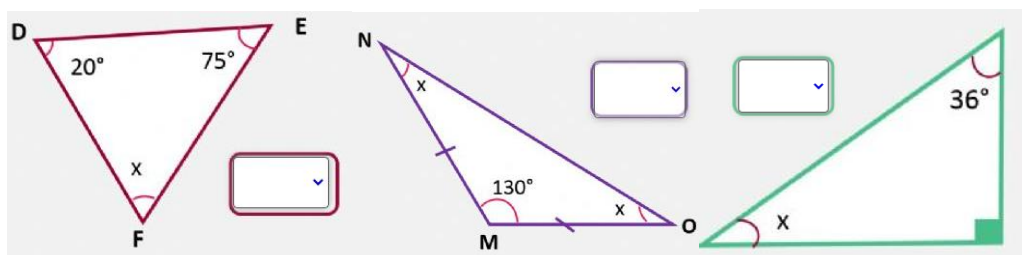


Ilustración 49. Cálculo de ángulos interiores de un triángulo. Fuente:

https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Pol%C3%ADgonos/Tri%C3%A1ngulos - suma de %C3%A1ngulos_fe1177566yh

Actividad 4.

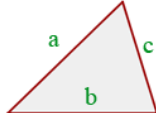
Triángulo Equilátero	Triángulo Isósceles	Triángulo Escaleno
$P = 3 \cdot l$	$P = 2 \cdot l + b$	$P = a + b + c$
		

Ilustración 50. Cálculo del perímetro en triángulos. Fuente:

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/area-y-perimetro-de-un-triangulo.html>

Actividad 5.

Una escalera cuya longitud es de 3 metros se encuentra apoyada en una pared en el suelo horizontal y alcanza 2,8 m sobre esa pared vertical. ¿A qué distancia está al pie de la escalera de la base de la pared?

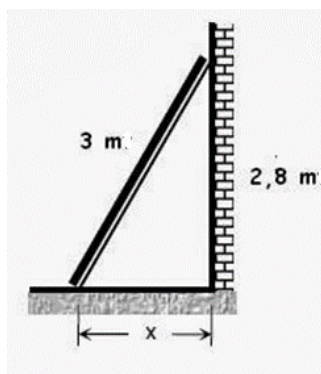


Ilustración 51. Aplicación Teorema de Pitágoras. Fuente: http://pitagorasyamigos.blogspot.com/p/blog-page_1.html

Actividad 6.

Una piscina tiene 2,3 m de ancho; situándonos a 116 cm del borde, desde una altura de 1,74 m, observamos que la visual une el borde de la piscina con la línea del fondo. ¿Qué profundidad tiene la piscina?

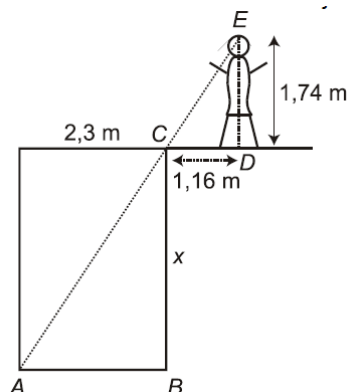


Ilustración 52. Semejanza de triángulos. Fuente:

<http://www.alcaste.com/departamentos/maticas/secundaria/Cuarto/06 Semejanza/Ejercicios resueltos.pdf>

Actividad 7.

Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β del triángulo ABC sabiendo que es rectángulo.

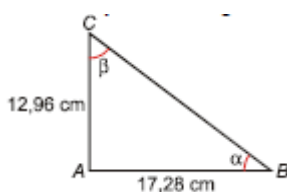


Ilustración 53. Cálculo razones trigonométricas. Fuente:

https://www.matematicasonline.es/almacen/4eso_op_B/ejercicios_resueltos/trigonometria.pdf

Actividad 8.

Ejercicios resueltos

- 1** Sabiendo que $\cos \alpha = 0,63$, calcular $s = \sin \alpha$ y $t = \tan \alpha$.

Mediante la igualdad I, conocido $\sin \alpha$ obtenemos $\cos \alpha$, y viceversa.

$$s^2 + 0,63^2 = 1 \rightarrow s^2 = 1 - 0,63^2 = 0,6031 \rightarrow s = \sqrt{0,6031} = 0,777$$

(Solo tomamos la raíz positiva, porque $\sin \alpha$ ha de ser positivo).

$$t = \frac{0,777}{0,63} = 1,23$$

Solución: $\sin \alpha = 0,777$ $\tan \alpha = 1,23$

- 2** Sabiendo que $\tan \alpha = 2$, calcular $s = \sin \alpha$ y $c = \cos \alpha$.

Mediante las igualdades I y II, conocida $\tan \alpha$ se obtienen, resolviendo un sistema de ecuaciones, los valores de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s}{c} = 2 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 4c^2 + c^2 = 1 \rightarrow 5c^2 = 1 \end{array}$$

$$c^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{solo tomamos la raíz positiva}} c = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{racionalizando}} c = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Solución: $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,894$ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447$

Ilustración 54. Ejemplo libro de texto Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Actividad 9.

Piensa y practica

1 $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$. Calcula $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

2 $\operatorname{tg} \beta = 0,53$. Calcula $\operatorname{sen} \beta$ y $\cos \beta$.

Ilustración 55. Piensa y practica libro de texto Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Actividad 10.

Piensa y practica

3  Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, deduce el valor de $\operatorname{sen} 45^\circ$ y de $\cos 45^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.

4 Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$, halla el valor de $\cos 30^\circ$ y de $\operatorname{tg} 30^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.

5 Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

6 Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

Ilustración 56. Piensa y practica libro de texto Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Actividad 11.

Completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:

$\operatorname{sen} \alpha$	0,94		$4/5$			
$\cos \alpha$		0,82			$\sqrt{3}/2$	
$\operatorname{tg} \alpha$				3,5		1

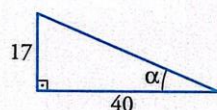
Ilustración 57. Piensa y practica libro de texto Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

En las operaciones donde aparezcan fracciones o radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

Actividad 12.

Los dos catetos de un triángulo miden 17 cm y 40 cm. Hallar los ángulos del triángulo.

En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 27° , y la hipotenusa, 46 m. Hallar los dos catetos.

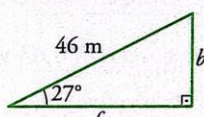


El ángulo α se relaciona con los dos catetos mediante su tangente: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{40} = 0,425$

Hallamos con la calculadora el ángulo cuya tangente es 0,425:

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} 0,425 \boxed{=}$ $23^\circ 1' 31,77''$. Es decir, $\alpha = 23^\circ 1' 32''$.

El otro ángulo es su complementario: $90^\circ - 23^\circ 1' 32'' = 66^\circ 58' 28''$



b es el cateto opuesto al ángulo de 27° . Por tanto:

$$\operatorname{sen} 27^\circ = \frac{b}{46} \rightarrow b = 46 \cdot \operatorname{sen} 27^\circ = 20,88 \text{ m}$$

$$\text{Análogamente: } \cos 27^\circ = \frac{c}{46} \rightarrow c = 46 \cdot \cos 27^\circ = 40,99 \text{ m}$$

Ilustración 58. Ejercicios resueltos libro de texto Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Actividad 13.

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54° . Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.
2. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Problemas prácticos de puntos inaccesibles.

3. Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60° . Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80° . Halla la altura de la torre.

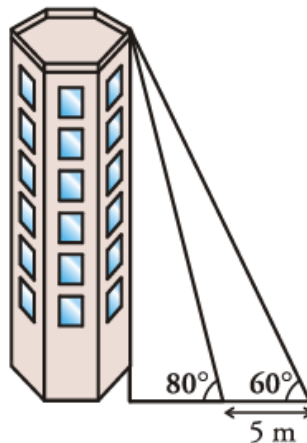


Ilustración 59. Ejercicios resolución de triángulos rectángulos. Fuente:

<https://www.matematicasonline.es/pdf/ejercicios/Resolucion%20de%20triangulos%20rectangulos.pdf>

4. Calcular la altura de la torre de refrigeración de una central nuclear si se sabe que su sombra mide 271 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30° .

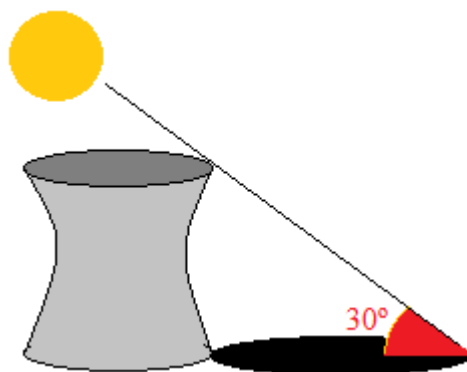


Ilustración 60. Ejercicio resolución de triángulos rectángulos. Fuente:

https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/trigonometria/problemas-resueltos-trigonometria-secundaria-seno-coseno-triangulo-angulo.html

5. Un globo está sujeto al suelo mediante un cordel de 50 m de largo, que forma con el suelo un ángulo de 48° por efecto del viento. Suponiendo que nuestro cordel está completamente recto, calcular la altura del globo.

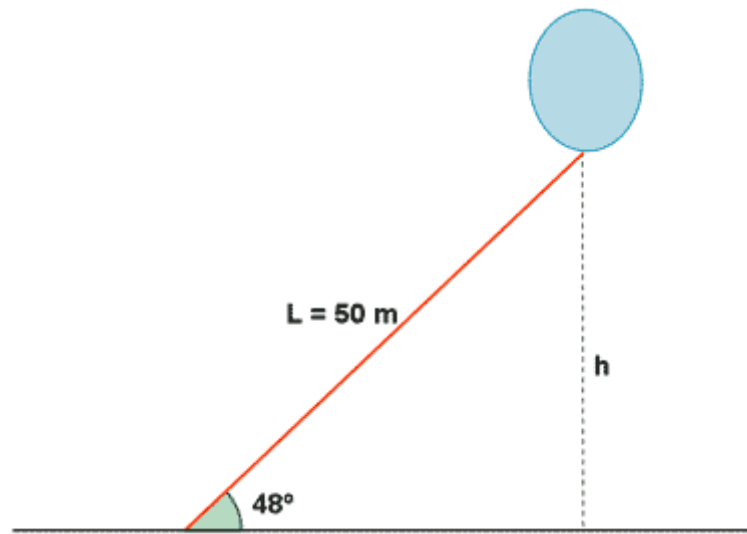


Ilustración 61. Ejercicio resolución de triángulos rectángulos. Fuente: https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/triangulos/problemas/p_trian_rectan_2.html

6. Desde un faro colocado a 35 m sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es de 40° . ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

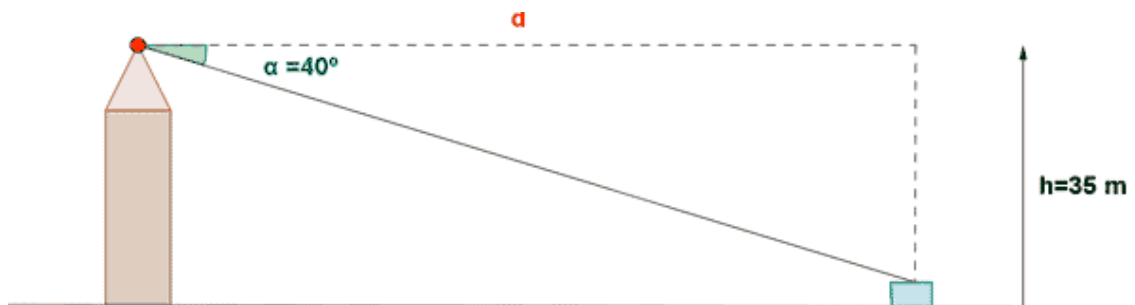


Ilustración 62. Ejercicio resolución de triángulos rectángulos. Fuente: https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/triangulos/problemas/p_trian_rectan_2.html

7. Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla a la parte más alta y se obtiene un ángulo de elevación de 55° . Alejándose 5m del río en la misma dirección del árbol se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 42° . Calcula la anchura del río y la altura del árbol.

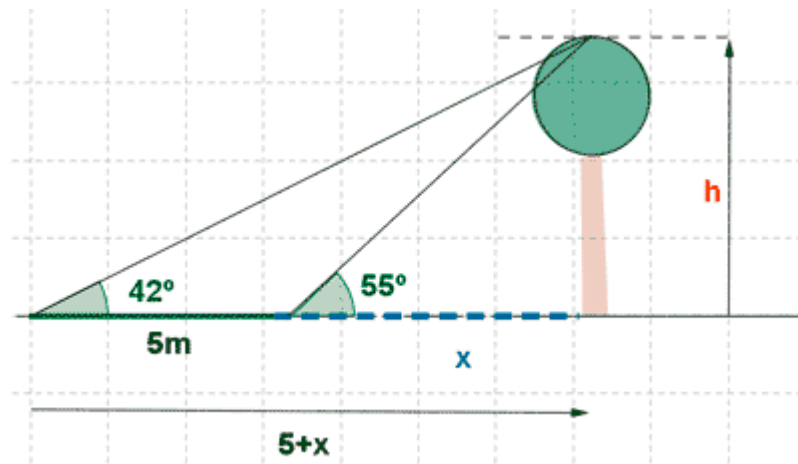


Ilustración 63. Ejercicio resolución de triángulos rectángulos. Fuente:

https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/triangulos/problemas/p_trian_rectan_2.html

Actividad 14.

Esta actividad la he desarrollado con el objetivo de que el alumnado se enfrente en primer lugar de forma individual a su resolución y posteriormente, en grupos, discutan posibles soluciones.

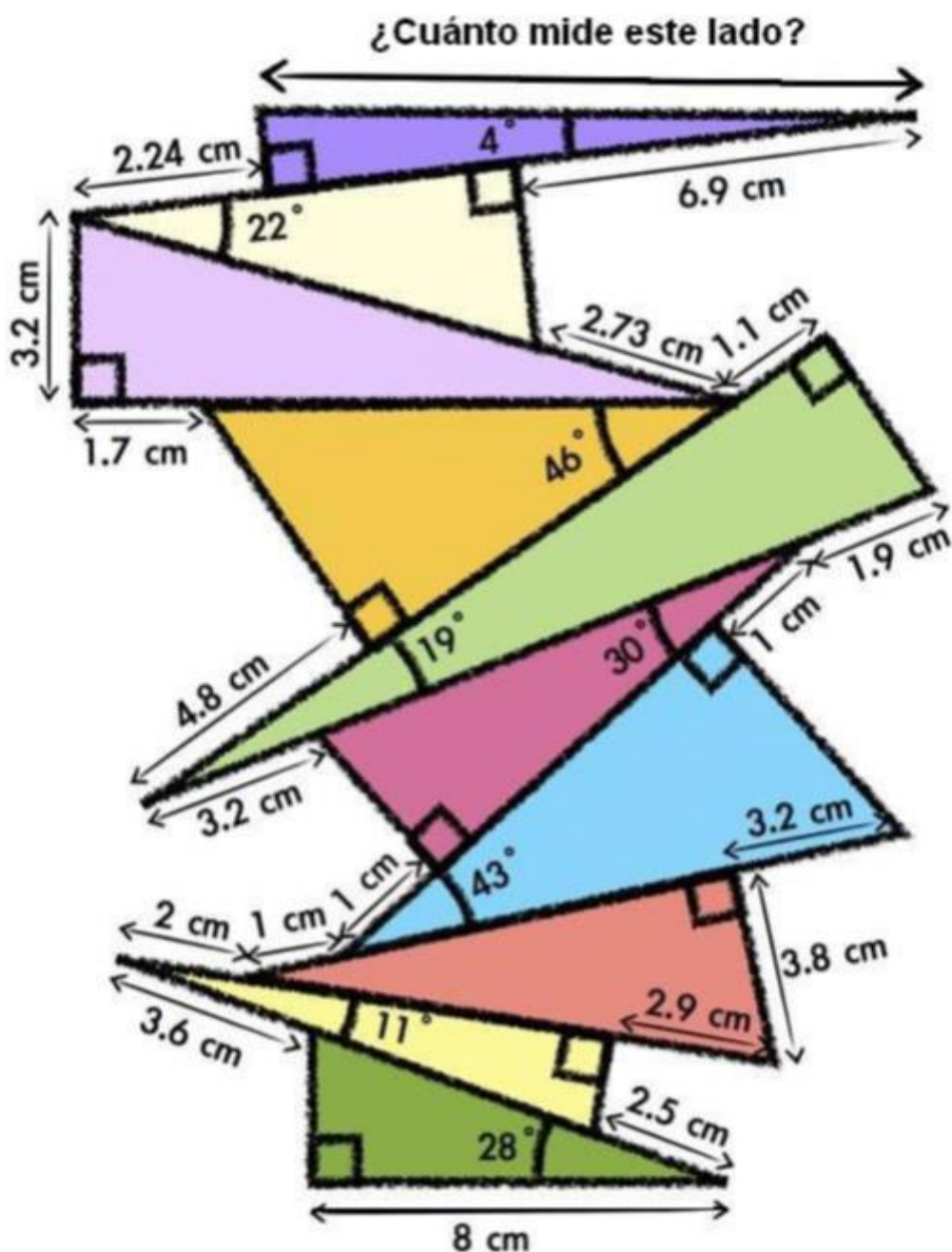
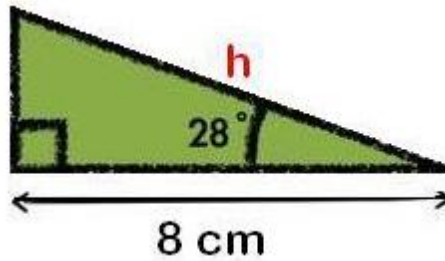


Ilustración 64. García, A. (12 de septiembre de 2017). TRIGONOMETRÍA: ¿CUÁNTO MIDE ESTE LADO? Juegos y matemáticas. <https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2017/09/12/trigonometria-cuanto-mide-este-lado/>

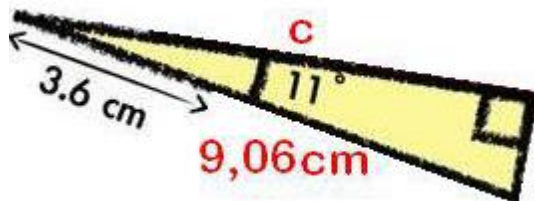
Se comienza por el triángulo inferior y se calculan los diferentes lados que son necesarios para continuar subiendo en los triángulos.

Triángulo 1



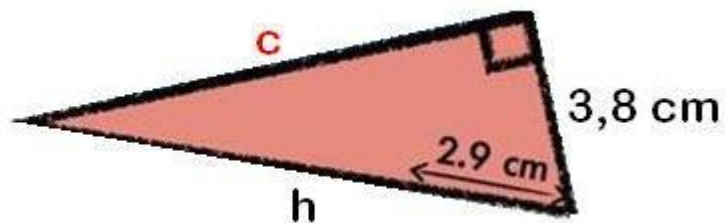
$$\cos 28^\circ = \frac{8}{h} \Rightarrow h = 9,06 \text{ cm}$$

Triángulo 2



$$\cos 11^\circ = \frac{c}{9,06 - 2,5 + 3,6} \Rightarrow c = 9,97 \text{ cm}$$

Triángulo 3

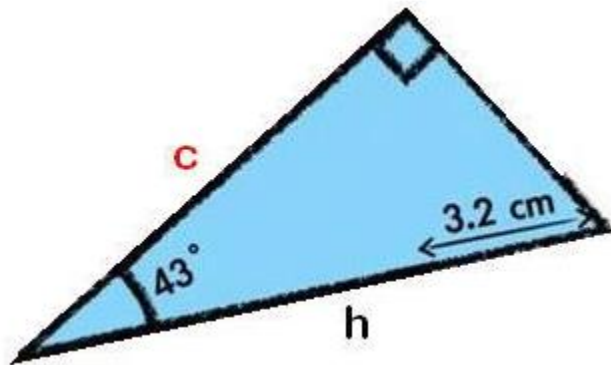


$$h = 9,97 - 2 + 2,9 = 10,87 \text{ cm}$$

Se aplica el Teorema de Pitágoras para calcular el cateto c:

$$h^2 = 3,8^2 + c^2 \Rightarrow c = 10,18 \text{ cm}$$

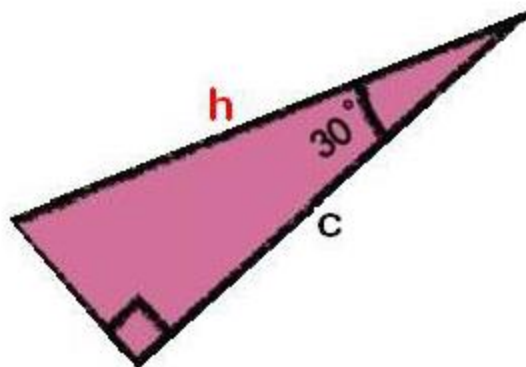
Triángulo 4



$$h = 10,18 + 3,2 - 1 = 12,38 \text{ cm}$$

$$\cos 43^\circ = \frac{c}{12,38} \implies c = 9,05 \text{ cm}$$

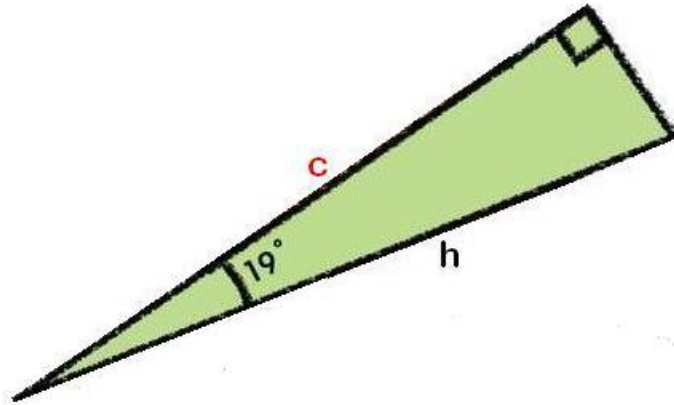
Triángulo 5



$$c = 9,05 + 1 - 1 = 9,05 \text{ cm}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{9,05}{h} \implies h = 10,45 \text{ cm}$$

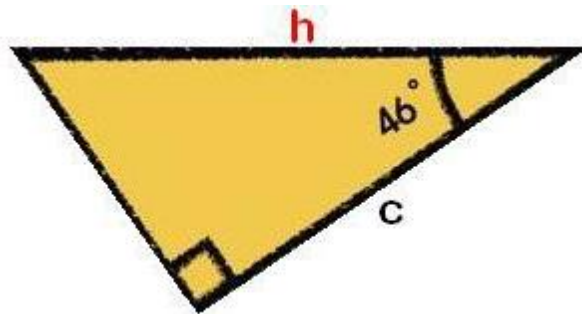
Triángulo 6



$$h = 10,45 + 3,2 + 1,9 = 15,55 \text{ cm}$$

$$\cos 19^\circ = \frac{c}{15,55} \implies c = 14,70 \text{ cm}$$

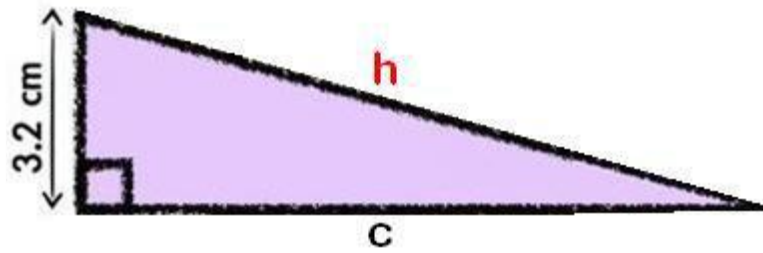
Triángulo 7



$$c = 14,70 - 4,8 - 1,1 = 8,8 \text{ cm}$$

$$\cos 46^\circ = \frac{8,8}{h} \implies h = 12,67 \text{ cm}$$

Triángulo 8

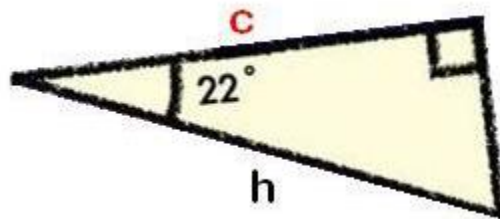


$$c = 12,67 + 1,7 = 14,37 \text{ cm}$$

Se aplica el Teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa (h):

$$h^2 = 14,37^2 + 3,2^2 \Rightarrow h = 14,72 \text{ cm}$$

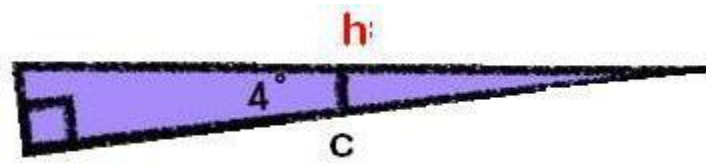
Triángulo 9



$$h = 14,72 - 2,73 = 11,99 \text{ cm}$$

$$\cos 22^\circ = \frac{c}{11,99} \Rightarrow c = 11,12 \text{ cm}$$

Triángulo 10



$$c = 11,12 - 2,24 + 6,9 = 15,78 \text{ cm}$$

$$\cos 4^\circ = \frac{15,78}{h} \Rightarrow h = 15,82 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el lado buscado mide 15,82 cm. Se ha realizado un redondeo con dos decimales.

Actividad 15.

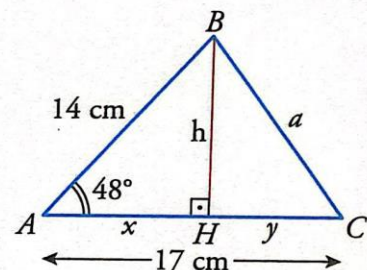
→ PROBLEMA 1

El triángulo del margen no es rectángulo. Para obtener el lado desconocido, lo partimos, mediante la altura, en dos triángulos rectángulos con un lado común:

- El triángulo ABH es rectángulo. En él conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. Podemos calcular los dos catetos:

$$\operatorname{sen} 48^\circ = \frac{h}{14} \rightarrow h = 14 \cdot \operatorname{sen} 48^\circ = 10,4 \text{ cm}$$

$$\cos 48^\circ = \frac{x}{14} \rightarrow x = 14 \cdot \cos 48^\circ = 9,37 \text{ cm}$$



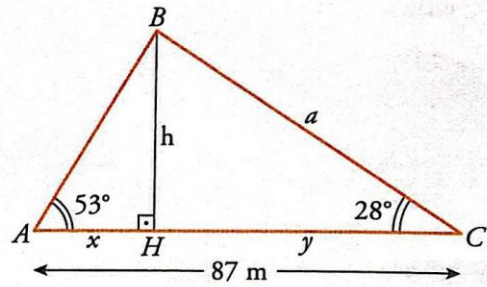
- En el triángulo rectángulo BHC conocemos $\overline{BH} = h = 10,4 \text{ cm}$ y podemos calcular muy fácilmente $\overline{HC} = y = 17 - x = 17 - 9,37 = 7,63 \text{ cm}$.

Conocidos los dos catetos, calculamos la hipotenusa:

$$a = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{10,4^2 + 7,63^2} = 12,9 \text{ cm}$$

→ PROBLEMA 2

En este caso, para resolver el triángulo del margen, hacemos como en el caso anterior: la altura h determina dos triángulos rectángulos. Con ellos vamos a relacionar x e y .



$$\left. \begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABH}, \operatorname{tg} 53^{\circ} = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \operatorname{tg} 53^{\circ} \\ \text{En } \widehat{BHC}, \operatorname{tg} 28^{\circ} = \frac{h}{y} \rightarrow h = y \operatorname{tg} 28^{\circ} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \operatorname{tg} 53^{\circ} = y \operatorname{tg} 28^{\circ} \\ 1,33x = 0,53y \end{array}$$

Como $x + y = 87$, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

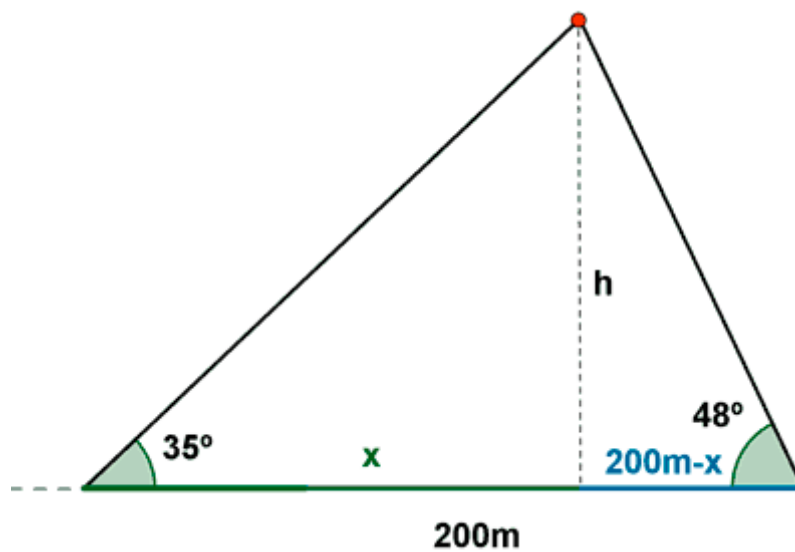
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 87 \\ 1,33x = 0,53y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 87 - y \\ 1,33(87 - y) = 0,53y \rightarrow y = 62,2 \text{ m} \end{array}$$

Conocido y , podemos calcular a :

$$\text{En } \widehat{BHC}, \cos 28^{\circ} = \frac{y}{a} \rightarrow a = \frac{62,2}{\cos 28^{\circ}} = 70,4 \rightarrow a = 70,4 \text{ m}$$

Actividad 16.

1. Dos focos situados en el suelo y en lados distintos, iluminan el campanario de una iglesia. La suma de las distancias de los focos hasta el pie de la torre es de 200 m. Si los ángulos que forman los haces de luz con el suelo son de 35° y 48° respectivamente. ¿Qué altura tiene el campanario?



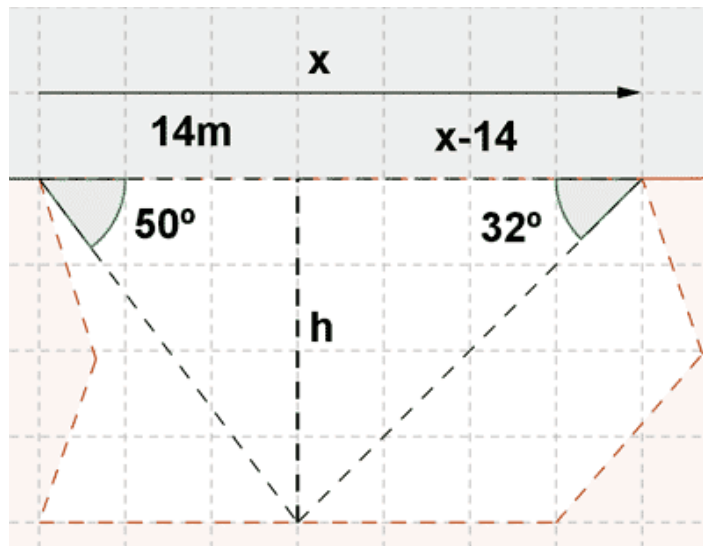
Ilustraciones 67. Resolución de triángulos no rectángulos. Fuente:

https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/triangulos/problemas/p_trian_rectan_2.html

2. Para construir un puente hemos tomado las medidas que se muestran en el dibujo.

a) ¿Qué longitud tendrá el puente?

b) ¿Cuál es la altura máxima de los pilares que lo sujetan?



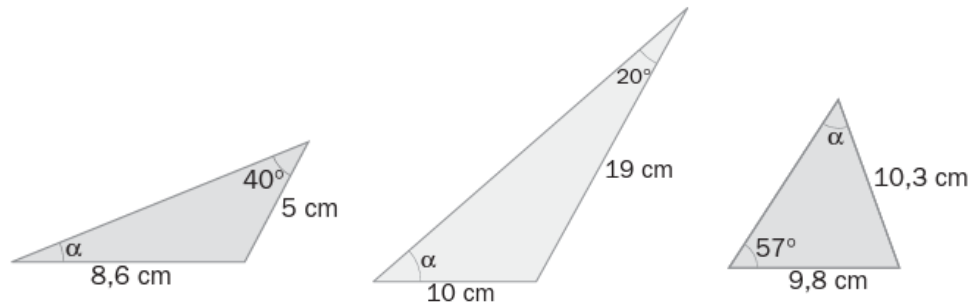
Ilustraciones 68. Resolución de triángulos no rectángulos. Fuente:

https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/triangulos/problemas/p_trian_rectan_2.html

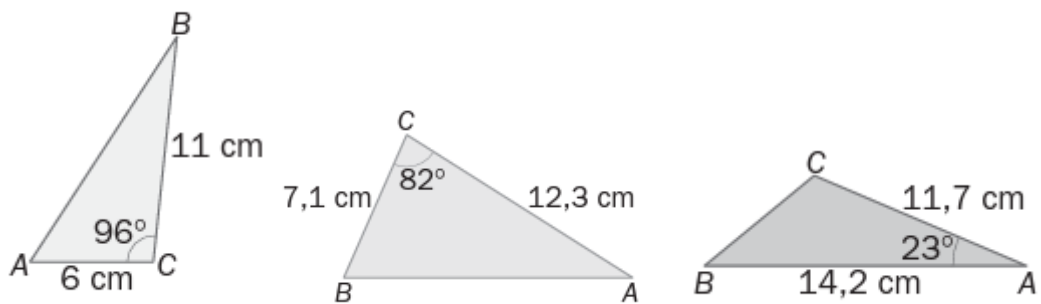
Actividad 17.

Ejercicios del Teorema del Seno y Teorema del Coseno.

1. Calcula el ángulo α de los siguientes triángulos:



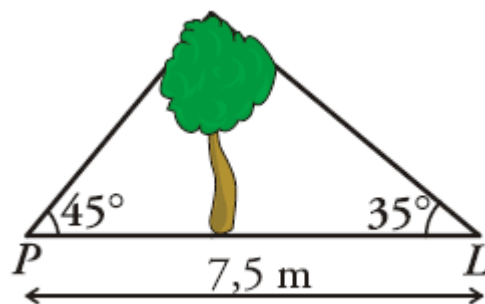
2. Calcula la medida del lado desconocido de los siguientes triángulos:



Actividad 18.

Ejercicios de refuerzo.

1. Queremos fijar un poste de 3,5 m de altura, con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el poste bajo un ángulo de 40° . ¿A qué distancia del poste sujetaremos el cable? ¿Cuál es la longitud del cable?
2. Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



- a) Calcula la altura del árbol.
- b) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?

Actividad 19.

Signos del seno y coseno en los cuatro cuadrantes:

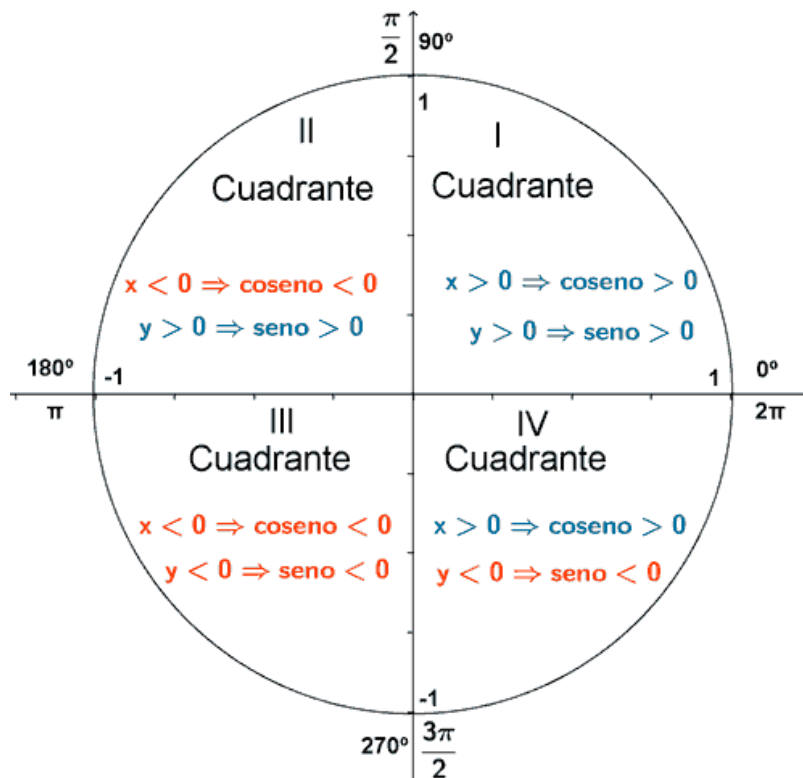
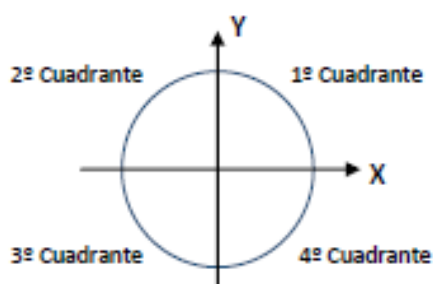


Ilustración 69. Elaboración propia.

- Representa e indica a qué cuadrante pertenece los siguientes ángulos. En caso necesario, reducirlos al primer giro.



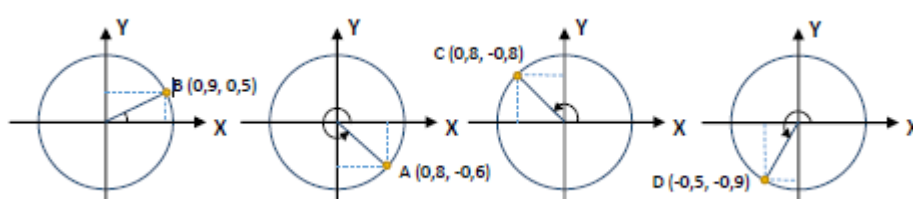
- 235°
- 347°
- -640°
- 1225°
- 886°

¿Qué significado tiene el signo de un ángulo?

2. Conociendo las razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° , hallar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 150° b) 225° c) 240° d) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) $\frac{7\pi}{6}$ rad

3. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos que se muestran en las siguientes gráficas:



Actividad 20.

1. Conociendo las razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° , hallar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 150° b) 225° c) 240° d) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) $\frac{7\pi}{6}$ rad

2. Expresar con valores comprendidos entre -180° y 180° estos ángulos:

a) 1837° b) 3358° c) 1381° d) 3805°

Piensa y practica

anayaeducacion.es Convierte unidades de medida de ángulos.

1 Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 25° b) 100° c) 150° d) 250°

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo: $180^\circ = \pi$ rad = 3,14 rad.

2 Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 0,5 rad b) 1,5 rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad
 d) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) 4,8 rad f) 3π rad

Ilustración 70. Ejercicios Piensa y Práctica del libro de texto Editorial Anaya. (Colera et al., 2021)

Actividad 21.

Se tiene que completar la siguiente tabla de valores para el seno, coseno y tangente. A continuación, se representa gráficamente y de forma visual se puede analizar que existe un desfase entre el seno y el coseno de $\pi/2$. Las funciones seno y coseno son continuas en todo el dominio de $\mathbb{R}$ mientras que la función tangente no lo es.

Grado Sexagesimal	Radianes	Sen α	Cos α	Tan α
0°	0			
45°	$\pi / 4$			
90°	$\pi / 2$			
135°	$3 \pi / 4$			
180°	π			
225°	$5 \pi / 4$			
270°	$3 \pi / 2$			
315°	$7 \pi / 4$			
360°	2π			

Tabla 20. Valores razones trigonométricas. Elaboración propia



Ilustración 71. Representación de funciones trigonométricas (Larrosa-Cañestro, 2019).

Actividad 22.

Con el objeto de fomentar el aprendizaje cooperativo y que los estudiantes pongan en práctica los conceptos aprendidos en la unidad didáctica de trigonometría en su entorno exterior más inmediato, el patio. Para ello se formarán grupos de 4 alumnos que pondrán en marcha la actividad siguiendo las pautas establecidas por el docente.

Será necesario el alquiler de un teodolito (equipo de medición topográfica) ya que el colegio no dispone de este. Con este aparato, tal y como se detalló en el apartado 4.8. del presente estudio, se obtienen los ángulos necesarios para el cálculo.

El profesor aporta una tabla, tal como la que sigue, que les facilite la toma de datos:

Nº	Objeto medido	Altura Teodolito	Distancia horizontal	Ángulo	Altura
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Tabla 21. Toma de datos actividad modelización. Elaboración propia

El uso del teodolito estará siempre supervisado por el docente, quien debe conocer a la perfección el manejo de este.

Los pasos para seguir en su uso son:

1. Se coloca en el punto de partida para la medición. La ubicación del instrumento marca el primer punto en el ángulo que desea medir.
2. Realizar el ajuste de la altura del teodolito de modo que se vea cómodamente a través de la lente. Con los botones de ajuste en el instrumento para ajustar la altura, el movimiento lateral y el enfoque.
3. Hay que asegurarse de que el teodolito está perfectamente nivelado mediante el ajuste de la plomada. La pieza se encuentra debajo del telescopio, en la parte inferior.
4. Se mira por el ocular, moviéndolo para ajustar el ángulo de medición. Una línea roja indica las áreas que están siendo medidas. En el lado de alcance de visión del instrumento aparecen las medidas horizontales y verticales.

La duración de la actividad, teniendo en cuenta que los alumnos abandonan el aula, es inferior a la de una sesión habitual. Por lo tanto, se recomienda entregar en los días previos a la actividad la información de esta para que así se aproveche al máximo el tiempo en el patio. Además, el equipo de medida deberá tenerse preparado en el lugar de toma de datos.

Es recomendable ir realizando comparativas entre los distintos grupos en el caso de medir los mismos objetos.

El profesor supervisa la tarea, pero fomentando la autonomía de los alumnos en el desarrollo de cada una de las fases.

Concluir, que la elaboración de la parte escrita de la actividad la llevarán a cabo los distintos grupos fuera del horario lectivo, debiéndose presentar los resultados en la siguiente sesión.

Actividad 23.

Prueba de evaluación.

1. Transforma en radianes los ángulos expresados en grados y viceversa. (1punto)

- a) 120°
- b) 315°
- c) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
- d) $\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$

2. De un ángulo agudo se sabe que su seno es $3/5$. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones. (1punto)

3. Hallar el valor del lado x en los siguientes triángulos rectángulos: (1.5 puntos)

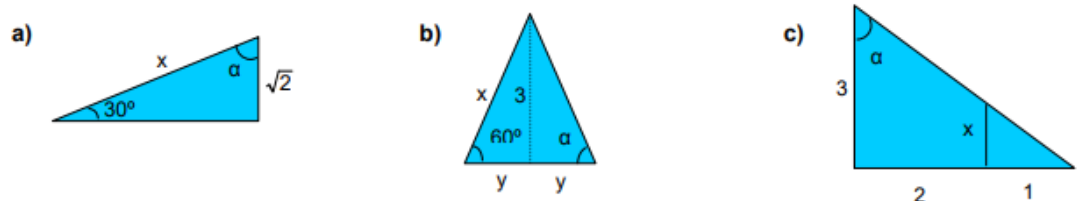


4. ¿Puede existir un ángulo tal que $\sin \alpha = 1/5$ y $\cos \alpha = 3/5$? (0,5 puntos)

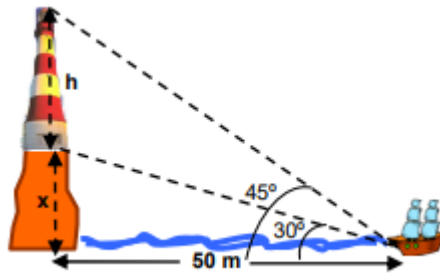
¿Y para $\tan \alpha = 4/3$ y $\cos \alpha = 3/5$?

(no se puede usar calculadora)

5. Hallar las incógnitas en los siguientes triángulos (no utilizar calculadora sino raíces, dando además el resultado racionalizado): (1.5 puntos)

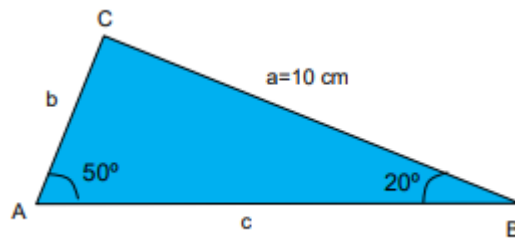


6. En la siguiente figura:

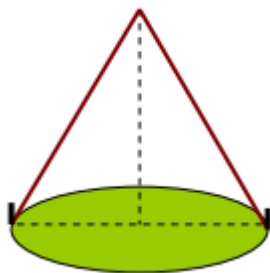


Hallar la altura del acantilado, x , y la del faro, h . (1 punto)

7. En el siguiente triángulo hallar C , b y c , trazando para ello previamente una altura. (1 punto)



8. Una tienda de campaña tiene forma cónica. La parte central tiene una altura de 4 m y está sujeta en el suelo con dos cables de 12 m de longitud. Calcular: a) El ángulo que forman los cables con el suelo. b) La distancia entre los dos puntos de anclaje (Sin aplicar el teorema de Pitágoras). (2 puntos)



Anexo III. Rúbricas para evaluación.

Rúbrica 1. Prueba escrita. Ponderación del 60% de la nota de la unidad didáctica.

Pregunta 1 (1 punto): 0,25 cada apartado correcto.

Pregunta 2 (1 puntos): 0,5 cada razón trigonométrica.

Pregunta 3 (1,5 puntos): 0,5 cada apartado correcto.

Pregunta 4 (0,5 puntos): 0,25 cada apartado correcto.

Pregunta 5 (2 puntos): 0,5 cada cuestión correcta.

Pregunta 6 (1 punto): 0,5 cada incógnita.

Pregunta 7 (1 punto): 0,33 cada incógnita.

Pregunta 8 (2 puntos): 1 cada apartado correcto.

Tras la búsqueda de distintas opciones de evaluación para el resto de las rúbricas y por consenso con profesorado de matemáticas en el período de prácticas, se consideran las que siguen a continuación como las que ofrecen un mayor detalle de ítems evaluables en el alumno que ayudan a su vez a conseguir una mejor adaptación individualizada de los aprendizajes.

Rúbrica 2. RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE LAS INTERVENCIONES EN CLASE (Ponderación del 10%)

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Pronunciación y entonación	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	%	
Volumen y contacto visual	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes y algunas oyentes del grupo.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	%	
Recursos y apoyos	Utiliza diversos apoyos visuales y referencias al trabajo realizado a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	Utiliza algunos apoyos visuales a lo largo de su exposición y referencias al trabajo realizado que refuerzan el contenido.	Utiliza pocos apoyos visuales a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	No utiliza apoyos visuales en su exposición o apenas lo hace.	%	
Contenido	Demuestra un completo dominio del tema tratado, destacando claramente los aspectos importantes, exponiéndolo de manera clara y correcta, y utilizando un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo, no siendo certero en las respuestas a las preguntas del grupo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	%	
Cuestiones formales y secuencia	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo adecuado.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo aproximado.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo establecido.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse al tiempo y manifestar interés y control emocional.	%	
VALORACIÓN FINAL						

Ilustración 72. Rúbrica evaluación intervenciones en clase. Fuente: <https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable/rubrica-para-la-evaluacion-de-pruebas-escritas-2/>

Rúbrica 3. RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES INDIVIDUALES. (Ponderación del 20%)

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	%	
Vocabulario empleado	El vocabulario es rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	El vocabulario es algo variado, con palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	%	
Signos de puntuación	Utiliza correctamente los signos de puntuación (comas, puntos y signos de interrogación o exclamación, etc.).	Utiliza correctamente los signos de puntuación, aunque presenta ocasionalmente algún error.	Utiliza los signos de puntuación, pero no siempre de forma correcta.	Utiliza muy poco los signos de puntuación o lo hace de manera incorrecta.	%	
Corrección ortográfica	El texto está escrito correctamente, sin errores ortográficos.	El texto está escrito con un error ortográfico.	El texto presenta dos o tres errores ortográficos.	El texto presenta un volumen importante de errores ortográficos.	%	
Estructura del texto	Establece planificación previa y respeta la estructura del texto planteado (introducción, desarrollo, conclusión o desenlace)	Establece planificación previa y respeta la estructura del texto planteado, con algún error ocasional.	Se respeta la estructura del texto solicitado, aunque tiene varios errores.	Se expone el texto sin respetar la estructura del texto solicitado.	%	
Contenido	Demuestra un gran conocimiento del tema tratado, ajustándose a la actividad encomendada, y de acuerdo con las fuentes utilizadas.	Demuestra un buen conocimiento del tema tratado, ajustándose a la actividad encomendada y de acuerdo con las fuentes utilizadas.	Demuestra un conocimiento parcial del tema tratado, de acuerdo con las fuentes utilizadas.	Demuestra poco conocimiento del tema tratado y presenta dificultades para consultar las fuentes propuestas.	%	
Originalidad y creatividad	El documento se presenta con aportaciones originales, ilustraciones, gráficos o mapas conceptuales, etc.	El documento se presenta con algunas aportaciones originales, ilustraciones, gráficos o mapas conceptuales, etc.	El documento se presenta con pocas aportaciones originales, ilustraciones, gráficos o mapas conceptuales, etc.	El documento se presenta sin aportaciones por parte del alumno o alumna.	%	
VALORACIÓN FINAL						

Ilustración 73. Rúbrica evaluación actividades individuales. Fuente: <https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable/rubrica-para-la-evaluacion-de-pruebas-escritas-2/>

Rúbrica 4. RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN EN LA PARTICIPACIÓN EN TRABAJOS COOPERATIVOS (Ponderación del 5%)

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Planificación del trabajo	Realiza un uso adecuado de los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con cierta dificultad para ajustarse al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con dificultad y sin ajustarse al plazo previsto.	%	
Responsabilidad	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, valorando especialmente el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades, con alguna dificultad para valorar el esfuerzo individual y colectivo.	Elude sus responsabilidades y tiene dificultades para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	%	
Participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	%	
Habilidades sociales	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen a la cohesión.	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona con dificultades, necesitando ayuda para mantener actitudes respetuosas.	%	
Generación y presentación del producto	Contribuye de manera activa a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con alguna dificultad para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye algo a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con dificultades para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	%	
VALORACIÓN FINAL						

Ilustración 74. Rúbrica evaluación participación en trabajos cooperativos. Fuente: https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable/rubrica_para_la_evaluacion_de_pruebas_escritas-2/

Rúbrica 5. RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE HÁBITOS PERSONALES Y ACTITUD. (Ponderación del 5%)

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Autonomía y confianza	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades de manera habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades con alguna ayuda.	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	%	
Creatividad	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza alguna estrategia creativa en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza alguna estrategia de manera orientada y propone alguna iniciativa creativa con ayuda.	%	
Gestión emocional	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones, no permitiéndole resolver sus situaciones y problemas.	%	
Actitud respetuosa y responsable	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	%	
Corrección en la presentación	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	%	
Conclusión del trabajo	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.	%	
VALORACIÓN FINAL						

Ilustración 74. Rúbrica evaluación hábitos personales y actitud. Fuente: https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable/rubrica_para_la_evaluacion_de_pruebas_escritas-2/

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN DEL DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

El profesor debe elaborar un informe que responda a las siguientes cuestiones:

1. ¿Han sido de utilidad los recursos empleados? ¿Necesitan ser ampliados?
2. Las actividades propuestas, ¿han sido interesantes para el alumnado? ¿se corresponde la dificultad con el nivel esperado? ¿es necesario cambiar la secuenciación?
3. Atención a la diversidad: ¿Se ha adaptado correctamente a las diferencias individuales?
4. ¿Se ha garantizado la participación de todos mediante un clima de contraste de opiniones?
5. ¿El resultado de organizar en grupos para algunas actividades ha sido positivo?
6. ¿Han surgido situaciones no esperadas que han resultado enriquecedoras?
7. ¿Se han cumplido los objetivos propuestos?
8. ¿Dónde se han encontrado los alumnos con más dificultades?