



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Escuela Politécnica Superior de Jaén

Trabajo Fin de Grado

**DISEÑO Y ANÁLISIS DE
ESTRUCTURA ANTIVUELCO
DESTINADA A LA
COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA**

Alumno: Rafael Muñoz Fernández

Tutor: Prof. D. Don Elías López Alba
Dpto.: Ingeniería Mecánica y Minera

Septiembre, 2021

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA



Universidad de Jaén
Escuela Politécnica Superior de Jaén
Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera

Don Elías López Alba, tutor del Proyecto Fin de Carrera titulado: Diseño y análisis de estructura antivuelco destinada a la competición automovilística, que presenta, Rafael Muñoz Fernández autoriza su presentación para defensa y evaluación en la Escuela Politécnica Superior de Jaén.

Jaén, Septiembre de 2021

El alumno:

Los tutores:

Rafael Muñoz Fernández

Elías López Alba
Juan Antonio Almazan Lázaro

Resumen

En este proyecto se plantea el diseño de una estructura de seguridad para la protección de los ocupantes de un vehículo durante la participación en una competición, según la normativa vigente. Se potencia la seguridad, mejorando en lo relativo a la economía y optimizando los recursos en cuanto al material empleado.

Se comenzará introduciendo los distintos elementos básicos que componen dichos vehículos en cuanto a la seguridad activa y pasiva de ellos, planteando conseguir unos objetivos con el diseño planteado.

Para este objeto mencionado, se dimensionará un sistema de seguridad pasiva el cual irá colocado en el interior del habitáculo del vehículo propuesto. Ello supone la realización del diseño y cálculo de la estructura según la normativa empleada para este tipo de elementos, en el Anexo J de la FIA (Federación Internacional del Automóvil).

Inicialmente se realizará un pre-dimensionado de fama analítica. A continuación, se llevarán a cabo una serie de simulaciones estáticas, mediante el método de los elementos finitos (FEM), para comprobar que la estructura cumple con dicha normativa empleando el material 25CrMo4, usado para este tipo de estructuras. Posteriormente, realizando una optimización topológica para reducir en todo lo posible su espesor para ahorrar material, pero sin perder las prestaciones necesarias. Dicho cálculo mediante elementos finitos será contrastado con el cálculo analítico simplificado.

Todos estos ensayos virtuales se realizarán mediante el software ANSYS 18.1 y su diseño en CATIA.

Finalmente, se incluye un presupuesto general tomando en cuenta los rasgos generales de la estructura para su posible fabricación de cara al futuro.

Como resultado, las estimaciones teóricas han sido equiparadas con los resultados obtenidos por simulación, habiéndose reducido su masa y coste, siendo ésta aprobada para el fin establecido.

Abstract

This project proposes the design of a safety structure for the protection of the occupants of a vehicle during participation in a competition, according to current regulations. Safety is enhanced, improving in terms of economy and optimizing resources in terms of the material used.

It will begin by introducing the different basic elements that make up said vehicles in terms of their active and passive safety, proposing to achieve some objectives with the proposed design.

For this aforementioned object, a passive safety system will be dimensioned which will be placed inside the passenger compartment of the proposed vehicle. This means carrying out the design and calculation of the structure according to the regulations used for this type of elements, in Annex J of the FIA (International Automobile Federation).

Initially, a pre-dimensioning of analytical frame will be carried out. Next, a series of static simulations will be carried out, using the finite element method (FEM), to verify that the structure complies with said regulations using the 25CrMo4 material, used for this type of structure. Subsequently, performing a topological optimization to reduce its thickness as much as possible to save material, but without losing the necessary performance. Said calculation using finite elements will be contrasted with the simplified analytical calculation.

All these virtual trials will be carried out using the ANSYS 18.1 software and its design in CATIA.

Eventually, a general budget is included taking into account the general features of the structure for its possible future manufacture.

As a result, the theoretical estimates have been compared with the results obtained by simulation, having reduced the weight and its cost, and this has been approved for the established purpose.

ÍNDICE GENERAL

MEMORIA. DOCUMENTO N°1.

Índice de la memoria

1. Introducción del Proyecto	9
1.1. Introducción	9
1.2. Antecedentes	11
1.3. Justificación del proyecto	12
1.4. Elementos básicos de seguridad.....	14
1.4.1. Seguridad activa.....	14
1.4.2. Seguridad pasiva.....	15
1.5. Objetivos	17
2. Reglamentación a Emplear	17
2.1. Especificaciones de diseño	18
2.2. Restricciones adicionales	28
2.3. Ensayos de carga Estática (FIA)	31
2.3.1. Ensayo A: Carga estática vertical sobre arco principal.....	31
2.3.2. Ensayo B: Carga estática vertical tridimensional sobre arco frontal. .	33
3. Metodología a emplear	35
3.1. Procedimiento	35
3.2. Método analítico	36
3.3. Método de elementos finitos (MEF o FEM).	37
3.3.1. Cálculo lineal	39
3.3.2. Optimización de espesor.	40
4. Diseño.....	41
4.1. Geometría de la estructura.....	41
4.2. Dimensiones y la masa del vehículo.	53
4.3. Aproximación del espesor: Cálculo analítico.	59
4.4. Elección del material	64
4.5. Soldadura del material.....	65
5. Cálculo analítico	66
5.1. Método de la rigidez (método matricial):.....	68
5.2. Comprobación a pandeo de barras:	88
5.3. Consideraciones barras y esfuerzos.	89
5.4. Cálculo analítico Ensayo A con estructura sin optimizar	90
5.5. Cálculo analítico Ensayo B con estructura sin optimizar	96

5.6.	Estudio del Pandeo, Carga critica de Euler, con estructura sin optimizar .	102
5.7.	Consideraciones para optimización topológica	105
5.8.	Cálculo analítico Ensayo A con estructura optimizada.....	108
5.9.	Cálculo analítico Ensayo B con estructura optimizada.....	113
5.10.	Estudio del Pandeo, Carga critica de Euler con estructura optimizada. .	120
6.	Cálculo FEM	123
6.1.	Mallado.....	124
6.2.	Cálculo teórico Ensayo A, método de elementos finitos, con estructura sin optimizar	126
6.2.1.	Resultados.....	127
6.3.	Cálculo teórico ENSAYO B, método de elementos finitos, con estructura sin optimizar	131
6.3.1.	Resultados.....	133
6.4.	Cálculo teórico Ensayo A, método de elementos finitos, con estructura optimizada	137
6.4.1.	Resultados.....	138
6.5.	Cálculo teórico Ensayo B, método de elementos finitos, con estructura optimizada	142
6.5.1.	Resultados.....	145
7.	Análisis comparativo resultados analíticos vs resultados teóricos	149
7.1.	Análisis comparativo Ensayo A con estructura sin optimizar.....	149
7.2.	Análisis comparativo Ensayo B con estructura sin optimizar.....	151
7.3.	Análisis comparativo Ensayo A con estructura optimizada	153
7.4.	Análisis comparativo Ensayo B con estructura optimizada	155
8.	Conclusiones	157
9.	Bibliografía.....	158

ANEXOS. DOCUMENTO N°2.

Índice de los Anexos

1. ANEXO 1: Cálculo analítico Ensayo A con estructura sin optimizar	162
1.1. Introducción.....	162
1.2. Resolución cálculo analítico ensayo A estructura no optimizada	162
2. ANEXO 2: Cálculo analítico Ensayo B con estructura sin optimizar	181
2.1. Introducción.....	181
2.2. Resolución cálculo analítico Ensayo B estructura no optimizada.....	181
3. ANEXO 3: Estudio del pandeo, carga crítica de Euler con estructura sin optimizar.....	188
3.1. Introducción.....	188
3.2. Resolución Estudio a Pandeo.	188
4. ANEXO 4: Estudio optimización de espesor.....	190
4.1. Introducción.....	190
4.2. Resultados	191
5. ANEXO 5: Cálculo analítico Ensayo A con estructura optimizada	197
5.1. Introducción.....	197
5.2. Resolución cálculo analítico ensayo A estructura optimizada	198
6. ANEXO 6: Calculo analítico Ensayo B con estructura optimizada	217
6.1. Introducción.....	217
6.2. Resolución calculo analítico ensayo B estructura optimizada	217
7. ANEXO 7: Estudio del pandeo, carga crítica de Euler con estructura optimizada.....	224
7.1. Introducción.....	224
7.2. Resolución Estudio a Pandeo	224

PRESUPUESTO. DOCUMENTO N°3.

Índice Presupuesto

1. Descripción	227
2. Precios unitarios.....	227
2.1. Acero 25CrMo4 (AISI 4130)	227
2.2. Sujeción.....	227
2.3. Mano de obra	228
3. Presupuestos parciales	228
3.1. Precio estructura	228
3.2. Sujeción.....	228
3.3. Mano de obra	228
4. Presupuesto general	229

PLANOS. DOCUMENTO N°4.

Índice Planos

1. Plano 1.....	230
2. Plano 2.....	231
3. Plano 3.....	232
4. Plano 4.....	233
5. Plano 5.....	234
6. Plano 6.....	235
7. Plano 7.....	236
8. Plano 8.....	237

MEMORIA: DOCUMENTO N°1

1. Introducción del Proyecto

1.1. Introducción

La peligrosidad en los vehículos de Rally ha ido incrementándose con el paso del tiempo debido a la creación y/o fabricación de motores de combustión con una potencia más elevada generando mayores velocidades siendo en la actualidad un factor muy controlado en este tipo de competiciones.

Por lo tanto, se diseñan este tipo de estructuras de seguridad las cuales ayudan a los tripulantes de un vehículo que puedan salir ilesos cuando se produce un accidente de cierta envergadura al producirse un choque o vuelco.

Las estructuras de seguridad, *Figura 1*, también llamadas jaulas de seguridad, son un entramado de barras tubulares de acero circulares con cierto espesor soldadas entre sí formando arcos y con la ayuda de tirantes unidos entre si colocados en el interior del vehículo. Dicha estructura se encontrará anclada al chasis original del vehículo, a través de unas placas de anclaje, soldadas o atornilladas. Su finalidad es la de crear una jaula interna al vehículo para tener a sus ocupantes seguros, teniendo en cuenta que no debe impedir la fácil salida de este mismo en caso de algún tipo de accidente, por ejemplo, incendio del vehículo.



Figura 1. Estructura de seguridad

Esta estructura de seguridad además de proporcionar seguridad a los ocupantes del vehículo, tanto piloto y copiloto, aporta un aumento en cuanto a la rigidez a torsión del vehículo debido que este se encuentra anclado al propio chasis. Este aumento de rigidez es muy deseado y muy valorado en este tipo de vehículos, ya que, se puede llegar a mejorar su comportamiento en este tipo de competiciones a la hora de abordar una curva y mejorar su conducción.

Para la realización del diseño se emplea el reglamento que marca la FIA (Federación Internacional del Automóvil), Figura 2, en concreto en el Anexo J del reglamento Artículo 253 del año 2016 punto 8, el cual se centra ¹en la estructura de seguridad.



Figura 2. Logotipo FIA.

Dicha estructura de seguridad puede estar:

- a) Fabricada y diseñada de acuerdo a los requerimientos de este artículo.
- b) Homologada o certificada por una ADN (Autoridad Deportiva Nacional) de acuerdo a los reglamentos de homologación para estructuras de seguridad.
- c) Homologada por la FIA de acuerdo a los reglamentos de homologación para estructuras de seguridad.

Este trabajo se centra en el apartado a) realizándose un diseño de la estructura según el artículo 253.

¹ Portal Web de la FIA donde se puede observar el Anexo J 2016 Art. 253 punto 8:
<https://www.fia.com/regulation/category/123>

1.2. Antecedentes

Esta estructura de seguridad estaría enfocada para vehículos de Rally donde ésta se encuentra en el interior del mismo, se puede diseñar para cualquier tipo de automóvil siempre respetando las dimensiones interiores de este.

Existen dos tipos de estructuras de seguridad para proteger a las personas que se encuentran en el interior del vehículo:

- a) Estructuras externas antivuelco, también llamada arcos antivuelco, se empleaba anteriormente en vehículos de competición donde se utilizaban vehículos en los que no se disponía de habitáculo para su colocación. Fabricaban un arco, el cual rebasaba la altura de los pilotos para protegerlo tras sufrir un vuelco, pero la persona estaba expuesta al exterior en todo momento observar en la Figura 3.
- b) Estructuras internas antivuelco, también llamadas jaulas de seguridad, se comenzaron a fabricar en la zona interior de los vehículos cuando empezaron a tener un habitáculo para proteger a los participantes. Esta estructura es la más usada en la actualidad, ya que, el nivel de protección que puede proporcionar llega a ser más elevado. Este conjunto de barras soldadas llega a ser una de las partes más importantes de un vehículo de competición porque además de proporcionar seguridad, aumenta la rigidez del propio vehículo. Como se puede observar en la Figura 4.



Figura 3. Estructura externa antivuelco.



Figura 4. Estructura interna antivuelco.

1.3. Justificación del proyecto

En la actualidad existen gran cantidad de estructuras diseñadas y puestas a prueba para este fin, conseguir que tanto piloto como copiloto puedan salir ilesos tras sufrir un accidente, lo que se pretende es seguir potenciando en este ámbito de la seguridad y seguir conociendo como dicha estructura se podría llegar a comportar en distintas situaciones.

El número de accidentes producidos en este tipo de competiciones siempre ha sido un dato clave en el que se ha tenido en cuenta mejorar para intentar que no sea tan elevado. En décadas anteriores, la mayoría de los accidentes terminaban con la pérdida de pilotos o copilotos, ya que, en aquella época la seguridad que se encontraba era escasa. Con el paso del tiempo, ha ido evolucionando hasta día de hoy en donde la mayoría de los competidores, gracias a la ingeniería, pueden llegar a contar esa experiencia vivida.



Figura 5. Accidente producido a elevada velocidad.

Existen diversos factores los cuales pueden llegar a producir un accidente como puede ser la velocidad, Figura 5. La velocidad en este tipo de competiciones es un factor muy controlado gracias a las tecnologías que existen mediante GPS pudiendo llegar a visualizar en todo momento la velocidad a la que circula el vehículo.

Anteriormente, los vehículos que competían no tenían unas prestaciones muy elevadas, sin embargo, podían llegar a tener una velocidad media permitida de unos 110 km/h. Con la evolución de los motores de combustión y de los combustibles, donde se les puede sacar más rendimiento, la velocidad media permitida son unos 130 km/h, llega a ser una velocidad elevada pero no tan alta como la que pueden llegar a proporcionar, alrededor de unos 200 km/h.



Figura 6. Accidente producido por salida de pista.

Otros factores que pueden llegar a ser claves, son los debidos a salidas de pista, Figura 6. Bien pueden ser por inclemencias meteorológicas o bien por la complejidad del trazado de pista en el que se encuentre donde se necesita una buena coordinación piloto y copiloto.

A continuación, se adjunta un audiovisual², ya que no se ha conseguido encontrar cifras de los accidentes producidos en estas dos décadas, donde se pueden observar los accidentes comúnmente producidos entre los años 2000-2020. Se puede visualizar como los accidentes producidos son debidos a fueras de pista y elevadas velocidades, mayoritariamente. Pero se puede observar cual es la función principal de la jaula de seguridad donde impide que el impacto producido llegue a ser alcanzado por los competidores.

De esta manera, se entiende la necesidad y/o importancia de seguir mejorando en este tipo de elemento de seguridad pasiva.

² Portal Web de YouTube audiovisual de los accidentes más comunes producidos en estas dos décadas:
<https://www.youtube.com/watch?v=4hrYtQK9KF0>

1.4. Elementos básicos de seguridad

En este subapartado se realizará una breve explicación, a parte de la ya comentada estructura de seguridad, sobre otros elementos básicos de seguridad que son necesarios incluir en este tipo de vehículos además para los tripulantes. Estos elementos se pueden llegar a subdividir en dos categorías dependiendo del tipo de seguridad que proporciona: seguridad activa y seguridad pasiva.

1.4.1. Seguridad activa

La seguridad activa engloba todos aquellos elementos que llegan a proporcionar una mayor eficacia y estabilidad del vehículo en marcha con el objetivo de evitar un accidente.

1. El sistema de frenado, sistema de dirección y sistema de suspensión, todos ellos son de vital importancia para este tipo de vehículo, ya que, se necesita conseguir cambios bruscos en la velocidad durante la competición a la hora de encontrarse con distintos tramos como pueden ser curvas, rectas o resaltos.
2. Los neumáticos³ son una herramienta de gran importancia porque le proporcionan al vehículo mayor adherencia, estabilidad y confort. Se pueden diferenciar en tres gamas distintas: neumáticos para asfalto, tierra o superficies blandas, por ejemplo, nieve. Véase Figura 7, Figura 8, Figura 9.



Figura 7. Neumático para tierra. Figura 8. Neumático para Asfalto. Figura 9. Neumático para Nieve

³ Portal Web Pirelli en el siguiente enlace se puede ver la gama de neumáticos que existen para este tipo de vehículos:
<https://www.pirelli.com/tyres/es-es/competition/catalogue/rally>

3. El sistema de iluminación, Figura 10, es fundamental porque les permite visualizar con total facilidad en las competiciones nocturnas para no cometer ningún error de navegación.



Figura 10. Faros Leds.

1.4.2. Seguridad pasiva

Sin embargo, la seguridad pasiva de un vehículo se compone de los elementos que son capaces de disminuir al mínimo los daños que se pueden producir cuando el accidente es inevitable.

1. Dentro de la seguridad que tienen los pilotos, se tienen los llamados cinturones de seguridad. También se conocen como arneses siendo estos más seguros porque pueden llegar a tener 6 puntos de sujeción, Figura 11.



Figura 11. Baquet y arnés de 6 puntos.



Figura 12. Hans

Si también le incluimos los asientos, Baquet es un tipo de asiento que provocan mayor seguridad para los pilotos al sufrir un accidente, y los Hans siendo estos un tipo de collarín diseñado para reducir las lesiones en la cabeza o cuello debidas a un accidente, Figura 12.

2. La indumentaria de pilotos y copilotos⁴ está compuesta de monos, calzado, guantes, ropa interior, cascos, sistema de comunicación y protecciones, Figura 13. Toda esta ropa debe de estar homologado por la FIA siendo ésta ignífuga preparada para cualquier tipo de incendio inesperado, para estar protegido y no sufrir quemaduras.



Figura 13. Indumentaria.



Figura 14. Casco.

También es de gran importancia el casco, Figura 14, éste es una prenda muy usada para evitar cualquier tipo de colisión e impedir que cualquier objeto que se encuentre dentro del habitáculo impacte contra la cabeza. Además, también lleva incorporado un micrófono para mantener el contacto entre piloto y copiloto.

3. Los airbags son un elemento de seguridad pasiva, pero en este tipo de vehículos no pueden incorporarse debido a que durante la carrera cualquier golpe o contacto contra el sensor de impacto podría activar este dispositivo.
4. El chasis, Figura 15, este elemento es básico en cuanto a la seguridad para disminuir los daños que se pueden llegar a producir en un accidente, pero este no puede actuar solo en este caso debe estar ayudado de una estructura interna de seguridad que se dedicará este proyecto a su estudio y análisis para entender su comportamiento.



Figura 15. Chasis de un vehículo convencional.

⁴ Portal Web de Rallystore donde se puede encontrar todo tipo de indumentaria necesaria:
<https://rallystore.net/es/86-equipamiento-piloto-rally>

1.5. Objetivos

Los objetivos que se proponen al tratar con este proyecto será la realización de una estructura de seguridad para la protección de los tripulantes.

Principalmente se creará un diseño, gracias al software CATIA V5, teniendo en cuenta la reglamentación empleada para conseguir su homologación, su posterior implantación y utilización. Este diseño se realizará en base a unos criterios establecidos para llegar a alcanzar esa seguridad exigida.

Para comenzar, se realiza un cálculo analítico sobre una parte de la estructura para contrastar dichos resultados con los ensayos estáticos virtuales llevados a cabo con posterioridad.

Posteriormente se realizan una serie de ensayos mediante simulación que son necesarios para corroborar si nuestra estructura cumple las exigencias mínimas necesarias utilizando el software ANSYS. Donde se pueden contrastar los resultados obtenidos realizando los cambios necesarios y mejoras para conseguir encontrándose dentro de los estándares permitidos.

A continuación, se lleva a cabo una optimización de dicha estructura con la finalidad de optimizarla reduciendo su masa al mismo tiempo que se mantiene de acuerdo a los estándares descritos, también se realiza con este último software tratado.

Finalmente, se elaborará un presupuesto general para comparar si el precio alcanzado sería inferior a los proveedores dedicados a la realización de estas estructuras.

2. Reglamentación a Emplear

En este apartado se trata de especificar los requisitos necesarios que en el Anexo J del reglamento Artículo 253 del año 2016 se especifica qué debe seguirse al realizar un diseño de una estructura de seguridad, ya que, muchos elementos son obligatorios. También en dicho anexo se encuentran reflejados los datos tabulados que se deben de cumplir a la hora de realizar un ensayo estático, en concreto serían dos tipos de ensayos ambos de carga vertical que detallaremos a continuación.

2.1. Especificaciones de diseño

En cuanto a las especificaciones de diseño, haciendo referencia al apartado 8.3 especificaciones del art 253 del Anexo J, se debe conocer que en una estructura se diferencia entre elementos básicos de esta misma, estructura básica, y los tirantes y refuerzos obligatorios como pueden ser para el techo, las puertas y tirantes diagonales que refuerzan el arco principal.

La estructura básica debe de estar diseñada en base a una de las siguientes configuraciones:

- ❖ 1 arco principal + 1 arco delantero + 2 miembros longitudinales + 2 tirantes traseros + 6 pies de anclaje

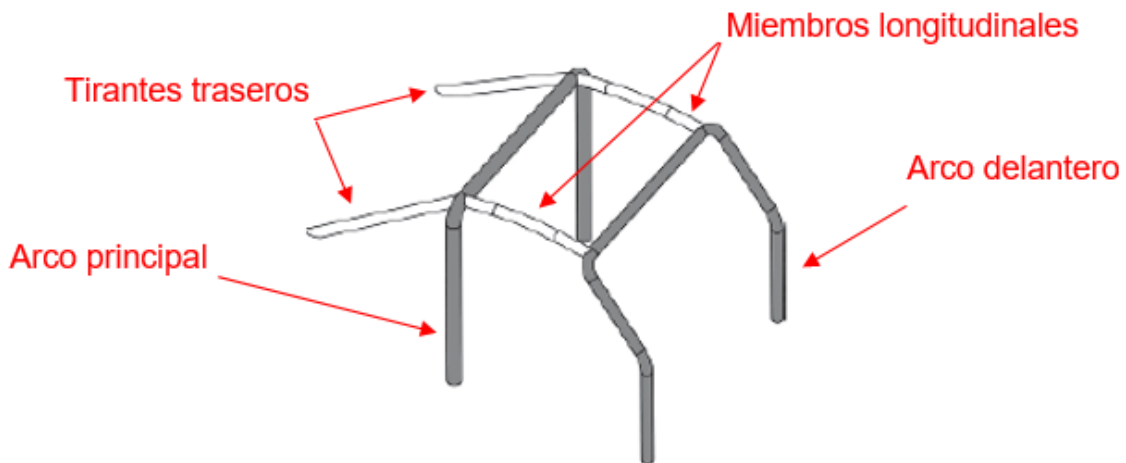


Figura 16. Configuración 1.⁵

Esta estructura de la configuración uno, Figura 16, está formada principalmente por un arco principal que se encuentra en la parte posterior a los asientos de los conductores y arco delantero que se sitúa en los pilares que soportan el parabrisas delantero, ambos se pueden observar en la figura 16 en un tono más oscuro. Para unir ambos arcos se emplean unos miembros longitudinales los cuales siguen la inclinación del techo del vehículo.

También se añaden desde el arco principal hacia la parte trasera dos tirantes traseros con una pendiente determinada para reforzar la parte trasera.

⁵ Figura obtenida por la reglamentación de la FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-1.

- ❖ 2 arcos laterales + 2 miembros transversales + 2 tirantes traseros + 6 pies de anclaje

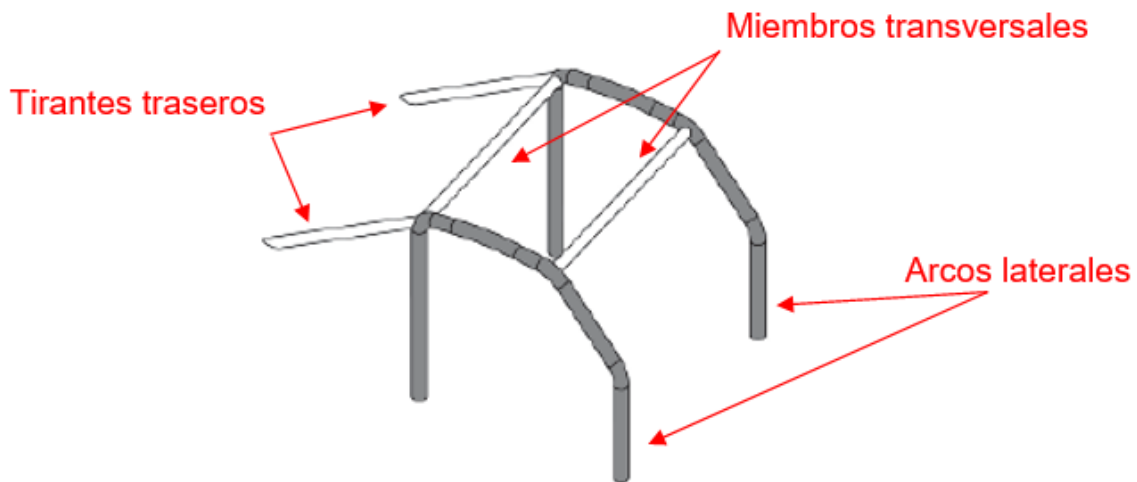


Figura 17. Configuración 2.⁶

La parte principal de esta configuración dos, Figura 17, se basa en dos arcos laterales que se encuentran envolviendo las puertas laterales del vehículo, se puede observar en la figura 17 en un tono más oscuro, para unir ambos arcos laterales se emplean dos miembros transversales.

También de igual manera a la configuración uno, se emplean dos tirantes traseros con cierta inclinación obteniendo 6 pies de anclaje.

- ❖ 1 arco principal + 2 semiarcos laterales + 1 miembro transversal + 2 tirantes traseros + 6 pies de anclaje

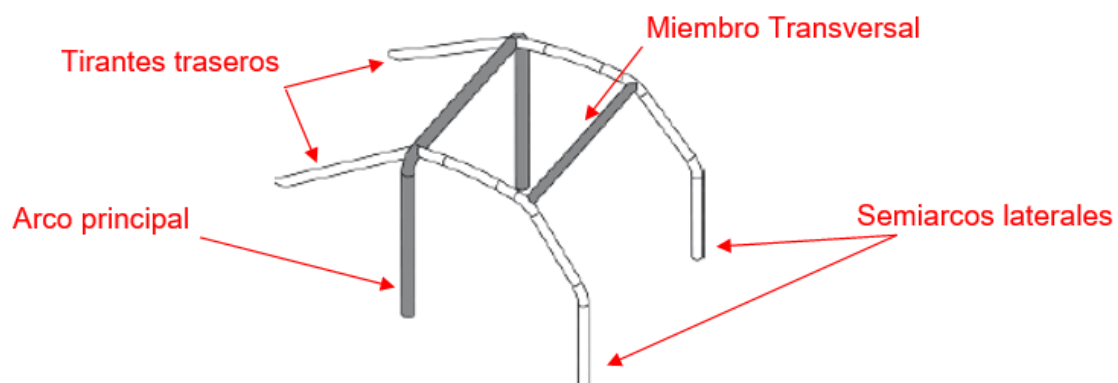


Figura 18. Configuración 3.⁷

⁶ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-2

De nuevo esta estructura, Figura 18, se caracteriza por encontrarse con un arco principal que se encuentra en la parte trasera de los asientos del vehículo junto con un miembro transversal, observándose con mayor detalle en la Figura 18 en un tono más oscuro. Se encuentra con dos semiarcos laterales, ya que comienzan desde el arco principal envolviendo la forma de las puertas laterales. También se pueden observar dos tirantes traseros para reforzar la parte trasera.

A continuación, se tratará de mostrar una serie de tirantes y refuerzos adicionales que se deben de introducir, al menos uno de cada tipo. Estos se añaden a esta estructura para proporcionar rigidez y mayor seguridad con la finalidad de poder llegar a proteger a los tripulantes del vehículo:

❖ Refuerzos en el arco principal:

De manera obligatoria, se deben de añadir a este diseño refuerzos diagonales formado por tubos rectos y en el caso de la configuración X, Figura 19, al menos uno de ellos debe estar formado de una sola pieza y el siguiente sería dividido y soldado sobre este. Estos refuerzos tienen que unirse a no más de 100 mm de los pies de anclaje del arco principal y tampoco a más de 100 mm de la zona donde se unen los tirantes traseros con el arco principal.

En la Figura 20 se puede observar con mayor detalle lo explicado.

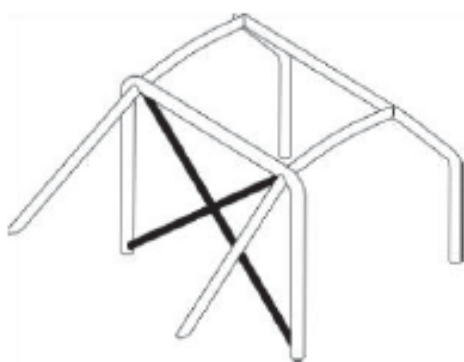


Figura 19. Configuración X.⁸

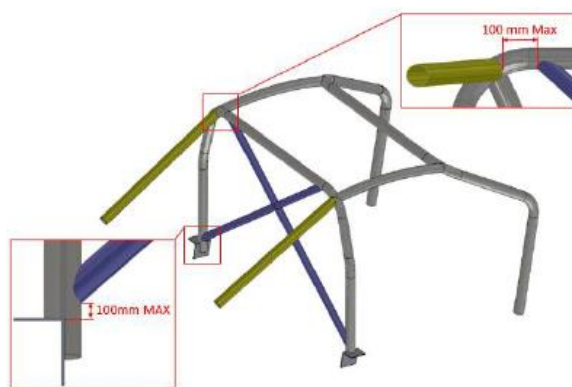


Figura 20. Vista detalle uniones X.⁹

⁷ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-3

⁸ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-7

⁹ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.b.7i imagen SC-6a:

<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

Para la configuración en V, Figura 21 y Figura 22, las uniones de estos refuerzos con la parte superior serían similares a la configuración anterior. Estos estarían unidos a una distancia de no más a 100 mm de la zona donde se unen los tirantes traseros con el arco principal, pero las uniones entre estos tirantes en la parte inferior no deben de encontrarse a más de 400 mm.

En la Figura 22 se puede observar con mayor detalle lo explicado.

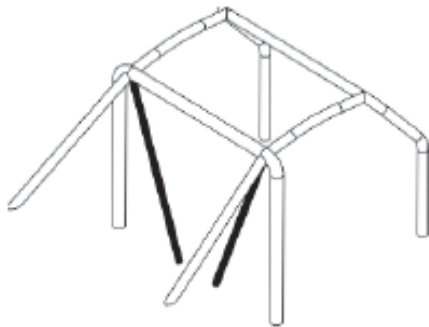


Figura 21. Configuración V.¹⁰

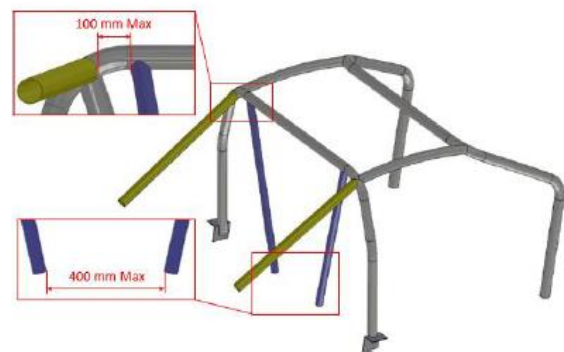


Figura 22. Vista detalle uniones V.¹¹

La reglamentación también propone el empleo de un solo miembro como refuerzo para el arco principal, Figura 23, pero no se optará por esta opción debido a que en comparación con las disposiciones anteriores ésta no nos puede llegar a proporcionar la misma seguridad, pues este tirante transversal solamente es capaz de proporcionar rigidez a una parte del arco principal. Sin embargo, la otra quedaría libre por lo tanto no sería tan conveniente su empleo como el resto.



Figura 23. Tirante transversal arco principal.¹²

¹⁰ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-6

¹¹ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.b.7i imagen SC-6b:

<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

❖ Refuerzos en los arcos traseros:

En cuanto a los refuerzos de los arcos traseros la reglamentación indica que al menos debe de incluirse un miembro diagonal, Figura 24 y Figura 25, pero también se puede optar por colocar dos miembros diagonales formando una X o V como en los refuerzos de arco principal para aumentar la rigidez de esta estructura.

Siempre teniendo en cuenta que la unión inferior de estos debe estar no más de 100 mm alejada de los pies de anclaje y la unión superior tampoco a más de 100 mm de donde se unen los tirantes traseros.

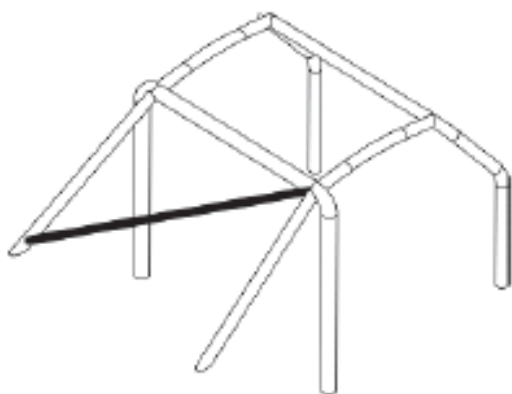


Figura 24. Tirante transversal arco trasero.¹³

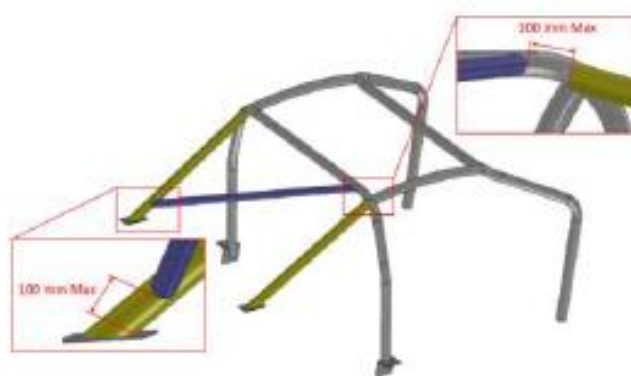


Figura 25. Vista detalle uniones.¹⁴

Existe otro tipo de disposición para la colocación de este tirante transversal en donde la única diferencia respecto a la unión superior, es que en vez de unirse sobre el arco principal lo hace sobre el tirante trasero, véase Figura 25. Esta opción, es la más correcta ya que la fuerza que puede proporcionar dicho tirante actúa directamente sobre el arco principal sin pasar por otro tipo de elemento.

¹² Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-5

¹³ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-4

¹⁴ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.c.2i imagen SC-7a:

<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

❖ Refuerzos en las puertas:

Para este tipo de refuerzos en las puertas es necesario montar uno o más tirantes o elementos siendo simétricas para ambos lados. Dicha protección lateral podrá situarse tan alta como pueda ser posible pero sus puntos de anclaje superiores no estarán a más de la mitad de la altura total de la puerta medida desde su base y los puntos de anclaje inferiores, si los hubiera, se encontrarían a no más de 100 mm de separación respecto a la parte inferior.

Pueden encontrarse las siguientes disposiciones, aunque también se podrían combinar, véase Figura 26, Figura 27, Figura 28.



Figura 26. Configuración 1.¹⁵



Figura 27. Configuración 2.¹⁶

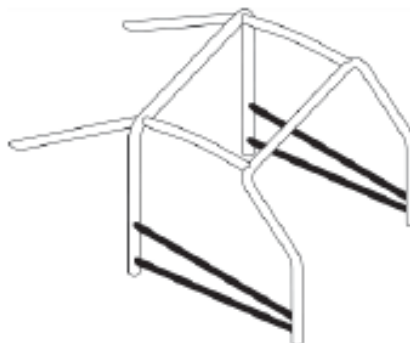


Figura 28. Configuración 3.¹⁷

¹⁵ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-9

¹⁶ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-10

¹⁷ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-11

❖ Refuerzos en el techo:

En la parte superior de la estructura también se deben de colocar unos refuerzos para aumentar la rigidez del techo de la propia estructura. Estos refuerzos pueden seguir la inclinación del techo del vehículo.

La configuración en X, Figura 29, los tubos siguen la inclinación del techo. También se debe saber que uno de ellos tiene que estar formado de una sola pieza, pero el siguiente se encontraría separado y soldado sobre este. Además, estos refuerzos deben de unirse a no más de 100 mm del arco principal y del arco delantero.

En la Figura 30 se puede observar con mayor detalle lo explicado.

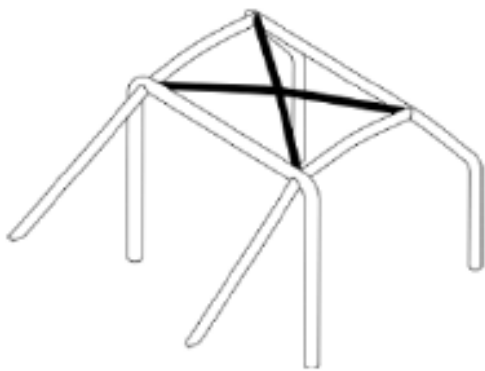


Figura 29. Configuración X.¹⁸

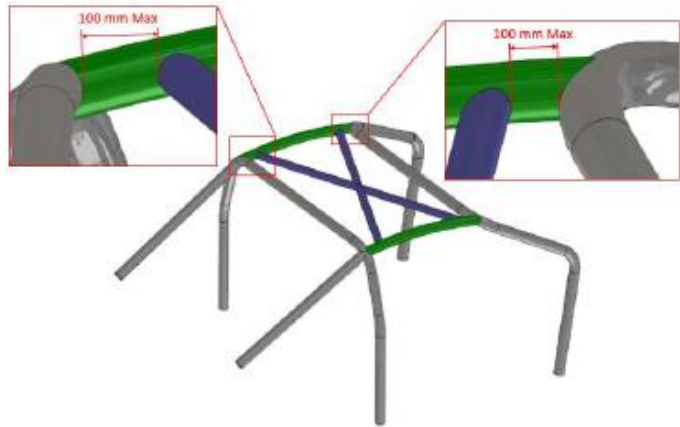


Figura 30. Vista detalle uniones.¹⁹

Existe de nuevo otro tipo de disposición para esta misma configuración donde estos refuerzos en vez de ir soldados a los miembros longitudinales se encuentran colocados sobre el arco principal y el arco delantero.

Esta opción, Figura 29, sería la más idónea para cuando se recibe un choque lateral siendo este más probable en este tipo de carreras, ya que, se pueden producir salidas de pista, volteretas de campana y choques laterales con árboles. Se explicará con mayor detalle en el apartado de la elección del diseño.

¹⁸ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-12

¹⁹ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.c.3i imagen SC-9b:

<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

La siguiente configuración, Figura 31, sería realizando una V donde igual que la anterior siguen la inclinación del techo. También su unión no puede ser más a 100 mm con el arco principal y con el arco delantero. La zona donde ambas barras se unen, realizando esta geometría, tiene una separación máxima entre ellas de 100 mm.



Figura 31. Configuración V.²⁰

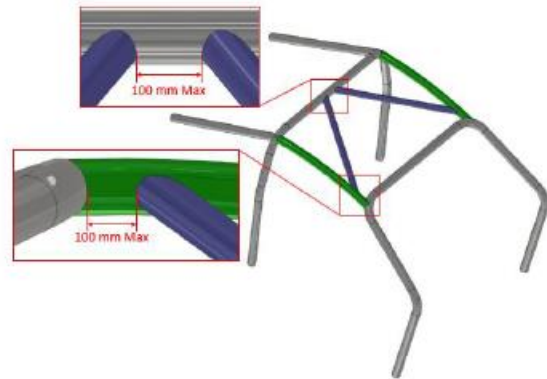


Figura 32. Vista detalle uniones.²¹

De igual manera, existe otro tipo de disposición similar a este pero las barras nacen en la parte del arco principal y se concentran en el arco frontal, respetando las mismas medidas anteriormente detalladas.

También existe otra disposición donde estas barras se unen sobre el arco principal o frontal en vez de unirse sobre los miembros longitudinales, Figura 31.

Después se llevará a cabo una posible mejora respecto a una de las configuraciones para aumentar la rigidez a la hora de sufrir un choque frontal. Estas barras se encuentran unidas a los miembros longitudinales por lo tanto se necesitará colocar un travesaño que una en la parte central del arco principal y arco delantero siguiendo este la inclinación del techo del vehículo, como se puede mostrar en la siguiente imagen, Figura 33.

²⁰ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-13

²¹ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.c.3i imagen SC-10b:
<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>



Figura 33. Tirante y refuerzo opcional.²²

Este tirante ayudará a tener mayor rigidez. Esta barra estará dividida y soldada con las anteriores.

❖ Pilar de refuerzo del parabrisas.

Este elemento de refuerzo sobre esta estructura ayuda a conseguir mayor rigidez a la hora de producirse un vuelco o sucesivos ayudando a que la parte superior, el techo, no pueda desplazarse hacia el interior.

Su extremo superior debe estar colocado a no más de 100 mm de distancia entre la unión del arco delantero y el miembro transversal. También su extremo inferior debe estar colocado a menos de 100 mm del pie de anclaje.

En la siguiente imagen adjuntada, Figura 34, se observar con mayor detalle lo explicado. La inclinación de este pilar de refuerzo tiene que ser como máxima 20°, pues mientras este elemento sea lo más vertical posible realizará mejor su función.

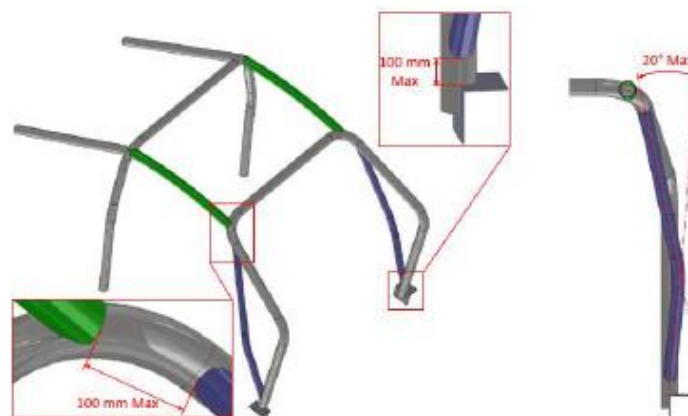


Figura 34. Pilar de refuerzo de parabrisas.²³

²² Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-23

❖ Refuerzo en el arco delantero.

Otro elemento de refuerzo incorporado en esta estructura de seguridad es el refuerzo en el arco delantero, Figura 35. Éste ayuda a conseguir mayor rigidez a la hora de producirse un choque lateral debido a que impide en la medida de lo posible el acercamiento de los arcos laterales del arco delantero.

Este elemento debe colocarse tan alto como sea posible pero su borde inferior no debe estar situado por encima del punto más elevado del salpicadero.



Figura 35. Refuerzo arco frontal.²⁴

❖ Refuerzo de uniones soldadas (Cartelas)

Este tipo de refuerzo se emplea para las uniones de los miembros diagonales del arco principal, los miembros de refuerzo sobre los arcos traseros, los miembros de los refuerzos en las puertas y los miembros de refuerzos del techo. Deben emplearse dos cartelas como mínimo.

Se emplean para reforzar la soldadura, ayudando a mantener el ángulo formado entre ambas barras. Esta estaría fabricada en chapa y doblada en forma de U, con un espesor no inferior a 1 mm.

Los extremos de dicha cartela punto E, Figura 36, deben estar situados a una distancia del punto S, de 2 a 4 veces el diámetro exterior del tubo mayor de los unidos.

²³ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.c.5i imagen SC-12:

<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

²⁴ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-29

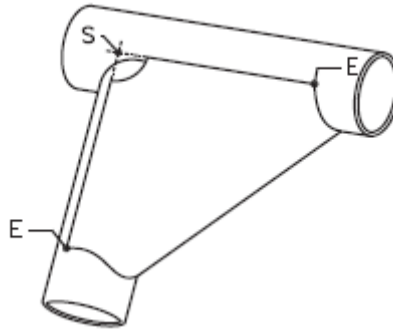


Figura 36. Cartela.²⁵

La soldadura de las uniones y de las cartelas se debe realizar alrededor de todo el perímetro de contacto, Figura 37 y Figura 38.



Figura 37. Soldadura tubo.



Figura 38. Soldadura cartela.

2.2. Restricciones adicionales

En este subapartado se hace referencia a una serie de condiciones de diseño o restricciones adicionales que requiere la reglamentación para llevar a cabo el diseño, referente a estos tipos de configuraciones tratados anteriormente.

Se comienza tratando la inclinación o pendiente que debe de encontrarse el arco principal y delantero de una estructura.

El arco principal debe de situarse transversal al vehículo y lo más verticalmente posible con un error de unos $\pm 10^\circ$ respecto a la vertical. En este caso, será diseñado totalmente vertical. Este elemento tiene que encontrarse en un mismo plano que recoja todo el eje del tubo.

²⁵ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-34

En cuanto al arco delantero, la parte baja de éste se debe de encontrar formando 90° respecto a la horizontal. Se puede visualizar en la Figura 39.

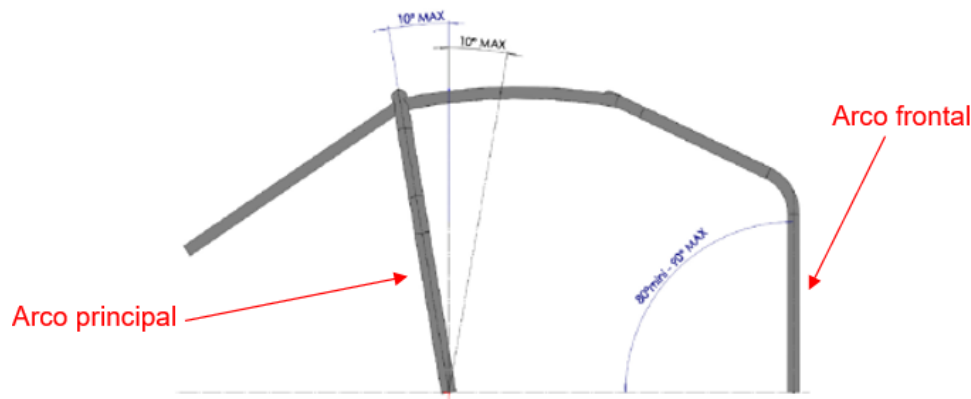


Figura 39. Pendiente arco principal y lateral.²⁶

También se tratan los pies de anclaje de esta estructura apoyada al chasis del vehículo. Los puntos de anclaje mínimos de una estructura de seguridad serían 6: uno por cada apoyo que tiene nuestro arco principal, uno por cada apoyo que tiene nuestro arco delantero y uno por cada tirante trasero.

Los pies de anclaje del arco principal y delantero contienen como mínimo 3 tornillos en una placa de refuerzo de al menos 3 mm de espesor y con área de al menos 120 cm². Los tirantes traseros tienen que fijarse con un mínimo de 2 tornillos y tener un área de unos 60 cm², todos ellos soldados al chasis del vehículo, Figura 40.

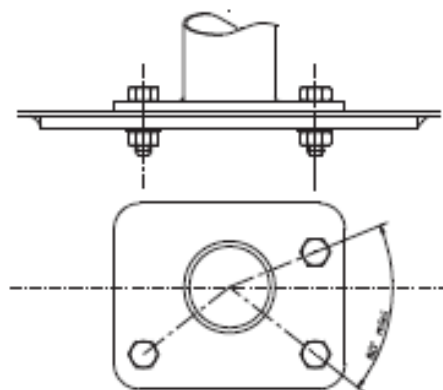


Figura 40. Pie de anclaje con 3 tornillos.²⁷

²⁶ Figura obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, dentro del artículo 2 apartado 2.1.1.b.2i imagen SC-5:
<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

Otras especificaciones complementarias, son que la estructura de seguridad debe estar contenida entre la suspensión delantera y trasera del vehículo donde soportan las cargas verticales, Figura 41.



Figura 41. Tren de aterrizaje vista superior.

También, la vista lateral de la estructura a través de la abertura de la puerta, debe de estar de acuerdo con la Figura 42.

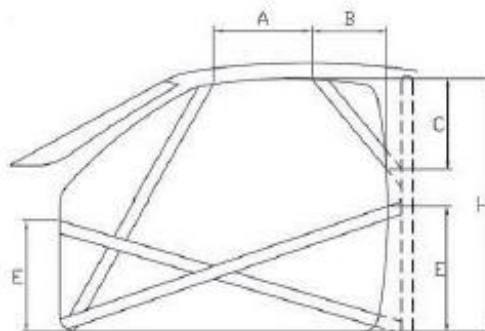


Figura 42. Vista lateral.²⁸

- Dimensión A debe tener un mínimo de 300 mm.
- Dimensión B debe tener un máximo de 250 mm (Cuando se emplea refuerzo de ángulos o uniones).
- Dimensión C debe tener un máximo de 300 mm (Cuando se emplea refuerzo de ángulos o uniones).
- Dimensión E no debe ser superior a la mitad de la altura de la apertura de la puerta H.

²⁷ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-50

²⁸ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-49.

En proyección frontal, los refuerzos de los ángulos y las uniones de los ángulos superiores del arco delantero deben ser visibles únicamente a través de la superficie del parabrisas. Véase Figura 43.

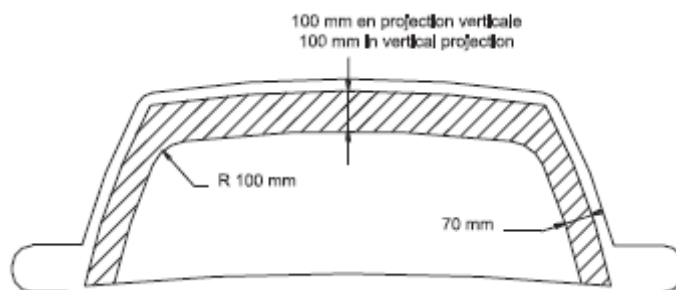


Figura 43. Proyección frontal.²⁹

2.3. Ensayos de carga Estática (FIA)

Una vez conseguida y diseñada la estructura de seguridad completa, se debe comprobar si se puede llevar a cabo su implantación y posterior uso en un vehículo de competición. Para ello, previo a la fabricación, se realizarán simulaciones mediante software, en este caso ANSYS, para poder afirmar la aprobación de esta estructura encontrándose dentro de unos límites estandarizados y evitar que se produzca la rotura.

La FIA (Federación Internacional del Automóvil), establece dos ensayos de carga estática en diferentes partes de la estructura. Dichos ensayos, simulan diferentes tipos de accidentes que se puedan producir. Se trata con más detalle a continuación.

2.3.1. Ensayo A: Carga estática vertical sobre arco principal.

Se comienza tratando el ensayo de carga estática vertical sobre arco principal, llamado Ensayo A³⁰. Este tipo de ensayo consiste en la aplicación de una carga vertical hacia abajo de manera uniforme sobre la parte superior del arco principal de la estructura aplicada mediante un sello rígido en el caso de un ensayo experimental.

²⁹ Figura obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-48.

³⁰ Información recogida en la reglamentación de la FIA del año 2021, apartado 2.2.1:
<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

El valor de esta carga vertical sería de:

$$F_A (daN) = 7,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Teniendo en cuenta que 1 daN (decanewton) = 10 N, la carga vertical se define como:

$$F_A (N) = 75 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Dónde:

$$W (kg) = masa\ del\ vehiculo(kg) + 160\ kg$$

Cuando se lleve a cabo un ensayo experimental en laboratorio, se ve la necesidad de emplear un sello, es decir, una placa colocada de manera horizontal sobre la parte superior del arco principal, pues este ensayo es realizado mediante una prensa hidráulica que deja descender este sello *sobre* la estructura, Figura 44. Por lo tanto, con la utilización de este sello, se garantiza, que dicha fuerza sea uniforme y horizontal sobre la estructura a ensayar.

El sello debe ser de acero y tener un radio de 20 +/- 5 mm en los bordes dirigidos hacia la barra. También se podría realizar una entalla a lo largo del sello para que cuando hagamos dicha fuerza no se deslice sobre la superficie de la barra.

- ❖ Longitud: Tiene que tener el ancho de la barra + 100 mm para poder llegar al extremo más alejado.
- ❖ Ancho: Tiene que tener un ancho de 250 +/- 50 mm.
- ❖ Espesor: Mínimo de 40 mm.

Esta prueba no debe producir rotura, es decir no sobrepasar el límite de rotura del material, ni distorsión de más de 50 mm medida bajo carga a lo largo del eje donde se aplica esa carga. Por lo contrario, la estructura no sería apta para su uso y utilización.

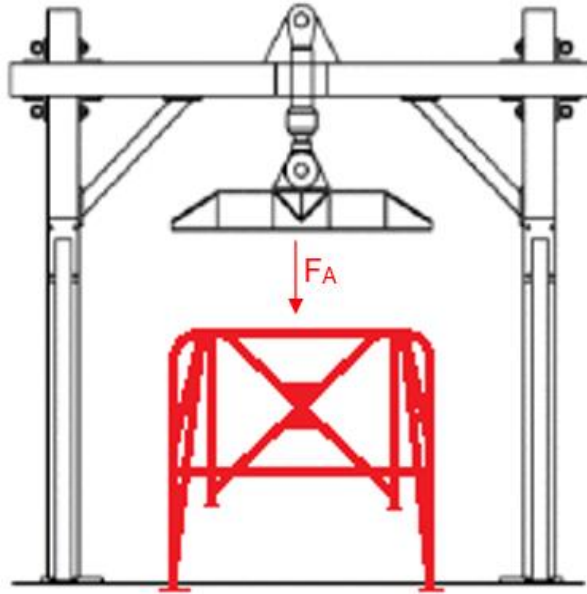


Figura 44. Imagen explicativa Ensayo A.

2.3.2. Ensayo B: Carga estática vertical tridimensional sobre arco frontal.

En esta ocasión, el ensayo consiste en la aplicación de una carga estática vertical tridimensional, es decir, tiene componentes en los tres ejes de coordenadas, llamado Ensayo B³¹. Esta carga estaría aplicada en la intersección del arco delantero y del miembro longitudinal del lado del conductor, Figura 47. Puede emplearse de nuevo un sello rígido en el caso de un ensayo experimental.

El valor de esta carga sería:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Teniendo en cuenta que 1 daN (decanewton) = 10 N, la carga vertical se define como:

$$F_B (daN) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Dónde:

$$W (kg) = masa\ del\ vehiculo(kg) + 160\ kg$$

³¹ Información recogida en la reglamentación de la FIA del año 2021, apartado 2.2.2:
<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

La utilización de un sello al realizar un ensayo experimental en laboratorio, garantiza que se produzca el contacto en la zona que se especifica y permanezca en el área de intersección. El sello debe ser de acero y tener un radio igual al anterior en el borde dirigido hacia la barra.

- ❖ Longitud: sería de 450 +/- 50mm.
- ❖ Ancho: sería de 250 +/- 50 mm.
- ❖ Espesor: sería mínimo de 40 mm.

Esta prueba no debe producir rotura, al igual que no se debía de producir en el ensayo anterior. De nuevo, no se debe superar el límite de rotura del material, ni producir una distorsión, en este caso, de más de 100 mm medida bajo la aplicación de la carga. Por lo contrario, la estructura no sería apta para su utilización.

La carga, como se ha descrito anteriormente, es tridimensional encontrándose dirigida en los tres ejes coordenados. A continuación, se detalla dicha carga.

Por un lado, el eje longitudinal del sello debe estar dirigido hacia el frente y hacia abajo con ángulo de 5° con respecto a la horizontal. Se puede observar lo explicado en la Figura 45.

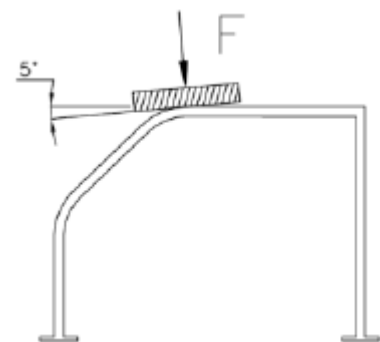


Figura 45. Eje longitudinal.³²

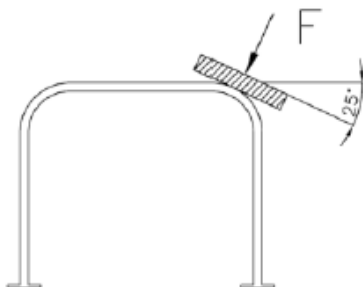


Figura 46. Eje transversal.³³

Por otro lado, el eje transversal del sello debe estar dirigido hacia el exterior y hacia abajo con un ángulo de 25° con respecto a la horizontal. Se puede observar lo explicado en la Figura 46.

³² Imagen obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, apartado 2.2.2;

³³ Imagen obtenida de la reglamentación de la FIA del año 2021, apartado 2.2.2:
<https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA>

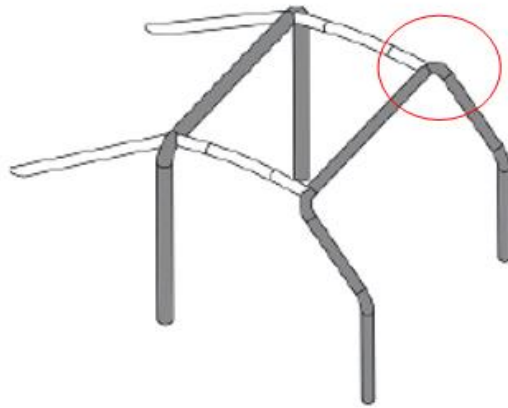


Figura 47. Punto de localización, lado del conductor.³⁴

3. Metodología a emplear

En cuanto a la metodología a emplear se pretende comentar cual será el procedimiento a seguir para abordar este proyecto, junto con las herramientas y métodos que se emplearán para realizar los análisis y ensayos necesarios.

3.1. Procedimiento

El procedimiento a seguir para afrontar este trabajo sería:

1. Se comienza suponiendo una configuración de estructura, es decir, de las estructuras básicas anteriormente detalladas se tomará la elección de cualquiera de ellas. Seguidamente se añadirán los refuerzos que sean necesarios para garantizar y aumentar la seguridad.
2. Se realizará un pre-dimensionado del espesor de los tubos porque la reglamentación proporciona unos valores máximos y mínimos, pero no los adecuados para este modelo. Para ello, se emplea el Ensayo A estudiando la flecha que genera dicha carga sobre la barra y el momento de inercia.
3. A continuación, se simplificará el modelo para facilitar los cálculos, tomando un modelo en 2D. Después, por medio del método matricial, se determinará de manera analítica.

³⁴ Figura obtenida por la reglamentación de la FIA, Anexo J Artículo 253 Imagen 253-1.

4. Posteriormente, una vez se ha realizado el apartado anterior, se volverá a realizar esos mismos ensayos mediante elementos finitos, pero empleando la estructura completa (3D).
5. También se realizará un estudio de optimización topológica mediante una secuencia de distintos espesores estandarizados reduciéndose el peso, pero encontrándose dentro de las exigencias necesarias de seguridad.
6. De nuevo, se volverá a realizar el estudio con el modelo optimizado para resolverlo mediante el método matricial y de elementos finitos.
7. Finalmente, se realizará un análisis comparativo contrastándose los resultados obtenidos en los apartados anteriores con ambos métodos.

3.2. Método analítico

El método analítico³⁵ es un procedimiento empleado con el fin de estudiar un fenómeno, hecho o problema. Además, se caracteriza por descomponer al objeto de estudio en diferentes partes para facilitar su realización.

Con este método³⁶ se llega a obtener una solución exacta del problema, pero se debe tener en cuenta que solo es posible en casos sencillos o simplificados, por ello, cuando se encuentra con una estructura compleja se tiene que dividir en sub-problemas sencillos para elaborar el cálculo. Además, a la hora de fraccionarlo en casos más sencillos se debe tener el concepto del problema claro y de esta manera se puede llegar a tener unos resultados más precisos.

En este caso se empleará dicho método para realizar un estudio analítico en una región de esta estructura, en concreto sobre un arco lateral o sobre el marco de la puerta. Se tendría que realizar una serie de consideraciones, las cuales, se detallaran en su momento. Posteriormente, estos resultados obtenidos podrían ser comparables con los resultados obtenidos en el método numérico de elementos finitos lineales, ya que, se considera la estructura con un comportamiento lineal.

³⁵ Página Web buscador.com información obtenida para el método analítico:
<https://www.buscador.com/metodo-analitico/>

³⁶ Información obtenida, a través de los apuntes de la asignatura de Métodos Avanzados de Cálculo en Ingeniería Mecánica impartida como optativa en la Escuela Politécnica Superior de Jaén impartida por el profesor Ángel Jesús Molina Viedma durante el curso 2020-2021.

Existen gran cantidad de métodos para llevar a cabo este trabajo como pueden ser el método de los nudos, considerando las barras articuladas (no sería este caso), el método matricial o PTV (Principio de los Trabajos Virtuales), considerando la estructura que fuese traslacional o intraslacional.

3.3. Método de elementos finitos (MEF o FEM).

El método de los elementos finitos³⁷ (finite element method, FEM) es el procedimiento computacional más simple y potente para el análisis de estructuras de cualquier geometría y material, sometidas a cualquier tipo de cargas mediante la resolución de ecuaciones diferenciales parciales complejas. Este método es empleado en ordenadores computacionales, donde además de poder llegar a obtener una solución del problema puede emplearse para mejorar el diseño y el producto realizando una optimación del resultado final.

Este método permite obtener una aproximación del comportamiento de una estructura, debido a que lo generado es una subdivisión del problema. Por tanto, no se llega a obtener una precisión del problema.

Cualquier geometría compleja es dividida en un número finito de partes, llamados elementos, los cuales están conectados entre sí mediante puntos llamados nodos o puntos nodales. El conjunto de estos elementos y nodos se le denomina malla, véase Figura 48.

Un elemento finito es una pequeña porción de un medio continuo con una geometría más simple. Esta se compone de múltiples elementos solapados en el que dentro de cada elemento las magnitudes del problema son interpoladas por polinomios.

Este fenómeno se consigue mediante el mallado de dicha geometría, en la que dichos elementos son más pequeños en zonas curvas o intersecciones y aumentan de tamaño conforme se alejan de dicha zona.

³⁷ Imagen obtenida, a través de los apuntes de la asignatura de Métodos Avanzados de Cálculo en Ingeniería Mecánica comentada anteriormente.

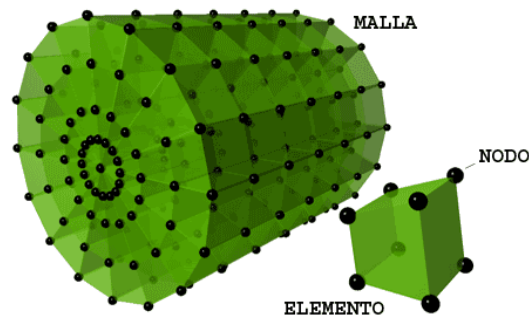


Figura 48. Mallado.

Como ha sido comentado con anterioridad, se obtiene una solución aproximada. Esto es debido a dos fuentes principales:

- Error de modelado, derivado de una idea confusa de nuestro modelo estructural, por lo tanto, se debería de mejorar la descripción del comportamiento de la estructura.
- Error de discretización, que puede minimizarse utilizando una malla más fina o bien usar elementos de mayor orden de interpolación como pueden ser de 2º o 3º orden.

Se puede citar también algunas ventajas, tales como:

- ✓ Facilidad para modelar cuerpos de forma irregular.
- ✓ Simulación de cuerpos con diferentes tipos de materiales.
- ✓ Uso de diferentes tamaños de elementos en una misma malla, Figura 49.

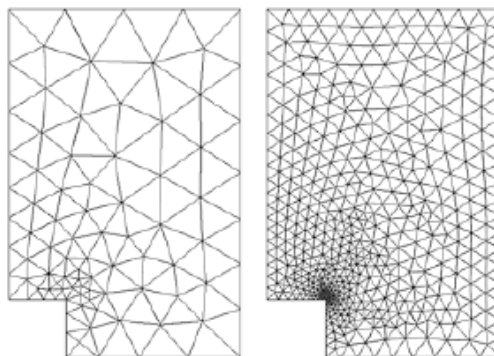


Figura 49. Mallado refinado³⁸.

³⁸ Imagen obtenida, a través de los apuntes de la asignatura de Métodos Avanzados de Cálculo en Ingeniería Mecánica comentada anteriormente.

Para tratar de resolver una estructura mediante el empleo del FEM es necesario modular las tareas necesarias³⁹. Se dividen en:

1. Pre-procesador: En este módulo se construye el modelo para el cálculo, incluyendo la definición de la geometría, selección del tipo de elemento, es decir, si se emplearían elementos cuadriláteros o tetraedros, definición de los materiales empleados, asignación de elementos, materiales y generación de la malla. Finalmente, aplicación de las cargas y condiciones de contorno.
2. Calculador: Este módulo lleva el mayor peso, ya que, se encarga de realizar todo el cálculo FEM y genera las soluciones, indicando previamente si el cálculo sería transitorio o estático.
3. Post-procesador: Para terminar, este módulo se encarga de obtener de forma sencilla una visualización de los resultados.

Este método FEM será empleado para este proyecto en el cálculo de este diseño, comprobándose su cumplimiento junto con la reglamentación a emplear y poder llegar a conseguir una optimización y cálculo dinámico, el cual será descrito más adelante. Se será realizado un estudio de este diseño mediante un cálculo lineal.

3.3.1. Cálculo lineal

Este cálculo⁴⁰ es el más sencillo de realizar, debido a que en este tipo de análisis la relación que existe entre las cargas obtenidas y los resultados son lineales y no se considera cuando el material sobrepasa el límite elástico. La pendiente de dicha recta lineal sería el módulo de Young del material donde se relaciona la tensión y deformación producida. Véase Figura 50.

³⁹ Portal Web donde se encuentra recogida la información que he empleado para los tres módulos:

<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/60222/fichero/02+-+Capitulo+2.+El+metodo+de+elementos+finitos.pdf>

⁴⁰ Portal Web SolidWorks información obtenida para el cálculo lineal:

http://help.solidworks.com/2017/spanish/SolidWorks/cworks/c_Linear_Static_Analysis.htm#:~:text=El%20an%C3%A1lisis%20est%C3%A1tico%20lineal%20calcula,el%20efecto%20de%20cargas%20aplicadas.&text=Todas%20las%20cargas%20se%20aplican,que%20alcanzan%20sus%20magnitudes%20completas

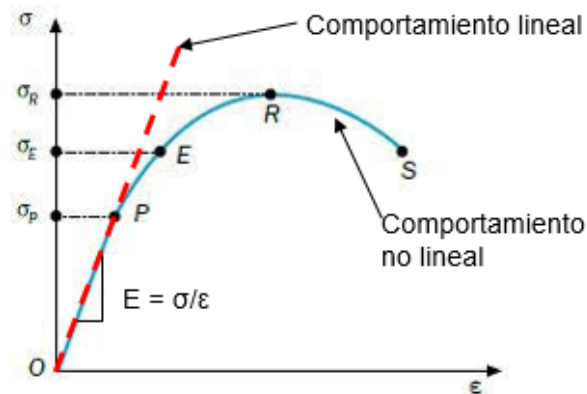


Figura 50. Diagrama Tensión vs Deformación.

3.3.2. Optimización de espesor.

La optimización topológica ⁴¹es una técnica que consiste en reducir la masa de una pieza u objeto manteniendo los requisitos establecidos desde un principio.

Se parte del diseño al que previamente han sido aplicadas las que va a soportar la pieza para evaluar donde se está debilitando y donde se producen concentraciones de tensiones. Después los ingenieros deben rediseñarlo para llegar a reducir su peso, pero manteniendo los requisitos mecánicos. Sin embargo, mediante esta técnica de optimización de espesor con un software siendo capaces de realizar esto con mayor facilidad. Ejemplificado en Figura 51.

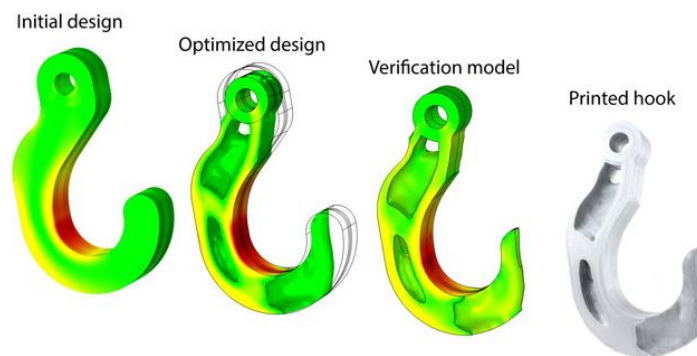


Figura 51. Optimización topológica.

El objetivo es emplear esta técnica mediante el software de ANSYS para poder llegar a reducir el espesor de los tubos de nuestra estructura, pero permaneciendo dentro de los valores establecidos por la reglamentación.

⁴¹ Portal Web 3DNatives donde he recogido la información referente a la optimización topológica: <https://www.3dnatives.com/es/optimizacion-topologica-10012017/>

4. Diseño

En este apartado se tratan todos los pasos seguidos para la realización de este diseño y para su posterior análisis.

Se pretende aclarar la geometría a emplear junto con todos sus elementos obligatorios indicados por la reglamentación, además de los elementos que sean considerados necesarios para conseguir una mejora del mismo. En cuanto a las medidas y dimensiones del vehículo, serán tomadas sobre el interior de este en lugar de sobre el chasis, por lo tanto, el diseño realizado se podrá introducir dentro del vehículo, pero lo más cerca posible al chasis como aconseja el reglamento.

El vehículo objeto de este trabajo es un Volkswagen Polo 1.4 TDI del año 2006. Véase la Figura 52.



Figura 52. VW Polo.

4.1. Geometría de la estructura

Partiendo de las geometrías básicas sugeridas por el reglamento de la FIA, se elige como configuración básica la número tres debido a que cada conjunto de barras está diferenciado. Este consta de 4 conjuntos siendo estos: arco principal, tirantes traseros, miembro transversal y semiarcos laterales; y además esta configuración simplifica el número de operaciones para poder realizarlo. Véase Figura 53.

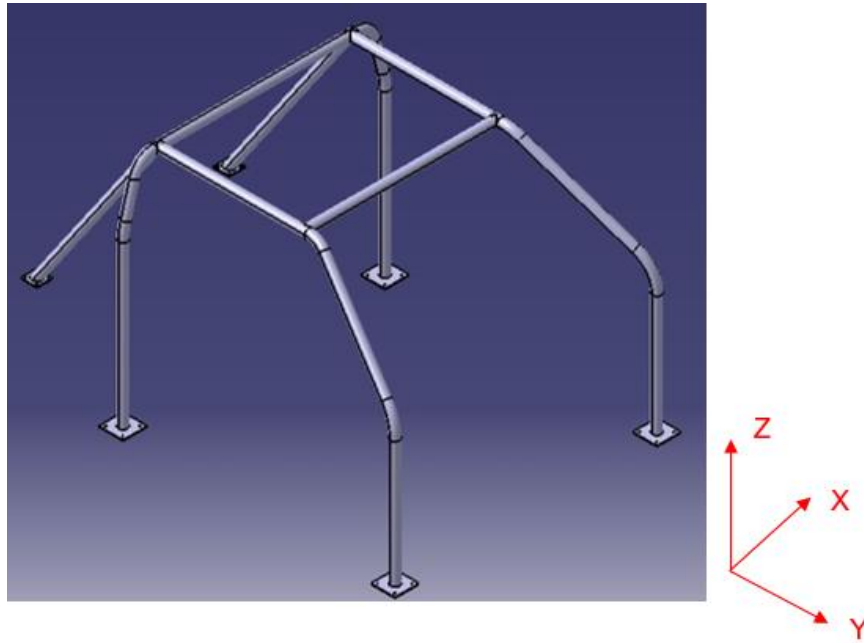


Figura 53. Estructura básica, CATIA.

A la hora de realizar el diseño de la estructura básica ha de ser comentado que ésta debe tener en cuenta todas las restricciones necesarias propuestas anteriormente. En este caso, las uniones superiores del arco principal con los semiarcos laterales y las uniones de los semiarcos laterales con el miembro transversal, deben de realizarse lo más próximas al nivel del techo. Pero, este requisito no se puede tener en cuenta debido a los embellecedores y elementos que recubren el techo.

Para intentar suavizar el error cometido, la medida tomada hasta la altura del techo será empleada para colocar los ejes de las barras de nuestra estructura. Posteriormente, a la altura tomada se le sumaría el radio exterior del tubo para intentar aproximarse un poco más al techo del vehículo. Lo lógico sería que la altura tomada se encontrase con el radio exterior del tubo y para hallar a qué altura se encontraría el eje, se tendría que restar el radio del tubo.

Seguidamente se comienza a reforzar la estructura en las distintas partes mediante los refuerzos propuestos anteriormente. Se empezará primeramente con el refuerzo del arco principal.

- Refuerzo Arco Principal:

Para el refuerzo del arco principal se elige la opción de una configuración con las barras cruzadas. Esto se debe a que dicha configuración, refuerza considerablemente las zonas donde se unen un mayor número de barras. Además, como estas uniones se realizan mediante soldadura, esta será siempre la zona más debilitada, porque se pueden producir concentraciones de tensiones.

Hay dos tipos de configuraciones para colocar la unión de la parte superior de estas barras con el arco principal, siempre guardando una distancia inferior a 100 mm respecto a la unión de los travesaños traseros. Se opta por colocarlos en la parte horizontal del arco principal debido a que esta posición puede llegar a ser más eficiente cuando realicemos el ensayo A. Al observar la estructura por la parte trasera, Figura 54, cuando actúe la fuerza del ensayo A o cualquier otro tipo de fuerza, esta barra podría estar apoyada en 4 puntos, generando 6 reacciones. Por lo tanto, resistirá en mayor medida.

En la Figura 54, se puede ver representadas las reacciones que se producirían en este caso, tomando el problema como simétrico: las tres reacciones que se encuentran en la parte izquierda R_1 , R_2 , y R_5 son iguales a R_3 , R_4 , y R_6 . Las que se dirigen verticalmente hacia arriba ayudan a que el arco principal no se desplace horizontalmente hacia abajo, sin embargo, las reacciones que se encuentran de manera horizontal ayudan a impedir que la barra horizontal flechte y se produzca pandeo.

También esta configuración en X, tiene la ventaja de que la fuerza se puede distribuir por el resto de barras debido a que confluyen en un punto intermedio. De nuevo, será conveniente colocar dos cartelas para aumentar la rigidez en la intersección de ambas barras refuerzo.

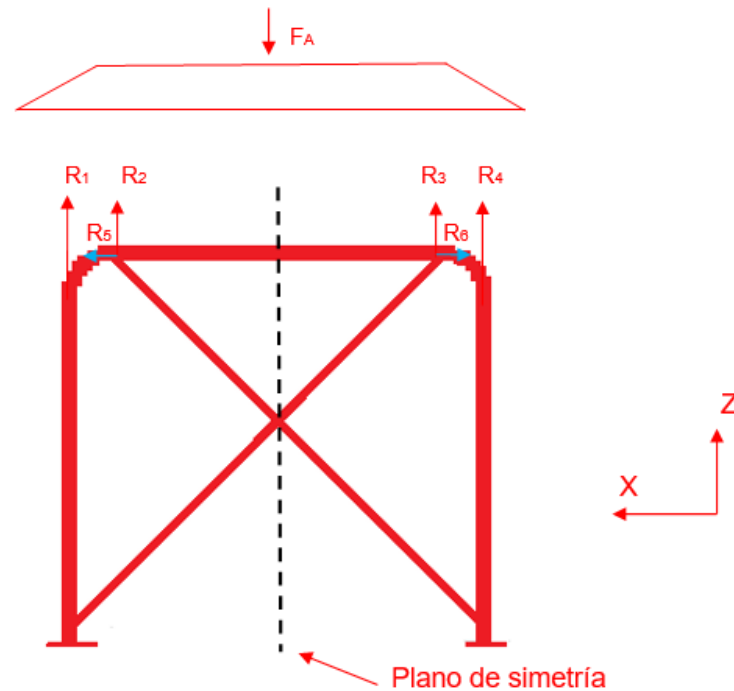


Figura 54. Croquis visto trasera.

- Refuerzo en los tirantes traseros y arco principal:

Como se ha visto, para aumentar la rigidez del arco principal son incorporados unos tirantes traseros, estando estos dirigidos hacia la parte trasera del vehículo. Dichos tirantes, ayudan a que la estructura no se flexione hacia la parte trasera al sufrir un impacto delantero, es decir, que el arco principal se mantenga vertical sin producirse ningún movimiento.

Con el objetivo de aumentar esta rigidez del arco principal son incorporados unos refuerzos donde el reglamento exige un mínimo de un tirante, pero en este caso se colocan dos para reforzar ambos lados de la estructura e impedir que no gire un lado más que el otro al recibir un choque. De esta manera se dispondrán con una configuración en X por el hecho de conseguir reforzar las partes o zonas donde confluyen mayor número de barras, como se aclaró en el caso anterior.

Para las uniones de la parte superior de estas barras se puede barajar dos posibilidades, siempre guardando una distancia como máximo de 100 mm de distancia de la unión de los tirantes traseros. En la primera de ellas, es tomada en cuenta una disposición donde ambas barras se unen sobre el arco principal apoyándose en la parte horizontal de este. En la segunda de ellas, la disposición de

dichas barras se encuentra unida sobre los travesaños traseros. Para esta elección se toma la primera disposición, ya que, la ayuda que pueden proporcionar estas barras actúa directamente sobre el arco principal. Por lo tanto, cuando se recibiera un impacto frontal o vertical, como en el caso anterior, este arco tendría 4 apoyos que impedirían un desplazamiento hacia la parte trasera, así como que se produjera una flexión.

En la Figura 55, se pueden observar las reacciones que aparecerían en el arco principal cuando se produjese un choque frontal, tomando el problema simétrico, las reacciones R_8 , R_7 , y R_{11} son iguales a R_9 , R_{10} , y R_{12} . Las que se dirigen hacia el eje Y son aquellas que ayudan a que el arco principal no sufra algún desplazamiento, sin embargo, las reacciones que se dirigen hacia el eje X aportan rigidez sumándose a las anteriores vistas R_5 y R_6 para emplear la misma función.

En la Figura 56, se ha realizado una sección a la estructura, pero al ser simétrica esta suposición se emplearía de igual manera para el otro extremo. Como se conoce esta barra se encuentra en una trayectoria que se dirige en los tres ejes coordenados por lo tanto aparece otra reacción la cual va dirigida hacia el eje Z , R_{13} , esta es sumada a las anteriores R_1 , R_2 , R_3 y R_4 las cuales se dirigen en la misma dirección.

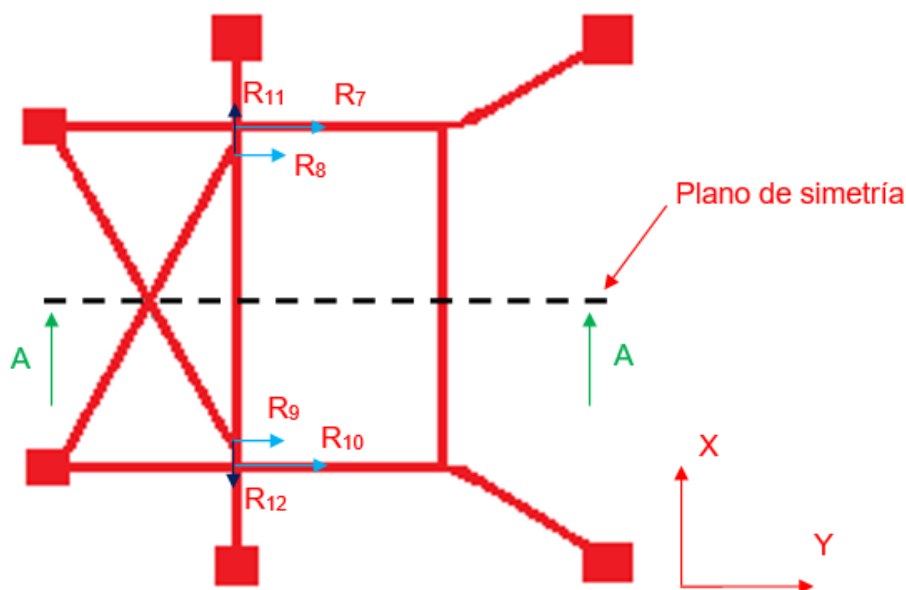


Figura 55. Croquis visto en planta.

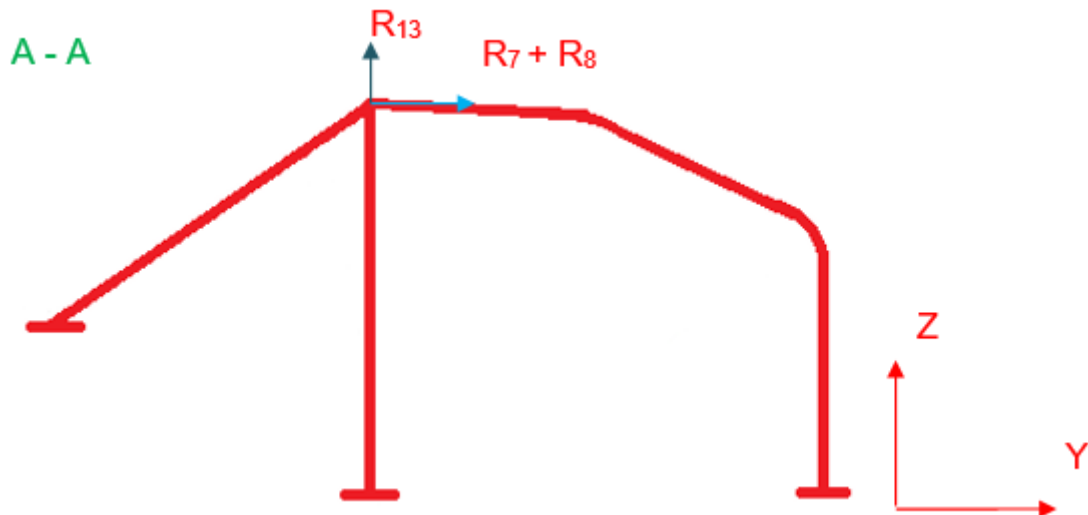


Figura 56. Croquis sección A-A.

Se ha descrito cómo se comportaría esta estructura al sufrir un choque en la zona frontal o de manera vertical hacia la estructura. Sin embargo, esta disposición ayuda también cuando se sufre un choque lateral debido a que las uniones de la parte inferior de estas barras se encuentran cerca del anclaje inferior del travesaño trasero, por lo tanto, ayuda a impedir que se concentren tensiones en esta soldadura debido a esta barra. De igual modo, la unión con la parte superior con el arco principal impide en gran parte que el arco principal rote alrededor del eje Y.

Como se puede observar, las reacciones que aparecen en el eje X son las que ayudan a mantener las partes verticales del arco principal inmóviles a la misma vez que impiden que estas giren o roten respecto a sus bases.

- Refuerzos en las puertas:

Los semiarcos laterales confluyen en la parte superior del arco principal, por lo tanto, es recomendable colocar un refuerzo para proporcionar rigidez en esta zona de la estructura. La reglamentación aporta tres tipos de configuraciones distintas en este tipo de refuerzo. Otra de sus propuestas, es colocar únicamente una barra que se uniese a la parte vertical del semiarco lateral y la parte vertical del arco principal, pero se descarta debido a que las demás disposiciones aportan mayor rigidez.

Finalmente, se elige la disposición en X por varios motivos. Primeramente, esta disposición está formada por dos barras donde una de ellas es continua pero la otra esta soldada a esta, formando un nudo rígido. También esta disposición comparada con el resto, proporciona mayor rigidez debido a que las barras al confluir en un punto intermedio las tensiones se pueden repartir entre ellas. Sin embargo, en el resto de posibilidades las barras se encuentran separadas sin juntarse expuestas a poder flexionarse con mayor facilidad al producirse un choque frontal o lateral. Además, esta configuración, puede llegar a ser más eficiente a la hora de recibir un choque lateral debido a que todas las barras confluyen en un punto. Si además se colocan unas cartelas de refuerzo, las cuales son obligatorias (mínimo dos) se impide en la medida de lo posible que estas dos barras se flexionen hacia el interior o exterior del vehículo.

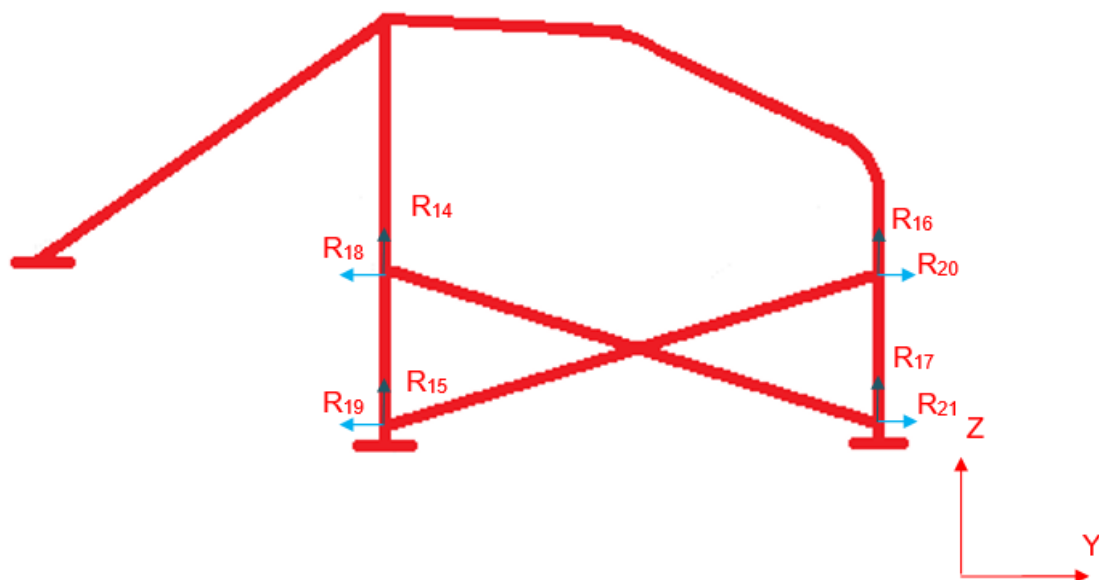


Figura 57. Croquis visto lateral.

En la Figura 57, se puede observar las reacciones que aparecerían en el arco principal y semiarco lateral. No se puede considerar simétrico respecto a un plano medio. Las reacciones que aparecen respecto al eje Y siendo estas R18, R19, R20 y R21 intentan impedir que la estructura se cierre cuando sufre un choque frontal, es decir, que el semiarco lateral y arco principal se desplacen, y si se desplazan que se muevan de manera paralela. Las reacciones que aparecen a lo largo del eje Z siendo estas R14, R15, R16 y R17, impiden en la medida de lo posible que la estructura se desplace hacia abajo.

La unión inferior de estas barras se encuentra unida a no más de 100 mm de los pies de anclaje con el objetivo de impedir las concentraciones de tensiones en esta parte del arco principal y semiarco lateral, que es donde más probabilidad tiene de producirse el fallo en la estructura debido a las uniones y las tensiones que aparecen en ellas.

- Refuerzos en el techo:

Otro tipo de refuerzo importante, hace alusión a la colocación de las barras situadas en el techo de la estructura, pues es una zona muy importante para darle rigidez a la estructura. Para este tipo de refuerzo también se disponen de varias configuraciones, encontrándose una de ellas representada mediante un croquis en la Figura 58. El otro tipo de configuración, tiene una disposición en V. Las uniones de las dos barras que forman la V pueden unirse a la parte horizontal del arco principal o bien unirse a la parte horizontal del arco frontal.

La disposición en X ha sido la configuración elegida debido a que puede ofrecer una mayor rigidez. Respecto al resto, este modelo está formado por dos barras. Una de ellas es continua y la otra está dividida uniéndose en la parte central pudiendo repartirse las tensiones a las cuales son sometidas estas barras. También esta configuración ayuda a las zonas donde confluyen más barras para intentar reducir las concentraciones de tensiones que puedan sufrir, pero el resto de configuraciones solamente aportan rigidez a dos zonas donde confluyen más barras dejando el resto libres.

Dentro de la configuración seleccionada, las uniones de estas barras con la estructura pueden encontrarse de dos maneras. Una disposición, Figura 58, las barras son unidas a los semiarcos laterales los cuales siguen la forma de la puerta de entrada al vehículo, pero la otra disposición dichas uniones son unidas a la parte horizontal del arco principal y a la parte horizontal del arco delantero, siempre ambas guardando una distancia de 100 mm respecto a las demás uniones.

Para este proyecto la disposición elegida es cuando las barras son unidas a los semiarcos laterales, porque si se encuentra una situación donde se recibiera un golpe lateral, esta disposición impediría en la medida de lo posible que la estructura se comprima transversalmente.

Con esta disposición se pretende aumentar la rigidez al recibir un choque lateral, así como aumentar también la rigidez al recibir un choque frontal. Por lo tanto, se dispone una barra que atraviesa la estructura por el eje de simetría del techo la cual se encuentre en el centro del arco principal y del arco delantero pasando por la unión generada por las dos barras anteriores, formando un nudo con tres barras unidas.

Primero, se estudia la estructura con la unión de estas dos barras comentadas anteriormente sin esa mejora que se pretende realizar. Como se puede observar en la Figura 58 se encuentran colocadas todas aquellas reacciones que aparecerían al sufrir un choque. Debe ser tenido en cuenta, además, el eje de simetría que atraviesa longitudinalmente la estructura. Por lo tanto, las reacciones de un lado serían iguales, pero de signo contrario, es decir, diferente dirección. Las que se encuentran en el eje X, siendo estas R_{22} , R_{26} , R_{29} y R_{23} impiden que la estructura se contraiga como se ha descrito anteriormente. Además, las reacciones R_{27} y R_{28} dirigidas en el eje Y aparecen para impedir la unión entre el arco principal y el arco delantero.

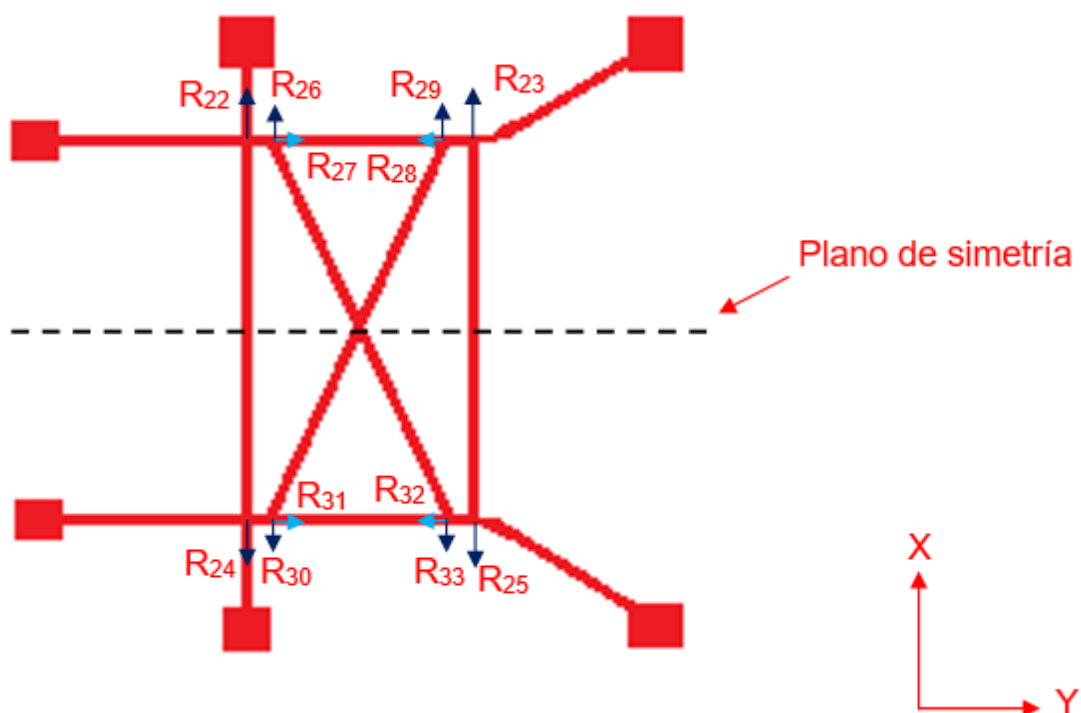


Figura 58. Croquis vista planta.

De igual manera, cuando se recibe un choque frontal estas barras aportan rigidez apareciendo las reacciones que se encuentran en el eje Y, pero para proporcionar más rigidez se coloca una barra longitudinalmente como se puede observar en la Figura 59.

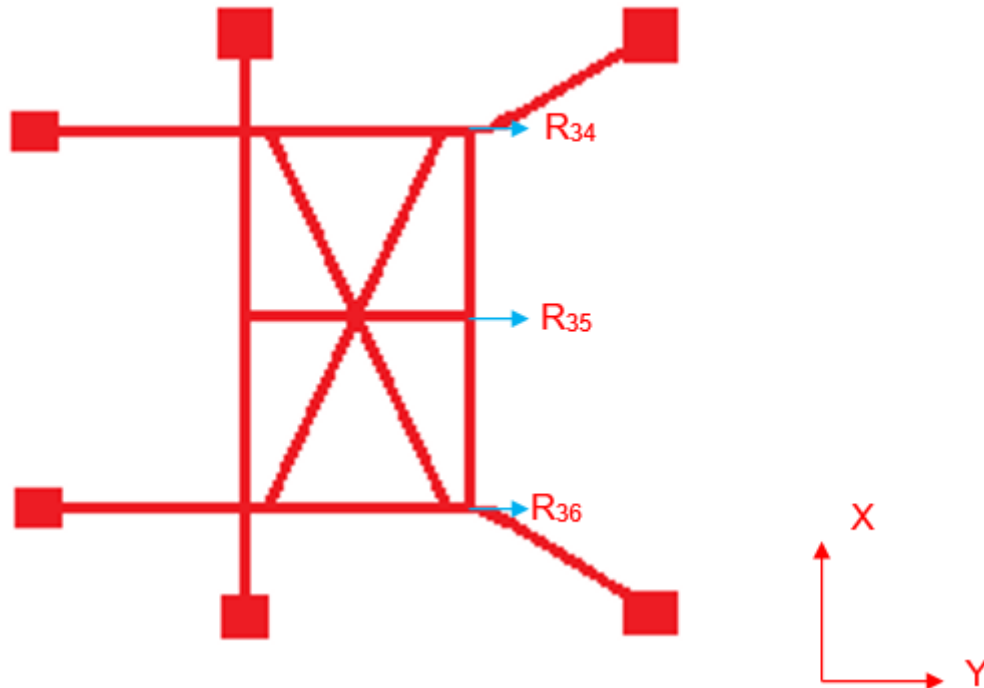


Figura 59. Croquis vista planta con refuerzo.

Esta barra de refuerzo aporta mayor rigidez. En el caso anterior cuando se producía un choque aparecían dos reacciones, R_{36} y R_{34} , siendo esta tensión distribuida por las barras cruzadas, pero la parte horizontal del arco principal podría flectar fácilmente. Por lo tanto, al introducirle esta barra uniendo el arco delantero con el principal, tenemos mayor rigidez apareciendo R_{35} . Esta barra seguiría la forma del techo y estaría dividida y unida a las dos barras mediante soldadura.

Para terminar, se colocarán dos cartelas a estas barras para aumentar la rigidez de este nodo ya que será un punto importante de esta estructura por concentrarse gran número de barras.

- Refuerzo arco delantero:

Este refuerzo sobre el arco delantero o uniendo los semiarcos laterales, es incluido en esta estructura de seguridad para aumentar la rigidez. Esto se debe, a que las zonas laterales del arco delantero no estarían unidas en ningún otro punto, con la salvedad de la parte horizontal superior del arco y los pies de anclaje.

Por lo tanto, se coloca esta barra de refuerzo para proporcionar mayor rigidez unida a las barras verticales del arco delantero o semiarcos laterales. Sería situado tan arriba como fuera posible de la altura del salpicadero para no molestar a los pilotos al visualizar la trazada a seguir.

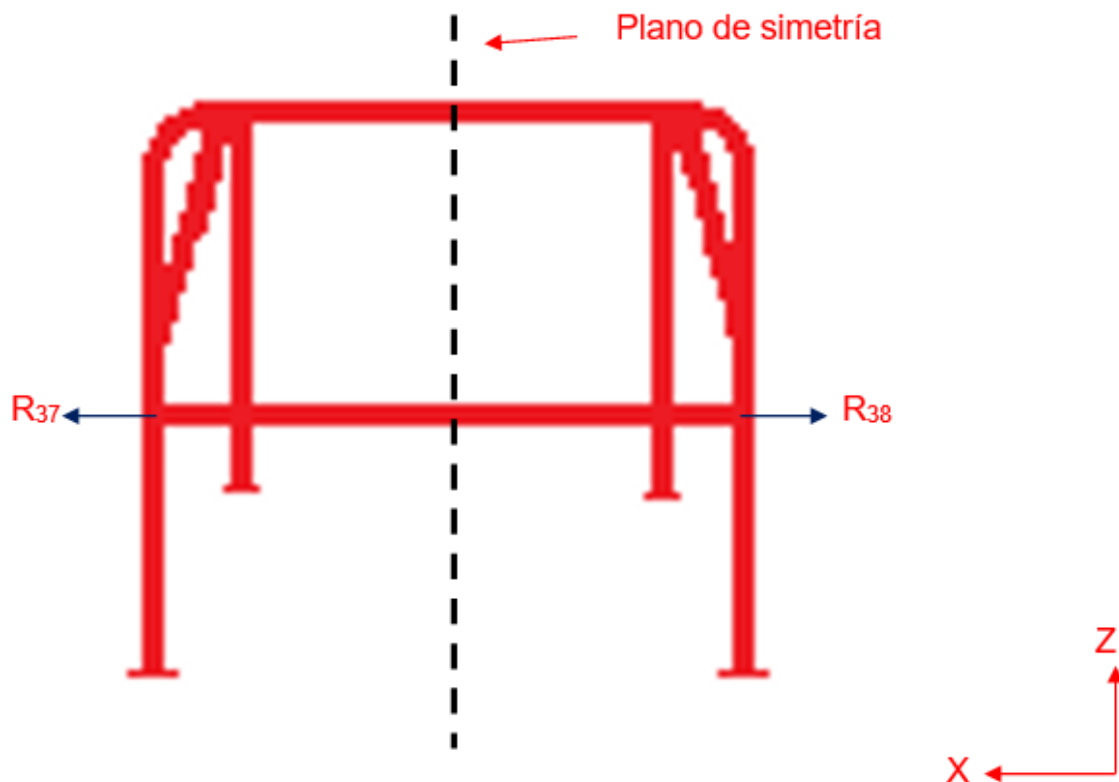


Figura 60. Croquis perfil delantero.

En la Figura 60, se encuentran las reacciones que aparecerían en dicha barra trabajando a compresión cuando se recibe un choque lateral, siendo estas R_{37} y R_{38} . De igual manera aparecerían en la parte horizontal del arco delantero estudiadas en el caso anterior, siendo estas R_{23} y R_{25} . Además, este refuerzo nos proporciona seguridad cuando se recibe un choque delantero.

- Pilar de refuerzo del parabrisas:

Este refuerzo sobre el parabrisas, zona del arco delantero o semiarco lateral, también es incluido en la estructura ya que esta barra nos proporciona rigidez en dicha zona además del techo.

Esta barra impide en la medida de lo posible la deformación del semiarco lateral. Asimismo, ésta está unida en su parte superior a no más de 100 mm de la unión de las otras barras y en la parte inferior a no más de 100 mm del pie de apoyo por lo tanto coincidiría con la unión inferior de los refuerzos en las puertas. Ésta es dividida atravesando la parte superior de este refuerzo en la puerta. Esta consideración puede tener sus ventajas, ya que, al someter a dicha barra a una tensión, puede repartirla sobre el refuerzo de las puertas y puede llegar a ser más rígido este refuerzo.

En la Figura 61, se pueden observar las reacciones que aparecería en caso de producirse un esfuerzo en esa barra considerándola a tracción. Se tienen las reacciones verticales las cuales siguen la dirección del eje Z, siendo estas R_{39} y R_{42} y luego tenemos las que se dirigen en dirección Y, siendo estas R_{41} y R_{40} .

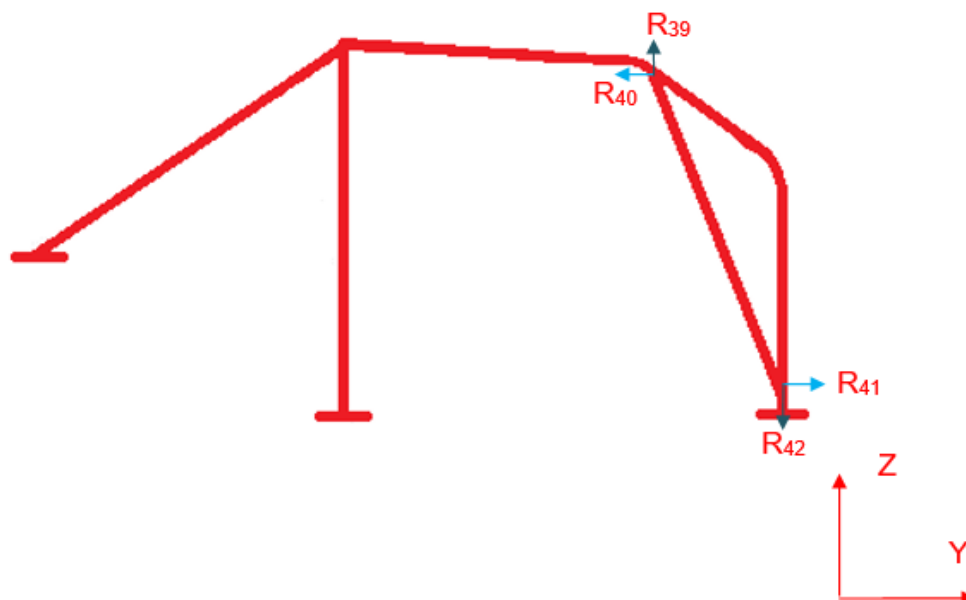


Figura 61. Croquis perfil lateral.

4.2. Dimensiones y la masa del vehículo.

En este subapartado, se van a tratar las dimensiones que tendría esta jaula de seguridad. Se conocen que estas dimensiones serían particulares para el automóvil propuesto, no pudiéndose trasladar a otro modelo. También la masa del vehículo se debe tener en cuenta para realizar los ensayos necesarios.

Todas las dimensiones tomadas y tratadas en este apartado han sido in-situ, es decir sobre el propio vehículo. Por lo tanto, estas son tomadas en la zona donde debería de colocarse realmente después de llevarse a cabo consultas a diferentes concesionarios e investigado como se colocaría una jaula de seguridad.

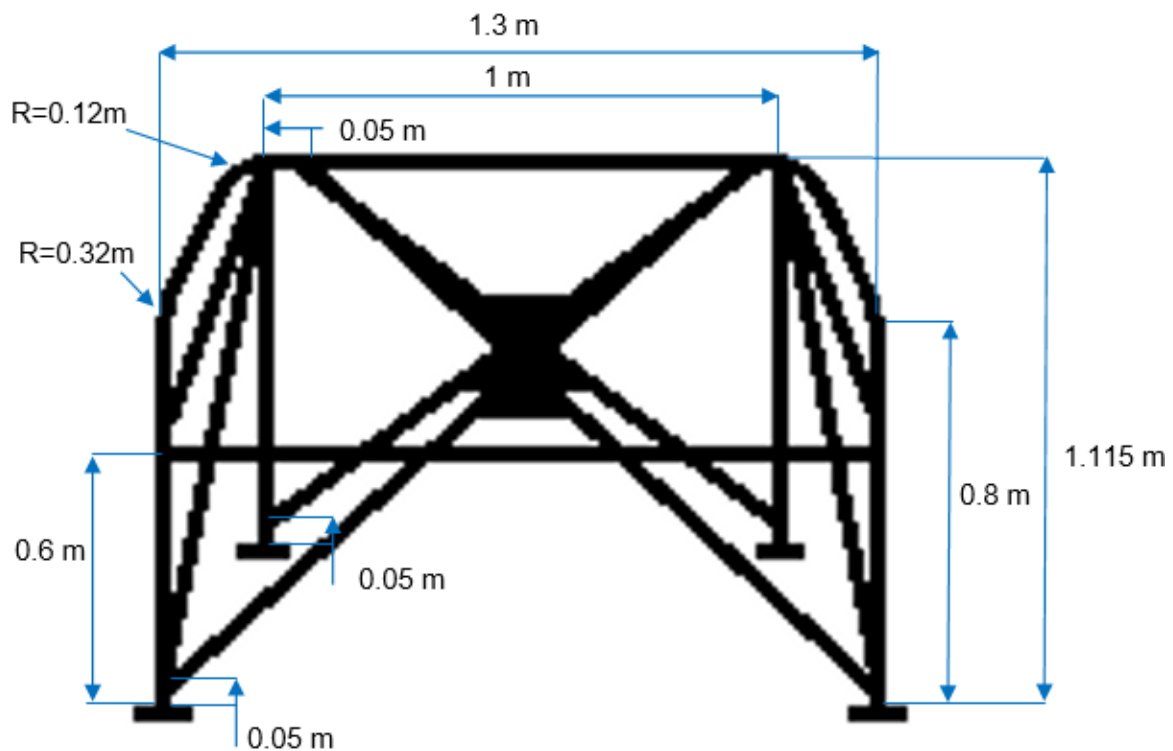


Figura 62. Dibujo explicativo dimensiones vista frontal.

En la Figura 62, se pueden observar las diferentes medidas tomadas sobre el vehículo teniendo en cuenta que la estructura sería simétrica. También se puede observar la distancia a la que se unen todas las barras de los pies de apoyo a una distancia de 50 mm siendo este menor a 100 mm y siendo igual para las demás uniones donde no se encuentra indicado.

Los radios de giro han sido aproximados a las dimensiones del vehículo intentando maximizarse todo lo posible para impedir ondulaciones del tubo muy grandes e impedir en la medida de lo posible las concentraciones de tensiones en estos giros, por lo tanto, cuanto mayor es el radio menor concentración de tensiones.

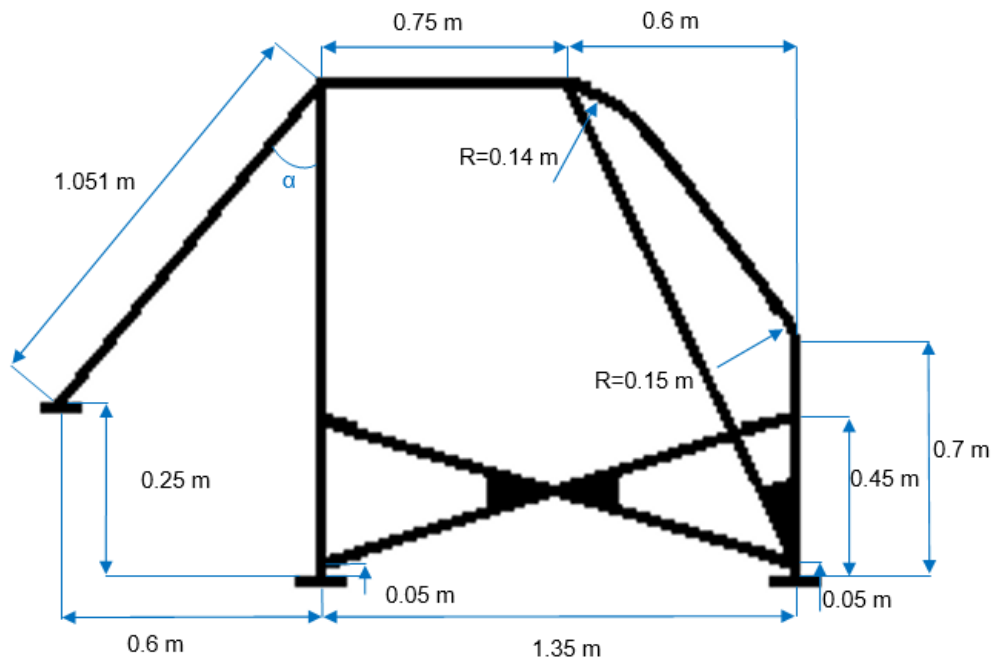


Figura 63. Dibujo explicativo dimensiones vista lateral.

En la Figura 63, se puede observar las diferentes medidas tomadas en el vehículo teniendo en cuenta la altura del salpicadero, además el ángulo formado por los travesaños traseros (α) que tiene que ser mayor a 30° , por lo tanto, estaríamos dentro de lo permitido.

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{0,6}{0,865}\right) = 34,74^\circ > 30^\circ$$

Ambos radios que aparecen en el semiarco lateral, Figura 63, se han tomado a razón de las dimensiones del vehículo aproximándose todo lo posible al marco de la puerta con la finalidad de poder maximizarlos e impedir de igual manera la concentración de tensiones. Estos tubos son manufacturados mediante prensas capaces de poder producir este giro, pero teniendo en cuenta que la sección circular del propio tubo no debe ser alterada tras realizar este trabajo. Por lo tanto, cuanto mayor sea el radio necesario, menor ondulación recibirá este y dicha sección no será alterada.

Todas las dimensiones son tomadas respecto al plano superior de los pies de anclaje porque estos se han incorporado una vez realizada toda la estructura, ya que su espesor es de unos 4 mm.

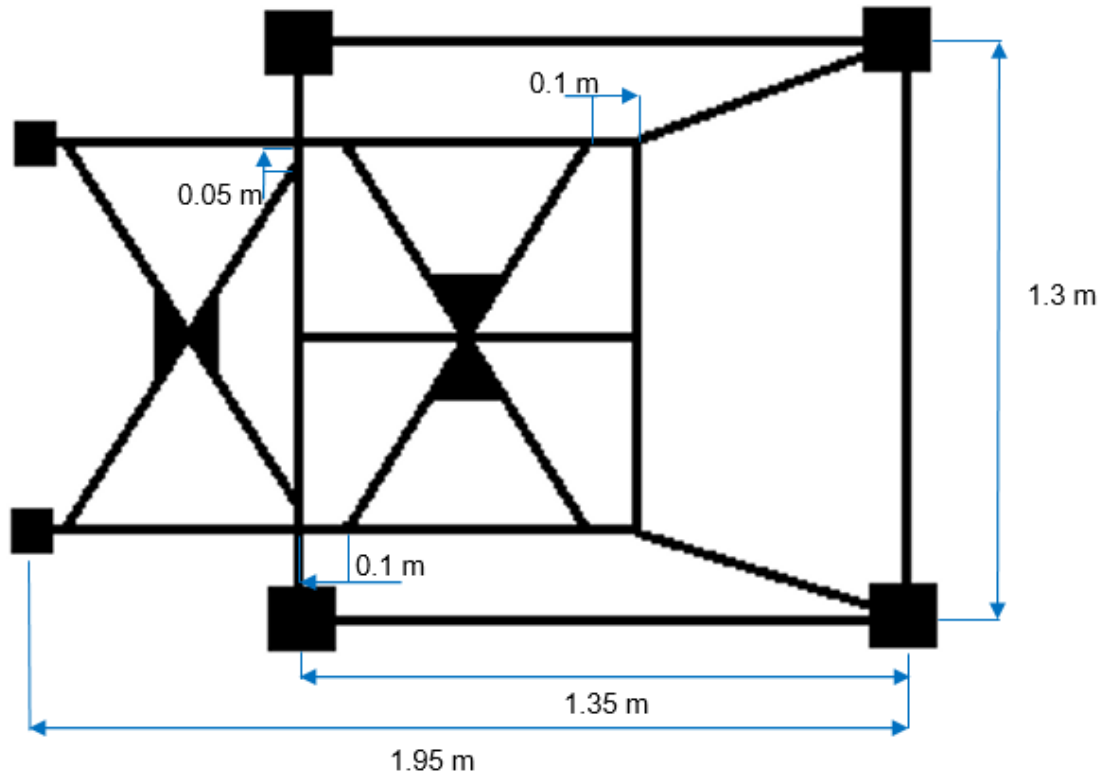


Figura 64. Dibujo explicativo dimensiones vista superior.

En la Figura 64, se puede observar la separación de los refuerzos cruzados del techo respecto al arco principal y el travesaño transversal de unos 0,1 m. Se ha tomado esa distancia $\leq 0,1\text{m}$ para reducir en todo lo posible la longitud de estos refuerzos, aunque por ello se coloque con mayor separación que los anteriores. También se han colocado unas medidas generales además de la separación de los tubos en los refuerzos de los travesaños traseros respecto del arco principal.

En cuanto los pies de anclaje se encuentran dos tipos, los pertenecientes al arco principal y los arcos laterales, y en otro caso los referentes a los travesaños traseros.

Los anclajes de los travesaños traseros exigen que tienen que tener un área mínima de unos 60 cm^2 , por lo tanto, la longitud mínima del lateral sería:

$$l = \sqrt{60\text{ cm}^2} = 7,74\text{ cm} \rightarrow 8\text{ cm}$$

Se ha tomado el lado de unos 80 mm para redondear a unidades enteras y evitar producir cualquier error, además esta medida puede ser más sencilla para su fabricación.

Esta placa, con espesor de unos 4 mm, se encuentra soldada a los tubos de los travesaños traseros, pero a la misma vez es atornillada al chasis mediante otra placa que se ha soldado previamente a éste. Serán colocados 4 pernos para darle mayor rigidez y sujeción a las 4 esquinas de esta placa e impedir la separación de alguna de ellas respecto de la base, aplicando unos tornillos con métrica de M8 y calidad ISO 8.8 (exigido por la FIA).

Los anclajes referentes al arco principal y los travesaños laterales exigen tener un área mínima de unos 120 cm², por tanto, para obtener las dimensiones de los lados laterales sería seguido el procedimiento anterior:

$$l = \sqrt{120 \text{ cm}^2} = 10,95 \text{ cm} \rightarrow 12 \text{ cm}$$

El lado tomado ha sido de unos 120 mm por la misma razón a la anterior, redondeando a unidades enteras y evitar producir error alguno, facilitando su fabricación.

En cuanto a la masa del vehículo, se encuentra tabulado en la ficha técnica del mismo, tratándose de una masa en vacío sin tripulantes y con el depósito de combustible vacío.

$$\text{peso del vehículo} = 1089 \text{ kg}$$

En las figuras siguientes se mostrará el diseño realizado de la estructura de seguridad, teniendo en cuenta todas las dimensiones tomadas y requisitos exigidos tratados en los subapartados anteriores, siendo estas extraídas desde el mismo programa CATIA V5. Véase Figura 65, Figura 66, Figura 67, Figura 68 y Figura 69.

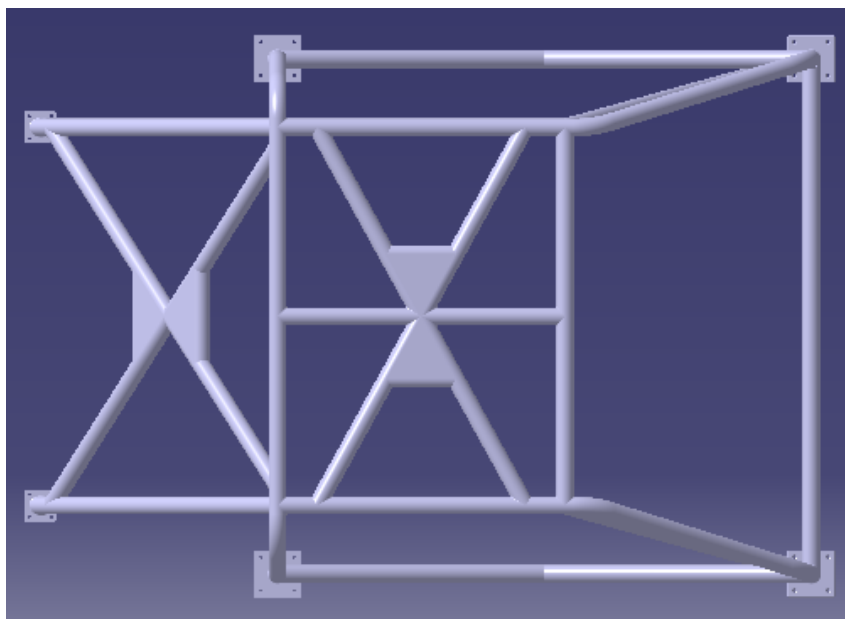


Figura 65. Alzado en planta diseño CATIA.

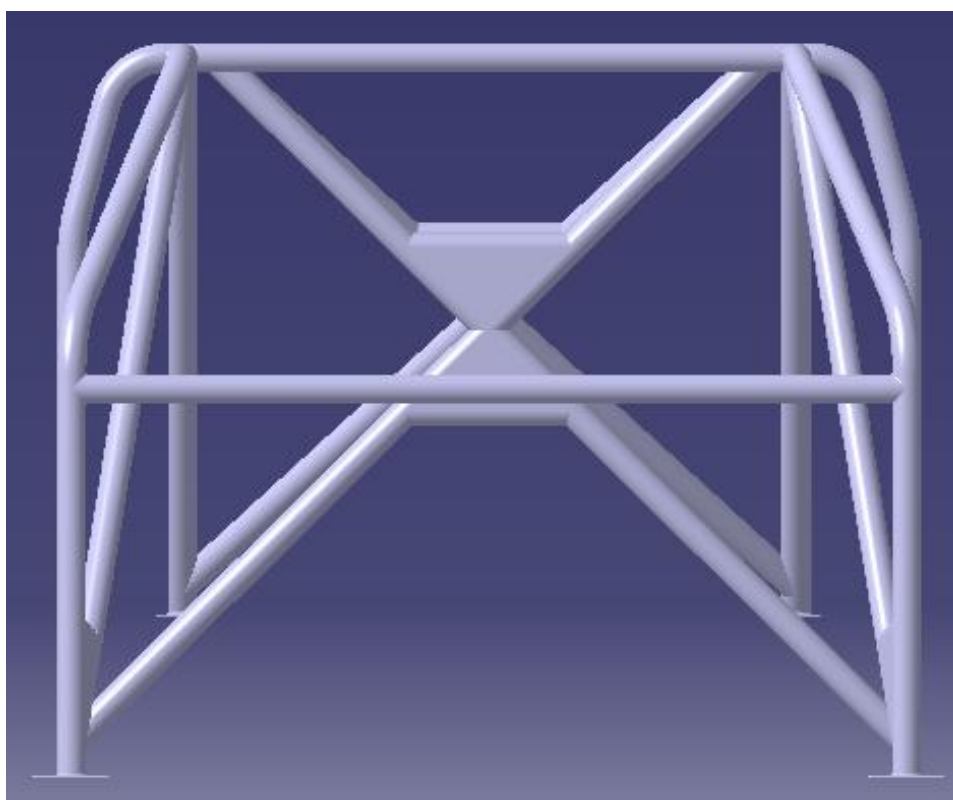


Figura 66. Alzado lateral (vista delantera) diseño CATIA.

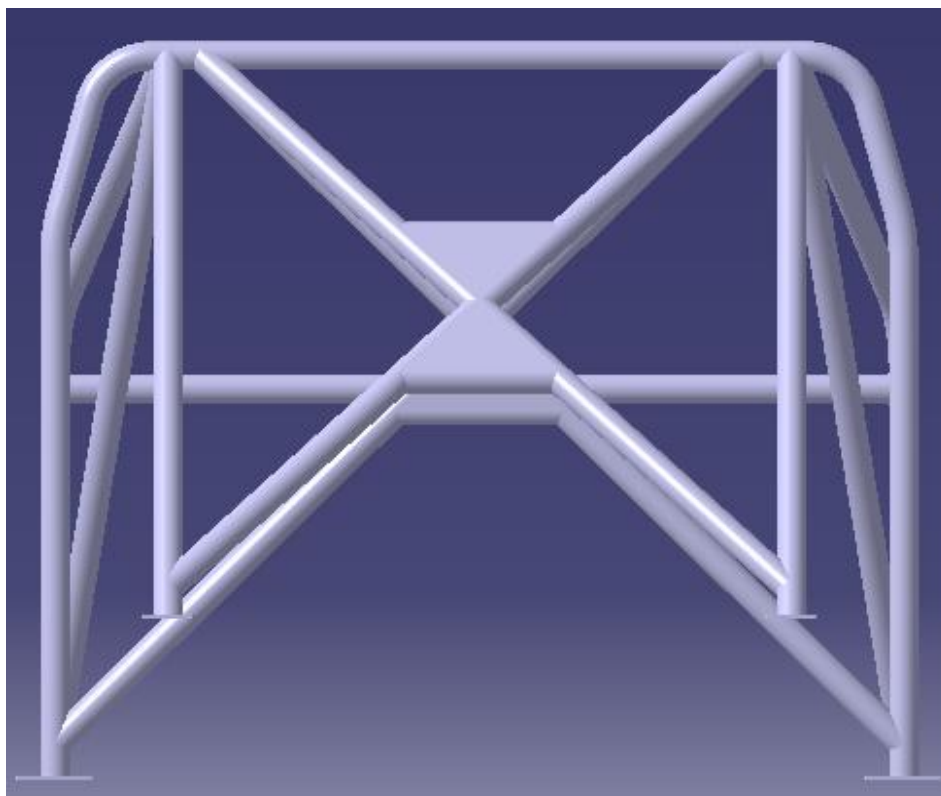


Figura 67. Alzado lateral (vista trasera) diseño CATIA.

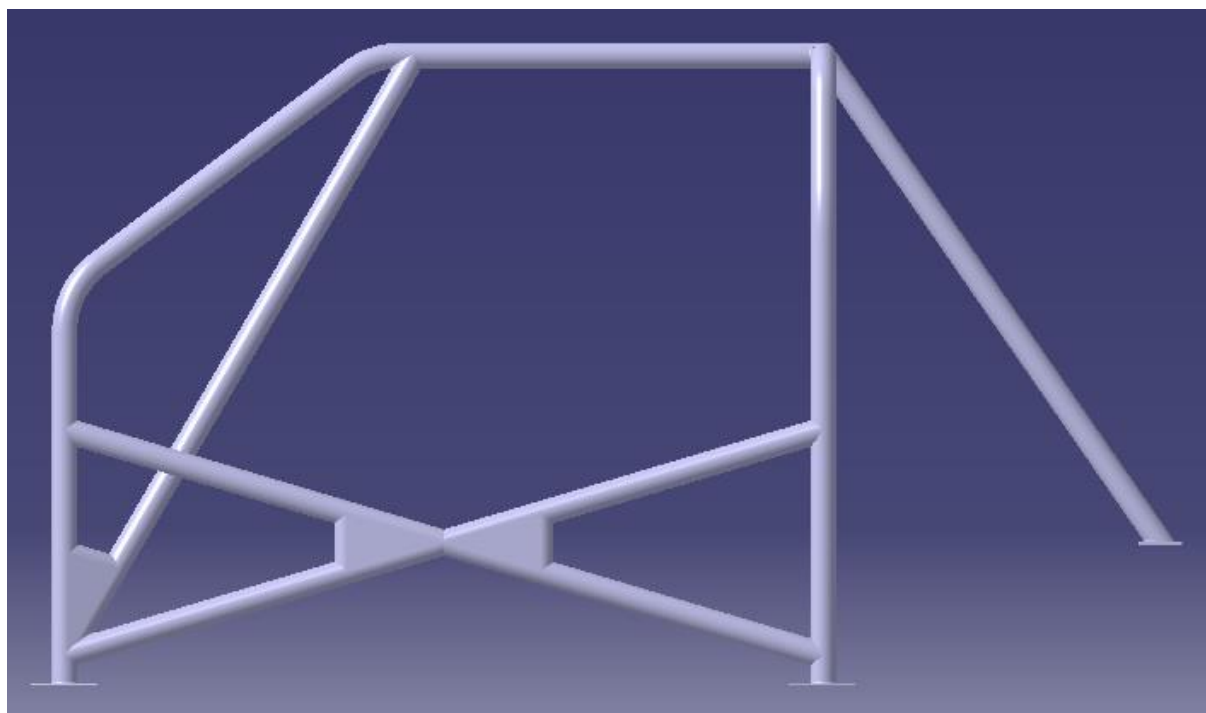


Figura 68. Alzado lateral (vista lateral) diseño CATIA.

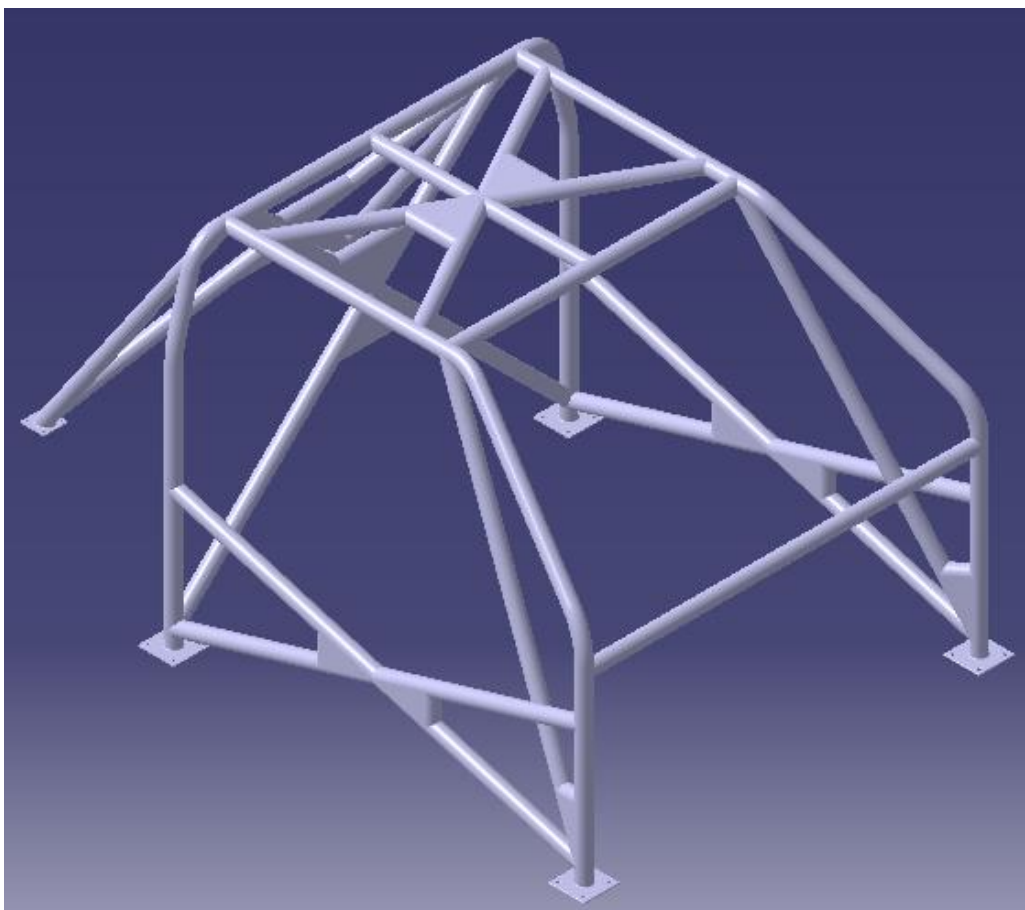


Figura 69. Vista 3D diseño CATIA.

4.3. Aproximación del espesor: Cálculo analítico.

Para comenzar a trabajar con la estructura y seguidamente someterla a los distintos ensayos propuestos, debe de ser consultado el Anexo J Artículo 253 apartado 8.3.3. Especificaciones del tubo⁴² donde aparecen unos valores mínimos de diámetro exterior y espesor, Figura 70.

Todas las partes de la estructura no tendrían el mismo espesor, como se puede observar en la tabla. Cada parte de la estructura muestra un diámetro exterior mínimo. Se considerarán las mismas dimensiones en todos los tubos y partes para simplificarlo en la medida de lo posible. Esto es debido a que se puede reducir el coste de esta estructura si solamente se necesita un tubo estandarizado con una sola dimensión. En el caso contrario sería necesario disponer de una gama de medidas y que estas estuviesen disponibles en el mercado con la misma rapidez.

⁴² Información obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 apartado 8.3.3. Especificaciones del tubo.

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA

Dimensiones mínimas (mm)	Aplicación
45 x 2.5 (1.75"x0.095") o 50 x 2.0 (2.0"x0.083")	Arco principal (Dibujos 253-1 y 253-3) o arcos laterales y miembros transversales traseros (Dibujo 253-2) según la construcción
38 x 2.5 (1.5"x0.095") o 40 x 2.0 (1.6"x0.083")	Semiarcos laterales y otras partes de la estructura de seguridad (a menos que se indique lo contrario en los artículos anteriores)

Figura 70. Dimensiones mínimas FIA.⁴³

El arco principal es la parte de la estructura cuya dimensión mínima es mayor, como se puede observar en la Figura 70, con un diámetro exterior de unos 45 mm. También aparece un diámetro exterior de 50 mm, pero reduciría el espesor en 5 mm por lo tanto se elige la primera opción ya que después se aproximará el espesor conveniente para esta estructura. Por otro lado, especifica el espesor mínimo que sería de unos 2,5 mm, pero el espesor que se emplea será mayor a éste, realizando un breve cálculo analítico empleando el Ensayo A: carga distribuida sobre arco principal para asegurar cumplir con dicho ensayo. Aunque después al realizarlo se encuentra más lejos del lado de la seguridad, por lo que se llevará a cabo la reducción del espesor en la medida de lo posible sin llegar a que sea este menor a 2,5 mm.

⁴³ Dimensiones recogidas por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 apartado 8.3.3. Especificaciones del tubo.

Se realizará la aproximación de la parte horizontal del arco principal, donde se aplica dicha fuerza, mediante una barra que es sometida a una carga uniforme vertical, además, restringiendo el desplazamiento vertical y horizontal en los apoyos, pero, no obstante, sí podrían rotar. Es tomada esta consideración empleando la hipótesis de pequeñas deformaciones. Esto quiere decir que los tubos no se van a deformar longitudinalmente: la longitud del tubo no disminuye. De igual manera ocurriría con la parte horizontal de este arco, solamente ambas partes podrían flectar de tal manera que se produzca el giro en la unión, por lo tanto, serán considerados apoyos biapoyados.

Se comienza colocando un pequeño croquis, Figura 71, de la barra a emplear y los datos que se dispone para su estudio: la longitud de la barra 1 m y respecto a la carga distribuida, se debe llevar a cabo su cálculo como comentamos anteriormente en el apartado 2.3.1 de este proyecto:

$$F = 75 \frac{N}{kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Se conoce además la restricción necesaria para este ensayo donde la flecha, desplazamiento vertical del punto medio, tiene que ser menor a 0,05m.

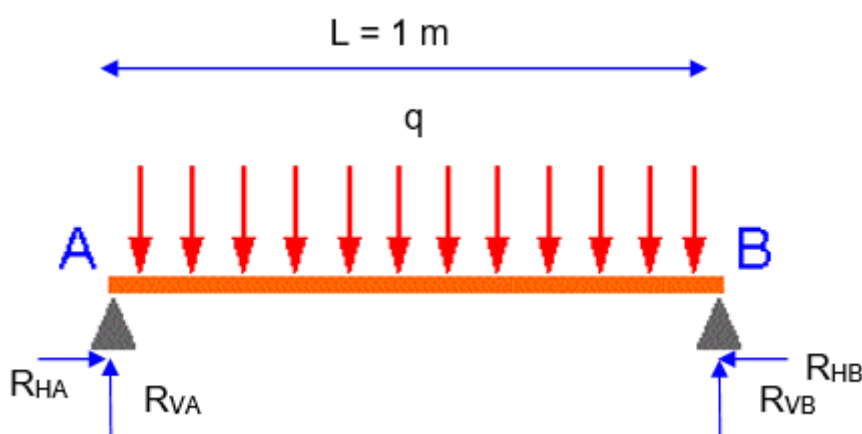


Figura 71. Distribución de la carga en el arco principal.

Se emplea sumatorio de fuerzas verticales, horizontales y momentos, pudiéndose hallar las reacciones necesarias.

$$\sum F_H = 0 \rightarrow R_{HA} - R_{HB} = 0 \rightarrow R_{HA} = R_{HB} = 0$$

Por lo tanto, las reacciones horizontales son 0 ambas.

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_{VA} + R_{VB} - q \cdot L = 0$$

$$R_{VA} + R_{VB} = q \cdot L$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_{VB} \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$R_{VB} \cdot L = q \cdot L \cdot \frac{L}{2}$$

Se pueden obtener los valores de las reacciones verticales, siendo ambas iguales:

$$R_{VB} = R_{VA} = q \cdot \frac{L}{2} = 92,9 \text{ kN/m} \cdot \frac{1\text{m}}{2} = 46,5 \text{ kN}$$

$$R_{VB} = R_{VA} = 46,5 \text{ kN}$$

Una vez obtenidas las reacciones se calcula la flecha del punto medio de la viga.

$$\downarrow v_{\text{punto medio}} = \downarrow v_A + \theta_A \cdot \frac{L}{2} + \frac{\text{Area}_{Mf} \cdot L_{A \rightarrow \text{Punto medio del diagrama}, Mf}}{E \cdot I}$$

De la ecuación anterior se conoce, en el lado izquierdo de la igualdad, el desplazamiento del punto vertical no debe ser mayor a 0.05 m. En el lado derecho de la igualdad el desplazamiento vertical del nodo A sería 0, debido a la hipótesis de pequeñas deformaciones; el área de momentos flectores se calcularía con las reacciones anteriores halladas y el ángulo girado del nodo A se puede obtener de la siguiente manera, que sería igual que el del nodo B por ser simétrica:

$$\theta_A = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

La flecha de una barra biapoyada⁴⁴ sometida a una carga uniforme viene tabulada, siendo esta:

$$\downarrow v_{punto\ medio} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$

Esta última ecuación debe despejarse el momento de inercia I para así, como se trata con un tubo hueco, calcular el momento de inercia de una barra hueca. Por lo tanto, se compone de radio exterior, 45 mm, y radio interior, incógnita.

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I} \leq 0.05\ m \rightarrow \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot 0.05} \leq I$$

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{92,9\ kN/m \cdot 1m \cdot 1000\ N/kN}{0.05 \cdot 210 \cdot 10^9} \leq I$$

El módulo de Young, E , es tomado referente al material que vamos a emplear 25CrMo4 con $E = 210 \cdot 10^9\ N/m^2$, detallado el material a emplear en el subapartado 4.4.

$$118,8 \cdot 10^{-9}\ m^4 \leq I$$

Conociendo el momento de inercia de un círculo con cierto espesor, siendo este:

$$I \geq \frac{\pi}{4} \cdot R_{ext}^4 - \frac{\pi}{4} \cdot R_{int}^4$$

$$118,8 \cdot 10^{-9}\ m^4 \geq \frac{\pi}{4} \cdot (0,0225m)^4 - \frac{\pi}{4} \cdot R_{int}^4$$

$$R_{int} \leq 0,018m$$

$$e = 0,0225 - 0,018 = 0,0045\ m \rightarrow 4,5\ mm > 2,5mm$$

Por lo tanto, se emplea un diámetro exterior de 45 mm y un diámetro interior de 36 mm con un espesor de 4,5 mm. Ejemplificado en Figura 72.

⁴⁴ Portal Web ingemecanica, información recogida para determinar el cálculo de la flecha:
<https://ingemecanica.com/tutoriales/prontuario.html>

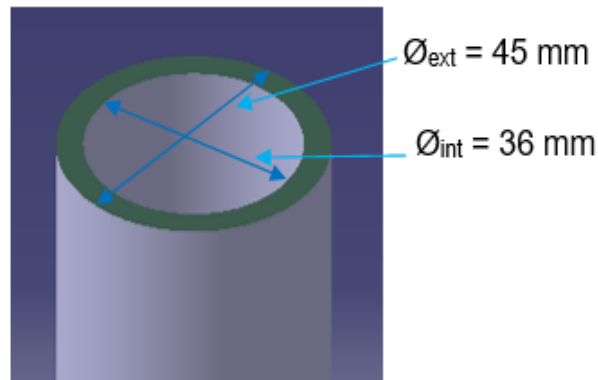


Figura 72. Imagen explicativa diámetros elementos de partida.

4.4. Elección del material

La elección del material es muy importante para este tipo de estructuras donde se pone en peligro la seguridad de los tripulantes. Éste debe ser lo suficientemente rígido como para garantizar la no rotura de la estructura en algunas zonas y además que sea ligero para que este no sea un inconveniente aumentando la masa del vehículo a desplazar.

Tras unas investigaciones y consultas a diferentes comerciales centrados en la fabricación e implantación de este tipo de jaulas de seguridad, como, por ejemplo, Motoquad Mágina en la localidad de Mancha Real, se proporcionan datos referentes a los materiales empleados en la fabricación de estas estructuras. Estaba compuesto por diversos materiales, pero el más importante de ellos era el material acero 25CrMo4 un acero no aleado.

En el Anexo J artículo 253 apartado 8.3.3. Especificaciones del tubo⁴⁵ además de las dimensiones mínimas tratadas anteriormente, también se pueden ver algunas características referentes al material empleado para estos elementos. Por un lado, el porcentaje en contenido en carbono debe ser menor a 0,3% y, por otro lado, la resistencia mínima a tracción debería de ser como mínimo de 350 N/mm².

⁴⁵ Información obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 apartado 8.3.3. Especificaciones del tubo.

La composición en porcentaje del acero 25CrMo4⁴⁶, es la siguiente:

Carbono (%C)	Manganeso (%Mn)	Silicio (%Si)	Fosforo (%P)	Azufre (%S)	Cromo (%Cr)	Molibdeno (%Mo)
0,22-0,29	0,60-0,90	< 0,4	< 0,025	< 0,035	0,9 – 1,2	0,15 – 0,3

Tabla 1. Composición 25CrMo4.

Como se puede observar en la Tabla 1, cuya composición en carbono esta entre un 0,22% y 0,29% por lo tanto es menor a 0,3 %. Las propiedades del acero 25CrMo4 se han extraído de la base de datos de SolidWorks que presenta este material:

Propiedades	Valor	Unidad
Módulo elástico	210E+03	MPa
Coeficiente de Poisson	0.28	-
Módulo cortante	7,9E+04	MPa
Densidad de masa	7800	Kg/m ³
Límite de tracción	700	MPa
Límite elástico	450	MPa

Tabla 2. Propiedades 25CrMo4.

De igual manera, en la Tabla 2, se puede observar como el límite de rotura es de 700 MPa, mayor a los 350 MPa de mínimo permitidos para que no se produzca la rotura.

4.5. Soldadura del material

La soldadura del material⁴⁷, como se ha descrito anteriormente, deberá cubrir todo el perímetro del tubo, es decir, la zona de contacto donde se encuentre tubo vs tubo o en el caso de tubo vs cartela donde el perímetro a cubrir es mayor. Está prohibido emplear soldadura para la unión de elementos entre la estructura de seguridad y la carrocería de vehículo.

⁴⁶ Portal Web VIRGAMET, en esta página he recogido la información referente a la composición química de dicho acero:

<https://virgamet.com/25hm-25crmo4-1-7218-24crmo5-20crmo4-sae-aisi-4130-alloy-steel>

⁴⁷ Información obtenida por la reglamentación FIA, Anexo J Artículo 253 apartado 8.3.4. Indicaciones para la soldadura.

Todas las soldaduras que se realizan sobre esta estructura de seguridad deberán ser de la mejor calidad y penetración posible, es decir, que la soldadura llegue a toda la superficie de contacto tanto exterior como interior. Cabe destacar que, una buena apariencia exterior no garantiza la calidad de la soldadura.

El método de soldadura recomendado por la FIA es ‘soldadura al arco en atmósfera de gas inerte’, también denominada soldadura TIG (Tungsten Inert Gas)⁴⁸. Este tipo de soldadura emplea como fuente de calor un arco eléctrico que salta entre el electrodo de Tungsteno y la pieza a soldar, mientras que una pequeña atmósfera protectora de gas inerte, se encarga de desplazar el aire y evitar la rápida oxidación durante el proceso de soldadura, Figura 73. La velocidad de soldadura de éste es mayor a la del resto debido a la alta densidad de corriente eléctrica producida.

El resultado final obtenido, Figura 74, con este método es excepcional pero la calidad de la soldadura dependería de la intensidad de corriente, la temperatura, punta del electrodo en perfecto estado, corriente alterna o continua y limpieza.

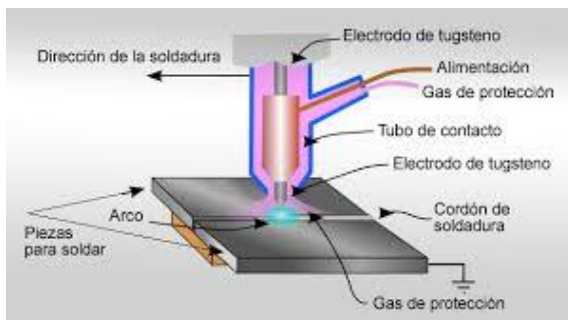


Figura 73. Elementos y partes soldadura TIG



Figura 74. Apariencia exterior soldadura TIG.

5. Cálculo analítico

En este punto se describe la resolución de la estructura de manera analítica para después ser comparada y comprobada con el método de elementos finitos.

Para realizar el cálculo analítico, se simplifica el modelo a analizar siendo uno de los conjuntos laterales. En concreto, la parte lateral en la zona del conductor, Figura 75, debido a que en esta zona está mayor afectada por el ensayo B. De igual manera ocurre para el ensayo A, aunque esta carga se aplica a lo largo de la barra

⁴⁸ Información recogida a través del documento Procesos de soldadura bajo atmosfera protectora: <file:///C:/Users/Usuario/Downloads/Procesos%20de%20soldadura%20bajo%20atm%C3%B3sfera%20protectora.pdf>

por lo tanto el procedimiento llevado a cabo ha sido agrupar dicha carga en ambos extremos de la barra para estudiar dicho caso. Se tratará con mayor detalle en el apartado de consideraciones.

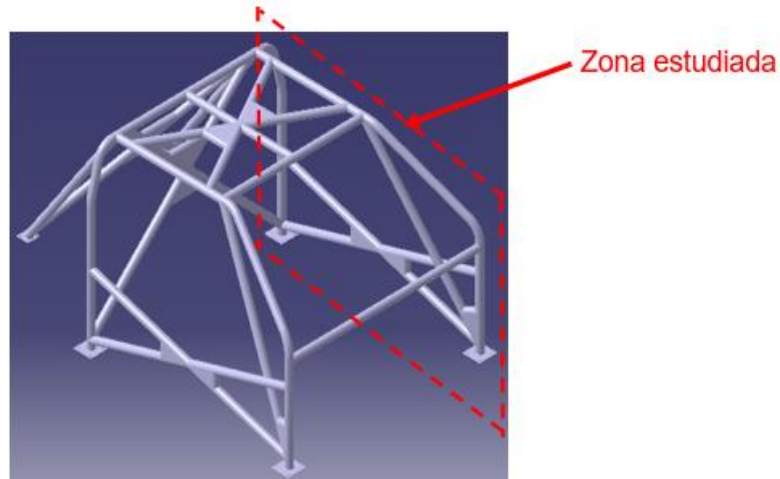


Figura 75. Imagen aclarativa zona estudiada.

Debe tenerse en cuenta las exigencias de la FIA, la cual, especificaba que la deformación de la estructura no debería superar un cierto valor siendo este diferente para cada uno de los ensayos. Para llevar a cabo esta comprobación, se emplea el método matricial mediante el cual se obtienen desplazamientos, giros y reacciones. En este método se encuentran dos metodologías distintas, según el planteamiento que se realice y lo que se pretende obtener:

- **Método de la flexibilidad**, es un método de las fuerzas, es decir, es empleado para conocer las fuerzas que actúan sobre los nodos, pero conociendo los desplazamientos y giros de estos mismos. Por lo tanto, las incógnitas serían las fuerzas que actúan sobre dichos nodos.
- **Método de la rigidez**, es un método de los desplazamientos, es decir, se emplea de igual manera con la finalidad de obtener los desplazamientos y giros que sufren los nodos, pero conociendo las fuerzas que actúan sobre estos mismos. En el caso de que dichas fuerzas no actúen directamente sobre los nodos, sino como fuerzas puntuales o distribuidas en la barra, se debe de trasladar dichas fuerzas a los nodos mediante su estudio. Por tanto, las incógnitas serían los desplazamientos y giros de los nodos tratados.

En este caso, se utiliza la segunda metodología comentada, método de la rigidez, para obtener los desplazamientos, giros y a la misma vez las reacciones, ya que, se conocen las fuerzas que actúan sobre las condiciones de contorno.

Por otro lado, también se realiza un estudio a pandeo sobre aquellas barras que se encuentren sometidas a mayores esfuerzos y tengan una longitud elevada respecto a las demás, para comprobar si la barra no se encuentra sometida a una fuerza de compresión superior a la fuerza crítica de pandeo. A continuación, se explicará cada uno de los métodos con detalle.

5.1. Método de la rigidez (método matricial):⁴⁹

El método de la rigidez es un método que pretende calcular los desplazamientos y giros en función de las variables de la estructura completa, es decir, teniendo en cuenta todas las barras de la estructura y todas las fuerzas que se aplican en ella. Por lo tanto, se obtiene una matriz de rigidez de dicha estructura, llamada matriz global de rigidez o matriz global, en el que su tamaño depende del número global de grados de libertad de la estructura.

Primeramente, para llegar a obtener la matriz global de la estructura se tiene que calcular las matrices de rigidez elemental de cada una de las barras, donde se obtiene una relación matricial entre los desplazamientos y giros de ambos extremos de la barra y los esfuerzos o la fuerza que hay que aplicar en esos extremos para conseguir dichos desplazamientos.

La ecuación que relaciona lo descrito anteriormente es:

$$\{P\} = [k] \cdot \{U\} \quad \text{Ec. 1}$$

El termino anterior a la igualdad, el vector P , es un vector columna que contiene las fuerzas y momentos (si fuese empotrado) aparecidas en los extremos de las barras siendo este de igual tamaño al número de grados de libertad de la barra.

El primer término después del igual, la matriz k , es una matriz de rigidez elemental de la barra en coordenadas locales, coordenadas X e Y de la propia barra. Ésta es

⁴⁹ Información obtenida, a través de los apuntes de la asignatura de Teoría de Estructuras impartida como asignatura troncal en la Escuela Politécnica Superior de Jaén impartida por el profesor Daniel Carazo Álvarez durante el curso 2020-2021.

cuadrada siendo el tamaño igual al número de grados de libertad de la barra. Los términos k_{ij} de esta matriz expresan la rigidez que la barra aporta para que se produzca un desplazamiento según el grado de libertad j cuando se aplica una fuerza según el grado de libertad i .

El segundo término después del igual, el vector U , vuelve a ser un vector columna donde se encuentran los desplazamientos y giros de los nodos de ambos extremos de la barra, siendo el tamaño de este igual al número de grados de libertad de la estructura.

Para poder comenzar a emplear este método tendríamos que conocer los términos los cuales se encuentran en la matriz k , ya que, el vector P de fuerzas para nosotros sería conocido porque son las fuerzas que se aplican en los nodos y el vector U de desplazamientos serían nuestras incógnitas.

Por lo tanto, se detalla paso a paso la obtención los términos que componen la matriz k con un caso de una barra empotrada-empotrada donde se encuentra con 6 grados de libertad, ya que será esta la que empleemos en nuestros cálculos debido a encontrarnos con barras rígidas en ambos extremos.

Se parte primeramente de una barra, Figura 76, la cual, forma parte de una estructura que entra en carga. El sistema de referencia local tomado donde el eje X se proyecta de manera longitudinal a la barra, el eje Y es perpendicular al anterior Y el eje Z es perpendicular al plano de la estructura. Se toman positivos los desplazamientos y fuerzas que se dirijan en los sentidos positivos de los ejes, y positivos los giros y momentos antihorarios.

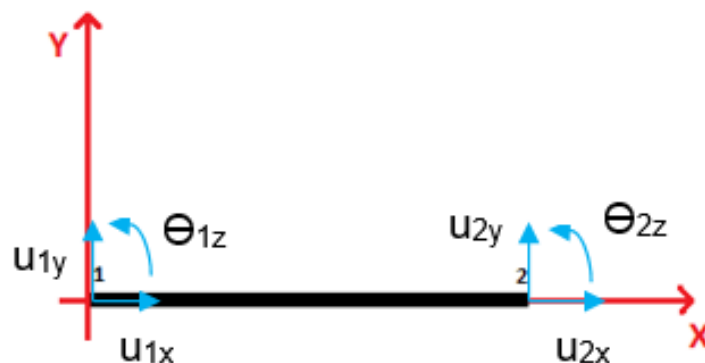


Figura 76. Croquis barra Empotrada-Empotrada.

Como se puede observar los grados de libertad son 6, 4 desplazamientos y 2 rotaciones, que aparecen en los extremos. Por lo tanto, se tendría la Ec.1 de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix}$$

Se detallarán y obtendrán las expresiones de nuestra matriz elemental k. Para ello, es necesario someter la barra a tratar a distintos desplazamientos o giros que, vistos a continuación, siendo en el primer extremo para las tres primeras columnas o el segundo extremo para las últimas tres.

➤ 1ª Columna

Se comienza calculando la primera columna. Para determinarla se somete la barra a un desplazamiento unitario respecto del eje X en el nodo 1 en sentido positivo, $u_{1x} = 1$, manteniéndose el resto de desplazamientos nulos, Figura 77.

Realizando el producto matricial fila por columna, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1x} = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \\ k_{61} \end{bmatrix}$$

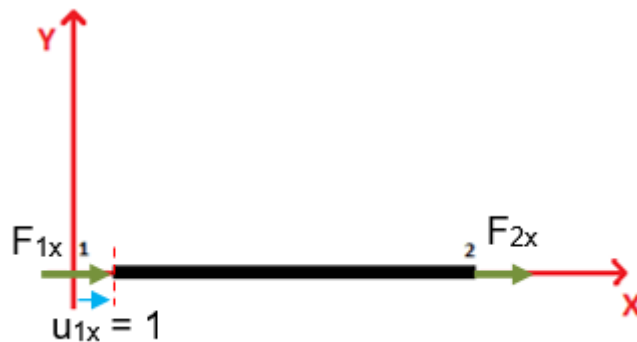


Figura 77. Croquis barra sometida a desplazamiento unitario dirección X positivo.

Ahora se pueden calcular los esfuerzos o fuerzas que hay que aplicar para que se produzca ese desplazamiento horizontal de una unidad en el nodo aplicado y a la misma vez siendo este valor igual al termino $k_{i,j}$ correspondiente. Conociendo las propiedades de la barra longitud L , área A y módulo de Young E . Para conseguir ese desplazamiento horizontal se tendría que aplicar una compresión en sus extremos para que el desplazamiento del nodo uno coincida con el acortamiento producido por la compresión, que es 1, mediante la ecuación del módulo de Young tenemos:

$$\Delta L = \frac{F_{1x} \cdot L}{E \cdot A} \rightarrow F_{1x} = \frac{E \cdot A \cdot \Delta L}{L}; \Delta L = u_{1x} = 1; \boxed{F_{1x} = \frac{EA}{L}}$$

Para obtener el esfuerzo o fuerza del otro extremo sería conveniente aplicando sumatorio de fuerzas horizontales e igualarlo a 0.

$$\sum F_{Horizontales} = 0; \rightarrow F_{1x} + F_{2x} = 0 \rightarrow \boxed{F_{2x} = -\frac{EA}{L}}$$

Conocidos ambos valores podemos sustituir en la matriz elemental k anterior, colocándose en la primera columna siendo el resto de valores 0, ya que no intervienen ningún otro esfuerzo en este primer caso.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

➤ 2ª Columna

La segunda columna para determinarla, la barra es sometida a un desplazamiento unitario en la dirección Y positiva en el nodo o punto 1, siendo este $u_{1y} = 1$, manteniendo el resto de desplazamientos sin aplicar ningún otro desplazamiento, Figura 78.

Realizando el producto matricial fila por columna, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ u_{1y} = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \\ k_{62} \end{bmatrix}$$

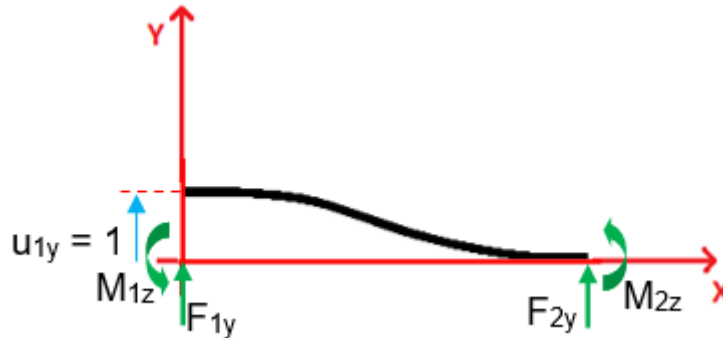


Figura 78. Croquis barra sometida a desplazamiento unitario dirección Y positivo.

Para determinar el valor tanto de los momentos como de los esfuerzos o fuerzas verticales que se aplican para que aparezca ese desplazamiento emplearemos el 1^{er} y 2^o Teoremas de Mohr⁵⁰, permitiéndose calcular los valores de giro Θ y desplazamiento δ , para después aplicar las condiciones de contorno para cada caso en particular.

A continuación, se comenta cada uno de los teoremas empleados:

- 1^{er} Teorema de Mohr: el ángulo de rotación de dos puntos es igual al área del diagrama de momentos flectores entre esos dos puntos dividido por $E \cdot I$ y teniendo en cuenta el giro que se encuentra en el primer nodo.
- 2^o Teorema de Mohr: el desplazamiento entre las tangentes a la línea elástica en dos puntos cualquiera medida de manera vertical, es decir en la dirección del eje Y es igual al momento estático del área definida por el diagrama de momentos flectores.

Como se observa, para calcular ambos teoremas se necesita obtener el diagrama de momentos flectores de este caso en particular mediante la ley de momentos flectores, se realiza de la siguiente manera Figura 79:

⁵⁰ Portal Web Física, esta página web se ha recogido la información referente a los teoremas de Mohr:

<https://fisica.laquia2000.com/dinamica-clasica/fuerzas/teoremas-de-mohr>

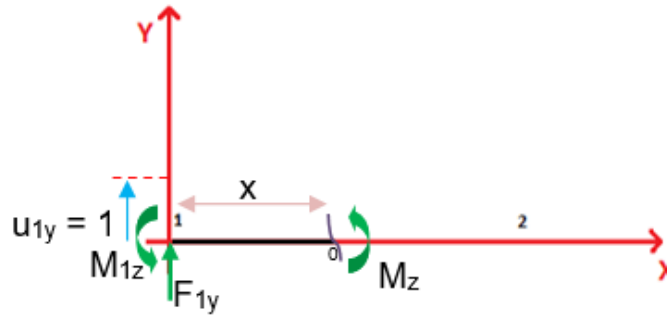


Figura 79. Croquis barra seccionada para aplicar la ley de momentos flectores.

La aplicación de la ley de momentos flectores, primero se realizaría una sección en la barra a una distancia x , como la mostrada en la Figura 79. Haciendo sumatorio de momentos en ese mismo punto 0 que se encuentra en la zona del corte, obteniendo la distribución de tensiones sobre la sección transversal de nuestra barra.

$$\sum M_{f_0} = 0 \rightarrow M_z + M_{1z} - F_{1y} \cdot x = 0 \rightarrow M_z(x) = F_{1y} \cdot x - M_{1z}$$

Antes de su aplicación de ambos teoremas, se especifican las condiciones de contorno en ambos puntos para este, siendo L la longitud total de la barra:

$$\text{Cuando } x = 0 \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x = L \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

Aplicamos el 1^{er} Teorema de Mohr, para la determinación de los valores de giro a cualquier distancia x de nuestra barra. Debe tenerse en cuenta el giro que se encuentra en el punto o nodo 1 cuando $x = 0$, siendo este 0 en nuestro caso, de tal manera quedaría:

$$\theta(x) = \theta(x=0) + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^x M_z(x) dx = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^x F_{1y} \cdot x - M_{1z} dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{E \cdot I} * \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right]$$

La expresión obtenida al aplicar este 1^{er} teorema es una función que indica como varía el ángulo de rotación a lo largo de la barra en función de la fuerza, F_{1y} , y el momento, M_{1z} , ambos aplicados en el punto 1.

De igual manera, se aplica el 2º Teorema de Mohr, para la determinación del desplazamiento de la barra a cualquier distancia x debe tenerse en cuenta el desplazamiento vertical en $x = 0$, que en este caso es igual a 1. También se cuenta el ángulo de giro que se encuentra en $x = 0$ por la distancia entre los dos puntos estudiados porque si el punto 1 giraba eso produciría un desplazamiento en el punto 2, siendo en este caso 0 de nuevo, y también por último la integral del momento flector dividida entre $E \cdot I$ además de estar multiplicado por la distancia entre los dos puntos estudiados. De tal manera quedaría:

$$\delta(x) = \delta(x=0) + \theta(x=0) \cdot x + \frac{1}{EI} \int_0^x M_z(x) x \, dx = 1 + \frac{1}{EI} \int_0^x (F_{1y}x - M_{1z}) \cdot x \, dx$$

$$\delta(x) = 1 + \frac{1}{EI} \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right]$$

La expresión obtenida tras aplicar el 2º teorema es una función que indica como varía el desplazamiento a lo largo de la barra en función de la fuerza, F_{1y} , y el momento, M_{1z} , ambos aplicados en el punto 1.

Una vez aplicados ambos teoremas y obtenidas sus expresiones, se emplean las condiciones de contorno del extremo opuesto, sabiendo que el desplazamiento y el giro son nulos, por tanto, ambas expresiones estarían igualadas a 0 y generando un sistema de ecuaciones simple, quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right] = 0 \quad \text{con } x = L \quad F_{1y} \cdot L - 2 \cdot M_{1z} = 0 \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right] = 0 \quad \text{con } x = L \quad 6EI + F_{1y} \cdot L^3 - M_{1z} \cdot L^2 = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$F_{1y} = \frac{12EI}{L^3} \quad y \quad M_{1z} = \frac{6EI}{L^2}$$

Para obtener los esfuerzos en el nodo opuesto se resuelve aplicando equilibrio, es decir, sumatorio de fuerzas verticales y momentos en la barra, obteniéndose:

$$\sum F_{Verticales} = 0 \rightarrow F_{1y} + F_{2y} = 0 \rightarrow F_{2y} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$\sum M_f = 0 \rightarrow M_{2z} + M_{1z} - F_{1y} \cdot L = 0 \rightarrow M_{2z} = F_{1y} \cdot L - M_{1z};$$

$$M_{2z} = \frac{12EI}{L^3} \cdot L - \frac{6EI}{L^2} \rightarrow M_{2z} = \frac{6EI}{L^2}$$

Conocidos todos los valores se sustituye en la matriz elemental k anterior, colocándolos en la segunda columna siendo el resto de valores 0, ya que no intervienen ningún otro esfuerzo en este segundo caso.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

➤ 3ª Columna

La tercera columna para determinarla, la barra es sometida a un giro unitario antihorario, es decir positivo, en el nodo o punto 1, siendo este $\Theta_{1z} = 1$, manteniendo el resto de desplazamientos nulos, Figura 80.

Realizando el producto matricial fila por columna, se halla la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{1z} = 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \\ k_{53} \\ k_{63} \end{bmatrix}$$

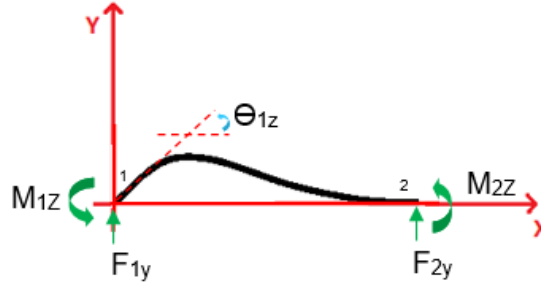


Figura 80. Croquis barra sometida a giro unitario nodo 1.

Este caso es análogo al anterior; se tiene que volver a emplear los dos Teoremas de Mohr introducidos anteriormente para calcular los desplazamientos y giros provocados al someter dicha barra a un giro unitario en el nodo 1. También, se da el caso de que al emplear dichos teoremas se necesita calcular el diagrama de momentos flectores, pero se sabe que es igual que el anterior porque se tiene los mismos esfuerzos y en las mismas direcciones, realizando una sección como se observa en la Figura 80, y de nuevo aplicando la ley de momentos flectores:

$$M_z(x) = F_{1y} \cdot x - M_{1z}$$

Las condiciones de contorno para este nuevo caso en ambos puntos o nodos, siendo L la longitud total de la barra:

$$\text{Cuando } x = 0 \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \Theta = 1 \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x = L \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \Theta = 0 \end{cases}$$

Se comienza empleando el 1^{er} Teorema de Mohr, teniendo en cuenta la rotación en este nodo que sería 1:

$$\Theta(x) = \Theta(x=0) + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^x M_z(x) dx = 1 + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^x F_{1y} \cdot x - M_{1z} dx$$

$$\Theta(x) = 1 + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right]$$

Después, se aplica el 2^o Teorema de Mohr obteniendo, empleando las condiciones de contorno del primer nodo:

$$\delta(x) = \delta(x=0) + \theta(x=0) \cdot x + \frac{1}{EI} \int_0^x M_z(x) \cdot x \, dx = 1 + \frac{1}{EI} \int_0^x (F_{1y} \cdot x - M_{1z}) x \, dx$$

$$\delta(x) = x + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right]$$

Después de haber aplicado ambos teoremas, se emplean las condiciones de contorno en el extremo opuesto detalladas anteriormente, sabiendo que el desplazamiento y el giro son nulos, por tanto, ambas expresiones se quedarían igualadas a 0 de la siguiente manera:

$$1 + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right] = 0 \quad \text{con } x = L \quad 2EI + F_{1y} \cdot L^2 - 2 \cdot M_{1z} \cdot L = 0 \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right] = 0 \quad \text{con } x = L \quad 6EI + F_{1y} \cdot L^3 - 3 \cdot M_{1z} \cdot L^2 = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$F_{1y} = \frac{6EI}{L^2} \quad y \quad M_{1z} = \frac{4EI}{L}$$

Para obtener los esfuerzos en el nodo final son resueltos por equilibrio aplicando sumatorio de fuerzas verticales y momentos en la barra, obteniéndose:

$$\sum F_{Verticales} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{2y} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$\sum M_f = 0 \quad \rightarrow \quad M_{2z} + M_{1z} - F_{1y} \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad M_{2z} = F_{1y} \cdot L - M_{1z};$$

$$M_{2z} = \frac{6EI}{L^3} \cdot L - \frac{4EI}{L^2} \quad \rightarrow \quad M_{2z} = \frac{2EI}{L}$$

Conocidos todos los valores se puede sustituir en la matriz elemental k anterior, colocándolos en la tercera columna siendo el resto de valores 0, ya que no intervienen ningún otro esfuerzo en este tercer caso.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

➤ 4ª Columna

La cuarta columna es análoga a la primera columna donde se sometió una barra a un desplazamiento unitario en el nodo uno en el sentido del eje X positivo con el objetivo que el esfuerzo al que es sometida la barra sea de compresión para posteriormente aplicar la expresión del incremento de longitud pero, en este caso se aplicaría al nodo opuesto, ya que, la condición que debemos de tomar para aislar esa columna es referente a u_{2x} y siendo de compresión, es decir, estaría dirigida en el sentido del eje X pero sentido negativo, siendo este $u_{2x} = 1$ se tomaría en valor absoluto el desplazamiento, manteniendo el resto de desplazamientos nulos. Véase Figura 81.

Realizando el producto matricial fila por columna, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{2x} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \\ k_{54} \\ k_{64} \end{bmatrix}$$

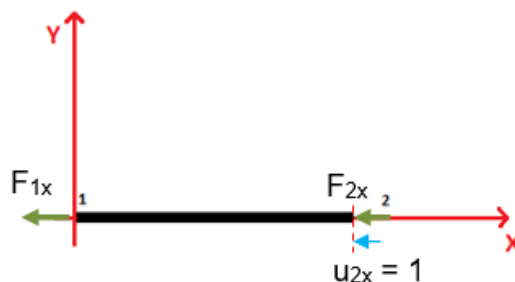


Figura 81. Croquis barra sometida a desplazamiento unitario dirección X negativo.

De nuevo aplicando la expresión utilizada para hallar la primera columna se emplea esta también, de la siguiente manera:

$$\Delta L = \frac{F_{2x} \cdot L}{E \cdot A} \rightarrow F_{2x} = \frac{E \cdot A \cdot \Delta L}{L}; \Delta L = u_{2x} = 1; \boxed{F_{2x} = \frac{EA}{L}}$$

Para obtener el esfuerzo o fuerza del otro extremo sería conveniente aplicando sumatorio de fuerzas horizontales e igualarlo a 0.

$$\sum F_{Horizontales} = 0; \rightarrow F_{1x} + F_{2x} = 0 \rightarrow \boxed{F_{1x} = -\frac{EA}{L}}$$

Conocidos ambos valores se sustituye en la matriz elemental k anterior, colocándolos en la cuarta columna siendo el resto de valores 0, ya que no intervienen ningún otro esfuerzo en este cuarto caso.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & k_{15} & k_{16} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

➤ 5ª Columna

La quinta columna es análoga a la segunda columna donde es sometida la misma barra a un desplazamiento en el nodo uno en el sentido del eje Y positivo, pero, en este otro caso se aplica de nuevo en el nodo opuesto, debido a que la condición que se debe de tomar para aislar la quinta columna para calcular todos sus miembros es referente a u_{2y} , siendo esta $u_{2y} = 1$, manteniéndose el resto de desplazamientos de nuevo nulos.

Realizando el producto matricial fila por columna, se halla la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{2y} = 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{15} \\ k_{25} \\ k_{35} \\ k_{45} \\ k_{55} \\ k_{65} \end{bmatrix}$$

No se ha representado ningún croquis en este caso, ya que, es similar a la figura 85 pero la deformada toma valor 0 en el primer nodo y valor 1 en el opuesto.

Como en este caso se volvería a aplicar los dos Teoremas de Mohr aplicados y estudiados en las demás columnas se necesitaría el diagrama de momentos flectores en este caso, pero se cuenta con la ventaja de que se trata con el mismo diagrama debido a que se han respetado los sentidos de los esfuerzos y giros para ambos casos, por lo tanto, sería:

$$M_z(x) = F_{1y} \cdot x - M_{1z}$$

Las condiciones de contorno en este caso serían:

$$\text{Cuando } x = 0 \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x = L \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

Se empieza empleando el 1^{er} Teorema de Mohr, tomando como 0 la rotación en este nodo:

$$\theta(x) = \theta(x=0) + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^x M_z(x) dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^x F_{1y} \cdot x - M_{1z} dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right]$$

Después se utiliza el 2^o Teorema de Mohr, tomando de nuevo 0 la rotación en este nodo y de igual manera 0 el desplazamiento:

$$\delta(x) = \delta(x=0) + \theta(x=0) \cdot x + \frac{1}{EI} \int_0^x M_z(x) \cdot x dx = \frac{1}{EI} \int_0^x (F_{1y} \cdot x - M_{1z}) \cdot x dx$$

$$\delta(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right]$$

Una vez aplicados ambos teoremas, se usan las condiciones de contorno en el extremo opuesto, teniendo en cuenta que el desplazamiento en dicho extremo sería 1 pero el giro es nulo:

$$\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right] = 0 \quad \text{con } x = L \quad F_{1y} \cdot L - 2 \cdot M_{1z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right] = 1 \quad \text{con } x = L \quad F_{1y} \cdot L^3 - 3 \cdot M_{1z} \cdot L^2 = 6EI \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se halla:

$$F_{1y} = -\frac{12EI}{L^3} \quad y \quad M_{1z} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Para obtener los esfuerzos en el nodo final los se resuelven por equilibrio aplicando sumatorio de fuerzas verticales y momentos en la barra, obteniéndose:

$$\sum F_{Verticales} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{2y} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\sum M_f = 0 \quad \rightarrow \quad M_{2z} + M_{1z} - F_{1y} \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad M_{2z} = F_{1y} \cdot L - M_{1z};$$

$$M_{2z} = -\frac{12EI}{L^3} \cdot L + \frac{6EI}{L^2} \quad \rightarrow \quad M_{2z} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Conocidos todos los valores, se sustituye en la matriz elemental k anterior, colocándolos en la quinta columna siendo el resto de valores 0, ya que no intervienen ningún otro esfuerzo en este quinto caso.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & k_{16} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & k_{26} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & k_{46} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & k_{56} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & k_{66} \end{bmatrix}$$

➤ 6ª Columna

La sexta columna, como se ha ido comparando en estos últimos tres casos, esta columna sería análoga a la tercera a la hora de calcularla, aunque en la columna anterior esta barra era sometida a un giro en sentido antihorario, positivo, en el nodo 1 sin embargo este caso se aplicaría en el nodo 2 ya que la condición que se toma para aislar esta última columna para calcular todos sus elementos es referente a Θ_{2z} , siendo esta $\Theta_{2z} = 1$, manteniendo el resto de desplazamientos nulos.

Realizando el producto matricial fila por columna, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Theta_{2z} = 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{16} \\ k_{26} \\ k_{36} \\ k_{46} \\ k_{56} \\ k_{66} \end{bmatrix}$$

No se ha colocado ningún croquis en este caso, ya que, es similar a la figura 87 pero la deformada toma valor 0 en el primer nodo y valor 1 en el opuesto, manteniendo en el mismo sentido los esfuerzos y los momentos.

En este último caso se emplearán los dos Teoremas de Mohr de todos los casos anteriores y de igual manera sería necesario conocer el diagrama de momentos flectores, pero, se sabe que es el mismo que el producido en el cálculo de la tercera columna porque contiene los mismos esfuerzos además del mismo sentido, siendo el siguiente:

$$M_z(x) = F_{1y} \cdot x - M_{1z}$$

Las condiciones de contorno en este último caso serían:

$$\text{Cuando } x = 0 \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x = L \text{ tenemos } \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \theta = 1 \end{cases}$$

Se empieza empleando el 1^{er} Teorema de Mohr, tomando como 0 la rotación en este nodo:

$$\theta(x) = \theta(x=0) + \frac{1}{E \cdot I} \int_0^x M_z(x) dx = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^x F_{1y} \cdot x - M_{1z} dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right]$$

Después se usa el 2^o Teorema de Mohr, tomando de nuevo 0 la rotación en este nodo y de igual manera 0 el desplazamiento:

$$\delta(x) = \delta(x=0) + \theta(x=0) \cdot x + \frac{1}{EI} \int_0^x M_z(x) \cdot x dx = \frac{1}{EI} \int_0^x (F_{1y} \cdot x - M_{1z}) \cdot x dx$$

$$\delta(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right]$$

Seguidamente, se utiliza las condiciones de contorno en el extremo opuesto, teniendo en cuenta que el desplazamiento en dicho extremo sería 0 pero el giro es 1:

$$\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^2}{2} - M_{1z} \cdot x \right] = 1 \quad \text{con } x = L \quad F_{1y} \cdot L^2 - 2 \cdot M_{1z} \cdot L = 2EI \quad (1)$$

$$\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{F_{1y} \cdot x^3}{6} - \frac{M_{1z} \cdot x^2}{2} \right] = 0 \quad \text{con } x = L \quad F_{1y} \cdot L - 3 \cdot M_{1z} = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se halla:

$$F_{1y} = \frac{6EI}{L^2} \quad y \quad M_{1z} = \frac{2EI}{L}$$

Para obtener los esfuerzos en el nodo final son resueltos por equilibrio aplicando sumatorio de fuerzas verticales y momentos en la barra, obteniéndose:

$$\sum F_{Verticales} = 0 \rightarrow F_{1y} + F_{2y} = 0 \rightarrow \boxed{F_{2y} = -\frac{6EI}{L^2}}$$

$$\sum M_f = 0 \rightarrow M_{2z} + M_{1z} - F_{1y} \cdot L = 0 \rightarrow M_{2z} = F_{1y} \cdot L - M_{1z};$$

$$M_{2z} = -\frac{12EI}{L^3} \cdot L + \frac{6EI}{L^2} \rightarrow \boxed{M_{2z} = \frac{4EI}{L}}$$

Conocidos todos los valores podemos sustituir en la matriz elemental k anterior, colocándolos en la última columna siendo el resto de valores 0, ya que no intervienen ningún otro esfuerzo en este último caso.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Esta sería la matriz elemental de nuestra barra en carga que se encontraba empotrada-empotrada, como se puede observar, corrobora que se encuentra correctamente obtenida debido a que tiene que ser simétrica la matriz y también los elementos de la diagonal principal no deben ser negativos, por lo tanto, está comprobada.

Por otro lado, dicha matriz el inconveniente el cual se debe de solventar para obtener la matriz elemental de una barra que se encuentre en unas condiciones cuales quiera. Esta ha sido calculado para un sistema de referencia local siendo este el mismo que el global, es decir, el eje X coincide con la directriz de la barra, el eje Y perpendicular a este y el eje Z perpendicular al plano, pero se puede encontrar en casos donde no coincidan ambos ejes se encontrasen un ángulo α girado debe mostrarse atención en este sentido, ya que, la matriz elemental global está formada

por las matrices elementales de cada barra, pero todas ellas referidas a un sistema de referencia local diferente al de cada barra por lo tanto se debe de cambiar.

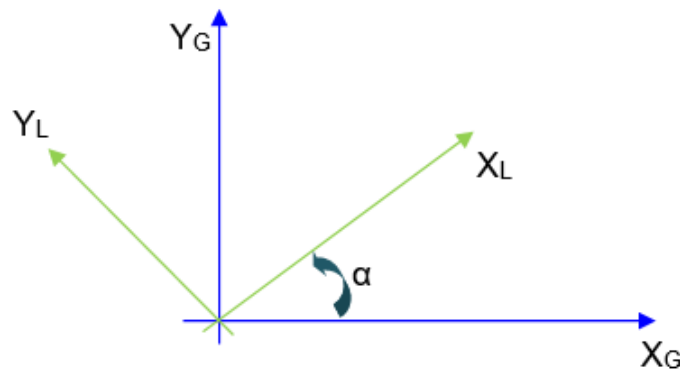


Figura 82. Croquis eje de coordenadas local desplazado un ángulo α.

La Figura 82, es un típico ejemplo que se puede encontrar en cualquier estructura formada por barras. Para este caso es necesario emplear una matriz de cambio λ, esta matriz tiene un tamaño igual al número de grados de libertad para poder realizar el producto matricial, estando compuesta por senos y cosenos dependientes del ángulo α siempre tomado de las coordenadas globales a locales.

Se estudiará como se emplearía, pero no se entra en detalle, debido a que serían cálculos muy complejos y tediosos, por lo tanto, existen correlaciones elaboradas las cuales emplearemos en este proyecto.

Se parte de la expresión tratada al principio de este punto, donde existía una relación matricial entre los desplazamientos y los esfuerzos que hay que aplicar en los extremos para conseguir esos desplazamientos, pero en coordenadas locales de la barra, se coloca el subíndice L para referenciar que es local y G para global, sería la siguiente:

$$\{P\}_L = [k]_L \cdot \{U\}_L$$

Se llama matriz de cambio o transformación [λ] a la matriz que transforma el conjunto de coordenadas globales en locales, por lo tanto, se multiplicarían ambas matrices para pasarlo de coordenadas globales a locales:

$$\{P\}_L = [\lambda] \cdot \{P\}_G$$

$$\{U\}_L = [\lambda] \cdot \{U\}_G$$

Si ambas expresiones son sustituidas en la anterior, se obtiene:

$$[\lambda] \cdot \{P\}_G = [k]_L \cdot [\lambda] \cdot \{U\}_G$$

Despejando:

$$\{P\}_G = [\lambda]^T \cdot [k]_L \cdot [\lambda] \cdot \{U\}_G$$

Como se puede observar, el primer producto de las tres matrices en la derecha del igual se corresponde a la matriz de rigidez en coordenadas globales, siendo:

$$[k]_G = [\lambda]^T \cdot [k]_L \cdot [\lambda]$$

Siendo la matriz $[\lambda]$:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta sería la expresión para la transformación de coordenadas de un sistema local a otro global sólo depende de la matriz $[\lambda]$ y la matriz elemental $[k]_L$ que se ha obtenido anteriormente. Como se ha comentado anteriormente, existen correlaciones facilitando este cálculo de tres matrices el cual será complejo llevarlo a cabo, tendría la misma estructura que la anterior siendo una matriz simétrica, quedando de la siguiente manera para una barra empotrada-empotrada porque es la que se emplea en este proyecto como se ha descrito anteriormente:

- Matriz de rigidez elemental de una barra coordenadas globales⁵¹:

$$[k]_G = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

⁵¹ Formula obtenida, a través de los apuntes de la asignatura de Teoría de Estructuras impartida como asignatura troncal en la Escuela Politécnica Superior de Jaén impartida por el profesor Daniel Carazo Álvarez durante el curso 2020-2021.

Siendo todos los términos del interior de la matriz los siguientes:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2}$$

$$F = \frac{4EI}{L}$$

Una vez obtenidas todas las matrices elementales de cada una de las barras de nuestra estructura en coordenadas globales, todas con la misma referencia, es necesario generar la matriz de rigidez global de la estructura. Esta matriz contiene todas las matrices elementales de las barras conteniendo toda la información sobre cuánto van a desplazarse y rotar todos sus nudos para cualquier sistema de carga. El tamaño de esta es muy elevado porque relaciona todos sus grados de libertad. El procedimiento a seguir es el mismo, empleando la Ec. 1.

En el vector de esfuerzos se incluirían todos ellos ordenados del nudo con menor numeración al mayor e igualmente pasaría con el vector de desplazamientos. La matriz elemental $[k]$ se introducirían todas aquellas submatrices ordenadas cada una correspondiendo a su grado de libertad, se podrá observar su empleo con más detalle en los anexos a la memoria.

5.2. Comprobación a pandeo de barras⁵²:

El pandeo de una barra aparece cuando está sometida a un esfuerzo de compresión siendo esto muy pronunciado en elementos cuya longitud sea muy larga en relación con su sección transversal, produciendo que su centro de gravedad de la barra se encuentre alterado alejándose del eje central debido a la flexión producida, donde sería su posición original con la fatalidad que a la misma vez disminuye su capacidad resistente a compresión.

Esta inestabilidad se produciría a partir de un cierto valor de axil, llamada tensión crítica, (N_{CR}), siendo esta la carga axil máxima que una barra o columna puede soportar sin producir el pandeo de la misma.

La ecuación de Euler sería:

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_K^2} \quad \text{Ec. 2}$$

Siendo cada uno de estos términos conocidos excepto L_K .

La longitud de pandeo⁵³, L_K , es la longitud del arco cóncavo que se origina al aplicar en los extremos de una pieza. Esta longitud de pandeo realizando el producto de la longitud original de la pieza, L , y un coeficiente, β , cuyo valor depende de la forma en la que los extremos de la pieza estén sujetos, de tal manera:

$$L_K = \beta \cdot L$$

El coeficiente dimensional que depende de la forma de los apoyos se encuentra tabulado y pueden aparecer 4 casos, Figura 83:

1. Ambos extremos empotrados (empotrado-empotrado), $\beta = 0,5$.
2. Un extremo empotrado y otro articulado (empotrado-articulado), $\beta = 0,7$.

⁵² Portal Web Ayuda de ESWin, información obtenida de esta página web relacionada con la comprobación de barras de acero:

<https://www.imventa.com/ayuda/ESwin/Info/PandeoAcero.htm>

⁵³ Portal Web BIRT_{LH}, información obtenida de esta página web relacionada con la longitud de pandeo:

https://ikastaroak.birt.eus/edu/argitalpen/backupa/20200331/1920k/es/DFM/DPM/DPM04/es_DFM_DPM04_Contenidos/website_71_longitud_de_pandeo_lk_y_esbeltez.html

3. Ambos extremos articulados (articulado-articulado), $\beta = 1$.
4. Un extremo empotrado y el otro libre (empotrado-libre), $\beta = 2$.

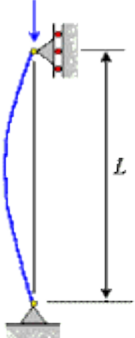
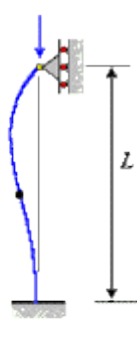
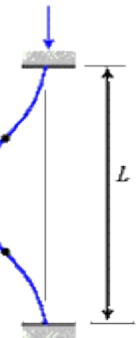
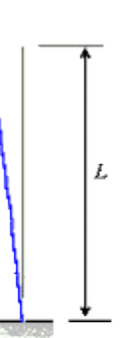
Columna articulada-articulada	Columna empotrada-articulada	Columna empotrada-empotrada	Columna empotrada-libre
			
$L_e = L$	$L_e = 0.699L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 2L$

Figura 83. Longitud de pandeo L_K .

5.3. Consideraciones barras y esfuerzos.

En este subapartado se definen y explican las consideraciones a tomar para realizar estos dos primeros ensayos: el método matricial y la comprobación con la carga crítica de pandeo, todo ello antes de llevar a cabo la optimización de espesor para reducir éste y con ello la masa.

Como se comentó anteriormente, se procederá a centrarse en el lateral del conductor, Figura 84, ya que se ha comprobado que esta zona es la que se ve mayor afectada en estos dos ensayos.

Primero se comienza con las consideraciones enfocadas a los esfuerzos. Para el ensayo A, se trataba con una fuerza distribuida uniformemente en dirección vertical hacia abajo a lo largo de la barra horizontal del arco principal. En este caso estamos trabajando con un modelo en 2D, por lo tanto, para trasladarnos dicho caso se agrupa esa fuerza distribuida en dos puntos siendo estos los dos apoyos donde se encontraría la parte horizontal del arco principal. Por otro lado, en referente al ensayo B, se trataba con una carga tridimensional en un punto concreto de esta estructura sobre el arco lateral del conductor, pero con un modelo en 2D una de las direcciones no se tiene en cuenta.

Las consideraciones a tomar enfocadas a las barras, las uniones de las barras de este modelo base se encontraban diseñadas con un radio específico para evitar la concentración de tensiones. En este caso al tratar con un modelo en 2D, esos radios son eliminados y se toman uniones rígidas para poder llevar a cabo el estudio de los extremos de cada barra y después ser comparados.

También se puede observar la ausencia de los refuerzos laterales y las cartelas. Se ha realizado de esta manera, ya que, el problema se volvería demasiado complejo porque se tendría 33 grados de libertad en esta estructura sin embargo de esta manera se tienen 18. De esta manera se analiza desde un punto de vista más crítico y con un mayor coeficiente de seguridad.

Además, pudiendo dar por seguro que estaríamos del lado de la seguridad porque si la deformación de esta estructura con menor número de barras se encuentra dentro de lo especificado por la FIA al tener mayor número de barras se encontraría también.

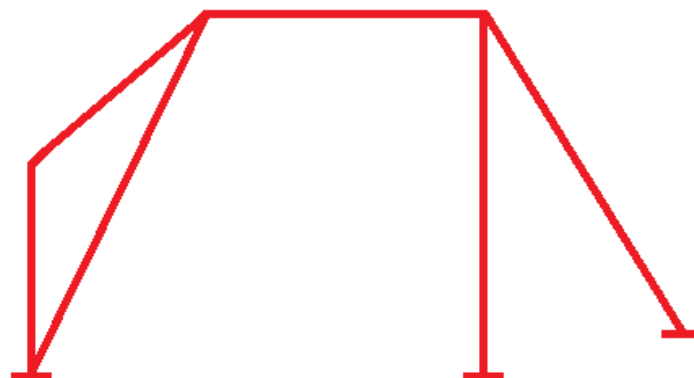


Figura 84. Croquis vista lateral modelo ensayo analítico.

5.4. Cálculo analítico Ensayo A con estructura sin optimizar

En este apartado, se trata de analizar los resultados obtenidos en el análisis llevado a cabo sobre esta estructura empleando para ello el método matricial comentado anteriormente para el cálculo analítico Ensayo A. También, se hace referencia al Anexo 1 de la memoria donde se encuentra con mayor detalle el procedimiento llevado a cabo para este ensayo.

Para llegar a obtener los resultados de este método matricial se tiene una expresión donde los esfuerzos que se aplican en alguno de los nodos de esta

estructura obteniendo los desplazamientos, giros y reacciones que se generan en aquellos nodos o puntos de la estructura. Para ello es necesario el empleo de una matriz elemental global de la estructura $[k]$, siendo la expresión Ec. 1.

Para comenzar a elaborarlo, primeramente, deben nombrarse y numerarse los nodos a evaluar, es decir, aquellos puntos donde se obtendrá el desplazamiento, giro y reacción en el caso de apoyos. Dichos puntos o nodos serán los extremos de las barras donde se unen con otras barras o con los pies de apoyo, siendo estos, Figura 85:

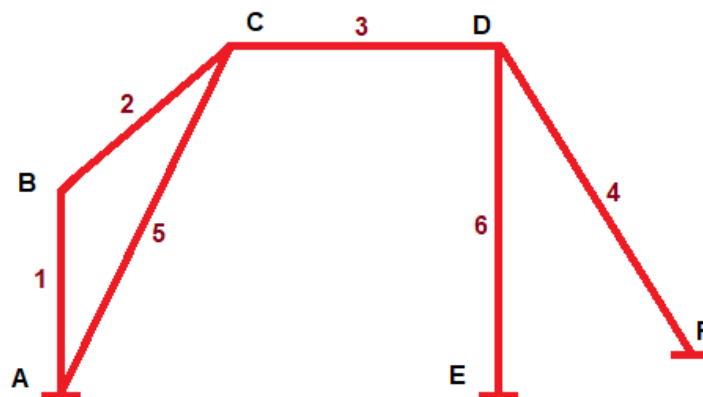


Figura 85. Croquis vista lateral modelo ensayo analítico A.

Se puede hacer un estudio previo para calcular el número de grados de libertad que tendrá esta estructura para saber las dimensiones que tendrá la matriz global elemental de la estructura junto con el vector de desplazamientos y esfuerzos, Considerando todos los nudos rígidos, se tendría 18 grados de libertad, Figura 86:

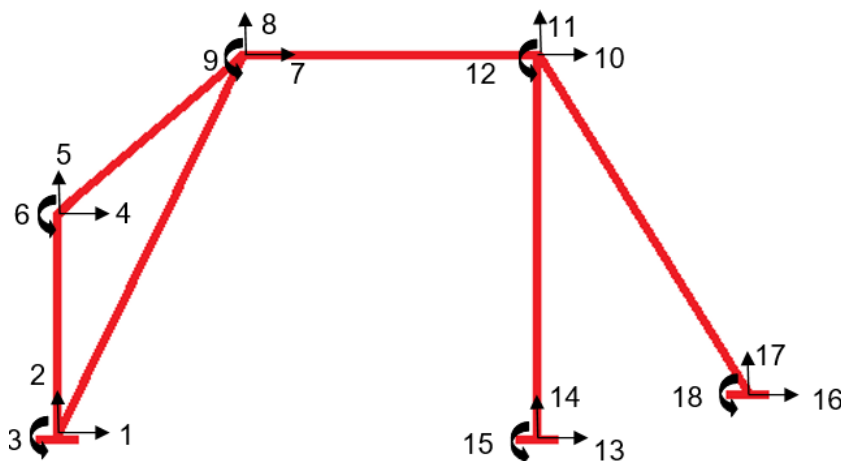


Figura 86. Grados de libertad de la estructura.

En este ensayo Analítico A la carga aplicada, como se ha comentado anteriormente, se aplica sobre el arco principal de la estructura de manera uniforme tomando la consideración comentada en el apartado anterior donde esa carga empleada se divide entre dos apoyos siendo estos las partes verticales que ascienden en el arco principal. La carga a aplicar sería, Figura 87:

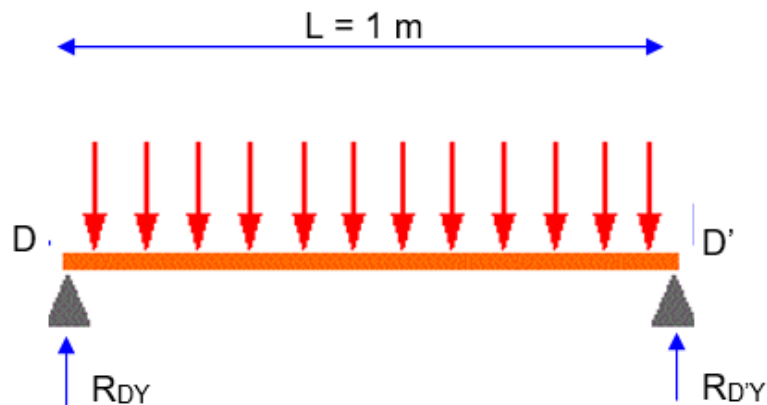


Figura 87. Distribución de la carga en el arco principal eje Z.

$$F = 75 \frac{N}{kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Esta sería la carga distribuida a lo largo de un metro de longitud que mide dicha barra, siendo el apoyo D lateral del conductor y apoyo D' lateral del copiloto. Por lo tanto, la carga con la que se trabajará es:

$$R_{DY} = R_{D'Y} = 92,9 \frac{N}{m} \cdot 1 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 46,5 \text{ kN}$$

El problema a resolver quedaría de la siguiente manera con la fuerza aplicada, los nodos numerados y las barras para comenzar su cálculo, Figura 88:

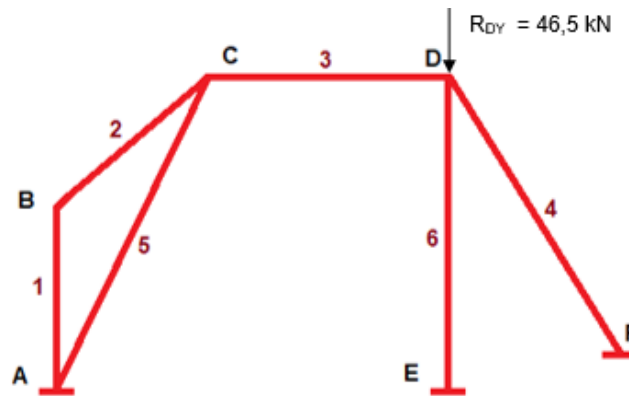


Figura 88. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede al cálculo del vector de esfuerzos, vector desplazamiento y matriz elemental global. Para ello se hace alusión al Anexo 1 donde se detalla el proceso de cálculo de la expresión antes tomada.

Para ello, se detalla los datos siendo estos comunes para todas las barras que componen la estructura, Tabla 3:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{DY} (kN)
5,72	11,88	21000	46,5

Tabla 3. Datos comunes a todas las barras.

El vector desplazamiento sería, Tabla 4:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 4. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos, Tabla 5:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46,5 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 5. Vector esfuerzos.

Tras haber obtenido ambos vectores y la matriz elemental global, también resuelta en este Anexo 1, se obtienen los siguientes resultados:

- **Desplazamientos y giros:**

U_{BX}	=	-0,370	mm
U_{BY}		0,001	mm
Θ_{BZ}		0,001	rad
U_{CX}		-0,580	mm
U_{CY}		0,304	mm
Θ_{CZ}		0,000	rad
U_{DX}		-0,583	mm
U_{DY}		-0,419	mm
Θ_{DZ}		0,000	rad

Tabla 6. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

Como se puede observar en esta Tabla 6, todos los desplazamientos obtenidos son menores a 1 mm, por lo tanto, se estaría dentro del valor permitido siendo este como máximo 50 mm.

El nodo D es el que más desplazamiento sufre debido a que en ese nodo o punto es aplicada la carga vertical por ello el desplazamiento producido en el eje Y es negativo, y el producido en el eje X es negativo debido a la barra 4 que nos impide el desplazamiento positivo en este eje. Esta barra se coloca de tal manera para impedir en la medida de lo posible el desplazamiento del arco principal y en estos resultados se puede observar su funcionalidad.

En cuanto al nodo C, como se puede observar el desplazamiento producido verticalmente es positivo esto es debido a la barra 5 donde su funcionalidad es impedir en la medida de lo posible que descienda el travesaño lateral hacia el conductor. Respecto al desplazamiento producido en el eje X es el transmitido por el nodo anterior, aunque menor debido a la barra comentada que sirve de apoyo.

El ultimo nodo, el nodo B el desplazamiento producido en cuanto al eje Y es insignificante ya que dicho nodo es el más cercano a los pies de apoyo por lo tanto la deformación que puede llegar a tener esta barra es mínima, sin embargo, el desplazamiento producido en el eje X es transmitido por ambos nodos anteriores siendo este de nuevo negativo.

Para el giro de los nodos, los giros positivos serían antihorarios pero los valores negativos serían horarios toman valores relativamente pequeños por lo que los nodos no sufrirán un giro elevado.

- **Reacciones:**

R_{AX}	=	491,77	N
R_{AY}		442,19	N
M_{AZ}		-124,07	N*m
R_{EX}		129,54	N
R_{EY}		45169,24	N
M_{EZ}		-71,55	N*m
R_{FX}		-621,32	N
R_{FY}		1226,08	N
M_{FZ}		-98,40	N*m

Tabla 7. Matriz soluciones esfuerzos.

En esta Tabla 7 donde se encuentran las soluciones de los esfuerzos tomados en la estructura son todos ellos menores a la carga aplicada siendo esto debido a que dicha carga es transmitida a lo largo de la barra y no se transmite por completo, estos valores no son estudiados por la normativa, sino que son empleados para estudiar mejor su comportamiento.

Las mayores reacciones se pueden encontrar en el apoyo E, como era de esperar, porque la carga se aplicaba en la perpendicular a ese nudo. La reacción en el eje Y es menor que la carga empleada ya que dicho esfuerzo también es transmitido por la barra 4 ayudando a esta barra 6. En cuanto al momento flector es el menor de todos, pero este es debido a dicha barra comentada anteriormente, porque impedía el desplazamiento en el eje X positivo por eso este vector es negativo.

En cuanto al resto de nodos, las reacciones son menores ya que dicha carga se distribuye por todas las barras tomadas. Las reacciones del nodo F respecto del nodo A son mayores, ya que este nodo A es separado por mayor número de barras y el esfuerzo aplicado en ese nodo es menor.

5.5. Cálculo analítico Ensayo B con estructura sin optimizar

A continuación, se analizarán los resultados obtenidos en el análisis llevado a cabo sobre esta estructura empleando para ello el método matricial comentado anteriormente para el cálculo analítico Ensayo B. También, se hace referencia al Anexo 2 de la memoria donde se encuentra con mayor detalle el procedimiento llevado a cabo para este ensayo.

Para llegar a obtener los resultados de este método matricial se tiene una expresión la cual mediante los esfuerzos que se aplican en alguno de los nodos de esta estructura se obtiene los desplazamientos, giros y reacciones que se generan en aquellos nodos o puntos de la estructura. Para ello es necesario el empleo de una matriz elemental global de la estructura $[k]$, siendo la expresión Ec. 1.

Para comenzar a elaborarlo, primeramente, se deben nombrar los nodos y numerar las barras a ensayar, es decir, aquellos puntos donde se obtiene el desplazamiento, giro y reacción en el caso de apoyos. Dichos puntos o nodos serán

los extremos de las barras donde se unen con otras barras o con los pies de apoyo, siendo estos, véase Figura 85.

Se puede hacer un estudio previo para calcular el número de grados de libertad que tendrá esta estructura para saber las dimensiones que tendrán nuestra matriz global elemental de la estructura junto con el vector de desplazamientos y esfuerzos, considerando todos los nudos rígidos tendríamos 18 grados de libertad, véase Figura 86.

En este ensayo Analítico B la carga aplicada, como se ha comentado anteriormente, sería una fuerza tridimensional aplicada sobre un punto o nodo de esta estructura sobre el arco lateral del conductor. En este al tratar con un modelo bidimensional esa fuerza la descomponemos en los ejes X e Y. El valor de carga o esfuerzo sería el siguiente:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg) \rightarrow F_B (N) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Siendo W:

$$W = masa\ del\ vehiculo(kg) + 160\ kg = 1089kg + 160kg = 1249\ kg$$

$$F_B = 35\ \frac{N}{kg} \cdot 1249\ kg = 43715\ N = 43,7\ kN$$

Esta carga se encontraba girada respecto al eje longitudinal un ángulo de 5° y con respecto al eje transversal un ángulo de 25°, Figura 89 y Figura 90:

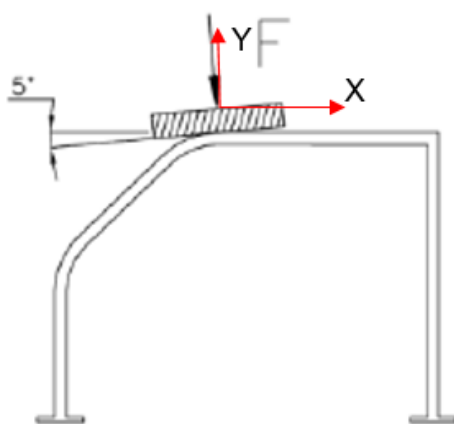


Figura 89. Eje longitudinal.

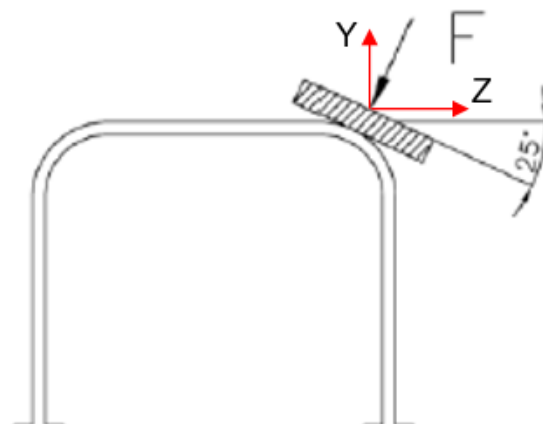


Figura 90. Eje Transversal.

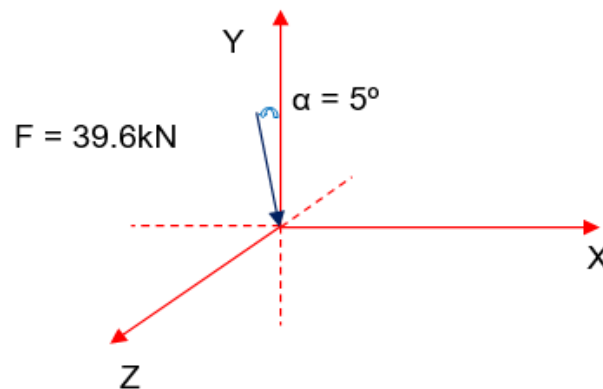
Primeramente, para trasladar la fuerza al plano XY considerado en el problema, se multiplica esa fuerza por el coseno de 25° porque es el ángulo que se encuentra rotado en el plano ZY.

$$F = 43,7N \cdot \cos 25^\circ = 39,6 \text{ kN}$$

La fuerza que actuaría en dirección al eje Z, sería:

$$F_Z = 43,7N \cdot \sin 25^\circ = 18,4 \text{ kN}$$

El cálculo de esta fuerza será útil para posteriormente emplearla en el programa de ANSYS.



Para calcular el esfuerzo generado en el eje X e Y, sería de la siguiente manera:

$$F_X = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \sin 5^\circ = 3,5 \text{ kN}$$

$$F_Y = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ = -39,5 \text{ kN}$$

El problema a resolver quedaría de la siguiente manera con la fuerza aplicada en el nodo C, véase Figura 91:

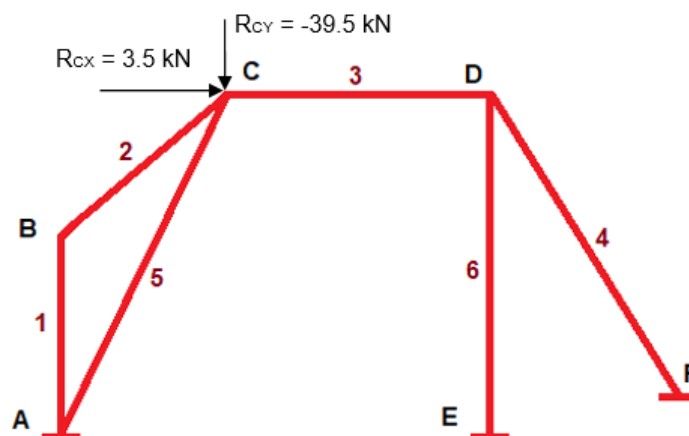


Figura 91. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede al cálculo del vector de esfuerzos, vector desplazamiento y matriz elemental global. Para ello, se hace alusión al Anexo 2 donde queda detallado el proceso de cálculo de la expresión antes tomada.

Para ello, se detallan los datos siendo estos comunes para todas las barras que componen nuestra estructura, véase Tabla 8:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{CX} (kN)	R _{CY} (kN)
5,72	11,88	21000	3,5	-39,5

Tabla 8. Datos comunes a todas las barras

El vector desplazamiento sería, véase Tabla 9:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 9. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos, Tabla 10:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,5 \\ -39,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 10. Vector esfuerzos.

Tras haber obtenido ambos vectores y la matriz elemental global, también resuelta en este Anexo 2, se obtienen los siguientes resultados:

- Desplazamientos y giros:**

U_{BX}	=	0,409	mm
U_{BY}		-0,004	mm
Θ_{BZ}		-0,002	rad
U_{CX}		1,203	mm
U_{CY}		-1,158	mm
Θ_{CZ}		-0,000	rad
U_{DX}		1,055	mm
U_{DY}		0,299	mm
Θ_{DZ}		0,000	rad

Tabla 11. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

De nuevo, como se puede observar en la Tabla 11, todos los desplazamientos obtenidos en este ensayo y con estas condiciones son muy pequeños en torno a 1 milímetro el máximo valor, por lo tanto, se estaría dentro del valor permitido siendo este como máximo 100 mm.

El nodo C es el punto donde se produce mayor deformación ya que ahí es el lugar donde se aplica dicha carga por ello el desplazamiento producido en el eje Y es negativo, ya que la carga en este eje Y se dirige en sentido negativo, y el producido en el eje X es positivo de igual manera la carga en ese eje se dirige en sentido positivo. La barra 5 como se puede observar, el desplazamiento vertical es menor que el horizontal siendo la carga aplicada en el eje vertical 11 veces mayor a la aplicada en el eje horizontal y obtenemos un desplazamiento menor.

El siguiente nodo mayor afectado sería el nodo D obteniendo ambos desplazamientos positivos. Como podemos ver el desplazamiento horizontal es menor que en el nodo anterior esto es debido a la barra 4 que impide en la manera de lo posible que el arco principal se desplace.

Por último, el nodo B los desplazamientos obtenidos pueden llegar a ser similares a los anteriores obteniendo un desplazamiento vertical en el eje e insignificante ya que dicho punto es el más próximo a los pies de apoyo por lo tanto la deformación es mínima, sin embargo, el desplazamiento producido en el eje X es positivo siendo este debido a la carga que se aplica de manera horizontal en sentido positivo.

Para el giro de los nodos, los giros positivos serían antihorarios pero los valores negativos serían horarios toman valores relativamente pequeños por lo que los nodos no sufrirán un giro elevado.

- **Reacciones:**

R_{AX}	=	20248,78	N
R_{AY}		38499,19	N
M_{AZ}		139,09	N·m
R_{EX}		-278,06	N
R_{EY}		-32234,14	N
M_{EZ}		145,71	N·m
R_{FX}		-23423,77	N
R_{FY}		33203,43	N
M_{FZ}		159,89	N·m

Tabla 12. Matriz soluciones esfuerzos.

En esta Tabla 12 donde se encuentran las soluciones de las reacciones en los nodos tomados en esta estructura siendo todos ellos menores a la carga aplicada siendo esto debido a que dicha carga es transmitida a lo largo de la barra y no se transmite por completo, estos valores no son estudiados por la normativa, sino que son empleados para estudiar mejor el comportamiento de la estructura y después comprobar con el estudio a pandeo.

En este caso, las mayores reacciones se pueden observar en el nodo A como era de esperar, debido a que el nodo C está directamente conectado con el apoyo por la barra 5. La reacción en el eje Y es menor que la carga aplicada en ese eje debido a que parte de esta es transmitida también a la barra 2. En cuanto al momento flector es el menor de todos.

Para el resto de nodos una de las reacciones puede llegar a ser insignificante si es comparada con la otra dirección. El nodo F, la reacción vertical y la horizontal son elevadas, pero de signo contrario esto es debido a que el desplazamiento en el nodo D es elevado y ese desplazamiento se transmite en esfuerzo de reacción además que en la barra 4 se transmite esfuerzo de la barra 3 por ello, en cuanto al nodo E, la reacción vertical es mayor a la horizontal, aunque el desplazamiento vertical sea menor al horizontal, pero la barra 4 absorbe gran parte de la reacción de tal manera que en el nodo E sea menor pero respecto al eje vertical es mucho mayor.

5.6. Estudio del Pandeo, Carga crítica de Euler, con estructura sin optimizar

En este apartado, se muestra y analiza los resultados obtenidos de la estructura mediante el estudio del pandeo de algunas de nuestras barras calculando la carga crítica de Euler. Se hace referencia al Anexo 3 de la memoria donde se encuentra con mayor detalle el procedimiento llevado a cabo para este ensayo.

Para realizar a obtener esos resultados y realizar ese estudio se utiliza el método de Euler calculando la carga crítica de Euler donde representa la máxima carga de compresión que dicha barra soportaría antes de producirse el pandeo para evitar el desplazamiento de su centro de gravedad de la barra y la disminución de su capacidad resistente a compresión, mediante la siguiente expresión Ec. 2.

Este cálculo se basa en la vista lateral empleada para los dos cálculos anteriores, siendo esta, véase Figura 85.

La barra más larga de nuestra estructura sería la barra 6, perteneciente al arco principal donde se aplica la carga vertical del ensayo A.

▪ **Estudio a pandeo Barra 6:**

Las propiedades de esta barra son, Tabla 13:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
111,5	11,88	21000	0,7

Tabla 13. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7 porque se ha considerado esa que estuviera empotrada en la base, pero a la misma vez articulada en la parte de arriba porque en los ensayos anteriores ha sido estudiado el desplazamiento del nodo superior, es decir del punto D, por lo tanto, será considerada empotrada–articulada, Figura 92.

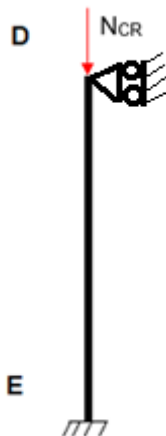


Figura 92. Barra 6 Problema Pandeo.

La carga crítica obtenida, mostrando su resolución en el Anexo 3, sería:

$$N_{CR} = 404,33 \text{ kN}$$

Esta carga sería la máxima carga de compresión que podría soportar la barra antes de producirse el pandeo. Esta carga puede ser comparada con las reacciones verticales obtenidas en el ensayo A anterior:

Ensayo A → 45,16 kN

La reacción vertical del Ensayo A muestra a la carga de compresión que trabajaría dicha barra, por lo tanto, como se puede observar esta barra no pandearía por lo tanto cumple. De igual manera, se podría haber realizado el estudio de la barra 4 pero se sabe que no pandearía debido a que dicha barra es más corta obteniendo una carga crítica de Euler mayor y la reacción vertical obtenida en el nodo de apoyo de esa barra sería mucho menor.

Por otro lado, una vez estudiadas las barras más críticas encontradas en el Ensayo A, se estudian las barras más críticas encontradas para el Ensayo B. La barra a tomar sería la unión de las barras 1 y 2 considerándola como una barra continua, como lo es en realidad, tomándola como una barra recta con una longitud igual a la suma de ambas barras.

▪ **Estudio a pandeo Barra 1+2:**

Esta barra se encuentra a compresión pero se observa que no se encuentra verticalmente como la anterior, por lo tanto este estudio se llevará a cabo considerando la barra vertical y calculando la carga crítica de Euler para comprobar cuál es el valor máximo de compresión que podría soportar el tramo vertical, de igual manera se encuentra del lado de la seguridad, ya que la longitud a considerar es mayor por lo tanto si dicha barra cumple, la barra 1 al ser más corta cumpliría y se parte desde el nodo C porque es donde se aplica la carga del ensayo B.

Las propiedades de esa nueva barra son, Tabla 14:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
142,95	11,88	21000	0,7

Tabla 14. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7 porque se considera que estuviera empotrada en la base, pero a la misma vez articulada en la parte de arriba porque en los ensayos anteriores se ha estudiado el desplazamiento del nodo superior, es decir del punto C, por lo tanto, se considera empotrada – articulada, Figura 93.



Figura 93. Barra 6 Problema Pandeo.

La carga crítica obtenida, mostrando su resolución en el Anexo 3, sería:

$$N_{CR} = 245,99 \text{ kN}$$

Esta carga sería la máxima carga de compresión que podría soportar dicha barra antes de producirse el pandeo. Esta carga puede ser comparada con las reacciones verticales obtenidas en el ensayo B anterior:

$$\text{Ensayo B} \rightarrow 38,49 \text{ kN}$$

La carga vertical del ensayo A obtenida, sería la carga a la que trabajaría dicha barra, por lo tanto, como se puede observar esta barra no pandearía por lo tanto cumple. Por lo tanto, también se podría haber realizado el estudio de la barra 5 pero se sabe que al ser una barra con menor longitud a la anterior obteniendo una carga Crítica de Euler mayor no pandearía ya que la reacción vertical de esta barra sería menor.

5.7. Consideraciones para optimización topológica

La optimización topológica es una técnica mediante la cual se intenta reducir la masa de un objeto, en este caso la jaula de seguridad, pero a la misma vez teniendo en cuenta que se cumple con los requisitos establecidos en un principio. La estructura no puede superar una deformación establecida por la reglamentación a emplear de la FIA y además no se debe de superar el límite de tracción de nuestro material a emplear porque si no podría producirse la rotura de esta.

Las consideraciones a tener en cuenta para reducir la masa de la estructura podrían ser por un lado la eliminación de algunas barras de esta eligiendo aquellas donde no se vean solicitadas y puedan ser eliminadas sin ningún tipo de problema, y por otro lado someter nuestra estructura a un estudio o a una secuencia de variación del espesor comenzando por el empleado 4,5 mm que en su momento se ha estudiado.

El intentar reducir la masa de la estructura mediante la eliminación de algunas barras no sería nuestro objetivo ya que desde un principio todas las barras de la estructura son colocadas con una finalidad, vista en la memoria en la parte de diseño, para evitar que tanto el conductor como el copiloto sufran algún tipo de accidente, por lo tanto esa seguridad debe seguir manteniendo y además la masa que se podría llegar a reducir de esta manera sería mucho menor que si se intentase realizar una forma o método para poder aplicarlo a todas las barras.

La modificación del espesor es una forma que puede aplicarse de manera uniforme a todas aquellas barras por lo tanto el espesor podrá reducirse de manera considerable, además, de probar en esa secuencia con espesores los cuales se encuentren estandarizados en el mercado y pueda llegar a ser más fácil su búsqueda.

Una vez llevado a cabo todos los ensayos de la estructura de manera analítica y mediante el software de ANSYS 18.1 se obtuvieron desplazamientos mucho menores a las permitidas y la tensión máxima de Von Mises estaría también lejos de la tensión máxima de rotura siendo esta 700 MPa. La tensión máxima que aparece en ambos ensayos es, Ensayo A de 450,35 MPa es un 64,33% respecto de la máxima y para el Ensayo B de 477,11 MPa es un 68,15% respecto de la máxima. Por lo tanto, para hacer este estudio se centrará la mirada en el Ensayo B siendo este más restrictivo que el Ensayo A.

Este estudio se llevará a cabo en el Anexo 4 donde se representará una secuencia de espesores estandarizados deteniéndonos cuando se encuentra cerca del límite de rotura además de teniendo en cuenta el espesor que seremos capaces de reducir con este método.

Partimos con las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espesor} \rightarrow 4,5 \text{ mm} \\ \text{Masa} \rightarrow 157,8 \text{ kg} \\ \text{Tensión Máxima} \rightarrow 477,11 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Tras haber realizado la secuencia reflejada en el anexo, el máximo espesor que se podría emplear antes de que superemos la tensión de tracción sería de unos 3,25 mm, siendo estas las propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espesor} \rightarrow 3,25 \text{ mm} \\ \text{Masa} \rightarrow 113,97 \text{ kg} \\ \text{Tensión Máxima} \rightarrow 675,48 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

De esta manera, con la optimización realizada, se ha podido llegar a reducir el espesor en un 28% respecto al empleado al principio calculado anteriormente, siendo dicha reducción de 1,25 mm en todas las barras de la estructura. Por otro lado, la masa de esta estructura ha sido reducido en un 28% respecto a la masa de partida siendo esta reducción de unos 43,83 kg de material.

Para esta comprobación, se ha tomado el Ensayo B ya que era el más restrictivo como se comentaba anteriormente. Pero antes de empezar a realizar los cálculos necesarios para estos ensayos con estas propiedades es conveniente realizar esta comprobación para el Ensayo A con un espesor de 3,25 mm. Los cálculos se encuentran con mayor detalle en el Anexo 4 obteniendo los siguientes resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espesor} \rightarrow 3,25 \text{ mm} \\ \text{Masa} \rightarrow 113,97 \text{ kg} \\ \text{Tensión Máxima} \rightarrow 692,38 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

La tensión máxima de Von Mises sería de 692,38 MPa estaría muy próxima al límite de rotura, pero no lo supera por lo tanto se emplearía ese nuevo espesor para proseguir realizando los cálculos en este proyecto a partir de esta optimización tomada.

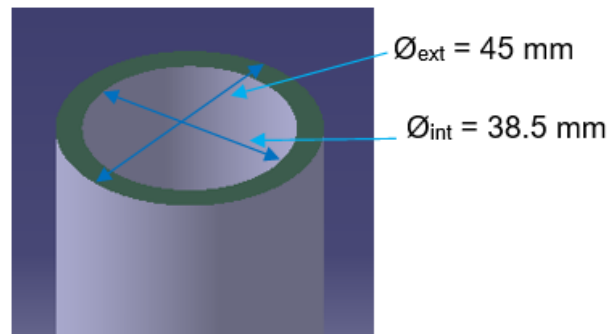


Figura 94. Imagen explicativa diámetros elementos optimizados.

Tras llevar a cabo una modificación del espesor de todas las geometrías de esta estructura se encontrará alterada el valor del área y momento de inercia a tener en cuenta para los próximos ensayos. Para el cálculo de la nueva área emplearíamos un diámetro exterior de 45 mm, manteniéndose este constante, pero con un diámetro interior de 38,5 mm, Figura 94. Por lo tanto, se tendría un área de:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot (\varnothing_{ext})^2 - \frac{\pi}{4} \cdot (\varnothing_{int})^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (4,5)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot (3,85)^2 = 4,26 \text{ cm}^2$$

En cuanto al momento de inercia sería:

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot R_{ext}^4 - \frac{\pi}{4} \cdot R_{int}^4 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{4,5}{2}\right)^4 - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3,85}{2}\right)^4 = 9,34 \text{ cm}^4$$

5.8. Cálculo analítico Ensayo A con estructura optimizada.

Se analizarán los resultados obtenidos en el análisis llevado a cabo sobre esta estructura de seguridad tras la optimización topológica estudiada en el apartado anterior. De nuevo es utilizado el método matricial comentado y empleado anteriormente con la finalidad de conseguir unos resultados que muestren si la estructura sigue cumpliendo con las especificaciones que exigía la norma en cuanto a deformación. Todos los cálculos se encuentran en el Anexo 5 de la memoria donde se desarrolla con gran detalle el procedimiento de cálculo para este nuevo ensayo.

Para comenzar a elaborarlo, primeramente, se deben nombrar los nodos y numerar las barras a ensayar, es decir, aquellos puntos donde se obtiene el desplazamiento, giro y reacción en el caso de apoyos. Dichos puntos o nodos serán los extremos de las barras donde se unen con otras barras o con los pies de apoyo, siendo estos, véase Figura 85.

Se puede hacer un estudio previo para calcular el número de grados de libertad que tendrá esta estructura para saber las dimensiones que tendrán nuestra matriz global elemental de la estructura junto con el vector de desplazamientos y esfuerzos, considerando todos los nudos rígidos tendríamos 18 grados de libertad, véase Figura 86.

En este ensayo Analítico A la carga aplicada, como se ha comentado anteriormente, se aplica sobre el arco principal de la estructura de manera uniforme tomando la consideración comentada en el apartado anterior donde esa carga empleada se divide entre dos apoyos siendo estos las partes verticales que ascienden en el arco principal. La carga a aplicar sería, Figura 95:

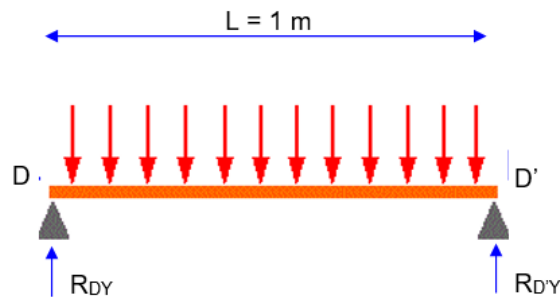


Figura 95. Distribución de la carga en el arco principal eje Z.

$$F = 75 \text{ N/kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Para aplicar esta carga distribuida se emplea la suposición tomada anteriormente, ya que, en este caso se vuelve a trabajar con una estructura plana donde no tendríamos una tercera dimensión. Esta carga distribuida se aplicaría a lo largo de un metro de longitud que mide dicha barra, por lo tanto, si esa fuerza es dividida entre dos, ya que son dos los apoyos que tenemos en el lateral del conductor, siendo el nodo D, y del copiloto, siendo el nodo D', nos aparece la fuerza con la que nosotros trabajaremos siendo esta:

$$R_{DY} = R_{D'Y} = 92,9 \text{ kN} \cdot \frac{1}{2} = 46,5 \text{ kN}$$

El problema a resolver quedaría de la siguiente manera con la fuerza aplicada, los nodos numerados y las barras para comenzar su cálculo, Figura 96:

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA

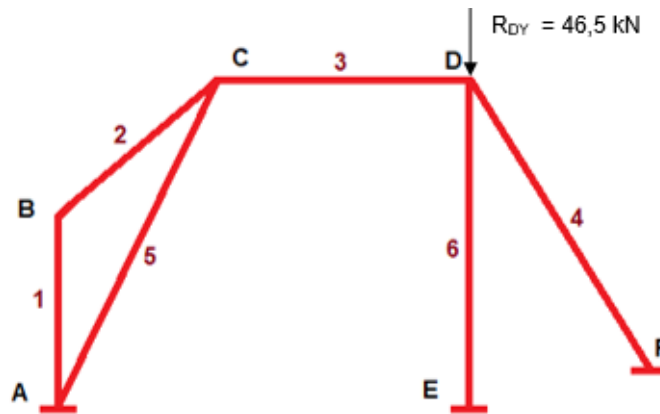


Figura 96. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede al cálculo del vector de esfuerzos, vector desplazamiento y matriz elemental global. Para ello, se hace referencia al Anexo 5 donde se detalla el proceso de cálculo de la expresión antes tomada.

Para ello, se detalla los datos siendo estos comunes para todas las barras que componen la estructura, Tabla 15:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R_{DY} (kN)
4,26	9,34	21000	46,5

Tabla 15. Datos comunes a todas las barras.

El vector desplazamiento sería, Tabla 16:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 16. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos, Tabla 17:

$$[P] = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46,5 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} \quad (kN)$$

Tabla 17. Vector esfuerzos.

Tras haber obtenido ambos vectores y la matriz elemental global, también resuelta en este Anexo 5, se obtienen los siguientes resultados:

- **Desplazamientos y giros:**

U_{BX}	=	-0,495	mm
U_{BY}		0,001	mm
Θ_{BZ}		0,001	rad
U_{CX}		-0,776	mm
U_{CY}		0,406	mm
Θ_{CZ}		-0,000	rad
U_{DX}		-0,780	mm
U_{DY}		-0,562	mm
Θ_{DZ}		0,000	rad

Tabla 18. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

En la Tabla 18 se recogen todos los resultados obtenidos referente a este análisis llevado a cabo, se puede observar de nuevo como todos los desplazamientos obtenidos son menor a 1 mm cosa que en la estructura antes de la optimización topológica también ocurría, por lo tanto, se estaría dentro del valor permitido siendo este como máximo 50 mm.

El nodo D es el que más desplazamiento sufre debido a que en ese punto o nodo es donde se aplica toda la carga que se estudia en este ensayo siendo esta carga negativa en dirección al eje Y, igual al desplazamiento producido, pero en este caso aumenta ya que la sección es menor. El desplazamiento producido en el eje X es negativo también debido de nuevo a la funcionalidad de la barra 4 que nos impide en la medida de lo posible el desplazamiento del arco principal por lo tanto se puede observar que dicha barra realiza bien su trabajo de retención.

Después el desplazamiento producido por el nodo anterior es transmitido al nodo C en su totalidad sin embargo en el caso anterior con la estructura sin optimizar no se transmitía por completo. El desplazamiento vertical de este nodo C sigue siendo positivo debido a la barra 5 que impide en la medida de lo posible que dicho nodo se desplace hacia el interior del habitáculo siendo este desplazamiento mayor.

Sin embargo, el nodo B, el desplazamiento en cuanto al eje Y sigue siendo insignificante porque su desplazamiento es relativamente pequeño en comparación con el resto, ya que este nodo es el más cercano a los pies de apoyo por lo tanto la deformación que puede llegar a tener esta barra es mínima, pero el desplazamiento horizontal a lo largo del eje X sigue siendo negativo transmitido por los nodos.

Para el giro de los nodos, los giros positivos serían antihorarios y los negativos horarios, tomando valores pequeños por eso estos no sufrirán un giro elevado.

- **Reacciones:**

R_{AX}	=	517,39	N
R_{AY}		465,19	N
M_{AZ}		-130,61	N·m
R_{EX}		136,26	N
R_{EY}		45082,25	N
M_{EZ}		-75,27	N·m
R_{FX}		-653,66	N
R_{FY}		1290,06	N
M_{FZ}		-103,57	N·m

Tabla 19. Matriz soluciones esfuerzos.

Los cálculos obtenidos, Tabla 19, en referente a los esfuerzos que se producen en los nodos situados en los pies de apoyo, es decir, en los apoyos de la estructura donde el desplazamiento se ha considerado nulo se encuentran reflejados en la tabla 19. Todos los valores que aparecen son menores a la carga aplicada debido a que dicha carga es transmitida a lo largo de la barra y no se transmite por completo, estos datos como se conocen no son estudiados por la normativa, pero serán empleados para estudiar mejor su comportamiento empleándolos para el estudio a pandeo de la estructura.

El nodo E, es el nodo con mayor reacción de la estructura, como era de esperar de nuevo, porque la carga se aplica en la barra perpendicular a ese nudo por lo tanto recae todo sobre él. La reacción obtenida en el eje Y es menor a la carga aplicada gracias a la barra 4 que confluye en ese nudo transmitiendo parte del esfuerzo a esta barra. En cuanto al momento flector producido en este nudo es el menor de todos, pero esto es debido a las barras que impiden en la medida de lo posible que el arco principal se desplace siendo estas la barra 4 y 3 siendo este valor negativo.

El resto de nodos las reacciones que aparecen son menores debido a que la carga aplicada se empieza a distribuir por el resto de barras. Las reacciones del nodo F son mayores a las del nodo A, ya que este último nudo es intervenido por mayor número de barras, es decir se encuentra más separado del nudo donde se aplica la carga.

5.9. Cálculo analítico Ensayo B con estructura optimizada.

En este apartado, se vuelve a analizar los resultados obtenidos ensayados sobre nuestra nueva estructura de seguridad tras la optimización topológica estudiada anteriormente de nuevo con el método matricial comentado con la finalidad de obtener los resultados y comprobar si nuestra estructura sigue cumpliendo con las especificaciones que nos exigía la norma en cuanto a la deformación. Todos estos cálculos se encuentran detallados en el Anexo 6 de la memoria donde se desarrollan con gran detalle el procedimiento de cálculo llevado a cabo para este ensayo.

Para llegar a obtener los resultados de este método matricial se tiene una expresión la cual mediante los esfuerzos que se aplican en alguno de los nodos de esta estructura se obtiene los desplazamientos, giros y reacciones que se generan

en aquellos nodos o puntos de la estructura. Para ello es necesario el empleo de una matriz elemental global de la estructura $[k]$, siendo la expresión Ec. 1

Para comenzar a emplear dicha expresión, primero se nombran y numeran los nodos que se ensayarán sobre la estructura, es decir, aquellos puntos donde se obtendrá el desplazamiento, giro y reacción en caso de los apoyos. Dichos puntos o nodos serán los extremos de las barras donde se unen unas con otras barras o con los pies de apoyo, siendo estos Figura 85.

Se puede hacer un estudio previo para calcular el número de grados de libertad que tendrá esta estructura para saber las dimensiones que tendrán la matriz global elemental de la estructura junto con el vector de desplazamientos y esfuerzos, Considerando todos los nudos rígidos se tiene 18 grados de libertad, Figura 86.

En este ensayo Analítico B la carga aplicada, como ha sido comentado anteriormente, sería una fuerza tridimensional aplicada sobre un punto o nodo de esta estructura sobre el arco lateral del conductor. Al tratarse de un modelo bidimensional esa fuerza se descompone en los ejes X e Y. El valor de carga o esfuerzo sería el siguiente:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg) \rightarrow F_B (N) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Siendo W:

$$W = masa\ del\ vehiculo(kg) + 160\ kg = 1089kg + 160kg = 1249\ kg$$

$$F_B = 35\ \frac{N}{kg} \cdot 1249\ kg = 43715\ N = 43,7\ kN$$

Esta carga se encontraba girada respecto al eje longitudinal un ángulo de 5° y con respecto al eje transversal un ángulo de 25°, Figura 97 y Figura 98:

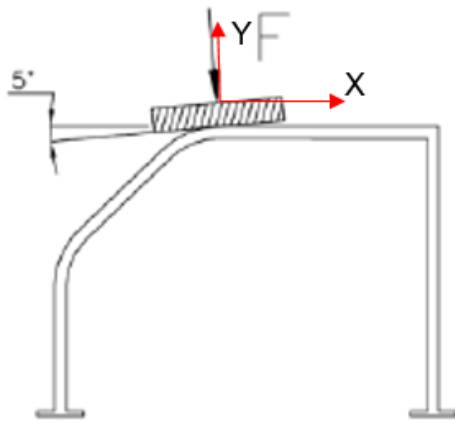


Figura 97. Eje longitudinal.

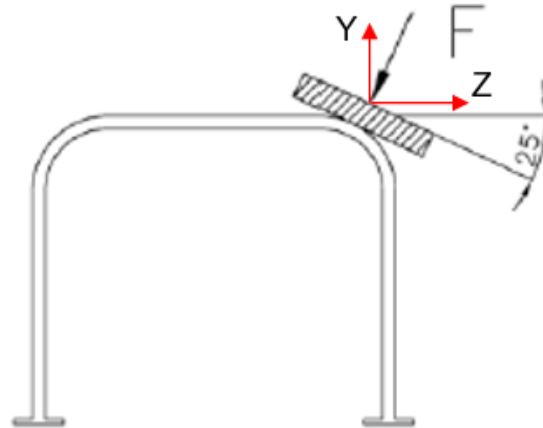


Figura 98. Eje Transversal.

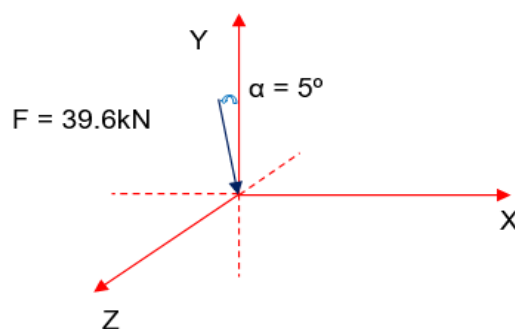
Primeramente, para trasladar la fuerza a este plano XY del problema hay primero que multiplicar esa fuerza por el coseno de 25° porque es el ángulo que se encuentra rotado en el plano ZY.

$$F = 43,7N \cdot \cos 25^\circ = 39,6 \text{ kN}$$

La fuerza que actuaría en dirección al eje Z, sería:

$$F_z = 43,7N \cdot \sin 25^\circ = 18,4 \text{ kN}$$

El cálculo de esta fuerza será útil para posteriormente emplearla en el programa de ANSYS.



Para calcular el esfuerzo generado en el eje X e Y, sería de la siguiente manera:

$$F_x = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \sin 5^\circ = 3,5 \text{ kN}$$

$$F_y = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ = -39,5 \text{ kN}$$

Este problema a resolver quedaría de la siguiente manera con la fuerza aplicada en el nodo C, Figura 99:

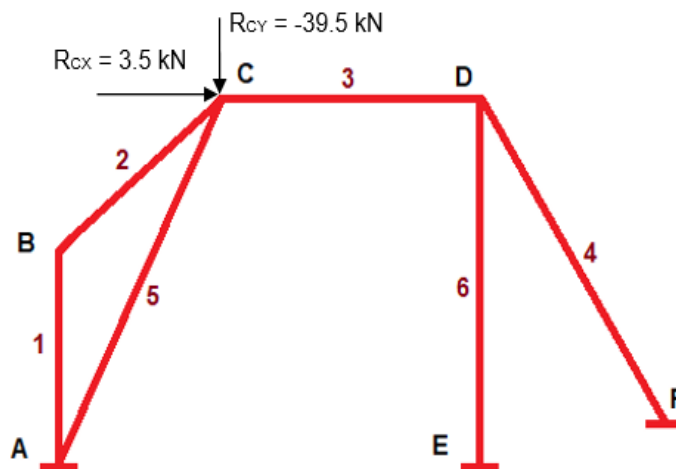


Figura 99. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, procederemos al cálculo del vector de esfuerzos, vector desplazamiento y matriz elemental global. Para ello, se hace referencia al Anexo 6 donde se detalla el proceso de cálculo de la expresión antes tomada.

Para ello, se detalla los datos siendo estos comunes para todas las barras que componen la estructura:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{CX} (kN)	R _{CY} (kN)
4,26	9,34	21000	3,5	-39,5

Tabla 20. Datos comunes a todas las barras

El vector desplazamiento sería, Tabla 21:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 21. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos, Tabla 22:

$$[P] = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.5 \\ -39.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 22. Vector esfuerzos.

Tras haber obtenido ambos vectores y la matriz elemental global, también resuelta en este Anexo 6, se obtienen los siguientes resultados:

- **Desplazamientos y giros:**

U_{BX}	=	0,536	mm
U_{BY}		-0,008	mm
Θ_{BZ}		-0,002	rad
U_{CX}		1,577	mm
U_{CY}		-1,524	mm
Θ_{CZ}		0,000	rad
U_{DX}		1,381	mm
U_{DY}		0,388	mm
Θ_{DZ}		0,001	rad

Tabla 23. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

Todos los resultados obtenidos referente a este ensayo llevado a cabo para este análisis B se recogen en la Tabla 23, pudiendo observarse como de nuevo todos los desplazamientos obtenidos son muy pequeños estando los mayores en torno a 1 mm cosa que en la estructura anterior a la optimización topológica también ocurría, por lo tanto, se estaría dentro del valor permitido siendo este como máximo 100 mm.

Al estudiar los resultados obtenidos en el nodo C se puede observar que se encuentra más deformado en ambas direcciones en comparación con el resto, esto es debido a que la carga en este ensayo se aplica en dicho punto o nodo produciendo un desplazamiento negativo en la dirección Y, mismo sentido que la aplicación de la carga, y un desplazamiento positivo en X, mismo sentido de aplicación de la carga. El desplazamiento horizontal es positivo debido a la acción ejercida por la barra 5 al encontrarse inclinada impide en la medida de lo posible que dicho nodo se desplace en sentido negativo, también se puede observar la acción de dicha barra como el desplazamiento en el eje X es mayor que en eje Y siendo la carga aplicada en el eje X 11 veces mayor que en el eje Y.

El siguiente nodo con mayor deformación es el nodo D obteniendo ambos desplazamientos positivos, como se puede observar el desplazamiento horizontal de este es menor al del nodo anterior gracias a la acción que ejerce la barra 4 que impide en la medida de lo posible el desplazamiento del arco principal.

Para terminar, el nodo B, el desplazamiento respecto el eje Y sigue siendo insignificante porque su desplazamiento es relativamente pequeño en comparación con el resto, ya que dicho nodo es el más próximo a los pies de apoyo de la estructura por tanto la deformación que puede llegar a tener esta barra es mínima, pero el desplazamiento horizontal a lo largo del eje X es positivo debido a la acción que ejercía anteriormente la barra 5 sobre el nodo anterior.

Para el giro de los nodos, los giros positivos serían antihorarios pero los valores negativos serían horarios toman valores relativamente pequeños por lo que los nodos no sufrirán un giro elevado.

- **Reacciones:**

R_{AX}	=	19940,00	N
R_{AY}		38196,71	N
M_{AZ}		182,15	N·m
R_{EX}		-364,66	N
R_{EY}		-31186,19	N
M_{EZ}		190,98	N·m
R_{FX}		-23028,38	N
R_{FY}		32457,96	N
M_{FZ}		209,34	N·m

Tabla 24. Matriz soluciones esfuerzos.

Los cálculos obtenidos en referente a los esfuerzos que se producen en los nodos situados en los pies de apoyo, es decir, en los apoyos de la estructura donde el desplazamiento se ha considerado nulo se encuentran reflejados en la Tabla 24. Todos los valores que aparecen son menores a la carga aplicada debido a que dicha carga es transmitida a lo largo de las barras y no se transmite por completo, estos datos no son estudiados por la normativa, pero serán empleados para estudiar mejor su comportamiento utilizándolos para el estudio a pandeo de la estructura.

En este caso, las mayores reacciones se pueden observar en el nodo A como era de esperar, debido a que el nodo C, donde se aplica la carga, está directamente conectado con el apoyo A por la barra 5. La reacción que aparece en eje Y es menor que la carga aplicada en ese eje debido a que parte de esta carga es transmitida por

la barra 2. El momento que aparece en este nodo es el menor de todos debido a su proximidad que se encuentra al punto de aplicación de la carga.

Para el resto de nodos una de las reacciones puede llegar a ser insignificante si es comparada con la otra dirección. Ocurre en el caso del nodo E. El nodo F, la reacción tanto vertical como horizontal ambas son elevadas, pero de signo contrario esto es debido a que el desplazamiento en el nodo D es elevado y ese desplazamiento se transmite en esfuerzo de reacción además que en la barra 4 se transmite esfuerzo de la barra 3 por ello, en cuanto al nodo E, la reacción vertical es mayor a la reacción horizontal, aunque el desplazamiento vertical sea menor al horizontal, pero la barra 4 absorbe gran parte de la reacción de tal manera que en el nodo E sea menor respecto al eje vertical es mucho mayor.

5.10. Estudio del Pandeo, Carga crítica de Euler con estructura optimizada.

En este apartado, se muestra y analiza los resultados obtenidos de nuestra nueva estructura tras haber realizado la optimización topológica anteriormente mediante el estudio del pandeo de algunas de las barras calculando la carga crítica de Euler haciendo referencia al Anexo 7 de la memoria donde se encuentra con mayor detalle el procedimiento llevado a cabo para este ensayo.

Para realizar a obtener esos resultados y realizar ese estudio empleamos el método de Euler calculando la carga crítica de Euler donde representa la máxima carga de compresión que dicha barra soportaría antes de producirse el pandeo para evitar el desplazamiento de su centro de gravedad de la barra y la disminución de su capacidad resistente a compresión, mediante la siguiente expresión Ec. 2.

Este cálculo nos hemos basado en la vista lateral empleada para los dos cálculos anteriores, siendo esta Figura 85.

La barra más larga de esta estructura sería la barra 6, perteneciente al arco principal donde se aplica la carga vertical del ensayo A.

▪ **Estudio a pandeo Barra 6:**

Las propiedades de esa barra son, Tabla 25:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
111,5	9,34	21000	0,7

Tabla 25. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7 porque se ha considerado esa que estuviera empotrada en la base, pero a la misma vez articulada en la parte de arriba porque en los ensayos anteriores se ha estudiado el desplazamiento del nodo superior, es decir del punto D, por lo tanto, la se considera empotrada–articulada, Figura 92.

La carga critica obtenida, mostrando su resolución en el Anexo 7, sería:

$$N_{CR} = 404,33 \text{ kN}$$

Esta carga sería la máxima carga de compresión que podría soportar dicha barra antes de producirse el pandeo, esta carga puede ser comparada con las reacciones verticales obtenidas en el ensayo A anterior:

$$\text{Ensayo A} \rightarrow 45,08 \text{ kN}$$

La reacción vertical del Ensayo A muestra la carga de compresión que trabajaría dicha barra, por lo tanto, como se puede observar esta barra no pandearía por lo tanto cumple. De igual manera, se podría haber realizado el estudio de la barra 4 pero se sabe que no pandearía debido a que dicha barra es más corta obteniendo una carga critica de Euler mayor y la reacción vertical obtenida en el nodo de apoyo de esa barra sería mucho menor.

Por otro lado, una vez estudiadas las barras más críticas encontradas en el Ensayo A, se estudian las barras más críticas encontradas para el Ensayo B. La barra a tomar sería la unión de las barras 1 y 2 considerándola como una barra continua, como lo es en realidad, tomándola como una barra recta con una longitud igual a la suma de ambas barras.

▪ **Estudio a pandeo Barra 1+2:**

Esta barra se sabe que se encuentra a compresión, pero se observa que dicha barra no se encuentra verticalmente como la anterior, por lo tanto, este estudio se llevará a cabo considerando la barra vertical y calculando la carga crítica de Euler para comprobar cuál es el valor máximo de compresión que podría soportar el tramo vertical, de igual manera encontrándose del lado de la seguridad, ya que la longitud a considerar es mayor por lo tanto si dicha barra cumple. La barra 1 al ser más corta cumpliría y partimos desde el nodo C que es donde se aplica la carga del ensayo B.

Las propiedades de esa barra son, Tabla 26:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
142,95	9,34	21000	0,7

Tabla 26. Datos barra 1+2.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7 porque se considera que estuviera empotrada en la base, pero a la misma vez articulada en la parte de arriba porque en los ensayos anteriores hemos estudiado el desplazamiento del nodo superior, es decir del punto C, por lo tanto, se considera empotrada–articulada, Figura 93.

La carga crítica obtenida, mostrando su resolución en el Anexo 7, sería:

$$N_{CR} = 193,41 \text{ kN}$$

Esta carga sería la máxima carga de compresión que podría soportar dicha barra antes de producirse el pandeo, esta carga puede ser comparada con las reacciones verticales obtenidas en el ensayo B anterior:

$$\text{Ensayo B} \rightarrow 38,19 \text{ kN}$$

La carga vertical del ensayo B obtenida, sería la carga a la que trabajaría dicha barra, por lo tanto, como se puede observar esta barra no pandearía por lo tanto cumple. Por eso, también se podía haber realizado el estudio de la barra 5 pero se sabe que al ser una barra con menor longitud a la anterior obteniendo una carga Crítica de Euler mayor no pandearía, pues la reacción vertical de esta barra sería menor.

6. Cálculo FEM

El cálculo mediante elementos finitos se ha llevará a cabo en este apartado. Todos estos cálculos han sido obtenidos mediante el software ANSYS 18.1. En este análisis mediante simulación en 3D se emplea la estructura de manera completa, es decir, con todas las peculiaridades que esta puede tener realmente (radios de curvatura, refuerzos, entre otros) cosa que en los apartados anteriores no se ha tenido en cuenta. Véase Figura 100.

Cabe destacar, que se realizaran los cuatro ensayos analizados anteriormente. Estos se realizarían por un lado dos con la estructura real y por otro lado otros dos con la estructura optimizada, teniendo en cuenta las optimizaciones que se detallaban en el apartado anterior.

Asimismo, se obtendrán los resultados referentes a deformaciones y tensiones en los que esta estructura se ve sometida. Posteriormente, estos resultados pueden llegar a ser comparados con los obtenidos en los ensayos analíticos. Además, se han introducido las características del material empleado en la biblioteca que dispone este programa.

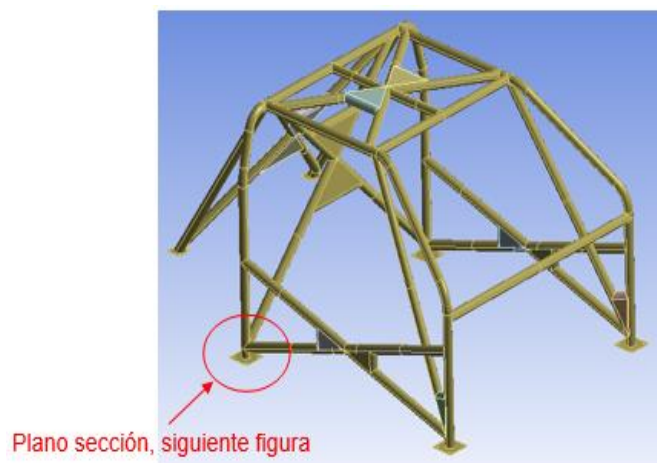


Figura 100. Estructura bidimensional.

La estructura de trabajo en este apartado sería bidimensional, esto no quiere decir que se trabaje con una estructura en 2D. Ésta tiene la misma geometría que la estructura tridimensional, pero se exporta al software una estructura compuesta por geometrías planas (superficies exteriores) donde no se puede observar ningún espesor, Figura 101Figura 100. Este dato sería introducido al realizarse el mallado de la estructura.

Dicha solución ha sido tomada con el objetivo de impedir la demora de los cálculos y ahorro computacional. Cabe destacar, que de esta manera se facilitaría el proceso de cálculo evitando la necesidad de mallar superficies internas, reduciendo de esta manera el número de caras.

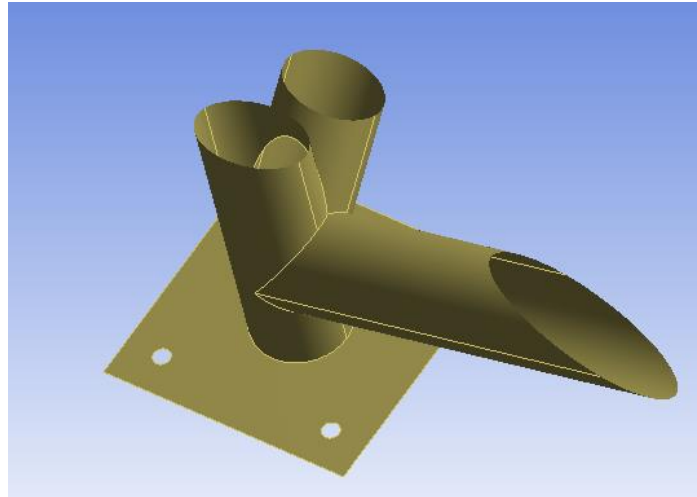


Figura 101. Detalle tubo sin espesor, plano de sección.

6.1. Mallado

El proceso de mallado se define como la discretización matemática de la geometría, utilizando elementos de distinto tipo. De esta manera, pueden aplicarse las ecuaciones de equilibrio en cada uno de los nodos de los elementos generados. Es uno de los pasos más importantes y necesarios que se deben de realizar para el estudio de elementos finitos. Según la calidad, tamaño y geometría que tengan los elementos de dicha malla, podrán obtenerse resultados más o menos precisos al mismo tiempo que el coste computacional puede verse afectado notablemente.

La malla empleada es creada mediante elementos con tamaño de 15 mm, Figura 102. Este tamaño ha sido el adecuado para la capacidad computacional disponible, al mismo tiempo que se compromete con la precisión de los resultados. También, el método a emplear es triangular, es decir, los elementos de esta malla serían triangulares dado que permite la discretización de geometrías complejas de manera más sencilla que otros tipos de elementos.

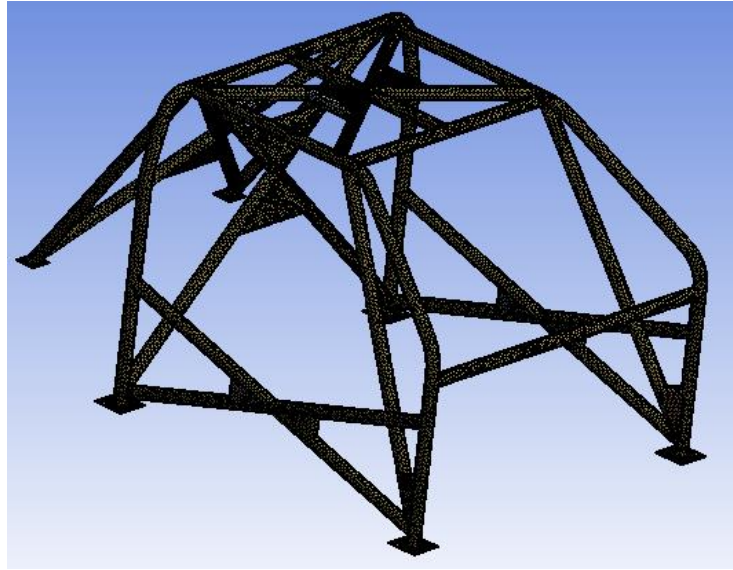


Figura 102. Mallado de la estructura.

En este apartado anterior al mallado, se especifica el espesor que tendría cada uno de estos elementos. Una vez realizado la malla éste lo representaría de la siguiente manera, Figura 103, donde se puede observar el espesor en uno de los tubos de nuestra estructura:

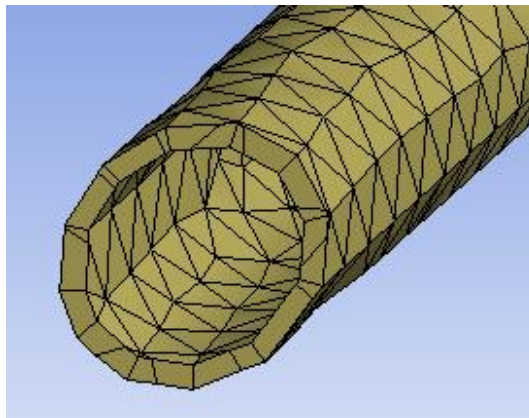


Figura 103. Espesor en barra.

6.2. Cálculo teórico Ensayo A, método de elementos finitos, con estructura sin optimizar

En este apartado, se llevará a cabo el análisis estático virtual referente al Ensayo A con estructura sin optimizar. Este software se encarga de representar las deformaciones y tensiones en las que se puede encontrar la geometría. Estos resultados de deformación serán llevados a un análisis comparativo junto con los obtenidos en el estudio analítico. Además, la tensión de Von Mises se tiene que impedir superar el límite de rotura del material.

La carga aplicada en este caso sobre el arco principal si podría colocarse de manera distribuida a lo largo de este, Figura 104, siendo esta:

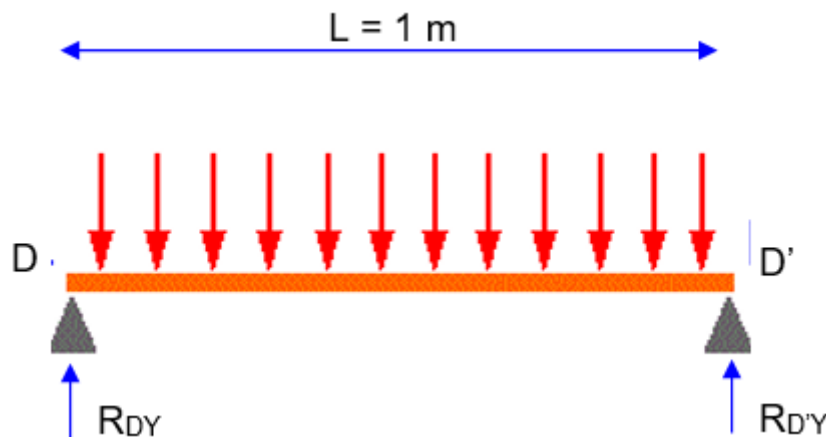


Figura 104. Distribución de la carga en el arco principal eje Z.

$$F = 75 \text{ N/kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Una vez colocada dicha fuerza sobre la estructura, se tendría que colocar los soportes fijos de esta. Estos apoyos fijos serían 6, según las condiciones de contorno del problema, Figura 105.

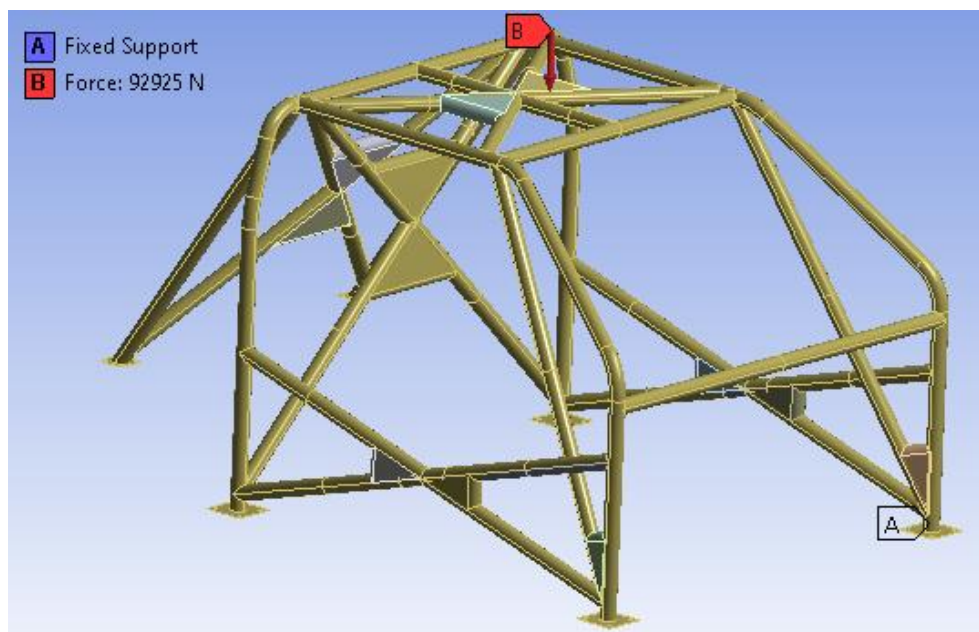


Figura 105. Fuerza distribuida y soportes fijos.

6.2.1. Resultados

Se comienza tratando las deformaciones obtenidas tanto totales como direccionales.

- **Deformación total.**

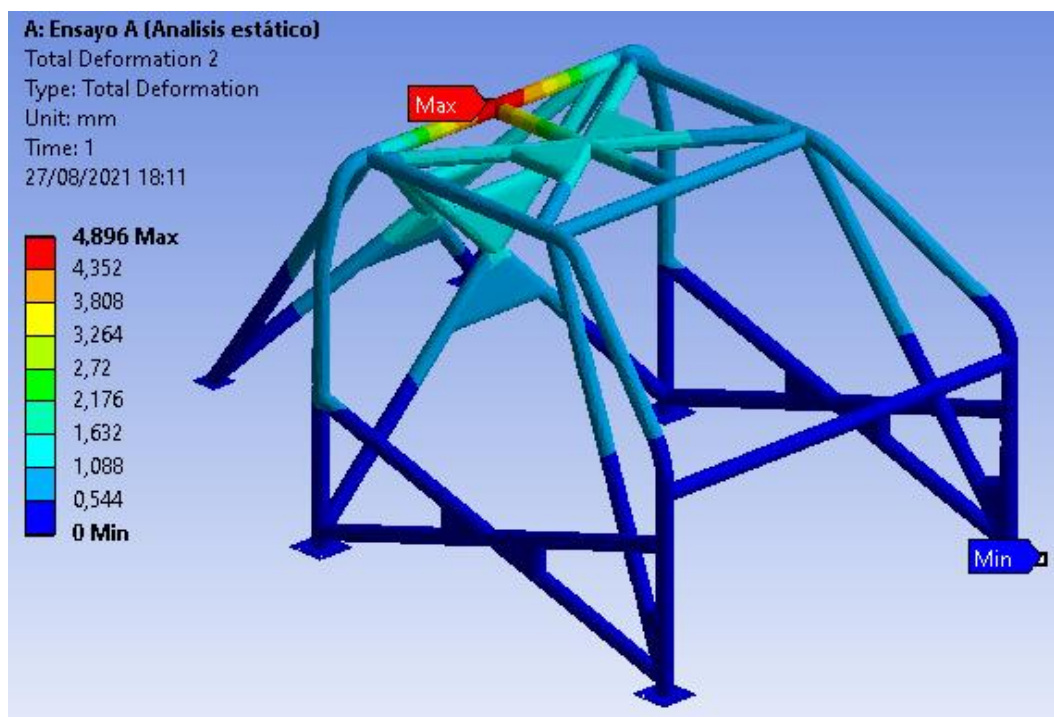


Figura 106. Deformación total obtenida.

En la Figura 106, se puede observar la deformación producida por esta carga a lo largo del arco principal. La máxima deformación se encuentra en el centro de dicha barra siendo esta de 4,89 mm. Cabe destacar, que se puede observar como esa deformación disminuye conforme se desciende por la estructura gracias a los colores mostrados en la figura anterior.

Esta estructura se podría considerar como válida debido a que la máxima deformación obtenida es menor a 50 mm que era lo que exigía la normativa.

Por otro lado, para poder contrastar los resultados obtenidos en los ensayos analíticos y comprobar su precisión, se obtienen estos desplazamientos a través de simulación. Cabe destacar, que el eje de coordenadas situado en el software tiene sentido y dirección distinta al empleado en los ensayos anteriores. Por ello, el desplazamiento vertical de este sería respecto al eje Z y el desplazamiento horizontal sería respecto al eje Y.

- **Deformación direccional Horizontal.**

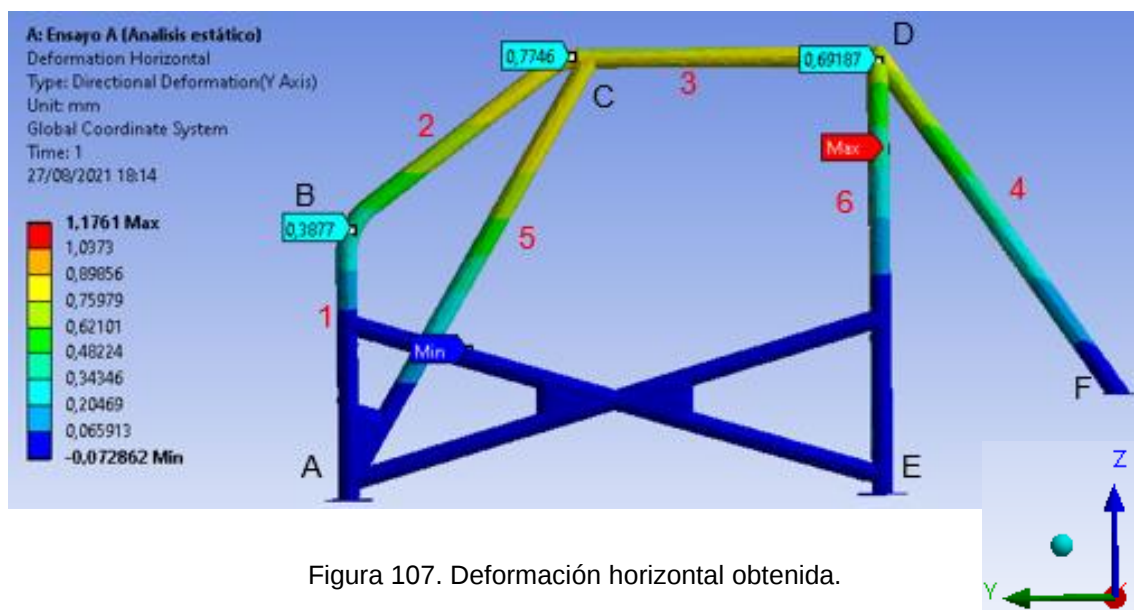


Figura 107. Deformación horizontal obtenida.

En la Figura 107, se representa el desplazamiento horizontal producido en los nodos que anteriormente se han estudiado. Estos desplazamientos son inferiores a 1 mm.

La carga en este ensayo se aplica sobre el arco principal, en dirección perpendicular al plano YZ pasando por el nodo D. Se puede observar como la barra 4 hace que el nodo C se desplace en mayor medida, pero esto es debido al esfuerzo que realiza esta barra. Cabe destacar, que dicha barra impide en la medida de lo posible el desplazamiento del arco principal. Sin embargo, el nodo B su desplazamiento horizontal es menor a los anteriores. Esto es debido al esfuerzo producido por la barra 5.

Se debe tener en cuenta que se representan los desplazamientos con signo contrario a los resultados anteriores, pues el eje Y se encuentra en sentido inverso.

- **Deformación direccional Vertical.**

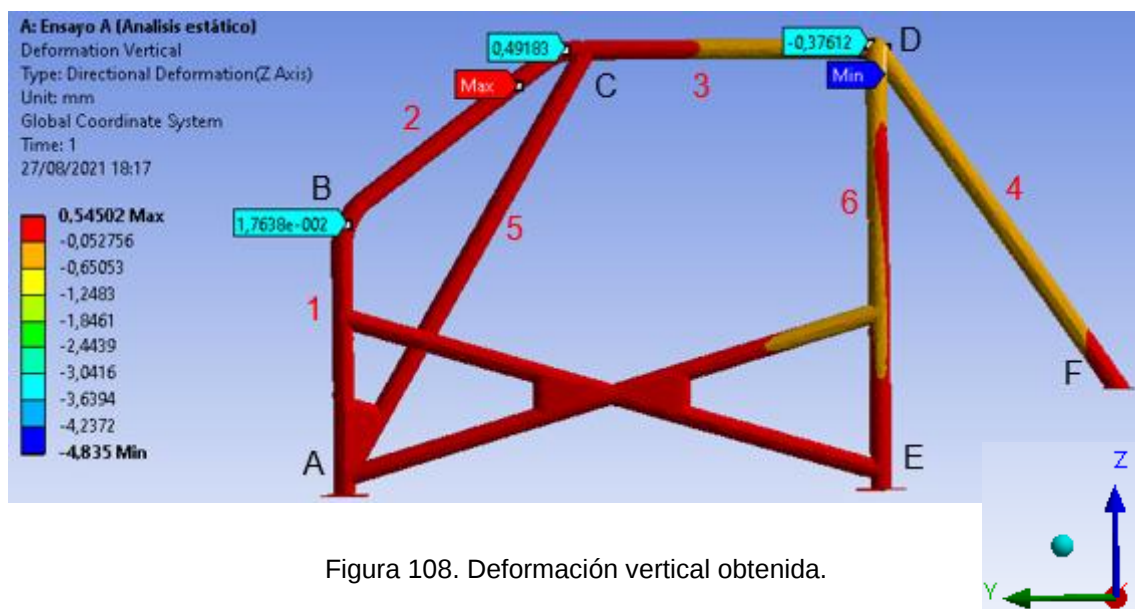


Figura 108. Deformación vertical obtenida.

En cuanto al desplazamiento producido en el eje vertical, se representa en la Figura 108. Cabe destacar, que este desplazamiento es menor a 1 mm en todos ellos, como ocurría en el apartado anterior.

El desplazamiento del nodo B puede ser no considerado porque ese desplazamiento frente al resto sería insignificante. También, el desplazamiento producido en el nodo D es negativo debido al sentido de la aplicación de la carga, e incluso es menor que el desplazamiento horizontal por el esfuerzo ejercido por la barra 4. Por otro lado, el desplazamiento del nodo C intermedio es positivo provocado por la barra 4 que hace un esfuerzo hacia la izquierda y la barra 5 que desplaza este nodo en el sentido positivo.

A continuación, se muestra la tensión equivalente de Von Mises y la zona en la que se produce mayor tensión.

- **Tensión de Von Mises**

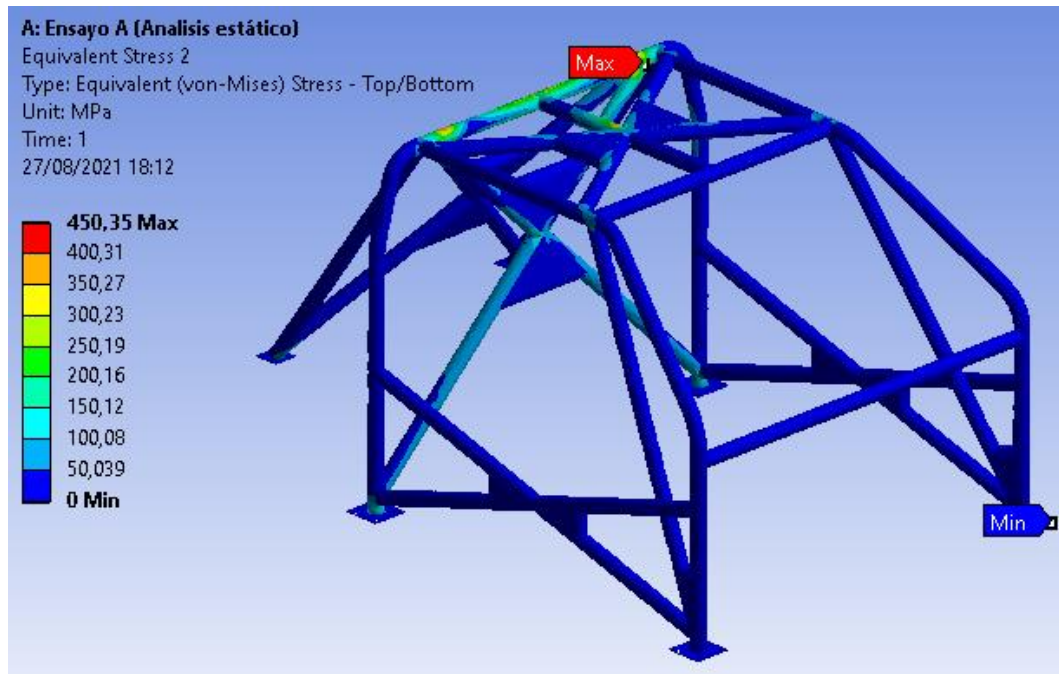


Figura 109. Tensión de Von Mises.

En cuanto a la tensión máxima de Von Mises, Figura 109, es producida en la unión de los refuerzos del arco principal con él mismo, debido a las concentraciones de tensiones en esas zonas de unión. Se puede visualizar con mayor detalle en la Figura 110.

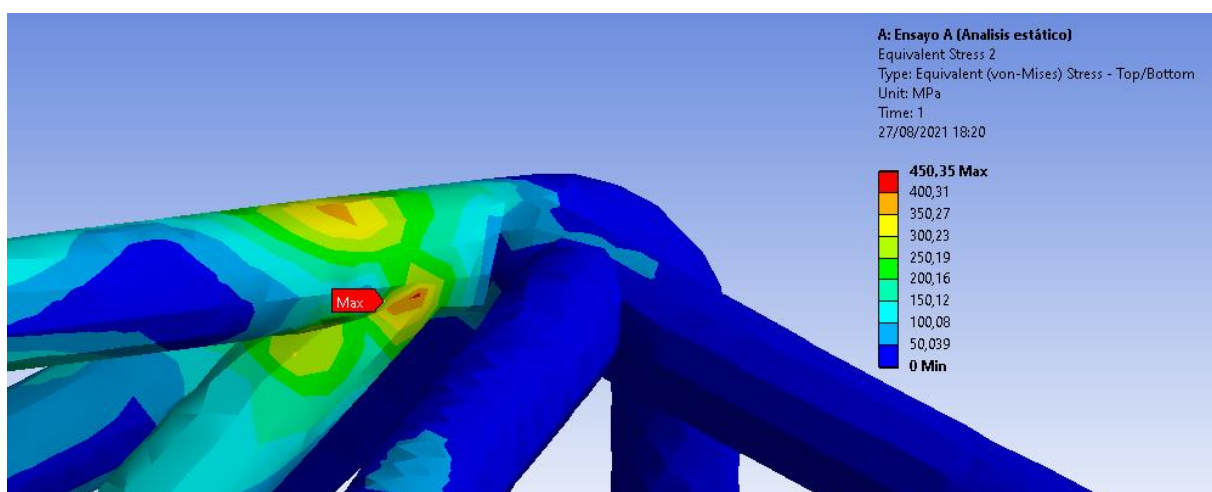


Figura 110. Zona máxima Tensión.

La tensión máxima producida es de unos 450,35 MPa, siendo este inferior al límite de rotura que es 700 MPa. Por lo tanto, esta estructura se encontraría dentro de los límites establecidos, cumpliría tanto la deformación como la tensión máxima producida, siendo estos menores a lo exigido.

6.3. Cálculo teórico ENSAYO B, método de elementos finitos, con estructura sin optimizar

En este siguiente apartado se llevará a cabo el análisis estático virtual referente al Ensayo B con estructura sin optimizar. Este software se encarga de representar las deformaciones y tensiones en las que se puede encontrar la geometría. Estos resultados de deformación serán llevados a un análisis comparativo junto con los obtenidos en el estudio analítico. Además, la tensión de Von Mises se tiene que superar el límite de rotura del material.

La carga aplicada en este caso sobre el semiarco lateral del conductor sí podría considerarse tridimensional, pues empleamos la estructura completa. Por lo tanto:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg) \rightarrow F_B (N) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Siendo W:

$$W = \text{peso del vehiculo}(kg) + 160 \text{ kg} = 1089kg + 160kg = 1249 \text{ kg}$$

$$F_B = 35 \frac{N}{kg} \cdot 1249 \text{ kg} = 43715 \text{ N} = 43,7 \text{ kN}$$

Esta carga se encontraba girada respecto al eje longitudinal un ángulo de 5° y con respecto al eje transversal un ángulo de 25°, véase Figura 111 y Figura 112.

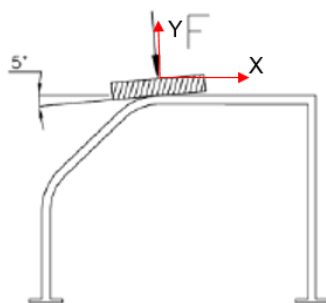


Figura 111. Eje longitudinal.

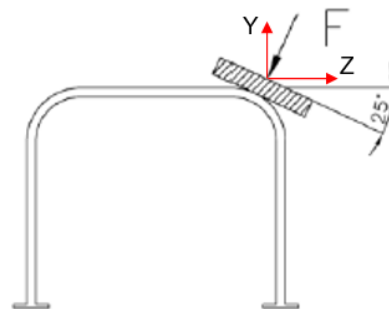


Figura 112. Eje Transversal.

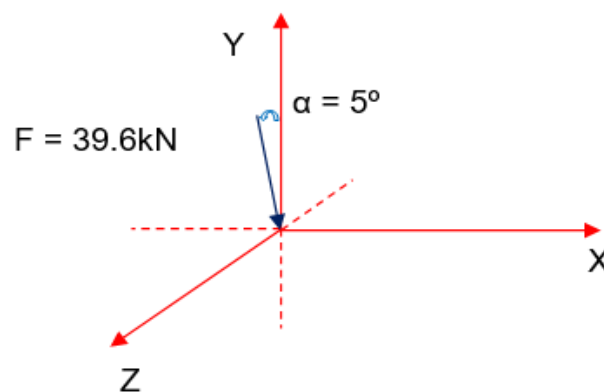
Primeramente, para trasladar la fuerza al plano XY de este problema tenemos primero que multiplicar esa fuerza por el coseno de 25° porque es el ángulo que se encuentra rotado en el plano ZY.

$$F = 43,7N \cdot \cos 25^\circ = 39,6 \text{ kN}$$

La fuerza que actuaría en dirección al eje Z, sería:

$$F_Z = 43,7N \cdot \sin 25^\circ = 18,4 \text{ kN}$$

Después esta fuerza se multiplicaría por su respectivo ángulo para poder trasladarla la dirección del eje X e Y:

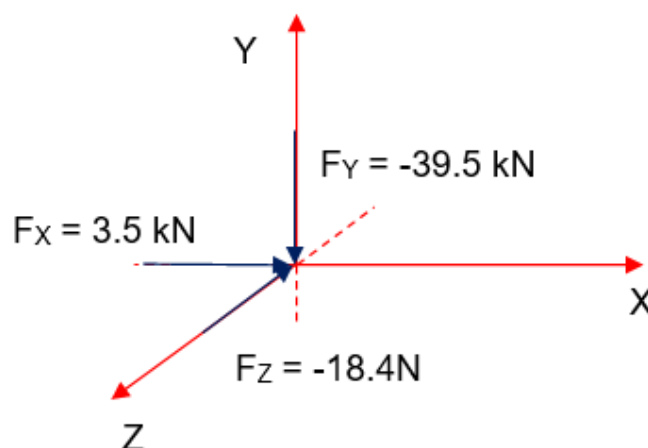


Para calcular el esfuerzo generado en estos ejes, sería de la siguiente manera:

$$F_X = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \sin 5^\circ = 3,4 \text{ kN}$$

$$F_Y = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ = -39,5 \text{ kN}$$

Obteniendo una distribución de la fuerza de la siguiente manera:



Ya colocada dicha fuerza sobre la estructura, son colocados los soportes fijos de esta, que serían 6, según las condiciones de contorno del problema, Figura 113.

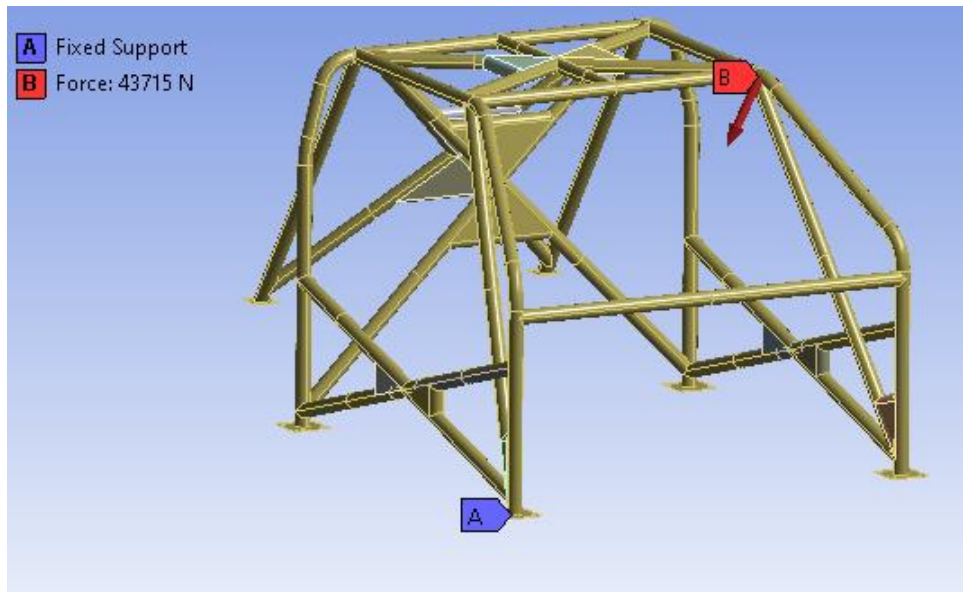


Figura 113. Fuerza tridimensional y soportes fijos.

6.3.1. Resultados

Se comienza tratando las deformaciones obtenidas tanto totales como direccionales.

- **Deformación total.**

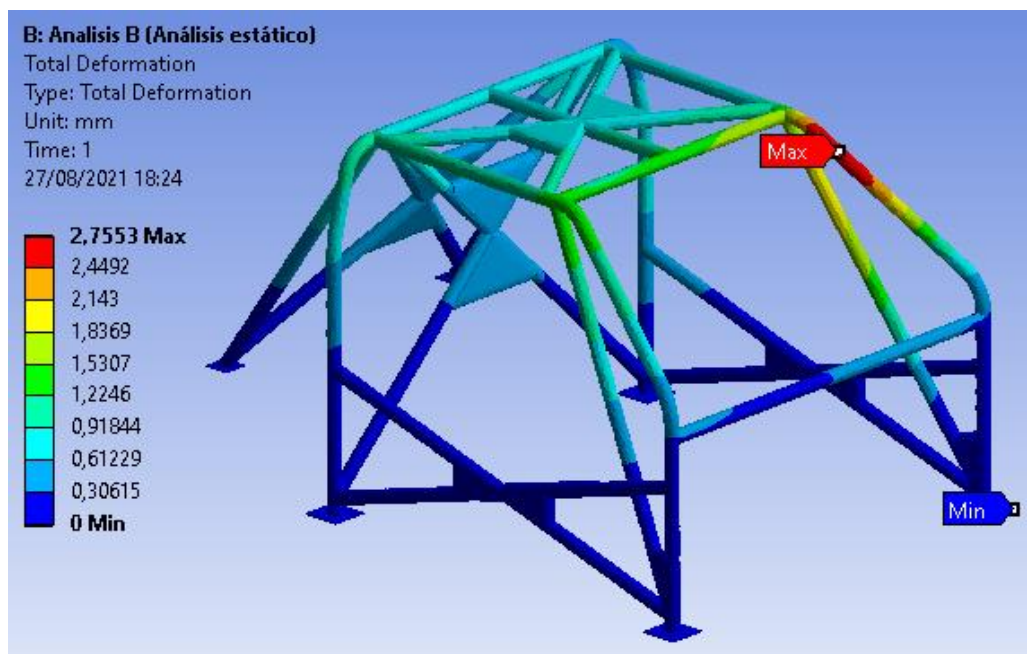


Figura 114. Deformación total obtenida.

En esta Figura 114, se puede observar la deformación producida por dicha carga tridimensional aplicada en el semiarco lateral. La máxima deformación se encuentra en la zona de aplicación de la carga siendo esta de 2,75 mm. Cabe señalar, como se puede observar la distribución de la deformación a lo largo de la barra 5, refuerzo del parabrisas, y los refuerzos del techo.

Esta estructura se podría considerar como válida debido a que la máxima deformación obtenida es menor a 100 mm que era lo que exigía la normativa.

Por otro lado, para poder contrastar los resultados obtenidos en los ensayos analíticos y comprobar su precisión, se obtienen estos desplazamientos a través de simulación. Cabe destacar, que el eje de coordenadas situado en el software tiene sentido y dirección distinta al empleado en los ensayos anteriores. Por ello, el desplazamiento vertical de este sería respecto al eje Z y el desplazamiento horizontal sería respecto al eje Y.

- **Deformación direccional Horizontal.**

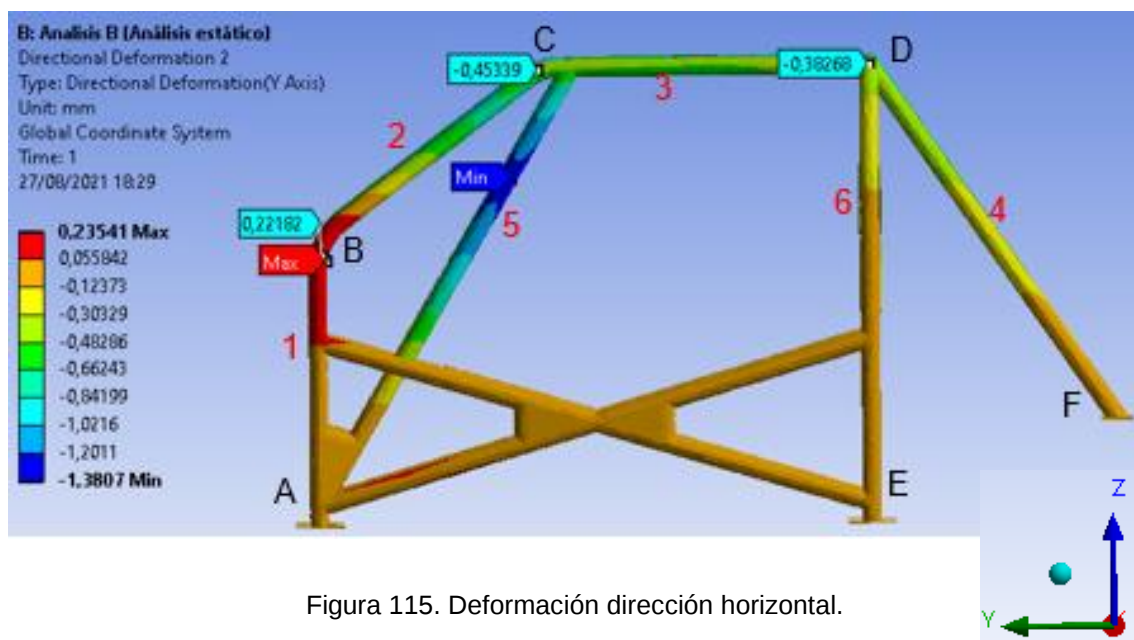


Figura 115. Deformación dirección horizontal.

En la Figura 115, se representa el desplazamiento horizontal producido en los nodos, siendo estos inferiores a 1 mm.

La carga en este ensayo se aplica sobre el semiarco lateral en los tres ejes de coordenadas sobre el nodo C. Se puede observar como el desplazamiento horizontal del nodo C es el mayor de todos, siendo este negativo hacia la derecha. Sin embargo, este desplazamiento horizontal disminuye en el nodo D, debido al esfuerzo provocado por la barra 4 en sentido contrario al desplazamiento. Por lo tanto, en este caso se puede observar la funcionalidad de dicha barra.

El nodo B tiene un desplazamiento menor al resto, que se debe al esfuerzo producido por la barra 5 y por los refuerzos como pueden ser los de las puertas.

Se debe tener en cuenta que se representan los desplazamientos con un signo distinto a los resultados anteriores porque el eje Y se encuentra en sentido contrario.

- **Deformación direccional Vertical.**

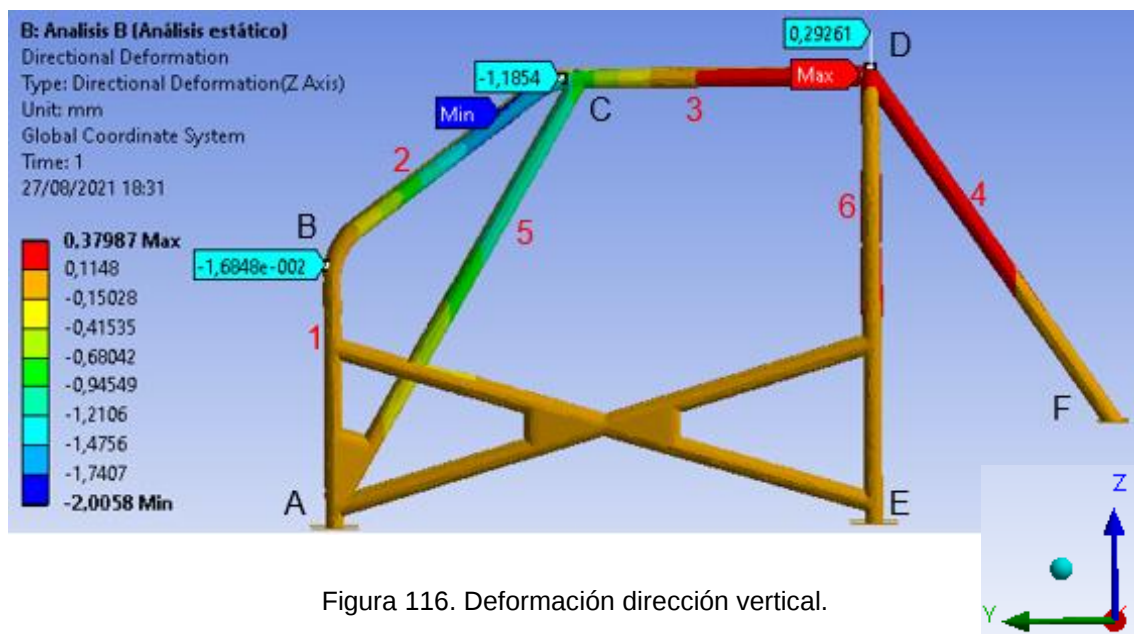


Figura 116. Deformación dirección vertical.

En cuanto al desplazamiento producido en el eje vertical, se encuentra representado en la Figura 116. Cabe señalar, que el desplazamiento de todos ellos está alrededor de 1 mm.

El desplazamiento del nodo B puede volver a no ser considerado, ya que, ese desplazamiento frente al resto es insignificante. El desplazamiento del nodo C era de esperar que fuera el mayor de los tres, debido a que la carga de este ensayo es aplicada sobre este. Por otro lado, el desplazamiento del nodo D es menor al nodo anterior debido a los refuerzos del arco principal y el travesaño trasero, barra 4.

A continuación, mostraremos la tensión equivalente de Von Mises y la zona en la que se produce mayor tensión.

- **Tensión de Von Mises**

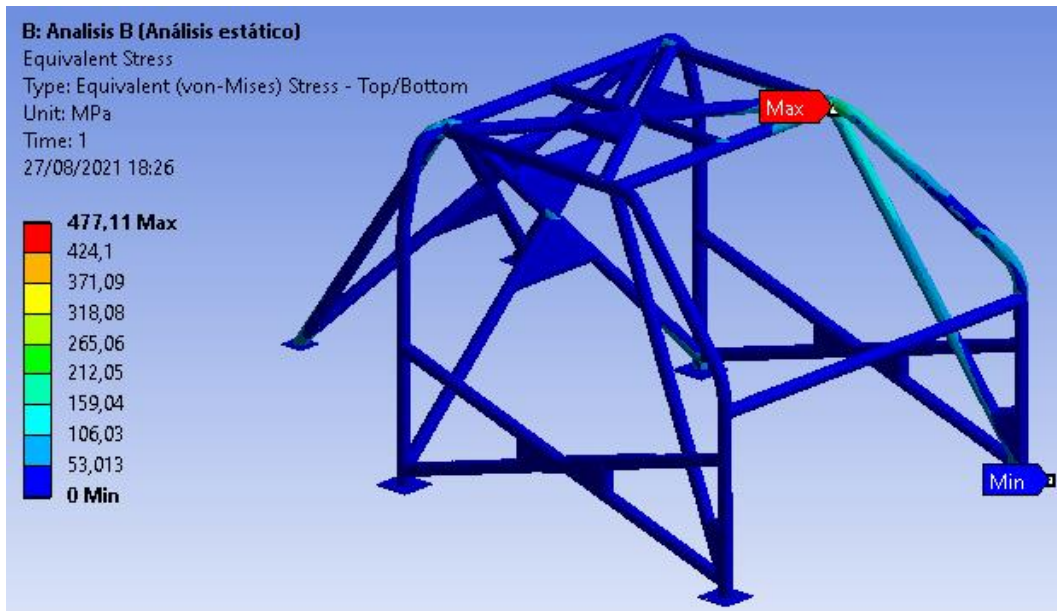


Figura 117. Tensión de Von Mises.

En cuanto a la tensión máxima generada, Figura 117, es producida en la zona de aplicación de la carga, en concreto, la unión del semiarco lateral con el travesaño longitudinal. Esto es debido a las concentraciones de tensiones en esas zonas de unión. Se puede visualizar con mayor detalle en la Figura 118.

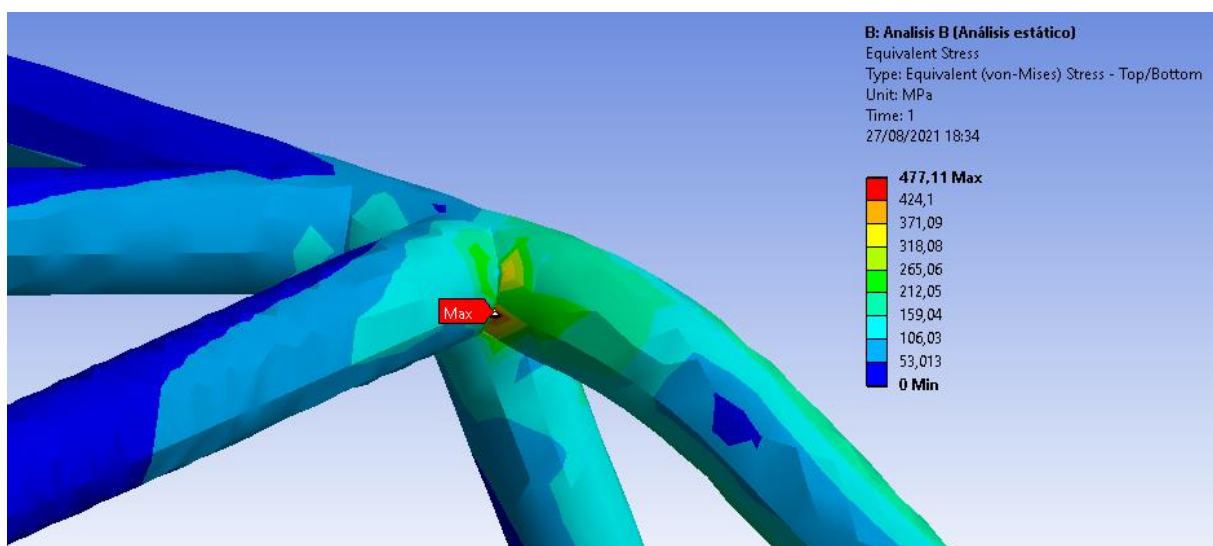


Figura 118. Zona máxima Tensión.

La tensión máxima producida es de unos 477,11 MPa, siendo este inferior al límite de rotura que es 700 MPa. Por lo tanto, esta estructura se encontraría dentro de los límites establecidos, cumpliría tanto la deformación como la tensión máxima producida, siendo estos menores a lo exigido.

6.4. Cálculo teórico Ensayo A, método de elementos finitos, con estructura optimizada

En este apartado, se llevará a cabo el análisis estático virtual referente al Ensayo A con estructura optimizada. Este software se encarga de representar las deformaciones y tensiones en las que se puede encontrar la geometría. Estos resultados de deformación serán llevados a un análisis comparativo junto con los obtenidos en el estudio analítico. Además, la tensión de Von Mises se tiene que impedir superar el límite de rotura del material.

La carga aplicada en este caso sobre el arco principal si podría colocarse de manera distribuida a lo largo de este, Figura 119, siendo esta:

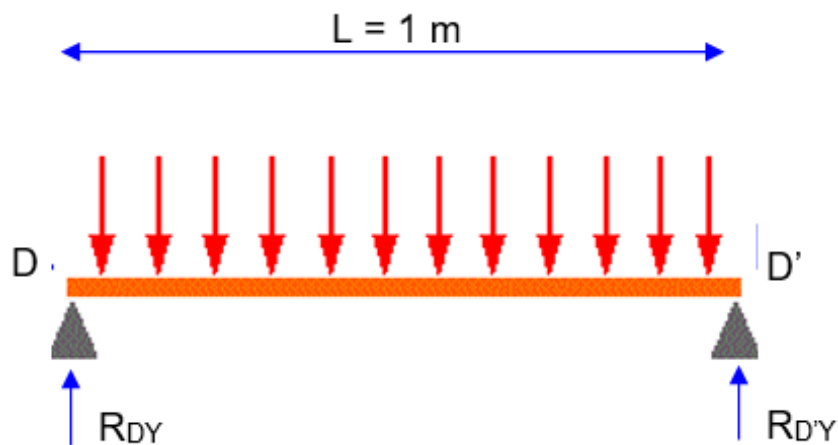


Figura 119. Distribución de la carga en el arco principal eje z.

$$F = 75 \frac{N}{kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Una vez colocada dicha fuerza sobre la estructura, se tendría que colocar los soportes fijos de esta. Estos apoyos fijos serían 6, según las condiciones de contorno del problema, Figura 120.

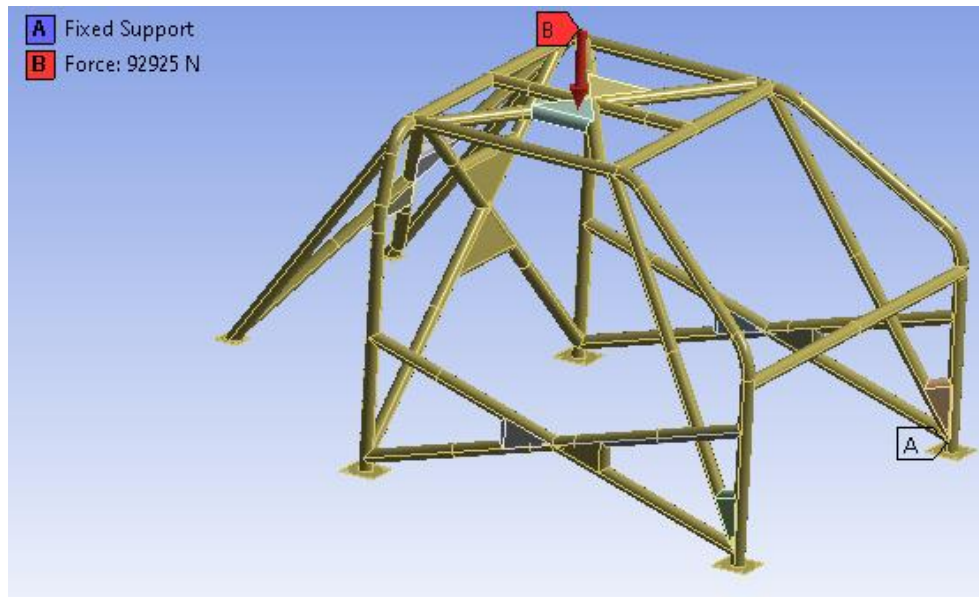


Figura 120. Fuerza distribuida y soportes fijos.

6.4.1. Resultados

Se comienza tratando las deformaciones obtenidas tanto las totales como direccionales.

- **Deformación total.**

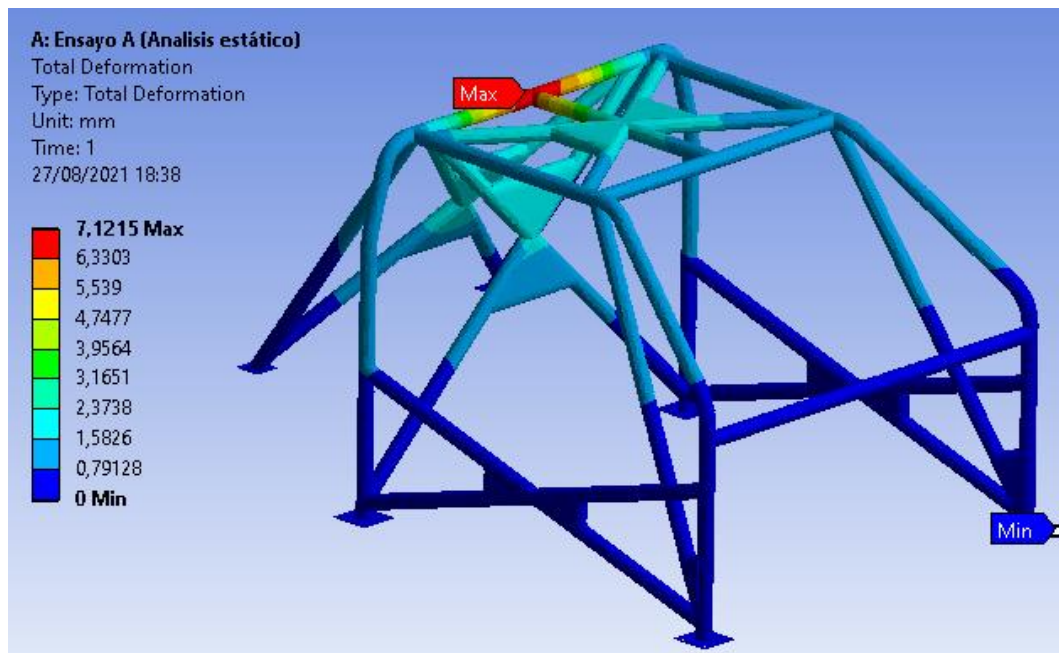


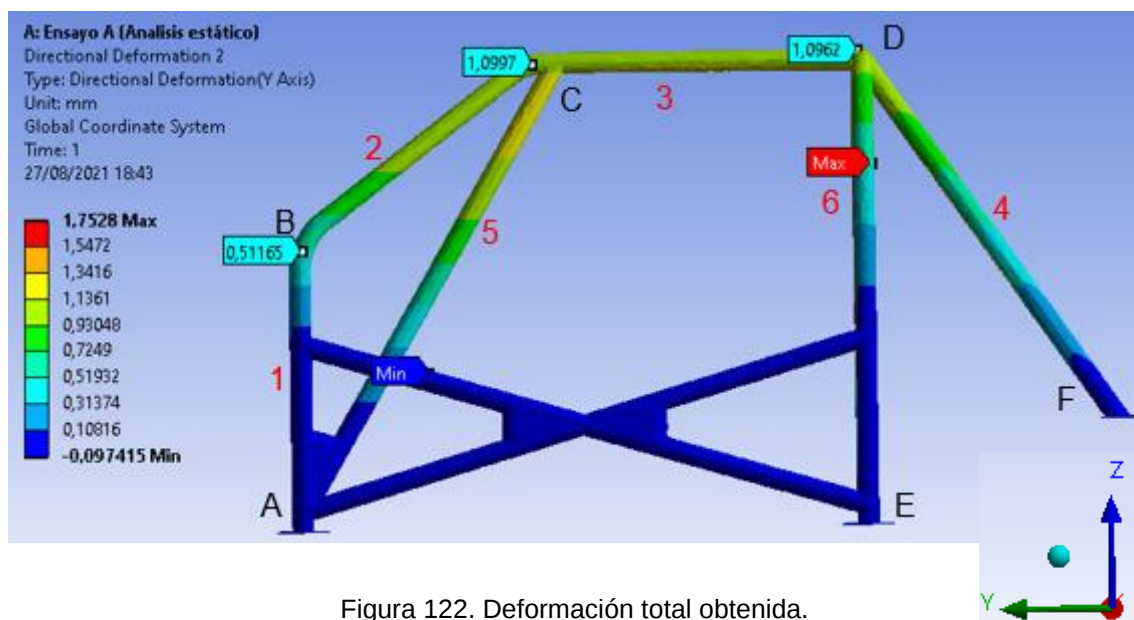
Figura 121. Deformación total obtenida.

En la Figura 121, se puede observar la deformación producida por esta carga a lo largo del arco principal. La máxima deformación se encuentra en el centro de dicha barra siendo esta de 7,12 mm. Se puede destacar que las deformaciones producidas son mayores al ensayo anterior, esto es debido a la reducción del perfil de estos tubos. Al tener menor sección la resistencia que pueden llegar a soportar es menor. Cabe destacar, que se puede observar como esa deformación disminuye conforme se desciende por la estructura gracias a los colores mostrados en la figura anterior.

Esta estructura se podría considerar como válida debido a que la máxima deformación obtenida es menor a 50 mm que era lo que exigía la norma.

Por otro lado, para poder contrastar los resultados obtenidos en los ensayos analíticos y comprobar su precisión, se obtienen estos desplazamientos a través de simulación. Cabe destacar, que el eje de coordenadas situado en el software tiene sentido y dirección distinta al empleado en los ensayos anteriores. Por ello, el desplazamiento vertical de este sería respecto al eje Z y el desplazamiento horizontal sería respecto al eje Y.

- **Deformación direccional Horizontal.**



En la Figura 122, se representa el desplazamiento horizontal producido en los nodos que anteriormente se han estudiado. Estos desplazamientos se encuentran alrededor a 1 mm. En general, estos desplazamientos son mayores al ensayo anterior por la reducción del perfil.

La carga en este ensayo esta aplicada sobre el arco principal, en dirección perpendicular al plano YZ pasando por el nodo D. Se puede observar como la barra 4 hace que el nodo C se desplace en mayor medida, pero esto es debido al esfuerzo realizado por esta barra. También, esta barra impide en la medida de lo posible el desplazamiento del arco principal. Sin embargo, el desplazamiento horizontal del nodo B es menor a los anteriores. Esto es debido al esfuerzo producido por la barra 5.

Se debe tener en cuenta que se representan los desplazamientos con signo contrario a los resultados anteriores, ya que, el eje Y se encuentra en sentido inverso.

- **Deformación direccional Vertical.**

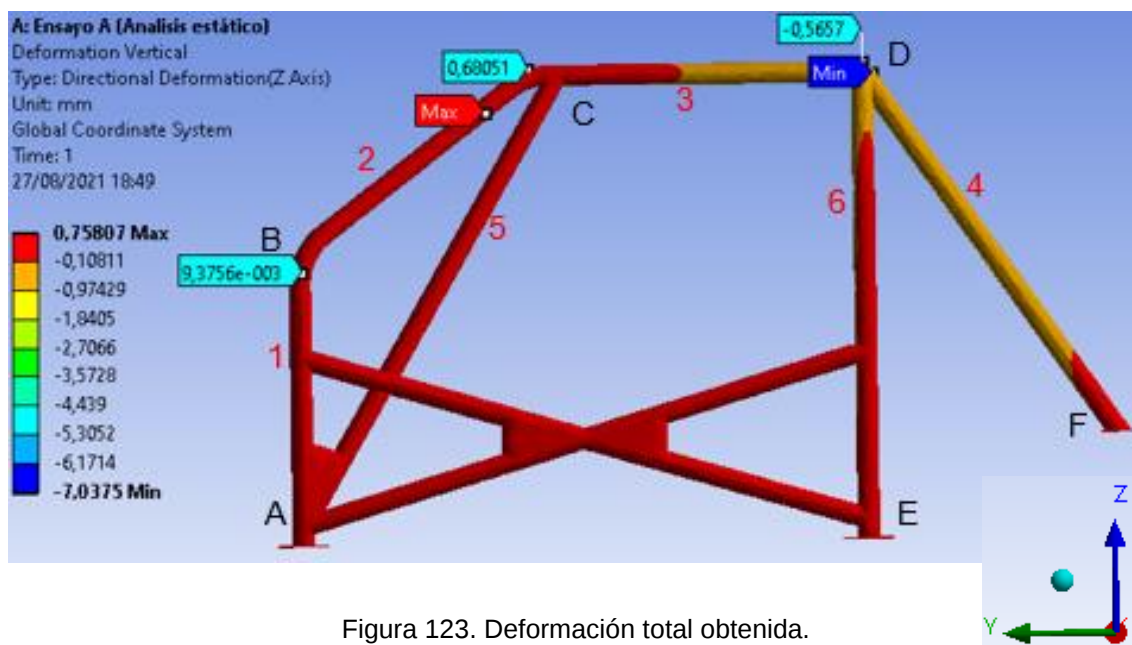


Figura 123. Deformación total obtenida.

En cuanto al desplazamiento producido en el eje vertical, se representa en la Figura 123. Cabe destacar, que este desplazamiento es menor a 1 mm en todos ellos.

El desplazamiento del nodo B puede ser no considerado porque este desplazamiento frente al resto sería insignificante. También, el desplazamiento producido en el nodo D es negativo debido al sentido de la aplicación de la carga, e incluso es menor que el desplazamiento horizontal por el esfuerzo ejercido por la barra 4. Por lo tanto, el desplazamiento del nodo C intermedio es positivo provocado por la barra 4 que hace un esfuerzo hacia la izquierda y la barra 5 que desplaza este nodo en sentido positivo.

A continuación, se muestra la tensión equivalente de Von Mises y la zona en la que se produce mayor tensión.

- **Tensión de Von Mises**

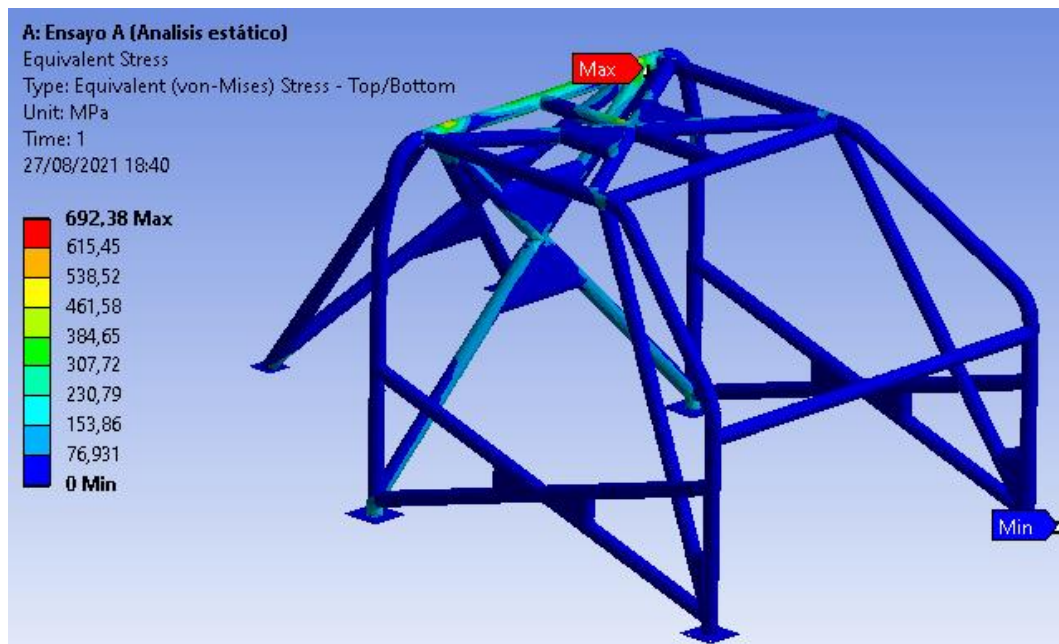


Figura 124. Tensión de Von Mises.

En cuanto a la tensión máxima de Von Mises, Figura 124, es producida en la unión de los refuerzos del arco principal con él mismo, debido a las concentraciones de tensiones en esas zonas de unión. Se puede visualizar con mayor detalle en la Figura 125.

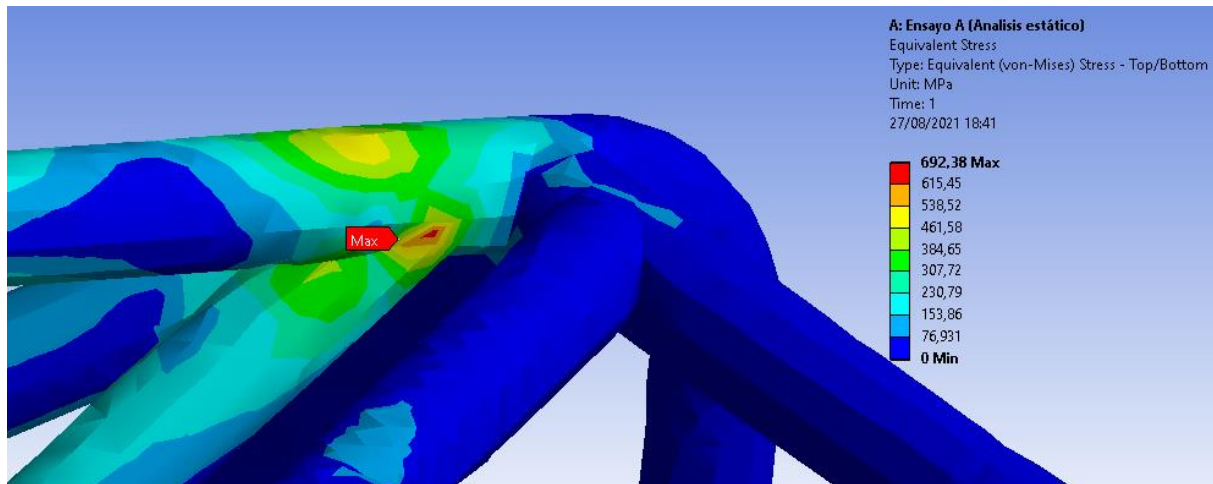


Figura 125. Zona máxima Tensión.

La tensión máxima producida es de unos 692,38 MPa, siendo este inferior al límite de rotura que es 700 MPa. Por lo tanto, esta estructura se encontraría dentro de los límites establecidos, cumpliría tanto la deformación como la tensión máxima producida al ser menor de lo exigido.

6.5. Cálculo teórico Ensayo B, método de elementos finitos, con estructura optimizada

En este apartado, se llevará a cabo el análisis estático virtual referente al Ensayo B con estructura optimizada. Este software se encarga de representar las deformaciones y tensiones en las que se puede encontrar la geometría. Estos resultados de deformación serán llevados a un análisis comparativo junto con los obtenidos en el estudio analítico. Además, la tensión de Von Mises se tiene que superar el límite de rotura del material.

La carga aplicada en este caso sobre el semiarco lateral del conductor si podría considerarse tridimensional, ya que, empleamos la estructura completa. Por lo tanto, esta sería:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg) \rightarrow F_B (N) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Siendo W:

$$W = \text{peso del vehiculo}(kg) + 160 \text{ kg} = 1089kg + 160kg = 1249 \text{ kg}$$

$$F_B = 35 \text{ N/kg} \cdot 1249 \text{ kg} = 43715 \text{ N} = 43,7 \text{ kN}$$

Esta carga se encontraba girada respecto al eje longitudinal un ángulo de 5° y con respecto al eje transversal un ángulo de 25° , Figura 126 y Figura 127.

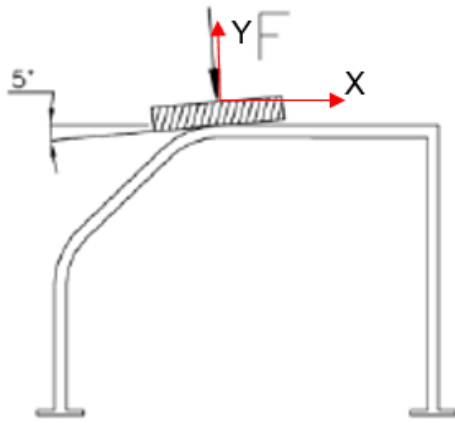


Figura 126. Eje longitudinal.

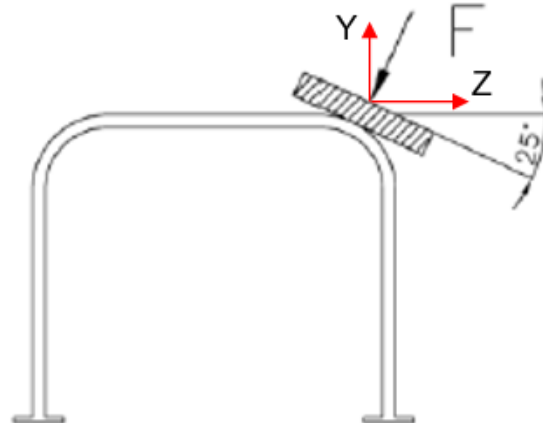


Figura 127. Eje Transversal.

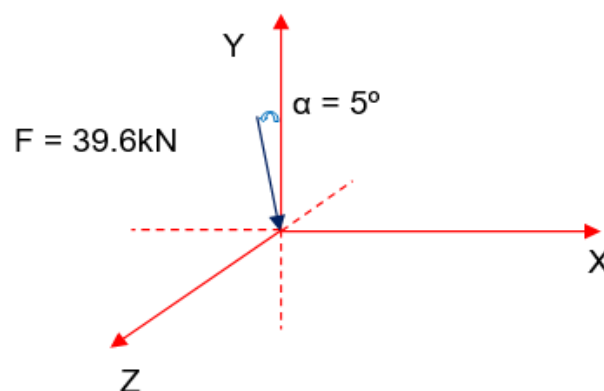
Primeramente, para trasladar la fuerza al plano XY de este problema tenemos primero que multiplicar esa fuerza por el coseno de 25° porque es el ángulo que se encuentra rotado en el plano ZY.

$$F = 43,7 \text{ N} \cdot \cos 25^\circ = 39,6 \text{ kN}$$

La fuerza que actuaría en dirección al eje Z, sería:

$$F_Z = 43,7 \text{ N} \cdot \sin 25^\circ = 18,4 \text{ kN}$$

Después esta fuerza la multiplicamos por su respectivo ángulo para poder trasladarla la dirección del eje X e Y:

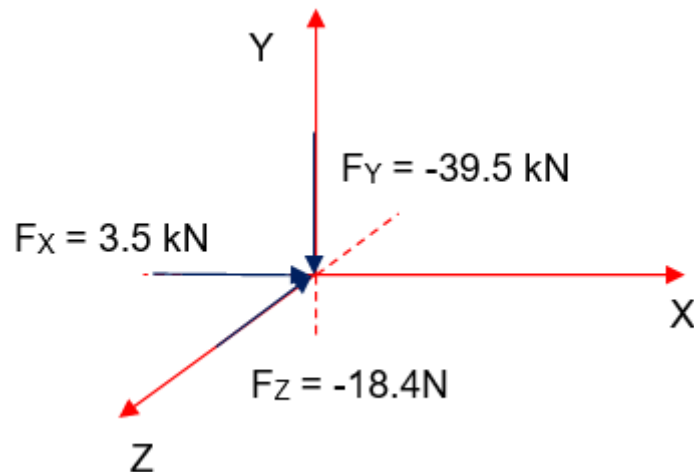


Para calcular el esfuerzo generado en estos ejes, sería de la siguiente manera:

$$F_X = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \operatorname{sen} 5^\circ = 3,4 \text{ kN}$$

$$F_Y = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ = -39,5 \text{ kN}$$

Obteniendo una distribución de la fuerza de la siguiente manera:



Una vez colocada dicha fuerza sobre la estructura, se tendría que colocar los soportes fijos de esta. Estos apoyos fijos serían 6, según las condiciones de contorno del problema. Véase Figura 128.

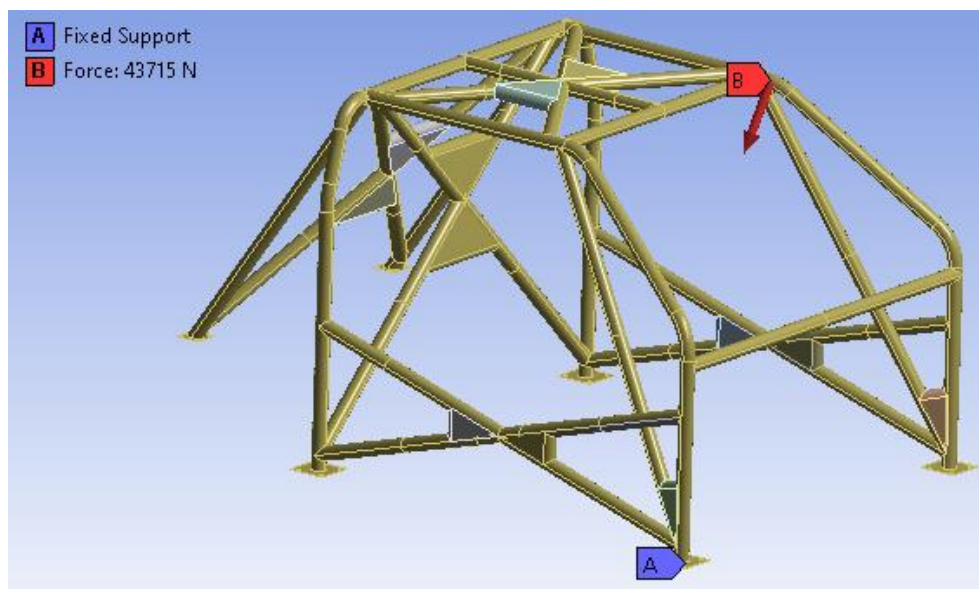


Figura 128. Fuerza tridimensional y soportes fijos.

6.5.1. Resultados

Se comienza tratando las deformaciones obtenidas tanto totales como direccionales.

- **Deformación total.**

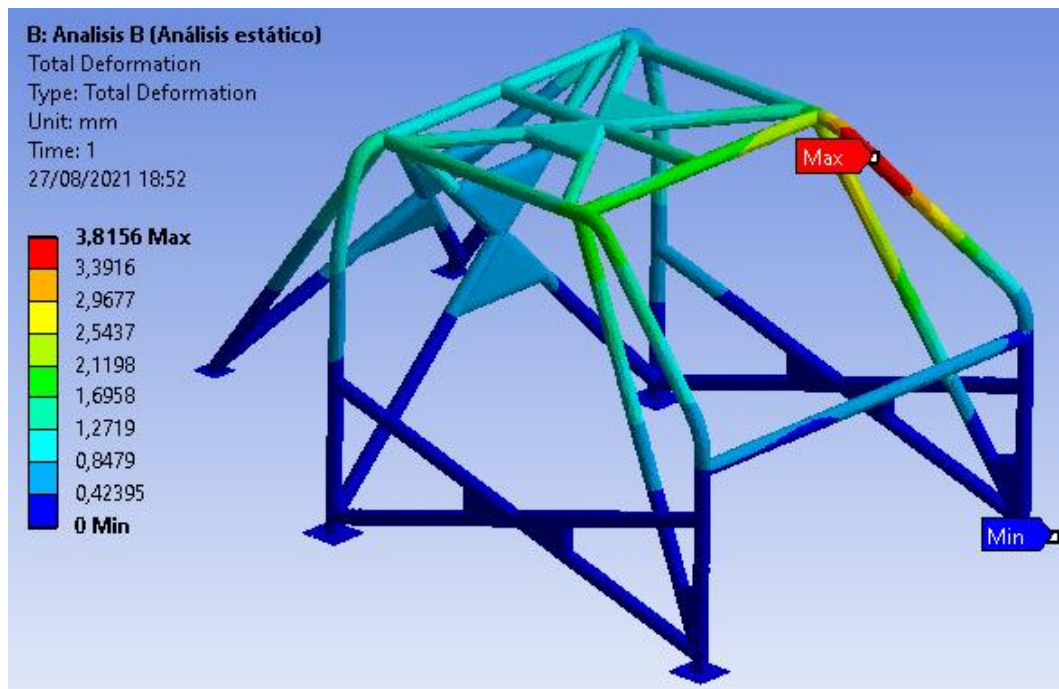


Figura 129. Deformación total obtenida.

En la Figura 129, se puede observar la deformación producida por dicha carga tridimensional aplicada en el semiarco lateral. La máxima deformación se encuentra en la zona de aplicación de la carga siendo esta de 3,81 mm. Se puede destacar como las deformaciones producidas son mayores al ensayo anterior, esto es debido a la reducción del perfil de estos tubos. Al tener menor sección la resistencia que pueden llegar a soportar es menor. Cabe destacar, como se puede observar la distribución de la deformación a lo largo de la barra 5, refuerzo del parabrisas, y los refuerzos del techo.

Esta estructura se podría considerar como válida debido a que la máxima deformación obtenida es menor a 100 mm que era lo que exigía la normativa.

Por otro lado, para poder contrastar los resultados obtenidos en los ensayos analíticos y comprobar su precisión, se obtienen estos desplazamientos a través de simulación. Cabe destacar, que el eje de coordenadas situado en el software tiene sentido y dirección distinta al empleado en los ensayos anteriores. Por ello, el desplazamiento vertical de este sería respecto al eje Z y el desplazamiento horizontal sería respecto al eje Y.

- **Deformación direccional Horizontal.**

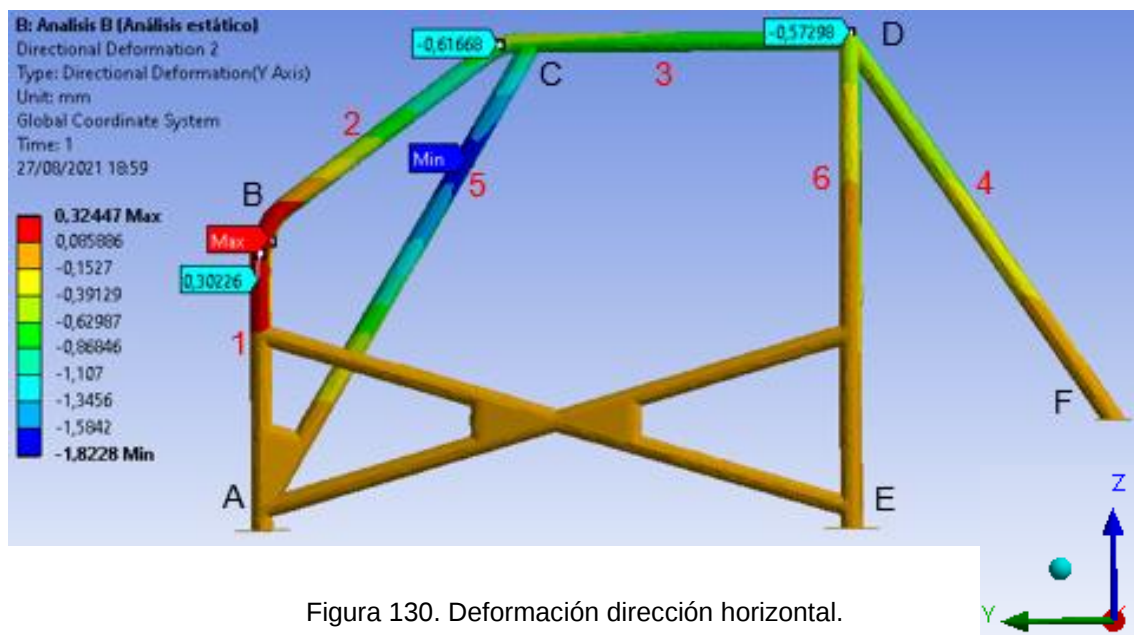


Figura 130. Deformación dirección horizontal.

En la Figura 130, se representa el desplazamiento horizontal producido en los nodos. Estos desplazamientos se encuentran alrededor de 1 mm. En general, éstos son mayores al ensayo anterior por la reducción del perfil.

La carga en este ensayo se aplica sobre el semiarco lateral en los tres ejes de coordenadas sobre el nodo C. Se puede observar como el desplazamiento horizontal del nodo C es el mayor de todos, siendo este negativo hacia la derecha. Sin embargo, este desplazamiento horizontal disminuye en el nodo D, debido al esfuerzo provocado por la barra 4 en sentido contrario al desplazamiento. Por lo tanto, en este caso se puede observar la funcionalidad de dicha barra.

El nodo B tiene un desplazamiento menor al resto, pero esto es debido al esfuerzo producido por la barra 5 y además de los refuerzos como pueden ser los de las puertas.

Se debe tener en cuenta que se representan los desplazamientos con un signo distinto a los resultados anteriores porque el eje Y se encuentra en sentido contrario.

- **Deformación direccional Vertical.**

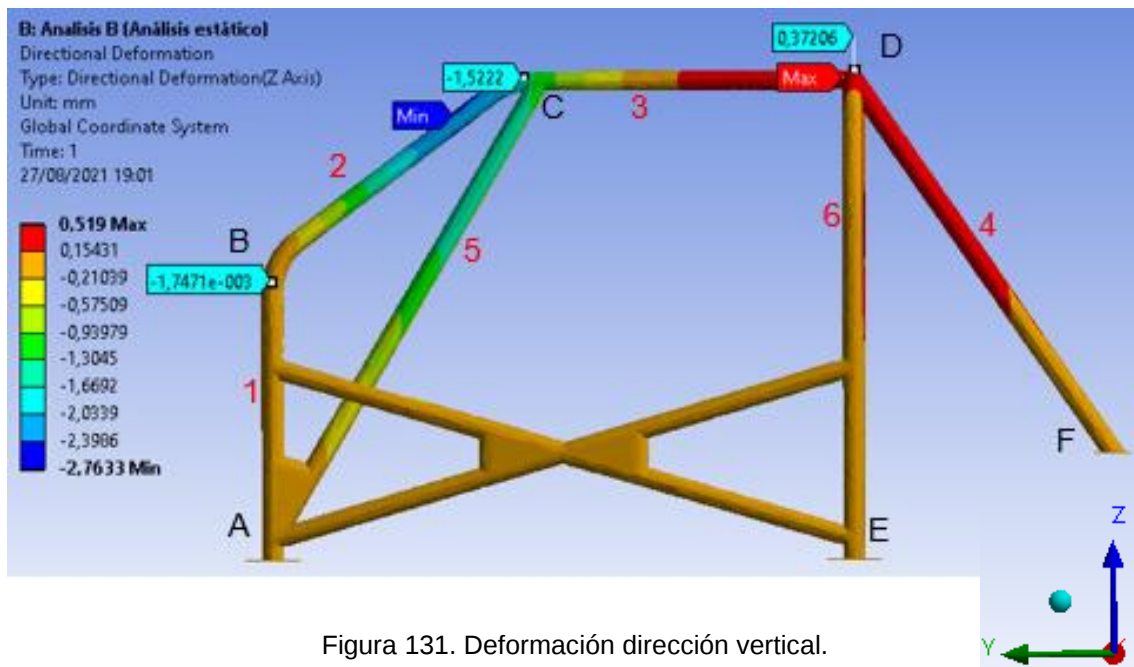


Figura 131. Deformación dirección vertical.

En cuanto al desplazamiento producido en el eje vertical, se encuentra representado en la Figura 131. Cabe señalar, que el desplazamiento de todos ellos está alrededor de 1 mm.

El desplazamiento del nodo B puede volver a no ser considerado, ya que, ese desplazamiento frente al resto es insignificante. El desplazamiento del nodo C era de esperar que fuera el mayor de los tres, debido a que la carga de este ensayo es aplicada sobre éste. Por otro lado, el desplazamiento del nodo D es menor al nodo anterior debido a los refuerzos del arco principal y el travesaño trasero, barra 4.

A continuación, mostraremos la tensión equivalente de Von Mises y la zona en la que se produce mayor tensión.

- **Tensión de Von Mises**

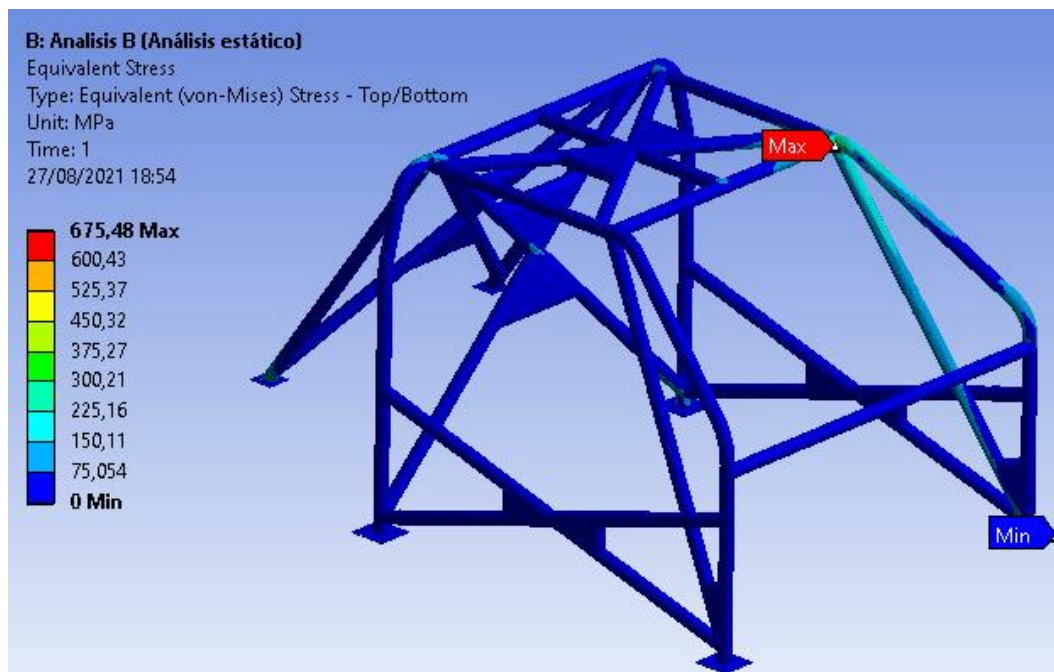


Figura 132. Tensión de Von Mises.

En cuanto a la tensión máxima generada, Figura 132, es producida en la zona de aplicación de la carga, en concreto, la unión del semiarco lateral con el travesaño longitudinal. Esto es debido a las concentraciones de tensiones en esas zonas de unión. Se puede visualizar con mayor detalle en la Figura 133.

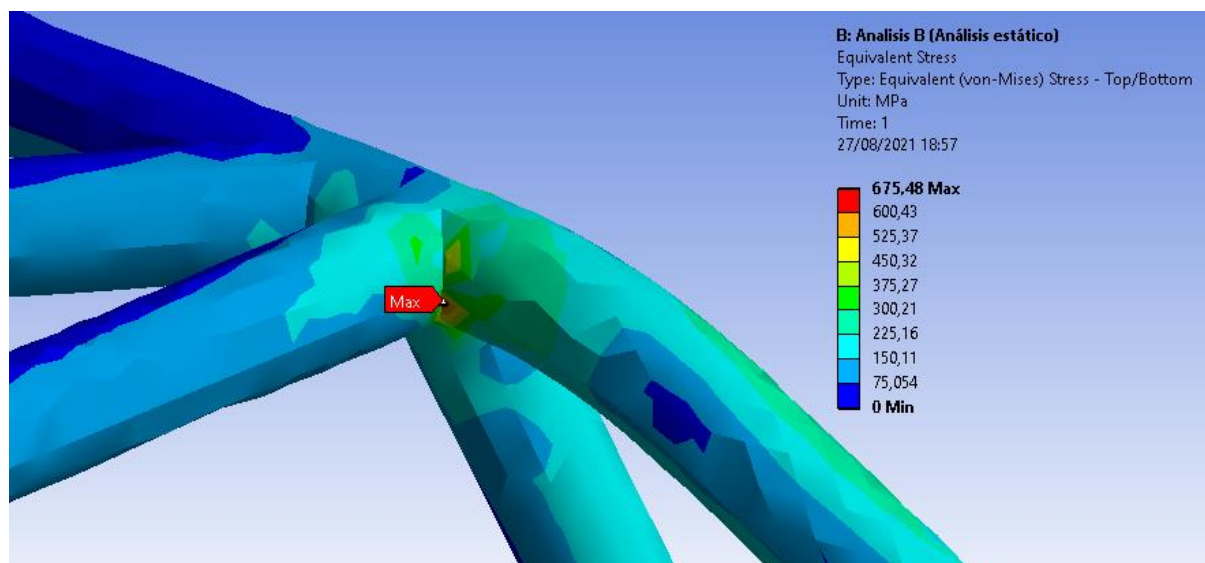


Figura 133. Zona máxima Tensión.

La tensión máxima producida es de unos 675,48 MPa, siendo este inferior al límite de rotura que es 700 MPa. Por lo tanto, esta estructura se encontraría dentro de los límites establecidos, cumpliría tanto la deformación como la tensión máxima producida al ser menor de lo exigido.

7. Análisis comparativo resultados analíticos vs resultados teóricos

En este apartado se lleva a cabo un análisis comparativo de todos los resultados obtenidos en los ensayos realizados a lo largo de este proyecto habiendo empleado el método matricial como análisis analítico y el software de ANSYS 18.1 como análisis virtual.

Todos estos resultados serán contrastados a continuación mediante comparativa con sus correspondientes valores al otro método de cálculo, es decir, los datos obtenidos con el método matricial con los obtenidos mediante el método de elementos finitos con el software de ANSYS. Teniendo en cuenta que se ha empleado una estructura sin optimizar para los dos primeros ensayos y la misma estructura, pero tras su estudio de optimización, para los dos últimos ensayos. Por lo tanto, se entiende que no obtienen los mismos resultados en ambos métodos debido a que no se estudia la misma estructura, pero se pretende obtener unas conclusiones referentes a las consideraciones tomadas anteriormente mostrando el error generado en estas suposiciones y poder estudiarlo.

7.1. Análisis comparativo Ensayo A con estructura sin optimizar

Este análisis comparativo es realizado anterior al proceso de optimización topológica empleando para ello el Ensayo A. Para ello se ha estudiado la aplicación de una carga vertical distribuida a lo largo de la zona horizontal del arco principal.

Por un lado, para llevar a cabo esta resolución mediante el método matricial se realizó una simplificación empleando una parte de nuestra estructura, siendo esta la parte lateral del conductor. Los refuerzos laterales fueron eliminados para reducir el problema, obteniendo una estructura plana en 2D. La carga aplicada era una fuerza puntual sobre la parte vertical que descendía del arco principal como bien se ha detallado en los apartados anteriores. Por otro lado, para la resolución mediante

elementos finitos se empleaba la estructura en 3D, considerando las acciones de todas las barras y aplicando la carga distribuida a lo largo de toda ella.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para el método analítico y método de elementos finitos, también se representa la diferencia que existe entre ambos métodos empleados junto con el error generado entre ambos:

	Analítico (mm)	FEM (mm)	Diferencia (mm)	Error (%)
U _{BX}	0,370	0,387	0,018	4,59
U _{BY}	0,001	0,018	0,017	97,16
U _{CX}	0,580	0,775	0,195	25,15
U _{CY}	0,304	0,492	0,188	38,21
U _{DX}	0,583	0,692	0,109	15,74
U _{DY}	0,419	0,376	0,043	11,32

Tabla 27. Matriz comparativa deformación producida Analíticamente vs ANSYS

En esta Tabla 27, se recogen los valores obtenidos para este Ensayo A con estructura sin optimizar realizado mediante el método matricial y el método de elementos finitos. Se han colocado todos los valores obtenidos alterando su signo debido a que los ejes de coordenadas de ambos métodos no mantienen el mismo sentido ni orientación.

Estos resultados obtenidos en ambos ensayos son relativamente similares, con un error menor al 100%, aunque cabe destacar que las soluciones obtenidas mediante el programa de ANSYS son más precisas al emplear la estructura al completo. El nodo D sigue siendo en ambos métodos el más solicitado debido a que en dicho punto o nodo es aplicada la carga comentada anteriormente, en el caso del método matricial una carga puntual y en el caso del método de elementos finitos una carga distribuida aplicada a lo largo de toda la barra. El desplazamiento horizontal de este nodo D sigue siendo mayor al vertical, siendo el error también cometido mayor. Este desplazamiento es debido al esfuerzo que proporciona la barra 4 impidiendo en la medida de lo posible que se desplace el arco principal.

La máxima diferencia entre ambos métodos se puede observar en el desplazamiento horizontal del nodo C siendo este nodo desplazado horizontalmente por el nodo D que es donde se aplica la carga. En el caso del método matricial es

menor ese desplazamiento, pero en el método de elementos finitos ocurre lo contrario debido a la precisión obtenida con este software.

Sin embargo, el máximo error obtenido se encuentra en el desplazamiento vertical del nodo B, esto es debido a que al recogerse dichos valores con ANSYS son orientativos, ya que no se encuentra con una zona recta que intercepta una barra con otra, sino que se tiene un radio de curvatura, por lo tanto, ese error puede haber sido producido al seleccionar un nodo cualquiera de nuestra malla localizado en torno a esa zona estudiada. El error cometido en el desplazamiento horizontal de éste es el más grande, pero los valores obtenidos en ambos métodos son similares. Mediante el método FEM es algo mayor pero debido a que el desplazamiento del nodo C horizontal es también superior, por ello el desplazamiento horizontal del nodo B se ve incrementado por esta razón.

7.2. Análisis comparativo Ensayo B con estructura sin optimizar

Este segundo análisis comparativo es realizado también anterior al proceso de optimización topológica empleando para ello el Ensayo B. Para ello se estudia la aplicación de una carga puntual tridimensional sobre el arco lateral de la estructura (lado del conductor).

Para llevar a cabo el desarrollo mediante el método matricial, se realizó una simplificación empleando una parte de esta, siendo la parte lateral del conductor. También, los refuerzos laterales fueron eliminados para reducir el problema, obteniendo una estructura plana en 2D de esta manera la carga aplicada es una carga puntual bidimensional en el nodo C donde no se tiene en cuenta la dirección Z de esta. Por otro lado, para la resolución mediante elementos finitos se emplea la estructura en 3D considerando las acciones de las barras y aplicando este esfuerzo sobre el nodo C.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para el método analítico y método de elementos finitos, también se representa la diferencia que existe entre ambos métodos empleados junto con el error cometido:

	Analítico (mm)	FEM (mm)	Diferencia (mm)	Error (%)
U_{BX}	0,409	0,221	0,1879	84,87
U_{BY}	0,004	0,016	0,0116	72,50
U_{CX}	1,203	0,452	0,7511	166,25
U_{CY}	1,158	1,185	0,027	2,28
U_{DX}	1,055	0,382	0,6679	172,49
U_{DY}	0,299	0,292	0,0088	3,03

Tabla 28. Matriz comparativa deformación producida Analíticamente vs ANSYS

En esta otra Tabla 28 se recogen los valores obtenidos para este Ensayo B con estructura sin optimizar realizado mediante el método matricial y el método de elementos finitos. Se han colocado todos los valores obtenidos alterando su signo debido a que los ejes de coordenadas de ambos métodos no mantienen el mismo sentido ni orientación.

En este otro ensayo empleando la misma estructura al anterior, pero con distinta carga aplicada. Se puede observar de manera general como los desplazamientos producidos en el eje x de ambos ensayos son muy distintos, llegando a obtener un error del más del 100%. Esto puede ser debido a varios motivos: en el método matricial se ha llegado a eliminar la proyección en una de las direcciones, cosa que el método de elementos finitos hemos tenido en cuenta; también puede ser debido a los refuerzos en los laterales de las puertas. El objetivo de estas barras era darles rigidez a los laterales de las puertas y su función se puede ver claramente en este ensayo. Sin embargo, en cuanto al desplazamiento vertical de ambos nodos C y D los valores son similares, siendo las consideraciones tomadas en este caso validas. Exceptuando el desplazamiento vertical del nodo B donde de nuevo se encuentra una diferencia mayor. Esto puede ocurrir debido a lo comentado anteriormente donde ese error puede haber sido producido al seleccionar un nodo cualquiera de nuestra malla localizado en torno a esa zona estudiada

La máxima diferencia entre ambos métodos se encuentra en el desplazamiento horizontal del nodo C, donde se aplica la fuerza de este ensayo. Esta gran diferencia puede ser por lo comentado anteriormente, pero también se debe tener en cuenta los refuerzos que fueron colocados en la parte superior de la estructura, ayudando a que este desplazamiento sea menor. De igual manera ocurre con el desplazamiento horizontal del nodo D, siendo este la segunda máxima diferencia entre ambos

métodos. A parte de lo comentado anteriormente puede ser debido a la colocación de refuerzos tanto en el arco principal como en los travesaños traseros. Por ello, todos estos refuerzos comentados en un principio se pueden observar cómo cumplen con su funcionalidad.

El desplazamiento vertical de estos dos nodos, se puede observar cómo los valores son similares entre ambos métodos. Esto es debido a que para ambos métodos se ha tenido en cuenta la barra de refuerzo del parabrisas, impidiendo en la medida de lo posible que descienda esa zona hacia el interior del habitáculo.

La diferencia del desplazamiento horizontal del nodo B es elevada. Esto es debido a los refuerzos de las puertas e incluso gracias a la ayuda proporcionada por la barra refuerzos colocada entre ambos semiarcos laterales en la parte delantera del vehículo. Sin embargo, el desplazamiento vertical de este nodo es pequeño.

7.3. Análisis comparativo Ensayo A con estructura optimizada

Este tercer análisis comparativo es realizado posterior al proceso de optimización de espesor empleando el Ensayo A. Para ello, se aplica una carga vertical distribuida a lo largo de la zona horizontal del arco principal.

Por un lado, para llevar a cabo esta resolución mediante el método matricial se realizó una simplificación empleando una parte de nuestra estructura, siendo esta la parte lateral del conductor. Los refuerzos laterales fueron eliminados para reducir el problema, obteniendo una estructura plana en 2D. La carga aplicada era una fuerza puntual sobre la parte vertical que descendía del arco principal como bien se ha detallado en los apartados anteriores. Por otro lado, para la resolución mediante elementos finitos se empleaba la estructura en 3D, considerando las acciones de todas las barras y aplicando la carga distribuida a lo largo de toda ella.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para el método analítico y método de elementos finitos, también se representa la diferencia que existe entre ambos métodos empleados junto con el error cometido:

	Analítico (mm)	FEM (mm)	Diferencia (mm)	Error (%)
U _{BX}	0,495	0,512	0,015	2,94
U _{BY}	0,001	0,009	0,0086	92,47
U _{CX}	0,776	1,099	0,3219	29,33
U _{CY}	0,406	0,681	0,2827	41,05
U _{DX}	0,780	1,096	0,3197	29,07
U _{DY}	0,562	0,566	0,0061	1,07

Tabla 29. Matriz comparativa deformación producida Analíticamente vs ANSYS

En esta Tabla 29, se recogen los valores obtenidos para este Ensayo A con estructura sin optimizar realizado mediante el método matricial y el método de elementos finitos. Se han colocado todos los valores obtenidos alterando su signo debido a que los ejes de coordenadas de ambos métodos no mantienen el mismo sentido ni orientación.

En este tercer ensayo con la estructura optimizada, se ha reducido el espesor hasta en un 28% y consigo reducir la masa de la estructura. Las deformaciones producidas en esta estructura deberían de ser mayores a las producidas en el caso anterior, ya que, su sección al ser reducida no tendría la misma resistencia. Los valores obtenidos vuelven a ser relativamente similares, aunque en algunos de ellos como puede ser el nodo C ambos valores varían algo más, como ocurría en el caso anterior. Se puede asegurar que las soluciones obtenidas mediante el software ANSYS son más precisas al emplear la estructura al completo.

El nodo D es el más solicitado si es comparado con el nodo C, aunque en ese nodo es donde aplicábamos la carga puntual para el método matricial. Esto puede ser debido que al reducir esa sección la estructura ha transmitido esos esfuerzos mejor a lo largo de las barras. El desplazamiento horizontal del nodo D es transmitido por completo al nodo C, ocurriendo esto en ambos métodos gracias a los travesaños traseros. Ese desplazamiento horizontal en el nodo B se disminuye debido a la acción de los refuerzos laterales y del refuerzo del parabrisas. Los desplazamientos verticales de ambos, nodo C y D, son similares en ambos métodos.

El máximo error lo volvemos a encontrar de nuevo en el desplazamiento vertical del nodo B, ese error puede haber sido producido al seleccionar un nodo cualquiera de nuestra malla localizado en torno a esa zona estudiada. Pero sin embargo el desplazamiento horizontal de dicho nodo es similar

7.4. Análisis comparativo Ensayo B con estructura optimizada

Este último análisis comparativo es realizado también anterior al proceso de optimización de espesor empleando para ello el Ensayo B. Para ello se estudia la aplicación de una carga puntual tridimensional sobre el arco lateral de la estructura (lado del conductor).

Para llevar a cabo el desarrollo mediante el método matricial, se realizó una simplificación empleando una parte de esta, siendo la parte lateral del conductor. También, los refuerzos laterales fueron eliminados para reducir el problema, obteniendo una estructura plana en 2D de esta manera la carga aplicada es una carga puntual bidimensional en el nodo C donde no se tiene en cuenta la dirección Z de esta. Por otro lado, para la resolución mediante elementos finitos se emplea la estructura en 3D considerando las acciones de las barras y aplicando este esfuerzo sobre el nodo C.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para el método analítico y método de elementos finitos, también se representa la diferencia que existe entre ambos métodos empleados junto con el error cometido:

	Analítico (mm)	FEM (mm)	Diferencia (mm)	Error (%)
U _{BX}	0,536	0,302	0,234	77,48
U _{BY}	0,008	0,001	0,0067	558,33
U _{CX}	1,577	0,617	0,9605	155,77
U _{CY}	1,524	1,522	0,0016	0,11
U _{DX}	1,381	0,572	0,809	141,41
U _{DY}	0,388	0,372	0,0138	3,68

Tabla 30. Matriz comparativa deformación producida Analíticamente vs ANSYS

En esta Tabla 30 se recogen los valores obtenidos para este Ensayo A con estructura optimizada realizado mediante el método matricial y el método de elementos finitos. Se han colocado todos los valores obtenidos alterando su signo debido a que los ejes de coordenadas de ambos métodos no mantienen el mismo sentido ni orientación.

En este último caso, el estudio de optimización de espesor ha reducido el espesor y consigo la masa de la estructura. Las deformaciones producidas son mayores a las producidas en el caso anterior con la estructura base, ya que, su sección y

resistencia son menores. Se puede observar de manera general como los desplazamientos producidos en el eje X en ambos métodos son muy distintos obteniendo un error del más del 100%. Los resultados obtenidos con ANSYS son inferiores debido a la consideración de todos los refuerzos colocados. También, esta gran diferencia puede deberse a que en el método matricial no se tuvo en cuenta una de las proyecciones del esfuerzo aplicado.

La máxima diferencia se vuelve a encontrar en el desplazamiento horizontal del nodo C, donde es aplicada la fuerza de este ensayo. El desplazamiento horizontal generado en el nodo C no se transmite por completo al nodo D porque los travesaños traseros realizan un esfuerzo en sentido contrario, además contando con los refuerzos de estos y del arco principal.

El desplazamiento vertical de estos dos nodos, se puede observar cómo los valores son similares entre ambos métodos. Esto es debido a que para ambos métodos se ha tenido en cuenta la barra de refuerzo del parabrisas, impidiendo en la medida de lo posible que descienda esa zona hacia el interior del habitáculo.

La diferencia del desplazamiento horizontal del nodo B es elevada. Esto es debido a los refuerzos de las puertas e incluso gracias a la ayuda proporcionada por la barra refuerzos colocada entre ambos semiarcos laterales en la parte delantera del vehículo. Sin embargo, el desplazamiento vertical de este nodo es pequeño.

8. Conclusiones

Los objetivos planteados para este proyecto han sido cubiertos debido a que se ha conseguido una estructura o jaula de seguridad capaz de poder ser empleada e instalada en un vehículo de competición, para tal finalidad y tener la tranquilidad de que los tripulantes del vehículo se encuentran a salvo ante cualquier tipo de accidente.

El proceso de fabricación de este elemento sería producción por proyecto, siendo cada estructura fabricada a través de unas dimensiones específicas para un tipo de vehículo en especial. En este proyecto, las dimensiones tomadas han sido en base a un automóvil. Por ello, el presupuesto a realizar en este proyecto puede llegar a ser algo elevado, pero esto es debido a que una estructura tiene que realizarse por pedido dedicándole el tiempo necesario a ella, evitando cualquier tipo de error.

Esta estructura ha sido sometida a los diferentes ensayos necesarios para poder dar su aprobación, para ello se han llevado a cabo dos tipos de análisis e incluso una optimización topológica. El objetivo de esta optimización ha sido reducir el espesor en las secciones, pero de manera conjunta, manteniendo la seguridad en un principio tomada y evitar la eliminación de algún tipo de barra o refuerzo, ya que, como se ha visto en los resultados todas tienen elevada importancia sobre esta.

La masa de esta estructura no será de las estructuras más ligeras que se encuentren en el mercado, sin embargo, como se ha comprobado, aunque la estructura sea más pesada, podría ser empleada como se ha comprobado.

No obstante, es solo un prototipo que puede llegar a ser utilizado, pero se podría llegar a estudiar, mejorar y perfeccionar realizando diferentes ensayos dinámicos, como pueden ser ensayos nodales entre otros. Los cuales, pueden llegar a simular accidentes o incluso simular como esta estructura se comportaría cuando se encuentre circulando por alguna cuya trazada se encuentre en mal estado. Así, podría conseguirse una estructura más ligera y optimizada.

9. Bibliografía

4 Real Sim (s.f.). *Causas de no Linealidad En Simulaciones Mecánicas Estructurales*. 4 Real Sim. Recuperado de <https://www.4realsim.com/es/causas-de-no-linealidad-en-simulaciones-mecanicas-estructurales/> Con fecha de consulta 16/06/2021.

Aythami, A. (9 de octubre de 2012). *Sistema de frenado en competición*. Motor2000.net. Recuperado de <https://www.motor2000.net/noticia.php?N=4938> Con fecha de consulta 12/06/2021.

BirthLH (s.f.). *Longitud de Pandeo Lk y esbeltez*. BirthLH. Recuperado de https://ikastaroak.birt.eus/edu/argitalpen/backupa/20200331/1920k/es/DFM/DPM/DP_M04/es_DFM_DPM04_Contenidos/website_71_longitud_de_pandeo_lk_y_esbeltez.html Con fecha de consulta 10/08/2021.

Buscador.com (s.f.). *Método analítico*. Buscador.com. Recuperado de <https://www.buscador.com/metodo-analitico/> Con fecha de consulta 15/06/2021.

Canal Braian Gómez. (19 de abril de 2020). *Accidentes WRC 2000 - 2020* [Archivo de Vídeo]. YouTube. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=4hrYtQK9KF0> Con fecha de consulta 11/06/2021.

Comisariado Europeo del Automóvil (s.f.). *Seguridad activa y pasiva del vehículo*. CEA. Recuperado de <https://www.cea-online.es/blog/128-seguridad-activa-y-pasiva-del-vehiculo> Con fecha de consulta 09/06/2021.

Contreras Howard, L. (16 de diciembre de 2020). *La optimización topológica en la impresión en 3D*. 3D Natives. Recuperado de <https://www.3dnatives.com/es/optimizacion-topologica-10012017/> Con fecha de consulta 16/06/2021.

Eden (s.f.). *¿Qué son los gastos generales de una pyme?* Eden [Mensaje en un blog]. Recuperado de <https://www.aguaeden.es/blog/que-son-los-gastos-generales-de-una-pyme> Con fecha de consulta 04/09/2021.

El método de los elementos finitos (s.f.). *PFC: Análisis del efecto de la tensión fuera del plano en la conformabilidad de chapa metálica*. Recuperado de <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/60222/fichero/02+-+Capitulo+2.+El+metodo+de+elementos+finitos.pdf> Con fecha de consulta 15/06/2021.

El Super Hinchable (2017). *Rally: Qué es, Tipos, Desarrollo, Tipos de Tramo...* El Super Hinchable. Recuperado de <https://elsuperhinchable.com/rally-que-es/> Con fecha de consulta 09/06/2021.

Federación Internacional del Automóvil (2021). *Reglement d'homologation 2021 pour armatures de securite*. Recuperado de <https://www.rfeda.es/documents/20185/776060/RH+ES+FIA> Con fecha de consulta 14/06/2021.

Frías Valero, E. (2004). *Aportaciones al estudio de las máquinas eléctricas de flujo axial mediante la aplicación del método de los elementos finitos* (Tesis de pregrado, maestría o doctoral). Universitat Politècnica de Catalunya, España. Recuperado de <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf> Con fecha de consulta 15/06/2021.

González, M. (9 de diciembre de 2011). *Teoremas de Mohr, aplicación de la ecuación de la línea elástica*. La Guía. Recuperado de <https://fisica.laguia2000.com/dinamica-clasica/fuerzas/teoremas-de-mohr> Con fecha de consulta 09/08/2021.

Imventa.com (s.f.) *Cálculo a pandeo de barras de acero*. Imventa.com. Recuperado de <https://www.imventa.com/ayuda/ESwin/Info/PandeoAcero.htm> Con fecha de consulta 10/08/2021.

Infotaller (5 de abril de 2021). *Diez claves para calcular el precio/hora y presupuesto de una reparación*. Infotaller. Recuperado de https://www.infotaller.tv/reparacion/claves-calculer-presupuesto-precio-hora-mecanico-Serca_0_1535246494.html Con fecha de consulta 04/09/2021.

Ingemecánica (s.f.) *Prontuario de Esfuerzos y Deformaciones en Vigas*.
Ingemecánica. Recuperado de <https://ingemecanica.com/tutoriales/prontuario.html>
Con fecha de consulta 05/07/2021.

Made-in-China (s.f.). *Productos*. MAde-in-China. Recuperado de https://es.made-in-china.com/co_qilusteel/product_Factory-Price-Scm430-25crmo4-708m25-1-7218-4130-Forged-Round-Steel-Bar_rehiierrq.html Con fecha de consulta 04/09/2021.

Pirelly (2020). *Gama de Neumáticos de Rally*. Pirelly. Recuperado de <https://www.pirelli.com/tyres/es-es/competition/catalogue/rally> Con fecha de consulta 12/06/2021.

Proyecto AprendEmergencias (2020). *Sistemas de seguridad en el automóvil*.
Proyecto AprendEmergencias. Recuperado de <https://www.aprendemergencias.es/seguridad-vial/sistemas-de-seguridad-en-el-veh%C3%ADculo/> Con fecha de consulta 09/06/2021.

Rallystore.net (s.f.). *The motorsport center*. Rallystore.net. Recuperado de <https://rallystore.net/es/86-equipamiento-piloto-rally> Con fecha de consulta 12/06/2021.

Ramírez Vázquez, R. (s.f.). *Procesos de Soldadura bajo atmósfera protectora*.
Recuperado de https://www.google.com/search?q=procesos+de+soldadura+baja+atmosfera+protectora&rlz=1C1ONGR_esES951ES951&oq=procesos+de+soldadura+baja+atmosfera+protectora&aqs=chrome..69i57.14505j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8# Con fecha de consulta 07/08/2021.

Sancho, F. (16 de febrero de 2017). *La FIA 'limita' a 130 km/h a los nuevos World Rally Cars*. Motor.es. Recuperado de <https://www.motor.es/noticias/fia-limita-130-kmh-nuevos-world-rally-car-201733992.html> Con fecha de consulta 11/06/2021.

SOLIDWORKS (2017). *Análisis estático lineal*. SOLIDWORKS. Recuperado de http://help.solidworks.com/2017/spanish/SolidWorks/cworks/c_Linear_Static_Analysis.htm#:~:text=El%20an%C3%A1lisis%20est%C3%A1tico%20lineal%20calcula,el%20efecto%20de%20cargas%20aplicadas.&text=Todas%20las%20cargas%20se%20aplican,que%20alcanzan%20sus%20magnitudes%20completas. Con fecha de consulta 16/06/2021.

Top Jaula (s.f.). *Jaulas antivuelco: Importancia, tipos, funciones y más*. Top Jaula. Recuperado de <https://topjaulas.com/jaulas-antivuelco:-importancia,-tipos,-funciones-y-mas/> Con fecha de consulta 09/06/2021.

Virgamet (2021). Alloy engineering steel and high pressure boiler steel 25crmo4, 1.7218, aisi 4130 with increased strength for construction and operation at elevated temperatures. Virgamet. Recuperado de <https://virgamet.com/25hm-25crmo4-1-7218-24crmo5-20crmo4-sae-aisi-4130-alloy-steel> Con fecha de consulta 06/07/2021.

Wikipedia (s.f.). *Rally*. Wikipedia [versión electrónica]. Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Rally> Con fecha de consulta 11/06/2021.

WinTess3 (25 de mayo de 2012). Cálculo no lineal [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://blogwintess.blogspot.com/2012/05/calculo-no-lineal.html> Con fecha de consulta 16/06/2021.

ANEXOS: DOCUMENTO N°2

1. ANEXO 1: Cálculo analítico Ensayo A con estructura sin optimizar

1.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria, en el cual se indica el procedimiento realizado y los resultados obtenidos en nuestra estructura, mediante el método de la rigidez o matricial comentado anteriormente.

Este cálculo matricial constara de hallar cada una de las matrices elementales perteneciente a cada barra. Posteriormente se conseguirá la matriz global de rigidez para poder calcular todos los desplazamientos y giros de los nodos que a continuación se aclara.

Por tanto, para este cálculo analítico se emplea la estructura mostrada en la Figura 85 donde se pueden ver las 6 barras que se estudiarán.

1.2. Resolución cálculo analítico ensayo A estructura no optimizada

La realización de este ensayo lleva consigo la necesidad de detallar los nodos empleados en este análisis, incluyendo los apoyos. Después, se obtendrán sus correspondientes desplazamientos, giros y reacciones de estos.

Los nodos serán aquellos puntos donde interceptan las barras y aquellos donde las barras se apoyan al suelo, además también se enumeran las barras.

Se puede y debe hacer un estudio previo para calcular el número de grados de libertad que tendrá nuestra estructura. Conociendo este dato se podría conocer las dimensiones que tendrá la matriz global elemental de la estructura, vector desplazamientos y esfuerzos. Considerando todos los nudos rígidos tendríamos 18 grados de libertad, Figura 86.

La fuerza aplicada sobre el nodo D, sería ver Figura 134:

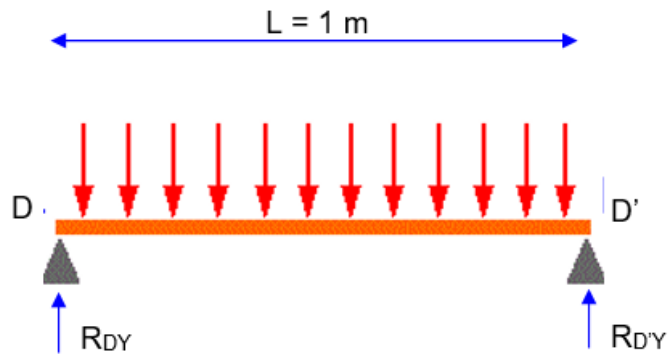


Figura 134. Distribución de la carga en el arco principal.

$$F = 75 \frac{N}{kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Ésta, sería la carga distribuida aplicada a lo largo de un metro de longitud que mide dicha barra, Figura 134. Si dicha fuerza es dividida en dos partes, ya que son dos los apoyos, siendo estos: el lateral del conductor (nodo D) y el lateral del copiloto (nodo D'). Aparece la fuerza con la que se trabajará, siendo esta:

$$R_{DY} = R_{D'Y} = 92,9 \frac{N}{m} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2} = 46,5 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el problema a resolver quedaría de la siguiente manera con dicha fuerza aplicada, los nodos y barras identificar las barras para comenzar su cálculo, Figura 135:

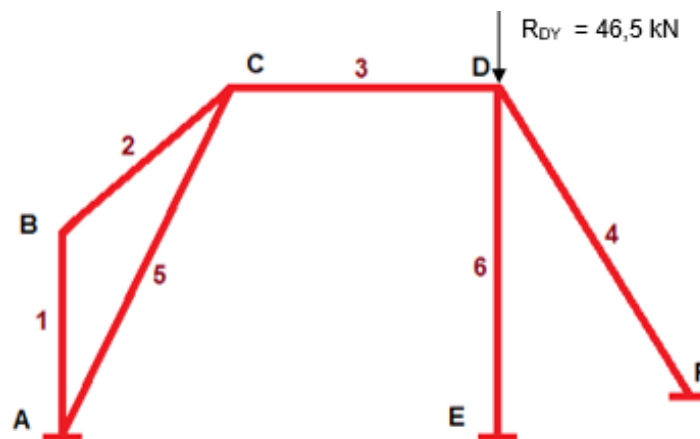


Figura 135. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede primero a realizar el cálculo de las matrices elementales de cada una de las barras. Así mismo, se detallarán los vectores de esfuerzos y desplazamientos. Finalmente empleando la expresión Ec. 1, se obtendrán las incógnitas de estos vectores.

Se detallan los datos que son comunes a todas las barras, siendo estos Tabla 31:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{DY} (kN)
5,72	11,88	21000	46,5

Tabla 31. Datos comunes a todas las barras.

Matrices elementales:

1) Barra 1 – AB - Empotrada-Empotrada:

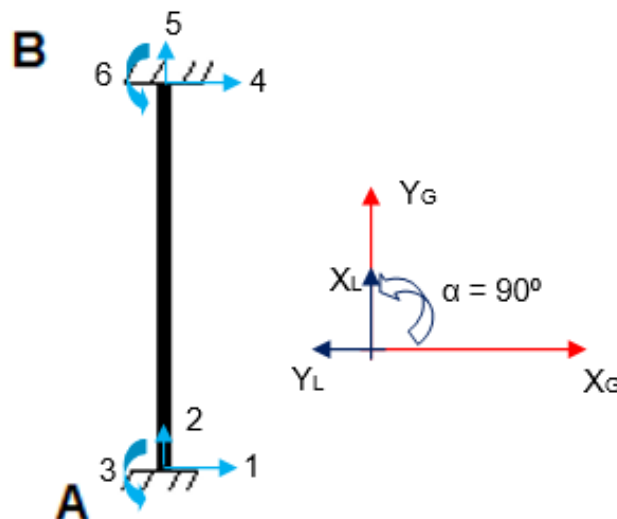


Figura 136. Barra 1 Problema.

En la Figura 136, se ha colocado la barra 1 junto con sus grados de libertad porque estos nos ayudaran posteriormente a construir la matriz global de rigidez. También se puede observar cómo los ejes locales de esta barra están girados 90° respecto de los ejes globales, por lo tanto, sería necesario emplear matriz de cambio.

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 1:

$$L_1 = 70 \text{ cm}; \quad \alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ rad}; \quad \cos 90^\circ = 0; \quad \sin 90^\circ = 1;$$

$$[k]_{G1} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz, teniendo en cuenta que el coseno tiene valor de 0 y el seno 1:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(70 cm)^3} = 8,73 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 90^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(70 cm)^2} = 305,59 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{70 cm} = 1717,67 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{70 cm} = 14260,92 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la matriz:

	1	2	3	4	5	6
1	8,73	0,00	-305,59	-8,73	0,00	-305,59
2	0,00	1717,67	0,00	0,00	-1717,67	0,00
3	-305,59	0,00	14260,92	305,59	0,00	7130,46
4	-8,73	0,00	305,59	8,73	0,00	305,59
5	0,00	-1717,67	0,00	0,00	1717,67	0,00
6	-305,59	0,00	7130,46	305,59	0,00	14260,92

Tabla 32. Matriz elemental barra 1, obtenida con Excel.

Los números que se encuentran alrededor de esta matriz, Tabla 32, muestran los grados de libertad a los que pertenece cada elemento, para después poder montar la matriz global de rigidez.

2) Barra 2 – BC - Empotrada-Empotrada:

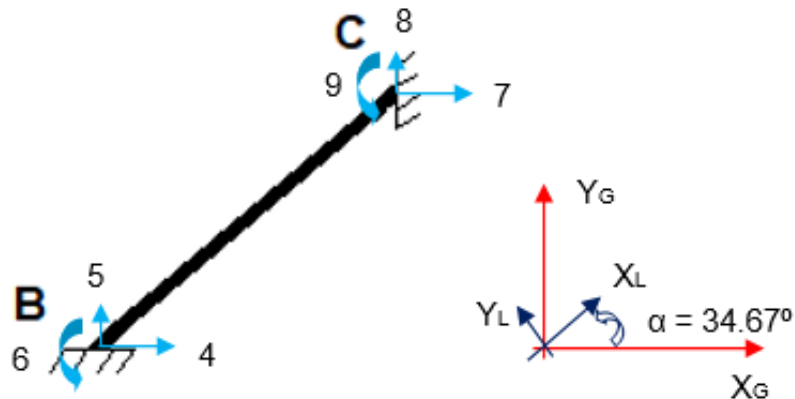


Figura 137. Barra 2 Problema.

En la Figura 137, para determinar el ángulo de giro entre los ejes locales y globales de la barra, es necesario basarse en el diseño. Para ello, se emplea la ecuación de Pitágoras y las relaciones trigonométricas, obteniendo la longitud de la barra y el ángulo rotado:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{41,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}\right) = 34,67^\circ; \quad L = \sqrt{41,5^2 + 60^2} = 72,95 \text{ cm}$$

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 2:

$$L_2 = 72,95 \text{ cm}; \quad \alpha = 34,67^\circ = 0,605 \text{ rad}; \quad \cos 34,67^\circ = 0,822; \quad \sin 34,67^\circ = 0,568;$$

$$[k]_{G2} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$X = (\cos 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{72,95 cm} + (\sin 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(72,95 cm)^3}$$

$$X = 1117,29 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$Y = (\cos 34,67^\circ) \cdot (\sin 34,67^\circ) \cdot \left(\frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{72,95 cm} - \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(72,95 cm)^3} \right)$$

$$Y = 767,46 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 34,67^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(72,95 cm)^2} = 160,04 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$W = (\sin 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{72,95 cm} + (\cos 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(72,95 cm)^3}$$

$$W = 538,54 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos 34,67^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(72,95 cm)^2} = 231,39 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{72,95 cm} = 13683,52 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la Tabla 33:

	4	5	6	7	8	9
4	1117,29	767,46	-160,04	-1117,29	-767,46	-160,04
5	767,46	538,54	231,39	-767,46	-538,54	231,39
6	-160,04	231,39	13683,52	160,04	-231,39	6841,76
7	-1117,29	-767,46	160,04	1117,29	767,46	160,04
8	-767,46	-538,54	-231,39	767,46	538,54	-231,39
9	-160,04	231,39	6841,76	160,04	-231,39	13683,52

Tabla 33. Matriz elemental barra 2, obtenida con Excel.

3) Barra 3 – CD - Empotrada-Empotrada:

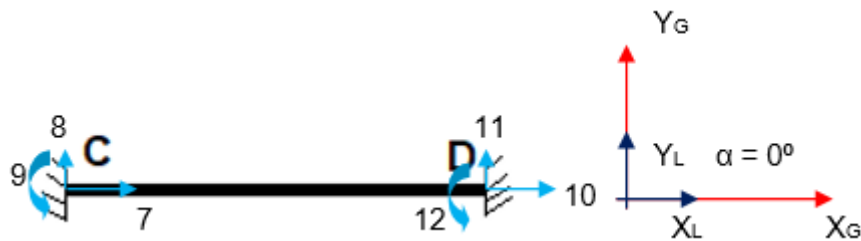


Figura 138. Barra 3 Problema.

En este caso, Figura 138, el ángulo girado sería 0 grados coincidiendo los ejes locales con los globales. Se podría no emplear la matriz de cambio, pero si se emplea se establecería el ángulo girado en 0°.

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 3:

$$L_3 = 75 \text{ cm}; \quad \alpha = 0 = 0 \text{ rad}; \quad \cos 0^\circ = 1; \quad \text{sen } 0^\circ = 0;$$

$$[k]_{G3} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz, teniendo en cuenta que el coseno tiene valor 1 y el seno 0:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\text{sen } \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\cos 0^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 5,72 \text{ cm}^2}{75 \text{ cm}} = 1603,15 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 90^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(75 cm)^2} = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\cos 0^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(75 cm)^3} = 7,10 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos 0^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(75 cm)^2} = 266,20 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{75 cm} = 13310,19 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la Tabla 34:

	7	8	9	10	11	12
7	1603,15	0,00	0,00	-1603,15	0,00	0,00
8	0,00	7,10	266,20	0,00	-7,10	266,20
9	0,00	266,20	13310,19	0,00	-266,20	6655,10
10	-1603,15	0,00	0,00	1603,15	0,00	0,00
11	0,00	-7,10	-266,20	0,00	7,10	-266,20
12	0,00	266,20	6655,10	0,00	-266,20	13310,19

Tabla 34. Matriz elemental barra 3, obtenida con Excel.

4) Barra 4 – DF - Empotrada-Empotrada:

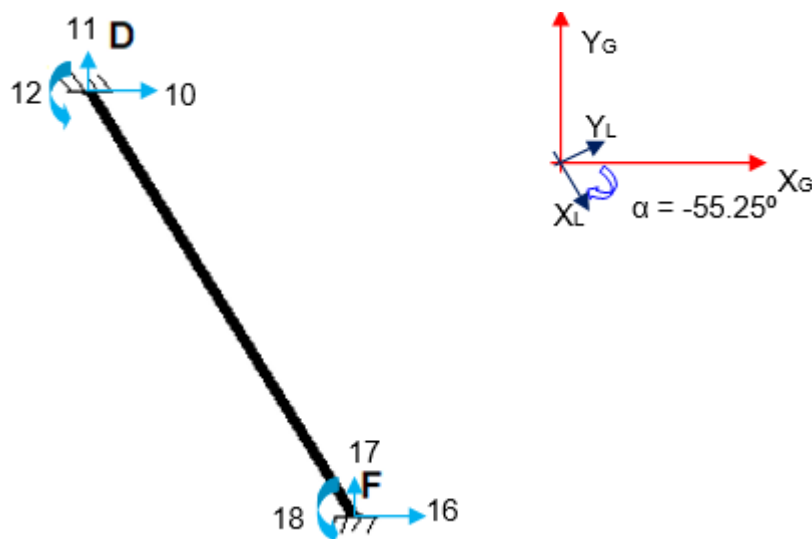


Figura 139. Barra 4 Problema.

De manera similar a la barra 2, Figura 139, los ejes de coordenadas locales se encuentran rotados un cierto ángulo respecto de los globales. En este caso ese giro tiene sentido horario siendo este negativo. Para determinar el ángulo de giro es necesario basarse en el diseño empleándose las ecuaciones vistas en el caso anterior, obteniendo:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{86,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}\right) = -55,25^\circ; L = \sqrt{86,5^2 + 60^2} = 105,27 \text{ cm}$$

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 4:

$$L_4 = 105,27 \text{ cm}; \alpha = -55,25^\circ = -0,964 \text{ rad}; \cos -55,25^\circ = 0,569; \sin -55,25^\circ = -0,821;$$

$$[k]_{G4} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$X = (\cos -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{105,27 \text{ cm}} + (\sin -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(105,27 \text{ cm})^3}$$

$$X = 372,75 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$Y = (\cos -55,25^\circ) \cdot (\sin -55,25^\circ) \cdot \left(\frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{105,27 \text{ cm}} - \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(105,27 \text{ cm})^3} \right)$$

$$Y = -533,68 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin -55,25^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(105,27 \text{ cm})^2} = -111,02 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$W = (\sin -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{105,27 cm} + (\cos -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(105,27 cm)^3}$$

$$W = 771,96 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos -55,25^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(105,27 cm)^2} = 77,01 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{105,27 cm} = 9482,69 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la Tabla 35:

	10	11	12	16	17	18
10	372,75	-533,68	111,02	-372,75	533,68	111,02
11	-533,68	771,96	77,01	533,68	-771,96	77,01
12	111,02	77,01	9482,69	-111,02	-77,01	4741,35
16	-372,75	533,68	-111,02	372,75	-533,68	-111,02
17	533,68	-771,96	-77,01	-533,68	771,96	-77,01
18	111,02	77,01	4741,35	-111,02	-77,01	9482,69

Tabla 35. Matriz elemental barra 4, obtenida con Excel.

5) Barra 5 – AC - Empotrada-Empotrada:

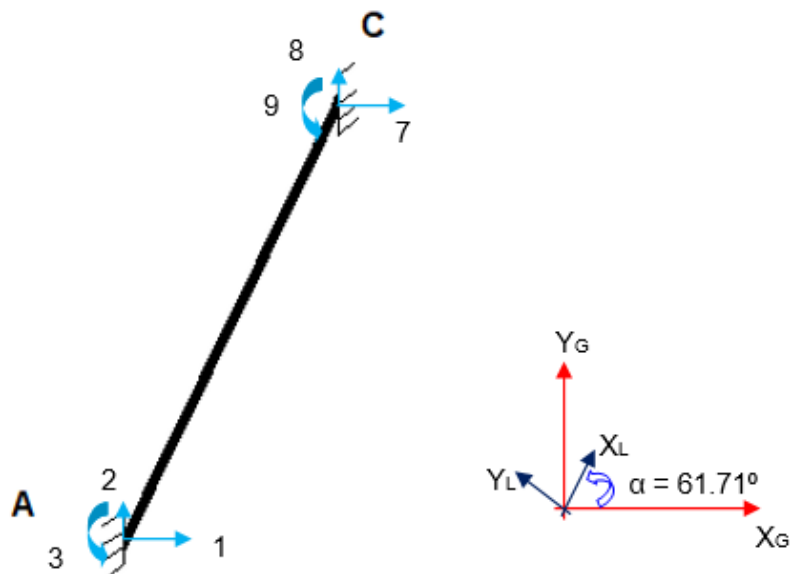


Figura 140. Barra 5 Problema.

De manera similar a los casos anteriores, Figura 140, los ejes de coordenadas se encuentran girados un cierto ángulo. En este caso ese giro tiene sentido antihorario siendo este positivo. Para determinarlo es necesario basarse en el diseño empleándose las ecuaciones vistas en el caso anterior, obteniendo:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{111,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}\right) = 61,71^\circ; \quad L = \sqrt{111,5^2 + 60^2} = 126,61 \text{ cm}$$

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 5:

$$L_5 = 126,61 \text{ cm}; \quad \alpha = 61,71^\circ = 1,07 \text{ rad}; \quad \cos 61,71^\circ = 0,473; \quad \sin 61,71^\circ = 0,880;$$

$$[k]_{G5} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$X = (\cos 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 \text{ cm}^2}{126,61 \text{ cm}} + (\sin 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(126,61 \text{ cm})^3}$$

$$X = 214,37 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$Y = (\cos 61,71^\circ) \cdot (\sin 61,71^\circ) \cdot \left(\frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 \text{ cm}^2}{126,61 \text{ cm}} - \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(126,61 \text{ cm})^3} \right)$$

$$Y = 395,64 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 61,71^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(126,61 \text{ cm})^2} = 82,25 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$W = (\sin 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{126,61 cm} + (\cos 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(126,61 cm)^3}$$

$$W = 736,70 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos 61,71^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 cm^4}{(126,61 cm)^2} = 44,26 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 cm^2}{126,61 cm} = 7884,03 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la Tabla 36:

	1	2	3	7	8	9
1	214,37	395,64	-82,25	-214,37	-395,64	-82,25
2	395,64	736,70	44,26	-395,64	-736,70	44,26
3	-82,25	44,26	7884,03	82,25	-44,26	3942,02
7	-214,37	-395,64	82,25	214,37	395,64	82,25
8	-395,64	-736,70	-44,26	395,64	736,70	-44,26
9	-82,25	44,26	3942,02	82,25	-44,26	7884,03

Tabla 36. Matriz elemental barra 5, obtenida con Excel.

6) Barra 6 – DE - Empotrada-Empotrada:

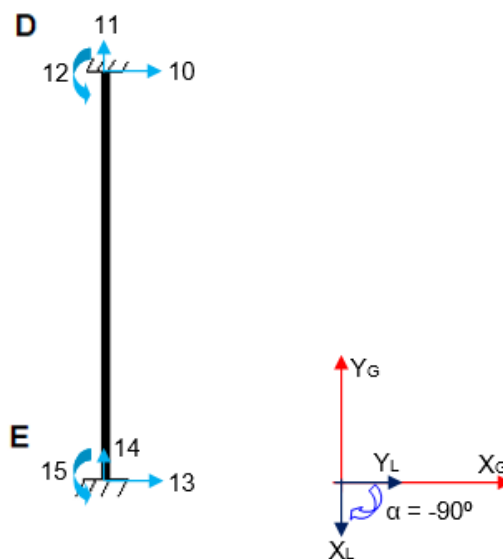


Figura 141. Barra 6 Problema.

La barra 6 de esta estructura, Figura 141, los ejes de coordenadas se encuentran girados un cierto ángulo. En este caso ese giro es de 90° en sentido horario siendo este negativo, por lo tanto, sería necesario emplear matriz de cambio.

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 6:

$$L_6 = 111.5 \text{ cm}; \quad \alpha = -90^\circ = -\frac{\pi}{2} = -1,57 \text{ rad}; \quad \cos -90^\circ = 0; \quad \sin -90^\circ = -1;$$

$$[k]_{G6} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz, teniendo en cuenta que el coseno tiene valor de 0 y el seno -1:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(111,5 \text{ cm})^3} = 2,16 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 90^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(111,5 \text{ cm})^2} = -120,44 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 \text{ cm}^2}{111,5 \text{ cm}} = 1078,36 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 5,72 \text{ cm}^2}{111,5 \text{ cm}} = 8953,04 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se introducen en la Tabla 37:

	10	11	12	13	14	15
10	2,16	0,00	120,44	-2,16	0,00	120,44
11	0,00	1078,36	0,00	0,00	-1078,36	0,00
12	120,44	0,00	8953,04	-120,44	0,00	4476,52
13	-2,16	0,00	-120,44	2,16	0,00	-120,44
14	0,00	-1078,36	0,00	0,00	1078,36	0,00
15	120,44	0,00	4476,52	-120,44	0,00	8953,04

Tabla 37. Matriz elemental barra 6, obtenida con Excel.

Una vez obtenidas cada una de las matrices elementales de cada barra, siendo estas matrices y la matriz global de rigidez iguales para cualquier tipo de ensayo. Estas matrices no dependen de los esfuerzos y desplazamientos aplicados, sino que dependen de las propiedades y geometría de las barras. Por lo tanto, estas matrices las emplearemos de nuevo para el siguiente calculo analítico.

Para construir la matriz global de rigidez, se empieza generando una matriz con las mismas dimensiones que grados de libertad se tienen, en este caso serían 18 filas y 18 columnas.

A continuación, se procede a introducir cada elemento en su correspondiente lugar. Se puede encontrar el caso de tener elementos que tengan la misma posición, ocurre cuando confluyen dos barras en un mismo nodo, en este caso los elementos de ambas matrices se sumarían. Para el caso de los nodos que confluyen una barra, como pueden ser los apoyos, solamente existiría un elemento en esa posición.

La matriz global de rigidez sería, Tabla 38:

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN AUTOMOVILÍSTICA

[illegible]

Tabla 38. Matriz global de rigidez Ensayo A, obtenida con Excel

Una vez obtenida la matriz global de rigidez, siendo esta la matriz $[k]$ de la expresión Ec. 1. Posteriormente, se obtienen el vector de desplazamientos y esfuerzos.

Para el vector de desplazamientos $\{U\}$ sería un vector columna con 18 filas igual al numero de grados de libertad. Este vector sería sencillo de construir, ya que, solo puede presentar dos tipos de valores: las incógnitas que se quieren llegar a calcular y valores nulos en los casos donde el desplazamiento este restringido debido a las condiciones de contorno. También se puede considerar la aparición de otro tipo de valor como podría ser un desplazamiento impuesto, pero este no sería nuestro caso. El vector desplazamiento sería el siguiente, Tabla 39:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 39. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos $\{P\}$ recoge las cargas en los nodos, según cada grado de libertad de la estructura como ocurría con el vector desplazamiento. Las cargas en los nodos pueden ser debidas: reacciones, aparecen en los apoyos A, E y F donde era nulo el desplazamiento, cargas exteriores aplicadas en los nodos o cargas exteriores aplicadas en las barras donde esas cargas habría que trasladárselas a los nodos.

El vector de esfuerzos sería el siguiente, Tabla 40:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46.8 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 40. Vector esfuerzos.

Una vez se obtienen ambos vectores y la matriz global de rigidez, la expresión Ec. 1 quedaría de la siguiente manera:

Rax	223,1	395,6	-387,8	-8,7	0,0	-305,6	-214,4	-395,6	-82,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Ray	395,6	2454,4	44,3	0,0	-1717,7	0,0	-395,6	-736,7	44,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Ma	-387,8	44,3	22145,0	305,6	0,0	7130,5	82,2	-44,3	3942,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	-8,7	0,0	305,6	1126,0	767,5	145,5	-1117,3	-767,5	-160,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	0,0	-1717,7	0,0	767,5	2256,2	231,4	-767,5	-538,5	231,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	-305,6	0,0	7130,5	145,5	231,4	27944,4	160,0	-231,4	6841,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	-214,4	-395,6	82,2	-1117,3	-767,5	160,0	2934,8	1163,1	242,3	-1603,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	-395,6	-736,7	-44,3	-767,5	-538,5	-231,4	1163,1	1282,3	-9,4	0,0	-7,1	266,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	-82,2	44,3	3942,0	-160,0	231,4	6841,8	242,3	-9,4	34877,7	0,0	-266,2	6655,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1603,2	0,0	0,0	1978,1	-533,7	231,5	-2,2	0,0	120,4	-372,8	533,7	111,0	0,0
46,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-7,1	-266,2	-533,7	1857,4	-189,2	0,0	-1078,4	0,0	533,7	-772,0	77,0	0,0
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	266,2	6655,1	231,5	-189,2	31745,9	-120,4	0,0	4476,5	-111,0	-77,0	4741,3	0,0
Rex	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-2,2	0,0	-120,4	2,2	0,0	-120,4	0,0	0,0	0,0	0,0
Rey	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1078,4	0,0	0,0	1078,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Me	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	120,4	0,0	4476,5	-120,4	0,0	8953,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Rfx	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-372,8	533,7	-111,0	0,0	0,0	0,0	372,8	-533,7	-111,0	0,0
Rfy	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	533,7	-772,0	-77,0	0,0	0,0	0,0	-533,7	772,0	-77,0	0,0
Mf	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	111,0	77,0	4741,3	0,0	0,0	0,0	-111,0	-77,0	9482,7	0,0

Vector de esfuerzos {P}

Matriz global de rigidez [k]

Vector desplazamientos {U}

Para calcular las incógnitas, se tendría que multiplicar la matriz global de rigidez con el vector de desplazamientos creando un sistema de ecuaciones. Este sistema se vuelve algo complejo, por lo tanto, para simplificar mayormente esta operación primero llevaríamos a cabo el cálculo de los desplazamientos de los nodos.

Para ello, se tomaría una parte de nuestro vector de esfuerzos, siendo esta parte los elementos conocidos del mismo. Posteriormente, se escogerían las mismas filas tomadas antes, sombreadas en color azul, para la matriz global y el vector desplazamientos. Se eliminarían los tres primeros elementos de cada fila y los últimos 6 referente a la matriz global, ya que, el desplazamiento en ellos sería nulo. Quedando de la siguiente manera, Tabla 41:

0	Igual(=)	1126,0	767,5	145,5	-1117,3	-767,5	-160,0	0,0	0,0	0,0	*	Ubx
0		767,5	2256,2	231,4	-767,5	-538,5	231,4	0,0	0,0	0,0		Uby
0		145,5	231,4	27944,4	160,0	-231,4	6841,8	0,0	0,0	0,0		Θb
0		-1117,3	-767,5	160,0	2934,8	1163,1	242,3	-1603,2	0,0	0,0		Ucx
0		-767,5	-538,5	-231,4	1163,1	1282,3	-9,4	0,0	-7,1	266,2		Ucy
0		-160,0	231,4	6841,8	242,3	-9,4	34877,7	0,0	-266,2	6655,1		Θc
0		0,0	0,0	0,0	-1603,2	0,0	0,0	1978,1	-533,7	231,5		Udx
46,5		0,0	0,0	0,0	0,0	-7,1	-266,2	-533,7	1857,4	-189,2		Udy
0		0,0	0,0	0,0	0,0	266,2	6655,1	231,5	-189,2	31745,9		Θd

Tabla 41. Expresión Cálculo vector desplazamiento.

Para determinarlos, se tendría que realizar la inversa de la matriz global de rigidez y su producto con el vector de esfuerzos tomado, realizándose la siguiente operación:

$$\{P\} = [k] * \{U\} \rightarrow [k]^{-1} * \{P\} = \{U\}$$

Soluciones:

U _{BX}	=	-0,370	mm
U _{BY}		0,001	mm
Θ _{BZ}		0,001	rad
U _{CX}		-0,580	mm
U _{CY}		0,304	mm
Θ _{CZ}		0,000	rad
U _{DX}		-0,583	mm
U _{DY}		-0,419	mm
Θ _{DZ}		0,000	rad

Tabla 42. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA

Los esfuerzos se obtienen una vez conocidos los desplazamientos. Para ello, se tomarían el resto de filas que antes no se han tenido en cuenta del vector de esfuerzos. Después, se escogerían las filas de la matriz global sombreadas en color naranja y multiplicamos vectorialmente por el vector desplazamientos calculado, Tabla 43.

Rax	Igual(=)	-8,7	0,0	-305,6	-214,4	-395,6	-82,2	0,0	0,0	0,0	*	-0,04
Ray		0,0	-1717,7	0,0	-395,6	-736,7	44,3	0,0	0,0	0,0		0,00
Ma		305,6	0,0	7130,5	82,2	-44,3	3942,0	0,0	0,0	0,0		0,00
Rex		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-2,2	0,0	-120,4		-0,06
Rey		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1078,4	0,0		0,03
Me		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	120,4	0,0	4476,5		0,00
Rfx		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-372,8	533,7	-111,0		-0,06
Rfy		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	533,7	-772,0	-77,0		-0,04
Mf		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	111,0	77,0	4741,3		0,00

Tabla 43. Expresión Cálculo vector desplazamiento.

Soluciones:

R _{AX}	=	491,77	N
R _{AY}		442,19	N
M _{AZ}		-124,07	N*m
R _{EX}		129,54	N
R _{EY}		45169,24	N
M _{EZ}		-71,55	N*m
R _{FX}		-621,32	N
R _{FY}		1226,08	N
M _{FZ}		-98,40	N*m

Tabla 44. Matriz soluciones esfuerzos.

Estas dos tablas, Tabla 42 y Tabla 44, se encuentran las soluciones obtenidas en el estudio del cálculo analítico ensayo A con estructura sin modificar empleando el método matricial o también llamado de la rigidez donde se detallará en la memoria estos resultados.

2. ANEXO 2: Cálculo analítico Ensayo B con estructura sin optimizar

2.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria, en el cual se indica el proceso de cálculo y los resultados obtenidos en nuestra jaula de seguridad, mediante el método de la rigidez o matricial comentado. Empleando para ello, las propiedades y dimensiones propuestas en la estructura base.

Este cálculo matricial constara de hallar cada una de las matrices elementales perteneciente a cada barra. Posteriormente se conseguirá la matriz global de rigidez para poder calcular todos los desplazamientos y giros de los nodos que a continuación se aclara.

Se vuelve a emplear para este cálculo analítico la estructura mostrada en la Figura 85. Los cálculos en este anexo se simplifican porque la matriz global de rigidez es constante para ambos ensayos, ya que no depende de los esfuerzos y desplazamientos aplicados. Esta matriz depende de las propiedades del material y la geometría, pero en este caso solo se cambia el sistema de aplicación de la carga.

2.2. Resolución cálculo analítico Ensayo B estructura no optimizada

Como en el anexo anterior, la realización de este ensayo lleva consigo la necesidad de detallar los nodos empleados en este análisis, incluyendo los apoyos. Posteriormente, se obtendrán sus correspondientes desplazamientos, giros y reacciones de estos.

En cuanto al número de grados de libertad sería 18 de nuevo, porque se consideran los nodos rígidos, Figura 86. Por lo tanto, cada nodo tendría tres restricciones al encontrarse en un plano de estructura en 2D. La matriz global de rigidez de la estructura tendría un tamaño igual al número de grados de libertad.

El esfuerzo a emplear en este ensayo, sería una fuerza tridimensional la cual se descompone en los tres ejes de coordenadas. Uno de ellos no se considera, ya que se trata de una estructura plana. El valor de esta carga o esfuerzo sería el siguiente:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg) \rightarrow F_B (N) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Siendo W:

$$W = masa\ del\ vehiculo(kg) + 160\ kg = 1089kg + 160kg = 1249\ kg$$

$$F_B = 35\ \frac{N}{kg} \cdot 1249\ kg = 43715\ N = 43,7\ kN$$

Esta carga se encontraba girada respecto al eje longitudinal un ángulo de 5° y con respecto al eje transversal un ángulo de 25° , Figura 142 y Figura 143.

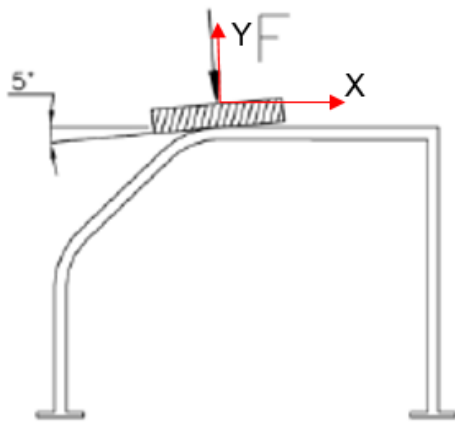


Figura 142. Eje longitudinal.

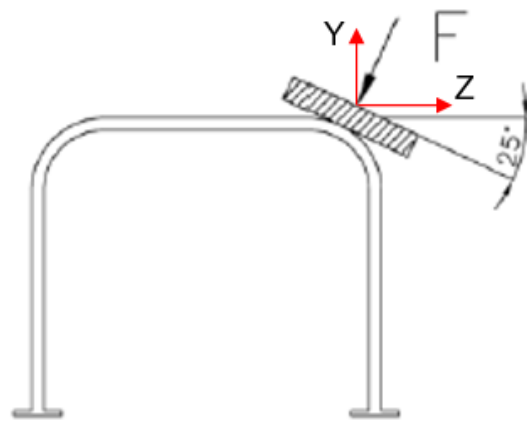


Figura 143. Eje Transversal.

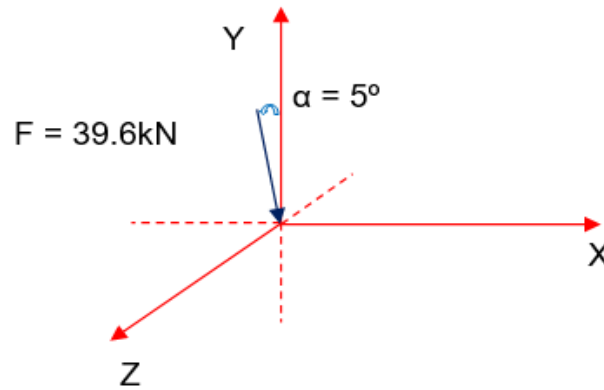
Primeramente, para trasladarse esta fuerza al plano XY del problema se tiene primero que multiplicar esa fuerza por el coseno de 25° porque es el ángulo que se encuentra rotado en el plano ZY.

$$F = 43,7N \cdot \cos 25^\circ = 39,6\ kN$$

La fuerza que actuaría en dirección al eje Z, sería:

$$F_Z = 43,7N \cdot \sin 25^\circ = 18,4\ kN$$

El cálculo de esta fuerza será útil para posteriormente emplearla en el programa de ANSYS.



Para calcular el esfuerzo generado en el eje X e Y, sería de la siguiente manera:

$$F_X = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \operatorname{sen} 5^\circ = 3,5 \text{ kN}$$

$$F_Y = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ = -39,5 \text{ kN}$$

El problema a resolver quedaría de la siguiente manera con la fuerza aplicada en el nodo C, Figura 144:

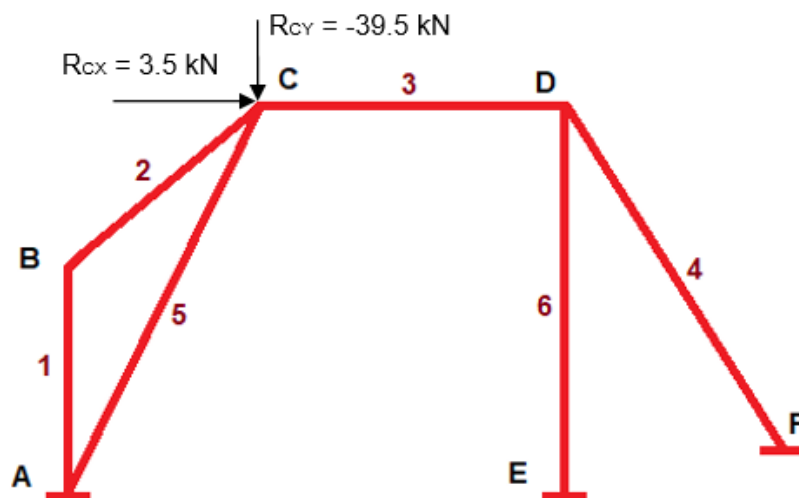


Figura 144. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede primero a realizar el cálculo de las matrices elementales de cada una de las barras. Así mismo, se detallarán los vectores de esfuerzos y desplazamientos. Finalmente empleando la expresión Ec. 1, se obtendrán las incógnitas de estos vectores.

Se detallan los datos que son comunes a todas las barras, siendo estos Tabla 45:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{CX} (kN)	R _{CY} (kN)
5,72	11,88	21000	3,5	-39,5

Tabla 45. Datos comunes a todas las barras.

Para el cálculo de la matriz global de rigidez de esta estructura se ha de observar el Anexo 1 donde se ha llevado a cabo el cálculo de dicha matriz elaborando cada una de las barras. Cabe señalar, que en este caso la estructura tiene las mismas propiedades, la única diferencia es la carga aplicada sobre esta. Asimismo, la matriz global de rigidez es la Tabla 38.

Una vez obtenida la matriz global de rigidez, siendo esta la matriz $[k]$ de la expresión Ec. 1. Posteriormente, se obtienen el vector de desplazamientos y esfuerzos.

El vector de desplazamientos $\{U\}$ sería un vector columna con 18 filas igual al número de grados de libertad. Este vector representa los mismos valores que el vector desplazamientos $\{U\}$ del Anexo 1, ya que se trata del mismo sistema Quedando de la siguiente manera, Tabla 46:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (cm)}$$

Tabla 46. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos $\{P\}$ sería distinto en comparación con el anexo anterior. Las cargas en los nudos pueden ser debidas: reacciones, aparecen en los apoyos A, E y F donde era nulo el desplazamiento, cargas exteriores aplicadas en los nodos o

cargas exteriores aplicadas en las barras donde esas cargas habría que trasladárselas a los nodos.

El vector de esfuerzos sería el siguiente, Tabla 47:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,5 \\ -39,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 47. Vector esfuerzos.

Una vez se obtienen ambos vectores y la matriz global de rigidez, la expresión Ec. 1 quedaría de la siguiente manera:

Rax	gual(=	223,1	395,6	-387,8	-8,7	0,0	-305,6	-214,4	-395,6	-82,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	
Ray		395,6	2454,4	44,3	0,0	-1717,7	0,0	-395,6	-736,7	44,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	
Ma		-387,8	44,3	22145,0	305,6	0,0	7130,5	82,2	-44,3	3942,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	
0		-8,7	0,0	305,6	1126,0	767,5	145,5	-1117,3	-767,5	-160,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ubx	
0		0,0	-1717,7	0,0	767,5	2256,2	231,4	-767,5	-538,5	231,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Uby	
0		-305,6	0,0	7130,5	145,5	231,4	27944,4	160,0	-231,4	6841,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Θb	
3,45		-214,4	-395,6	82,2	-1117,3	-767,5	160,0	2934,8	1163,1	242,3	-1603,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ucx	
-39,47		-395,6	-736,7	-44,3	-767,5	-538,5	-231,4	1163,1	1282,3	-9,4	0,0	-7,1	266,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ucy	
0		-82,2	44,3	3942,0	-160,0	231,4	6841,8	242,3	-9,4	34877,7	0,0	-266,2	6655,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Θc	
0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1603,2	0,0	0,0	1978,1	-533,7	231,5	-2,2	0,0	120,4	-372,8	533,7	111,0	Udx
0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-7,1	-266,2	-533,7	1857,4	-189,2	0,0	-1078,4	0,0	533,7	-772,0	77,0	Udy
0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	266,2	6655,1	231,5	-189,2	31745,9	-120,4	0,0	4476,5	-111,0	-77,0	4741,3	Θd
Rex		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-2,2	0,0	-120,4	2,2	0,0	-120,4	0,0	0,0	0,0	0,00
Rey		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1078,4	0,0	0,0	1078,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Me		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	120,4	0,0	4476,5	-120,4	0,0	8953,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Rfx		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-372,8	533,7	-111,0	0,0	0,0	0,0	372,8	-533,7	-111,0	0,00
Rfy	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	533,7	-772,0	-77,0	0,0	0,0	0,0	-533,7	772,0	-77,0	0,00	
Mf	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	111,0	77,0	4741,3	0,0	0,0	0,0	-111,0	-77,0	9482,7	0,00	

Vector de esfuerzos {P}

Matriz elemental global [k]

Vector desplazamientos {U}

Para calcular las incógnitas, se tendría que multiplicar la matriz global de rigidez con el vector de desplazamientos creando un sistema de ecuaciones. Este sistema se vuelve algo complejo, por lo tanto, para simplificar mayormente esta operación primero llevaríamos a cabo el cálculo de los desplazamientos de los nodos.

Para ello, se tomaría una parte de nuestro vector de esfuerzos, siendo esta parte los elementos conocidos del mismo. Posteriormente, se escogerían las mismas filas tomadas antes para la matriz global y el vector desplazamientos, pero eliminando los tres primeros elementos de cada fila y los últimos 6, ya que, el desplazamiento en ellos sería nulo. Quedando de la siguiente manera, Tabla 48:

0	Igual(=)	1126,0	767,5	145,5	-1117,3	-767,5	-160,0	0,0	0,0	0,0	*	Ubx
0		767,5	2256,2	231,4	-767,5	-538,5	231,4	0,0	0,0	0,0		Uby
0		145,5	231,4	27944,4	160,0	-231,4	6841,8	0,0	0,0	0,0		Θb
3,45		-1117,3	-767,5	160,0	2934,8	1163,1	242,3	-1603,2	0,0	0,0		Ucx
-39,47		-767,5	-538,5	-231,4	1163,1	1282,3	-9,4	0,0	-7,1	266,2		Ucy
0		-160,0	231,4	6841,8	242,3	-9,4	34877,7	0,0	-266,2	6655,1		Θc
0		0,0	0,0	0,0	-1603,2	0,0	0,0	1978,1	-533,7	231,5		Udx
0		0,0	0,0	0,0	0,0	-7,1	-266,2	-533,7	1857,4	-189,2		Udy
0		0,0	0,0	0,0	0,0	266,2	6655,1	231,5	-189,2	31745,9		Θd

Tabla 48. Expresión Cálculo vector desplazamiento.

Para determinarlos, se tendría que realizar la inversa de la matriz global de rigidez y su producto con el vector de esfuerzos tomado, realizando la siguiente operación:

$$\{P\} = [k] \cdot \{U\} \rightarrow [k]^{-1} \cdot \{P\} = \{U\}$$

Soluciones:

U _{BX}	=	0,409	mm
U _{BY}		-0,004	mm
Θ _{BZ}		-0,002	rad
U _{CX}		1,203	mm
U _{CY}		-1,158	mm
Θ _{CZ}		-0,000	rad
U _{DX}		1,055	mm
U _{DY}		0,299	mm
Θ _{DZ}		0,000	rad

Tabla 49. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA

Los esfuerzos se obtienen una vez conocidos los desplazamientos. Para ello, se tomarían el resto de filas que antes no se han tenido en cuenta del vector de esfuerzos. Después, se escogerían las filas de la matriz global sombreadas en color naranja y multiplicamos vectorialmente por el vector desplazamientos calculado, Tabla 50.

Rax	Igual(=)	-8,73	0,00	-305,59	-214,37	-395,64	-82,25	0,00	0,00	0,00	*	0,04
Ray		0,00	-1717,67	0,00	-395,64	-736,70	44,26	0,00	0,00	0,00		0,00
Ma		305,59	0,00	7130,46	82,25	-44,26	3942,02	0,00	0,00	0,00		0,00
Rex		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-2,16	0,00	-120,44		0,12
Rey		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1078,36	0,00		-0,12
Me		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	120,44	0,00	4476,52		0,00
Rfx		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-372,75	533,68	-111,02		0,11
Rfy		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	533,68	-771,96	-77,01		0,03
Mf		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	111,02	77,01	4741,35		0,00

Tabla 50. Expresión Cálculo vector desplazamiento.

Soluciones:

R _{AX}	=	20248,78	N
R _{AY}		38499,19	N
M _{AZ}		139,09	N·m
R _{EX}		-278,06	N
R _{EY}		-32234,14	N
M _{EZ}		145,71	N·m
R _{FX}		-23423,77	N
R _{FY}		33203,43	N
M _{FZ}		159,89	N·m

Tabla 51. Matriz soluciones esfuerzos.

Estas dos tablas, Tabla 49 y Tabla 51, se encuentran las soluciones obtenidas en el estudio del cálculo analítico ensayo B con estructura sin modificar empleando el método matricial o también llamado de la rigidez donde se detallará en la memoria estos resultados.

3. ANEXO 3: Estudio del pandeo, carga crítica de Euler con estructura sin optimizar.

3.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria, en el cual se indica el procedimiento realizado junto con los resultados hallados en nuestra estructura mediante el estudio del pandeo en algunas de estas barras calculando la carga crítica de Euler.

Dicho cálculo constara de determinar la carga critica comentada anteriormente en la memoria. Éste representa la máxima carga de compresión que dicha barra podría soportar antes de producirse el pandeo, para evitar el desplazamiento de su centro de gravedad y la disminución de su capacidad resistente a compresión. Mediante la expresión Ec. 2.

3.2. Resolución Estudio a Pandeo.

Por tanto, para este nuevo estudio es necesario detallar cuales son las barras a ensayar. Para ello, se hace referencia a la estructura que aparece en la Figura 85.

Se realizará el estudio de aquellas barras donde la longitud efectiva de pandeo sea mayor, es decir las barras cuya longitud destaque frente al resto. Cabe señalar, que éstas serían las que tienden más fácilmente a producirse el pandeo debido a su larga longitud comparada con su sección. Posteriormente, esta carga crítica puede ser comparada con que tendrá en la base dicha barra, siendo esta reacción el esfuerzo de compresión al que estaría sometida.

La barra más larga que se encuentra sería la 6, perteneciente al arco principal donde aplicábamos la carga del Ensayo A de manera vertical hacia abajo.

- Estudio a pandeo Barra 6:

Las propiedades de esa barra son, Tabla 52:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
111,5	11,88	21000	0,7

Tabla 52. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7, ya que se ha considerado empotrada en la base, y a la misma vez articulada en la parte de arriba. En los ensayos anteriores se ha estudiado el desplazamiento del nodo superior, nodo D, por lo tanto, se considera empotrada–articulada, Figura 92.

Se calcula la longitud de pandeo, L_K :

$$L_K = \beta \cdot L \rightarrow L_K = 0.7 \cdot 111.5 \text{ cm} = 78,05 \text{ cm}$$

Obteniendo la carga critica de Euler:

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_K^2} \rightarrow N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(78,05 \text{ cm})^2} = 404,33 \text{ kN}$$

En este caso también se podría calcular la carga critica de Euler para la barra 4, pero ésta tiene una longitud menor a la anterior siendo la carga Crítica de Euler mayor. Cabe destacar, que si el estudio de la barra 6 cumple este también lo haría al ser de menor longitud.

Otra barra que tendría una longitud aun mayor sería la unión de la barra 1 y 2 considerándola como una barra continua. El conjunto mencionado anteriormente se consideraría como una barra recta y vertical de una longitud igual a la suma de ambas.

Una parte de esta unión se encuentra de manera vertical por ello calcularíamos cual sería el valor máximo de compresión soportado por el conjunto, siendo este superior al que soportaría el tramo vertical. De este modo el problema se encontraría del lado de la seguridad debido a que, si dicha nueva barra cumple, la barra 1 al ser más corta cumpliría de igual manera. Partimos del nodo C porque es donde se aplica la carga del Ensayo B.

- Estudio a pandeo Barra 1 y 2:

Las propiedades de esa barra son, Tabla 53:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
142,95	11,88	21000	0,7

Tabla 53. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7, ya que se ha considerado empotrada en la base, y a la misma vez articulada en la parte de arriba. En los ensayos anteriores se ha estudiado el desplazamiento del nodo superior, nodo D, por lo tanto, se considera empotrada–articulada, Figura 93.

Se calcula la longitud de pandeo, L_K :

$$L_K = \beta \cdot L \rightarrow L_K = 0.7 \cdot 142,95 \text{ cm} = 100,06 \text{ cm}$$

Obteniendo la carga crítica de Euler:

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_K^2} \rightarrow N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 11,88 \text{ cm}^4}{(100,06 \text{ cm})^2} = 245,99 \text{ kN}$$

En este caso, como el anterior también se podría calcular la carga crítica de Euler para la barra 5, pero ésta tiene una longitud menor a la anterior siendo la carga Crítica de Euler mayor. Cabe señalar, que si el estudio de estas dos barras cumple este también lo haría al ser de menor longitud.

4. ANEXO 4: Estudio optimización de espesor.

4.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria donde se indicará la secuencia llevada a cabo para la variación del espesor de la estructura. Cabe destacar, que se podrá observar cómo su masa y tensión de Von Mises varía, realizando esta secuencia mediante el software ANSYS 18.1.

Este proceso llevado a cabo constara de hallar la masa de la estructura que correspondería al espesor introducido y comprobando que la tensión de Von Mises no supere la tensión de rotura del material siendo esta 700 MPa.

La secuencia tomada para estos ensayos sería variando el espesor en el Ensayo B, ya que es el más restrictivo en cuanto a tensión. Se emplean espesores de tubo que se encuentran estandarizados en el mercado, partiendo del espesor empleado en un principio de 4.5mm hasta uno donde no se supere el límite de rotura del material, Tabla 54.

Ensayo B (1)	Espesor: 4,50mm
Ensayo B (2)	Espesor: 4,25mm
Ensayo B (3)	Espesor: 4,00mm
Ensayo B (4)	Espesor: 3,75mm
Ensayo B (5)	Espesor: 3,5mm
Ensayo B (6)	Espesor: 3,25mm
Ensayo B (7)	Espesor: 3,00mm

Tabla 54. Secuencia de espesores.

4.2. Resultados

A continuación, se llevarán a cabo dichos ensayos especificando para cada uno de ellos el espesor empleado, la masa de la estructura generado y la tensión de Von Mises producida para el Ensayo B.

- **Ensayo B (1), espesor 4,50 mm**

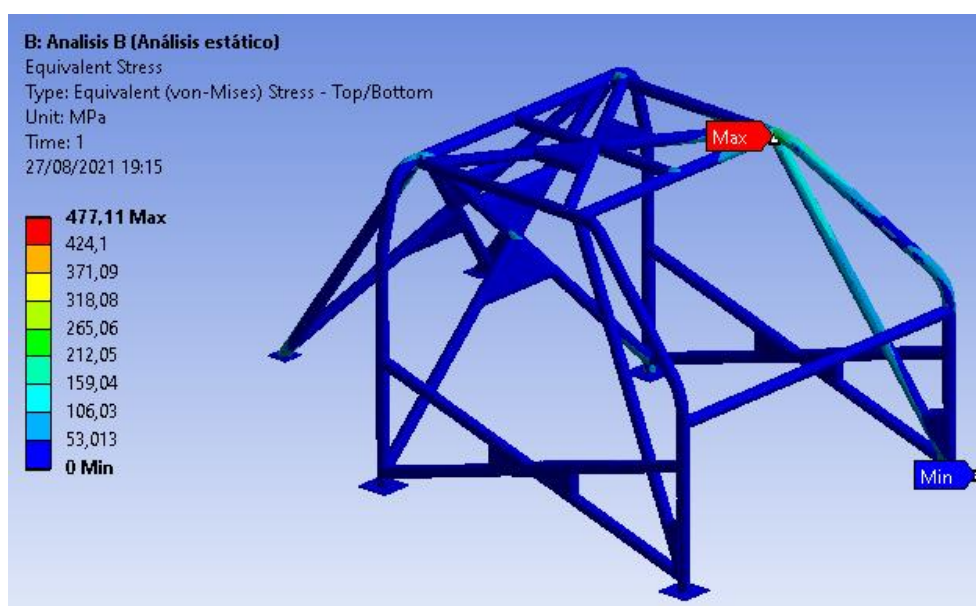


Figura 145. Tensión de Von Mises Ensayo B (1).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 157,8 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 477,11 \text{ MPa} \end{cases}$$

Este primer análisis se comienza con los datos de partida empleados en ensayos anteriores, obteniendo una masa de 157,8 kg siendo este demasiado elevado para un vehiculó de competición. Véase Figura 145.

- **Ensayo B (2), espesor 4,25 mm**

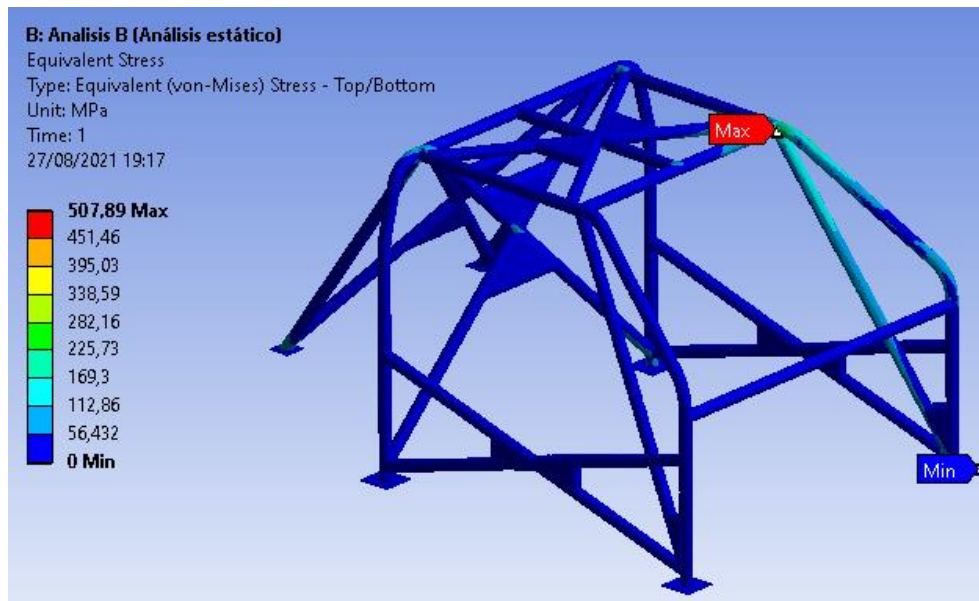


Figura 146. Tensión de Von Mises Ensayo B (2).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 149,04 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 507,89 \text{ MPa} \end{cases}$$

En este segundo análisis la masa se ha reducido en 8,76 kg respecto al anterior, encontrándose además la tensión máxima de Von Mises aún muy lejos del límite de rotura. Véase Figura 146.

- **Ensayo B (3), espesor 4,00 mm**

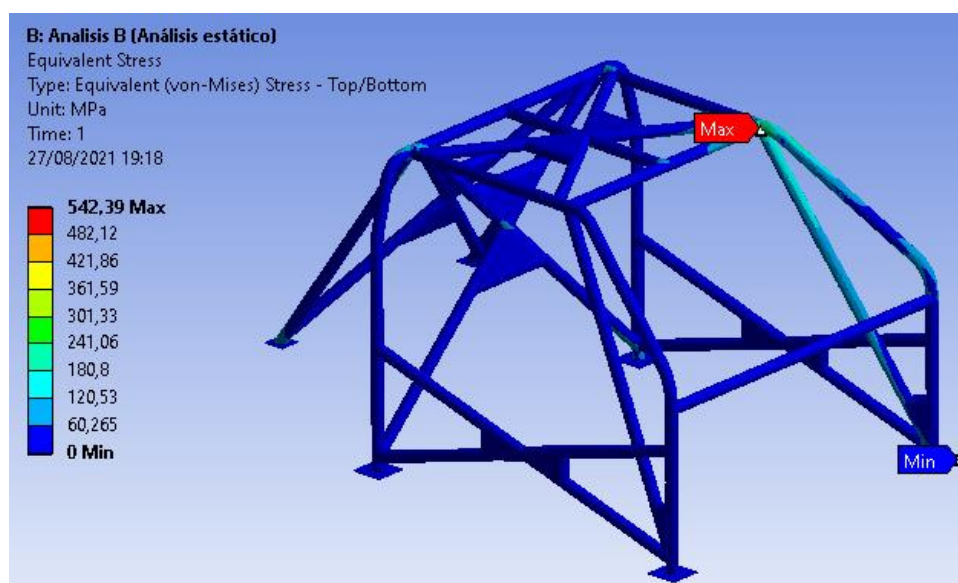


Figura 147. Tensión de Von Mises Ensayo B (3).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 140,27 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 542,39 \text{ MPa} \end{cases}$$

Para este análisis la masa reducida respecto de la estructura de partida ha sido de unos 17,53 kg, en cuanto al límite de rotura se seguirá probando con un espesor aún más pequeño para encontrarnos más cerca de este. Véase Figura 147.

- **Ensayo B (4), espesor 3,75 mm**

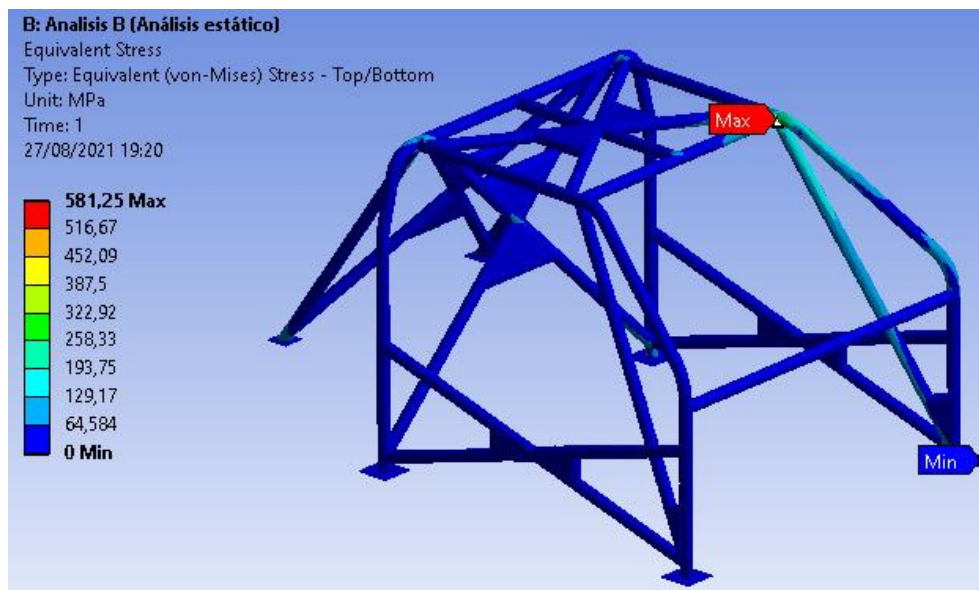


Figura 148. Tensión de Von Mises Ensayo B (4).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 131,5 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 581,25 \text{ MPa} \end{cases}$$

En este cuarto análisis se puede observar como la masa reducida ha sido de 26,3 kg, pero todavía la tensión máxima no se encuentra cerca del límite. Véase Figura 148.

- **Ensayo B (5), espesor 3,50 mm**

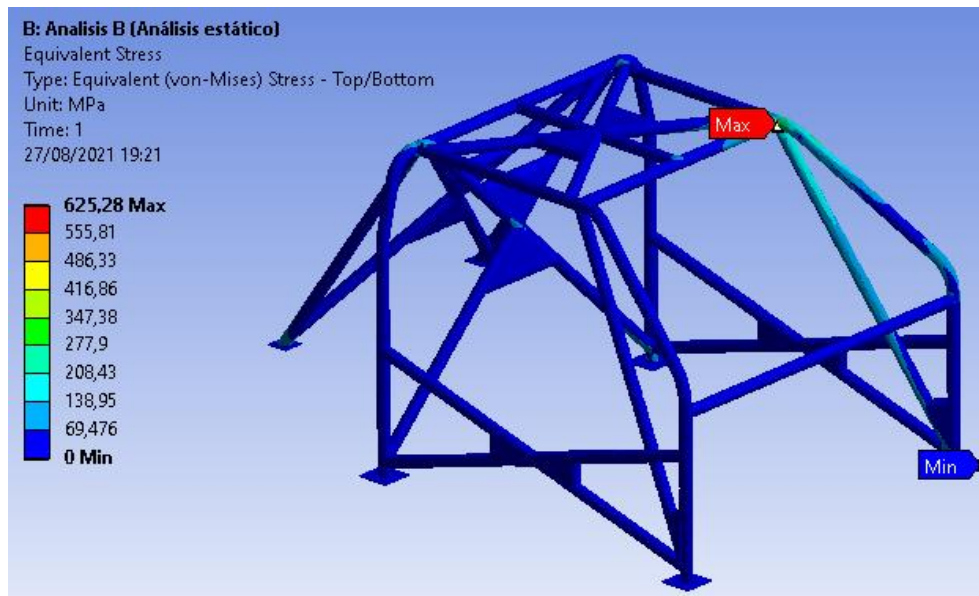


Figura 149. Tensión de Von Mises Ensayo B (5).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 122,74 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 625,28 \text{ MPa} \end{cases}$$

Para este análisis empleando un espesor más pequeño al anterior se consigue una reducción de la masa de la estructura de 35,06 kg, sin embargo, la tensión máxima comienza a estar próxima del límite de rotura. Véase Figura 149.

- **Ensayo B (6), espesor 3,25 mm**

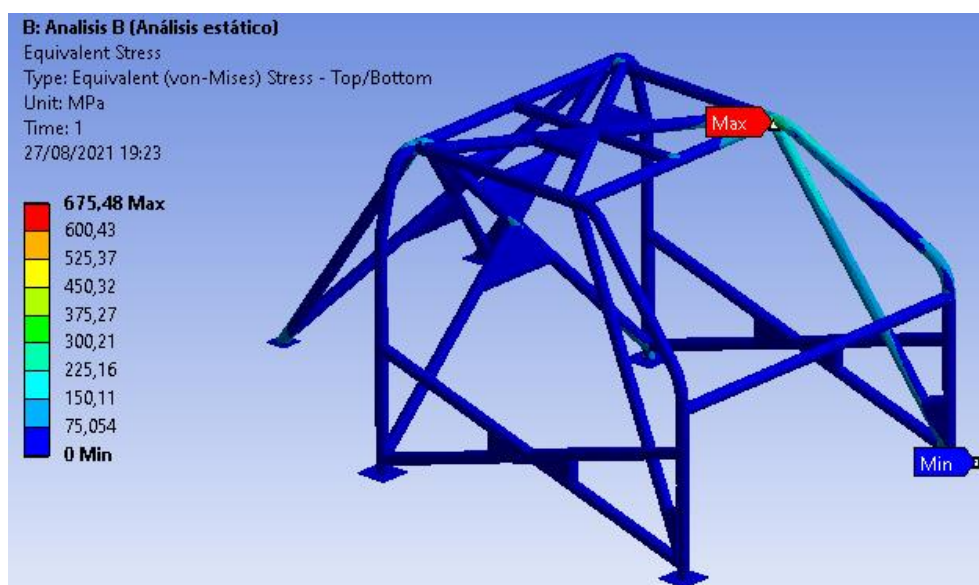


Figura 150. Tensión de Von Mises Ensayo B (6).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 113,97 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 675,48 \text{ MPa} \end{cases}$$

Para este otro análisis empleando un espesor de 3,25 mm, la masa de la estructura se ha reducido en 43,83 kg. Cabe destacar, que la tensión máxima generada se encuentra aún más próxima del límite de rotura que en el anterior análisis. Véase Figura 150. Por ello, se volverá a realizar este ensayo colocando un espesor inferior para estudiar cuál sería su comportamiento.

- **Ensayo B (7), espesor 3,00 mm**

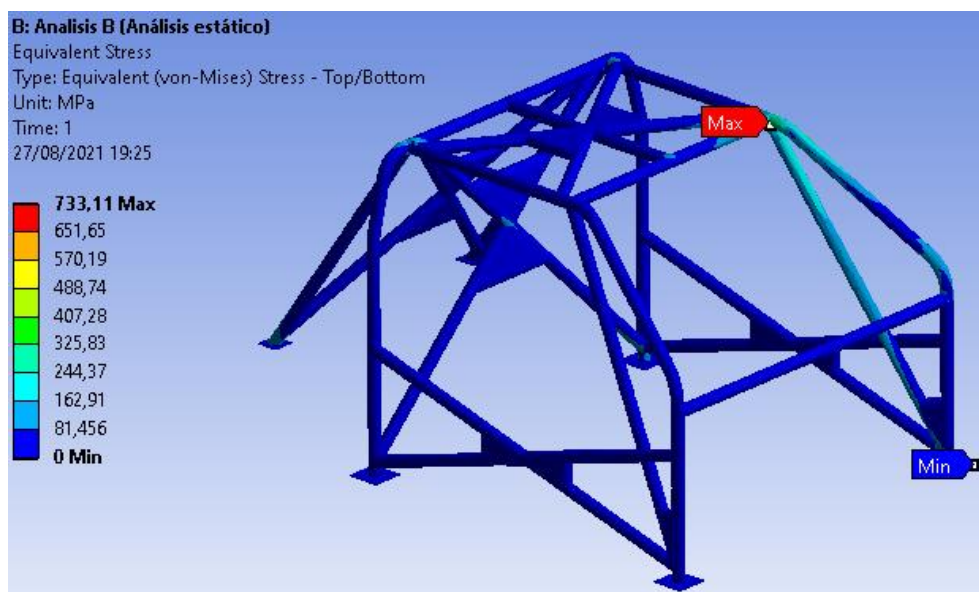


Figura 151. Tensión de Von Mises Ensayo B (7).

$$\begin{cases} \text{Peso} \rightarrow 105,2 \text{ kg} \\ \text{Tensión máxima} \rightarrow 733,11 \text{ MPa} \end{cases}$$

En este último ensayo se puede observar como la tensión máxima de Von Mises ha superado el límite de rotura por lo que con estas dimensiones se correría el riesgo de producirse el fallo. Véase Figura 151.

Por lo tanto, el espesor a tomar sería de 3,25 mm, no superando el límite de rotura. Una vez realizado esta comprobación para el Ensayo B, es conveniente realizarlo para el Ensayo A asegurándose que tampoco se supera el límite de rotura del material.

- **Ensayo A, espesor 3,25 mm**

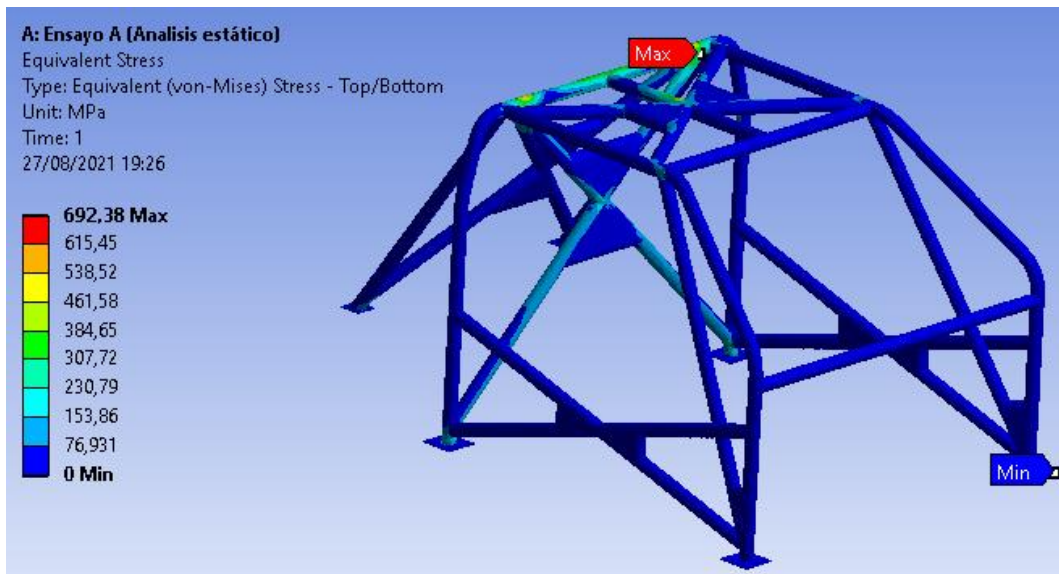


Figura 152. Tensión de Von Mises Ensayo A, espesor 3,25 mm.

Como se puede observar, la tensión de Von Mises no supera el límite de rotura del material. Cabe señalar, que se podría emplear este nuevo espesor para proseguir realizando los cálculos en este proyecto a partir de esta optimización tomada. Véase Figura 152.

A continuación, se mostrarán en unas gráficas los valores obtenidos en estos ensayos pudiendo observar como la tensión de Von Mises aumenta con forme el espesor disminuye. Sin embargo, la masa de la estructura disminuye, Gráfico 1 y Gráfico 2.

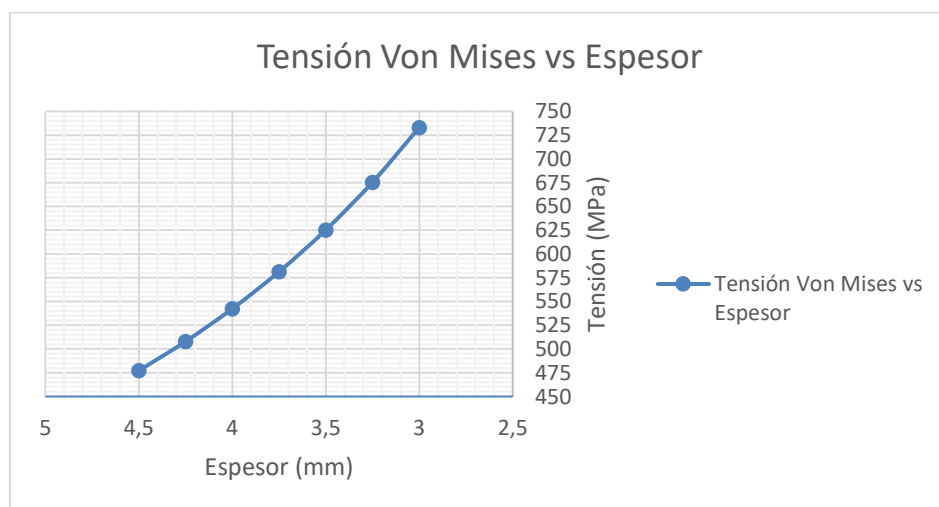


Gráfico 1. Representación Tensión vs Espesor

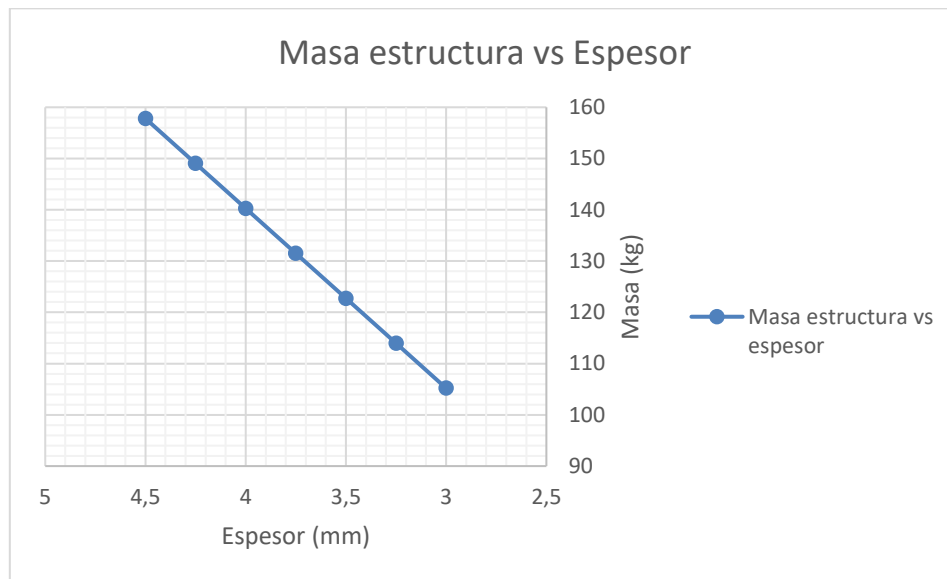


Gráfico 1. Representación Masa estructura vs Espesor

5. ANEXO 5: Cálculo analítico Ensayo A con estructura optimizada

5.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria, en el cual se indica el procedimiento realizado y los resultados obtenidos en nuestra estructura, mediante el método de la rigidez o matricial comentado anteriormente.

Este cálculo matricial constara de hallar cada una de las matrices elementales perteneciente a cada barra. Posteriormente se conseguirá la matriz global de rigidez para poder calcular todos los desplazamientos y giros de los nodos que a continuación se aclara.

Para este cálculo analítico, la estructura a emplear se encuentra mostrada en la Figura 85, donde se pueden ver las 6 barras que serán estudiadas. En este caso, la geometría de ésta permanece constante pero no su espesor, siendo este estudiado en el Anexo 4. El espesor a emplear es 3,25 mm, por lo tanto, la matriz global de rigidez no sería constante en este caso al modificar las propiedades de la geometría. Por ello, se tendría que llevar a cabo su cálculo con el nuevo área y momento de inercia.

5.2. Resolución cálculo analítico ensayo A estructura optimizada

La realización de este ensayo lleva consigo la necesidad de detallar los nodos empleados en este análisis, incluyendo los apoyos. Después, se obtendrán sus correspondientes desplazamientos, giros y reacciones de estos.

Los nodos serán aquellos puntos donde interceptan las barras y aquellos donde las barras se apoyan al suelo, además también se enumeran las barras, Figura 85.

Se puede y debe hacer un estudio previo para calcular el número de grados de libertad que tendrá nuestra estructura. Conociendo este dato se podría conocer las dimensiones que tendrá la matriz global elemental de la estructura, vector desplazamientos y esfuerzos. Considerando todos los nudos rígidos tendríamos 18 grados de libertad, Figura 86.

La fuerza que aplicada sobre nuestro nodo D, sería:

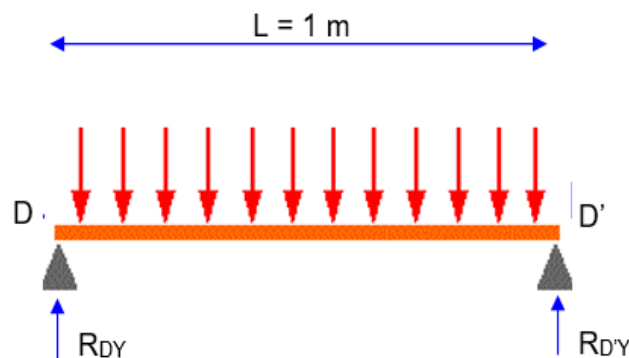


Figura 153. Distribución de la carga en el arco principal.

$$F = 75 \text{ N/kg} \cdot (1089 \text{ kg} + 150 \text{ kg}) = 92,9 \text{ kN}$$

$$q = \frac{F}{L} = \frac{92,9 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 92,9 \text{ kN/m}$$

Ésta, sería la carga distribuida aplicada a lo largo de un metro de longitud que mide dicha barra, Figura 153. Si dicha fuerza es dividida en dos partes, ya que son dos los apoyos, siendo estos: el lateral del conductor (nodo D) y el lateral del copiloto (nodo D'). Aparece la fuerza con la que se trabajará, siendo esta:

$$R_{DY} = R_{D,Y} = 92,9 \text{ N/m} \cdot 1\text{m} \cdot \frac{1}{2} = 46,5 \text{ kN}$$

Por tanto, el problema a resolver quedaría de la siguiente manera con dicha fuerza aplicada, los nodos y barras identificados, Figura 154.

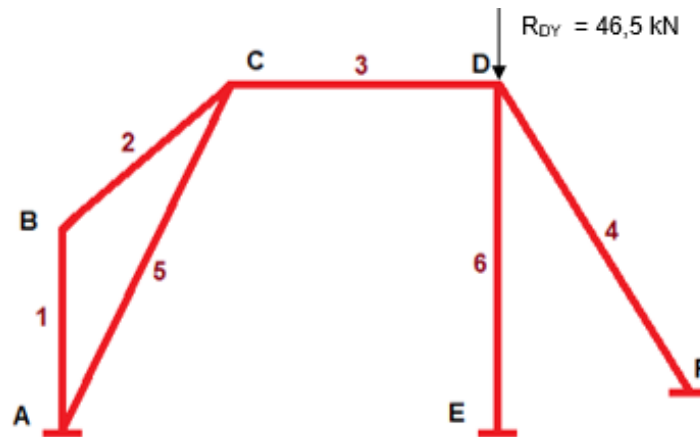


Figura 154. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede primero a realizar el cálculo de las matrices elementales de cada una de las barras. Así mismo, se detallarán los vectores de esfuerzos y desplazamientos. Finalmente empleando la expresión Ec. 1 se obtendrán las incógnitas de estos vectores.

Se detallarán los datos que son comunes a todas las barras, en este caso se tendría que recalcular el área de nuestra geometría junto con su momento de inercia. Para el cálculo de estos valores se emplea un diámetro exterior de 45 mm e interior de 38,5 mm, siendo el área:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot (\varnothing_{ext})^2 - \frac{\pi}{4} \cdot (\varnothing_{int})^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (4,5)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot (3,85)^2 = 4,26 \text{ cm}^2$$

Y momento de inercia sería:

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot R_{ext}^4 - \frac{\pi}{4} \cdot R_{int}^4 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{4,5}{2}\right)^4 - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3,85}{2}\right)^4 = 9,34 \text{ cm}^4$$

Los datos comunes a todas las barras serían los siguientes, Tabla 55.

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{DY} (kN)
4,26	9,34	21000	46,5

Tabla 55. Datos comunes a todas las barras.

Matrices elementales:

1) Barra 1 – AB - Empotrada-Empotrada:

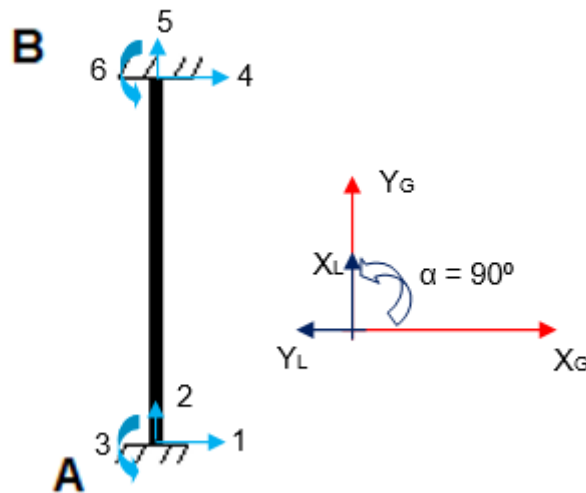


Figura 155. Barra 1 Problema.

En la Figura 155, se ha colocado la barra 1 junto con sus grados de libertad porque estos nos ayudaran posteriormente a construir la matriz global de rigidez. También se puede observar cómo los ejes locales de esta barra están girados 90° respecto de los ejes globales, por lo tanto, sería necesario emplear matriz de cambio.

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 1:

$$L_1 = 70 \text{ cm}; \quad \alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ rad}; \quad \cos 90^\circ = 0; \quad \sin 90^\circ = 1;$$

$$[k]_{G1} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz teniendo en cuenta que el coseno tiene valor de 0 y el seno 1:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(70 cm)^3} = 6,87 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 90^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(70 cm)^2} = 240,28 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{70 cm} = 1278,82 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^2}{70 cm} = 11212,89 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la matriz, Tabla 56:

	1	2	3	4	5	6
1	6,87	0,00	-240,28	-6,87	0,00	-240,28
2	0,00	1278,82	0,00	0,00	-1278,82	0,00
3	-240,28	0,00	11212,89	240,28	0,00	5606,45
4	-6,87	0,00	240,28	6,87	0,00	240,28
5	0,00	-1278,82	0,00	0,00	1278,82	0,00
6	-240,28	0,00	5606,45	240,28	0,00	11212,89

Tabla 56. Matriz elemental barra 1, obtenida con Excel.

Los números que se encuentran alrededor de esta matriz, Tabla 56, muestran los grados de libertad a los que pertenece cada elemento, para después poder montar la matriz global de rigidez.

2) Barra 2 – BC - Empotrada-Empotrada:

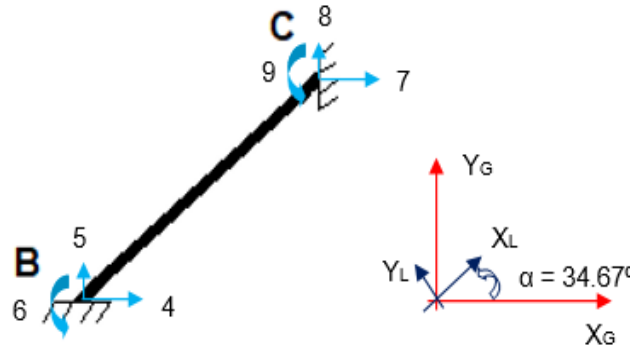


Figura 156. Barra 2 Problema.

Para determinar el ángulo de giro entre los ejes locales y globales de la barra, es necesario basarse en el diseño. Para ello, se emplea la ecuación de Pitágoras y las relaciones trigonométricas, obteniendo la longitud de la barra y el ángulo rotado:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{41,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}\right) = 34,67^\circ; \quad L = \sqrt{41,5^2 + 60^2} = 72,95 \text{ cm}$$

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 2:

$$L_2 = 72,95 \text{ cm}; \quad \alpha = 34,67^\circ = 0,605 \text{ rad}; \quad \cos 34,67^\circ = 0,822; \quad \sin 34,67^\circ = 0,568;$$

$$[k]_{G2} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$X = (\cos 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 4,26 \text{ cm}^2}{72,95 \text{ cm}} + (\sin 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(72,95 \text{ cm})^3}$$

$$X = 831,94 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$Y = (\cos 34,67^\circ) \cdot (\sin 34,67^\circ) \cdot \left(\frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{72,95 cm} - \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(72,95 cm)^3} \right)$$

$$Y = 571,23 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 34,67^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,344 cm^4}{(72,95 cm)^2} = 125,84 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$W = (\sin 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{72,95 cm} + (\cos 34,67^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(72,95 cm)^3}$$

$$W = 401,17 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos 34,67^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(72,95 cm)^2} = 181,93 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^2}{72,95 cm} = 10758,90 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la matriz, Tabla 57:

	4	5	6	7	8	9
4	831,94	571,23	-125,84	-831,94	-571,23	-125,84
5	571,23	401,17	181,93	-571,23	-401,17	181,93
6	-125,84	181,93	10758,91	125,84	-181,93	5379,45
7	-831,94	-571,23	125,84	831,94	571,23	125,84
8	-571,23	-401,17	-181,93	571,23	401,17	-181,93
9	-125,84	181,93	5379,45	125,84	-181,93	10758,91

Tabla 57. Matriz elemental barra 2, obtenida con Excel.

3) Barra 3 – CD - Empotrada-Empotrada:

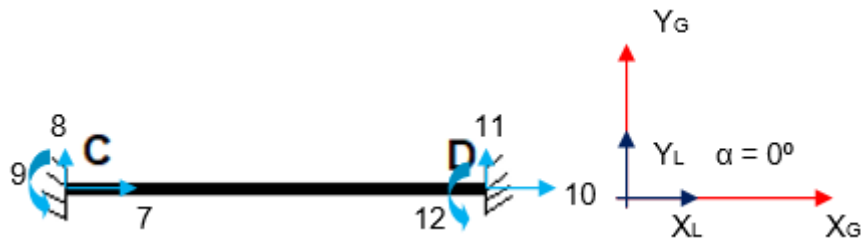


Figura 157. Barra 3 Problema.

En este caso, Figura 157, el ángulo girado sería 0 grados coincidiendo los ejes locales con los globales. Se podría no emplear la matriz de cambio, pero si se emplea se establecería el ángulo girado en 0°.

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 1:

$$L_3 = 75 \text{ cm}; \quad \alpha = 0 = 0 \text{ rad}; \quad \cos 0^\circ = 1; \quad \sin 0^\circ = 0;$$

$$[k]_{G3} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz, teniendo en cuenta que el coseno tiene valor 1 y el seno 0:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\cos 0^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 4,26 \text{ cm}^2}{75 \text{ cm}} = 1193,57 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) = 0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 90^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(75 \text{ cm})^2} = 0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\cos 0^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(75 \text{ cm})^3} = 5,58 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos 0^\circ) \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(75 cm)^2} = 209,31 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{75 cm} = 10465,36 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la matriz, Tabla 58:

	7	8	9	10	11	12
7	1193,57	0,00	0,00	-1193,57	0,00	0,00
8	0,00	5,58	209,31	0,00	-5,58	209,31
9	0,00	209,31	10465,37	0,00	-209,31	5232,68
10	-1193,57	0,00	0,00	1193,57	0,00	0,00
11	0,00	-5,58	-209,31	0,00	5,58	-209,31
12	0,00	209,31	5232,68	0,00	-209,31	10465,37

Tabla 58. Matriz elemental barra 3, obtenida con Excel.

4) Barra 4 – DF - Empotrada-Empotrada:

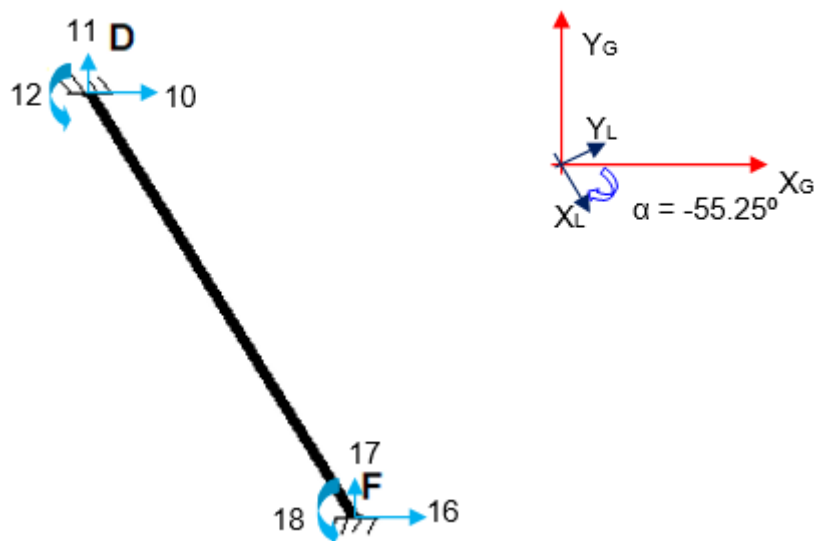


Figura 158. Barra 4 Problema.

De manera similar a la barra 2, Figura 158, los ejes de coordenadas locales se encuentran rotados un cierto ángulo respecto de los globales. En este caso ese giro tiene sentido horario siendo este negativo. Para determinar el ángulo de giro es necesario basarse en el diseño empleándose las ecuaciones vistas en el caso anterior, obteniendo:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{86,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}\right) = -55,25^\circ; \quad L = \sqrt{86,5^2 + 60^2} = 105,27 \text{ cm}$$

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 4:

$$L_4 = 105,27 \text{ cm}; \quad \alpha = -55,25^\circ = -0,964 \text{ rad}; \quad \cos -55,25^\circ = 0,569; \quad \sin -55,25^\circ = -0,821;$$

$$[k]_{G4} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$X = (\cos -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{105,27 \text{ cm}} + (\sin -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(105,27 \text{ cm})^3}$$

$$X = 277,59 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$Y = (\cos -55,25^\circ) \cdot (\sin -55,25^\circ) \cdot \left(\frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{105,27 \text{ cm}} - \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(105,27 \text{ cm})^3} \right)$$

$$Y = -397,29 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \frac{6EI}{L^2} = (\sin -55,25^\circ) \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,344 \text{ cm}^4}{(105,27 \text{ cm})^2} = -87,29 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \frac{12EI}{L^3}$$

$$W = (\sin -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{105,27 \text{ cm}} + (\cos -55,25^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(105,27 \text{ cm})^3}$$

$$W = 574,77 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos -55,25^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(105,27 cm)^2} = 60,55 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,344 cm^4}{105,27 cm} = 7455,92 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se incorporan en la matriz, Tabla 59:

	10	11	12	16	17	18
10	277,59	-397,29	87,29	-277,59	397,29	87,29
11	-397,29	574,77	60,55	397,29	-574,77	60,55
12	87,29	60,55	7455,93	-87,29	-60,55	3727,96
16	-277,59	397,29	-87,29	277,59	-397,29	-87,29
17	397,29	-574,77	-60,55	-397,29	574,77	-60,55
18	87,29	60,55	3727,96	-87,29	-60,55	7455,93

Tabla 59. Matriz elemental barra 4, obtenida con Excel.

5) Barra 5 – AC - Empotrada-Empotrada:

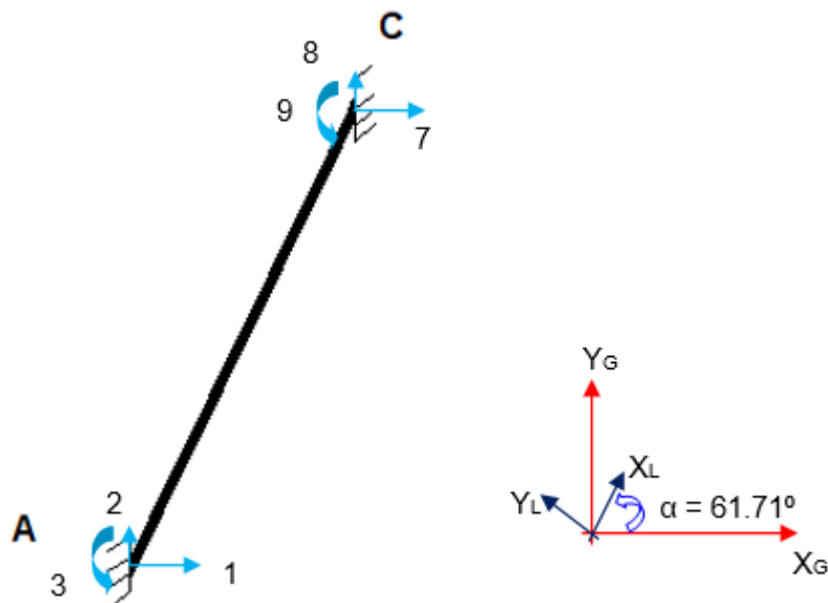


Figura 159. Barra 5 Problema.

De manera similar a los casos anteriores, Figura 159, los ejes de coordenadas se encuentran girados un cierto ángulo. En este caso ese giro tiene sentido antihorario siendo este positivo. Para determinarlo es necesario basarse en el diseño empleándose las ecuaciones vistas en el caso anterior, obteniendo:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{111,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}\right) = 61,71^\circ; \quad L = \sqrt{111,5^2 + 60^2} = 126,61 \text{ cm}$$

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 5:

$$L_5 = 126,61 \text{ cm}; \quad \alpha = 61,71^\circ = 1,07 \text{ rad}; \quad \cos 61,71^\circ = 0,473; \quad \sin 61,71^\circ = 0,880;$$

$$[k]_{G5} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, procedemos a calcular los elementos de la matriz:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$X = (\cos 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{126,61 \text{ cm}} + (\sin 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(126,61 \text{ cm})^3}$$

$$X = 159,65 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)$$

$$Y = (\cos 61,71^\circ) \cdot (\sin 61,71^\circ) \cdot \left(\frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{126,61 \text{ cm}} - \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(126,61 \text{ cm})^3} \right)$$

$$Y = 294,53 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 61,71^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(126,61 \text{ cm})^2} = 64,67 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3}$$

$$W = (\sin 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 cm^2}{126,61 cm} + (\cos 61,71^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(126,61 cm)^3}$$

$$W = 548,50 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\cos 61,71^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^4}{(126,61 cm)^2} = 34,80 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 cm^2}{126,61 cm} = 6198,95 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, los introducimos en la matriz, Tabla 60:

	1	2	3	7	8	9
1	159,65	294,53	-64,67	-159,65	-294,53	-64,67
2	294,53	548,50	34,80	-294,53	-548,50	34,80
3	-64,67	34,80	6198,96	64,67	-34,80	3099,48
7	-159,65	-294,53	64,67	159,65	294,53	64,67
8	-294,53	-548,50	-34,80	294,53	548,50	-34,80
9	-64,67	34,80	3099,48	64,67	-34,80	6198,96

Tabla 60. Matriz elemental barra 5, obtenida con Excel.

6) Barra 6 – DE - Empotrada-Empotrada:

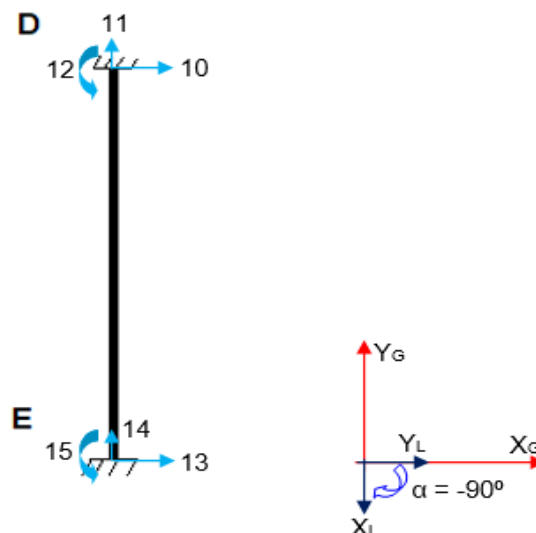


Figura 160. Barra 6 Problema.

La barra 6 de esta estructura, Figura 160, los ejes de coordenadas se encuentran girados un cierto ángulo. En este caso ese giro es de 90° en sentido horario siendo este negativo, por lo tanto, sería necesario emplear matriz de cambio.

Datos para calcular los elementos de la matriz elemental de la barra 6:

$$L_6 = 111,5 \text{ cm}; \quad \alpha = -90^\circ = -\frac{\pi}{2} = -1,57 \text{ rad}; \quad \cos -90^\circ = 0; \quad \sin -90^\circ = -1;$$

$$[k]_{G6} = \begin{bmatrix} X & Y & -V & -X & -Y & -V \\ Y & W & Z & -Y & -W & Z \\ -V & Z & F & V & -Z & F/2 \\ -X & -Y & V & X & Y & V \\ -Y & -W & -Z & Y & W & -Z \\ -V & Z & F/2 & V & -Z & F \end{bmatrix}$$

Con los datos expuestos, se procede a calcular los elementos de la matriz teniendo en cuenta que el coseno tiene valor de 0 y el seno -1:

$$X = (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{12 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(111,5 \text{ cm})^3} = 1,70 \frac{kN}{cm}$$

$$Y = (\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha) \cdot \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$V = (\sin \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = (\sin 90^\circ) \cdot \frac{6 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(111,5 \text{ cm})^2} = -94,70 \frac{kN}{cm}$$

$$W = (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{EA}{L} + (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{12EI}{L^3} = (\sin 90^\circ)^2 \cdot \frac{21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 4,26 \text{ cm}^2}{111,5 \text{ cm}} = 802,85 \frac{kN}{cm}$$

$$Z = (\cos \alpha) \cdot \frac{6EI}{L^2} = 0 \frac{kN}{cm}$$

$$F = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 21000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 9,34 \text{ cm}^2}{111,5 \text{ cm}} = 7039,48 \frac{kN}{cm}$$

Obtenidos todos los valores, se introducen en la matriz, Tabla 61:

	10	11	12	13	14	15
10	1,70	0,00	94,70	-1,70	0,00	94,70
11	0,00	802,85	0,00	0,00	-802,85	0,00
12	94,70	0,00	7039,48	-94,70	0,00	3519,74
13	-1,70	0,00	-94,70	1,70	0,00	-94,70
14	0,00	-802,85	0,00	0,00	802,85	0,00
15	94,70	0,00	3519,74	-94,70	0,00	7039,48

Tabla 61. Matriz elemental barra 6, obtenida con Excel.

Una vez obtenidas cada una de las matrices elementales de cada barra, siendo estas matrices y la matriz global de rigidez iguales para cualquier tipo de ensayo. Estas matrices no dependen de los esfuerzos y desplazamientos aplicados, sino que dependen de las propiedades y geometría de las barras. Por lo tanto, estas matrices las emplearemos de nuevo para el siguiente calculo analítico.

Para construir la matriz global de rigidez, se empieza generando una matriz con las mismas dimensiones que grados de libertad se tienen, en este caso serían 18 filas y 18 columnas.

A continuación, se procede a introducir cada elemento en su correspondiente lugar. Se puede encontrar el caso de tener elementos que tengan la misma posición, ocurre cuando confluyen dos barras en un mismo nodo, en este caso los elementos de ambas matrices se sumarian. Para el caso de los nodos que confluyen una barra, como pueden ser los apoyos, solamente existiría un elemento en esa posición.

La matriz global de rigidez, Tabla 62:

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	166,5	294,5	-304,9	-6,9	0,0	-240,3	-159,7	-294,5	-64,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	294,5	1827,3	34,8	0,0	-1278,8	0,0	-294,5	-548,5	34,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	-304,9	34,8	17411,8	240,3	0,0	5606,4	64,7	-34,8	3099,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	-6,9	0,0	240,3	838,8	571,2	114,4	-831,9	-571,2	181,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,0	-1278,8	0,0	1680,0	181,9	114,4	-571,2	-401,2	181,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	-240,3	0,0	5606,4	114,4	181,9	21971,8	125,8	-181,9	5379,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
7	-159,7	-294,5	64,7	-831,9	125,8	2185,2	865,8	-7,4	190,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	-294,5	-548,5	-34,8	-571,2	-401,2	-181,9	955,2	-7,4	-27423,2	0,0	-5,6	209,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
9	-64,7	34,8	3099,5	181,9	5379,5	190,5	-7,4	27423,2	0,0	0,0	-209,3	5232,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1193,6	0,0	1472,9	0,0	-397,3	182,0	-1,7	0,0	94,7	-277,6	397,3	87,3
11	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-5,6	-209,3	-397,3	0,0	1383,2	-148,8	0,0	-802,8	0,0	397,3	-574,8	60,6
12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	209,3	5232,7	182,0	-148,8	24960,8	-94,7	0,0	0,0	3519,7	-87,3	-60,6	3728,0
13	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,7	0,0	-94,7	0,0	1,7	0,0	-94,7	0,0	0,0	0,0
14	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	802,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	94,7	0,0	0,0	3519,7	-94,7	0,0	7039,5	0,0	0,0	0,0
16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-277,6	0,0	0,0	-87,3	0,0	0,0	0,0	277,6	-397,3	-87,3
17	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	397,3	0,0	-574,8	-60,6	0,0	0,0	0,0	0,0	574,8	-60,6
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	87,3	60,6	3728,0	0,0	0,0	0,0	-87,3	-60,6	7455,9

Tabla 62. Matriz global de rigidez Ensayo A, obtenida con Excel

Una vez obtenida la matriz global de rigidez, siendo esta la matriz $[k]$ de la expresión Ec. 1. Posteriormente, se obtienen el vector de desplazamientos y esfuerzos.

Para el vector de desplazamientos $\{U\}$ sería un vector columna con 18 filas igual al numero de grados de libertad. Este vector sería sencillo de construir, ya que, solo puede presentar dos tipos de valores: las incógnitas que se quieren llegar a calcular y valores nulos en los casos donde el desplazamiento este restringido debido a las condiciones de contorno. También se puede considerar la aparición de otro tipo de valor como podría ser un desplazamiento impuesto, pero este no sería nuestro caso. El vector desplazamiento sería el siguiente, Tabla 63:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 63. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos $\{P\}$ recoge las cargas en los nodos, según cada grado de libertad de la estructura como ocurría con el vector desplazamiento. Las cargas en los nodos pueden ser debidas: reacciones, aparecen en los apoyos A, E y F donde era nulo el desplazamiento, cargas exteriores aplicadas en los nodos o cargas exteriores aplicadas en las barras donde esas cargas habría que trasladárselas a los nodos.

El vector de esfuerzos sería el siguiente, Tabla 64:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -46.8 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 64. Vector esfuerzos.

Una vez calculados ambos vectores y la matriz global de rigidez, la expresión anterior quedaría de la siguiente manera:

Rax	166,5	294,5	-304,9	-6,9	0,0	-240,3	-159,7	-294,5	-64,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Ray	294,5	1827,3	34,8	0,0	-1278,8	0,0	-294,5	-548,5	34,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Ma	-304,9	34,8	17411,8	240,3	0,0	5606,4	64,7	-34,8	3099,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
0	-6,9	0,0	240,3	838,8	571,2	114,4	-831,9	-571,2	-125,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ubx
0	0,0	-1278,8	0,0	571,2	1680,0	181,9	-571,2	-401,2	181,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Uby
0	-240,3	0,0	5606,4	114,4	181,9	21971,8	125,8	-181,9	5379,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ob
0	-159,7	-294,5	64,7	-831,9	-571,2	125,8	2185,2	865,8	190,5	-1193,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ucx
0	-294,5	-548,5	-34,8	-571,2	-401,2	-181,9	865,8	955,2	-7,4	0,0	-5,6	209,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ucy
0	-64,7	34,8	3099,5	-125,8	181,9	5379,5	190,5	-7,4	27423,2	0,0	-209,3	5232,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Oc
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1193,6	0,0	0,0	1472,9	-397,3	182,0	-1,7	0,0	94,7	-277,6	397,3	Udx
46,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-5,6	-209,3	-397,3	1383,2	-148,8	0,0	-802,8	0,0	397,3	-574,8	Udy
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	209,3	5232,7	182,0	-148,8	24960,8	-94,7	0,0	3519,7	-87,3	-60,6	Od
Rex	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,7	0,0	-94,7	1,7	0,0	-94,7	0,0	0,0	0,00
Rey	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-802,8	0,0	0,0	802,8	0,0	0,0	0,0	0,00
Me	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	94,7	0,0	3519,7	-94,7	0,0	7039,5	0,0	0,0	0,00
Rfx	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-277,6	397,3	-87,3	0,0	0,0	0,0	277,6	-397,3	-87,3
Rfy	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	397,3	-574,8	-60,6	0,0	0,0	0,0	-397,3	574,8	-60,6
Mf	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	87,3	60,6	3728,0	0,0	0,0	0,0	-87,3	-60,6	7455,9

Vector de esfuerzos {P}

Matriz elemental global [k]

Vector desplazamientos {U}

Para calcular las incógnitas, se tendría que multiplicar la matriz global de rigidez con el vector de desplazamientos creando un sistema de ecuaciones. Este sistema se vuelve algo complejo, por lo tanto, para simplificar mayormente esta operación primero llevaríamos a cabo el cálculo de los desplazamientos de los nodos.

Para ello, se tomaría una parte de nuestro vector de esfuerzos, siendo esta parte los elementos conocidos del mismo. Posteriormente, se escogerían las mismas filas tomadas antes para la matriz global y el vector desplazamientos, pero eliminando los tres primeros elementos de cada fila y los últimos 6, ya que, el desplazamiento en ellos sería nulo. Quedando de la siguiente manera, Tabla 65:

0	Igual(=)	838,8	571,2	114,4	-831,9	-571,2	-125,8	0,0	0,0	0,0	*	Ubx
0		571,2	1680,0	181,9	-571,2	-401,2	181,9	0,0	0,0	0,0		Uby
0		114,4	181,9	21971,8	125,8	-181,9	5379,5	0,0	0,0	0,0		Θb
0		-831,9	-571,2	125,8	2185,2	865,8	190,5	-1193,6	0,0	0,0		Ucx
0		-571,2	-401,2	-181,9	865,8	955,2	-7,4	0,0	-5,6	209,3		Ucy
0		-125,8	181,9	5379,5	190,5	-7,4	27423,2	0,0	-209,3	5232,7		Θc
0		0,0	0,0	0,0	-1193,6	0,0	0,0	1472,9	-397,3	182,0		Udx
46,5		0,0	0,0	0,0	0,0	-5,6	-209,3	-397,3	1383,2	-148,8		Udy
0		0,0	0,0	0,0	0,0	209,3	5232,7	182,0	-148,8	24960,8		Θd

Tabla 65. Expresión Calculo vector desplazamiento.

Para determinarlos, se tendría que realizar la inversa de la matriz global de rigidez y su producto con el vector de esfuerzos tomado, realizándose la siguiente operación:

$$\{P\} = [k] \cdot \{U\} \rightarrow [k]^{-1} \cdot \{P\} = \{U\}$$

Soluciones:

U _{BX}	=	-0,495	mm
U _{BY}		0,001	mm
Θ _{BZ}		0,001	rad
U _{CX}		-0,776	mm
U _{CY}		0,406	mm
Θ _{CZ}		-0,000	rad
U _{DX}		-0,780	mm
U _{DY}		-0,562	mm
Θ _{DZ}		0,000	rad

Tabla 66. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

Los esfuerzos se obtienen una vez conocidos los desplazamientos. Para ello, se tomarían el resto de filas que antes no se han tenido en cuenta del vector de esfuerzos. Después, se escogerían las filas de la matriz global sombreadas en color

naranja y multiplicamos vectorialmente por el vector desplazamientos calculado, Tabla 66

Rax	Igual(=)	-6,9	0,0	-240,3	-159,7	-294,5	-64,7	0,0	0,0	0,0	*	-0,05
Ray		0,0	-1278,8	0,0	-294,5	-548,5	34,8	0,0	0,0	0,0		0,00
Ma		240,3	0,0	5606,4	64,7	-34,8	3099,5	0,0	0,0	0,0		0,00
Rex		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,7	0,0	-94,7		-0,08
Rey		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-802,8	0,0		0,04
Me		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	94,7	0,0	3519,7		0,00
Rfx		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-277,6	397,3	-87,3		-0,08
Rfy		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	397,3	-574,8	-60,6		-0,06
Mf		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	87,3	60,6	3728,0		0,00

Tabla 67. Expresión Calculo vector desplazamiento.

Soluciones:

R _{AX}	=	517,39	N
R _{AY}		465,19	N
M _{AZ}		-130,61	N·m
R _{EX}		136,26	N
R _{EY}		45082,25	N
M _{EZ}		-75,27	N·m
R _{FX}		-653,66	N
R _{FY}		1290,06	N
M _{FZ}		-103,57	N·m

Tabla 68. Matriz soluciones esfuerzos.

Estas dos tablas, Tabla 66 y Tabla 68, son las soluciones obtenidas en el estudio del cálculo analítico ensayo A con estructura optimizada, empleando el método matricial o también llamado de la rigidez donde se detallará en la memoria estos resultados.

6. ANEXO 6: Calculo analítico Ensayo B con estructura optimizada

6.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria, en el cual se indica el proceso de cálculo y los resultados obtenidos en nuestra jaula de seguridad, mediante el método de la rigidez o matricial comentado.

Este cálculo matricial constara de hallar cada una de las matrices elementales perteneciente a cada barra. Posteriormente se conseguirá la matriz global de rigidez para poder calcular todos los desplazamientos y giros de los nodos que a continuación se aclara.

La estructura a emplear se encuentra mostrada en la Figura 85 donde se pueden ver las 6 barras que serán estudiadas. Los cálculos en este anexo se simplifican porque la matriz global de rigidez es constante para ambos ensayos, ya que no depende de los esfuerzos y desplazamientos aplicados. Esta matriz depende de las propiedades del material y la geometría, pero en este caso solo se cambia el sistema de aplicación de la carga.

6.2. Resolución calculo analítico ensayo B estructura optimizada

Como en el anexo anterior, la realización de este ensayo lleva consigo la necesidad de detallar los nodos empleados en este análisis, incluyendo los apoyos. Posteriormente, se obtendrán sus correspondientes desplazamientos, giros y reacciones de estos.

En cuanto al número de grados de libertad sería 18 de nuevo, Figura 86, porque se consideran los nodos rígidos. Por lo tanto, cada nodo tendría tres restricciones al encontrarse en un plano de estructura en 2D. La matriz global de rigidez de la estructura tendría un tamaño igual al número de grados de libertad.

El esfuerzo a emplear en este ensayo, sería una fuerza tridimensional la cual se descompone en los tres ejes de coordenadas. Uno de ellos no se considera, ya que se trata de una estructura plana. El valor de esta carga o esfuerzo sería el siguiente:

$$F_B (daN) = 3,5 \left(\frac{daN}{kg} \right) \cdot W (kg) \rightarrow F_B (N) = 35 \left(\frac{N}{kg} \right) \cdot W (kg)$$

Siendo W:

$$W = \text{peso del vehiculo}(kg) + 160 \text{ kg} = 1089kg + 160kg = 1249 \text{ kg}$$

$$F_B = 35 \frac{N}{kg} \cdot 1249 \text{ kg} = 43715 \text{ N} = 43,7 \text{ kN}$$

Esta carga se encontraba girada respecto al eje longitudinal un ángulo de 5° y con respecto al eje transversal un ángulo de 25° , Figura 161 y Figura 162.

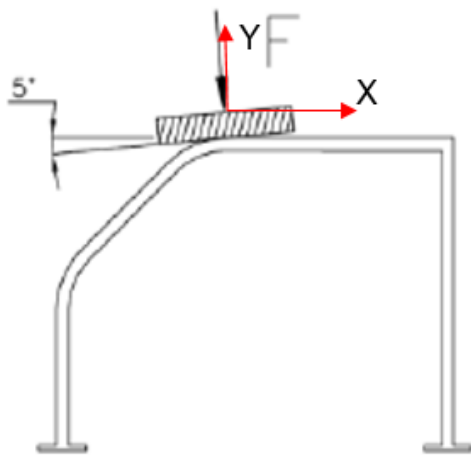


Figura 161. Eje longitudinal.

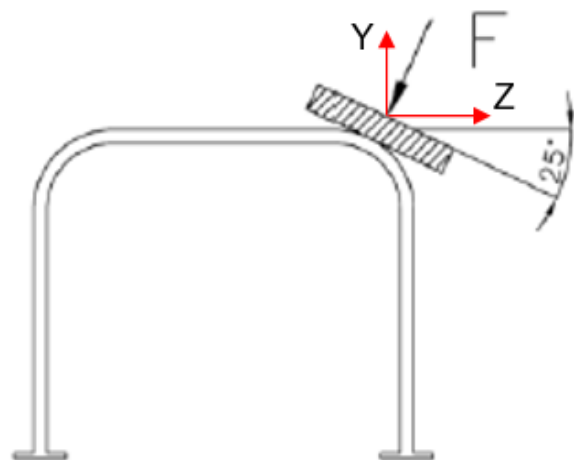


Figura 162. Eje Transversal.

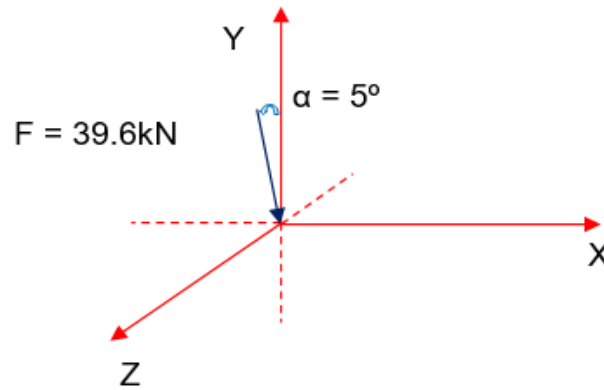
Primeramente, para trasladarse esta fuerza al plano XY del problema se tiene primero que multiplicar esa fuerza por el coseno de 25° porque es el ángulo que se encuentra rotado en el plano ZY.

$$F = 43,7N \cdot \cos 25^\circ = 39,6 \text{ kN}$$

La fuerza que actuaría en dirección al eje Z, sería:

$$F_Z = 43,7N \cdot \sin 25^\circ = 18,4 \text{ kN}$$

El cálculo de esta fuerza será útil para posteriormente emplearla en el programa de ANSYS.



Para calcular el esfuerzo generado en el eje X e Y, sería de la siguiente manera:

$$F_X = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \operatorname{sen} 5^\circ = 3,5 \text{ kN}$$

$$F_Y = 43,7N \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ = -39,5 \text{ kN}$$

El problema a resolver quedaría de la siguiente manera con la fuerza aplicada en el nodo C, Figura 163:

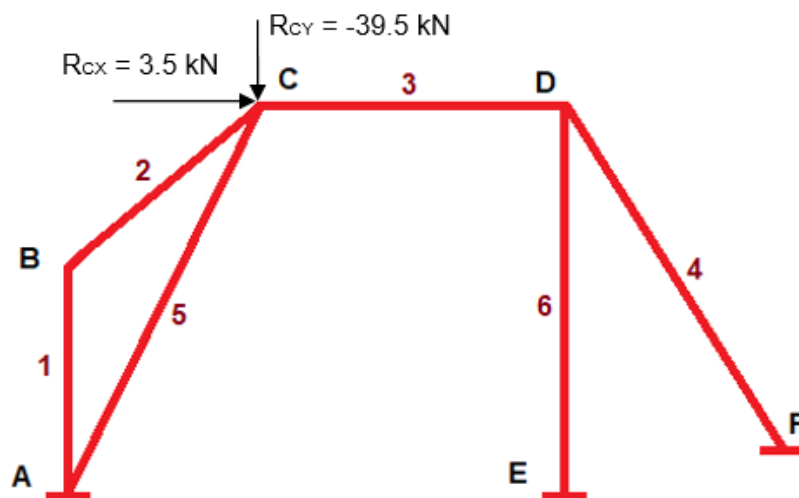


Figura 163. Croquis problema a resolver.

Una vez planteado el problema a resolver, se procede primero a realizar el cálculo de las matrices elementales de cada una de las barras. Así mismo, se detallarán los vectores de esfuerzos y desplazamientos. Finalmente empleando la expresión Ec. 1, se obtendrán las incógnitas de estos vectores.

Se detallan los datos que son comunes a todas las barras, siendo estos Tabla 69:

Área (cm ²)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	R _{CX} (kN)	R _{CY} (kN)
4,26	9,34	21000	3,5	-39,5

Tabla 69. Datos comunes a todas las barras.

Para el cálculo de la matriz global de rigidez de esta estructura se ha de observar el Anexo 5 donde se ha llevado a cabo el cálculo de dicha matriz elaborando cada una de las barras. Cabe señalar, que en este caso la estructura tiene las mismas propiedades, la única diferencia es la carga aplicada sobre esta. Asimismo, la matriz global de rigidez es Tabla 62.

Una vez obtenida la matriz global de rigidez, siendo esta la matriz $[k]$ de la expresión Ec. 1. Posteriormente, se obtienen el vector de desplazamientos y esfuerzos.

El vector de desplazamientos $\{U\}$ sería un vector columna con 18 filas igual al número de grados de libertad. Este vector representa los mismos valores que el vector desplazamientos $\{U\}$ del Anexo 5, ya que se trata del mismo sistema. Quedando de la siguiente manera, Tabla 70:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{AX} \\ U_{AY} \\ \theta_{AZ} \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ U_{EX} \\ U_{EY} \\ \theta_{EZ} \\ U_{FX} \\ U_{FY} \\ \theta_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{BX} \\ U_{BY} \\ \theta_{BZ} \\ U_{CX} \\ U_{CY} \\ \theta_{CZ} \\ U_{DX} \\ U_{DY} \\ \theta_{DZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Tabla 70. Vector desplazamiento.

El vector de esfuerzos $\{P\}$ sería distinto en comparación con el anexo anterior. Las cargas en los nudos pueden ser debidas: reacciones, aparecen en los apoyos A, E y F donde era nulo el desplazamiento, cargas exteriores aplicadas en los nodos o

cargas exteriores aplicadas en las barras donde esas cargas habría que trasladárselas a los nodos. Quedando de la siguiente manera, Tabla 71:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ M_{BZ} \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_{CZ} \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_{DZ} \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_{AZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,5 \\ -39,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{EX} \\ R_{EY} \\ M_{EZ} \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_{FZ} \end{bmatrix} (kN)$$

Tabla 71. Vector esfuerzos.

Una vez se obtienen ambos vectores y la matriz global de rigidez, la expresión Ec. 1 quedaría de la siguiente manera:

Rax	igual(=)	166,5	294,5	-304,9	-6,9	0,0	-240,3	-159,7	-294,5	-64,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	
Ray		294,5	1827,3	34,8	0,0	-1278,8	0,0	-294,5	-548,5	34,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	
Ma		-304,9	34,8	17411,8	240,3	0,0	5606,4	64,7	-34,8	3099,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	
0		-6,9	0,0	240,3	838,8	571,2	114,4	-831,9	-571,2	-125,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ubx	
0		0,0	-1278,8	0,0	571,2	1680,0	181,9	-571,2	-401,2	181,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Uby	
0		-240,3	0,0	5606,4	114,4	181,9	21971,8	125,8	-181,9	5379,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Θb	
3,45		-159,7	-294,5	64,7	-831,9	-571,2	125,8	2185,2	865,8	190,5	-1193,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ucx	
-39,47		-294,5	-548,5	-34,8	-571,2	-401,2	-181,9	865,8	955,2	-7,4	0,0	-5,6	209,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Ucy	
0		-64,7	34,8	3099,5	-125,8	181,9	5379,5	190,5	-7,4	27423,2	0,0	-209,3	5232,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	Θc	
0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1193,6	0,0	0,0	1472,9	-397,3	182,0	-1,7	0,0	94,7	-277,6	397,3	87,3	
0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-5,6	-209,3	-397,3	1383,2	-148,8	0,0	-802,8	0,0	397,3	-574,8	60,6	
0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	209,3	5232,7	182,0	-148,8	24960,8	-94,7	0,0	3519,7	-87,3	-60,6	3728,0
Rex		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,7	0,0	-94,7	1,7	0,0	-94,7	0,0	0,0	0,0	0,00
Rey		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-802,8	0,0	0,0	802,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Me		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	94,7	0,0	3519,7	-94,7	0,0	7039,5	0,0	0,0	0,0	0,00
Rfx	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-277,6	397,3	-87,3	0,0	0,0	0,0	277,6	-397,3	-87,3	0,00	
Rfy	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	397,3	-574,8	-60,6	0,0	0,0	0,0	-397,3	574,8	-60,6	0,00	
Mf	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	87,3	60,6	3728,0	0,0	0,0	0,0	-87,3	-60,6	7455,9	0,00	

Vector de esfuerzos {P}

Matriz elemental global [k]

Vector desplazamientos {U}

Para calcular las incógnitas, se tendría que multiplicar la matriz global de rigidez con el vector de desplazamientos creando un sistema de ecuaciones. Este sistema se vuelve algo complejo, por lo tanto, para simplificar mayormente esta operación primero llevaríamos a cabo el cálculo de los desplazamientos de los nodos.

Para ello, se tomaría una parte de nuestro vector de esfuerzos, siendo esta parte los elementos conocidos del mismo. Posteriormente, se escogerían las mismas filas tomadas antes para la matriz global y el vector desplazamientos, pero eliminando los tres primeros elementos de cada fila y los últimos 6, ya que, el desplazamiento en ellos sería nulo. Quedando de la siguiente manera, Tabla 72:

0	Igual(=)	838,8	571,2	114,4	-831,9	-571,2	-125,8	0,0	0,0	0,0	Ubx
0		571,2	1680,0	181,9	-571,2	-401,2	181,9	0,0	0,0	0,0	Uby
0		114,4	181,9	21971,8	125,8	-181,9	5379,5	0,0	0,0	0,0	Θb
3,45		-831,9	-571,2	125,8	2185,2	865,8	190,5	-1193,6	0,0	0,0	Ucx
-39,47		-571,2	-401,2	-181,9	865,8	955,2	-7,4	0,0	-5,6	209,3	* Ucy
0		-125,8	181,9	5379,5	190,5	-7,4	27423,2	0,0	-209,3	5232,7	Θc
0		0,0	0,0	0,0	-1193,6	0,0	0,0	1472,9	-397,3	182,0	Udx
0		0,0	0,0	0,0	0,0	-5,6	-209,3	-397,3	1383,2	-148,8	Udy
0		0,0	0,0	0,0	0,0	209,3	5232,7	182,0	-148,8	24960,8	Θd

Tabla 72. Expresión Calculo vector desplazamiento.

Para determinarlos, tendríamos que realizar la inversa de la matriz global y su producto con el vector de esfuerzos tomado, realizaríamos la siguiente operación:

$$[P] = [k] \cdot [U] \rightarrow [k]^{-1} \cdot [P] = [U]$$

Soluciones:

U _{BX}	=	0,536	mm
U _{BY}		-0,007	mm
Θ _{BZ}		-0,002	rad
U _{CX}		1,577	mm
U _{CY}		-1,524	mm
Θ _{CZ}		-0,001	rad
U _{DX}		1,381	mm
U _{DY}		0,388	mm
Θ _{DZ}		0,001	rad

Tabla 73. Matriz soluciones desplazamientos y giros.

Los esfuerzos se obtienen una vez conocidos los desplazamientos. Para ello, se tomarían el resto de filas que antes no se han tenido en cuenta del vector de esfuerzos. Después, se escogerían las filas de la matriz global sombreadas en color

DISEÑO Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURA ANTIVUELCO DESTINADA A LA COMPETICIÓN
AUTOMOVILÍSTICA

naranja y multiplicamos vectorialmente por el vector desplazamientos calculado.
Véase Tabla 74.

Rax	Igual(=)	-6,9	0,0	-240,3	-159,7	-294,5	-64,7	0,0	0,0	0,0	*	0,05
Ray		0,0	-1278,8	0,0	-294,5	-548,5	34,8	0,0	0,0	0,0		0,00
Ma		240,3	0,0	5606,4	64,7	-34,8	3099,5	0,0	0,0	0,0		0,00
Rex		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,7	0,0	-94,7		0,16
Rey		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-802,8	0,0		-0,16
Me		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	94,7	0,0	3519,7		0,00
Rfx		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-277,6	397,3	-87,3		0,14
Rfy		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	397,3	-574,8	-60,6		0,04
Mf		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	87,3	60,6	3728,0		0,00

Tabla 74. Expresión Calculo vector desplazamiento.

Soluciones:

R _{AX}	=	19940,00	N
R _{AY}		38196,71	N
M _{AZ}		182,15	N*m
R _{EX}		-364,66	N
R _{EY}		-31186,19	N
M _{EZ}		190,98	N*m
R _{FX}		-23028,38	N
R _{FY}		32457,96	N
M _{FZ}		209,34	N*m

Tabla 75. Matriz soluciones esfuerzos.

Estas dos tablas, Tabla 73 y Tabla 75, se encuentran las soluciones obtenidas en el estudio del cálculo analítico ensayo B con estructura sin modificar empleando el método matricial o también llamado de la rigidez donde se detallará en la memoria estos resultados.

7. ANEXO 7: Estudio del pandeo, carga crítica de Euler con estructura optimizada

7.1. Introducción

En este anexo se detalla a la memoria, en el cual se indica el procedimiento realizado junto con los resultados hallados en nuestra estructura mediante el estudio del pandeo en algunas de estas barras calculando la carga crítica de Euler.

Dicho cálculo constara de determinar la carga critica comentada anteriormente en la memoria. Éste representa la máxima carga de compresión que dicha barra podría soportar antes de producirse el pandeo, para evitar el desplazamiento de su centro de gravedad y la disminución de su capacidad resistente a compresión. Mediante la expresión Ec. 2.

7.2. Resolución Estudio a Pandeo

Por tanto, para este nuevo análisis es necesario detallar cuales son las barras a ensayar. Para ello, se hace referencia a la estructura que aparece en la Figura 85.

Se realizará el estudio de aquellas barras donde la longitud efectiva de pandeo sea mayor, es decir las barras cuya longitud destaque frente al resto. Cabe señalar, que éstas serían las que tienden más fácilmente a producirse el pandeo debido a su larga longitud comparada con su sección. Posteriormente, esta carga crítica puede ser comparada con que tendrá en la base dicha barra, siendo esta reacción el esfuerzo de compresión al que estaría sometida.

La barra más larga que se encuentra sería la 6, perteneciente al arco principal donde aplicábamos la carga del ensayo A de manera vertical hacia abajo.

- Estudio a pandeo Barra 6:

Las propiedades de esa barra son, Tabla 76:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
111,5	9,34	21000	0,7

Tabla 76. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7, ya que se ha considerado empotrada en la base, y a la misma vez articulada en la parte de arriba. En los ensayos anteriores se ha estudiado el desplazamiento del nodo superior, nodo D, por lo tanto, se considera empotrada–articulada, Figura 92.

Calculamos la longitud de pandeo, L_K :

$$L_K = \beta \cdot L \rightarrow L_K = 0,7 \cdot 111,5 \text{ cm} = 78,05 \text{ cm}$$

Obteniendo la carga critica de Euler:

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_K^2} \rightarrow N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 9,344 \text{ cm}^4}{(78,05 \text{ cm})^2} = 317,91 \text{ kN}$$

En este caso también se podría calcular la carga critica de Euler para la barra 4, pero ésta tiene una longitud menor a la anterior siendo la carga Crítica de Euler mayor. Cabe destacar, que si el estudio de la barra 6 cumple este también lo haría al ser de menor longitud.

Otra barra que tendría una longitud aun mayor sería la unión de la barra 1 y 2 considerándola como una barra continua. El conjunto mencionado anteriormente se consideraría como una barra recta y vertical de una longitud igual a la suma de ambas.

Una parte de esta unión se encuentra de manera vertical por ello calcularíamos cual sería el valor máximo de compresión soportado por el conjunto, siendo este superior al que soportaría el tramo vertical. De este modo el problema se encontraría del lado de la seguridad debido a que, si dicha nueva barra cumple, la barra 1 al ser más corta cumpliría de igual manera. Partimos del nodo C porque es donde se aplica la carga del Ensayo B.

- Estudio a pandeo Barra 1 y 2:

Las propiedades de esa barra son, Tabla 77:

L (cm)	I (cm ⁴)	E (kN/cm ²)	β
142,95	9,34	21000	0,7

Tabla 77. Datos barra 6.

El coeficiente a pandeo tomado sería 0,7, ya que se ha considerado empotrada en la base, y a la misma vez articulada en la parte de arriba. En los ensayos anteriores se ha estudiado el desplazamiento del nodo superior, nodo D, por lo tanto, se considera empotrada–articulada, Figura 93.

Calculamos la longitud de pandeo, L_K :

$$L_K = \beta \cdot L \rightarrow L_K = 0,7 \cdot 142,95 \text{ cm} = 100,06 \text{ cm}$$

Obteniendo la carga crítica de Euler:

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_K^2} \rightarrow N_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 9,34 \text{ cm}^4}{(100,06 \text{ cm})^2} = 193,41 \text{ kN}$$

En este caso, como el anterior también se podría calcular la carga crítica de Euler para la barra 5, pero ésta tiene una longitud menor a la anterior siendo la carga Crítica de Euler mayor. Cabe señalar, que si el estudio de estas dos barras cumple este también lo haría al ser de menor longitud.

PRESUPUESTO: DOCUMENTO N°3

1. Descripción

A continuación, se obtiene el presupuesto orientativo del presente Proyecto. Se mostrarán las diferentes partidas del proyecto.

Se plantea que para cubrir gastos generales que puedan surgir durante la materialización y montaje del diseño del proyecto se incluyen unos gastos generales del 15%. Éstos son todos aquellos gastos de una empresa que no pueden considerarse como costos directos de producción, pero que son necesarios para el funcionamiento de esta.

El beneficio industrial tomado es del 10% sobre el presupuesto.

2. Precios unitarios

2.1. Acero 25CrMo4 (AISI 4130)

		Unidad
2.1.1	Acero 25CrMo4 (AISI 4130)	kg
	Precio unitario	1,40 €
UN EURO CON CUARENTA CÉNTIMOS		

2.2. Sujeción

		Unidad
2.2.1	Tornillo M8 calidad ISO 8.8	unid.
	Precio unitario	0,15 €
QUINCE CÉNTIMOS		

		Unidad
2.2.2	Tuerca autoblocante	unid.
	Precio unitario	0,08 €
OCHO CÉNTIMOS		

		Unidad
2.2.3	Arandela de bloqueo	unid.
	Precio unitario	0,05 €
CINCO CÉNTIMOS		

2.3. Mano de obra

		Unidad
2.3.1	Operario taller	Horas
	Precio unitario	27,50 €
	VEINTISIETE CON CINCUENTA CÉNTIMOS	

3. Presupuestos parciales

3.1. Precio estructura

PRESUPUESTO PARCIAL 1: ACERO 25CrMo4 (AISI 4130)			
Código	Unidades	Concepto	Precio unidad (€/Unidad)
2.1.1	113,97 kg	Precio material acero	1,40 €/kg
TOTAL			159,55 €

3.2. Sujeción

PRESUPUESTO PARCIAL 2: SUJECIÓN			
Código	Unidades	Concepto	Precio unidad (cent.)
2.2.1	24 unid.	Precio tornillos M8	0,15 €/unid.
2.2.2	24 unid.	Precio tuercas	0,08 €/unid.
2.2.3	48 unid.	Precio arandelas	0,05 €/unid.
TOTAL			7,92 €

3.3. Mano de obra

PRESUPUESTO PARCIAL 3: Operario taller			
Código	Unidades	Concepto	Precio unidad (€/Unidad)
2.3.1	18 horas	Precio mano de obra	27,50 €/hora
TOTAL			495 €

4. Presupuesto general

PRESUPUESTO GENERAL	
PRESUPUESTO PARCIAL	Importe (€)
Acero 25CrMo4 (AISI 4130)	159,56
Sujeción	7,92
Operario taller	495,00
Subtotal	662,48 €

Concepto	Porcentaje	Cantidad (€)
Gastos generales	13%	86,12
Beneficio industrial	10%	66,25
Total, presupuesto a contratar		814,85
Total, presupuesto con IVA		985,97 €

El coste orientativo del proyecto asciende hasta una cantidad de:

985,97 €

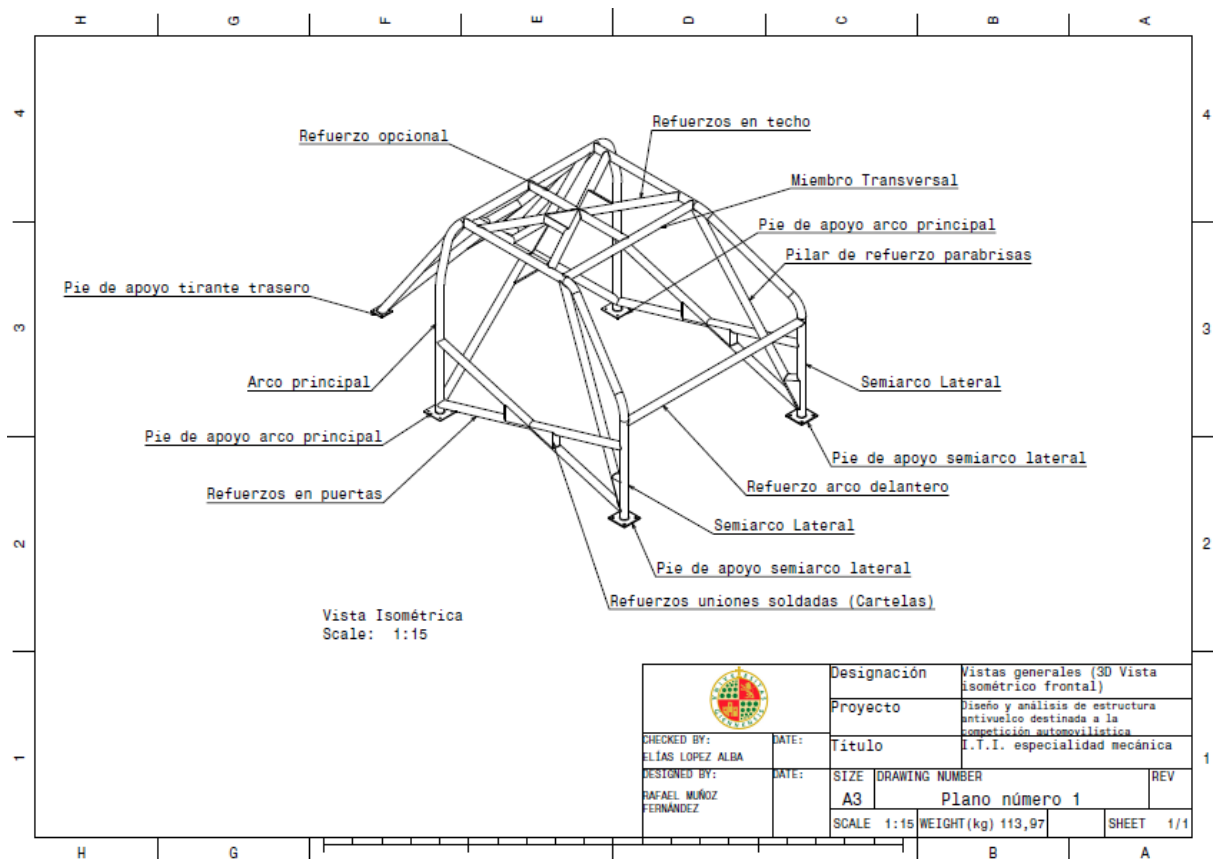
NOVECIENTOS OCHENTA Y CINCO CON NOVENTA Y SIETE

PLANOS: DOCUMENTO Nº4

Seguidamente, se procede a mostrar los diferentes planos, en los que se indican las diferentes partes de esta estructura junto con todas sus dimensiones para poder llevar a cabo su fabricación. Además, se incluyen planos donde se especifican las diferentes partes de ésta y vistas de detalle. Cabe señalar que su desarrollo es orientativo, mediante el software de Catia.

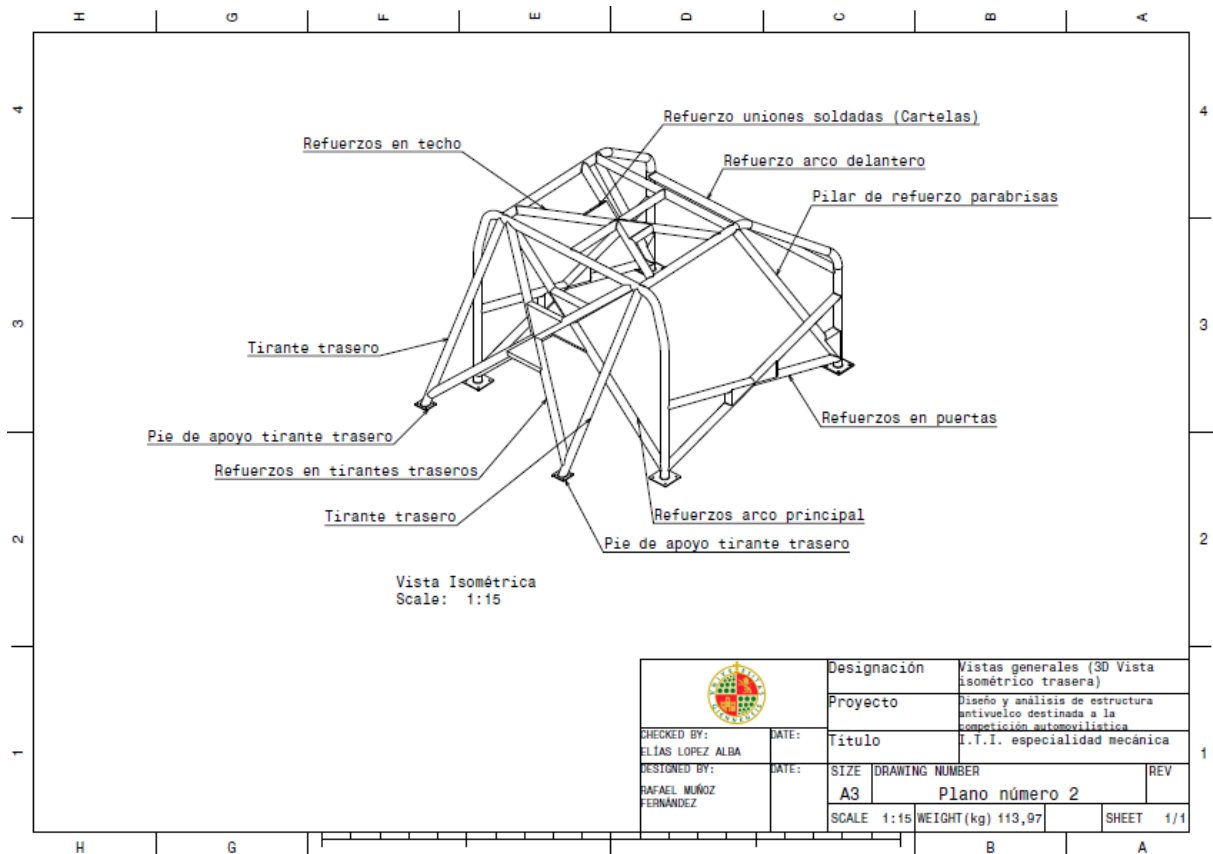
1. Plano 1

Plano con las vistas generales en 3D (Vista isométrica frontal). Se encuentran nombradas las diferentes partes de esta estructura.



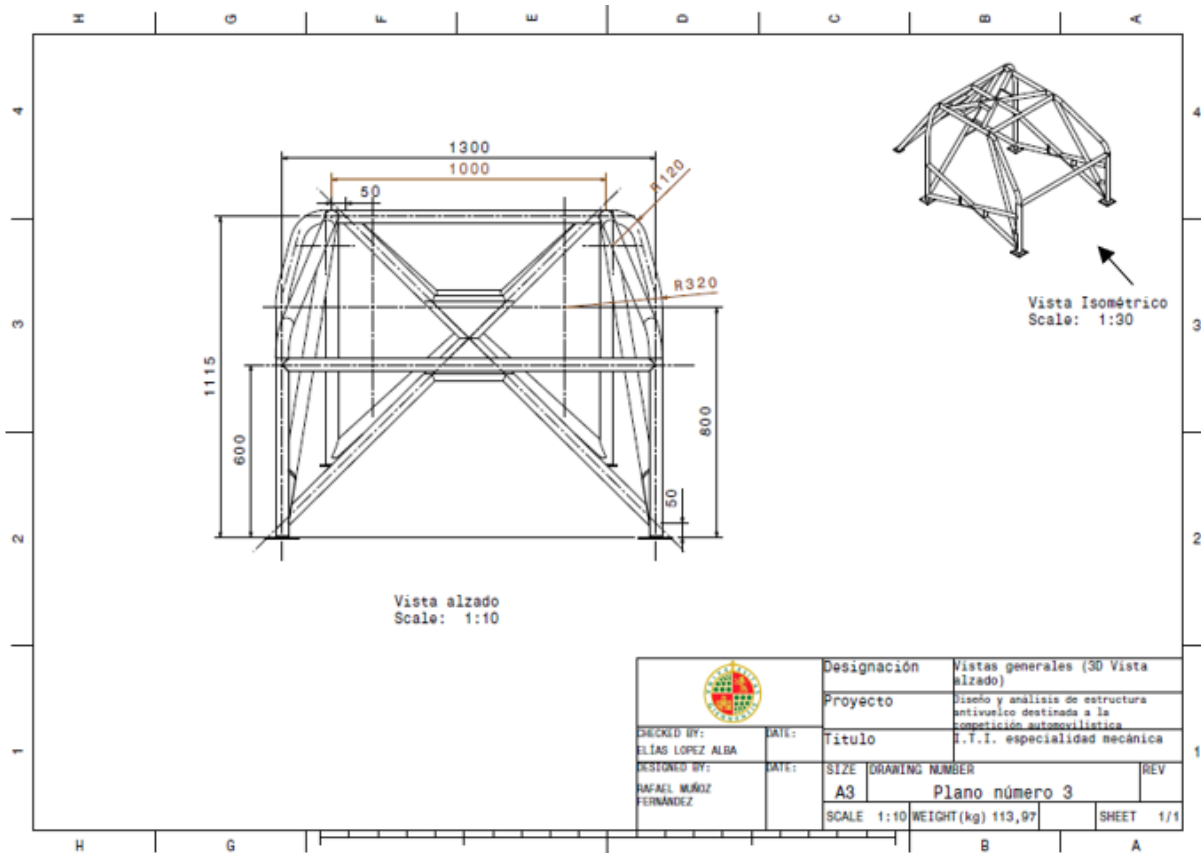
2. Plano 2

Plano con las vistas generales en 3D (Vista isométrica trasera). Se encuentran nombradas las diferentes partes de esta estructura.



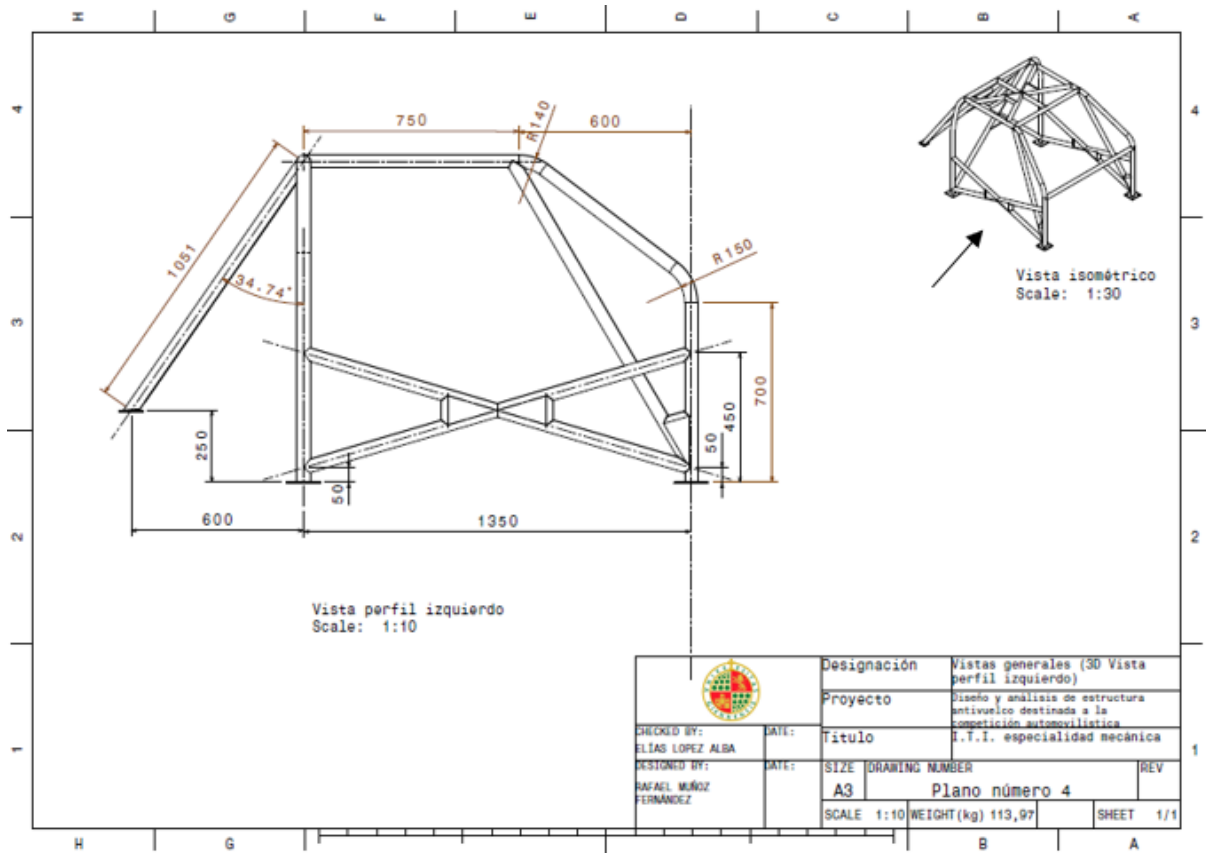
3. Plano 3

Plano en vista alzado mostrando, las dimensiones de la estructura.



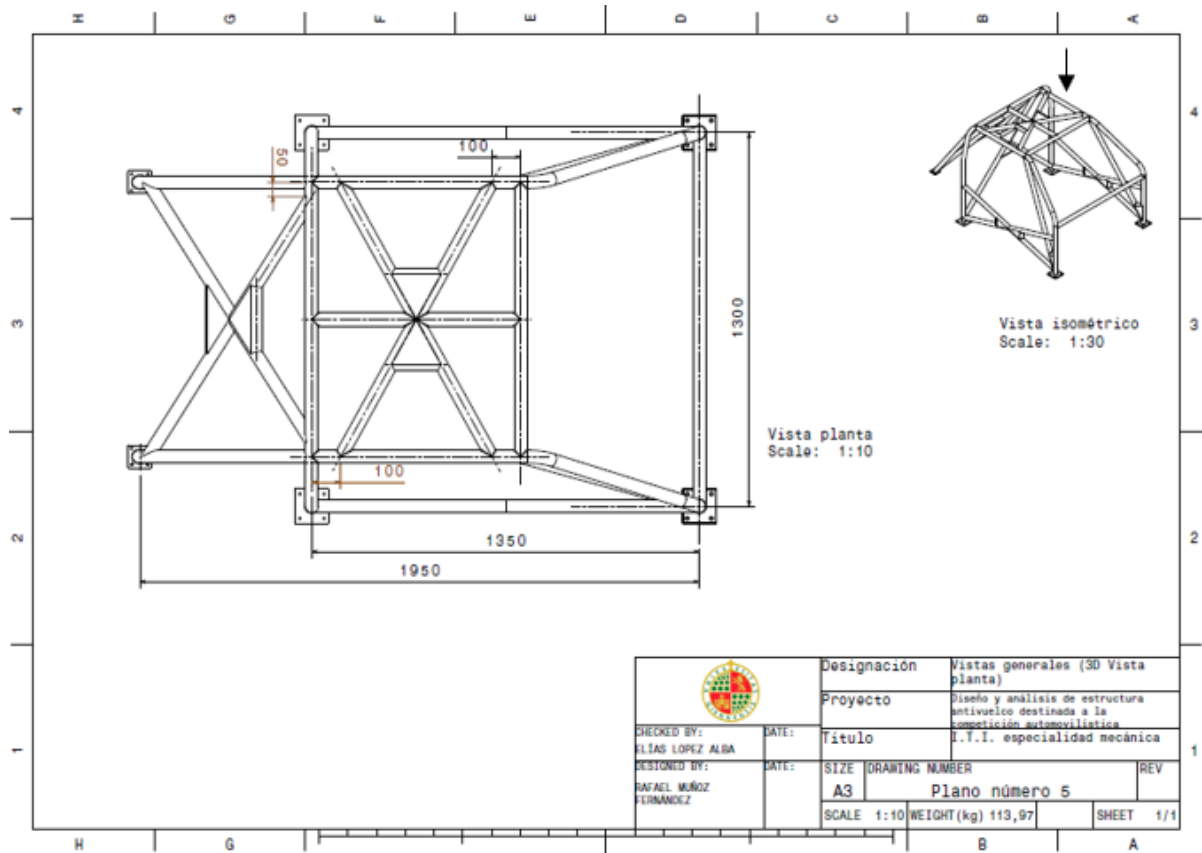
4. Plano 4

Plano en vista perfil izquierdo, mostrando las dimensiones de la estructura.



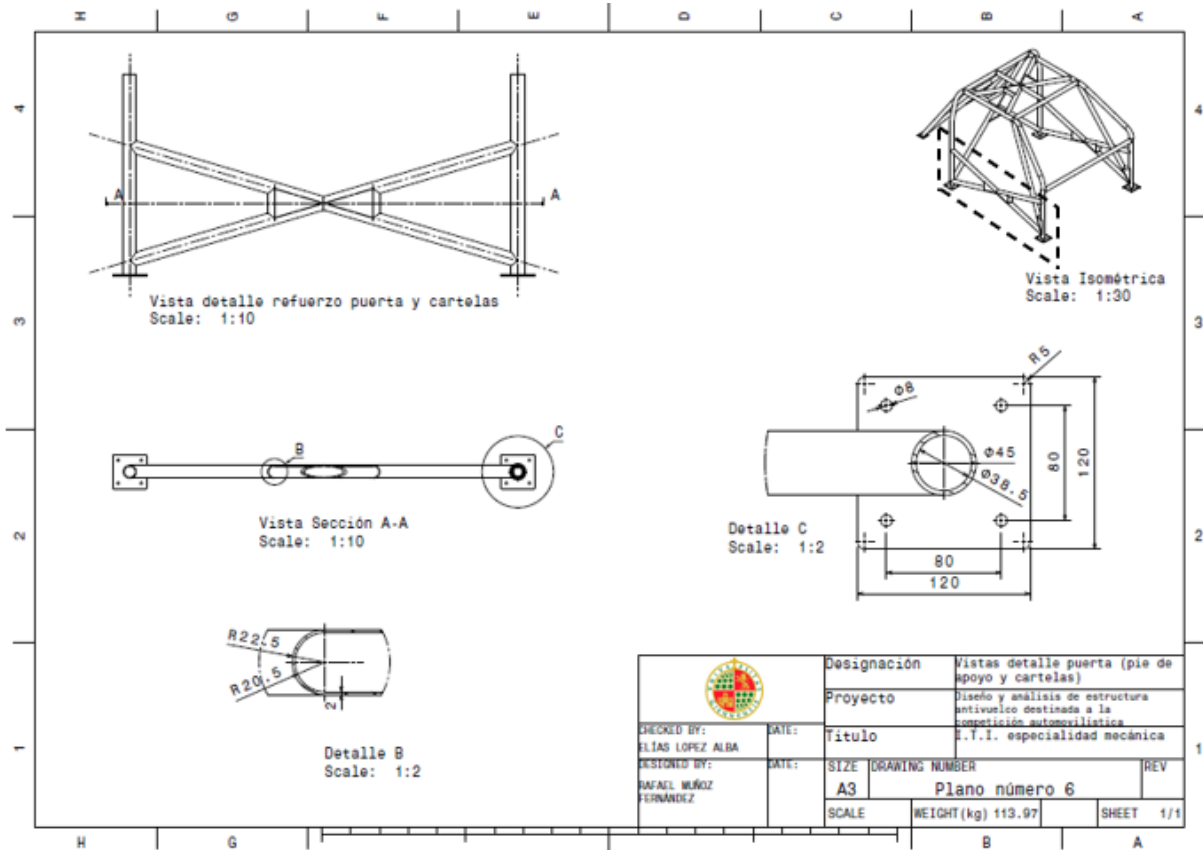
5. Plano 5

Plano en vista planta, mostrando las dimensiones de la estructura.



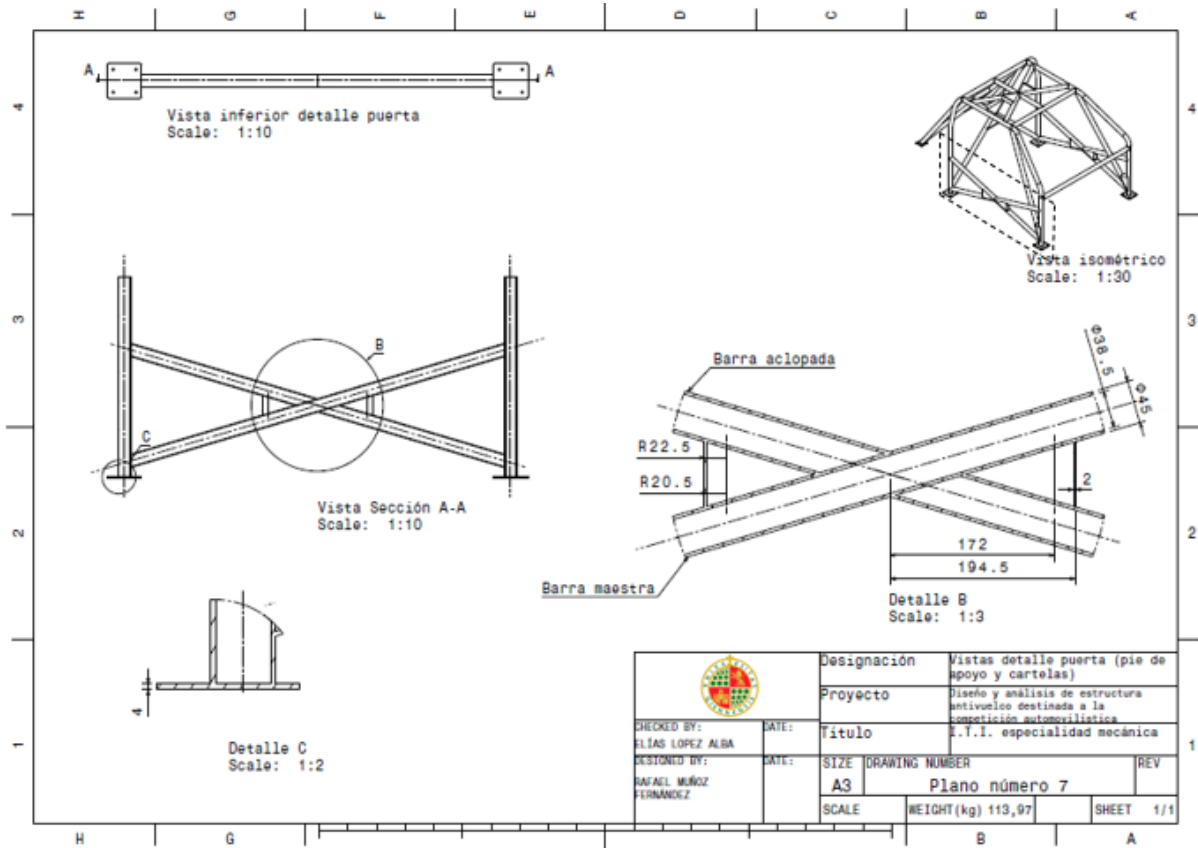
6. Plano 6

Plano en vista detalle puerta, mostrando las dimensiones en cuanto a las cartelas y los pies de apoyo pertenecientes al arco principal y semiarco lateral.



7. Plano 7

Plano en vista detalle puerta, mostrando las dimensiones en cuanto a las cartelas y los pies de apoyo pertenecientes al arco principal y semiarco lateral.



8. Plano 8

Plano en vista detalle pie de apoyo tirante trasero, mostrando sus dimensiones.

