



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: Martínez Gracia, Manuel Jesús

Tutor/a: Prof. D. Manuel García Armenteros
Prof. D. Francisco Martínez Ortiz

Dpto: Didáctica de las matemáticas

Junio, 2021

ÍNDICE

Resumen	10
Abstract.....	10
1. Introducción	11
2. Objetivos.....	13
3. Fundamentación curricular	14
3.1. Análisis del currículo	15
3.1.1. Real Decreto 1105/2014.....	16
3.1.2. Competencias clave	20
3.1.3. Orden de 14 de julio de 2016 de la Comunidad Autónoma de Andalucía.....	23
3.2. Análisis de libros de texto	25
3.2.1. Libro de texto de la editorial Anaya.....	26
3.2.2. Libro de texto de la editorial SM Savia Digital.....	30
3.2.3. Comparación de contenidos entre libros de texto y currículo.....	34
4. Fundamentación epistemológica: Desarrollo de un tema de oposición	37
4.1. Introducción histórica	37
4.2. Ángulos en una circunferencia. Unidades.....	39
4.3. Razones trigonométricas de un ángulo.....	41
4.3.1. Razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes	42
4.4. Relaciones entre distintas razones trigonométricas. Identidades pitagóricas	43
4.4.1. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos complementarios.....	44
4.4.2. Razones trigonométricas de ángulos obtusos	45
4.4.3. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos suplementarios....	46
4.4.4. Identidades trigonométricas de ángulos que difieren en 90°	47
4.4.5. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos opuestos	47
4.4.6. Razones trigonométricas de ángulos fundamentales	48
4.5. Resolución de triángulos. Teorema del seno y teorema del coseno	50
4.5.1. Resolución de triángulos rectángulos.....	50
4.5.2. Resolución de triángulos oblicuángulos	52

4.5.3.	Teorema del seno	53
4.5.4.	Teorema del coseno.....	54
4.5.5.	Radio de la circunferencia circunscrita	55
4.6.	Teorema de las tangentes. Fórmula de Briggs.....	56
4.6.1.	Teorema de las tangentes	56
4.6.2.	Resolución de triángulos.....	56
4.6.3.	Fórmulas de Briggs.....	57
4.7.	Fórmulas de adición	58
4.7.1.	Coseno de la suma y diferencia	58
4.7.2.	Senos de la suma y diferencia	59
4.7.3.	Tangente de la suma y diferencia	59
4.7.4.	Fórmulas del ángulo doble	60
4.7.5.	Fórmulas del ángulo mitad	60
4.7.6.	Transformaciones en productos de sumas y diferencias	61
4.8.	Aplicaciones de la trigonometría	62
4.8.1.	Cálculo del área de un triángulo	62
4.8.2.	Cálculo de la altura de un punto de pie accesible	64
4.8.3.	Cálculo de la altura de un punto de pie inaccesible	66
4.8.4.	Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de ellos inaccesible.....	67
4.8.5.	Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles.....	68
5.	Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza .	69
5.1.	Distintas concepciones y dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas.....	69
5.2.	Herramientas TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría	73
5.3.	Conclusiones	74
6.	Proyección didáctica: Elaboración de una Unidad Didáctica	75
6.1.	Título	75
6.2.	Justificación	76
6.3.	Contextualización del centro y del aula	78
6.4.	Objetivos	79

6.4.1. Objetivos de la unidad didáctica.....	79
6.5. Competencias clave	80
6.6. Contenidos	80
6.7. Metodologías	81
6.8. Actividades y recursos.....	82
6.8.1. Actividades.....	82
6.8.2. Recursos.....	83
6.9. Atención a la diversidad	84
6.10. Temporalización	85
6.11. Evaluación.....	95
6.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje	95
6.11.2. Criterios de calificación	98
6.12. Plan de contingencia	99
7. Conclusiones.....	100
8. Referencias bibliográficas.....	102
9. Referencias normativas.....	104
Anexo I. Objetivos de etapa y del área de matemáticas	105
Objetivos de etapa	105
Objetivos del área de matemáticas	106
Anexo II. Ejercicios, problemas y actividades de la unidad didáctica.....	108
Ejercicios y problemas de la sesión 1.....	108
Ejercicios y problemas de la sesión 2.....	108
Ejercicios y problemas de la sesión 3.....	111
Ejercicios y problemas de la sesión 4.....	111
Ejercicios y problemas de la sesión 5.....	112
Ejercicios y problemas de la sesión 6.....	112
Ejercicios y problemas de la sesión 7	113
Problemas planteados en el webquest sobre aplicaciones de la trigonometría.....	115
Actividad de la sesión 10.....	115

Ejercicios y problemas de la sesión 11	118
Prueba escrita de la unidad.....	118
Anexo III. Rúbricas de evaluación	121

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Competencias consideradas clave en el aprendizaje por la Unión Europea ...	21
Figura 2. Editoriales elegidas por cada uno de los centros públicos y concertados de la provincia de Jaén (Moreno, 2020)	26
Figura 3. Libros de texto de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO de las editoriales Anaya y SM Savia Digital	26
Figura 4. Página de contenidos de la unidad y ejercicios propuestos "Piensa y practica" del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016)	27
Figura 5. Ejercicios y problemas propuestos al final de la unidad del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).....	28
Figura 6. Definición de razones trigonométricas en el libro de texto de Anaya	28
Figura 7. Definición de razón trigonométrica a partir de un ángulo que parte del centro de una circunferencia en el libro de texto de Anaya	29
Figura 8. Problemas resueltos que muestran aplicaciones de la trigonometría en el libro de Anaya	30
Figura 9. Recursos web para aplicar conocimientos de trigonometría con GeoGebra en el libro de Anaya	30
Figura 10. Página de contenidos de la unidad y ejercicios "Piensa y practica" del libro de texto de SM Savia Digital (Alcaide et al., 2016)	31
Figura 11. Ejercicios y problemas propuestos al final de la unidad del libro de texto de SM Savia Digital (Alcaide et al., 2016)	32
Figura 12. Definición de razones trigonométricas en el libro de texto de SM Savia Digital	32
Figura 13. Definición analítica de razón trigonométrica en el libro de SM Savia Digital	33
Figura 14. Problemas propuestos que demuestran posibles aplicaciones de la trigonometría en el libro de SM Savia Digital	33
Figura 15. Recursos web para aplicar conocimientos de trigonometría con GeoGebra en el libro de SM Savia Digital	34

Figura 16. Aproximación de un arco por su tangente	38
Figura 17. Edición del siglo XIII del "Almagesto" de Ptolomeo que se conserva en la Biblioteca Nacional de Madrid.....	38
Figura 18. Semicuerda del ángulo doble asociado al ángulo α por los indios.....	39
Figura 19. Ángulo central α	39
Figura 20. Ángulo α de 1 rad.....	40
Figura 21. Razones trigonométricas de un ángulo α	41
Figura 22. Razones trigonométricas en el primer cuadrante	42
Figura 23. Triángulo rectángulo PQR	44
Figura 24. Ángulo complementario de α	45
Figura 25. Razones trigonométricas de ángulos obtusos	45
Figura 26. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios.....	46
Figura 27. Razones trigonométricas de ángulos que difieren 90°	47
Figura 28. Razones trigonométricas de ángulos opuestos	47
Figura 29. Razones trigonométricas de ángulos de 30° y 60°	48
Figura 30. Razones trigonométricas de un ángulo de 45°	49
Figura 31. Triángulo rectángulo ABC	50
Figura 32. Altura de un triángulo oblicuángulo	52
Figura 33. Altura de un triángulo oblicuángulo (II).....	52
Figura 34. Radio de la circunferencia circunscrita.....	55
Figura 35. Circunferencia inscrita del triángulo ABC	57
Figura 36. Coseno de la suma y diferencia	58
Figura 37. Cálculo de la superficie de un triángulo.....	63
Figura 38. Cálculo de la altura h de una torre de pie accesible.....	65
Figura 39. Cálculo de la altura h con base no horizontal.....	65
Figura 40. Cálculo de la altura h de un punto de pie inaccesible	66
Figura 41. Método de doble observación para calcular la altura h	67
Figura 42. Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible ..	67
Figura 43. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles.....	68

Figura 44. Producciones de los alumnos asociadas al tema "Razón" (Martín et al., 2014)	71
Figura 45. Producciones de los alumnos asociadas al tema "Valor" (Martín et al., 2014)	71
Figura 46. Producciones de los alumnos asociados al tema "Lados de un triángulo" (Martín et al., 2014)	71
Figura 47. Producción de un alumno que expresa gráficamente una razón trigonométrica a partir del ángulo interior de un triángulo (Fernández et al., 2016)	72
Figura 48. Producción de un alumno que expresa gráficamente seno y coseno como longitudes en una circunferencia goniométrica (Fernández et al., 2016)	72
Figura 49. Producción de un alumno que expresa gráficamente seno y coseno como cocientes de dos lados de un triángulo rectángulo (Fernández et al., 2016)	72
Figura 50. Demostración de la identidad fundamental de la trigonometría con SGD (Fiallo, 2010)	73
Figura 51. Fases de la transposición didáctica (García)	75
Figura 52. Líneas no paralelas r y r'	109
Figura 53. Formación de triángulos rectángulos semejantes haciendo uso del teorema de Tales	109
Figura 54. Razones trigonométricas de α	110
Figura 55. Triángulos del enunciado del ejercicio 2.2 (Alcaide et al., 2016)	110
Figura 56. Triángulo del enunciado del ejercicio 2.4 (Colera et al., 2016)	111
Figura 57. Hallar las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90 + \alpha$	112
Figura 58. Altura de la torre del problema 6.1 (Colera et al., 2016)	113
Figura 59. Ángulo de la escalera del problema 6.2 (Colera et al., 2016)	113
Figura 60. Triángulos oblicuángulos del problema 7.1 (Colera et al., 2016)	114
Figura 61. Triángulos oblicuángulos del problema 7.2 (Colera et al., 2016)	114
Figura 62. Esquema del problema 7.3 (Colera et al., 2016)	114
Figura 63. Esquema del problema 7.4 (Alcaide et al., 2016)	115
Figura 64. Clinómetro casero para medir ángulos en la actividad fuera del aula	117
Figura 65. Cuerpo geométrico del problema 11.2 (Alcaide et al., 2016)	118
Figura 66. Esquema del problema 11.1 (Colera et al., 2016)	118

Figura 67. Esquema del problema 1 de la prueba escrita	119
Figura 68. Trapecio rectángulo del problema 3 de la prueba escrita.....	120

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º de la ESO.....	17
Tabla 2. Bloque 3: Geometría, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º de la ESO	19
Tabla 3. Competencias clave asociadas a los criterios de evaluación del bloque 1	24
Tabla 4. Competencias clave asociadas a los criterios de evaluación del bloque 3	25
Tabla 5. Índice de contenidos de trigonometría de los libros de texto de las editoriales Anaya y SM Savia Digital.....	34
Tabla 6. Comparación entre contenidos de los libros de texto y contenidos del currículo escolar.....	35
Tabla 7. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del RD 1105/2014 relacionados con Trigonometría.....	77
Tabla 8. Contenidos de la materia pertenecientes al bloque 1 que desarrolla la Unidad Didáctica	81
Tabla 9. Contenidos de la materia pertenecientes al bloque 3 que desarrolla la Unidad Didáctica	81
Tabla 10. Temporalización de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de la ESO	85
Tabla 11. Sesión 1 de la unidad didáctica	86
Tabla 12. Sesión 2 de la unidad didáctica	87
Tabla 13. Sesión 3 de la unidad didáctica	88
Tabla 14. Sesión 4 de la unidad didáctica	89
Tabla 15. Sesión 5 de la unidad didáctica	90
Tabla 16. Sesión 6 de la unidad didáctica	91
Tabla 17. Sesión 7 de la unidad didáctica	91

Tabla 18. Sesión 8 de la unidad didáctica	92
Tabla 19. Sesión 9 de la unidad didáctica	93
Tabla 20. Sesión 10 de la unidad didáctica	93
Tabla 21. Sesión 11 de la unidad didáctica	94
Tabla 22. Sesión 12 de la unidad didáctica	94
Tabla 23. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque 1 para evaluar la UD.....	96
Tabla 24. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque 3 para evaluar la UD.....	98
Tabla 25. Criterios de calificación de la unidad didáctica.....	98
Tabla 26. Rúbrica para la evaluación de la prueba escrita	121
Tabla 27. Rúbrica para la evaluación del cuaderno de clase	122
Tabla 28. Rúbrica para la evaluación de la actitud personal	123
Tabla 29. Rúbrica para la evaluación del webquest	124
Tabla 30. Rúbrica para la evaluación de la actividad fuera del aula.....	125

Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster supone el último paso hacia la consecución del título de Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. En él, se ha diseñado una unidad didáctica de trigonometría para la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO, de acuerdo con el currículo escolar establecido por las disposiciones oficiales vigentes. Previo a la elaboración de esta unidad, se han realizado sendos análisis de dos libros de texto que han supuesto una primera aproximación a los conocimientos científicos sobre trigonometría a enseñar en el aula; también, se ha desarrollado un tema de oposiciones con el fin de profundizar en el “saber sabio” matemático de la trigonometría, y, por último, se han analizado investigaciones de otros autores en busca de aspectos a tener en cuenta en la didáctica de la trigonometría en el aula. Este trabajo previo ha permitido elaborar una unidad didáctica de trigonometría que permita a los estudiantes conseguir desarrollar las competencias y capacidades requeridas en este ámbito y etapa educativa.

PALABRAS CLAVE: Trigonometría, Matemáticas, Unidad Didáctica, Educación Secundaria Obligatoria, Trabajo Fin de Máster

Abstract

This Master's Thesis has been the last step towards obtaining the title of the Master's Degree: *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*. A didactic unit of trigonometry has been designed for the subject “*Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*” in the 4th grade of ESO, in accordance with the school curriculum established by the official regulations. Prior to the elaboration of this unit, two textbooks were analyzed, providing a first approximation of the scientific knowledge of trigonometry to be taught in the classroom; a chapter was also dedicated to deepening the mathematical knowledge of trigonometry, and lastly, research by other authors was also analyzed in search of a better understanding of the didactics of trigonometry in the classroom. This preliminary work has made it possible to draw up a teaching unit on trigonometry that will allow students to develop the skills and abilities required in this field and this stage of education.

KEYWORDS: Trigonometry, Mathematics, Didactic Unit, Compulsory Secondary Education, Master's Thesis

1. Introducción

El Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas culmina con la elaboración y la defensa por parte del estudiante de un Trabajo Fin de Máster. Este trabajo debe poner de manifiesto las enseñanzas y aprendizajes recibidos durante el transcurso del curso académico, y también demostrar el nivel de adquisición de las competencias asociadas a la titulación.

Este Trabajo Fin de Máster (en adelante, TFM) pertenece a la especialidad de Matemáticas, y se basa concretamente en la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO. El tema sobre el que se desarrollan las fundamentaciones curricular, epistemológica y didáctica, y también la correspondiente unidad didáctica, es el de trigonometría.

El presente TFM se estructura en torno a dos grandes bloques claramente diferenciados:

- A) Fundamentación epistemológica. En este epígrafe se desarrolla un tema que se encuentra entre los temas recogidos en los procedimientos de ingreso, adquisición de nueva especialidad y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas. El “saber sabio” matemático que se presenta aquí debe ser más tarde transformado y adaptado para poder ser enseñado al alumnado en lo que se conoce como proceso de transposición didáctica.
- B) Proyección didáctica del tema para una etapa, ciclo y nivel determinado mediante el diseño de una unidad didáctica, que incluye los elementos curriculares necesarios para el desarrollo de la misma en el aula. Con esta unidad didáctica se pretende facilitar el aprendizaje de la trigonometría por parte del alumnado a través de actividades y metodologías que favorezcan la comprensión de los contenidos del tema, y siempre con el fin de adquirir las competencias correspondientes.

Además de estos dos grandes bloques, también se incluyen otros dos epígrafes, que no dejan de ser menos importantes y sin los cuales el conjunto del trabajo no tendría sentido. Deben ser trabajados antes del diseño de la unidad didáctica y deben verse reflejados y contribuir de alguna manera al desarrollo de la misma:

- Fundamentación curricular. Análisis del currículo escolar vigente, tanto a nivel nacional como en el ámbito de la Comunidad Autónoma de Andalucía y análisis y comparación de dos libros de texto de la asignatura de dos grandes editoriales.

En este segundo análisis de los libros de texto, se observará en qué medida los libros de texto se ajustan al contenido establecido por el currículo oficial, la forma en que estos contenidos son desarrollados, los tipos de actividades que se proponen y los posibles errores o fenómenos didácticos que podrían derivarse de la forma en que se presentan los contenidos.

- Fundamentación didáctica. Aquí se abordarán varios trabajos de investigación de distintos autores relacionados con dificultades, errores y fenómenos didácticos que el alumnado pueda presentar cuando se trabajan conceptos y contenidos de la unidad didáctica de trigonometría.

Las conclusiones extraídas tras la elaboración de las fundamentaciones curricular y didáctica servirán de punto de partida en el diseño de la unidad didáctica.

2. Objetivos

Los objetivos y competencias generales que los estudiantes deben adquirir con la realización del TFM vienen recogidos en la Guía Docente en la página web del máster de la Universidad de Jaén. Éstos, junto con otros más particulares que también se persiguen con este trabajo, son citados a continuación:

- Conocer la legislación educativa vigente, tanto a nivel nacional como autonómico
- Obtener una primera aproximación al saber matemático a enseñar en el aula a través del análisis crítico de libros de texto de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO
- Conocer las competencias clave que los estudiantes deben trabajar de modo transversal a lo largo de todo el currículo escolar
- Profundizar en el saber matemático de la trigonometría
- Buscar y analizar trabajos de otros autores que hayan realizado investigaciones sobre la didáctica de la trigonometría en busca de dificultades y/o fenómenos didácticos en el proceso enseñanza-aprendizaje
- Confeccionar una unidad didáctica adecuada en base a las fundamentaciones curricular, epistemológica y didáctica previamente establecidas
- Saber transformar el currículo escolar de la materia “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO en un programa de actividades y trabajo adecuado a las necesidades de los estudiantes, combinando metodologías tradicional e innovadora
- Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje
- Adquirir el conocimiento, las destrezas y actitudes necesarias para el uso y aprovechamiento de las TICs en la función docente
- Detectar y analizar situaciones y dificultades que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y ritmos de aprendizaje y saber intervenir mediante una adecuada atención a la diversidad
- Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes a través del trabajo colaborativo

En definitiva, y como objetivo general, se persigue que el estudiante del Máster sea capaz de desarrollar la competencia profesional del profesorado para planificar su actuación didáctica en el aula a través del diseño propio de una unidad didáctica, intentando siempre evitar un punto de vista simplista.

3. Fundamentación curricular

En este epígrafe se realiza, por una parte, el análisis de las disposiciones curriculares vigentes tanto a nivel nacional como autonómico, y por otra, el análisis de dos libros de texto. Ambos análisis se centran en la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO, ya que este es el curso al que la unidad didáctica diseñada está dirigida. Concretamente, se centra en el tema de trigonometría, que es introducido por primera vez en la trayectoria académica del alumnado.

Dentro del análisis del currículo escolar, también se dedica un apartado a las competencias clave, consideradas por las orientaciones de la Unión Europea como condición indispensable para lograr que los individuos alcancen un pleno desarrollo personal, social y profesional que se ajuste a las demandas de un mundo globalizado y haga posible el desarrollo económico, vinculado al conocimiento (Ministerio de Educación y Formación Profesional).

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado dos libros de 4º de la ESO de dos editoriales diferentes. Este análisis tiene gran importancia, pues supone la primera aproximación a los conocimientos científicos “a enseñar”, a partir de la que avanzar hacia la fundamentación epistemológica (el “saber sabio” matemático) y también hacia la fundamentación didáctica (sobre la enseñanza y/o aprendizaje del conocimiento matemático). Además de la estructura que presenta la unidad o unidades de trigonometría en cada uno de los libros, se analizarán también con detalle los siguientes aspectos de los dos libros de texto:

- Si los autores se han ajustado al contenido de las disposiciones curriculares vigentes.
- Qué definición (geométrica o analítica) ofrece cada libro al estudiante para presentar el concepto de razón trigonométrica.
- Qué importancia da cada libro a las aplicaciones de la trigonometría en la vida real.
- Si los libros de texto proponen actividades a realizar siguiendo una metodología tradicional (transmisiva, el docente explica y el alumno realiza ejercicios de manera mecánica) o si combina ejercicios a realizar individualmente y actividades para trabajar en grupo, fomentando así el trabajo colaborativo.
- Si ofrecen contenidos en la web para trabajar la trigonometría a través de herramientas TIC como GeoGebra.

3.1. Análisis del currículo

La Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, entró en vigor el día 19 de enero de 2021, 20 días después de su publicación en el Boletín Oficial del Estado. Todos los aspectos que regula y establece esta nueva Ley Educativa (LOMLOE), sin embargo, no han sido aplicados de manera inmediata. El Ministerio de Educación y Formación Profesional del Gobierno de España ha establecido un calendario de implantación de la nueva Ley que abarca un total de cuatro cursos educativos consecutivos:

- 1) Para el curso 2020-21 se han aplicado ya modificaciones relativas a:
 - a) La participación y competencias de Consejo Escolar, Claustro y director o directora
 - b) La autonomía de los centros docentes
 - c) La selección del director o directora en los centros públicos
 - d) La admisión de alumnos

- 2) Al inicio del curso 2021-22 se implantarán las modificaciones relativas a:
 - a) Evaluación y condiciones de promoción de las diferentes etapas educativas
 - b) Condiciones de titulación de Educación Secundaria Obligatoria, ciclos formativos de grado básico y Bachillerato
 - c) La titulación de las enseñanzas profesionales de Música y Danza
 - d) Las condiciones de acceso a las diferentes enseñanzas

- 3) En los cursos 2022-23 y 2023-24, se modificarán el currículo, organización y objetivos de las enseñanzas:
 - a) 2022-23: Cursos impares de Educación Primaria, ESO, Bachillerato y Ciclo Formativo de Grado Básico
 - b) 2023-24: Cursos pares de Educación Primaria, ESO, Bachillerato y Ciclo Formativo de Grado Básico

Como el currículo, los objetivos de las enseñanzas y la evaluación propuestos por esta nueva Ley de Educación no han sido modificados aún en el presente curso académico 2020-21, en este trabajo se hará referencia a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, que modificaba el artículo 6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, para definir el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas.

3.1.1. Real Decreto 1105/2014

En primer lugar, se hace referencia al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato. En el anexo I de dicho Real Decreto se encuentran los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para cada una de las materias del bloque de asignaturas troncales de ESO y Bachillerato.

La asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO se encuentra dividida en los siguientes 5 bloques:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
- Bloque 2. Números y álgebra
- Bloque 3. Geometría
- Bloque 4. Funciones
- Bloque 5. Estadística y probabilidad

El tema de trigonometría se encuadra dentro del bloque 3 de geometría, por lo que serán los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de este bloque los que se traten principalmente en este TFM. También se mostrarán los contenidos y criterios del bloque 1 por ser un bloque transversal que se supone debe ser trabajado siempre de manera simultánea con el resto de bloques, constituyendo el hilo conductor de la asignatura.

En las tablas 1 y 2 se muestran los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de los bloques 1 y 3, respectivamente.

Tabla 1

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º de la ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
- Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. - Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. - Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. - Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

la realidad y en contextos matemáticos. - Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: - a). la recogida ordenada y la organización de datos. - b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. - c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. - d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. - e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. - f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.	6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
--	---	--

Tabla 2

Bloque 3: Geometría, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º de la ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. - Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. - Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. - Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. - Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. - Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

3.1.2. Competencias clave

En el artículo 6 de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre y en el artículo 2.1 del Real Decreto 1105/2014, de 24 de diciembre aparecen las competencias o capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

DeSeCo (Definición y Selección de Competencias, OCDE, 2003) define competencia como “la capacidad de responder a demandas complejas para llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada”. La competencia supone una “combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz”.

Así pues, el conocimiento competencial integra un conocimiento de base conceptual: conceptos, principios, teorías, datos y hechos (conocimiento declarativo-saber decir); un conocimiento relativo a las destrezas, referidas tanto a la acción física observable como a la acción mental (conocimiento procedimental-saber hacer); y un tercer componente que tiene una gran influencia social y cultural, y que implica un conjunto de actitudes y valores (saber ser) (García).

En el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 24 de diciembre y en el artículo de la Orden ECD/65/2015 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte), de 29 de enero, se establecen que las competencias clave del currículo son las siguientes:

- CMCT: Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
- CAA: Competencia de aprender a aprender
- CD: Competencia digital
- CSC: Competencias sociales y cívicas
- SIEP: Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
- CCL: Competencia en comunicación lingüística



Figura 1. Competencias consideradas clave en el aprendizaje por la Unión Europea

En el anexo I de la Orden ECD/65/2015, de 29 de enero, se hace una descripción de las competencias clave del Sistema Educativo Español. A continuación, se muestra la descripción para la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología:

“La competencia matemática es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña -en distintos grados- la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas)”.

Para el adecuado desarrollo de la competencia matemática, resulta necesario abordar cuatro áreas, relativas a los números y el álgebra, la geometría, las funciones y la estadística, interrelacionadas de formas diversas:

- La cantidad: esta noción incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo, interpretando distintas representaciones de todas ellas y juzgando interpretaciones y argumentos. Participar en la cuantificación del mundo supone comprender las mediciones, los cálculos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo y las tendencias y patrones numéricos.
- El espacio y la forma: incluyen una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los

objetos, posiciones, direcciones y representaciones de ellos; descodificación y codificación de información visual, así como navegación e interacción dinámica con formas reales, o con representaciones. La competencia matemática en este sentido incluye una serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas.

- El cambio y las relaciones: el mundo despliega multitud de relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las circunstancias, donde los cambios se producen dentro de sistemas de objetos interrelacionados. Tener más conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprenderlos tipos fundamentales de cambio y cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlos y predecirlos.
- La incertidumbre y los datos: son un fenómeno central del análisis matemático presente en distintos momentos del proceso de resolución de problemas en el que resulta clave la presentación e interpretación de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y los datos son fundamentales.

Los descriptores más importantes para el desarrollo de la competencia matemática son:

- Conocer y utilizar los elementos matemáticos básicos: operaciones, magnitudes, porcentajes, proporciones, formas geométricas, criterios de medición y codificación numérica
- Expresarse con propiedad en el lenguaje matemático
- Resolver problemas seleccionando los datos y las estrategias apropiadas
- Reconocer la importancia de la ciencia en nuestra vida cotidiana
- Organizar la información usando procedimientos matemáticos
- Manejar los conocimientos sobre ciencia y tecnología para solucionar problemas, comprender lo que ocurre a nuestro alrededor y responder a preguntas.
- Comprender e interpretar la información presentada en formato gráfico
- Aplicar métodos de análisis rigurosos para mejorar la comprensión de la realidad circundante en distintos ámbitos (biológico, geológico, físico, químico, tecnológico, geográfico...)
- Conocer las características de los ángulos como herramienta para resolver problemas geométricos

- Saber aplicar el concepto de simetría para la resolución de problemas
- Reconocer distintos tipos de ángulos en la naturaleza
- Conocer y distinguir los distintos tipos de figuras planas y espaciales
- Reconocer las distintas figuras geométricas en el plano o en el espacio en elementos del mundo natural
- Saber describir correctamente una figura plana o espacial
- Dominar los métodos para calcular áreas y perímetros de figuras planas como medio para resolver problemas geométricos
- Utilizar los conocimientos sobre áreas y perímetros para describir distintos fenómenos de la naturaleza
- Saber resumir conjuntos de datos en tablas y gráficas, y poder interpretarlos.
- Conocer los conceptos estadísticos para poder resolver problemas
- Utilizar la información proporcionada por tablas y gráficas, o por datos estadísticos, para describir elementos de la realidad.

3.1.3. Orden de 14 de julio de 2016 de la Comunidad Autónoma de Andalucía

Para completar este apartado, se hace también ahora referencia a la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Y también, se relacionan los criterios de evaluación de cada uno de los cinco bloques con una o varias de las siete competencias clave establecidas por la Unión Europea:

Tabla 3*Competencias clave asociadas a los criterios de evaluación del bloque 1*

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema	CCL, CMCT
2. Usar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones	CCL, CMCT, CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas	CMCT, CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas	CMCT, CD, CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 4

Competencias clave asociadas a los criterios de evaluación del bloque 3

Bloque 3. Geometría	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales	CMCT, CAA
2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida	CMCT, CAA
3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas	CCL, CMCT, CD, CAA

La Orden de 14 de julio de 2016 establece también que la enseñanza de las “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos determinadas capacidades, que pueden ser evaluadas a través de la consecución de una serie de objetivos. Estos objetivos del área de matemáticas pueden encontrarse en el Anexo I del presente trabajo.

3.2. Análisis de libros de texto

En este segundo apartado, se van a llevar a cabo análisis de dos libros de texto de editoriales distintas.

Para la elección de las editoriales, se ha hecho referencia al estudio realizado por Moreno (2020) sobre los libros utilizados por cada centro público y concertado de la provincia de Jaén. La información sobre libros de texto usados en cada centro público y concertado en Andalucía puede consultarse en la siguiente página web:

<https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto>

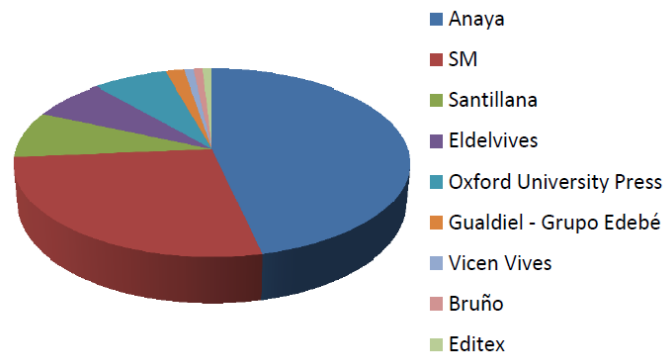


Figura 2. Editoriales elegidas por cada uno de los centros públicos y concertados de la provincia de Jaén (Moreno, 2020)

Se puede comprobar en el gráfico anterior que los libros de las editoriales Anaya y SM fueron los más usados durante el curso académico 2019/2020 en la provincia de Jaén. Serán, por lo tanto, los dos libros escogidos para analizar en este TFM.



Figura 3. Libros de texto de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO de las editoriales Anaya y SM Savia Digital

3.2.1. Libro de texto de la editorial Anaya

En este libro de texto, todo el contenido relacionado con trigonometría se encuentra englobado en la unidad 7. La estructura que sigue esta unidad es la siguiente:

1. Breve introducción y evolución histórica de la trigonometría
2. Desarrollo de los contenidos de la unidad
 - 2.1. Desarrollo de los contenidos

Los contenidos son presentados a los estudiantes siguiendo una estructura en la que predomina el método deductivo: primero se presentan los

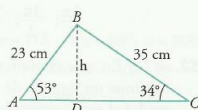
5. Taller de Matemáticas con una sección de “Autoevaluación”

Figura 4. Página de contenidos de la unidad y ejercicios propuestos "Piensa y practica" del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016)

Aplica lo aprendido

23. Halla:

- La longitud $\overline{AC}$.
- El área del triángulo ABC .

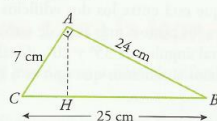


24. El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38° . ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

25. Halla el área de un paralelogramo cuyos lados miden 16 cm y 24 cm y forman un ángulo de 40° .

26. En una carretera de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de la carretera y el ángulo que forma con la horizontal.

27. a) En el triángulo ABC , rectángulo en A , calcula BH y AH .



- Halla las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ en el triángulo ABC y en el triángulo ABH y comprueba que coinciden.

35. Un avión P vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\widehat{PAB} = 20^\circ$ y $\widehat{PBA} = 30^\circ$. ¿A qué altura está el avión?

36. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.

37. Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q , cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.

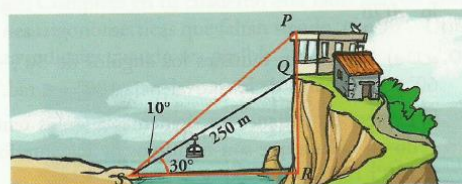


Figura 5. Ejercicios y problemas propuestos al final de la unidad del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016)

Especial interés reviste para el desarrollo de este TFM la manera en que el concepto de trigonometría es presentado por primera vez al alumnado de la asignatura. Para comenzar, no se hace referencia a las medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes como marca el contenido del RD 1105/2014. En la unidad, se comienza directamente haciendo alusión a la trigonometría como “una rama de la matemática que se basa en la semejanza de triángulos rectángulos”. Y a continuación, cita: “La razón entre dos lados de un triángulo rectángulo es igual a la razón entre los lados correspondientes de cualquier otro triángulo semejante a él”. Más abajo, ofrece las definiciones de las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente basándose en el esquema de un triángulo rectángulo:

Seno, coseno y tangente de un ángulo

Sobre un ángulo agudo, α , como el de la derecha, construimos un triángulo rectángulo, ABC .

Observa las siguientes relaciones llamadas **razones trigonométricas** del ángulo α .

seno de $\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$

coseno de $\alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$

tangente de $\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}$

$\text{sen } \alpha = \frac{BC}{AB}$

$\text{cos } \alpha = \frac{AC}{AB}$

$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC}$

Figura 6. Definición de razones trigonométricas en el libro de texto de Anaya

Se puede observar, por tanto, que el libro de Anaya ofrece en un primer momento una definición geométrica (como razón entre dos lados de un triángulo rectángulo) del concepto de razón trigonométrica, y no una definición analítica (como coordenadas de un punto P que se encuentra en el extremo de un ángulo α que parte del centro de una circunferencia goniométrica).

Es en la página siguiente donde sí se dedica un apartado a la definición de razón trigonométrica a partir de un ángulo que parte del centro de una circunferencia (aunque no se hará referencia al término “circunferencia goniométrica” hasta el apartado 6 de la unidad):

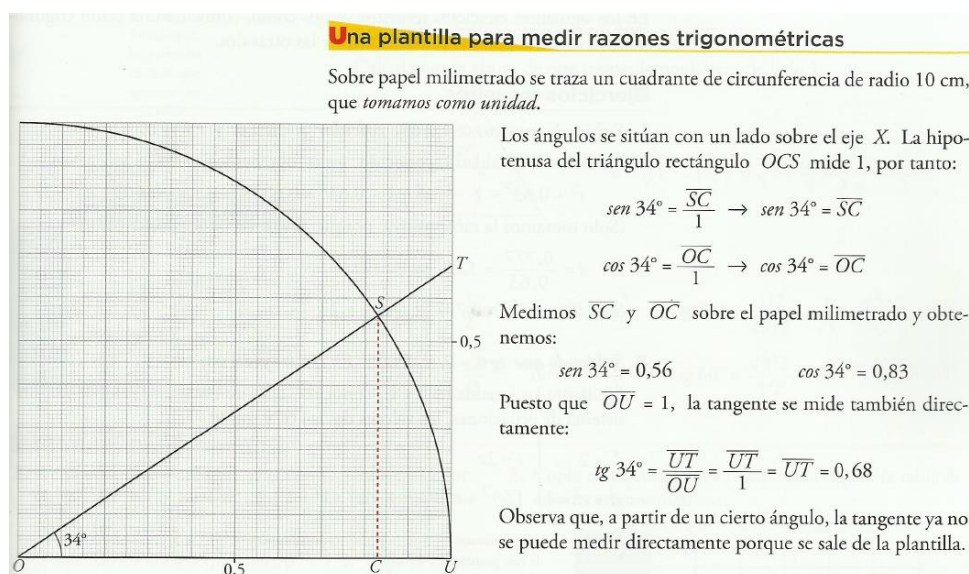


Figura 7. Definición de razón trigonométrica a partir de un ángulo que parte del centro de una circunferencia en el libro de texto de Anaya

En el apartado de “Fundamentación didáctica” del presente trabajo, se profundizará más en estas distintas aproximaciones con las que puede entenderse el concepto de razón trigonométrica, y cómo precisamente esta diversidad de definiciones para un mismo concepto puede ser raíz de concepciones erróneas en los estudiantes.

En cuanto a posibles aplicaciones de la trigonometría, el libro muestra, tanto al principio de la unidad como al final, situaciones en la vida real en las que esta rama de las matemáticas puede ser muy útil, a través de problemas que están resueltos y explicados paso por paso:

3. Altura del árbol y anchura del río

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo. Ahora son 23° .



Hacemos una representación.

Llamamos x al ancho del río e y a la altura del árbol.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 41^\circ = y/x \\ \operatorname{tg} 23^\circ = y/(x + 25) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = x \cdot 0,87 \\ \rightarrow y = (x + 25) \cdot 0,42 \end{array} \rightarrow 0,87x = 0,42x + 25 \cdot 0,42 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0,45x = 10,5 \rightarrow x = 23,3; y = 23,3 \cdot 0,87 = 20,3$$

Solución: El ancho del río es 23,3 m, y la altura del árbol, 20,3 m.

Hazlo tú. Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50° ; camina 10 m; 2.ª medición, 25° .

Figura 8. Problemas resueltos que muestran aplicaciones de la trigonometría en el libro de Anaya

En lo relativo a los ejercicios propuestos para los estudiantes, se puede concluir que presenta gran variedad de actividades y problemas relacionados con los contenidos que presenta, de diversa naturaleza y dificultad, y también recursos en la web para realizar ejercicios con GeoGebra, pero también es cierto que no existen actividades que fomenten el trabajo colaborativo, siendo todas de carácter individual, y que se adaptan a una metodología de enseñanza transmisiva tradicional.

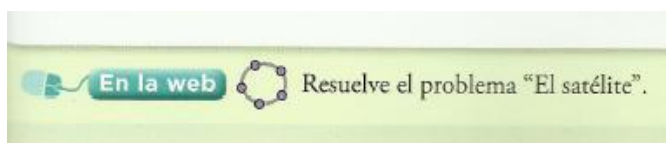


Figura 9. Recursos web para aplicar conocimientos de trigonometría con GeoGebra en el libro de Anaya

3.2.2. Libro de texto de la editorial SM Savia Digital

Este libro de texto, a diferencia del libro de la editorial Anaya, presenta los contenidos de trigonometría en dos unidades diferentes: Unidad 5 “Semejanza y trigonometría” y unidad 6 “Aplicaciones de la trigonometría”. Independientemente de esto, la estructura que sigue el libro de texto para cada unidad es la siguiente:

1. Introducción

A diferencia de la introducción con aspectos de la evolución que ha sufrido la trigonometría a lo largo de la historia del libro de Anaya, en esta introducción se presenta el índice del tema y algunas anécdotas relacionadas con trigonometría.

2. Desarrollo de los contenidos de la unidad

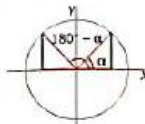
2.1. Desarrollo de los contenidos

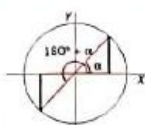
Al igual que en el libro de Anaya, la forma en que se estructuran los contenidos es claramente deductiva: transcurre de lo general a lo más

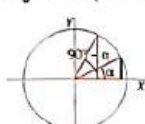
específico. Empieza presentando conceptos y definiciones para que más tarde los estudiantes apliquen esos conocimientos generales en problemas concretos.

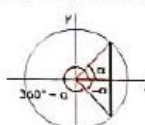
- 2.2. Actividades
- 2.3. Ejercicios para practicar con recursos web y con GeoGebra
3. Sección "Organiza tus ideas". Página con resumen de los conceptos clave de la unidad.
4. Sección "Actividades clave"
5. Ejercicios y problemas para practicar
6. Sección "Ponte a prueba" con autoevaluación

Relaciones entre las razones de ciertos ángulos

- Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$


$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$
- Ángulos que se diferencian en 180° : α y $180^\circ + \alpha$


$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$
- Ángulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$


$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cog} \alpha\end{aligned}$$
- Ángulos que suman 360° : α y $360^\circ - \alpha$


$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Con calculadora

Para calcular:

- el seno de un ángulo:
sin **31** **=** **0.5299**
- el coseno de un ángulo:
cos **51** **=** **0.6428**
- la tangente de un ángulo:
tan **21** **=** **0.4452**

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

Ten en cuenta

Recuerda que un ángulo mayor de 360° se expresa como un ángulo menor de 360° más un número de vueltas completas.

$$4000^\circ = 11 \cdot 360^\circ + 40^\circ = 40^\circ + 11 \text{ vueltas}$$

smSaviadigital.com

PRACTICA Relaciona las razones de ángulos diferentes.

ACTIVIDADES

22. Define en radianes los cuatro cuadrantes del plano.

23. En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si $\sin \alpha > 0$	d) β si $\operatorname{cosec} \beta > 0$
b) γ si $\cos \gamma < 0$	e) δ si $\sec \delta < 0$
c) φ si $\operatorname{tg} \varphi < 0$	f) λ si $\operatorname{cotg} \lambda < 0$

24. Calcula la secante, cosecante y cotangente de los ángulos 30° y 60° .

25. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un número de vueltas completas más un ángulo menor de 360° .

a) 400°	c) 2350°	e) 4315°
b) 540°	d) 2880°	f) 6030°

ACTIVIDAD RESUELTA

26. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) $\sin 225^\circ$ b) $\cos 780^\circ$ c) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$

a) $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 780^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}(-210^\circ) = -\operatorname{tg} 210^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

27. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) $\sin 300^\circ$ b) $\cos(-330^\circ)$ c) $\operatorname{tg}(-480^\circ)$

Figura 10. Página de contenidos de la unidad y ejercicios "Piensa y practica" del libro de texto de SM Savia Digital (Alcaide et al., 2016)

Se puede apreciar que las estructuras de ambos libros son muy similares, con una primera parte de introducción, una segunda parte en la que se desarrollan todos los contenidos del tema, y una última parte que incluye ejercicios resueltos, propuestos y sección de autoevaluación. Aunque el libro de SM incluye, además, una sección resumen que contiene las ideas clave de la unidad que puede ser muy útil para los estudiantes.

69. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

- a) α si $\cos \alpha > 0$ c) β si $\sin \beta > 0$
b) γ si $\operatorname{tg} \gamma < 0$ d) δ si $\operatorname{cosec} \delta < 0$

70. Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas.

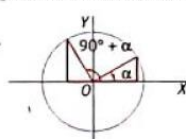
- a) $\cos 123^\circ$ d) $\operatorname{cosec} 256^\circ$ g) $\operatorname{tg} 320^\circ$
b) $\sin 750^\circ$ e) $\operatorname{cotg} 568^\circ$ h) $\cos 130^\circ$
c) $\operatorname{tg} 2000^\circ$ f) $\sec 580^\circ$ i) $\sin 1221^\circ$

71. Expresa las razones trigonométricas de 70° , 160° , 200° y 340° en función de las de 20° .

72. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

- a) $\sin 120^\circ$ e) $\cos 225^\circ$ i) $\operatorname{tg} 330^\circ$
b) $\sin(-60^\circ)$ f) $\cos(-150^\circ)$ j) $\operatorname{tg} 150^\circ$
c) $\sin 510^\circ$ g) $\cos 450^\circ$ k) $\operatorname{tg} 420^\circ$
d) $\sin(-660^\circ)$ h) $\cos(-390^\circ)$ l) $\operatorname{tg}(-405^\circ)$

73. Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90^\circ + \alpha$.



PROBLEMAS PARA RESOLVER

48. Desde un lugar situado cerca de una montaña se observa su cumbre con un ángulo de elevación de 45° . Si se retroceden 1061 m, el ángulo es de 30° . Calcula la altura de la montaña.

49. Se quiere calcular la distancia que separa las cimas de dos montañas. Para ello, se fijan dos puntos P y Q distantes entre sí 50 m y los ángulos que aparecen en la figura.



¿Cuál es la distancia entre las dos cimas?

50. Calcula la distancia PQ sabiendo que:

$$AB = 16 \text{ m} \quad \alpha_1 = 84^\circ 30' \quad \alpha_2 = 36^\circ \quad \alpha_3 = 40^\circ 30' \quad \alpha_4 = 76^\circ$$

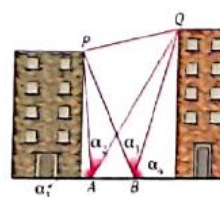


Figura 11. Ejercicios y problemas propuestos al final de la unidad del libro de texto de SM Savia Digital (Alcaide et al., 2016)

Sin embargo, al contrario que en el libro de Anaya, esta unidad comienza introduciendo al estudiante las medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes tal y como marca el currículo escolar vigente. Tras esto, ofrece una definición geométrica de razón trigonométrica muy similar a la que ofrece el libro de Anaya:

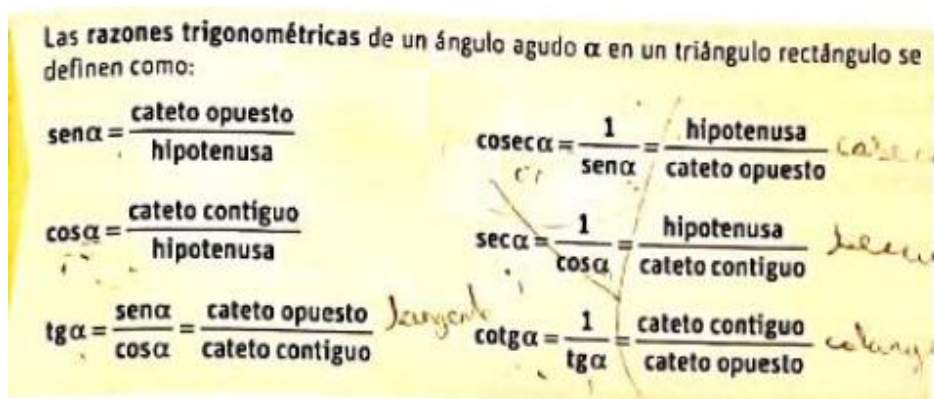


Figura 12. Definición de razones trigonométricas en el libro de texto de SM Savia Digital

En el apartado siguiente, se ofrece también la definición analítica de razón trigonométrica, y se hace referencia también por primera vez a la circunferencia goniométrica:

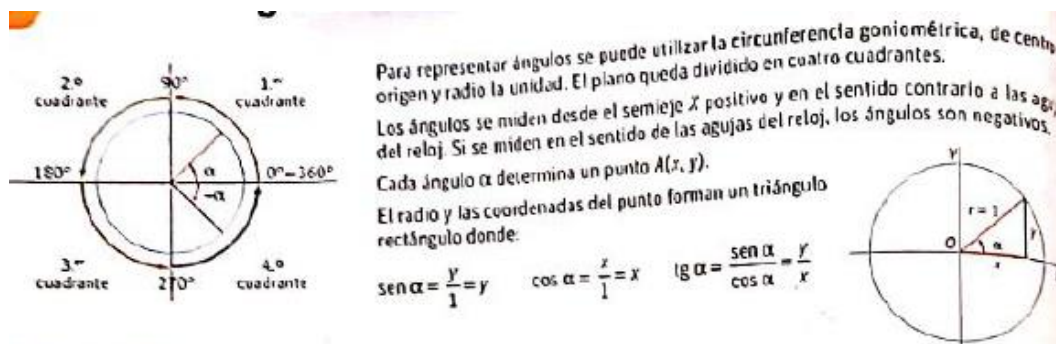
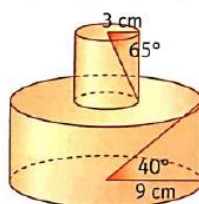


Figura 13. Definición analítica de razón trigonométrica en el libro de SM Savia Digital

En cuanto a las aplicaciones, el libro de texto dedica una unidad entera independiente a las mismas, por lo que se puede concluir que da mucha importancia a la utilidad de la trigonometría en situaciones de la vida real:

5. Calcula el área y el volumen del cuerpo geométrico:



6. La Luna tiene una superficie de 38 000 000 km² y se encuentra a 380 000 km de la Tierra. ¿Qué ángulo ocupa en el cielo?



Figura 14. Problemas propuestos que demuestran posibles aplicaciones de la trigonometría en el libro de SM Savia Digital

Al igual que el libro de Anaya, presenta gran variedad de actividades y problemas relacionados con los contenidos que presenta, de diversa naturaleza y dificultad, y también recursos en la web para realizar ejercicios con GeoGebra. Pero en este libro tampoco existen actividades que fomenten el trabajo colaborativo, siendo todas de carácter individual, y que se adaptan a una metodología de enseñanza transmisiva tradicional.



Figura 15. Recursos web para aplicar conocimientos de trigonometría con GeoGebra en el libro de SM Savia Digital

3.2.3. Comparación de contenidos entre libros de texto y currículo

En este último apartado de análisis de libros de texto, se pasa a comparar el índice de contenidos de ambos libros con el contenido del currículo escolar establecido por el RD 1105/2014. La siguiente tabla muestra el índice de contenidos de los dos libros de texto analizados:

Tabla 5

Índice de contenidos de trigonometría de los libros de texto de las editoriales Anaya y SM Savia Digital

Editorial Anaya	Editorial SM Savia Digital	
Tema 7. Trigonometría	Tema 5. Semejanza y trigonometría.	Tema 6. Aplicaciones de la trigonometría
1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo 2. Relaciones trigonométricas fundamentales 3. Utilización de la calculadora en trigonometría 4. Resolución de triángulos rectángulos 5. Resolución de triángulos oblicuángulos 6. Razones trigonométricas de 0° a 360° 7. Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas. 8. Funciones trigonométricas. El radián	1. Figuras semejantes. Teorema de Tales. 2. Criterios de semejanza de triángulos. Consecuencias. 3. Medida de ángulos. Aplicación de la semejanza 4. Razones trigonométricas de un ángulo agudo 5. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera 6. Identidades trigonométricas 7. Ecuaciones trigonométricas	1. Resolución de triángulos rectángulos 2. Teoremas del seno y del coseno 3. Resolución de triángulos cualesquiera 4. Aplicaciones de la trigonometría: Longitudes, áreas y volúmenes

A simple vista, la única diferencia entre ambos es que el libro de la editorial Anaya engloba todo el contenido de trigonometría en una única unidad, mientras que el de SM abarca dos unidades: semejanza y trigonometría en el tema 5 y aplicaciones de la trigonometría en el 6. Ahora, en la siguiente tabla, se realiza un examen más profundo de los contenidos punto por punto y se compara con el contenido del currículo dictado por el RD 1105/2014.

Tabla 6

Comparación entre contenidos de los libros de texto y contenidos del currículo escolar

RD 1105/2014	Editorial Anaya	Editorial SM Savia Digital	
Contenidos “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” 4º ESO, Bloque 3	Tema 7. Trigonometría	Tema 5. Semejanza y trigonometría.	Tema 6. Aplicaciones de la trigonometría
- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.	8. Funciones trigonómicas. El radián Falta definición de grado sexagesimal y conversión entre grados sexagesimales y radianes	3. Medida de ángulos. Aplicación de la semejanza	-
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	1. Razones trigonómicas de un ángulo agudo 2. Relaciones trigonómicas fundamentales 4. Resolución de triángulos rectángulos 5. Resolución de triángulos oblicuángulos 6. Razones trigonómicas de 0° a 360° 7. Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonómicas.	4. Razones trigonómicas de un ángulo agudo 5. Razones trigonómicas de un ángulo cualquiera 6. Identidades trigonómicas 7. Ecuaciones trigonómicas	1. Resolución de triángulos rectángulos 2. Teoremas del seno y del coseno 3. Resolución de triángulos cualesquiera
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.	Falta este contenido	-	4. Aplicaciones de la trigonometría: Longitudes, áreas y volúmenes
- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	Actividades complementarias con Geogebra que se encuentran a lo largo del tema	Actividades complementarias con Geogebra que se encuentran a lo largo del tema	Actividades complementarias con Geogebra que se encuentran a lo largo del tema

Tras este análisis, se descubre que el libro de texto de la editorial SM Savia Digital cubre por completo el índice de contenidos relacionados con trigonometría que exige el RD 1105/2014, y que el libro de Anaya no incluye ni la definición de grados sexagesimales ni aplicaciones de la trigonometría en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Por lo tanto, se puede concluir que el libro de la editorial SM reproduce con mayor fidelidad el índice de contenidos del currículo escolar que el de la editorial Anaya.

Todos los aspectos analizados a raíz de los libros de texto (fidelidad al índice contenidos del RD 1105/2014, estructura, definición de razón trigonométrica, tipos de actividades propuestas y aplicaciones de la trigonometría) serán tenidos en cuenta tanto en la fundamentación epistemológica del tema como en el diseño de la unidad didáctica del presente trabajo.

4. Fundamentación epistemológica: Desarrollo de un tema de oposición

Con el fin de profundizar ahora en el “saber sabio” matemático de la trigonometría, se expone ahora el desarrollo del siguiente tema, que se encuentra entre los temas recogidos en el temario en los procedimientos de ingreso, adquisición de nueva especialidad y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, recogidos en la Orden de 9 de septiembre de 1993 (BOE 226 de 21 de septiembre de 1993). En concreto, se desarrollará el tema 38: Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones.

El tema presenta la siguiente estructura:

1. Introducción histórica
2. Ángulos en una circunferencia. Unidades
3. Razones trigonométricas de un ángulo
4. Relaciones entre distintas razones trigonométricas. Identidades pitagóricas
5. Resolución de triángulos. Teorema del seno y teorema del coseno
6. Teorema de las tangentes. Fórmulas de Briggs
7. Fórmulas de adición
8. Aplicaciones de la trigonometría

4.1. Introducción histórica

La trigonometría (palabra de origen griego, *trigonon* es triángulo, y *metron*, medida) es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los tres ángulos y los tres lados de un triángulo.

La trigonometría ha sido una herramienta fundamental desde hace milenios para realizar medidas indirectas. El estudio de esta rama de las matemáticas es importante por sus aplicaciones, que van desde la ingeniería, la navegación y las ciencias, en general, hasta artes como la música y la arquitectura (Oteyza et al., 2008). De hecho, el desarrollo de la trigonometría ha ido ligado desde tiempos remotos al de la astronomía, ya que los navegantes necesitaban orientarse durante sus largas travesías por el mar tomando como referencia la posición relativa de las estrellas.

En la antigua Grecia, dos grandes astrónomos ya empezaron a sentar las bases de lo que hoy en día se conoce como trigonometría (Colera et al., 2016):

- Hiparco de Nicea (190-120 a. C.), considerado el “padre de la astronomía”, consolidó el sistema sexagesimal para la medida de ángulos. Teniendo en cuenta que la esencia de la trigonometría es sustituir medidas angulares por medidas lineales (ver figura 16), elaboró unas tablas en las que asociaba la medida de cada ángulo con la longitud de la cuerda correspondiente.

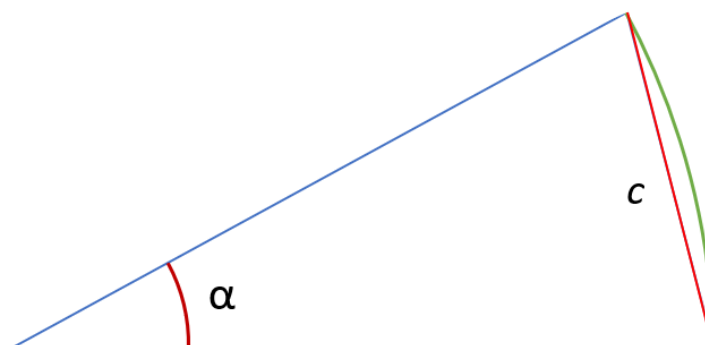


Figura 16. Aproximación de un arco por su tangente

- Ptolomeo de Alejandría (85-165) amplió y mejoró la obra de Hiparco y escribió un enorme tratado de astronomía de trece libros, al que se acabó llamando el *Almagesto* (el más grande).

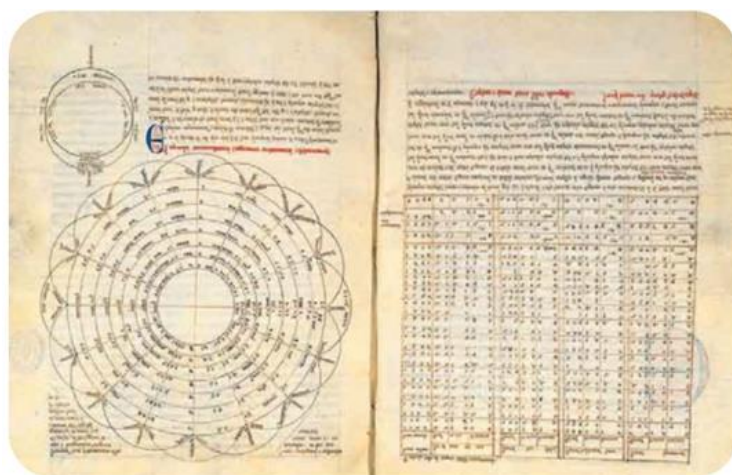


Figura 17. Edición del siglo XIII del "Almagesto" de Ptolomeo que se conserva en la Biblioteca Nacional de Madrid

Posteriormente, los indios, durante los siglos IV y V, desarrollaron una trigonometría con un enfoque distinto al de los griegos: asociaron a cada ángulo la longitud de la semicuerda del ángulo doble (lo que posteriormente se llamaría *seno* del ángulo, figura 18), consiguiendo así trabajar con triángulos rectángulos, más fáciles de manejar.

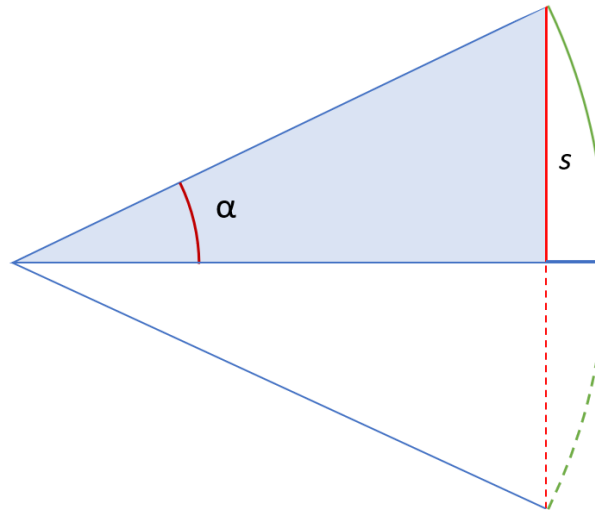


Figura 18. Semicuerda del ángulo doble asociado al ángulo α por los indios

También los árabes, ya en los siglos IX y X, se inspiraron en el *Almagesto* de Ptolomeo, pero usaron las tablas de los senos de los indios, las ampliaron con otras medidas y las mejoraron. Su trigonometría, bien fundamentada y muy práctica, empezó a extenderse por Europa a partir del siglo XI. Desde ese momento, la trigonometría siguió su evolución hasta convertirse en lo que hoy se reconoce como una rama de las matemáticas fundamental.

4.2. Ángulos en una circunferencia. Unidades.

Dada una circunferencia c con centro O como la de la figura 19, se llama ángulo central α en c a cualquier ángulo cuyo vértice sea el centro de la circunferencia (Academia Deimos, 2003):

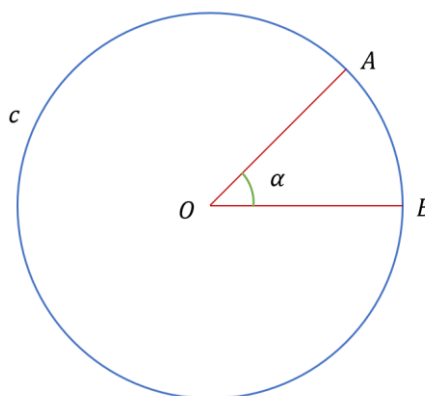


Figura 19. Ángulo central α

La longitud del arco correspondiente a un ángulo central es proporcional a la amplitud de dicho arco y al radio de la circunferencia. En consecuencia, si se trata de medir un

ángulo central, se puede hacer en función de la longitud del arco, manteniendo fijo el radio de la circunferencia.

En cuanto a las unidades, se consideran las siguientes unidades de medida de ángulos:

- Se llama grado sexagesimal ($^{\circ}$) a la medida de un ángulo central cuyo arco correspondiente mide la 360-ava parte de la longitud de la circunferencia. La sexagésima parte de un grado sexagesimal recibe el nombre de minuto sexagesimal ($'$), y la sexagésima parte de un minuto sexagesimal se denomina segundo sexagesimal ($''$).
- Se llama grado centesimal (g) a la medida de un ángulo central cuyo arco correspondiente mide la 400-ava parte de la longitud de la circunferencia. La centésima parte de un grado centesimal recibe el nombre de minuto centesimal (m), y la centésima parte de un minuto centesimal se llama segundo centesimal (s).
- Se llama radián (rad) a la medida de un ángulo cuyo arco correspondiente mide la longitud del radio (ver figura 20).

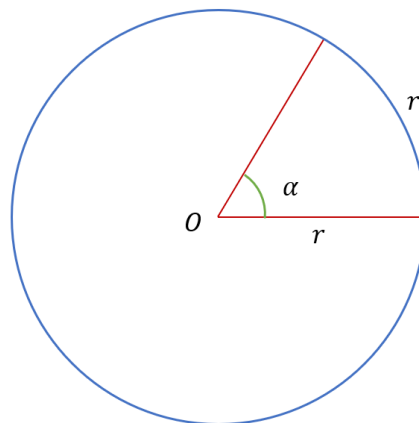


Figura 20. Ángulo α de 1 rad

Un ángulo central correspondiente a la circunferencia completa tiene 360 grados sexagesimales, 400 grados centesimales y 2π radianes. Por lo tanto:

$$360^{\circ} = 400g = 2\pi rad$$

Si se despeja cada una de las unidades en función de las otras se obtienen las equivalencias entre las distintas unidades:

$$1^{\circ} = \frac{400}{360}g = 1g \ 11m \ 11,11s$$

$$1^{\circ} = \frac{2\pi}{360}rad = 0,017453293 rad$$

$$1g = \frac{360}{400}^{\circ} = 54'$$

$$1g = \frac{2\pi}{400} rad = 0,015707963 rad$$

$$1 rad = \frac{360}{2\pi}^\circ = 57^\circ 17' 44,81''$$

$$1 rad = \frac{400}{2\pi} g = 63g \ 66m \ 19,77s$$

4.3. Razones trigonométricas de un ángulo

Sea α un ángulo agudo con origen en el punto O de una circunferencia de radio unidad como la de la figura 21 (Sullivan, 2006). Se considera $P(x, y)$ el extremo de dicho ángulo. Con el ángulo agudo α se forma un triángulo rectángulo OAP , con hipotenusa de longitud $\overline{OP} = 1$ y catetos de longitud $\overline{OA}$ y $\overline{PA}$ respectivamente.

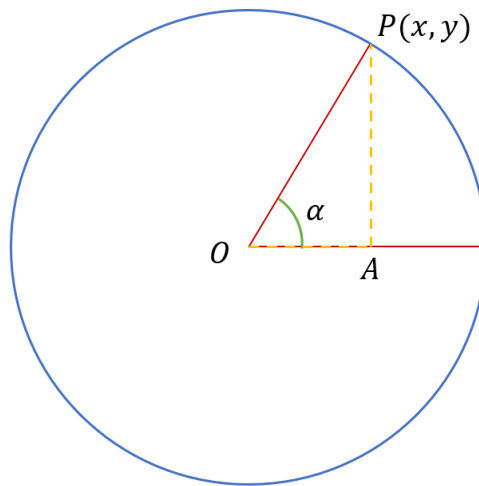


Figura 21. Razones trigonométricas de un ángulo α

Entonces, se llaman razones trigonométricas del ángulo α a los siguientes valores:

- Se llama coseno de α ($\cos \alpha$) al cociente $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$, o lo que es lo mismo, a la abscisa x del punto P .
- Se llama seno de α ($\sen \alpha$) al cociente $\frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$, o lo que es lo mismo a la ordenada y del punto P .
- Si $\cos \alpha \neq 0$, se llama tangente de α ($tg \alpha$) al cociente entre el seno y el coseno ($tg \alpha = \frac{\sen \alpha}{\cos \alpha}$)
- Si $\sen \alpha \neq 0$, se llama cotangente de α ($cotg \alpha$) al cociente entre el coseno y el seno ($cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha}$)
- Si $\sen \alpha \neq 0$, se llama cosecante de α al inverso de $\sen \alpha$ ($cosec \alpha = \frac{1}{\sen \alpha}$)
- Si $\cos \alpha \neq 0$, se llama secante de α al inverso de $\cos \alpha$ ($\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$)

Nótese que estas razones dependen únicamente del valor del ángulo α y no del triángulo formado. Cualesquiera dos triángulos rectángulos formados usando el ángulo α serán semejantes; por lo tanto, las razones correspondientes serán iguales (Sullivan, 2006).

Dado que las razones trigonométricas de un ángulo se definen, una vez fijado el origen, en función del extremo, si dos ángulos tienen el mismo extremo (es decir, si su diferencia es un múltiplo entero de $2\pi \text{ rad}$) tendrán las mismas razones trigonométricas (Academia Deimos, 2003). Como consecuencia, solamente bastará estudiar las razones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0 y $2\pi \text{ rad}$.

4.3.1. Razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Dado un ángulo α , los signos de sus razones trigonométricas son los siguientes:

- Si $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ todas las razones trigonométricas son positivas.
- Si $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ únicamente son positivas el seno y la cosecante.
- Si $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ únicamente son positivas la tangente y la cotangente.
- Si $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ únicamente son positivas el coseno y la secante.

Se van a obtener las razones trigonométricas en el primer cuadrante. En la figura 22, se observa que los triángulos OAB , OPH y OST son semejantes:

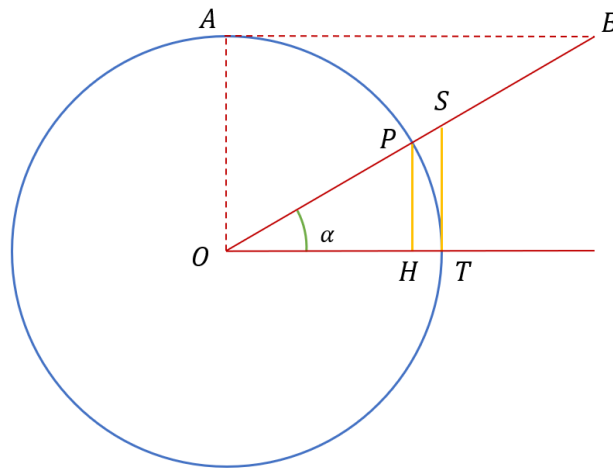


Figura 22. Razones trigonométricas en el primer cuadrante

- De la semejanza de OPH y OST se deduce:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{ST}}$$

Si se considera que la circunferencia de la figura 7 es de radio unidad, $\overline{OP} = \overline{OT} = 1$, entonces $\overline{PH} = \text{sen } \alpha$ y $\overline{OH} = \cos \alpha$. Si se sustituyen estas igualdades en la expresión obtenida anteriormente, se tiene:

$$\frac{1}{\overline{OS}} = \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\overline{ST}}$$

A partir de dicha igualdad, se pueden obtener las expresiones para $\text{tg } \alpha$ y $\text{sec } \alpha$:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \overline{ST}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \overline{OS}$$

- Y ahora, se procede de manera análoga con la semejanza de los triángulos OPH y OAB . A partir de ésta se deduce que:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}$$

Como $\overline{OA} = \overline{OP} = 1$, $\overline{OH} = \cos \alpha$ y $\overline{PH} = \text{sen } \alpha$, se tiene la igualdad:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{1} = \frac{\cos \alpha}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{OB}}$$

Y a partir esta igualdad, se obtienen las expresiones para $\text{cosec } \alpha$ y $\text{cotg } \alpha$:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \overline{OB}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \overline{AB}$$

Este mismo procedimiento que se ha seguido para obtener las razones del primer cuadrante se podría repetir para los tres restantes.

4.4. Relaciones entre distintas razones trigonométricas. Identidades pitagóricas

Una vez definidas estas relaciones trigonométricas básicas, se puede intentar establecer a su vez otras relaciones entre ellas. Tómese ahora el triángulo rectángulo de la figura 23 (Sullivan, 2006):

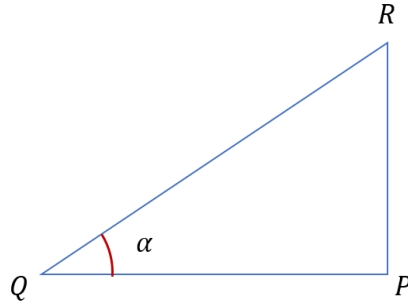


Figura 23. Triángulo rectángulo PQR

Si se aplica el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\overline{RP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{RQ}^2$$

Y dividiendo toda la ecuación por $\overline{RQ}^2$ resulta:

$$\left(\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}\right)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Y si ahora se divide la ecuación $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ entre $cos^2\alpha$ se obtiene:

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \mathbf{tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$$

Si por último, se divide la igualdad $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ entre $sen^2\alpha$, se tiene:

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \mathbf{cotg^2\alpha + 1 = cosec^2\alpha}$$

Estas tres últimas identidades obtenidas reciben el nombre de identidades pitagóricas (Sullivan, 2006).

A continuación, se van a obtener identidades trigonométricas de ángulos en ciertos casos particulares.

4.4.1. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos complementarios

Si se toma, por ejemplo, un triángulo rectángulo igual que el de la figura 24 y se calculan las razones trigonométricas del otro ángulo no recto del triángulo, se pueden relacionar con las del ángulo α (Oteyza et al., 2008). Como el otro ángulo es $(90^\circ - \alpha)$ grados, se denominará ángulo complementario por ser la suma de ambos igual a 90° :

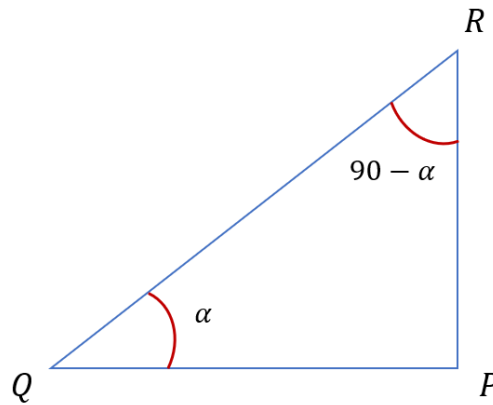


Figura 24. Ángulo complementario de α

Del triángulo de la figura anterior se pueden deducir las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}(90 - \alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}} = \cos \alpha \qquad \cos(90 - \alpha) = \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RP}} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

4.4.2. Razones trigonométricas de ángulos obtusos

Si de igual manera se forman triángulos tomando puntos en una circunferencia de radio r , pero que no se encuentren esta vez en el primer cuadrante:

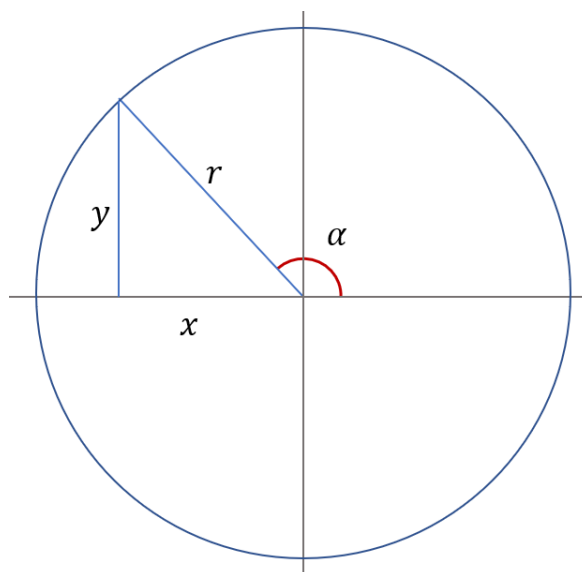


Figura 25. Razones trigonométricas de ángulos obtusos

Las razones del ángulo que forma ahora la hipotenusa con respecto a la parte positiva del eje OX vienen dadas por:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \quad \operatorname{cos}\alpha = \frac{x}{r} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Como los segmentos x e y se encuentran en el segundo cuadrante, se afirma por definición que el seno es positivo, el coseno es negativo y la tangente es negativa.

Además, se puede comprobar que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{cos}^2\alpha = 1$$

4.4.3. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos suplementarios

Dados dos ángulos α y β , se dice que son suplementarios si $\alpha + \beta = 180^\circ$:

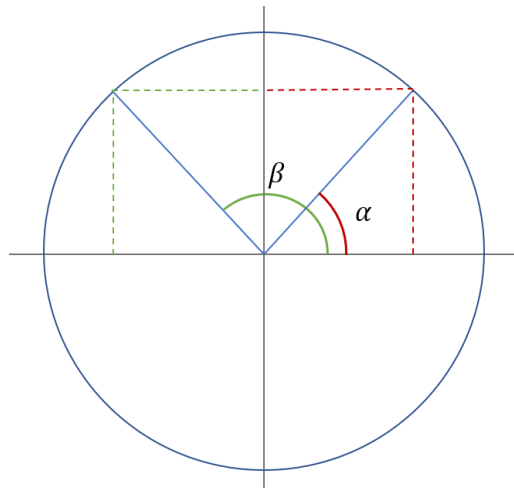


Figura 26. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios

De la figura anterior, son fácilmente deducibles las siguientes expresiones para razones de dos ángulos suplementarios α y β :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}(180 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{cos}\beta &= \operatorname{cos}(180 - \alpha) = -\operatorname{cos}\alpha \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{cos}\beta} = \frac{\operatorname{sen}(180 - \alpha)}{\operatorname{cos}(180 - \alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}$$

4.4.4. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos que difieren en 90°

Dados dos ángulos α y β como los de la figura 27, se dice que son ángulos que difieren 90° si $\beta = 90^\circ + \alpha$:

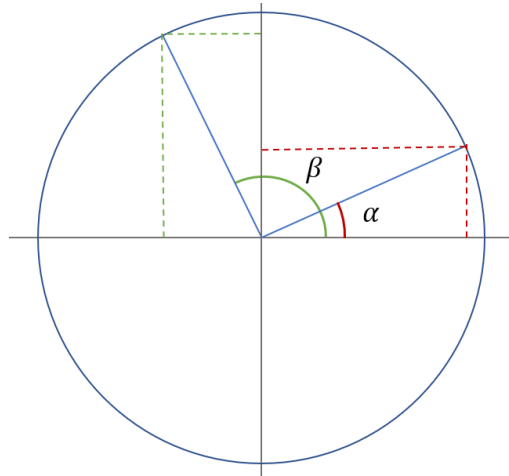


Figura 27. Razones trigonométricas de ángulos que difieren 90°

A partir de la figura anterior, se pueden deducir las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(90 + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(90 + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90 + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

4.4.5. Identidades trigonométricas que relacionan ángulos opuestos

Dados dos ángulos α y β como los de la figura 28, se dice que son ángulos opuestos si se verifica que $\beta = -\alpha$:

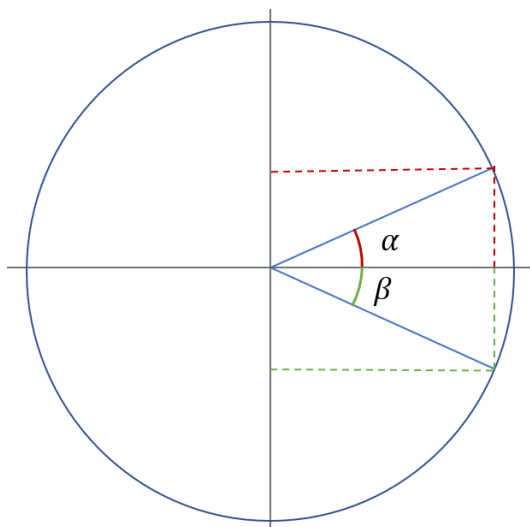


Figura 28. Razones trigonométricas de ángulos opuestos

Tomando la figura anterior, se pueden verificar las siguientes expresiones para las razones trigonométricas de dos ángulos opuestos α y β :

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

4.4.6. Razones trigonométricas de ángulos fundamentales

Los ángulos de 0° , 30° ($\frac{\pi}{6} \text{ rad}$), 45° ($\frac{\pi}{4} \text{ rad}$) y 60° ($\frac{\pi}{3} \text{ rad}$) se consideran especiales porque se presentan muy a menudo en el estudio de trigonometría y su uso en cálculo (Zill & Dewar, 2012). Por tanto, es conveniente aprender los valores exactos del seno y el coseno de cada uno de estos ángulos.

Resultan triviales las razones trigonométricas del ángulo 0° :

$$\cos 0^\circ = 1 \quad \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

Para las razones de 30° y 60° , se toma el siguiente triángulo equilátero:

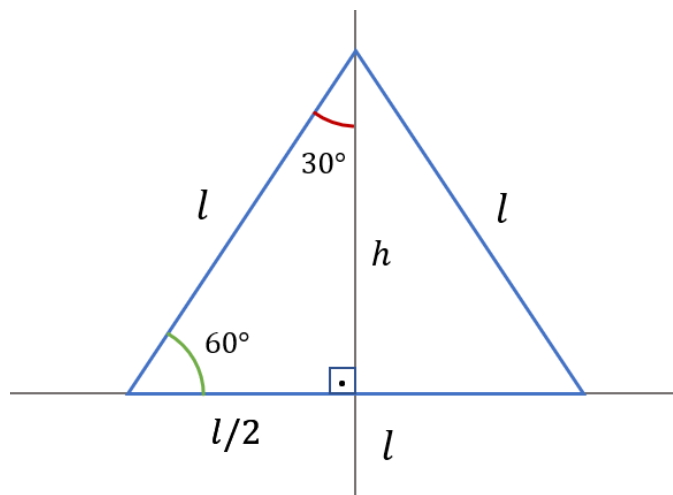


Figura 29. Razones trigonométricas de ángulos de 30° y 60°

Aplicando teorema de Pitágoras se obtiene:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \quad \rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Por lo tanto, para un ángulo de 30° :

$$\text{sen}30^\circ = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}30^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}l/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}30^\circ = \frac{\text{sen}30^\circ}{\text{cos}30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Y para un ángulo de 60° :

$$\text{sen}60^\circ = \text{sen}(90 - 30) = \text{cos}30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos}60^\circ = \text{cos}(90 - 30) = \text{sen}30 = \frac{1}{2} \rightarrow \text{cos}60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}60^\circ = \frac{\text{sen}60^\circ}{\text{cos}60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \rightarrow \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$$

Ahora, para obtener los valores de las razones trigonométricas de un ángulo de 45° , se toma un cuadrado de lado l como el siguiente:

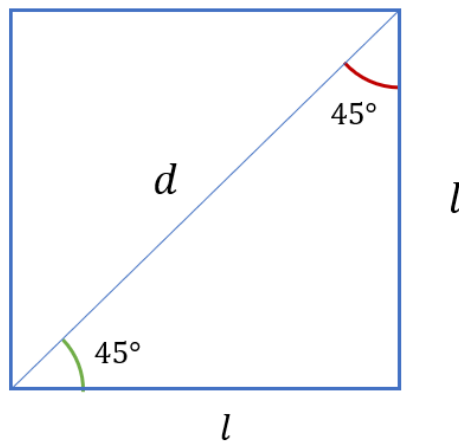


Figura 30. Razones trigonométricas de un ángulo de 45°

Se aplica de nuevo el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow d = \sqrt{2} l$$

Teniendo en cuenta esta relación, se obtienen las razones trigonométricas para ángulo de 45° :

$$\text{sen}45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}45^\circ = \frac{\text{sen}45^\circ}{\text{cos}45^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 \rightarrow \text{tg}45^\circ = 1$$

4.5. Resolución de triángulos. Teorema del seno y teorema del coseno

Las aplicaciones de la trigonometría de triángulos rectángulos en campos como topografía y navegación implican resolver triángulos rectángulos. La expresión “resolver un triángulo” quiere decir que se desea determinar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo (Zill & Dewar, 2012). Se puede resolver cualquier triángulo rectángulo si se conocen dos lados o un ángulo agudo y un lado. A continuación, se analizan los distintos casos:

4.5.1. Resolución de triángulos rectángulos

Conocido un lado y un ángulo agudo del triángulo

Dado el siguiente triángulo rectángulo:

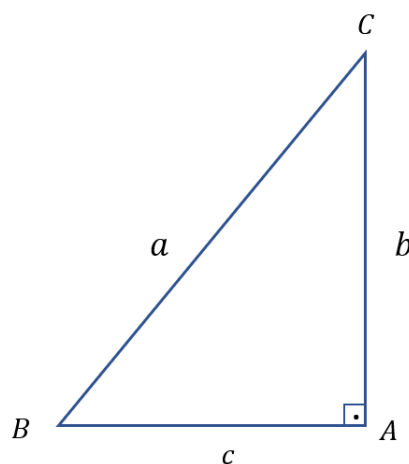


Figura 31. Triángulo rectángulo ABC

a) Si se conoce la hipotenusa a y un ángulo agudo (B , por ejemplo), se tiene:

$$C = 90^\circ - B$$

Y por lo tanto el valor de los otros dos lados desconocidos es:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{b}{a} \rightarrow b = a \operatorname{sen} B \\ \cos B &= \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cos B \end{aligned}$$

b) Si se conoce el valor de uno de los catetos, el b por ejemplo, y también el ángulo agudo B , se tiene de igual manera que:

$$C = 90^\circ - B$$

Y el valor de los otros dos lados es:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \\ \operatorname{tg} B &= \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} \end{aligned}$$

Conocidos dos lados

a) Conocida la hipotenusa a y el cateto b por ejemplo, se tiene:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \rightarrow B = \operatorname{arcsen} \frac{b}{a}$$

Además:

$$C = 90^\circ - B \quad A = 90^\circ$$

Y por último, el lado c puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

b) Conocidos los dos catetos b y c , estos serían los valores de la hipotenusa a y los tres ángulos:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$A = 90^\circ \quad C = 90^\circ - B \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \rightarrow B = \operatorname{arctg} \frac{b}{c}$$

4.5.2. Resolución de triángulos oblicuángulos

Expresión trigonométrica de la altura h

Para el triángulo oblicuángulo de la siguiente figura:

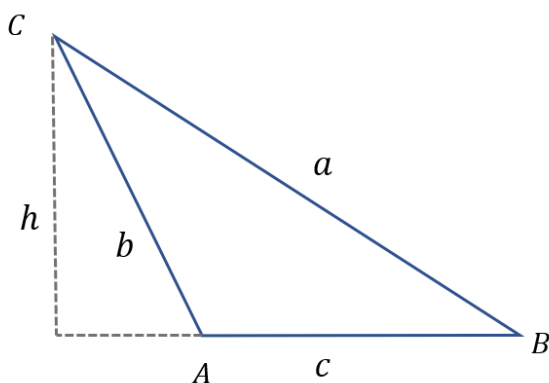


Figura 32. Altura de un triángulo oblicuángulo

Se obtiene la altura h de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen} B$$

Y para este otro triángulo oblicuángulo:

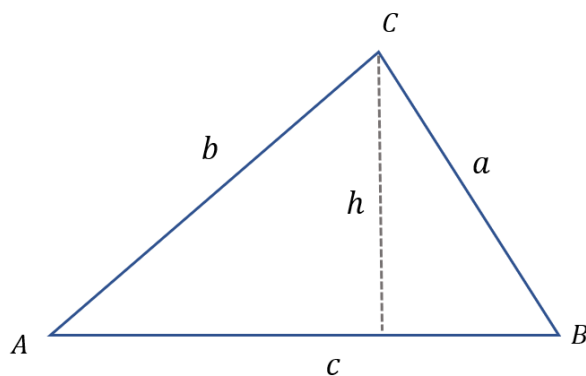


Figura 33. Altura de un triángulo oblicuángulo (II)

Se tiene que la altura h es:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} A$$

4.5.3. Teorema del seno

Haciendo uso de las expresiones que se han obtenido para las alturas de los triángulos oblicuángulos, $h = a \cdot \operatorname{sen} B$ y $h = b \cdot \operatorname{sen} A$, si se igualan ambas se tiene:

$$a \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} A \rightarrow \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

Y si se procede de manera análoga con la altura que parte del vértice A , se tendría que esta igualdad se puede ampliar a:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

En lo que se conoce como teorema del seno (Oteyza et al., 2008).

Resolución por teorema del seno

- a) Conocidos dos ángulos A y B y el lado a , se tiene que $C = 180 - A - B$, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{c}{\operatorname{sen} C} \rightarrow c = a \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \\ \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow b = a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \end{aligned}$$

- b) Conocidos los lados a y b y el ángulo A opuesto a a , se opera de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \operatorname{sen} A \rightarrow B = \arcsen \left(\frac{b}{a} \operatorname{sen} A \right)$$

En este punto, existen dos posibilidades:

- $0 < B \leq 90^\circ$
- $90^\circ < B < 180^\circ$

Pero siempre debe ocurrir que $\frac{b \operatorname{sen} A}{a} \leq 1$, o lo que es lo mismo, que $b \operatorname{sen} A \leq a$

- 1) Si $b \operatorname{sen} A = a \rightarrow \operatorname{sen} B = 1 \rightarrow B = 90^\circ$
- 2) Si $b \operatorname{sen} A < a \rightarrow \operatorname{sen} B < 1$ entonces
 - i) Si $A < 90^\circ$, puede haber dos soluciones o una, dependiendo de si $a < b$ o no
 - ii) Si $A > 90^\circ$ solamente hay una solución

4.5.4. Teorema del coseno

Si se toman los triángulos oblicuángulos de las figuras 32 y 33 respectivamente, y se aplica a cada uno de ellos el Teorema de Pitágoras generalizado, se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bn \begin{cases} \text{con signo menos si } A < 90^\circ \\ \text{con signo más si } A > 90^\circ \\ n = 0 \text{ si } A = 90^\circ \end{cases}$$

Siendo n la proyección de AB sobre la recta AC , se tiene que:

$$\cos A = \frac{n}{c} \quad \text{para la figura de la izquierda}$$

$$\cos A = -\cos(180 - A) = -\frac{n}{c} \quad \text{para la figura de la derecha}$$

$$\text{Si } n = c \cos A \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{Si } n = -c \cos A \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc(-\cos A) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Es decir, que para ambos casos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Y análogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Obteniendo así las tres identidades del teorema del coseno que se cumplen para cualquier triángulo ABC (Oteyza et al., 2008).

Resolución por teorema del coseno

- a) Conocidos dos lados a y b y el ángulo C

Como $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$

Y usando el teorema del seno se calculan los ángulos A y B

- b) Conocidos los tres lados

Se despeja el coseno para cada ángulo:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Y se obtienen así los ángulos A , B y C del triángulo.

4.5.5. Radio de la circunferencia circunscrita

Supongamos un triángulo cualquiera ABC como el de la figura 34 al que se le traza su circunferencia circunscrita (Gómez, 2015). Si a continuación se traza otro triángulo rectángulo BCD (inscrito en la misma circunferencia) cuya hipotenusa sea $2r$ y de lado BC común para ambos triángulos, se obtiene:

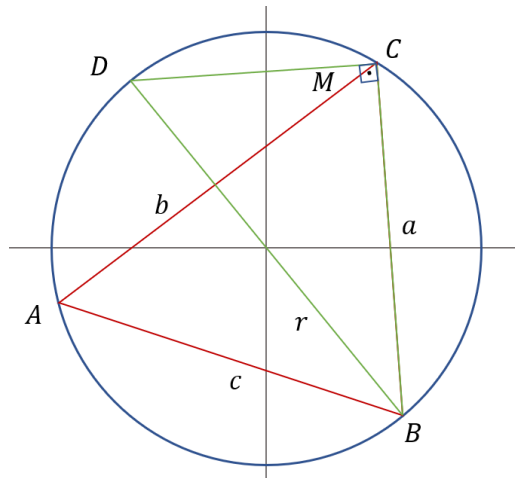


Figura 34. Radio de la circunferencia circunscrita

Se puede apreciar que el ángulo D y el ángulo A de los triángulos BCD y ABC respectivamente, son iguales por tener el mismo arco, y además, el ángulo M en el punto C es un ángulo recto por ser DB el diámetro de la circunferencia. Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{a}{\sin D} = \frac{2r}{\sin 90} \rightarrow \sin D = \frac{a}{2r}$$

Y también:

$$\sin A = \frac{a}{2r}$$

Por tanto:

$$2r = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

4.6. Teorema de las tangentes. Fórmula de Briggs

4.6.1. Teorema de las tangentes

Si se toma la expresión obtenida previamente para el teorema de los senos (Oteyza et al., 2008):

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = k$$

Donde k es una constante, entonces:

$$a = k \operatorname{sen} A \quad \text{y} \quad b = k \operatorname{sen} B$$

Por lo que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{k(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)}{k(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)}$$

Y usando las identidades de razones trigonométricas de suma y diferencia que se verán en el apartado 4.8.6.:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$$

Obteniendo así el teorema de las tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$$

4.6.2. Resolución de triángulos

Conocidos los lados a y b y el ángulo C de un triángulo, se tiene:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$$

Si $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$, entonces:

$$\operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \left(90 - \frac{A+B}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$$

Así:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

De donde se obtiene $\frac{A-B}{2}$ que junto con $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$, se resuelve y se calculan A y B .

Y para calcular c :

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \rightarrow c = \frac{(a+b) \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}$$

4.6.3. Fórmulas de Briggs

Las fórmulas de Briggs permiten calcular las razones trigonométricas de $\frac{A}{2}$. Para obtener dichas fórmulas, se hace uso del semiperímetro del triángulo, al que se denomina p (Academia Deimos, 2003):

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Si se tiene un triángulo ABC como el de la siguiente figura:

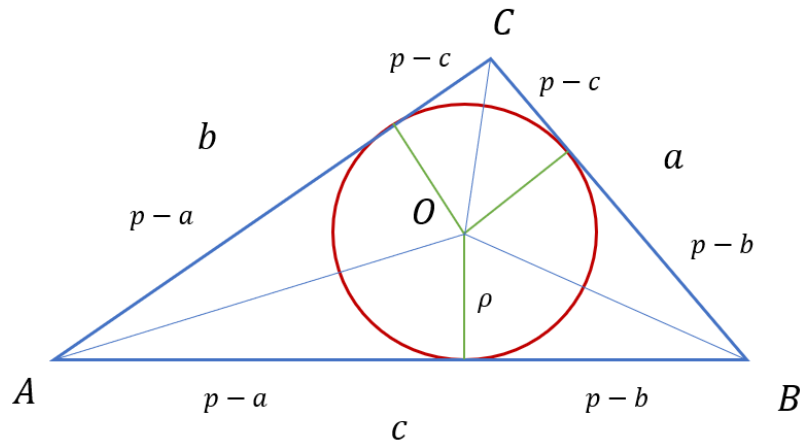


Figura 35. Circunferencia inscrita del triángulo ABC

Entonces el radio de la circunferencia inscrita en él tiene por radio:

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Donde, como se ha dicho, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{\rho}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{\rho}{p-b} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\rho}{p-c} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Obteniendo así lo que se conocen como fórmulas de *Briggs*.

4.7. Fórmulas de adición

4.7.1. Coseno de la suma y diferencia

Si sobre una circunferencia de radio unidad como la de la figura 37 se construyen dos ángulos $\alpha = XOA$ y $\beta = AOB$ de manera que se cumpla $\alpha + \beta = XOB$ (Zill & Dewar, 2012):

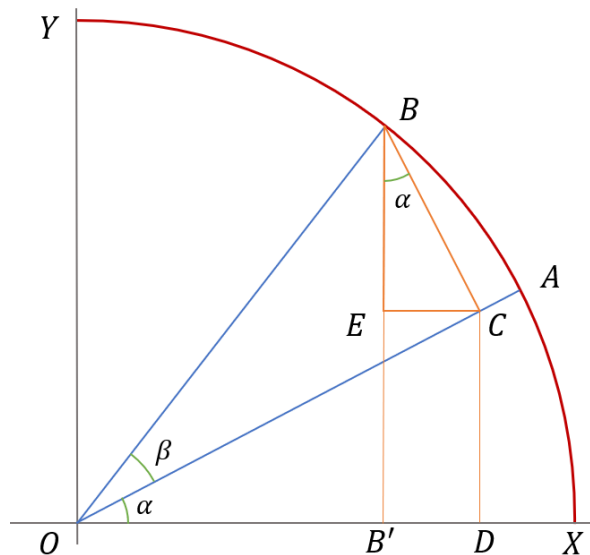


Figura 36. Coseno de la suma y diferencia

La proyección perpendicular de B sobre el radio OA es el punto C y la proyección sobre el eje OX es el punto B' , por lo que:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'$$

$$\cos \beta = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC$$

Por otro lado, el punto C se proyecta sobre el eje OX en el punto D y sobre la recta BB' en el punto E . Esto implica que el ángulo EBC es α , por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{EC}{BC} \rightarrow EC = BC \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OC} \rightarrow OD = OC \cos \alpha$$

Y como $OB' = OD - B'D = OD - EC$, resulta:

$$OB' = OC \cos \alpha - BC \operatorname{sen} \alpha = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Siendo ésta la expresión del coseno de la suma de los ángulos.

De manera análoga, se puede demostrar que el coseno de la diferencia viene determinado por:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

4.7.2. Seno de la suma y diferencia

De la misma figura se deduce que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = BB' = BE + EB'$

Y como $\cos \alpha = \frac{BE}{BC} \rightarrow BE = BC \cos \alpha$

Siendo $\operatorname{sen} \beta = \frac{BC}{BO} = \frac{BC}{1} = BC$, y sustituyendo en la anterior:

$$BE = \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

También en la figura se deduce que $EB' = CD$

Y como $\operatorname{sen} \alpha = \frac{CD}{OC} \rightarrow CD = OC \cdot \operatorname{sen} \alpha$

Siendo $\cos \beta = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC$. Sustituyendo en la anterior:

$$CD = \cos \beta \operatorname{sen} \alpha$$

Luego:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Análogamente al caso anterior:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen} \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \operatorname{sen}(-\beta)$$

Resultando:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

4.7.3. Tangente de la suma y diferencia

Las fórmulas análogas de tangentes de la suma y diferencia de ángulos son:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta} = \frac{\frac{\text{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

Resultando:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha tg \beta}$$

Y para la tangente de la diferencia:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\text{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta} = \frac{\frac{\text{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

Resultando:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha tg \beta}$$

4.7.4. Fórmulas del ángulo doble

Se pueden deducir otras fórmulas trigonométricas útiles a partir de las fórmulas obtenidas anteriormente de suma y diferencia (Zill & Dewar, 2012). Las fórmulas de ángulo doble, por ejemplo, expresan el coseno y el seno de 2α en función del coseno y el seno de α :

$$\text{sen } 2\alpha = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \text{sen} \alpha \rightarrow \text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \text{sen} \alpha \text{sen} \alpha \rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

$$tg 2\alpha = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg \alpha + tg \alpha}{1 - tg \alpha tg \alpha} \rightarrow tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$$

4.7.5. Fórmulas del ángulo mitad

Tomando las expresiones:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

Si se suman ambas expresiones miembro a miembro se obtiene:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Por lo tanto, haciendo que $\alpha = \frac{A}{2}$ se tiene:

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

Y si las expresiones:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Se restan miembro a miembro:

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Y haciendo de nuevo $\alpha = \frac{A}{2}$ se obtiene:

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

Y por último, la tangente del ángulo mitad sería:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

4.7.6. Transformaciones en productos de sumas y diferencias

Si se consideran las expresiones:

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Y se suman y restan respectivamente ambas expresiones, se obtiene:

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) - \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si se hace el siguiente cambio de variable:

$$\alpha + \beta = p \rightarrow 2\alpha = p + q$$

$$\alpha - \beta = q \rightarrow 2\beta = p - q$$

De donde se deduce $\alpha = \frac{p+q}{2}$ y $\beta = \frac{p-q}{2}$ y sustituyendo

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

Haciendo lo mismo con el coseno se tiene:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si se suman y restan ambas expresiones:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Y haciendo el mismo cambio $\alpha = \frac{p+q}{2}$ y $\beta = \frac{p-q}{2}$ y sustituyendo:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

4.8. Aplicaciones de la trigonometría

Las aplicaciones de la trigonometría plana son bastantes, aunque su uso en topografía tiene especial interés (Gómez, 2015). A continuación, se detallan algunas aplicaciones prácticas.

4.8.1. Cálculo del área de un triángulo

Aquí se obtendrán varias fórmulas para calcular la superficie S de un triángulo en función de los datos de los que se dispongan de partida (Sullivan, 2006). Se llamará al área del triángulo S por no confundirla con el vértice A de un triángulo dado.

Conocidos dos lados y un ángulo

Se toma el triángulo de la figura 37:

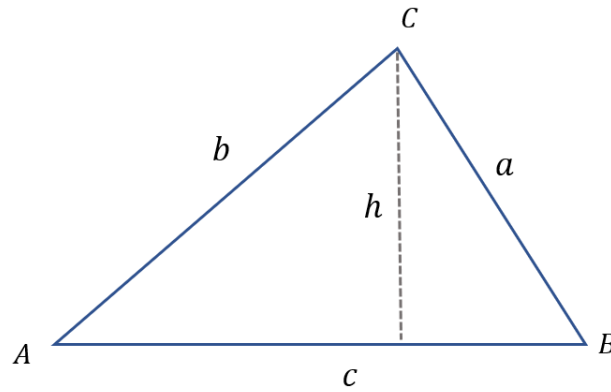


Figura 37. Cálculo de la superficie de un triángulo

La superficie del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h$$

Si se sustituye aquí la expresión obtenida para el teorema de los senos $h = b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$ resulta:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot b \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} c \cdot a \operatorname{sen} B$$

Permitiendo así expresar la superficie del triángulo con dos de sus lados y un ángulo conocidos.

Conocidos tres lados

Si se conocen los tres lados del triángulo, se puede calcular la superficie del mismo mediante la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde p es la mitad del perímetro del triángulo, es decir, $p = 0,5 \cdot (a + b + c)$ (Swokowski & Cole, 2009). A continuación, se expone la demostración.

Se toma la fórmula obtenida anteriormente para calcular la superficie de un triángulo sabiendo dos lados y un ángulo y se desarrollan las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} c \cdot b \operatorname{sen} A &= \sqrt{\frac{1}{4} b^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} bc(1 + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{2} bc(1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

Se obtendrá la fórmula de Herón al sustituir las expresiones bajo el signo final del radical por expresiones que contengan solamente a , b y c .

Haciendo uso del teorema del coseno se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}bc(1 + \cos \alpha) &= \frac{1}{2}bc \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{1}{2}bc \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = \frac{(b+c) + a}{2} \cdot \frac{(b+c) - a}{2}\end{aligned}$$

Se procede de manera análoga para la segunda expresión bajo el signo del radical:

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos \alpha) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}$$

Si ahora se sustituye por las expresiones bajo el signo del radical, se obtiene:

$$S = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

Haciendo $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$:

$$p - a = \frac{b + c - a}{2} \quad p - b = \frac{a - b + c}{2} \quad p - c = \frac{a + b - c}{2}$$

La sustitución de estas expresiones en la fórmula de la superficie del triángulo S da la fórmula de Herón planteada al principio (Swokowski & Cole, 2009).

4.8.2. Cálculo de la altura de un punto de pie accesible

Si se quiere calcular la altura h de la torre de la siguiente figura, con un teodolito de altura h' , se puede medir la distancia d de separación de la vertical del aparato de medida al pie de la torre y el ángulo de inclinación α , que forma la horizontal del aparato con la visual dirigida al punto más alto:

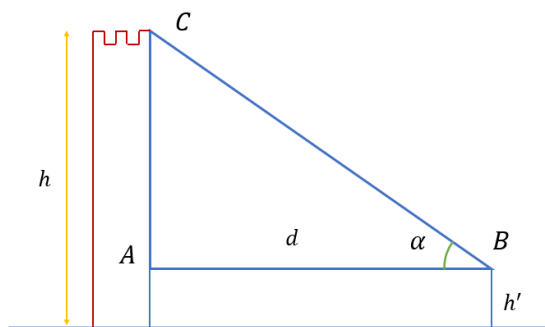


Figura 38. Cálculo de la altura h de una torre de pie accesible

Se forma así un triángulo rectángulo ABC en el que la distancia AC es fácilmente calculable, siendo $AC = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Así, la altura de la torre es:

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h'$$

Si la base BA no fuera horizontal, además de medir la base y el ángulo α , se podría medir el ángulo que forma la horizontal con la visual dirigida a C (al llevar los teodolitos niveles):

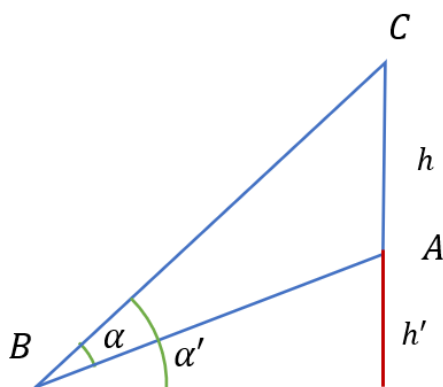


Figura 39. Cálculo de la altura h con base no horizontal

Se puede así medir, además de BA , los ángulos α y α' . El ángulo ACB será $90^\circ - \alpha'$, con lo que se conocerán tres elementos del triángulo ABC . Para hallar h se usará el teorema de los senos, teniendo:

$$\frac{h}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{BA}{\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha')} \rightarrow h = \frac{BA \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha')} = \frac{BA \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha'}$$

4.8.3. Cálculo de la altura de un punto de pie inaccesible

Supongamos en la figura 40 que B es el punto más alto de una montaña cuya altura se quiere medir. Se tiene acceso a los puntos A y C , con lo que se puede medir la distancia AC y los ángulos α , β y γ (nótese la tridimensionalidad de la figura siguiente):

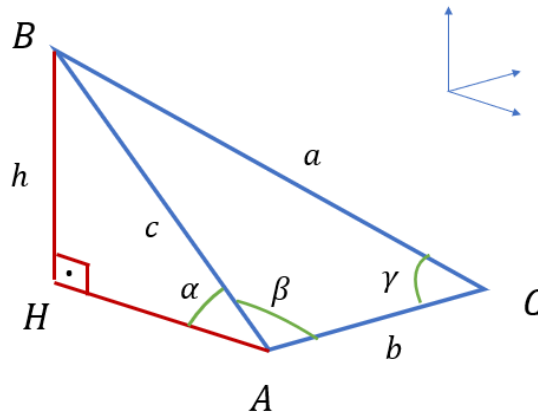


Figura 40. Cálculo de la altura h de un punto de pie inaccesible

Con estos datos, se puede resolver el triángulo ABC y con el dato del lado AB se puede calcular h en el triángulo ABH . Para ello, primero se calcula el ángulo B del triángulo ABC como $180^\circ - (\beta + \gamma)$ y después se aplica el teorema de los senos, con lo que se tendrá:

$$\frac{c}{\text{sen } \gamma} = \frac{b}{\text{sen } B} \rightarrow c = \frac{b \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } B}$$

Si se considera ahora el triángulo ABH :

$$h = c \cdot \text{sen } \alpha = \frac{b \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } B}$$

Otro caso que se podría presentar para calcular la altura de un punto de pie inaccesible es el llamado método de doble observación, que se da cuando la base se encuentra alineada con los puntos de observación, tal y como se aprecia en la siguiente figura:

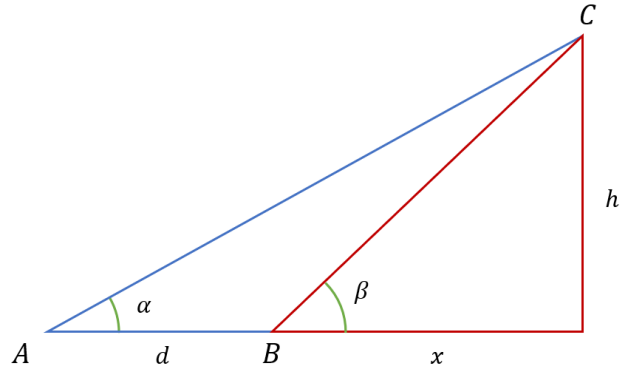


Figura 41. Método de doble observación para calcular la altura h

Aquí se puede medir la distancia AB y los ángulos α y β . De los triángulos rectángulos que se tienen se sabe que:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d+x} \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d+x = h \cdot \operatorname{cotg} \alpha \\ x = h \cdot \operatorname{cotg} \beta \end{cases} \rightarrow d = h \cdot (\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta)$$

De donde:

$$h = \frac{d}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta}$$

4.8.4. Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible

Supongamos ahora que se quiere calcular la distancia desde un punto A de una orilla de un río a otro punto C que se encuentra en la otra orilla a la que no se tiene acceso:

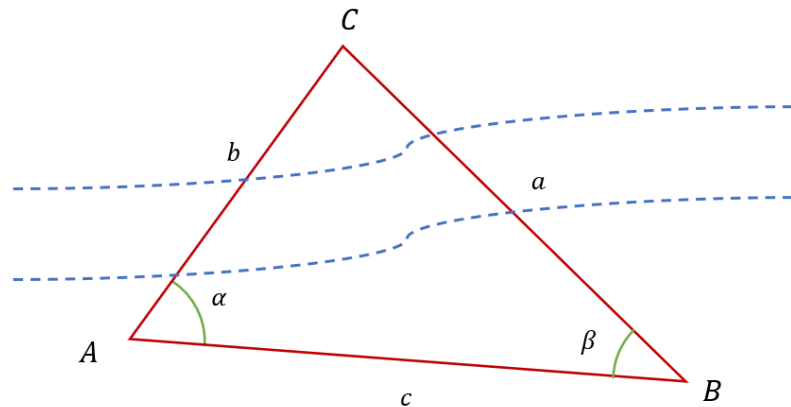


Figura 42. Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible

En el triángulo de la figura se puede medir la distancia entre A y B y los ángulos α y β . Como $C = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, se puede aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \rightarrow b = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} C}$$

Y así ya se conocería la distancia entre A y B .

4.8.5. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Si se quiere hallar la distancia entre dos puntos A y B inaccesibles, se elige arbitrariamente una base $b = CD$, y desde ella se miden los ángulos que forman las visuales, como se indica en la figura siguiente:

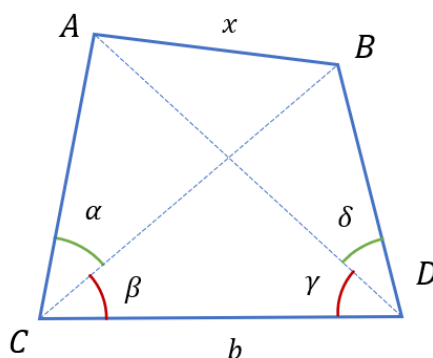


Figura 43. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Para resolverlo, se estudian dos triángulos por separado. Por una parte, el ACD en el que se puede calcular AC , y por otra, el BCD , con el que se puede calcular CB , y ABC , con el que, partiendo de los datos anteriores, se puede calcular AB , que es la distancia buscada. En el triángulo ACD , como $A = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} A} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \gamma} \rightarrow AC = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} A} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta + \gamma)}$$

En el triángulo BCD , como $B = 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta)$, se tiene:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{CB}{\operatorname{sen} (\gamma + \delta)} \rightarrow CB = \frac{b \cdot \operatorname{sen} (\gamma + \delta)}{\operatorname{sen} B} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} (\gamma + \delta)}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma + \delta)}$$

Y ahora en el triángulo ABC , con los valores calculados, se tiene:

$$x = \sqrt{AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos \alpha}$$

5. Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza

En este apartado se van a analizar algunas investigaciones que abordan aspectos relacionados con el aprendizaje de contenidos relacionados con trigonometría por parte de los estudiantes, así como dificultades y posibles fenómenos didácticos que se puedan dar en la enseñanza de esta materia.

Se dividirá en dos partes claramente diferenciadas:

- a) Una primera parte donde se analizan tres estudios que ponen de manifiesto las dificultades que pueden presentar los alumnos al ser preguntados por conceptos trigonométricos. Se analiza también que las distintas concepciones o enfoques (geométrico o analítico) con los que pueden entenderse los conceptos de trigonometría puede ser la raíz de las dificultades que presenta el alumnado.
- b) Una segunda parte donde se citan varias investigaciones que demuestran que el uso de herramientas TIC (como GeoGebra) pueden ser de gran ayuda a la hora de comprender el significado del concepto de razón trigonométrica, y también puede ayudar a los estudiantes a adquirir estos conocimientos por ellos mismos, a través de la experimentación y la investigación haciendo uso del software.

Las conclusiones que se van a extraer a raíz del análisis de estos trabajos serán tenidas en cuenta en el diseño de la unidad didáctica del presente TFM.

5.1. Distintas concepciones y dificultades en el aprendizaje de las razones trigonométricas

La trigonometría es una parte de las matemáticas escolares difícil de entender por los estudiantes (Martín et al., 2014). Brown (2005) señala varios factores involucrados: su complejidad, la conexión con numerosos tipos de fenómenos, sus interconexiones con otras disciplinas, las diversas vías de expresar, entender y representar sus nociones básicas, los modos de aproximación a la misma, y también nociones como la circunferencia goniométrica, los triángulos rectángulos o las funciones trigonométricas. Por ejemplo, al cambiar del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo al plano cartesiano, se cambia de una definición geométrica a una definición analítica; de analizar los valores de los lados del triángulo rectángulo a analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia; de un concepto de ángulo como región comprendida entre dos lados del triángulo a un concepto de ángulo como giro o rotación; de valores de ángulos agudos o rectos ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) a ángulos positivos y negativos, al menos en el intervalo $-360^\circ < \alpha < 360^\circ$. Al estudiarlas en el

plano cartesiano, las razones trigonométricas no son solamente una relación o cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo, sino distancias dirigidas en el plano cartesiano o coordenadas del punto de intersección entre el lado terminal del ángulo y la circunferencia goniométrica. Estos distintos enfoques pueden ser causa de concepciones erróneas por parte de los estudiantes en la trigonometría. La desconexión existente entre estas formas contribuye también a la complejidad que pueda presentar el aprendizaje de la trigonometría.

Otra de las problemáticas de la enseñanza de la trigonometría es el abuso de las fórmulas (Fiallo, 2010). Este problema es producto de una enseñanza de la trigonometría caracterizada por un enfoque a veces puramente algebraico consistente en la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a los estudiantes a comprender los conceptos y propiedades, a conectar unos y otras, ni a establecer relaciones entre las diferentes representaciones. Estas dificultades podrían verse superadas si en el aprendizaje de la trigonometría se concediera más espacio a un enfoque más práctico y menos teórico.

Martín et al. (2014) ya concluyeron en su trabajo que los alumnos de un mismo grupo y centro docente podían percibir de múltiples maneras los conceptos de seno y coseno de un ángulo dado. Varios estudiantes hacían referencia al seno o coseno de un ángulo como una razón, cociente o división. Algunos aludían directamente al valor del ángulo por el que eran preguntados. Y otros hacían referencia a los lados de un triángulo rectángulo. Cabe destacar que muy pocos mostraron la conexión de la trigonometría con el mundo real a través de alguna aplicación de la misma. El número de alumnos que expresaron la idea de que la razón trigonométrica es una técnica con utilidad práctica fue mínimo.

2. Explica verbalmente qué entiendes por $\cos(45^\circ)$ radio de

Coseno de 45° es la proyección sobre el eje horizontal del un ángulo de $(\text{o}) 45^\circ$ en una circunferencia de radio 1. Si el radio fuera distinto de 1, habría que dividir dicha proyección entre el radio, o lo que es lo mismo el cateto contiguo entre la hipotenusa, ya que forma un triángulo rectángulo.

El seno de 45° es la división entre el cateto opuesto entre la hipotenusa, en un triángulo rectángulo.

Es la razón trigonométrica que resulta en un triángulo rectángulo resulta de dividir el cateto contiguo entre la hipotenusa.

Que cuando nos enfrentamos a un triángulo, el seno de 45° es el lado opuesto al $\sin(45^\circ)$ dividido entre la hipotenusa.

El $\sin(45^\circ)$ es la ~~razón~~ proporción que hay entre el cateto opuesto al ángulo de 45° y la hipotenusa, ~~es~~ un triángulo rectángulo

Figura 44. Producciones de los alumnos asociadas al tema "Razón" (Martín et al., 2014)

En una circunferencia de radio 1, el $\sin 45^\circ$ será $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En un triángulo rectángulo, el coseno de 45° es un número que sale como resultado de dividir la hipotenusa del cateto del triángulo por el cateto contiguo al ángulo. Ese número siempre es el mismo, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y es solo en el caso de 45° el coseno coincide con el seno, ya que los dos catetos son iguales.

Figura 45. Producciones de los alumnos asociadas al tema "Valor" (Martín et al., 2014)

Es la altura del triángulo rectángulo que se forma en la circunferencia geométrica con el ángulo 45° o 135° .

El $\sin 45^\circ$ es el lado opuesto que forma un ángulo de 45° .

El $\cos 45^\circ$ ~~es~~ situándonos en un triángulo de 45° este ángulo se encuentra en el vértice inferior izquierdo ~~sería la~~ el coseno sería la ~~línea~~ línea que está situada en la parte inferior del ángulo o también llamada base.

Figura 46. Producciones de los alumnos asociadas al tema "Lados de un triángulo" (Martín et al., 2014)

También, el trabajo de Fernández et al. (2016) pone de manifiesto las diversas concepciones que tienen los alumnos de lo que representa una razón trigonométrica. Tras pedir en un cuestionario a los estudiantes que representaran gráficamente el seno y el coseno de un ángulo cualquiera α , los autores de dicho trabajo se encontraron con multitud de respuestas distintas que podían agruparse en tres grandes categorías:

- Representación de una razón trigonométrica a partir del ángulo interior de un triángulo:

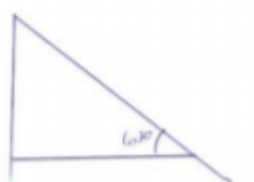


Figura 47. Producción de un alumno que expresa gráficamente una razón trigonométrica a partir del ángulo interior de un triángulo (Fernández et al., 2016)

- Representación de razones trigonométricas como longitudes:

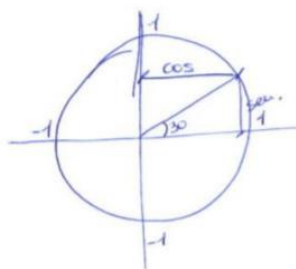


Figura 48. Producción de un alumno que expresa gráficamente seno y coseno como longitudes en una circunferencia goniométrica (Fernández et al., 2016)

- Representación de razones trigonométricas como razones o cocientes:

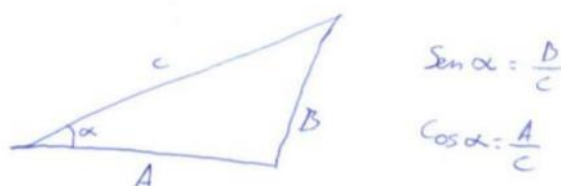


Figura 49. Producción de un alumno que expresa gráficamente seno y coseno como cocientes de dos lados de un triángulo rectángulo (Fernández et al., 2016)

Este trabajo vuelve a poner en evidencia la diversidad de respuestas que proporcionan los estudiantes cuando son preguntados por el concepto de razón trigonométrica.

5.2. Herramientas TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de trigonometría

Se hace de nuevo referencia a Fiallo (2010) que diseñó una unidad didáctica como parte de su investigación en la que pretendía que los estudiantes aprendieran conceptos relacionados con trigonometría a través de Sistemas de Geometría Dinámica (SGD, como GeoGebra). De esta manera, los alumnos podían explorar y comprender los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas para cualquier ángulo entre 0° y 360° . Los alumnos, sin demasiada intervención del profesor, son los que descubren dichos conceptos y propiedades. Esto les motiva a querer saber por qué son verdaderos y la herramienta TIC les proporciona los elementos necesarios para que encuentren dichas respuestas. La combinación de aprendizaje constructivo y herramienta TIC fue de gran ayuda para el aprendizaje de conceptos y la mejora de las habilidades de demostración.

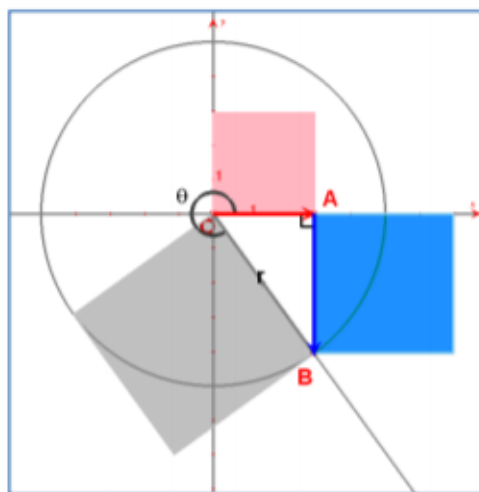


Figura 50. Demostración de la identidad fundamental de la trigonometría con SGD (Fiallo, 2010)

De esta manera, Fiallo demostró que los SGD en efecto proporcionan herramientas a los estudiantes para construir y experimentar con objetos y relaciones geométricas. Sobre la base de su experimentación, los estudiantes hacen conjeturas que se pueden probar con las herramientas disponibles. Herramientas TIC como GeoGebra favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre hacer con el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos. El uso de SGD conduce a analizar de manera diferente los procesos involucrados en una actividad de demostrar, pues proporciona a los estudiantes posibilidades de acceso a justificaciones teóricas a través de la mediación semiótica organizada por el profesor alrededor de dichas herramientas.

Al igual que el trabajo de Fiallo (2010), existen multitud de investigaciones (Feria, 2018; Jiménez y Jiménez, 2017; Díaz, 2014) que demuestran que el uso de herramientas TIC

como GeoGebra facilitan a los estudiantes la adquisición de conceptos de trigonometría y una correcta relación entre los mismos.

5.3. Conclusiones

Así pues, en base al análisis de los trabajos de Martín et al. (2014), Fernández et al. (2016) y Fiallo (2010), se han obtenido las siguientes conclusiones, interesantes para el diseño de la unidad didáctica de este trabajo:

- Por una parte, la diversidad de significados y concepciones que los alumnos entienden por razón trigonométrica de un ángulo. Plantear desde un primer momento las definiciones geométrica y analítica de razón trigonométrica, y hacer ver a los alumnos que en realidad son equivalentes podría quizá ayudarlos a no tener confusiones al respecto.
- Por otra, la escasa conexión que los estudiantes muestran de la trigonometría con el mundo real, haciendo ver que es posible que en la enseñanza de la trigonometría no se haga el énfasis necesario en mostrar las múltiples aplicaciones que esta rama de las matemáticas tiene en distintos campos.
- Y por último, las evidencias obtenidas en múltiples trabajos de investigación que avalan el uso de software de geometría dinámica como GeoGebra a la hora de favorecer la comprensión de la trigonometría y ayudar a mejorar el proceso de aprendizaje de esta rama que tantas dificultades puede llegar a presentar para los alumnos.

6. Proyección didáctica: Elaboración de una Unidad Didáctica

Tras el análisis del currículo escolar y los libros de texto, que han supuesto una primera aproximación a los conocimientos científicos “a enseñar” en el aula, y el análisis de ciertas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, se desarrolla ahora en este epígrafe la proyección didáctica del tema. Este conjunto de transformaciones del conocimiento científico (conocimiento desarrollado en el epígrafe “Fundamentación epistemológica”) en conocimiento de enseñanza es lo que se conoce como proceso de transposición didáctica, concepto que aparece por primera vez en la obra de Yves Chevallard (1991) “La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado”. Las fases que constituyen este proceso de transposición didáctica son las siguientes:

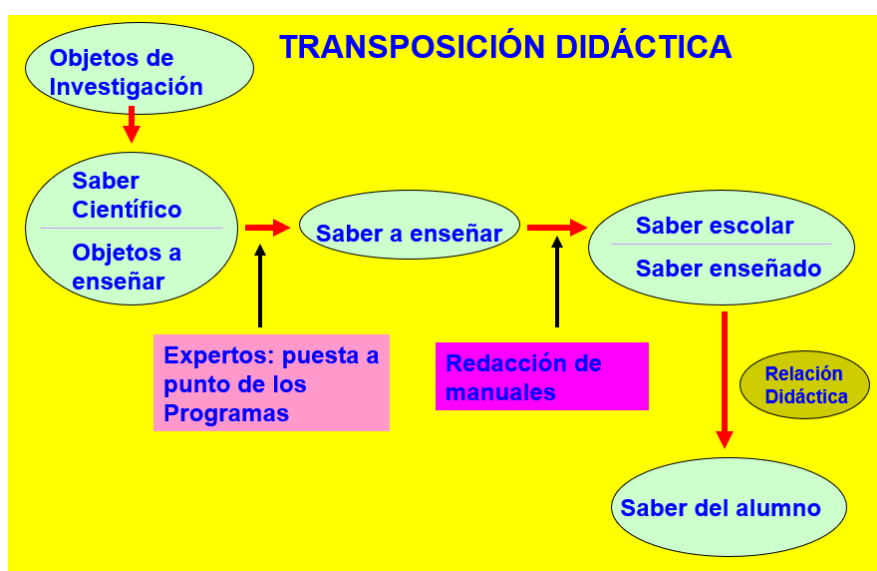


Figura 51. Fases de la transposición didáctica (García)

El desarrollo de esta unidad didáctica pretende, por lo tanto, plasmar ese conjunto de transformaciones que debe sufrir el saber sabio matemático con tal de que pueda ser enseñado y fácilmente comprendido por los estudiantes.

6.1. Título

El título de la unidad didáctica que se va a desarrollar es “Trigonometría” y forma parte de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO.

6.2. Justificación

En el centro de las matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria se encuentra una importante rama de estas, la trigonometría. Maor (1998) indica que han sido tres los principales cambios que se han producido a lo largo de la historia de la trigonometría: la tabla de cuerdas de Ptolomeo, la cual transforma la trigonometría en una ciencia práctica; el teorema de Moivre y la fórmula de Euler, que combina la trigonometría con el álgebra y el análisis; y los teoremas de Fourier, que indicaban que cualquier función arbitraria de una variable real $y = f(x)$ puede ser representada por una serie trigonométrica.

El estudio de esta rama de las matemáticas es muy importante debido a sus aplicaciones, que van desde la ingeniería, la navegación y las ciencias, en general, hasta artes como la música y la arquitectura (Oteyza et al., 2008).

Por ello, debido a su importancia histórica y a sus aplicaciones, la trigonometría ha permanecido en el currículo de matemáticas para la enseñanza secundaria desde hace más de 50 años (Martín et al., 2014). Así, la Mathematics Association of England (1950) ya afirmaba que la trigonometría proveía a los estudiantes con el conocimiento necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes y les suministraba una coherente visión de las matemáticas, necesaria para la resolución de multitud de problemas relacionados con las áreas científica y técnica.

En nuestro país, el Real Decreto 1105/2014 establece en el currículo de 4º de la ESO de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” los siguientes contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables correspondientes a la rama matemática de la trigonometría:

Tabla 7

Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del RD 1105/2014 relacionados con trigonometría

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.

La materia de Matemáticas contribuye especialmente al desarrollo de la competencia matemática (CMCT), reconocida y considerada clave por la Unión Europea, así como a la formación intelectual del alumnado, lo que le permitirá desenvolverse mejor tanto en el ámbito personal como social. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta del máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias además de la matemática, entre otras, la comunicación lingüística (CCL), al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y emprendimiento (SIEP), al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; la competencia digital (CD), al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; o la competencia social y cívica (CSC), al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones.

6.3. Contextualización del centro y del aula

Esta unidad didáctica sería impartida en el centro IES San Felipe Neri de Martos, Jaén.

El IES San Felipe Neri está situado en la zona sur de Martos, en la provincia de Jaén. Martos es un pueblo que vive principalmente de la agricultura olivarera, aunque también cuenta con un polígono industrial en el que existe mucha actividad. Apenas hay familias numerosas, siendo lo más frecuente las de cuatro miembros. En los últimos años, la zona de influencia del centro ha ido experimentando un importante crecimiento demográfico, urbanístico e industrial. Junto a la zona urbanística, se encuentra el mencionado polígono donde están enclavadas diferentes industrias, siendo la de “Valeo Iluminación” la más importante en capacidad de oferta de empleo y la que ha generado un importante tejido industrial (IES San Felipe Neri).

El IES San Felipe Neri es un centro que ha sufrido una importante reconversión, desde su creación como Centro de Formación Profesional en 1958, hasta la configuración actual de enseñanzas, que incluye: 4 líneas de ESO (que pueden oscilar entre 3 y 5 dependiendo de la promoción del alumnado), Bachillerato (Ciencias y Tecnología, Ciencias Sociales y Humanidades), 1 unidad de educación especial específica, 1 ciclo de formación profesional básica, varios ciclos formativos de grado medio, y 1 de grado superior. La evolución del centro a lo largo de su historia se ha ido basando en los cambios de las enseñanzas que ha ofertado.

En líneas generales, el centro cuenta con una gran diversidad de alumnos y de expectativas de las familias, por lo que el modelo organizativo tiene como fin dar respuesta a la atención a la diversidad que necesita el alumnado. El factor económico y cultural del contexto familiar del alumnado incide de forma manifiesta en aspectos sociales, pero también en los educativos. La situación social económica y cultural de las familias y la composición social del centro al que asiste el alumnado tienen una clara incidencia sobre los logros escolares, que a veces puede incluso ser más importante que la atribuida al currículo escolar. El principio de equidad en la educación pretende precisamente compensar el déficit motivado por las circunstancias sociales y familiares.

En el curso 2017/18, la Agencia Andaluza de Evaluación Educativa procedió a realizar el cálculo del Índice Socioeconómico y Cultural (ISC) de cada uno de los centros educativos andaluces, a partir de variables como: nivel formativo y ocupacional de los padres y madres, el número de personas que conviven en el hogar, el número de libros, número de dispositivos de información digital y otras variables de carácter económico y cultural. Cada alumno y alumna tiene asignado un ISC. El ISC de un centro es la media de los ISC de su alumnado. Los ISC de los centros están comprendidos entre -2.3 y 1.4 Se distribuyen en 10 tramos, de manera que un mayor índice de ISC supone pertenecer a un tramo superior. Si se analizan los datos recogidos de la encuesta aplicada al alumnado

de 1º de la ESO del centro durante el curso 2017/18, el ISC correspondiente al centro es de -0,12 y se encuentra en el tramo 6.

Los alumnos de este grupo de 4º de la ESO se encuentran ubicados durante todo el curso académico en la misma aula para evitar desplazamientos continuos por las instalaciones del centro debido a la situación extraordinaria provocada por la pandemia desde mediados de marzo del año 2020. El grupo tiene 24 estudiantes y el aula goza de una pizarra blanca, una pizarra digital, un equipo informático y un proyector. Además, en el centro hay varias salas informáticas. Todo esto se ha tenido en cuenta a la hora de planificar y elaborar las actividades y elegir las metodologías que se desarrollarán en la unidad didáctica.

6.4. Objetivos

En este apartado, se van a enunciar los objetivos que pretenden alcanzarse mediante la impartición de la unidad didáctica. Se hablarán de objetivos en tres niveles distintos:

- Objetivos generales de etapa
- Objetivos del área de matemáticas
- Objetivos de la unidad didáctica

Tanto los objetivos generales de etapa como los del área de matemáticas pueden encontrarse en el Anexo I del presente trabajo. Los objetivos específicos a desarrollar que se persiguen con el diseño de esta unidad didáctica se exponen a continuación.

6.4.1. Objetivos de la unidad didáctica

- 1) Conocer el origen de la trigonometría y el porqué de su estudio
- 2) Conocer las diferentes unidades de medidas de ángulos y la relación entre ellas
- 3) Conocer los conceptos y las relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas presentes en situaciones de la vida real
- 4) Aprender las relaciones trigonométricas fundamentales
- 5) Resolver distintos tipos de triángulos usando las razones trigonométricas y sus relaciones y también saber resolver otras figuras planas mediante descomposición en triángulos rectángulos y otros polígonos más simples.
- 6) Saber calcular, identificar y relacionar razones trigonométricas de ángulos que se encuentren en cualquiera de los cuatro cuadrantes
- 7) Utilizar adecuadamente la calculadora y otras herramientas informáticas (GeoGebra) para efectuar cálculos trigonométricos
- 8) Identificar situaciones reales en las que puedan ser útiles los conocimientos de trigonometría adquiridos

6.5. Competencias clave

En el epígrafe “fundamentación curricular” ya se dedicó un apartado a las competencias clave según las orientaciones de la Unión Europea.

En el artículo 2.1 del Real Decreto 1105/2014, de 24 de diciembre aparecen las competencias o capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

Además de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, los estudiantes, a través del trabajo que desempeñarán en la unidad didáctica, fortalecerán también las siguientes capacidades:

- Competencia en comunicación lingüística: Ésta será necesaria para expresar ideas y formulaciones sobre un problema con un lenguaje matemático apropiado, y también para establecer saber establecer diálogo y debates en las actividades de tipo colaborativo.
- Competencia digital: Además de fomentar las capacidades del alumno con la calculadora y con GeoGebra, también se desarrollará la capacidad de búsqueda efectiva en la web a través de la realización de un webquest sobre aplicaciones de la trigonometría.
- Competencia aprender a aprender: Se hace patente en cada ejercicio, problema y actividad que el estudiante realiza. Los alumnos descubren por sí solos a través de su propio trabajo cómo la trigonometría tiene múltiples aplicaciones y cómo les ofrece herramientas útiles para desarrollar otros conocimientos matemáticos.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: Los estudiantes aumentarán esta competencia a través del planteamiento de problemas en los que es posible que deban plantear varias estrategias erróneas hasta alcanzar la correcta.
- Competencias sociales y cívicas: Esta competencia es trabajada en mayor grado en el trabajo colaborativo. Los estudiantes aprenden a formar parte de un equipo más amplio, escuchando y valorando las aportaciones de los compañeros, haciendo críticas siempre constructivas, y también aceptando críticas con el fin de mejorar y alcanzar el objetivo que todos persiguen como grupo.

6.6. Contenidos

Los contenidos que se van a trabajar en la unidad didáctica, que se muestran a continuación, pertenecen a los bloques 1 y 3 de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas”:

Tabla 8

Contenidos de la materia pertenecientes al bloque 1 que desarrolla la Unidad Didáctica

CONTENIDOS
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado
1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones usadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos
1.6. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico
1.7. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas y la realización de cálculos de tipo numérico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas

Tabla 9

Contenidos de la materia pertenecientes al bloque 3 que desarrolla la Unidad Didáctica

CONTENIDOS
Bloque 3. Geometría
3.1. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes
3.2. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos
3.3. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
3.6. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas

6.7. Metodologías

La Orden de 14 de julio de 2016 de la Comunidad Autónoma de Andalucía establece una serie de estrategias metodológicas a seguir para cada materia. Así pues, para la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” se proponen para cada bloque metodologías enriquecedoras para el alumno, como, por ejemplo:

- Comprensión de los conceptos a través de una perspectiva histórica para poder contextualizarlos y hacerlos menos abstractos.
- Uso de recursos TIC y de software de geometría dinámica como GeoGebra para una mejor comprensión del contenido
- Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) o Aprendizaje Basado en Investigación (ABI), ideales para la adquisición y el desarrollo de múltiples competencias clave.

Todas estas metodologías innovadoras, además de la metodología transmisiva, que resulta imprescindible durante la primera mitad de la unidad para poder transmitir conceptos, serán usadas durante el desarrollo de la unidad didáctica diseñada en este trabajo.

6.8. Actividades y recursos

6.8.1. Actividades

En el transcurso de la unidad didáctica, se plantean actividades de distinta naturaleza para los estudiantes. Los ejercicios, problemas y diversas actividades están cuidadosamente elegidas de menor a mayor grado de dificultad para que sean de máximo provecho para los alumnos y no un obstáculo. Así pues, la realización y correcta comprensión de todas las actividades permitirá que los alumnos comprendan todos los contenidos y desarrollen todas las competencias exigidas.

Las actividades a trabajar en la unidad son las siguientes:

- Ficha de preguntas tras proyección de un vídeo relacionado con aplicaciones de la trigonometría. En la primera sesión, se proyectará este vídeo para despertar el interés del alumnado por la utilidad y las aplicaciones de la unidad didáctica. Se les entregará una ficha con algunas preguntas relacionadas con el material audiovisual.
- Ejercicios y problemas relacionados con el contenido. Tras la exposición por parte del docente de uno o varios conceptos nuevos, se trabajarán ejercicios y problemas relacionados con los mismos con el fin de fortalecer ese nuevo conocimiento. Aunque se propondrán ejercicios y problemas para trabajar en casa, se intentará en la medida de lo posible que casi todo este trabajo autónomo del alumno se lleve a cabo en el aula.
- Actividad fuera del aula. Con ayuda de lo aprendido en clase sobre trigonometría, los alumnos pondrán en práctica sus conocimientos y descubrirán cómo se puede medir la altura de un edificio de manera muy sencilla haciendo tan solo algunas mediciones. Esta actividad fomentará el trabajo colaborativo y ayudará a valorar los conocimientos matemáticos como recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana.
- Webquest sobre aplicaciones de la trigonometría. Ésta es una estrategia didáctica en la que los alumnos construyen su propio conocimiento a través de la búsqueda de información en Internet. La multitud de recursos que existen en la web incita a los alumnos a investigar, potenciar el pensamiento crítico, la

creatividad y la toma de decisiones, desarrollando así diferentes capacidades y competencias.

En la propia página web creada especialmente para este trabajo (el enlace a la web se puede encontrar en el desarrollo de la sesión 8 del apartado “Temporalización”) se detalla el proceso a seguir, las tareas a realizar, los recursos web que pueden ser de ayuda y la evaluación de la actividad, así como las conclusiones. Con la realización de este webquest, se persiguen múltiples objetivos:

- 1) Buscar, analizar y filtrar la cantidad ingente de información que se puede encontrar en Internet y saber elegir solamente aquella que es útil.
- 2) Aprender la evolución histórica que ha sufrido la trigonometría a través de célebres matemáticos que hicieron su aportación a esta rama tan importante de las matemáticas.
- 3) Descubrir cómo con cálculos trigonométricos realmente sencillos se pueden resolver problemas que a priori pueden parecer muy complejos, como calcular la longitud de la circunferencia de la Tierra, calcular la distancia entre la Tierra y una estrella de otro sistema solar o calcular la altura de una pirámide.
- 4) Aprender a saber expresarse adecuadamente en un correcto lenguaje matemático, concretamente en lenguaje trigonométrico.
- 5) Fomentar el trabajo colaborativo

6.8.2. Recursos

Los recursos materiales necesarios para el desarrollo de la unidad en el aula del grupo y en el aula de informática son los siguientes:

- Proyector/pizarra digital y equipo informático
- Pizarra blanca
- Libro de texto “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4 ESO de la editorial Anaya”
- Apuntes elaborados por el propio docente para complementar al libro de texto
- Fichas de problemas y actividades elaboradas por el docente
- Calculadora e instrumentos de medición: regla, escuadra, cartabón
- Cinta métrica y “clinómetro” casero para la actividad fuera del aula
- Ordenadores en el aula de informática con acceso a Internet

En cuanto a recursos web, se harán uso de los siguientes:

- Plataforma Google Classroom para la entrega del cuaderno de clase y otras actividades evaluables

- Videollamada a través de Google Meet para que los estudiantes que se encuentren confinados en casa puedan seguir la clase con normalidad
- Software GeoGebra para acompañar las explicaciones en la pizarra: <https://www.geogebra.org/classic?lang=en>
- Página web dedicada al webquest: <https://mjpg0024.wixsite.com/website>

6.9. Atención a la diversidad

En el aula, los estudiantes tienen motivaciones e intereses distintos; poseen un estilo de aprendizaje distinto y también conciben más o menos fácilmente los contenidos dependiendo de si tienen un significado lógico para ellos o no. Además, cada alumno presenta capacidades diferentes ante el proceso de aprendizaje, y el deber de los docentes es el de atender esta diversidad, con tal de que este proceso sea fructífero para todos los estudiantes.

Desde la primera sesión de la unidad, el docente estará atento al comportamiento de cada alumno frente a los contenidos que se presentan. En este caso, los estudiantes nunca han visto conceptos relacionados con trigonometría y a priori parecería que realizar una evaluación inicial no tiene sentido. Pero el docente puede igualmente comprobar a través de la interacción con los alumnos durante las sesiones si éstos poseen una base sólida de conocimientos geométricos (sobre ángulos y triángulos principalmente) previos necesarios para afrontar la nueva unidad con éxito.

Tras sondear qué estudiantes presentan más dificultades y quiénes menos, y cómo estos progresan en mayor o menor medida a lo largo del transcurso de la unidad, el docente tendrá preparada una relación de ejercicios y problemas ordenados de menor a mayor dificultad. Esta relación de problemas no solamente servirá como actividad de refuerzo para los alumnos que presenten más dificultades en el aprendizaje; también ofrecerá actividades de ampliación y permitirá a los alumnos que avanzan más rápidamente proseguir y asentar y reforzar tantos conocimientos como les sea posible. De esta manera, con esta hoja de ejercicios y problemas cada alumno puede seguir su propio ritmo de aprendizaje.

Además, en todas las actividades en las que sea necesario el trabajo colaborativo, los grupos serán formados por el docente de forma heterogénea. De esta manera, los alumnos colaborarán entre sí, y los que más dificultades presentan podrán beneficiarse de los compañeros que más han avanzado.

6.10. Temporalización

La secuenciación de los contenidos de “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado a la materia es de cuatro sesiones semanales, se podría distribuir en las siguientes unidades didácticas a lo largo del curso escolar:

Tabla 10

Temporalización de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de la ESO

TRIMESTRE	BLOQUES	UNIDAD DIDÁCTICA	SESIONES
1º	Números y álgebra	01. Números reales	9
		02. Polinomios y fracciones algebraicas	9
		03. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	12
	Funciones	04. Funciones. Características	8
		05. Funciones elementales	10
2º	Geometría	06. Semejanza. Aplicaciones	10
		07. Trigonometría	12
		08. Geometría analítica	10
3º	Estadística y probabilidad	09. Estadística	10
		10. Distribuciones bidimensionales	8
		11. Combinatoria	11
		12. Cálculo de probabilidades	10

De esta manera, se planifican 12 sesiones de la materia para el desarrollo de la unidad didáctica de trigonometría. Cabe destacar que en todas las sesiones en las que se expliquen y desarrollen contenidos el docente hará uso de manera transversal del software GeoGebra para acompañar sus explicaciones. El uso de GeoGebra, tal y como se vio en el apartado “fundamentación didáctica”, ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender mucho mejor los conceptos de trigonometría a enseñar.

A continuación, se muestra el desarrollo de cada una de las 12 sesiones, incluyendo contenidos, criterios de evaluación, objetivos de la unidad y competencias clave trabajadas.

Tabla 11

Sesión 1 de la unidad didáctica

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA	
Desarrollo:	
En esta primera sesión, se introduce una rama de las matemáticas que los estudiantes nunca han visto: la trigonometría. Para despertar su interés por la unidad didáctica en la que van a trabajar, se proyecta el siguiente vídeo en el que se explica cómo se puede calcular distancia de la Tierra a una estrella de la galaxia más cercana a nuestro Sistema Solar gracias a la trigonometría: https://www.youtube.com/watch?v=-CEfHngoxYg Este vídeo despertará el interés del alumnado por la utilidad y las aplicaciones de la unidad didáctica que están a punto de empezar a descubrir. Antes de la proyección del vídeo, se les entrega a los alumnos una ficha con varias preguntas cortas (ver preguntas de la actividad en Anexo II) con un doble propósito: primero, que presten atención al vídeo con tal de encontrar las respuestas, y segundo, que las respuestas que ellos mismos obtienen sean la base para introducir los primeros conceptos básicos de trigonometría: ángulo, triángulo rectángulo, razón trigonométrica. También servirá para hacer una especie de evaluación inicial de los conceptos previos de geometría y triángulos que poseen los alumnos. Tras visualizar el vídeo y dar respuesta a las preguntas, se comienza con el primer concepto de la unidad: definición de ángulo central, medida de ángulos en grados sexagesimales y en radianes, y equivalencia entre ambos. Todas las explicaciones son acompañadas con representaciones gráficas con el software GeoGebra. En este caso, se muestra lo siguiente: https://www.geogebra.org/m/dr4GmQMz Para finalizar, se realizan los ejercicios 1.1, 1.2 y 1.3 (ver Anexo II) para practicar la conversión de ángulos entre grados sexagesimales y radianes.	
Contenidos:	1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 3.1, 3.6
Criterios de evaluación:	CE.1.2, CE.1.7, CE.3.1,
Objetivos de la UD:	1, 2
Competencias clave:	CMCT, CAA

Tabla 12

Sesión 2 de la unidad didáctica

SESIÓN 2: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA
Desarrollo: En esta segunda sesión, se repasa rápidamente lo visto en las preguntas al vídeo de la primera (triángulos rectángulos, razón entre dos lados, ángulo central) y se comienza dando la definición geométrica de razón trigonométrica. Se establecen las definiciones de seno, coseno y tangente con ayuda del siguiente recurso en GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/yMrbhkWt Para que los estudiantes verifiquen por sí mismos que los valores de las razones trigonométricas dependen del ángulo y no de los lados del triángulo, se realiza el ejercicio 2.1 (ver Anexo II) en el que deben medir seno y coseno de varios triángulos que son semejantes (el concepto de semejanza ya lo conocen porque lo han visto en la unidad anterior). A continuación, se realizan en clase los ejercicios 2.2 y 2.3 (ver Anexo II) para practicar con el cálculo de razones trigonométricas y se propone como tarea para realizar en casa el ejercicio 2.4, que es de dificultad ligeramente mayor.
Contenidos: 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2, 3.6
Criterios de evaluación: CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 3
Competencias clave: CMCT, CAA

Tabla 13

Sesión 3 de la unidad didáctica

SESIÓN 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA. DEFINICIÓN ANALÍTICA
Desarrollo: En esta tercera sesión, se corrige en la pizarra el ejercicio 2.4 propuesto para hacer en casa. A continuación, se ofrece otra definición de razón trigonométrica: la analítica. Se explica el concepto de circunferencia goniométrica. Tras explicar la definición analítica (en el caso del seno de un ángulo central α, por ejemplo, es la coordenada y de un punto $P(x, y)$ que se encuentra en el otro extremo del ángulo central), se hace ver la equivalencia entre las definiciones geométrica y analítica. En realidad, el centro de la circunferencia O, el punto P y el punto donde la vertical que pasa por P corta al eje de abscisas forman un triángulo rectángulo, y las razones seno y coseno equivalen a las coordenadas y e x, respectivamente, porque en realidad el valor de la hipotenusa es igual a la unidad por tratarse de una circunferencia goniométrica. Para visualizar esto, se muestra en GeoGebra lo siguiente: https://www.geogebra.org/m/yapXUAGm Visto el concepto de ángulo central en una circunferencia, ya se pueden representar razones trigonométricas dado un ángulo en cualquiera de los cuatro cuadrantes, así como los signos del seno, coseno y tangente en cada cuadrante. Para practicar, se realizan los ejercicios 3.1 y 3.2 (ver Anexo II).
Contenidos: 1.2, 1.6, 1.7, 3.2, 3.6
Criterios de evaluación: CE.3.1
Objetivos: 3, 6
Competencias clave: CMCT, CAA

Tabla 14

Sesión 4 de la unidad didáctica

SESIÓN 4: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA. RAZONES DE 30°, 45° y 60°. RELACIONES ENTRE RAZONES DE CIERTOS ÁNGULOS.	
Desarrollo:	Se deducen las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60° y se establecen relaciones entre razones de ciertos pares de ángulos particulares (suplementarios, complementarios, opuestos). Se propone como tarea realizar los ejercicios 4.1 y 4.2. Este último ejercicio tiene mayor dificultad, pero se presenta al alumnado como reto para que razonen y apliquen lo aprendido durante esta sesión.
Contenidos:	1.2, 1.6, 1.7, 3.2, 3.6
Criterios de evaluación:	CE.1.2, CE.3.1
Objetivos:	3, 6
Competencias clave:	CMCT, CAA

Tabla 15

Sesión 5 de la unidad didáctica

SESIÓN 5: RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES	
Desarrollo: Se pide algún voluntario para salir a la pizarra a corregir el ejercicio 3.3 propuesto para casa del día anterior. Tras esto, se presentan y demuestran las siguientes relaciones trigonométricas fundamentales: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$ Se usa el siguiente recurso de GeoGebra para la identidad trigonométrica fundamental: https://www.geogebra.org/m/meadu4hg Y también, se explica cómo usar la calculadora para obtener valores de distintas razones trigonométricas, así como el modo que debe usarse dependiendo de si se trabajan con ángulos en grados sexagesimales o en radianes. Para practicar lo aprendido, se realizan los ejercicios 5.1, 5.2 y 5.3.	
Contenidos: 1.2, 1.6, 1.7, 3.2, 3.6	
Criterios de evaluación: CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.1	
Objetivos: 4, 7	
Competencias clave: CMCT, CAA, CD	

Tabla 16

Sesión 6 de la unidad didáctica

SESIÓN 6: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
Desarrollo: Esta sesión y las cuatro siguientes se van a centrar en descubrir las aplicaciones de la trigonometría a través de la realización de problemas que podrían darse en la vida real. Se comienza con resolución de triángulos rectángulos. Haciendo uso de los conceptos que los estudiantes ya conocen, se propone como tarea a realizar en clase los problemas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4.
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3
Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 3, 5, 7
Competencias clave: CMCT, CAA

Tabla 17

Sesión 7 de la unidad didáctica

SESIÓN 7: APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA
Desarrollo: Ahora, se presentan problemas en los que los triángulos a resolver no son rectángulos. Se explica que cualquier triángulo no rectángulo puede descomponerse a través de su altura en dos triángulos rectángulos donde sí se pueden aplicar razones trigonométricas. Se presentan estrategias de resolución para dos casos de triángulos oblicuángulos: i) Conocidos dos lados y un ángulo ii) Conocidos un lado y dos ángulos Tras esto, se proponen para hacer en clase los problemas 7.1 y 7.2, y para realizar en casa, los problemas 7.3 y 7.4.
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3
Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 3, 5, 7
Competencias clave: CMCT, CAA

Tabla 18

Sesión 8 de la unidad didáctica

SESIÓN 8: WEBQUEST SOBRE APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA (I)
Desarrollo: Esta sesión y la siguiente se dedican a trabajar en un webquest diseñado por el docente para que los alumnos descubran aplicaciones de la trigonometría a través a tres matemáticos que influyeron enormemente en lo que hoy conocemos como trigonometría y en la geometría en general: Tales de Mileto, Eratóstenes de Cirene y Aristarco de Samos. El enlace al webquest es el siguiente: https://mjmg0024.wixsite.com/website Esta primera sesión tiene lugar en el aula de informática. Todos los alumnos de la clase son divididos en tres grupos, y a cada grupo se le asigna un problema del webquest a resolver. Como ayuda, se propone como recurso varios sitios web donde pueden encontrar información muy útil para resolver el problema planteado. Así pues, cada uno de los personajes citados anteriormente y sus aportaciones a la trigonometría pueden ayudar a los alumnos en la resolución del problema.
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3
Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 1, 3, 5, 8
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD

Tabla 19

Sesión 9 de la unidad didáctica

SESIÓN 9: WEBQUEST SOBRE APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA (II)
Desarrollo: En la segunda sesión dedicada al webquest sobre aplicaciones de la trigonometría, cada grupo explica al resto de sus compañeros en una breve exposición qué matemático y contribución ha ayudado a resolver el problema, qué esquema han planteado para representar gráficamente el mismo y el proceso de resolución.
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3
Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 1, 3, 5, 8
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD

Tabla 20

Sesión 10 de la unidad didáctica

SESIÓN 10: APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA. ACTIVIDAD FUERA DEL AULA
Desarrollo: En esta última sesión dedicada a aplicaciones de la trigonometría, se plantea una actividad donde los alumnos deben hallar la altura de un edificio del centro haciendo solamente uso de cinta métrica y un “clinómetro” casero (ver Ejercicios y problemas de la sesión 11 en el Anexo III). El enunciado de la actividad se encuentra en el Anexo II. La clase se divide en 4 grupos de 6 alumnos, y cada grupo debe tomar una serie de medidas para poder acabar calculando la altura de un edificio.
Contenidos:
Criterios de evaluación:
Objetivos:
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP

Tabla 21*Sesión 11 de la unidad didáctica*

SESIÓN 11: REPASO DE LA UNIDAD
Desarrollo: Esta sesión previa a la prueba escrita de la unidad se emplea para que los alumnos planteen dudas y para realizar un repaso final. Se revisarán ejercicios y problemas más dificultosos para los estudiantes, a elección de ellos mismos. Resolución en la pizarra de uno o varios problemas “de examen” si queda tiempo tras resolver las dudas. Se proponen para resolver los problemas 11.1, 11.2 y 11.3.
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6
Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Competencias clave: CCL, CMCT

Tabla 22*Sesión 12 de la unidad didáctica*

SESIÓN 12: PRUEBA ESCRITA
Desarrollo: En esta última sesión de la unidad didáctica, se realiza la prueba escrita, con ejercicios y problemas muy similares a los que se han trabajado en clase. Los ejercicios y problemas de la prueba se pueden consultar también en el Anexo II.
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6
Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP

6.11. Evaluación

6.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

En el RD 1105/2014 se pueden encontrar las definiciones de criterios de evaluación y estándares de aprendizaje:

- Criterios de evaluación: son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.
- Estándares de aprendizaje evaluables: son especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada materia; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.

A continuación, se muestran en la siguiente tabla los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje a tener en cuenta para la correcta evaluación de la Unidad Didáctica diseñada:

Tabla 23

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque 1 para evaluar la UD

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
EA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada	CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema	CCL, CMCT
EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). EA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. EA.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. EA.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.	CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
EA.1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. EA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. EA.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas EA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad EA.1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.	CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (geométricos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad	CMCT, CAA, CSC, SIEP

EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA
EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas	CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	CMCT
EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMTC, CAA, SIEP
EA.1.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.	CE.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
EA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. EA.1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico, situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA

Tabla 24

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque 3 para evaluar la UD

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE
Bloque 3. Geometría		
EA.3.1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.	CE.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT, CAA
EA.3.2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.	CE.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT, CAA

6.11.2. Criterios de calificación

El establecimiento de los criterios de calificación se llevará a cabo ponderando los distintos escenarios en los que el alumnado va a demostrar sus capacidades, conocimientos y habilidades, observables y evaluables a través de diferentes instrumentos de evaluación. La siguiente tabla muestra la ponderación de cada prueba y aspectos evaluables de la unidad:

Tabla 25

Criterios de calificación de la unidad didáctica

Criterio de calificación	Ponderación
Prueba escrita con ejercicios y problemas similares a los que se han trabajado durante el desarrollo de la unidad didáctica. Se dará mayor peso a los procesos frente a los resultados, valorando los razonamientos acertados. Cada ejercicio de la prueba irá acompañado de su puntuación máxima.	60%
Cuaderno de clase, que incluirá las actividades trabajadas en la unidad corregidas por el propio estudiante. También se valorará el orden y la limpieza.	10%
Actitud del alumno: Participación, interés por la materia, esfuerzo general y capacidad de trabajo en equipo	10%
Evaluación del webquest y valoración del trabajo colaborativo	10%
Actividad evaluable fuera del aula	10%

Las rúbricas de evaluación empleadas para otorgar una calificación a cada criterio se pueden encontrar en el Anexo III del presente trabajo.

6.12. Plan de contingencia

En caso de que la situación sanitaria obligara a los centros docentes a reducir o eliminar por completo la presencialidad de los estudiantes en las aulas durante el desarrollo de la unidad, se tendrían en cuenta las dos modalidades de enseñanza siguientes:

- Modalidad de enseñanza híbrida. En este escenario mixto, la mitad del grupo atendería presencialmente a las clases y la otra mitad de manera remota a través de la plataforma Google Meet. Se usaría una cámara para que los estudiantes que están en casa pudieran seguir las explicaciones en pizarra y se compartiría pantalla a través de la videollamada de Google Meet para que siguieran las exposiciones con GeoGebra. En cuanto a las actividades, todas las planteadas podrían realizarse sin obstáculo alguno a excepción de la actividad fuera el aula. En este caso, la mitad del grupo presente en el aula realizaría la actividad en el espacio temporal correspondiente a media sesión, y con la otra mitad se procedería de la misma manera en la semana siguiente.
- Modalidad de enseñanza totalmente virtual. En este escenario, todos los estudiantes se encontrarían en casa siguiendo las clases de manera remota. El docente utilizaría una tableta para impartir los contenidos que haría las veces de pizarra blanca. En cuanto a ejercicios problemas y actividades, podrían llevarse todas a cabo a excepción de la actividad fuera del aula. En este escenario, el docente recopilaría una serie de problemas y ejercicios del libro de texto u otras fuentes, y la sesión sería dedicada a realizar estos ejercicios y problemas con GeoGebra.

7. Conclusiones

Con la realización de este TFM se ha pretendido alcanzar todos los objetivos planteados al principio de este trabajo. Todos los conocimientos adquiridos a lo largo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas han sido plasmados en el presente documento, que ha sido culminado con el diseño de una unidad didáctica de trigonometría de la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de la ESO.

Al comienzo, el análisis de los libros de texto desveló que las unidades de trigonometría, aunque ricas en cantidad y diversidad de ejercicios y problemas, fomentaban más bien una metodología transmisiva, donde los alumnos no tienen espacio en prácticamente ningún momento para construir su propio conocimiento a partir de la experimentación y la investigación, y donde las actividades que requieren trabajo colaborativo por parte de los estudiantes no existen. Por ello, en la unidad didáctica elaborada posteriormente, dos sesiones son íntegramente dedicadas a la investigación sobre aplicaciones de la trigonometría a través de un webquest especialmente diseñado para la unidad, y una sesión es dedicada a una actividad fuera del aula, con el fin de hacer la trigonometría más práctica y menos abstracta. Estas dos actividades también están basadas en el trabajo en grupo, que resulta ser una pieza clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje y que interviene de manera fundamental en el desarrollo de varias competencias clave.

Más tarde, la búsqueda de trabajos de otros autores, que han realizado investigaciones sobre la didáctica de la trigonometría, aportó también información muy importante. Por una parte, las múltiples definiciones que dentro de un mismo grupo de alumnos podían entenderse para el concepto de razón trigonométrica y la confusión que se podía generar como consecuencia de ello. Y por otro, el hecho de que numerosos estudios recalcaran la importancia de usar SGD como GeoGebra a la hora de impartir contenidos relacionados con trigonometría y con cualquier tema perteneciente al bloque de geometría en general. Es por ello que, al comienzo de la unidad didáctica, se hace hincapié en las definiciones geométrica y analítica del concepto de razón trigonométrica, con tal de que el alumnado sepa diferenciar claramente ambas. Y también, de manera transversal a lo largo de toda la unidad, se hace uso de GeoGebra para acompañar las explicaciones y los diferentes ejemplos y ejercicios propuestos en cada sesión.

Finalmente, tras sentar las bases con las fundamentaciones curricular, epistemológica y didáctica, se ha procedido al diseño y desarrollo de la unidad didáctica de trigonometría de 4º de la ESO. Esta unidad ofrece una serie de actividades que han sido

cuidadosamente elegidas para que los estudiantes consigan desarrollar las competencias y capacidades requeridas en esta etapa educativa; combina metodologías tradicionales e innovadoras a fin de que los alumnos muestren interés y motivación y las sesiones no resulten monótonas; persigue un aprendizaje significativo por parte del alumnado, y también atiende a la diversidad en el aula con tal de que todos los estudiantes completen un mínimo de objetivos de la unidad didáctica. El trabajo dedicado al diseño de la unidad se ha dirigido a que los estudiantes en el aula no encuentren las matemáticas monótonas, difíciles y abstractas, sino amenas, de fácil comprensión y con aplicaciones útiles en la vida real, con el fin de que aumente su interés y su motivación por la materia y por las materias de ciencias en general, que, atendiendo a las estadísticas, cada vez se encuentran menos pobladas en niveles educativos superiores.

8. Referencias bibliográficas

- Academia Deimos. (2003). *Temario para oposiciones profesorado secundaria*. Madrid: Editorial Deimos.
- Alcaide Guindo, F., Pérez Álvarez, J., Hernández Gómez, J., Moreno Warleta, M., Serrano Marugán, E., Donaire Moreno, J., . . . Sada, M. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. SM Savia Digital.
- Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. [Tesis de doctorado, Illinois State University]. Worldcat.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Colera Jiménez, Oliveira González, Gaztelu Alberio, & Colera Cañas. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Madrid: Anaya.
- Díaz Fernández, M. (2014). *Enseñanza de trigonometría en 4º de la ESO con Geogebra*. [Trabajo Fin de Máster, Universidad Internacional de La Rioja]. Re-UNIR.
- Feria Torres, E. (2018). Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría mediante el uso de herramientas tecnológicas (Tesis de pregrado). Recuperado de <https://repository.ucc.edu.co/handle/20.500.12494/14027>
- Fernández Plaza, J., Castro Rodríguez, E., Estrella, M., Martín Fernández, E., Rico, L., Ruiz Hidalgo, J. F., & Vilchez Marín, M. (2016). *Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares*. Málaga: SEIEM.
- Fiallo Leal, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*. Valencia.
- García Armenteros, M. (s.f.). *Apuntes de la asignatura "Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas I"*.
- Gómez Gómez, J. (2015). *Temario para cuerpo de profesores de enseñanza secundaria* (Vol. II). Madrid: MAD.
- IES San Felipe Neri. (s.f.). *Proyecto Educativo de Centro*. Obtenido de sanfelipenerimartos.es: https://2350b1fa-a-5005ccbc-sites.googlegroups.com/a/sanfelipenerimartos.es/principal/PROYECTOEDUCATIVONOV19.pdf?attachauth=ANoY7cogiS3ryDuFdxaulMhQne04l9Y_m3QGsnCstGRHbVTmr9g1TCqar3PkEgW084x5WWBBew4wkyl7S1Gloli9WgjUX-O1-ImCkXy180oFmkUSvmJlct_iTJQvll-1

- Jiménez García, J. G., & Jiménez Izquierdo, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica Sobre Tecnología, Educación Y Sociedad*, 4(7). Recuperado a partir de <https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>
- Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Martín Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J., & Rico, L. (2014). *Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato*. Salamanca: SEIEM.
- Mathematics Association of England. (1950). *The teaching of trigonometry in school: A report prepared for the Mathematics Association*. London: G. Bell y Sons, Ltd.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (s.f.). *Competencias clave*. Obtenido de Ministerio de Educación y Formación Profesional: <https://www.educacionyfp.gob.es/educacion/mc/lomce/curriculo/competencias-clave/competencias-clave.html>
- Moreno Montes, M. (2020). *Funciones*. [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Jaén]. TAUJA.
- Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, & Ramírez. (2008). *Geometría Analítica y Trigonometría* (2ª ed.). Prentice Hall.
- Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría* (7ª ed.). Prentice Hall.
- Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (12ª ed.). Cengage Learning.
- Universidad de Jaén. (s.f.). *Guías docentes UJA*. Obtenido de Universidad de Jaén: https://uvirtual.ujaen.es/pub/es/informacionacademica/catalogoguiasdocentes/p/2020-21/205/723B/72326001/es/2020-21-72326001_es.html
- Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. McGraw Hill.

9. Referencias normativas

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre de 2013, para la mejora de calidad educativa.

Boletín Oficial del Estado. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, sec. I, pp. 169-546

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*. Andalucía, 28 de julio de 2016, núm. 144, pp. 108-396

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero de 2015, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986-7003

Anexo I. Objetivos de etapa y del área de matemáticas

Objetivos de etapa

El artículo 23 de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, establece que la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en el alumnado los saberes, las capacidades, los hábitos, las actitudes y los valores que les permitan alcanzar los siguientes objetivos:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo, como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre mujeres y hombres.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar correctamente, de manera oral y escrita, en la lengua castellana, y si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad.
- l) Apremiar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Objetivos del área de matemáticas

La Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, establece que la enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Anexo II. Ejercicios, problemas y actividades de la unidad didáctica

Ejercicios y problemas de la sesión 1

Actividad vídeo “Aplicaciones de la trigonometría”

- ¿A qué se debe el fenómeno del “paralaje”?
- ¿Qué tipo de triángulo se forma entre la Tierra, el Sol y la estrella de Alfa Centauri?
- ¿A través de qué se relaciona la distancia de la Tierra – Sol con el ángulo que se forma?
- ¿A qué distancia se encuentra la estrella de Alfa Centauri de la Tierra?

Ejercicio 1.1. (Colera et al., 2016)

Pasa a radianes los siguientes ángulos:

- a) 25° b) 100° c) 150° d) 250°

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo: $180^\circ = \pi \text{ rad} = 3,14 \text{ rad}$.

Ejercicio 1.2. (Colera et al., 2016)

Pasa a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

- a) $0,5 \text{ rad}$ b) $1,5 \text{ rad}$ c) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
d) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ e) $4,8 \text{ rad}$ f) $3\pi \text{ rad}$

Ejercicio 1.3 (Alcaide et al., 2016)

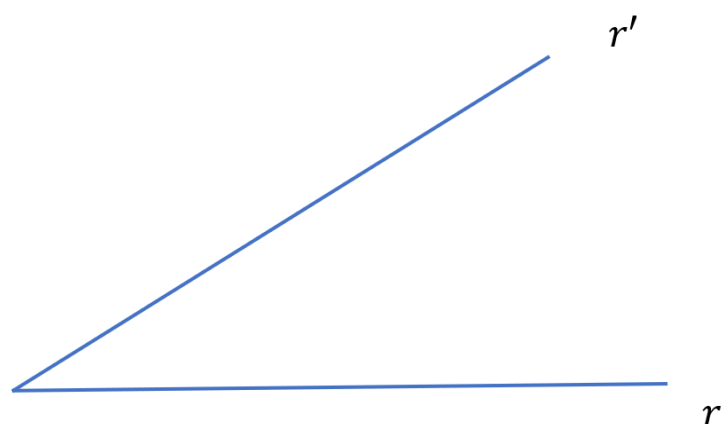
Las medidas de dos de los ángulos de un triángulo ABC son $\hat{A} = 40^\circ$ y $\hat{B} = 1,54 \text{ rad}$.
Calcula en grados y en radianes la medida del ángulo $\hat{C}$.

Ejercicios y problemas de la sesión 2

Ejercicio 2.1. (Elaboración propia)

El docente pide a los alumnos que dibujen varios triángulos rectángulos semejantes siguiendo el teorema de Tales (visto en la unidad anterior de semejanza):

- 1) Se trazan dos líneas no paralelas r y r' que partan de un mismo vértice:



- 2) A continuación, se dibujan varias líneas paralelas verticales que corten a las dos líneas iniciales:

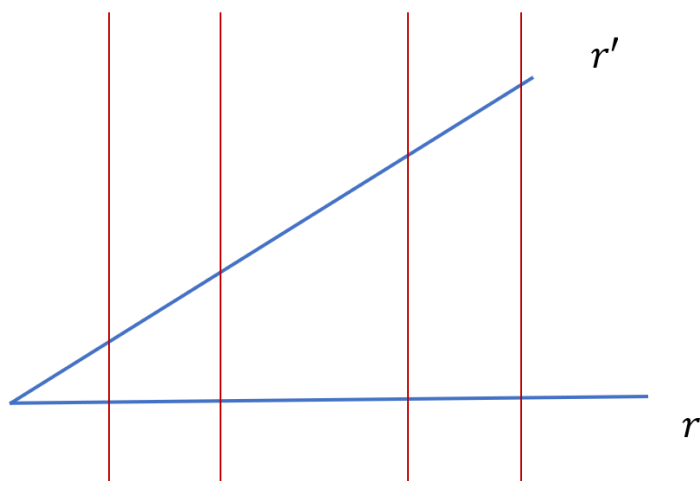


Figura 53. Formación de triángulos rectángulos semejantes haciendo uso del teorema de Tales

Tras esto, se pide a los alumnos que calculen las razones trigonométricas del seno y el coseno midiendo cada uno de los segmentos correspondientes de los triángulos. Así, descubrirán que el valor de la razón trigonométrica es el mismo para todos (aproximadamente), y que no depende de los lados del triángulo y sí del ángulo α :

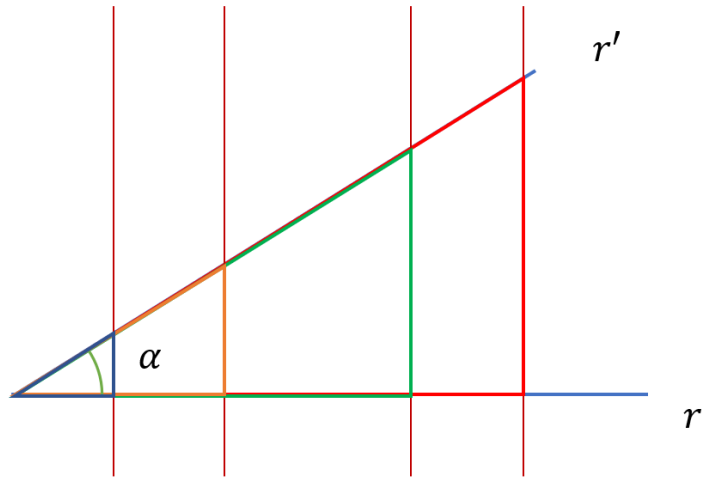


Figura 54. Razones trigonométricas de α

Ejercicio 2.2 (Alcaide et al., 2016)

Indica la razón trigonométrica que relaciona el ángulo y los lados indicados y calcúlala para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

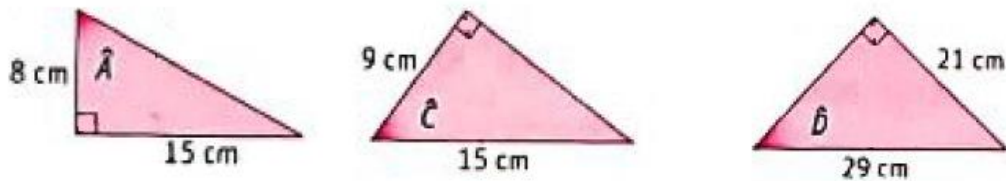


Figura 55. Triángulos del enunciado del ejercicio 2.2 (Alcaide et al., 2016)

Ejercicio 2.3 (Alcaide et al., 2016)

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos en estos triángulos rectángulos:

- a) Cateto $b = 28 \text{ cm}$, cateto $c = 45 \text{ cm}$
- b) Hipotenusa $a = 73 \text{ cm}$, cateto $b = 48 \text{ cm}$
- c) Hipotenusa $a = 15 \text{ cm}$, cateto $c = 12 \text{ cm}$

Ejercicio 2.4 (Colera et al., 2016)

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.

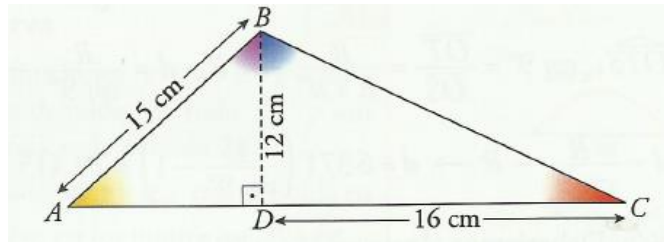


Figura 56. Triángulo del enunciado del ejercicio 2.4 (Colera et al., 2016)

Ejercicios y problemas de la sesión 3

Ejercicio 3.1 (Colera et al., 2016)

Indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos α , β , γ y δ :

- a) $\operatorname{sen} \alpha < 0$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0$
- b) $\cos \beta > 0$ y $\operatorname{tg} \beta < 0$
- c) $\operatorname{sen} \gamma < 0$ y $\cos \gamma < 0$
- d) $\cos \delta > 0$ y $\operatorname{sen} \delta < 0$

Ejercicio 3.2 (Colera et al., 2016)

Justifica en qué cuadrante está α , en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$; $\alpha < 90^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\alpha > 270^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; $\alpha > 180^\circ$

d) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$; $\alpha < 180^\circ$

Ejercicios y problemas de la sesión 4

Ejercicio 4.1 (Alcaide et al., 2016)

Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- a) $\operatorname{sen} 300^\circ$
- b) $\cos(-330^\circ)$
- c) $\operatorname{tg}(-480^\circ)$

Ejercicio 4.2 (Alcaide et al., 2016)

Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90^\circ + \alpha$.

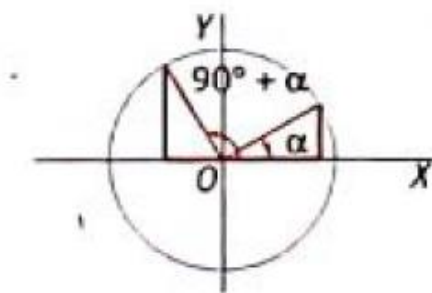


Figura 57. Hallar las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90^\circ + \alpha$

Ejercicios y problemas de la sesión 5

Ejercicio 5.1 (Colera et al., 2016)

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, deduce el valor de $\operatorname{sen} 45^\circ$ y $\operatorname{cos} 45^\circ$ mediante el uso de las relaciones fundamentales.

Ejercicio 5.2 (Colera et al., 2016)

Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8, empleando las relaciones trigonométricas fundamentales.

Ejercicio 5.3 (Alcaide et al., 2016)

Demuestra las siguientes igualdades haciendo uso de las relaciones trigonométricas fundamentales:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\text{c) } (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

Ejercicios y problemas de la sesión 6

Problema 6.1 (Colera et al., 2016)

Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con el suelo.

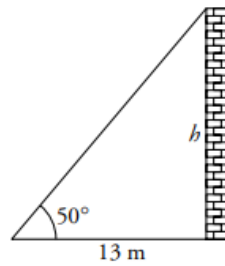


Figura 58. Altura de la torre del problema 6.1 (Colera et al., 2016)

Problema 6.2 (Colera et al., 2016)

Una escalera de 4 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 2 m de la pared?

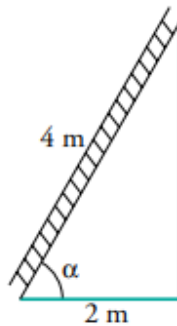


Figura 59. Ángulo de la escalera del problema 6.2 (Colera et al., 2016)

Problema 6.3 (Colera et al., 2016)

Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60° . ¿A qué altura está la cometa?

Problema 6.4 (Colera et al., 2016)

Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

Ejercicios y problemas de la sesión 7

Problema 7.1. (Colera et al., 2016)

Calcula la altura h y el área de los siguientes triángulos:

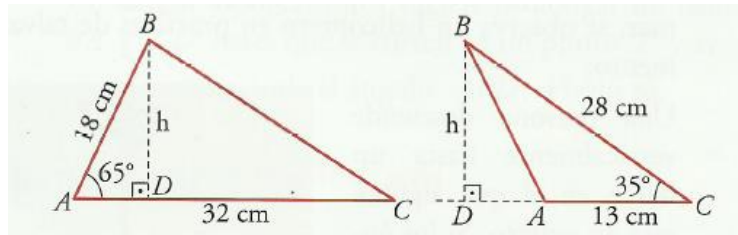


Figura 60. Triángulos oblicuángulos del problema 7.1 (Colera et al., 2016)

Problema 7.2 (Colera et al., 2016)

Halla, en cada triángulo, la altura y el lado desconocido:

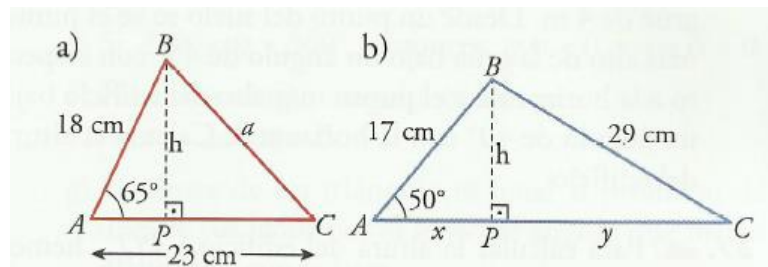


Figura 61. Triángulos oblicuángulos del problema 7.2 (Colera et al., 2016)

Problema 7.3 (Colera et al., 2016)

Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento.

Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75° para el helicóptero y de 38° para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco?

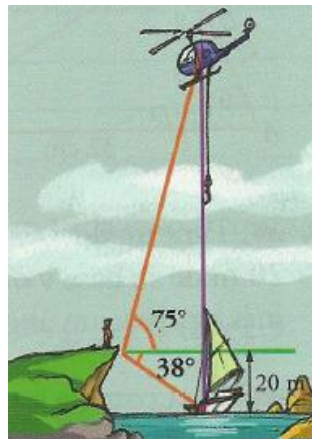


Figura 62. Esquema del problema 7.3 (Colera et al., 2016)

Problema 7.4 (Alcaide et al., 2016)

Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se

observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60° , respectivamente. Halla la altura de la antena.

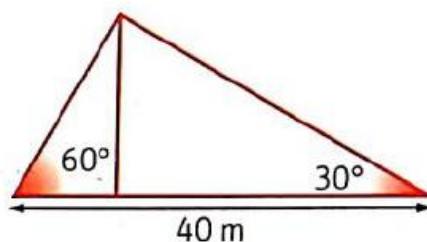


Figura 63. Esquema del problema 7.4 (Alcaide et al., 2016)

Problemas planteados en el webquest sobre aplicaciones de la trigonometría

Problema 8.1 (Elaboración propia)

Problema 8.2 (Elaboración propia)

Problema 8.3 (Elaboración propia)

Los problemas se pueden consultar en la propia página creada para la actividad:

<https://mjmg0024.wixsite.com/website>

Actividad de la sesión 10

A continuación, se presenta el enunciado de la actividad que se entrega en un folio a cada alumno:

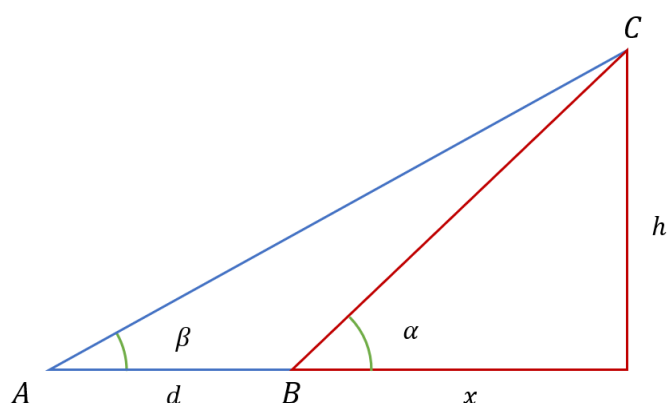
UNIDAD 7: TRIGONOMETRÍA

Cálculo de la altura de un edificio con la ayuda de un clinómetro

La tarea que se propone a continuación realizará en grupos colaborativos de 6 alumnos.

La actividad es muy sencilla. Saldremos al patio del instituto y tomaremos varias medidas que nos ayuden a calcular haciendo uso de la trigonometría la altura del edificio

principal. Aunque parezca difícil, es bastante sencillo. Solamente necesitáis calculadora, bolígrafo, esta ficha, una cinta métrica y vuestro propio clinómetro casero.



Para ello, vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Mide la distancia que hay desde el suelo hasta tus ojos.
2. Mide el ángulo de elevación (α) hasta la parte superior del edificio cuya altura h queremos calcular con ayuda de tu clinómetro.
3. Aléjate los metros que consideres oportunos (al menos 5 m) y vuelve a medir el ángulo de elevación (β) con el clinómetro.
4. Estos tres pasos los repetirá cada miembro del grupo. Realizaréis los cálculos necesarios y los resultados los iréis anotando en la siguiente tabla:

Alumno/a	Altura hasta los ojos (2 decimales)	α	Me alejo distancia d	β
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

5. Con esos valores, cada alumno/a debe plantear un problema de doble observación y calcular la altura h_1 con 2 decimales de precisión (los cálculos debéis entregármelos cada miembro del grupo en folio aparte).

Cuando cada integrante del grupo calcule h_1 , deberá calcular la altura del edificio h , que es la suma $h = h_1 + \text{altura hasta los ojos}$.

Alumno/a	h_1 (2 decimales)	Altura hasta los ojos (2 decimales)	$h = h_1 + \text{altura hasta los ojos (2 decimales)}$
1.			
2.			

3.			
4.			
5.			
6.			

6. Finalmente, la solución será la media aritmética (usando los decimales aproximados) de los resultados de la última columna de la tabla anterior obtenidos por los miembros del grupo.

Solución

Media aritmética:

h=

Nota: la calificación de la actividad será común para todos los componentes del grupo



Figura 64. Clinómetro casero para medir ángulos en la actividad fuera del aula

Ejercicios y problemas de la sesión 11

Problema 11.1 (Alcaide et al., 2016)

Calcula el área y el volumen del siguiente cuerpo geométrico:

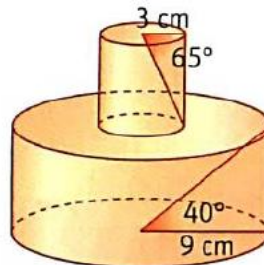


Figura 65. Cuerpo geométrico del problema 11.2 (Alcaide et al., 2016)

Problema 11.2 (Colera et al., 2016)

Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, se han medido los ángulos que indica la figura. Se sabe que hay un funicular para ir de S a Q , cuya longitud es 250 m. Halla la altura del edificio.

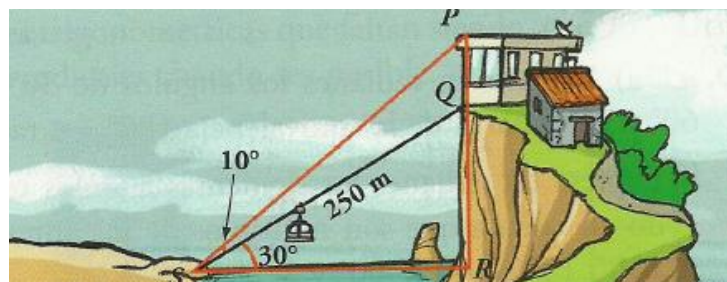


Figura 66. Esquema del problema 11.1 (Colera et al., 2016)

Problema 11.3 (Colera et al., 2016)

Un avión P vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\widehat{PAB} = 20^\circ$ y $\widehat{PBA} = 30^\circ$. ¿A qué altura está el avión?

Prueba escrita de la unidad

Ejercicio 1 (1 punto) (elaboración propia)

Expresa mediante una fórmula la definición geométrica de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo. Apóyate en un dibujo para dar la definición de cada una.

Ejercicio 2 (1 punto) (elaboración propia)

Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas:

- a) $\cos 120^\circ$ b) $\sin 100^\circ$ c) $\operatorname{tg} 300^\circ$ d) $\cos 395^\circ$ e) $\sin 700^\circ$

Ejercicio 3 (1,5 puntos) (Alcaide et al., 2016)

La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 y 16 cm respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de su ángulo agudo de menor amplitud?

Ejercicio 4 (1,5 puntos) (Colera et al., 2016)

Usando las relaciones fundamentales, demuestra estas igualdades:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\frac{(\sin \alpha)^3 + \sin \alpha \cdot (\cos \alpha)^2}{\sin \alpha} = 1$

c) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$

Problema 1 (1,5 puntos) (Colera et al., 2016)

Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B , que distan entre sí 10 km orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

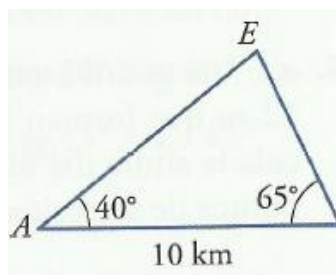


Figura 67. Esquema del problema 1 de la prueba escrita

Problema 2 (1,5 puntos) (elaboración propia)

Desde un punto del suelo se ve la cima de una colina bajo un ángulo de 60° . Si nos aproximamos al pie de la colina 20 m, la vemos ahora bajo un ángulo de 45° . Calcula la altura de la colina.

Problema 3 (2 puntos) (Alcaide et al., 2016)

Dado el siguiente trapecio rectángulo:

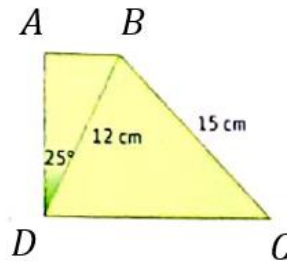


Figura 68. Trapecio rectángulo del problema 3 de la prueba escrita

- a) Halla la longitud del segmento $\overline{AB}$ (0,5 puntos)
- b) Halla la altura del triángulo BCD (0,5 puntos)
- c) Calcula la altura de los 4 lados del trapecio (0,5 puntos)
- d) Calcula el área del trapecio (0,5 puntos)

Anexo III. Rúbricas de evaluación

Tabla 26

Rúbrica para la evaluación de la prueba escrita

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (márgenes legibilidad, limpieza y orden).	10%	
Ortografía	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su etapa educativa.	10%	
Contenido	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa por escrito de con algún error.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa con diversos errores.	10%	
Proceso de resolución y solución final	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y/o a su interpretación.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y/o a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta.	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula o fórmulas que utiliza no es correcta	70%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 27

Rúbrica para la evaluación del cuaderno de clase

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	El cuaderno respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El cuaderno respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El cuaderno respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El cuaderno respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	20%	
Ortografía	El texto está escrito correctamente, sin errores ortográficos.	El texto está escrito con un error ortográfico.	El texto presenta dos o tres errores ortográficos.	El texto presenta un volumen importante de errores ortográficos.	10%	
Contenido	Demuestra un gran conocimiento del tema tratado, ajustándose a la actividad encomendada, y de acuerdo con las fuentes utilizadas, y los ejercicios y problemas están corregidos.	Demuestra un buen conocimiento del tema tratado, ajustándose a la actividad encomendada y de acuerdo con las fuentes, y los ejercicios y problemas están corregidos	Demuestra un conocimiento parcial del tema tratado, de acuerdo con las fuentes utilizadas, y solo están corregidos algunos ejercicios y problemas	Demuestra poco conocimiento del tema, el cuaderno no está completo y no hay ningún ejercicio ni problema corregidos	70%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 28

Rúbrica para la evaluación de la actitud personal

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Autonomía y confianza	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades de manera habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades con alguna ayuda.	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	10%	
Gestión emocional	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones, no permitiéndole resolver sus situaciones y problemas.	20%	
Actitud respetuosa y responsable	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	25%	
Corrección en la presentación	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	20%	
Conclusión del trabajo	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.	25%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 29

Rúbrica para la evaluación del webquest

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Esquema	El esquema es muy preciso y reproduce fielmente la situación planteada por el problema.	El esquema es preciso y da una idea clara de lo que plantea el problema.	El esquema ofrece una idea más o menos clara de lo que se plantea pero es poco preciso.	El esquema es erróneo y no puede ser de ayuda en la resolución del problema.	25%	
Proceso de resolución y solución final	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y a su interpretación.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta.	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula o fórmulas que utiliza no es correcta	25%	
Búsqueda de la información y exposición oral	Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado de manera clara, rigurosa y coherente respecto a los datos obtenidos.	Realiza valoraciones y emite juicios sobre la información obtenida.	Realiza alguna interpretación sobre la información obtenida.	No es capaz de realidad ninguna interpretación o realiza alguna con ayuda del docente u otro compañero/a.	25%	
Trabajo en equipo y participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	No forma parte o forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	25%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 30

Rúbrica para la evaluación de la actividad fuera del aula

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Trabajo en equipo y participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	No forma parte o forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	60%	
Proceso de resolución y solución final	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y a su interpretación.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta.	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula o fórmulas que utiliza no es correcta.	40%	
VALORACIÓN FINAL						