



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

UNIDAD DIDÁCTICA DE GEOMETRÍA: POLIEDROS

Alumno/a: Liébana Garrido, Francisco Jesús

Tutor/a: Prof. D. José Rodríguez Avi
Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2022

ÍNDICE

Resumen.....	1
Abstract.....	2
1. Introducción.....	3
2. Objetivos.....	4
3. Fundamentación curricular.....	5
3.1. Análisis del currículo.....	5
3.2. Análisis de los libros de texto.....	11
4. Fundamentación epistemológica: desarrollo de un tema de oposición.....	14
4.1. Introducción.....	14
4.2. Definición de poliedro.....	15
4.3. Teorema de Euler.....	16
4.3.1. Teorema de Euler y demostraciones.....	16
4.3.2. Consecuencias del teorema de Euler.....	17
4.3.3. La característica de Euler-Poincaré.....	18
4.4. Tipos de poliedros.....	18
4.4.1. Algunas clasificaciones de poliedros.....	18
4.4.2. Prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.....	19
4.5. Sólidos platónicos.....	20
4.5.1. Definición de sólidos platónicos.....	21
4.5.2. Teorema de la existencia de los sólidos platónicos.....	21
4.5.3. Tipos de sólidos platónicos.....	22
4.5.4. Interrelación entre sólidos platónicos.....	22
4.5.5. Construcción de los sólidos platónicos.....	23
4.5.6. Teorema del centro.....	24
4.6. Sólidos arquimedianos y poliedros de Catalan.....	24
4.6.1. Definición de sólidos arquimedianos.....	24
4.6.2. Tipos de sólidos arquimedianos.....	25
4.6.3. Poliedros de Catalan.....	29
4.7. Conclusiones	30
5. Fundamentación didáctica: investigaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje relativas a los cuerpos geométricos.....	31

5.1. Dificultades generales de enseñanza y aprendizaje en matemáticas.....	32
5.2. Posibles dificultades surgidas de los libros de texto.....	32
5.3. Ideas erróneas en el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos.....	35
5.4. Las restricciones institucionales para la modelización espacio-geométrica en Educación Secundaria.....	36
5.5. Conclusiones.....	37
6. Proyección didáctica.....	38
6.1. Título.....	38
6.2. Justificación.....	38
6.2.1. Justificación curricular.....	38
6.2.2. Justificación profesional.....	38
6.2.3. Justificación artística y cultural.....	40
6.3. Contextualización del centro y del aula.....	41
6.4. Objetivos.....	42
6.5. Competencias clave.....	44
6.6. Contenidos.....	45
6.7. Metodología.....	48
6.8. Actividades y recursos.....	49
6.8.1. Actividades.....	49
6.8.2. Recursos.....	52
6.9. Atención a la diversidad.....	53
6.10. Temporalización.....	54
6.11. Evaluación.....	61
7. Conclusiones.....	66
8. Referencias bibliográficas.....	68
9. Referencias normativas.....	70

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas académicas, 3º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.....	6-7
---	-----

Ilustración 2: Bloque 3 “Geometría”, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas académicas, 3º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.....	7
Ilustración 3. Clasificación de poliedros según lados y ángulos poliedros y según lados y orden de vértices. Fuentes: Martínez et al., Guillén Soler, pág. 29. Elaboración propia.....	19
Ilustración 4. Prisma recto, prisma oblicuo, antiprisma recto, antiprisma oblicuo. Elaboración propia.....	20
Ilustración 5. Pirámide recta, pirámide oblicua, bipirámide recta y bipirámide oblicua. Elaboración propia.....	20
Ilustración 6. Conjugación de poliedros. Fuente: Arranz, J.M. (2016).....	23
Ilustración 7. Construcción de los sólidos platónicos. Elaboración propia.....	23
Ilustración 8. truncamientos de tipo 1 y tipo 2. Fuente: Guillén Soler, pág. 115.....	25
Ilustración 9. Sólidos arquimedianos. Fuente: Mallo.....	28
Ilustración 10. Desarrollo de los sólidos arquimedianos. Fuente: Weisstein.....	28
Ilustración 11. Sólidos de Catalan. Fuente: Mallo.....	30
Ilustración 12. Distractores de orientación. Fuente: Barrantes et al.....	33
Ilustración 13. Distractores de estructuración. Fuente: Barrantes et al.....	34
Ilustración 14. Fullerenos C ₆₀ y perovskita ABX ₃ . Fuente: Extremiana et al.....	39
Ilustración 15. La pirámide del Louvre y su reflejo. Fuente: Photosforclass.....	39
Ilustración 16. Modelo cósmico de Kepler. Fuente: Extremiana et al.....	40
Ilustración 17. Trabajos de Gaudí y Dalí. Fuente: Fernández.....	41
Ilustración 18. Fachada del IES Jándula. Fuente: www.iesjandula.es	41
Ilustración 19. Actividad 1. Elaboración propia.....	50
Ilustración 20. Actividad 3. Elaboración propia.....	51

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Competencias asignadas a los criterios de evaluación de los Bloques 1 y 3. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....	8-9
Tabla 2. Competencias adquiridas en los Bloques 1 y 3. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....	10
Tabla 3. Índice de las unidades didácticas de Cuerpos Geométricos en las editoriales Anaya y Santillana. Fuente: libros de texto Anaya y Santillana. Elaboración propia.....	12
Tabla 4. Clasificación de poliedros según sus caras. Fuente: Guillén Soler, pág. 27. Elaboración propia.....	18

Tabla 5. Características de los poliedros regulares convexos. Elaboración propia...	22
Tabla 6. clasificación de los sólidos arquimedianos según origen y transformaciones. Elaboración propia.....	26
Tabla 7. Lados, aristas y vértices de los sólidos arquimedianos. Fuente: Weisstein. Elaboración propia.....	27
Tabla 8. Poliedros de Catalan. Fuente: Da Silva, pág. 39. Elaboración propia.....	29
Tabla 9. Estándares de aprendizaje presentes en la unidad didáctica. Fuente: RD 1105/2014. Elaboración propia.....	46-48
Tabla 10. Tabla para realizar la actividad 1. Elaboración propia.....	49
Tabla 11. Tabla para realizar la actividad 3. Elaboración propia.....	50
Tabla 12. Recursos de la unidad didáctica. Elaboración propia.....	52
Tabla 13. Estructura de la unidad didáctica. Elaboración propia.....	54
Tabla 14. Ponderación de las herramientas de evaluación. Elaboración propia.....	61
Tabla 14. Rúbrica de trabajos y actitud.....	62
Tabla 15. Rúbrica de intervenciones en clase.....	63
Tabla 16. Rúbrica de trabajos en grupo.....	63-64
Tabla 17. Rúbrica de prueba escrita.....	64-65

Resumen

A lo largo de este documento, desarrollaremos un Trabajo Fin de Máster que nos permitirá obtener el título del *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*, en la especialidad de Matemáticas.

El título del presente trabajo es “Cuerpos Geométricos” y en él se estudiará el concepto de poliedros, las distintas familias de poliedros y sus propiedades.

Este TFM se divide en dos bloques.

El primer bloque consta de tres partes: la fundamentación curricular, en la que se analiza el currículo vigente y dos libros de texto; la fundamentación epistemológica, en la que se desarrolla el tema del temario de oposiciones de acceso al cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en la especialidad de matemáticas; y la fundamentación didáctica, en la que se analizan tres investigaciones didácticas relacionadas con el campo de los poliedros.

El segundo bloque consta de una única parte: una unidad didáctica sobre cuerpos geométricos, donde, apoyándonos en las fundamentaciones previas, trataremos de presentar una metodología, una evaluación y unas actividades y recursos que fundamenten un proceso de enseñanza-aprendizaje satisfactorio para el alumnado.

En la realización del TFM se ha tenido en cuenta la normativa vigente: la Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, y el Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

PALABRAS CLAVE: Cuerpos Geométricos, Educación Secundaria Obligatoria, Matemáticas, Unidad Didáctica, Trabajo Fin de Máster

Abstract

Alongside this document, we will elaborate a Master's Final Project that will allow us to obtain the title of the Master's Degree: *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*, in the specialty of Mathematics.

The title of the present thesis is "Geometrical bodies" and we will study the concept of polyhedrons, the various polyhedrons families and their properties.

This MFP is divided into two blocks.

The first block is made up of three parts: the curricular basis, where we analyse the current curriculum and two textbook; the epistemological basis, where we develop a subject of the opposition's agenda for teachers in Secondary Education in the specialty of mathematics; and the educational basis, where we analyse three didactic investigations related to geometrical bodies.

The second block is made up of an only part: a didactic unit on geometrical bodies, where, supported by previous basis, we try to present a methodology, an evaluation and activities and resources which substantiate a satisfactory teaching-learning process for students.

To develop this MFP, we have followed the current regulation: the Order of September 9, 1993, by which the opposition's agenda for teachers in Secondary Education in the specialty of mathematics is approved, the Order of July 14, 2016, by which the curriculum of Compulsory Secondary Education in the Autonomous Community of Andalucía is developed, and the Royal Decree 1105/2014, of December 26, which establishes the basic curriculum of Compulsory Secondary Education.

KEYWORDS: Compulsory Secondary Education, Didactic Unit, Geometrical Bodies, Mathematics, Master's Final Project,

1. Introducción

En este Trabajo Final de Máster, correspondiente al Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la Especialidad de Matemáticas, en el curso académico 2021/2022, se desarrolla la Unidad Didáctica de Cuerpos Geométricos. Esta Unidad Didáctica está dirigida al alumnado de 3º ESO del Instituto de Educación Secundaria Jándula (Andújar, Jaén).

Este TFM se centra en la especialidad de Matemáticas, concretamente en el tema de los cuerpos geométricos en el curso de 3º de ESO, en el contexto de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

La geometría tridimensional es un aspecto fundamental de las matemáticas, muy útil para el entendimiento del mundo en el que vivimos. La modelización espacio-geométrica nos permite comprender la configuración estructural de la naturaleza. Podemos encontrar estructuras poliedrales desde un nivel microscópico, en la composición de moléculas y las formas de algunos microorganismos, hasta un nivel visible al ojo humano, en la estructura de los minerales. Son, además, una herramienta fundamental en el desarrollo del arte, la ingeniería y la arquitectura. La modelización de objetos geométricos tridimensionales ha dado lugar al desarrollo artístico y científico durante siglos.

En la actualidad, el currículo educativo está basado en competencias clave. El estudio de los cuerpos geométricos ayuda a desarrollar fundamentalmente la competencia matemática, las competencias básicas en ciencia y tecnología, pero también puede ser un punto de partida para el desarrollo de la competencia en conciencia y expresiones culturales.

La estructura del presente trabajo consta de dos bloques claramente diferenciados. El primer bloque consta de una serie de tareas previas necesarias para el desarrollo adecuado de una unidad didáctica, entre las que se encuentran:

- Fundamentación curricular. Se estudia la normativa vigente en Andalucía acerca del tema de estudio y se realiza un análisis de libros de texto de distintas editoriales, comparándolos y viendo en qué medida se ajustan a los contenidos estipulados en la normativa.
- Fundamentación epistemológica. Se desarrolla un tema de oposiciones relacionado con el objeto de estudio. Su desarrollo es vital para tener la base matemática adecuada y transmitir los conocimientos con soltura.
- Fundamentación didáctica. Se estudian varios artículos de investigación relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, haciendo hincapié en las posibles dificultades en el caso de los cuerpos geométricos.

El segundo bloque consiste en la elaboración de la unidad didáctica propiamente dicha, objetivo principal del TFM. Se desarrollará el tema referente a los cuerpos geométricos, para estudiantes de 3º de ESO.

2. Objetivos

Los principales objetivos de este Trabajo de Fin de Máster están recogidos en la página web de la Universidad de Jaén (www.ujaen.es), en el apartado dedicado al Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. El desarrollo del TFM es parte imprescindible para desarrollar dichos objetivos, poniendo en práctica lo aprendido a lo largo del curso académico en las asignaturas del Máster.

Los objetivos son los siguientes:

- Potenciar una actitud positiva y crítica hacia el desarrollo de la identidad profesional docente, colaborando con los agentes del ámbito educativo y, de forma especial, con los equipos directivos de los centros docentes.
- Integrar experiencias profesionales con procesos de formación e investigación en el aula, a través de la reflexión crítica, sobre todo lo que se experimenta o se aprende.
- Propiciar una formación cultural, personal, ética y social adecuada para el ejercicio de la profesión docente con el rigor científico que se debe aplicar en el ámbito de la educación de adolescentes.
- Promover el reconocimiento, análisis y atención de las características diferenciales del alumnado, según su desarrollo evolutivo, contextos familiares, sociales y culturales de referencia.
- Conocer las competencias profesionales docentes propias de cada especialidad y su relación con las demás competencias a través de mecanismos de transversalidad.

La elaboración de la primera parte del TFM es fundamental para tener una visión actual de la enseñanza y el aprendizaje, y ayuda al desarrollo de un espíritu crítico que conduzca a afrontar la labor de la docencia de la forma más adecuada posible. Asimismo, la elaboración de la segunda parte del TFM es esencial para aprender a planificar contenidos didácticos de una forma realista y coherente, valiéndonos de esa visión crítica construida a través de las fundamentaciones previas.

La elaboración adecuada del Trabajo de Fin de Máster supone demostrar que se han alcanzado estos objetivos, asegurando así que se ha adquirido el conocimiento necesario para superar el Máster y se ha adquirido una base fundamental para ejercer en el futuro la profesión de la docencia.

3. Fundamentación Curricular

La fundamentación curricular tiene dos objetivos principales. El primer objetivo es analizar el currículo escolar, con especial atención al tema objeto de estudio. El segundo es elaborar un análisis los libros de texto referentes a la unidad didáctica trabajada en este TFM. Concretamente, la unidad desarrollada está orientada a alumnos de 3º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, sobre el tema de Cuerpos Geométricos.

3.1. Análisis del currículo

El currículo vigente respecto a los cuerpos geométricos se fundamenta en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En el Anexo I de este decreto encontramos los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para cada una de las materias de la ESO y Bachillerato.

Centramos nuestra atención en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, de 3º de ESO. El Real Decreto divide esta asignatura en 5 bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Números y Álgebra, Geometría, Funciones y Estadística y Probabilidad. Debido a la temática elegida en el TFM, nos centramos en el primer bloque (Procesos, métodos y actitudes matemáticas), complementario a los demás, y el tercer bloque (Geometría), que recoge el contenido relacionado con los Cuerpos Geométricos.

En las Ilustraciones 1 y 2 podemos ver los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que indica el Real Decreto 1105/2014 para el desarrollo de los dos bloques mencionados.

El siguiente objeto de consulta es la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. La tabla número 1 recoge la relación entre los criterios de evaluación y las competencias clave, determinada por dicha Orden.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: - la recogida ordenada y la organización de datos. - la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. - facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. - el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. - la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. - comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	- Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. - Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. - Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. - Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. - Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. - Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. - Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. - Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. - Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. - Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. - Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. - Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	- Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. - Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). - Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. - Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. - Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. - Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. - Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. - Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. - Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. - Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. - Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. - Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. - Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. - Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. - Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. - Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. - Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. - Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. - Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. - Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. - Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Ilustración 1: Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas académicas, 3º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Bloque 3. Geometría		
Geometría del plano. Lugar geométrico. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

Ilustración 2: Bloque 3 “Geometría”, Matemáticas Orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
11. emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA

12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA
Bloque 3: Geometría	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	CMCT
2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	CMCT, CAA, CSC, CEC
3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	CMCT, CAA
4. reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	CMCT, CAA, CSC, CEC
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	CMCT
6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	CMCT

Tabla 1: Competencias asignadas a los criterios de evaluación de los Bloques 1 y 3. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

Las competencias que deben haberse desarrollado tras estudiar los bloques 1 y 3 son, por tanto, las recogidas en la tabla número 2.

Código	Competencia
CCL	Competencia en Comunicación Lingüística
CMCT	Competencia en Matemática, Ciencia y Tecnología
CD	Competencia Digital
CAA	Competencia de Aprender a Aprender
CSC	Competencias Sociales y Cívicas
SIEP	Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor
CEC	Conciencia y Expresiones Culturales

Tabla 2: Competencias adquiridas en los Bloques 1 y 3. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia

La Orden del 14 de julio de 2016 determina también los objetivos de etapa que se desarrollan en las asignaturas de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, tanto en 3º como en 4º de ESO.

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la

exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

3.2. Análisis de los libros de texto

Los datos extraídos del informe “El libro educativo en España. Curso 2020-2021” indican que el libro de texto ha supuesto una herramienta clave para paliar la brecha digital durante la pandemia, siendo a veces el único recurso para los estudiantes con escaso o nulo acceso a Internet. Por lo tanto, podemos afirmar que los libros de texto, siguen siendo una parte esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje, motivo por el que son también un punto de partida importante para la fundamentación curricular del Trabajo de Fin de Máster.

Los casos de estudio escogidos son los siguientes:

- Colera Cañas, R., Colera Jiménez, J., Gaztelu Alberio, I., Oliveira González, M.J. (2020). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. 3º ESO*. Editorial Anaya.
- Grence Ruiz, T., de la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C., Sánchez Figueroa, D. (2016). *Matemáticas: Enseñanzas académicas. 3º ESO. Serie Resuelve*. Editorial Santillana.

En el caso de la Editorial Anaya, el tema correspondiente a Cuerpos Geométricos es la unidad 11, mientras que en el caso de la Editorial Santillana se encuentra en la unidad 10. En ambos casos, las unidades se desarrollan a lo largo de 24 páginas,

aunque la estructuración de sus contenidos difiere. Los índices de ambos temas se muestran en la tabla 3.

Anaya	Santillana
1. Poliedros regulares y semirregulares	1. Poliedros
2. Truncando poliedros regulares	2. Prismas. Área
3. Planos de simetría de una figura	3. Pirámides. Área
4. Ejes de giro de una figura	4. Simetrías en los poliedros
5. Superficie de los cuerpos geométricos	5. Cuerpos de revolución. Área
6. Volumen de los cuerpos geométricos	6. Volumen de cuerpos geométricos
7. Coordenadas geográficas	7. La esfera terrestre

Tabla 3: Índice de las unidades didácticas de Cuerpos Geométricos en las editoriales Anaya y Santillana. Fuente: libros de texto Anaya y Santillana. Elaboración propia

El libro de Anaya hace una introducción histórica para presentar el tema y propone una búsqueda de información sobre los sólidos arquimedianos. Desarrolla una explicación de los poliedros regulares, la dualidad entre ellos, los poliedros semirregulares, la fórmula de Euler y el truncamiento de poliedros regulares. Ilustra los planos de simetría del cubo, prismas y cilindros, así como los ejes de giro del cubo y del tetraedro.

En el apartado de superficies, explica brevemente el cálculo del área de un poliedro y desarrolla e ilustra el cálculo del área de un cilindro, un cono, un tronco de cono, una esfera y un casquete esférico. En el apartado de volúmenes, desarrolla e ilustra el cálculo del volumen de prismas, cilindros, pirámides, conos, esfera y zona esférica.

En el apartado de coordenadas geográficas se desarrollan los conceptos de meridiano, paralelo, ecuador, hemisferios, latitud, longitud, coordenadas geográficas y husos horarios.

En cada uno de los apartados que implican el desarrollo de cálculos, es decir, áreas, volúmenes y coordenadas geográficas, el libro presenta al menos un ejercicio resuelto como ejemplo. En los apartados más gráficos, los que definen los elementos de los cuerpos geométricos, los ejemplos son visuales y se complementan con los ejercicios propuestos.

La unidad finaliza con un total de 51 actividades y problemas a realizar. Tras estas actividades, se proponen también algunos ejemplos para ampliar el tema, relativos a teselaciones en el espacio.

El libro de Santillana introduce el tema a través de una cronología de la invención de las pilas alcalinas y mostrando una sección que ilustra sus componentes internos. Añade además un repaso de los elementos de un polígono y el cálculo del área de una figura plana. Introduce los poliedros a través de cuatro componentes básicos: cara, arista, diagonal y vértice. Ilustra los poliedros regulares y la forma de Euler.

Su estructura unifica las propiedades de los distintos cuerpos geométricos, presentándolos de forma ordenada. Presenta los prismas junto a su desarrollo plano y el método de cálculo de su área. De forma análoga sucede con las pirámides y los cuerpos de revolución. Presenta en un apartado distinto los ejes de simetría y giro. El apartado de volúmenes sí reúne los volúmenes de los distintos cuerpos en un único apartado. En el apartado de coordenadas geográficas presenta los conceptos eje terrestre, ecuador, meridianos, paralelos, hemisferios, latitud, longitud y huso horario.

En cada uno de los apartados que implican el desarrollo de cálculos, es decir, áreas, volúmenes y coordenadas geográficas, el libro presenta al menos un ejercicio resuelto como ejemplo. En los apartados más gráficos, los que definen los elementos de los cuerpos geométricos, los ejemplos son visuales y se complementan con los ejercicios propuestos.

La unidad finaliza con un total de 68 actividades y problemas a realizar. Tras estas actividades, se proponen también algunos ejemplos relativos a la vida cotidiana, ejercicios de razonamiento matemático, pruebas PISA y una sugerencia de proyecto final de trabajo cooperativo.

4. Fundamentación epistemológica: desarrollo de un tema de oposición

Para profundizar en el contenido objeto de este trabajo, se presenta el siguiente tema, perteneciente al listado de temas recogidos en la Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, del 4 de junio, BOE núm. 226 (1993). El tema escogido es el tema 45: “Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos”.

4.1. Introducción

Las primeras muestras conocidas de figuras de tipo poliédrico datan del Neolítico, hacia el año 2000 a.C aproximadamente. Se trata de unas piedras talladas encontradas en Escocia que ya muestran una correspondencia con los cinco poliedros regulares convexos, demostrando que ya en esta época se tenía conocimiento de la existencia de los mismos. Sin embargo, los datos disponibles no son suficientes para determinar con certeza el uso dado a estas piedras talladas. (Marshall, 1977)

Pitágoras de Samos (582-507 a.C.) estableció una primera relación entre los poliedros regulares y las distribuciones cósmicas del universo (Alsina, 2010). El estudio exhaustivo de los poliedros regulares es atribuido a Teeteto (417-369 a.C), matemático que aparece en los Diálogos de Platón (400 a.C.). El filósofo establece en su obra una asociación entre los poliedros regulares y los elementos que componen el universo: agua, aire, fuego y tierra. En base a su interpretación de estos poliedros (conocidos también como sólidos platónicos), y analizando las propiedades de los cuatro elementos, Platón asocia cada elemento a uno de los poliedros a través de Tímeo, protagonista de uno de sus Diálogos más relevantes.

Los poliedros regulares convexos son figuras sencillas, repeticiones de un mismo motivo: cada uno de ellos tiene todas sus caras, sus aristas y sus ángulos iguales y en cada uno de sus vértices confluyen el mismo número de aristas (Lanza, 2015). El icosaedro se asocia al agua, el octaedro al aire, el tetraedro al fuego y el cubo a la tierra. El último de los poliedros regulares, el dodecaedro, queda asociado al universo.

Los sólidos platónicos han sido la base de múltiples estudios, y no hubo que esperar demasiado tiempo hasta la definición de un nuevo tipo de poliedros basados en ellos. Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C) describió extensamente una serie de poliedros obtenidos tras el truncamiento de los poliedros regulares. Esto dio lugar a la definición de los sólidos arquimedianos, también conocidos como poliedros semirregulares.

Pasaron casi 2000 años desde que Platón incluyera los poliedros regulares convexos en su obra hasta que Johannes Kepler (1571-1630) construyera una cosmología basada en ellos. En su obra *Mysterium Cosmographicum* (1595) determinó las distancias entre

sí de las órbitas del sistema planetario e intentó reducirlas a los cuerpos regulares alternativamente inscritos y circunscritos a esferas (Guillén Soler, 1991).

Los poliedros regulares son un objeto matemático de especial interés debido a su presencia en la naturaleza. Desde un nivel microscópico, con la composición celular de moléculas como el CH_4 y la forma de ciertos virus y bacterias, hasta una escala visible al ojo humano, con la morfología de algunos minerales, los sólidos platónicos son paradigmáticos en el entendimiento del espacio. Asimismo, el resto de poliedros también son de interés, por cómo han sido utilizados para modelizar y definir el espacio.

4.2. Definición de poliedro

Antes de profundizar en la definición del poliedro, es necesario detenerse en la definición de polígono, ya que es un elemento fundamental del poliedro.

Definición 1: Un polígono es una figura geométrica perteneciente a un plano y determinada por una serie de vértices $V_1, V_2, \dots, V_n$, con $V_{n+1} = V_1$, y una sucesión de lados consecutivos y no alineados $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_nV_1$.

Definición 2: Dado un polígono C , dos puntos $p_1, p_2 \in C$, un segmento p_1p_2 y un punto cualquiera $p \in p_1p_2$, el polígono C es convexo si $p \in C \forall p \in p_1p_2$. En cambio, si $\exists p \in p_1p_2 / p \notin C$, el polígono C es cóncavo.

Existen diversas definiciones y visiones de los poliedros. La visión más popular de un poliedro es la de un cuerpo geométrico con caras poligonales planas, aristas rectas que articulan estas caras y vértices donde concurren las aristas (Alsina, 2020). A lo largo del siglo XX se dio un proceso de revisión en dicha noción, que condujo a que actualmente algunos autores formulen que un poliedro es un grafo que satisface ciertas condiciones específicas (Pereyra, 2019).

Definición 3: Según Branko Grünbaum (1929-), un poliedro P en $\mathbb{R}^3$ es una familia de polígonos (llamados caras de P) que verifican las siguientes propiedades:

1. Cada arista de P es arista de exactamente dos caras de P .
2. Siendo A_1, A_2 un par de aristas cualesquiera de P , y $C_1, C_2, \dots, C_n$ una cadena de caras de P , $\forall A - A' \in p \exists C_1, C_2, \dots, C_n / A_1 \in C_1, A_2 \in C_n, A_n \in C_n, A_n \in C_{n-1}$.
3. Cualquier conjunto compacto en $\mathbb{R}^3$ corta sólo un número finito de caras de P .

Definición 4: Dado un poliedro P , dos caras cualesquiera $C_1, C_2 \in P$, dos puntos $p_1, p_2 \in p$, un segmento p_1p_2 y un punto cualquiera $p \in p_1p_2$, el poliedro P es convexo si $p \in P \forall p \in p_1p_2$. En cambio, si $\exists p \in p_1p_2 / p \notin P$, el poliedro P es cóncavo.

4.3. Teorema de Euler

En todo poliedro existente existe una relación interna entre sus distintos componentes. Existe una propiedad que relaciona el número de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo. Leonhard Euler (1707-1783) logró demostrar esta propiedad, denominada como teorema de Euler.

4.3.1. Teorema de Euler y demostraciones

Teorema 1: Dado un poliedro convexo con número de caras C , número de vértices V y número de aristas A ,

$$C + V = A + 2$$

Para su demostración, se puede proceder de diferentes maneras.

Demostración 1

Podemos demostrar el teorema de Euler por inducción en el número de aristas, partiendo del poliedro más sencillo posible: el tetraedro, con $C=4$, $V=4$, $A=6$.

$$C + V = 8, A + 2 = 8 \Rightarrow C + V = A + 2$$

Si eliminamos una de las caras, $V - A + C = 1$. Supongamos esta expresión cierta para $A = n - 1$.

Sea una red plana con $A = n$ aristas, con C caras y V vértices. Si eliminamos una arista de esta red que sea frontera, no siendo común a ninguna otra cara, la nueva red tiene $A - 1$ aristas, V vértices y $C - 1$ caras.

$$V - (A - 1) + (C - 1) = 1 \Rightarrow V - A + C = 1$$

Por lo tanto, también se cumple la relación $C + V = A + 2$

Demostración 2

Supongamos un polígono B , con lados a pertenecientes a las caras C del poliedro P y vértices v pertenecientes a las aristas A del poliedro P , $a \in C$ y $v \in A$ por tanto $B \in P$. El polígono B divide la superficie de P en dos regiones. El polígono B tiene a lados y v vértices, con $a_1 = v_1$. El número de regiones es $R_1 = 2$. Entonces:

$$R_1 + v_1 = a_1 + 2.$$

Escojamos a continuación una de las dos regiones. Supongamos una línea poligonal abierta L , con extremos pertenecientes al polígono B . Ahora, el número de regiones es $R_2 = 3$, pero $a_2 = v_2 - 1$. Por lo tanto:

$$R_2 + v_2 = a_2 + 2.$$

Si continuamos el proceso hasta que cada región sea una cara del poliedro, obtenemos la expresión:

$$C + V = A + 2$$

Todo poliedro convexo satisface la relación de Euler (Lima, 1985). Existen otras aproximaciones al teorema de Euler, partiendo de grafos planares (Hernando y Pacios, 1982).

4.3.2. Consecuencias del teorema de Euler

De este teorema se desprenden otras relaciones relativas a los poliedros:

-Cada cara contiene 3 o más aristas, y cada arista pertenece a 2 caras. Por tanto,

$$a \geq \frac{3c}{2} \Rightarrow 3c \leq 2a$$

-En cada vértice concurren tres o más aristas, y cada una de ellas tiene dos vértices.
Por tanto:

$$a \geq \frac{3v}{2} \Rightarrow 3v \leq 2a$$

De estas relaciones se desprende el siguiente corolario:

Corolario 1. No existe un poliedro convexo con menos de seis aristas, cuatro caras y cuatro vértices.

Demostración

$$3c \leq 2a \quad (1)$$

$$3v \leq 2a \quad (2)$$

Sumando ambas expresiones,

$$3v + 3c \leq 4a \quad (3)$$

Aplicando el teorema de Euler,

$$3v + 3c = 3a + 6 \quad (4)$$

De las expresiones (1) y (4), operamos y deducimos.

$$3a + 6 = 3v + 3c \leq 2a + 3v \Rightarrow a + 6 \leq 3v \quad (5)$$

De las expresiones (2) y (4), operamos y deducimos.

$$3a + 6 = 3v + 3c \leq 2a + 3c \Rightarrow a + 6 \leq 3c \quad (6)$$

De las expresiones (3) y (4), deducimos.

$$3a + 6 \leq 4a \Rightarrow a \geq 6$$

De las expresiones (2) y (5), deducimos.

$$v \geq 4$$

De las expresiones (1) y (6), deducimos.

$$c \geq 4$$

De las relaciones que se producen entre los distintos elementos del poliedro, hemos demostrado que $a \geq 6, v \geq 4, c \geq 4$. Estas relaciones nos llevan a la conclusión de que el poliedro mínimo que se puede construir consta de 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Estudiaremos el nombre y las propiedades de este poliedro más adelante, ya que además de ser el poliedro mínimo posible, resulta ser también el primer poliedro regular o sólido platónico, un caso particular de poliedros.

4.3.3. La característica de Euler-Poincaré

La fórmula de Euler tiene un condicionante fundamental: para que se cumpla la relación, el poliedro debe ser un poliedro sin agujeros. Si quisiéramos generalizar la relación a cualquier tipo de poliedros, debe atenderse a una fórmula análoga, la conocida como característica de Euler-Poincaré:

$$\chi = V - A + C.$$

La característica de Euler-Poincaré es cierta para todos los complejos topológicos finitos (Björner y Kalai, 1988). De este modo, podemos decir que $\chi=2$ para todo poliedro homeomorfo a la esfera. En el caso del toro y cualquier poliedro homeomorfo al mismo (es decir, cualquier poliedro con número de agujeros igual a 1), obtenemos que $\chi=0$. Por tanto, χ es un valor dependiente de las características topológicas del poliedro.

4.4. Tipos de poliedros

4.4.1. Algunas clasificaciones de poliedros

Existen varias formas de clasificar los poliedros. La tabla 4 presenta algunas de las familias de poliedros más representativas, atendiendo a dos criterios: regularidad de las caras que componen el poliedro e igualdad en el número de caras que componen el poliedro.

	Caras regulares	Caras no regulares
Caras iguales	Poliedros regulares	Poliedros de Catalan
Caras no iguales	Poliedros arquimedianos	Prisma, Antiprisma, Pirámide, Bipirámide (excepto aquellos cuyas caras son regulares)

Tabla 4: Clasificación de poliedros según sus caras. Fuente: Guillén Soler, pág. 27. Elaboración propia

Podemos considerar otros tipos de calificaciones si tenemos en cuenta distintos parámetros, como son por ejemplo la igualdad de los ángulos poliedros o el orden de los vértices.

Definición 5: El ángulo poliedro es el ángulo formado por las caras que componen el vértice de un poliedro.

Definición 6: Entendemos orden de un vértice por el número de aristas que componen el vértice de un poliedro.

A los parámetros anteriores (igualdad y regularidad de caras) pueden añadirse estos parámetros, dando lugar a clasificaciones diferentes. La ilustración 3 muestra dos posibles clasificaciones de las distintas familias de poliedros.

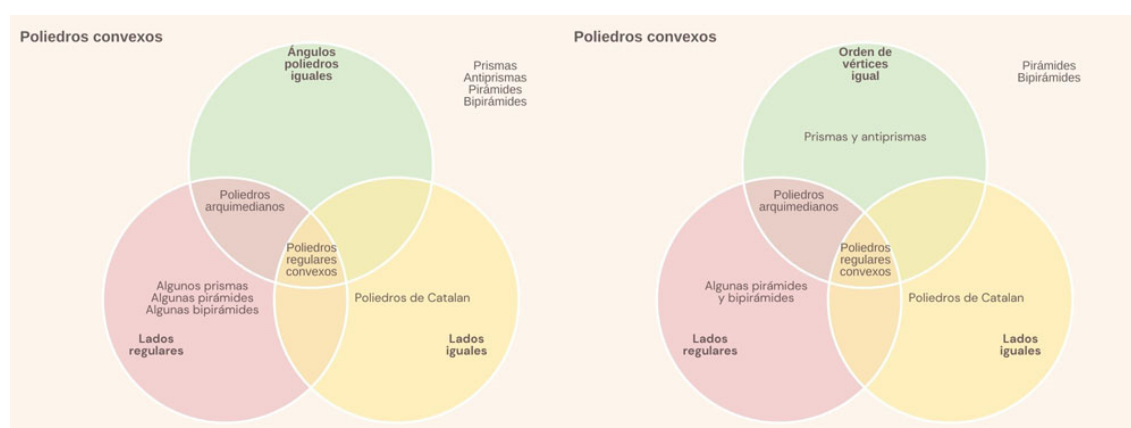


Ilustración 3: Clasificación de poliedros según lados y ángulos poliedros y según lados y orden de vértices.

Fuentes: Martínez et al., Guillén Soler, pág. 29. Elaboración propia

Dado que estudiaremos en detalle los poliedros regulares, arquimedianos y de Catalan en sus respectivos apartados más adelante, en este apartado nos centraremos en los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.

4.4.2. Prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides

Existen infinitos poliedros. Algunas familias de poliedros se forman a través de propiedades internas de los cuerpos. Para comprender la formación de las familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides hay que detenerse primero en las definiciones de mediana y baricentro de un polígono.

Definición 6: Llamamos mediana de un polígono a la unión entre el vértice de un polígono y el punto medio de su lado opuesto.

Definición 7: Llamamos baricentro o centroide de un polígono al punto de intersección de sus medianas.

Definición 8: Un prisma es una figura tridimensional formada por dos bases poligonales planas idénticas entre sí, situadas en dos planos paralelos, con el mismo ángulo sobre el plano, y unidas entre sí mediante tantos paralelogramos como lados tenga la base. Si el baricentro de ambas bases pueden unirse mediante una línea perpendicular a ambas, el prisma es recto. En caso contrario, es oblicuo. Si las bases son polígonos regulares, el prisma es regular. En caso contrario, es irregular.

Definición 9: Un antiprisma es una figura tridimensional formada por dos bases poligonales planas idénticas entre sí, con una de ellas girada con respecto a la otra de forma que el vértice de uno sea equidistante de dos vértices del otro, y unidas entre sí mediante triángulos isósceles. Si el baricentro de ambas bases pueden unirse mediante una línea perpendicular a ambas, el antiprisma es recto. En caso contrario, es oblicuo. Si las bases son polígonos regulares, el antiprisma es regular. En caso contrario, es irregular.

La ilustración 4 muestra ejemplos estilizados de prismas y antiprismas rectos y oblicuos.

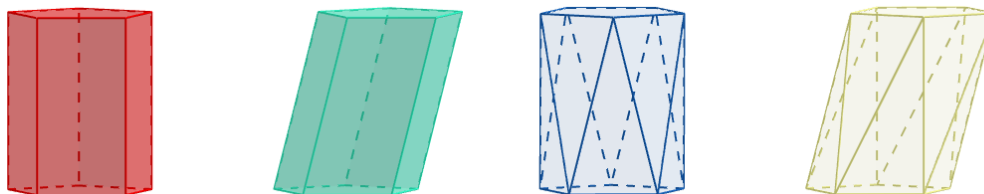


Ilustración 4: Prisma recto, prisma oblicuo, antiprisma recto, antiprisma oblicuo. Elaboración propia

Definición 10: Una pirámide es una figura tridimensional formada por una base poligonal plana y los segmentos rectos que unen los vértices de la base con un punto exterior al plano. Si el segmento que une el vértice con el centroide de la base es ortogonal a la misma, la pirámide es recta. En caso contrario, es oblicua. Si la base es un polígono regular, la pirámide es regular. En caso contrario, es irregular.

Definición 11: Una bipirámide es una figura tridimensional formada por una pirámide y su simétrica respecto al plano de la base, es decir, el centro del segmento que une los vértices de ambas pirámides es el centroide de su base. Si el segmento que une los vértices de ambas pirámides es ortogonal a la base, la bipirámide es recta. En caso contrario, es oblicua. Si la base es un polígono regular, la bipirámide es regular. En caso contrario, es irregular.

La ilustración 5 muestra ejemplos estilizados de pirámides y antipirámides rectas y oblicuas.

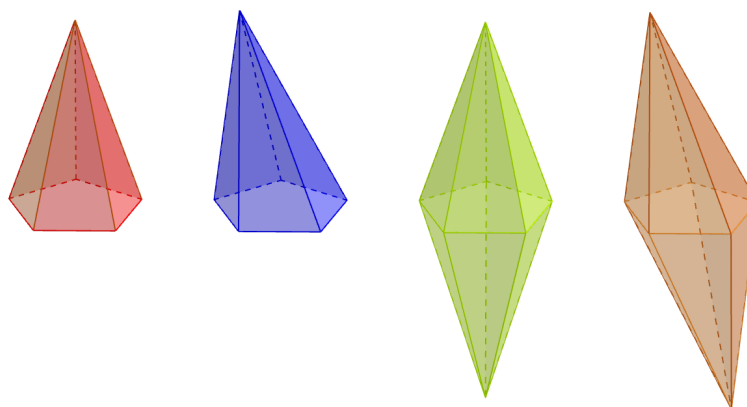


Ilustración 5: Pirámide recta, pirámide oblicua, bipirámide recta y bipirámide oblicua. Elaboración propia.

4.5. Sólidos platónicos

Los poliedros regulares convexos o sólidos platónicos, denominados así en honor a Platón, son una serie de cuerpos geométricos tridimensionales que muestran

regularidad en sus componentes y en la relación entre los mismos. Anteriormente pudimos ver cómo llevan siendo objeto de estudio desde hace miles de años. A continuación, hacemos un estudio de su definición y sus propiedades.

4.5.1. Definición de sólidos platónicos

Definición 12: Un sólido platónico, o poliedro regular convexo, es una figura tridimensional tal que todas sus caras son iguales, siendo además éstas polígonos regulares, todos sus ángulos poliédricos son iguales, y en todos sus vértices confluye el mismo número de aristas.

4.5.2. Teorema de la existencia de los sólidos platónicos

El teorema de la existencia de los sólidos platónicos fue también enunciado por Leonhard Euler, a raíz del teorema de Euler, ya estudiado en el apartado 4.3.

Teorema 2: Existen únicamente cinco poliedros que cumplan las condiciones de regularidad: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Para demostrar este teorema, podemos proceder al estudio de los elementos de los poliedros y sus condiciones de regularidad.

Demostración 3

Supongamos un poliedro S , con número de caras C , número de vértices V y número de aristas A . El número de lados de cada cara de S es p , y el número de aristas en cada vértice de S es q .

Sabemos que, para que C sea un polígono, $p \geq 3$, y para que V sea el vértice de un poliedro, $q \geq 3$.

Debido a la relación existente entre el número de caras, de vértices y de aristas de un poliedro, sabemos que:

$$q \cdot V = p \cdot C = 2A \quad (7)$$

Conocemos también la relación establecida por el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2 \quad (8)$$

De (7) y (8), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2A}{p} + \frac{2A}{q} &= A + 2 \\ :2A \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \\ A > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Una vez establecida esta relación,

Si $p=3$, es válido $q=3, q=4, q=5$.. Con $q=6, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$

Si $p=4$, es válido $q=3$. Con $q=4$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$

Si $p=5$, es válido $q=3$. Con $q=4$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}$

Si $p=6$, $\nexists q / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$

Por tanto, sólo existen 5 poliedros regulares convexos.

4.5.3. Tipos de sólidos platónicos

Los sólidos platónicos, como ya hemos demostrado, son 5. Responden al nombre de tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Sus características más importantes son las que aparecen en la tabla 5. Debemos detenernos antes en definir el símbolo de Schläfli.

Definición 13: el símbolo de Schläfli de un poliedro regular $S \equiv \{p,q\}$ es una notación simple que determina el número de lados p de las caras del poliedro y el número de caras q que rodean cada vértice.

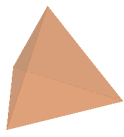
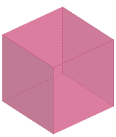
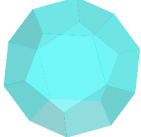
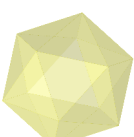
Imagen					
Nombre	Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Símbolo de Schläfli	$S \equiv \{3,3\}$	$S \equiv \{4,3\}$	$S \equiv \{3,4\}$	$S \equiv \{5,3\}$	$S \equiv \{3,5\}$
N.º caras	4	6	8	12	20
Tipo caras	Triángulos equiláteros	Cuadrados	Triángulos equiláteros	Pentágonos regulares	Triángulos equiláteros
N.º vértices	4	8	6	20	12
N.º aristas	6	12	12	30	30

Tabla 5: Características de los poliedros regulares convexos. Elaboración propia

4.5.4. Interrelación entre sólidos platónicos

Definición 14: Llamamos conjugado, dual o recíproco a aquel poliedro cuyos vértices, una vez inscrito en otro poliedro, coinciden con los centros de las caras del poliedro en el que se inscribe.

Existe una interrelación entre los sólidos platónicos que se puede detectar prestando atención a su número de caras y a su número de vértices. Si observamos,

existe una conjugación entre parejas de sólidos platónicos. La notación de Schläfli permite detectar fácilmente qué parejas de sólidos platónicos cumplen esta relación, ya que el conjugado de $\{p,q\}$ es $\{q,p\}$ (Oti Velasco, 2011).

Del número de Schläffi, podemos obtener que:

- El hexaedro es conjugado del octaedro y viceversa.
- El dodecaedro es conjugado del icosaedro y viceversa.
- El tetraedro es conjugado de sí mismo.

La ilustración 6 refleja la conjugación de poliedros, haciendo coincidir los centros de las caras de los poliedros con los vértices de su conjugado.

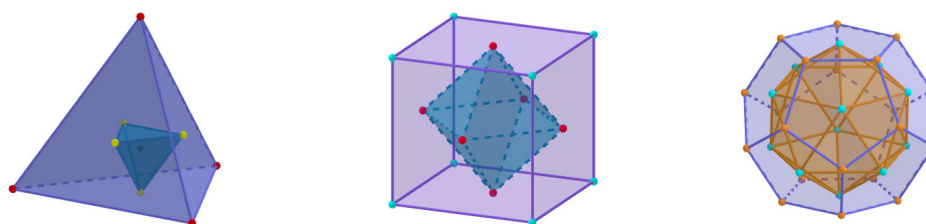


Ilustración 6: conjugación de poliedros. Fuente: Arranz, J.M. (2016)

4.5.5. Construcción de los sólidos platónicos

Todos los sólidos platónicos se componen de polígonos regulares. A través de la disposición en un plano de los polígonos regulares con los cuales se forma un poliedro regular, podemos encontrar distintas combinaciones que dan lugar a la formación del sólido platónico.

Existen diversos ejemplos que ilustran la formación de un poliedro regular. En la ilustración 7 se muestra un posible desarrollo de cada uno.

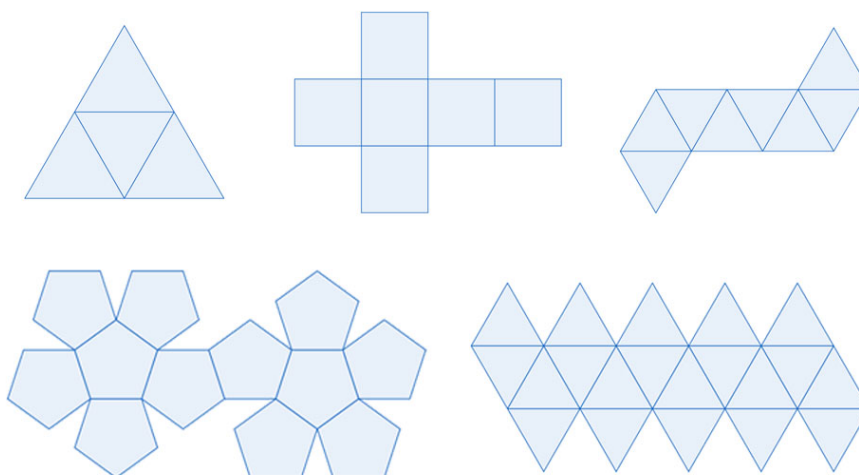


Ilustración 7: Construcción de los sólidos platónicos. Fuente: elaboración propia

4.5.6. Teorema del centro

Teorema 3: Dado un poliedro regular convexo, existe un punto O que equidista de todas las caras, de todos los vértices y de todas las aristas de dicho poliedro.

Demostración:

Supongamos dos caras contiguas A y B de un poliedro regular P, siendo AB su arista común. Consideremos un plano α perpendicular a ambas caras que pasa por el punto medio M de la arista AB. Si tenemos en cuenta los centros de ambas caras C_a y C_b así como por las mediatrices MC_a y MC_b de la arista AB, tenemos que:

$$C_a, C_b, MC_a, MC_b \in \alpha$$

Las perpendiculares a las caras A y B pasan por los centros C_a y C_b , con intersección en un punto O. Al trazar un nuevo segmento OM, obtenemos dos triángulos rectángulos OC_aM y OC_bM iguales, ya que $MC_a = MC_b$ y $OM = OM$. Por tanto,

$$OC_a = OC_b \angle OMC_a = \angle OMC_b$$

En un poliedro regular, todos los pares de caras contiguas tienen el mismo ángulo entre sí. Por lo tanto, la igualdad $OC_a = OC_b$ es cierta para todo el poliedro.

Siendo $d(O, C)$ la distancia entre el punto O y las caras del poliedro P, $d(O, A)$ la distancia entre el punto O y las aristas de P y $d(O, V)$ la distancia entre punto O y los vértices de P,

$$\exists O / d(O, C) \text{cte. } \forall C \in P$$

$$\exists O / d(O, A) \text{cte. } \forall A \in P$$

$$\exists O / d(O, V) \text{cte. } \forall V \in P$$

Definición 15: Llamamos Centro del poliedro regular al punto O obtenido en el teorema del centro.

4.6. Sólidos arquimedianos y poliedros de Catalan

4.6.1. Definición de sólidos arquimedianos

Definición 16: Un sólido arquimediano es una figura tridimensional tal que todas sus caras son polígonos regulares, siendo éstos de lado igual pero de especies distintas, con todos sus vértices iguales pero no regulares, y en todos sus vértices confluye el mismo número de aristas.

Definición 17: En geometría, un truncamiento es un corte producido sobre un polígono, generando así un nuevo lado en dicho polígono, o bien sobre un poliedro, generando así una nueva cara en dicho poliedro.

Los sólidos arquimedianos pueden obtenerse a través del truncamiento de los sólidos platónicos. Existen dos formas de trincar un poliedro regular convexo para obtener como resultado un sólido arquimediano (Guillén Soler, 1991):

- Truncamiento tipo 1: Realizar un corte por planos que pasan por el punto medio de las aristas que concurren en un vértice.
- Truncamiento tipo 2: Realizar un corte a la distancia adecuada para que surja un nuevo polígono regular con el doble de lados que el polígono de partida.

La ilustración 8 muestra un ejemplo de estos dos truncamientos.

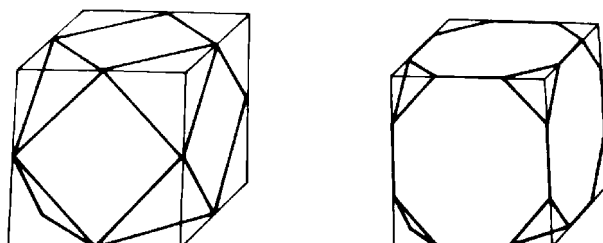


Ilustración 8: truncamientos de tipo 1 y tipo 2. Fuente: Guillén Soler, pág. 115.

4.6.2. Tipos de sólidos arquimedianos

Existen trece tipos de sólidos arquimedianos. Podemos clasificarlos en distintos órdenes, en función de las transformaciones requeridas:

- Orden 1: Se obtienen a través del truncamiento de un sólido platónico. Son el tetraedro truncado, el cuboctaedro, el hexaedro truncado, el octaedro truncado, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado.
- Orden 2: se obtienen a través del truncamiento de un sólido platónico de orden 1, además de un desplazamiento radial de las caras para convertir los polígonos irregulares obtenidos en polígonos regulares. Son el rombicuboctaedro menor, el rombicuboctaedro mayor, el rombicododecaedro menor y el rombicododecaedro mayor.
- Orden 3: se obtienen a través de la rotación coordinada de las caras de los sólidos menores de orden 2, y la posterior transformación de algunas caras en triángulos equiláteros. Son el hexaedro romo y el dodecaedro romo.

La tabla número 6 muestra el origen y transformación necesarios para la obtención de los trece sólidos arquimedianos.

Tipo de transformación	Poliedro origen	Transformación adicional	Sólido arquimediano obtenido
Truncamiento tipo 1	Hexaedro / Octaedro	No	Cuboctaedro
	Dodecaedro / Icosaedro		Icosidodecaedro
Truncamiento tipo 2	Tetraedro		Tetraedro truncado
	Hexaedro		Hexaedro truncado
	Octaedro		Octaedro truncado

	Dodecaedro		Dodecaedro truncado
	Icosaedro		Icosaedro truncado
Truncamiento tipo 1	Cuboctaedro	Desplazamiento radial de caras	Rombicuboctaedro menor
Truncamiento tipo 2	Cuboctaedro		Rombicuboctaedro mayor
Truncamiento tipo 1	Icosidodecaedro		Rombicosidodecaedro menor
Truncamiento tipo 2	Icosidodecaedro		Rombicosidodecaedro mayor
Sin truncamiento	Rombicuboctaedro menor	Rotación coordinada de cuadrados y triángulos, conversión de los cuadrados que los conectan en las aristas en 2 triángulos equiláteros	Cubo romo
	Rombicosidodecaedro menor	Rotación coordinada de pentágonos y triángulos, conversión de los cuadrados que los conectan en las aristas en 2 triángulos equiláteros	Dodecaedro romo

Tabla 6: clasificación de los sólidos arquimedianos según origen y transformaciones. Elaboración propia

La tabla número 7 recopila el número y tipo de caras, aristas y vértices de los trece sólidos arquimedianos, siendo C_n el número de caras de n lados de cada polígono, A el número de aristas, V el número de vértices, y O el orden de los vértices.

Poliedro	C_n	A	V	O
Cuboctaedro	8 C_3 6 C_4	24	12	4
Icosidodecaedro	20 C_3 12 C_5	60	30	4
Tetraedro truncado	4 C_3 4 C_6	18	12	3
Hexaedro truncado	8 C_3 6 C_8	36	24	3
Octaedro truncado	6 C_4 8 C_6	36	24	3
Dodecaedro truncado	20 C_4 12 C_{10}	90	60	3
Icosaedro truncado	12 C_5 20 C_6	90	60	3
Rombicuboctaedro menor	8 C_3 18 C_4	48	24	4
Rombicuboctaedro mayor	12 C_4 8 C_6 6 C_8	72	48	3
Rombicosidodecaedro menor	20 C_3 30 C_4 12 C_5	120	60	4
Rombicosidodecaedro mayor	30 C_4 20 C_6 12 C_{10}	180	120	3
Cubo romo	32 C_3 6 C_4	60	24	5
Dodecaedro romo	80 C_3 12 C_5	150	60	5

Tabla 7: Lados, aristas y vértices de los sólidos arquimedianos. Fuente: Weisstein. Elaboración propia

La ilustración 9 muestra un ejemplo de representación de los 13 sólidos arquimedianos.

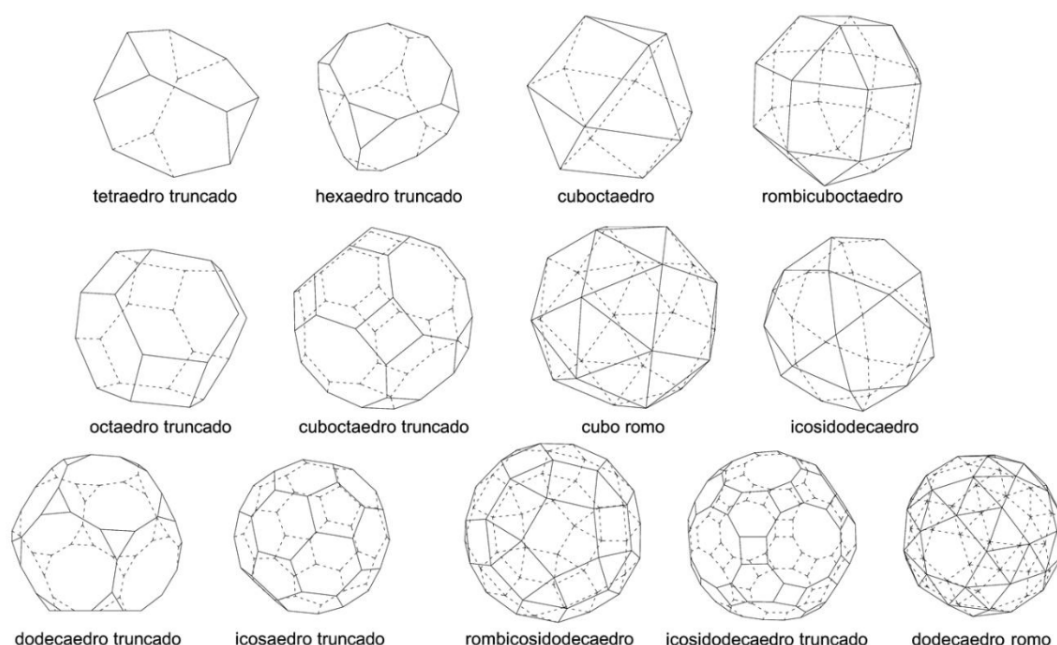


Ilustración 9: Sólidos arquimedianos. Fuente: Mallo

Al igual que sucede con los sólidos platónicos, a través de la disposición en un plano de los polígonos regulares con los cuales se forma un poliedro semirregular, podemos encontrar distintas combinaciones que dan lugar a la formación del sólido arquimediano. La ilustración 10 muestra un ejemplo de su desarrollo.

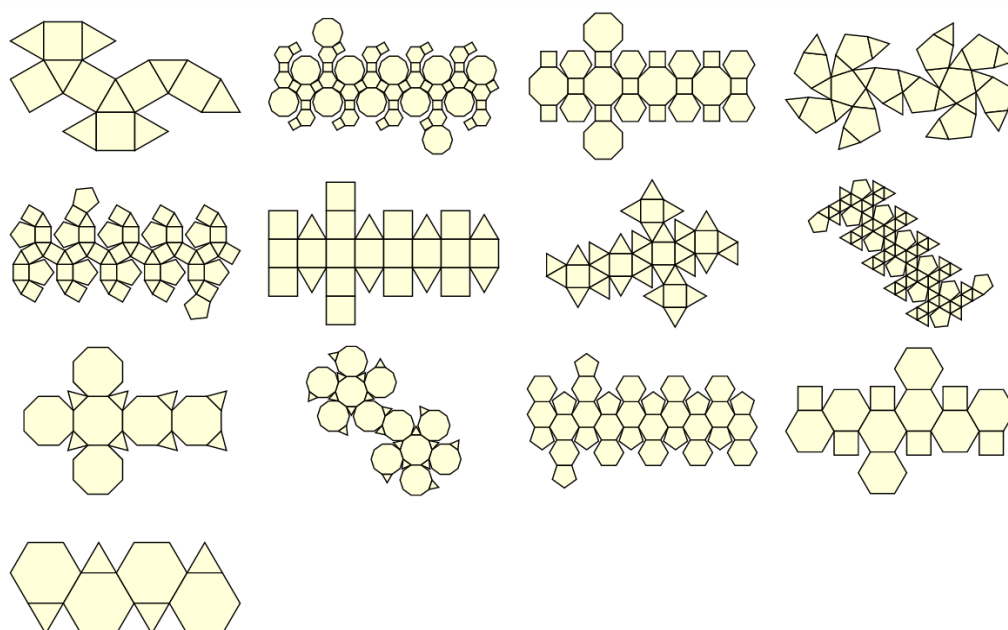


Ilustración 10: Desarrollo de los sólidos arquimedianos. Fuente: Weisstein

4.6.3. Poliedros de Catalan

Los poliedros de Catalan son otra familia de cuerpos geométricos de características singulares. Denominados así por el matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894)

Definición 17: Un poliedro de Catalan es un poliedro que presenta conjugación, dualidad o reciprocidad con un sólido arquimediano. Debido a esta reciprocidad, los poliedros de Catalan tienen caras iguales entre sí pero no regulares, y vértices de distinto orden.

La tabla número 8 relaciona cada uno de los poliedros de Catalan con su conjugado, además de numerar sus caras, aristas y vértices.

Sólido de Catalan	Conjugado	Caras	A	V
Rombododecaedro	Cuboctaedro	12 rombos	14	24
Triacontraedro rómbico	Icosidodecaedro	30 rombos	32	60
Triaquistetraedro	Tetraedro truncado	12 triángulos isósceles	18	8
Triaquisoctaedro	Hexaedro truncado	24 triángulos isósceles	36	14
Tetraquishexaedro	Octaedro truncado	24 triángulos isósceles	24	36
Triaquisicosaedro	Dodecaedro truncado	60 triángulos isósceles	90	32
Pentaquisdodecaedro	Icosaedro truncado	60 triángulos isósceles	90	32
Icositetraedro deltoidal	Rombicuboctaedro menor	24 deltoides	48	32
Hexaquisoctaedro	Rombicuboctaedro mayor	48 triángulos escalenos	72	26
Hexecontaedro deltoidal	Rombicosidodecaedro menor	60 deltoides	120	62
Hexaquisicosaedro	Rombicosidodecaedro mayor	120 triángulos escalenos	180	62
Icositetraedro pentagonal	Cubo romo	24 pentágonos no regulares	60	3
Hexecontaedro pentagonal	Dodecaedro romo	60 pentágonos no regulares	150	92

Tabla 8: Poliedros de Catalan. Fuente: Da Silva, pág. 39. Elaboración propia

La ilustración número 11 muestra un ejemplo de representación de los trece sólidos de Catalan.

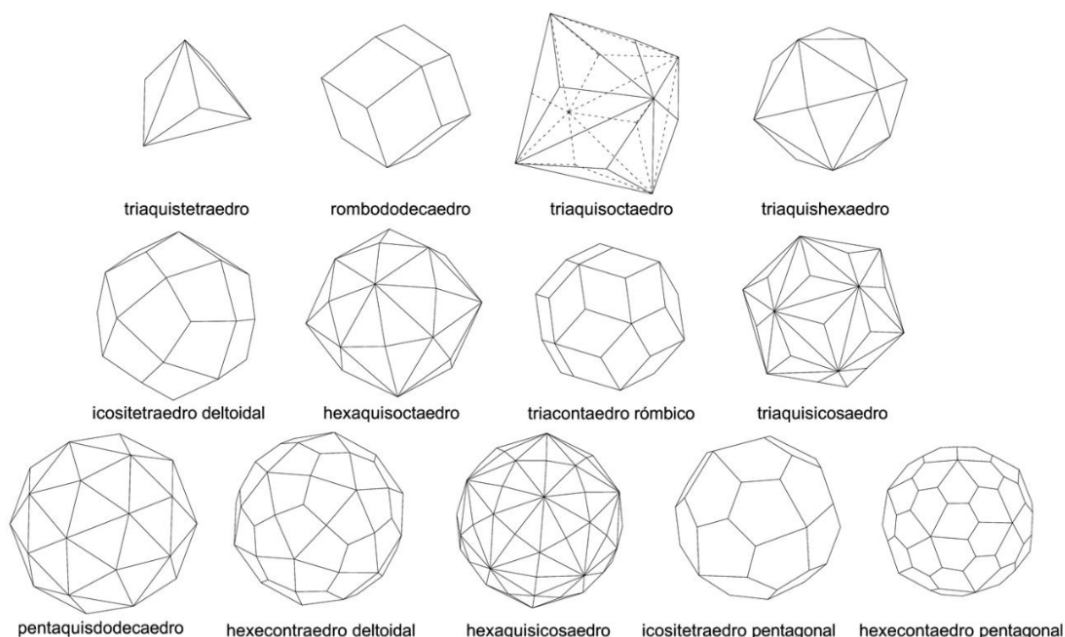


Ilustración 11: Sólidos de Catalan. Fuente: Mallo

4.7. Conclusiones

El interés de las estructuras poliedrales ha sido estudiado debido a su utilidad para comprender la estructura de la materia y de la naturaleza través de la modelización (Patiño y Arbeláez, 2009). Las transformaciones y herramientas de variación resultan en nuevas configuraciones y sistemas geométricos.

El desarrollo histórico del concepto de tecnología se ha visto también fuertemente influido por los cambios físicos, químicos y bioclimáticos, pero la condición más reveladora radica en los cambios en la génesis de las estructuras (Patiño y Arbeláez, 2009). La interpretación, abstracción y reinterpretación de las estructuras naturales encuentra en la modelización geométrica una herramienta fundamental para comprender el desarrollo tecnológico humano. Veremos varios ejemplos de esto en el apartado 6.2 del presente trabajo.

5. Fundamentación didáctica: investigaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje relativas a los poliedros

La didáctica de las matemáticas, es decir, la forma de enseñar las matemáticas y el modo en el que los discentes las aprenden, es un campo con un amplio margen de investigación y de mejora. En el presente apartado estudiaremos cómo los estudiantes aprenden, interpretan e interiorizan la materia relacionada con este trabajo: los poliedros. Prestar atención a las concepciones erróneas, los errores más comunes y las malinterpretaciones más extendidas será fundamental para poder mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y ayudarles a alcanzar una comprensión mayor de la materia. Para ello, es necesario apoyarse en investigaciones previas para tratar de alcanzar conclusiones útiles.

En el presente punto estudiaremos de forma general cuáles son los principales obstáculos del alumnado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, usando como referencia diversas investigaciones. Posteriormente, nos centraremos en tres investigaciones relativas al tema concreto del trabajo, es decir, la geometría y los poliedros.

Los estudios consultados para el desarrollo del segundo punto son los siguientes:

- Barrantes, M., López, M., Fernández, M.A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 9(2), 107-127.
- Guillén Soler, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.
- Rojas, C., Sierra, T. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 41–63.

El artículo de Barrantes et al. (2015) ha sido escogido debido a su interés temático. Los libros de texto son un recurso muy presente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto para el docente como para el alumno, y es necesario estudiar si su contenido puede generar dificultades en dicho proceso. El artículo de Guillén Soler (2000) resulta interesante por su enfoque hacia las ideas erróneas relativas a los sólidos tridimensionales, además de por la amplia trayectoria de investigación de la autora en el campo de los poliedros. En cuanto al artículo de Rojas y Sierra (2021), interesa su enfoque, que presta atención al contexto educativo y su influencia sobre la modelización espacio-geométrica.

Dado que los tres artículos, a pesar de girar en torno al mismo concepto, analizan tres perspectivas totalmente separadas, estudiaremos la fundamentación didáctica en tres apartados diferenciados tras analizar la situación general.

5.1. Dificultades generales de enseñanza y aprendizaje

En su investigación, Martínez Padrón (2005) concluyó que las concepciones y creencias que tienen los estudiantes respecto a la matemática, su aprendizaje, su enseñanza y su evaluación dependen en gran medida de los mensajes que reciben de los docentes. También afirmó que muchos estudiantes poseen creencias, emociones y actitudes hacia la Matemática que no favorecen su aprendizaje. Asimismo, asegura que el aprendizaje puede verse influenciado por el contexto y el entorno inmediato, con presencia de factores del dominio afectivo que determinan los comportamientos y acciones manifestados durante el desarrollo de las lecciones.

En la misma línea, de nuevo Martínez Padrón (2008) puntualizaba que el éxito o el fracaso en el aprendizaje de las matemáticas tiene más de un responsable, y que en el caso del discente, suele atribuirse a la configuración cognitiva, pero también a las creencias, emociones o sentimientos, pues éstas condicionan sus reacciones evaluativas y sus predisposiciones a actuar.

A este respecto, Ruiz Socarras (2008) señalaba que, en la práctica, el profesor no siempre desarrolla un proceso de enseñanza-aprendizaje en el que el estudiante pueda apreciar el contenido matemático como un todo en el que las diferentes partes se interconectan, viendo las diferentes asignaturas de forma fragmentaria, sin conexión, propiciando así una falsa imagen de lo que es el contenido matemático.

Las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas son una posible causa de la pérdida de interés en las carreras profesionales fundamentadas en ellas. El descenso de matriculaciones en grados como Ingeniería y Arquitectura, consecuencia posible de esta pérdida de interés, llevó a DigitalES et al. (2019) a intentar identificar las causas. El estudio realizado detectó que la percepción de los alumnos sobre las matemáticas cambia en la etapa de Educación Secundaria, y aunque en una encuesta dirigida a alumnos de ESO, Bachillerato y FP un 81% afirmaba que le gustan las matemáticas, el 54% aseguraba que le costaba entender los problemas.

La comprensión de la materia es fundamental para el aprendizaje. Por esto, a la hora de que los discentes asimilen correctamente los conceptos matemáticos, Arcavi (1994) proponía un análisis a posteriori de los problemas resueltos, lo cual puede ser de ayuda para monitorizar el uso de automatismos. Es común que los alumnos expongan distintas aproximaciones al problema, y la inspección de estas aproximaciones suele ser útil para establecer conexiones entre los acercamientos simbólicos y otro tipo de acercamientos.

5.2. Posibles dificultades surgidas de los libros de texto

Las reflexiones previas al análisis de Barrantes et al. (2015:108) afirman que la característica más importante e inseparable de la Geometría es su componente visual, por lo que es inconcebible un proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría sin el uso de representaciones gráficas. Consideran también que, con respecto al aprendizaje de un concepto, su introducción debe apoyarse en un repertorio amplio y variado de

material gráfico, ya que un repertorio limitado puede conllevar a formaciones erróneas de conceptos relacionados con el objeto geométrico.

En este sentido, se considera que los libros de texto pueden incluir representaciones no suficientemente variadas, en las que aparecen estereotipos o patrones repetidos, induciendo a la atribución de propiedades inexistentes y a la formación de conceptos erróneos. (Gutiérrez y Jaime, 1996). Aluden a una posible falta de dominio de los sistemas de representación por parte del alumno, que puede conllevar a un mal entendimiento en lo referente al paso del espacio al plano.

Tomando como muestra varios libros de texto de Educación Secundaria, Barrantes et al. (2015:113) establecen cinco categorías de análisis para los libros de texto, asignando a cada una un código:

- Presentación de las figuras y conceptos geométricos (PFC): Las representaciones de cuerpos geométricos es, de media, menor que la de elementos geométricos, figuras, áreas y perímetros, con apenas una representación para la mayoría de los cuerpos (2015:119)
- Representación plana de figuras tridimensionales (RFT): En dichas representaciones, predominan las perspectivas axonométricas. Destaca el uso de la perspectiva isométrica para prismas y pirámides de base no cuadrangular, y la perspectiva dimétrica para los cuerpos de revolución (2015:119-120).
- Distractores de orientación (DO): se definen como propiedades visuales incluidas en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto. El número de figuras representadas de forma estereotipada siempre es superior al de no estereotipadas, tanto en la exposición teórica como en los ejercicios prácticos (2015:120). La ilustración número 12 muestra los distractores de orientación considerados.

Código	Subcategoría	Figuras	
		<i>Estereotipos</i>	<i>No estereotipos</i>
DO-alh	Ángulos apoyados sobre un lado horizontal		
DO-rpp	Rectas paralelas y perpendiculares que son horizontales y verticales		
DO-tra	Triángulos rectángulos apoyados sobre los catetos		
DO-rav	Rombos apoyados sobre un vértice		
DO-tap	Trapecios apoyados en uno de los lados paralelos		
DO-sab	Sólidos apoyados sobre la base		
DO-pal	Polígonos apoyados sobre un lado horizontal		

Ilustración 12: Distractores de orientación. Fuente: Barrantes et al.

- Distractores de estructuración (DE): se definen como representaciones de un concepto en las que, sin intencionalidad, se excluyen algunas propiedades y elementos. En este caso, se observa de nuevo un predominio de estereotipos en la parte teórica, pero también una reducción significativa de los mismos en la parte práctica (2015:121). La ilustración 13 muestra los distractores de estructuración considerados.

Código	Subcategoría	Figuras	
		Estereotipos	No estereotipos
DE-til	Triángulos isósceles con los lados iguales mayores que el desigual		
DE-amc	Alturas y mediatrices que se cortan en un punto interior		
DE-uav	Triángulos con una única altura vertical		
DE-fpc	Figuras planas convexas		
DE-amb	Sólidos con la altura mayor que el ancho de la base		

Ilustración 13: Distractores de estructuración. Fuente: Barrantes et al.

- Imágenes reales de figuras y conceptos geométricos (IRC): Los resultados varían en función del libro de texto consultado. En general, las representaciones reales son escasas, pero adecuadas en la mayoría de los casos a los conceptos relacionados.

En conclusión, los conceptos geométricos se introducen en los libros de texto utilizando pocas representaciones, siendo la mayoría de ellas estereotipadas. Se trata, según Barrantes et al. (123), de deficiencias que pueden derivar en dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje si no se complementan con otros recursos que las contrarresten. Sugieren diversas actuaciones: Utilizar representaciones variadas, con distintas disposiciones y distintas situaciones, exponiendo casos particulares.

- Realizar actividades manipulativas orientadas a la exposición de situaciones con posiciones y propiedades no estandarizadas.
- Actividades con software informático, proporcionando un entorno idóneo para explorar orientaciones, propiedades de objetos y situaciones geométricas.
- Exponer y realizar actividades con imágenes, fotografías y vídeos sobre elementos geométricos en la realidad, poniendo atención a la adecuación de los mismos como sustitutos de los cuerpos abstractos.
- Dedicar parte del tiempo a la introducción de sistemas de representación de figuras tridimensionales, ayudando así a desarrollar la visión espacial.

5.3. Ideas erróneas en el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos

El estudio llevado a cabo por Guillén Soler (2000) toma como punto de partida la relación entre el concepto y el objeto mental como idea que una persona tiene respecto de un concepto, efectuada por Freudenthal (1983). A través de ella, reflexiona sobre los razonamientos utilizados para relacionar los contenidos geométricos. Además, presta atención a los distractores de orientación y los distractores de estructuración (Vinner y Hershkowitz, 1983), ya analizados en el apartado 5.2, y las ideas erróneas de los alumnos (Hershkowitz, 1990).

El estudio de los conceptos de los estudiantes se basó en las respuestas de estudiantes de magisterio a determinadas actividades, las observaciones y discusiones de clase, sesiones de trabajo realizadas con estudiantes de magisterio y de 6º de primaria, las respuestas de los estudiantes de magisterio a cuestiones planteadas después de experimentar una unidad de enseñanza, y las entrevistas individuales a estudiantes de magisterio (2000:38). Los objetos a estudiar fueron prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides (2000:36).

En la investigación se observaron distintos resultados (2000:44-46)

- Los ejemplos que más peso tienen en el objeto mental son, por norma general, los que tienen la lista de atributos más larga. Esto es, prismas rectos de base regular, antiprismas y pirámides de cara regular.
- Para algunas familias de sólidos, algunos ejemplos correctos del objeto mental no se incluyen como tales, y se incluyen como ejemplos otros que no lo son. Por ejemplo, se incluyen el cilindro y el cono como poliedro, los modelos con caras cuadriláteros no paralelogramos se incluyen como prisma y el octaedro no se incluye como antiprisma.
- Las representaciones físicas de un sólido pueden condicionar la identificación del mismo como ejemplo o no-ejemplo de una familia. Por ejemplo, se nombra el vaso como ejemplo de cilindro, o el armazón de un sólido no se identifica como un poliedro.
- La familiaridad que se tenga con los objetos presentados, la esbeltez o achatamiento de los modelos y la posición, ejemplos provenientes de la enseñanza recibida, influyen en la identificación de los sólidos.
- Algunas ideas erróneas provienen de distractores visuales. Por ejemplo, se identifica la base de una pirámide como cara de una bipirámide, o se dificulta la identificación cuando el modelo se apoya sobre un vértice o sobre una arista.
- Algunas ideas erróneas se ocasionan por problemas de lenguaje, por basar los juicios en subfamilias, por la extensión de una propiedad de una familia a otra, o de elementos del plano a elementos del espacio, por la aplicación incorrecta de relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento, por incompreensión de las expresiones “como mucho, como mínimo”, por incompreensión de conceptos implicados en la propiedad, o por el propio proceso de enseñanza.

Las implicaciones de estos resultados para la enseñanza pueden ser tenidas en cuenta a nivel curricular o a nivel práctico para maestros y profesores. Es importante que, en los primeros niveles, los estudiantes vean representaciones físicas de los sólidos y desarrollen actividades procedimentales de construcción y generación de estas representaciones, aprovechando así para trabajar sus propiedades. Representaciones como el armazón deben aparecer más adelante, no en el comienzo del estudio de los sólidos. Conviene prestar atención a las ideas erróneas de cara, arista y vértice, provenientes de las representaciones físicas (2000:49).

Conviene buscar que los estudiantes lleguen a estar libres de las posiciones prototípicas de los sólidos, y por lo tanto, de las ideas erróneas que puedan surgir de ellas, para así generalizar su objeto mental de una determinada familia de sólidos. Los errores de los estudiantes en la selección de ejemplos y no ejemplos tienen un papel primordial en el desarrollo de dicho objeto mental. Conviene también ir precisando las ideas en el contexto de las actividades, con tareas que permitan a los estudiantes experimentar, reflexionar y comprender (2000:50).

5.4. Las restricciones institucionales para la modelización espacio-geométrica en Educación Secundaria

La investigación realizada por Rojas y Sierra (2021) parte de la hipótesis de que la dificultad de los alumnos para el uso de técnicas de modelización matemática en la determinación y construcción de sólidos parten de las dificultades del propio sistema educativo para poner a disposición de los alumnos dichas técnicas, con lo cual no deberían ser consideradas como dificultades del alumno. El problema planteado es la modelización espacio-geométrica como herramienta para enseñar geometría tridimensional.

Los autores identifican, a través de varios estudios previos, que el debilitamiento de la actividad de modelización matemática ha dado como consecuencia varios efectos: la desarticulación entre la geometría 2D y 3D, la rigidez e incompletitud de las organizaciones geométricas escolares, la presentación aislada de las distintas técnicas y el uso casi exclusivo de la aritmética para el cálculo de áreas y volúmenes (2021:44).

La investigación cualitativa basada en el estudio de casos se desglosa en tres aspectos (2021:45):

- Detectar y explicar las restricciones que dificultan y limitan la puesta en práctica de técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcional.
- Diseñar un recorrido de estudio e investigación (REI) para indagar en qué medida su implementación favorece la construcción de dichas técnicas de modelización.
- Valorar hasta qué punto el REI experimentado puede facilitar la superación de las restricciones institucionales, detectar las persistentes y las nuevas que puedan aparecer.

Los autores observaron que el material propuesto en el libro de texto de los alumnos presenta varias restricciones: ausencia casi total de tareas inversas, ausencia de tareas abiertas, falta de cuestionamiento y justificación de técnicas empleadas y resultados obtenidos, planteamiento casi exclusivo de tareas consistentes en cálculos aritméticos, insuficiencia de tareas que provoquen la necesidad de relacionar la geometría 2D y 3D, escasez de tareas que motiven la relación de la geometría con el álgebra y las funciones. En definitiva, ausencia de una problemática de modelización espacio-geométrica (2021:48-49).

El REI implementado incluía tareas consistentes en análisis y descripción de formas de objetos cotidianos y diseño de construcción de envases. Tareas abiertas, en las que no se presentan datos ni técnicas de resolución, e inversas, ya que los datos y las incógnitas habitualmente tratados se invierten. Se abre, por tanto, la puerta al uso de modelos algebraicos y/o funcionales (2021:49). Además de esto, se utilizan softwares como GeoGebra y Tinkercad.

Tras su implementación, el tipo de tareas ha favorecido que los alumnos realicen esbozos de modelos geométricos y algebraicos. Ha seguido habiendo dificultad para su construcción, y el profesor ha debido insistir, animándolos a elaborar sus propias respuestas. Se detectan aún restricciones relacionadas con el funcionamiento institucional que no pueden ser modificadas por profesores ni alumnos, como el tiempo de clase (55 minutos) o el uso de tecnologías. Las tareas abiertas requieren un tiempo mayor (2021:58).

La conclusión alcanzada por los autores es que es necesario y posible crear las condiciones para que la modelización espacio-geométrica tenga un hueco en el currículo de Educación Secundaria. Proponen incidir sobre los modelos didáctico y epistemológico vigentes. En el plano didáctico, proponen que el profesor pase a ser un director del proceso de estudio y que el alumno asuma tareas como plantear cuestiones, elaborar informes, realizar presentaciones y evaluar el trabajo. En el epistemológico, proponen la elaboración de un modelo que parta de tareas abiertas e inversas, planteadas en el espacio sensible y que conduzca a la modelización (2021:59).

5.5. Conclusiones

Las conclusiones extraídas de las diversas investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y el aprendizaje de la geometría deben servir de base para la elaboración de una unidad didáctica que mejore en la medida de lo posible dicho proceso. Conviene acometer esta tarea con espíritu crítico, siendo conscientes de que la implementación exitosa de ciertos modelos de enseñanza dependerá de diversos factores, como los recursos disponibles, la capacidad y disposición del alumnado, y, cómo no, la propia capacidad del profesor para implementar y dirigir los modelos.

El fin último del profesor debe ser en todo momento que el discente desarrolle adecuadamente las competencias indicadas en el currículo escolar, y para ello debe valerse de las herramientas que tenga a su disposición. Debe tener la mente abierta y enriquecerse de todas las fuentes de información que actualmente tenemos a nuestra disposición.

6. Proyección didáctica

6.1. Título

La unidad didáctica que nos disponemos a desarrollar tiene como título “Cuerpos geométricos” y está incluida en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, perteneciente al curso académico de 3º de ESO.

6.2. Justificación

En este apartado, se justifica la necesidad y la utilidad de la elaboración de una unidad didáctica sobre cuerpos geométricos desde varias perspectivas distintas.

6.2.1. Justificación curricular

Como pudimos ver en el apartado 3.1 del presente trabajo, la geometría está presente en el currículo de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, de 3º de ESO. El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, justifica su presencia del siguiente modo:

“Es importante que en el desarrollo del currículo de esta asignatura los conocimientos, las competencias y los valores estén integrados, por lo que los estándares de aprendizaje evaluables se han formulado teniendo en cuenta la imprescindible relación entre dichos elementos. Todo ello justifica que se haya organizado en torno a los siguientes bloques para los cursos de 3º y 4º de ESO, fortaleciendo tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas en contextos reales de los mismos: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, Números y Álgebra, Geometría, Funciones, y Estadística y Probabilidad.”

Por su parte, la Orden del 14 de julio de 2016 de la Junta de Andalucía da un paso más allá, recomendando una estrategia metodológica:

“En el bloque de Geometría, es conveniente conjugar la metodología tradicional con la experimentación a través de la manipulación y con las posibilidades que ofrecen los recursos digitales interactivos para construir, investigar y deducir propiedades. Asimismo, deben establecerse relaciones con otros ámbitos como la naturaleza, el arte, la arquitectura o el diseño, destacando su importancia en la historia y cultura de Andalucía.”

De este modo, podemos deducir que la utilidad de los cuerpos geométricos no se ciñe al ámbito matemático, sino que es una gran herramienta para establecer vínculos con otras áreas de las artes y las ciencias, dando así pie a otras justificaciones de su importancia.

6.2.2. Justificación profesional

Como ya hemos visto en el apartado 6.2.1., la geometría establece relaciones con otros ámbitos, siendo uno de ellos el de la naturaleza. Podemos encontrar diversos minerales con forma de poliedros. El cubo aparece en los cristales de sal común, el tetraedro en los de sodio sulfantimoniato, el octaedro en los de alumbre de cromo, y el

dodecaedro, aunque no del todo regular en los de la pirita (Extremiana et al., 2001). Del mismo modo, a nivel microscópico, podemos detectar formas poliédricas en algunos virus o en las configuraciones de las moléculas. Este último es un caso bastante claro. La modelización geométrica es útil para la representación de composiciones moleculares, véase como ejemplo la ilustración 14.

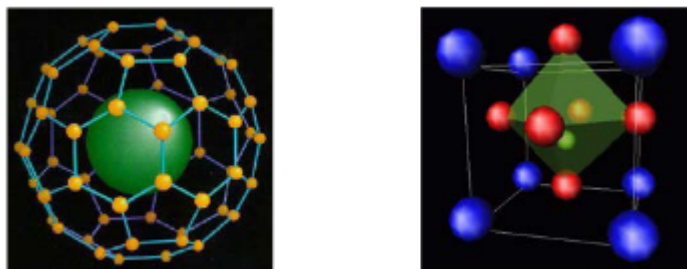


Ilustración 14: Fullerenos C₆₀ y perovskita ABX₃. Fuente: Extremiana et al.

El mundo de la arquitectura está también repleto de ejemplos de formas poliédricas. Podemos hallar ejemplos de esto en la arquitectura clásica, con las pirámides de Giza, o en la época medieval, con la Kaaba de La Meca, perfectamente cúbica. También en la época moderna y posmoderna tenemos ejemplos como la pirámide de cristal del museo Louvre de París, obra del arquitecto Ieoh Ming Pei. Ésta, además, juega con los reflejos en el agua y toma forma de octaedro, como podemos ver en la ilustración 15.



Ilustración 15: La pirámide del Louvre y su reflejo. Fuente: Photosforclass

También podemos hallar ejemplos en nuestro país. Las Torres Kio de Madrid, con forma de prisma oblicuo, se han convertido en una de las imágenes arquitectónicas

más reconocibles de la ciudad, y la sede de Caja Granada (actual Caixabank) en Granada es, por su forma, popularmente conocida como “el cubo”.

En el diseño industrial, los cuerpos geométricos no suelen estar presentes en su forma más pura, ya que los avances tecnológicos, comentados en el punto 4.7 de este trabajo, han permitido una exploración más profunda de la estructura y de la forma, creando elementos más complejos a través de la combinación o modificación de cuerpos geométricos. Sin embargo, siguen siendo una base matemática necesaria para la exploración y el diseño de estos elementos.

Podemos concluir, por lo tanto, que los cuerpos geométricos son una herramienta fundamental para el desarrollo profesional en el área de las ciencias. Su comprensión y conocimiento son una base necesaria tanto en las materias de ingeniería y arquitectura como en las ciencias naturales.

6.2.3. Justificación artística y cultural

Tal y como dijimos en el apartado 6.2.1., los cuerpos geométricos establecen relación con el arte, además de tener presencia en la historia y cultura de Andalucía. La unión de ciencia y belleza, simbolizada en polígonos y poliedros, ha sido una constante en la obra de muchos artistas (Extremiana et al., 2001). El Renacimiento, con las composiciones de Alberto Durero (1471-1528) y los grabados de Leonardo Da Vinci (1452-1519), fue una época muy prolífica en su estudio estético. Uno de los ejemplos más claros es el modelo cósmico de Johannes Kepler (1571-1630), que condensaba la esfera y los cinco sólidos platónicos, como podemos ver en la ilustración 16.

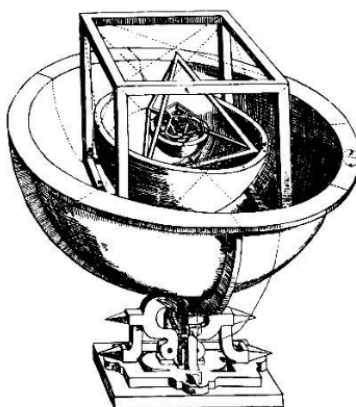


Ilustración 16: Modelo cósmico de Kepler. Fuente: Extremiana et al.

El estudio artístico de los poliedros no es ajeno al arte español. Dos de los artistas más emblemáticos de los siglos XIX y XX, Antoni Gaudí (1852-1926) y Salvador Dalí (1904-1989) los tuvieron presentes en su obra. El primero de ellos utilizó cubos, octaedros y dodecaedros, así como truncamientos de los mismos, en la Sagrada Familia (Fernández, E.P.). El segundo enmarcó su obra “El Sacramento de La Última Cena” (1955) en un dodecaedro. La ilustración 17 muestra un ejemplo de estos trabajos.



Ilustración 17: Trabajos de Gaudí y Dalí. Fuente: Fernández, E.P.

En definitiva, podemos concluir que los trabajos relativos a los cuerpos geométricos han estado presentes en la obra de diversos artistas a lo largo de la Historia, ya sea como objeto expreso de estudio o como herramienta compositiva. Son, por tanto, un objeto matemático digno de interés y atención y repleto de oportunidades, también en el plano artístico y cultural.

6.3. Contextualización del centro y del aula

La información relativa a la contextualización del centro I.E.S. Jándula ha sido obtenida de la página web oficial del centro.

El IES Jándula se encuentra en la localidad de Andújar, provincia de Jaén. Concretamente, en la calle San Vicente de Paúl, número 32. La ilustración 18 muestra su fachada.



Ilustración 18: Fachada del IES Jándula. Fuente: www.iesjandula.es

La oferta educativa del centro incluye los cuatro cursos de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Formación Profesional Básica Dual en Informática y Comunicaciones, Bachillerato de Ciencias y Tecnologías, Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, un Ciclo Formativo de Grado Medio en Conducción de Actividades Físicas y Deportivas en el Medio Natural, un Ciclo Formativo de Grado Superior en Desarrollo de Aplicaciones Multiplataforma y un Ciclo Formativo de Grado Superior Dual en Mecatrónica Industrial.

Además de la oferta formativa, el centro consta de varios planes y proyectos, siendo el más destacado el proyecto Lince, un proyecto de desarrollo de un vehículo

ecológico, formado por profesores y alumnos de la asignatura de Tecnología Industrial de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

La unidad didáctica que vamos a desarrollar está orientada a la clase de 3º de ESO A, que cursa la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Durante el curso 2021/2022 hay un total de 15 estudiantes en esta clase: 9 alumnas y 6 alumnos. Se trata de un grupo heterogéneo, en el que no hay nadie con necesidades específicas diagnosticadas. A priori, todos los miembros del grupo están capacitados para seguir el ritmo de la clase, aunque sus niveles de predisposición varían.

6.4. Objetivos

Los objetivos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria se desarrollan en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, artículo 11. La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Aprender a apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Los objetivos del área de Matemáticas, por su parte, se detallan en la Orden del 14 de Julio de 2016, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Éstos han sido ya estudiados en el apartado 3.1. del presente trabajo. Respecto a los objetivos concretos de la unidad, los confeccionamos basándonos en los criterios de evaluación, objetivos y estándares de aprendizaje vistos hasta el momento.

1. Identificar y distinguir entre sí los principales poliedros y cuerpos de revolución.
2. Conocer, comprender y utilizar con propiedad los conceptos de cara, arista, vértice y generatriz de un cuerpo geométrico.
3. Identificar planos de simetría y ejes de giro en los cuerpos geométricos.
4. Interpretar correctamente los resultados obtenidos tras manipular y modificar un cuerpo geométrico.
5. Identificar y entender el desarrollo plano de los cuerpos geométricos.
6. Comprender y aplicar correctamente los conceptos de superficie y volumen de un cuerpo geométrico.
7. Saber detectar la presencia de los cuerpos geométricos en la naturaleza, el arte y la arquitectura.
8. Entender los conceptos meridiano, paralelo y coordenadas geográficas y saber interpretarlos adecuadamente.
9. Aplicar los conocimientos relacionados con los cuerpos geométricos para dar soluciones a problemas de la vida real, mostrando espíritu crítico y reflexionando sobre si los conocimientos aplicados se adecúan al problema.

10. Utilizar las herramientas TIC de forma responsable, haciéndolas útiles y constructivas para solidificar los conceptos aprendidos.

6.5. Competencias Clave

Las siete competencias clave están reflejadas en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, artículo 2. El objetivo de las mismas es que los alumnos y alumnas logren la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos. La tabla 2 del presente trabajo recoge estas competencias. Por tanto, la unidad didáctica a desarrollar incluye todas las competencias requeridas por la normativa.

La tabla 1 del presente trabajo recoge la relación entre los criterios de evaluación de la unidad a tratar y las competencias clave. Esto es un punto de partida necesario para entender el modo en el que se desarrollarán las diversas competencias, pero no exclusivo. Las competencias clave se trabajarán del siguiente modo a través de la unidad didáctica:

a) Competencia en Comunicación Lingüística (CCL)

- Atendiendo a las explicaciones de los contenidos de la unidad.
- Leyendo textos y enunciados de ejercicios, con el objetivo de entender su significado y extraer la información necesaria para resolverlos.
- Expresando verbalmente una duda, el desarrollo de una actividad o la resolución de un ejercicio.
- Atendiendo a la resolución de un ejercicio por parte del profesor u otro miembro del alumnado.
- Interactuando, opinando y argumentando con otros compañeros, ya sea durante la clase o durante el desarrollo de un trabajo.

b) Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología (CMCT)

- Reconociendo los elementos y propiedades características de los cuerpos geométricos.
- Identificando centros, ejes y planos de simetría de cuerpos geométricos.
- Utilizando los conceptos aprendidos en la unidad para desarrollar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas.
- Asimilando la utilidad de la modelización geométrica como un elemento presente en la realidad cotidiana.

c) Competencia Digital (CD)

- Valiéndose de internet para buscar información necesaria en algunas de las actividades realizadas en la unidad.
- Usando Geogebra para observar y crear representaciones de cuerpos geométricos.
- Utilizando la calculadora para los cálculos de áreas y volúmenes de los cuerpos.

d) Competencia de Aprender a Aprender (CAA)

- Profundizando en las fuentes consultadas para la elaboración de trabajos.
- Descubriendo las relaciones entre los modelos geométricos y los elementos de la realidad.
- Estructurando la información recibida de forma adecuada para facilitar el entendimiento de los conceptos introducidos.

e) Competencias Sociales y Cívicas (CSC)

- Relacionándose con el profesor y los compañeros de forma natural a lo largo de las clases.
- Comunicándose con los compañeros en el desarrollo de las actividades.
- Fomentando el buen clima en el aula a través del diálogo y el respeto.
- Argumentando y expresando su opinión de forma asertiva, respetando al mismo tiempo las opiniones del resto.

f) Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor (SIEP)

- Mostrando voluntad a la hora de resolver situaciones desconocidas.
- Reflexionando sobre los resultados de las actividades realizadas, con el objetivo de mejorarlas.
- Buscando en el entorno cercano situaciones que puedan ser modelizadas mediante el uso de cuerpos geométricos.

g) Conciencia y expresiones culturales (CEC)

- Descubriendo la presencia de los cuerpos geométricos en los elementos de la vida cotidiana.
- Identificando las representaciones artísticas de los cuerpos geométricos en la pintura y la arquitectura.
- Reconociendo las transformaciones de cuerpos geométricos llevadas a cabo en obras pictóricas y arquitectónicas.

6.6. Contenidos

Los contenidos de la unidad didáctica desarrollada se basan en las indicaciones del Real Decreto 1105/2014. Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje han sido presentados en las ilustraciones 1 y 2 del presente trabajo. La tabla 9 muestra la relación entre los contenidos y estándares de aprendizaje presentes en los bloques 1 y 3 y los contenidos de la unidad didáctica.

Contenidos (RD 1105/2014)	Estándares de aprendizaje (RD 1105/2014)	Contenido de la Unidad Didáctica
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.	-Principales poliedros y cuerpos de revolución -Truncamiento. Construcción de sólidos arquimedianos
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones con los datos, contexto del problema).	-Áreas de cuerpos geométricos -Volúmenes de cuerpos geométricos -Ejercicios
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	-Principales poliedros y cuerpos de revolución -Truncamiento. Construcción de sólidos arquimedianos -Ejercicios
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.	-Truncamiento. Construcción de sólidos arquimedianos -Áreas de cuerpos geométricos -Volúmenes de cuerpos geométricos -Ejercicios
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.	-Coordenadas geográficas -Trabajo en grupo -Ejercicios
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.	-Trabajo en grupo -Ejercicios
	8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantearse preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	-Trabajo en grupo -Ejercicios

9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	-Clasificación de poliedros y cuerpos de revolución -Construcción de sólidos arquimedianos -Ejercicios
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.	-Áreas de cuerpos geométricos -Volúmenes de cuerpos geométricos -Ejercicios
	11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	-Principales poliedros y cuerpos de revolución -Ejercicios
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos adecuados para facilitar la interacción.	12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido,...) como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión.	-Trabajo en grupo
	12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.	-Trabajo en grupo
	12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.	-Principales poliedros y cuerpos de revolución -Trabajo en grupo
Bloque 3: Geometría		
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.	-Principales poliedros y cuerpos de revolución -Truncamiento. Construcción de sólidos arquimedianos
	5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.	-Áreas de cuerpos geométricos -Volúmenes de cuerpos geométricos

		-Ejercicios
	5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, el arte y construcciones humanas.	-Planos de simetría y ejes de giro -Trabajo en grupo
6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.	-Coordenadas geográficas

Tabla 9: Estándares de aprendizaje presentes en la unidad didáctica. Fuente: RD 1105/2014. Elaboración propia

6.7. Metodología

La unidad didáctica presente se sirve de varias metodologías. Los dos principales objetivos de estas metodologías son que el proceso de aprendizaje resulte ameno, con el fin de mantener la motivación de los alumnos y alumnas, y también que entiendan adecuadamente los conceptos y sepan identificarlos a simple vista, puedan relacionarlos con su entorno, haciendo que el aprendizaje resulte significativo.

La metodología principal de esta unidad didáctica es la metodología activa. Esta metodología fomenta la implicación del alumno en el desarrollo de la clase, así como su iniciativa. También favorece el intercambio de opiniones y el pensamiento crítico. El papel principal de las clases será de los estudiantes, siendo el profesor principalmente un guía y un facilitador.

La presencia de esta metodología en la unidad didáctica se justifica a través de las sesiones dedicadas a aprender haciendo. Hay conceptos y propiedades que se asimilan mejor si los estudiantes tienen la ocasión de manipular los objetos por sí mismos. Tanto de forma individual como en grupo, la manipulación de objetos, ya sea de forma física o digital, será una parte importante del aprendizaje.

También estará presente la metodología transmisiva, de corte más clásico. Los conceptos y propiedades más teóricos de la unidad necesitan una base teórica antes de comenzar a trabajar con ellos. Aunque esta metodología, en la que el papel de los alumnos y alumnas es más pasivo, resulte más pesada para ellos, es necesario valerse de ella en algunos momentos.

Los conceptos adquiridos a través de la metodología transmisiva se trabajarán posteriormente en actividades realizadas en clase. Esto no sólo posibilitará que los alumnos y alumnas comiencen a desenvolverse con ellos, sino que dará la oportunidad de generar diálogos al respecto en el aula, favoreciendo así la interacción entre los estudiantes y con el profesor.

La metodología colaborativa también estará presente. El trabajo en grupo favorece el enriquecimiento personal y ayuda a conocer otros puntos de vista, por lo que se antoja indispensable. Habrá diversas actividades a realizar en grupo en las que los

alumnos deberán aprender a desenvolverse con los conceptos de la unidad didáctica y profundizar en ellos.

Las metodologías mencionadas hasta el momento encuentran un punto de confluencia en la posibilidad de dialogar entre compañeros y con el profesor. El intercambio de opiniones entre compañeros se hace posible en todas ellas, dando así cabida en la unidad al aprendizaje dialógico. Conversar en igualdad, con tolerancia y respeto es fundamental para el desarrollo social del alumno.

El uso de las herramientas TIC para el aprendizaje también tiene cabida en esta unidad didáctica. En primer lugar, utilizando internet para hacer búsquedas de información, aprendiendo a filtrar los hallazgos y extrayendo la información necesaria para el desarrollo de algunas actividades. De este modo, los estudiantes tendrán la ocasión de reflexionar sobre la responsabilidad digital, utilizando internet de forma responsable y crítica.

El uso de recursos web y aplicaciones es una parte indispensable de esta unidad didáctica. Merece especial mención la aplicación GeoGebra, ya que proporciona un espacio de trabajo con un potencial extraordinario para trabajar los conceptos objeto de esta unidad didáctica. Su uso jugará un papel esencial en la metodología activa, dando a los estudiantes la posibilidad de controlar y manipular los conceptos de forma directa, mejorando la comprensión de los conceptos y ayudando a mantener la motivación del alumnado.

6.8. Actividades y recursos

A lo largo de la unidad didáctica, el profesor desplegará una serie de tareas y recursos, con el objetivo de introducir los distintos conceptos y que los estudiantes practiquen con ellos para afianzarlos. De este modo, lograrán adquirir los contenidos y competencias clave necesarios para una evaluación positiva.

6.8.1. Actividades

En el presente trabajo, se hace una distinción entre actividades y ejercicios. Se nombra como actividades a aquellas tareas y problemas llevados a cabo en el aula, mientras que se nombra como ejercicios a aquellas tareas y problemas encargados para desarrollar en casa. A pesar de esta distinción, habrá algunas actividades y ejercicios que tengan carácter similar. Las distintas tareas pueden dividirse de este modo:

- Tareas de clasificación. Son tareas basadas principalmente en la definición de los distintos cuerpos geométricos y sus características. Su objetivo es que los estudiantes sean capaces de identificar y clasificar tanto los cuerpos geométricos como los elementos que los caracterizan (aristas, caras, vértices, generatrices, planos de simetría, ejes de giro).
- Tareas de experimentación. Son tareas pensadas para que los estudiantes manipulen los distintos cuerpos geométricos, ya sea de forma física o apoyándose en medios digitales. Su objetivo es que los alumnos y alumnas

consigan identificar patrones y situaciones de cambio, además de familiarizarse con las características de los cuerpos geométricos de forma significativa y cercana.

- Tareas de investigación. Estas tareas tienen como principal componente la investigación y el sentido de la iniciativa. Su objetivo es que los alumnos aprendan a trabajar de forma autónoma y con espíritu crítico y emprendedor, marcándose objetivos relacionados con los conceptos matemáticos a estudiar.
- Tareas de cálculo. Son tareas de carácter más numérico, en las que se busca una solución a través de operaciones y fórmulas. Se centrarán sobre todo en los apartados de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, ya que estos apartados giran principalmente en torno a magnitudes.
- Tareas para fomentar el uso de las TIC. El uso adecuado y responsable de las TIC es complementario con el resto de tareas, por lo que se entremezclará con ellas, dando lugar a actividades y ejercicios de carácter mixto.
- Problemas. La aplicación de los conceptos matemáticos a situaciones reales es una parte fundamental. Los problemas tienen como objetivo que los estudiantes consigan establecer una relación profunda entre los conceptos matemáticos estudiados y las situaciones reales que puedan darse.

A continuación, se detallan las actividades desarrolladas en clase a lo largo de la unidad.

Actividad 1. Clasificación de poliedros

La ilustración número 19 muestra una serie de representaciones planas de poliedros. Los alumnos deberán clasificarlos en prismas, pirámides, poliedros regulares y cuerpos que no pertenecen a ninguna de las tres familias. Para ello, se valdrán de la tabla número 10.

Prismas	Pirámides	Poliedros regulares	Otros

Tabla 10: Tabla para clasificar poliedros. Elaboración propia

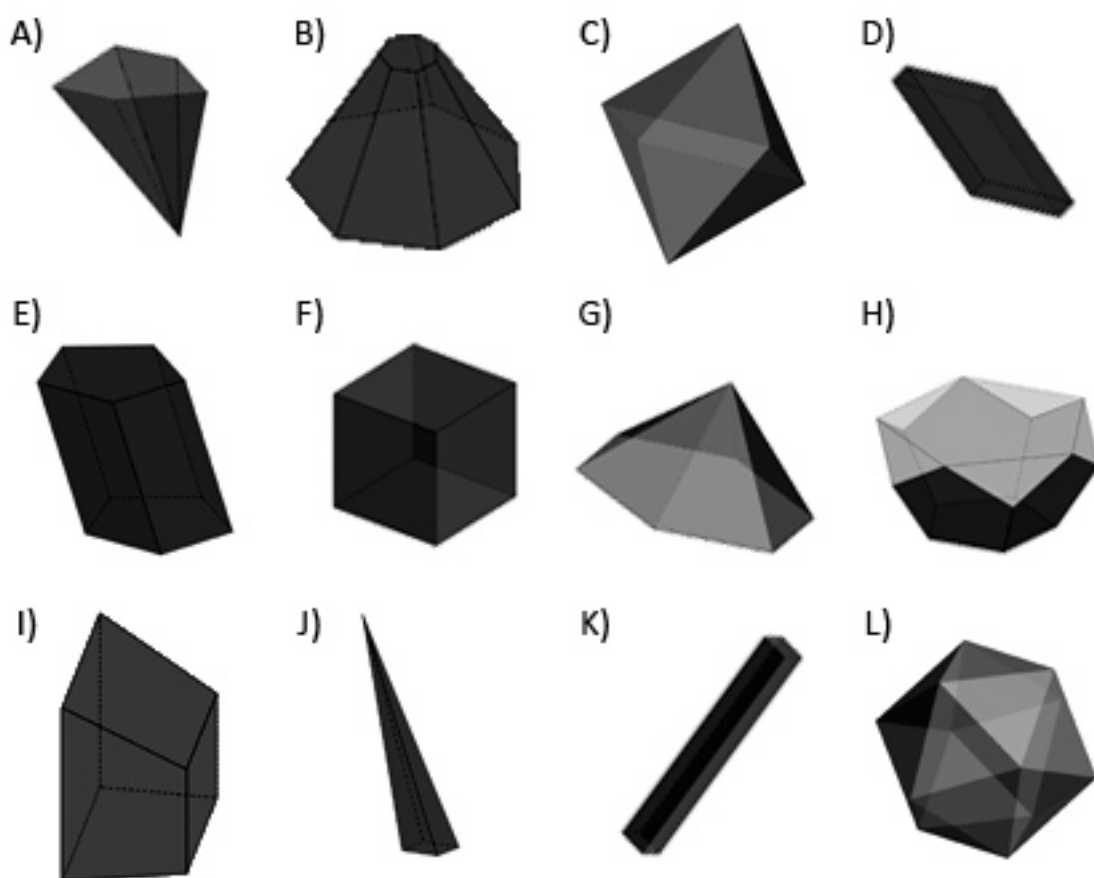


Ilustración 19: Actividad 1. Elaboración propia

Actividad 2. Ejecución de truncamientos

Los estudiantes tendrán que dibujar en su cuaderno dos cubos. A partir de esos dos cubos, deberán efectuar los truncamientos de tipo 1 y tipo 2, con el objetivo de obtener un cuboctaedro y un hexaedro truncado. El objetivo es obtener un resultado similar al de la ilustración 8 del presente trabajo, mostrada en el apartado 4.6.1.

Actividad 3. Clasificación de cuerpos de revolución

La ilustración número 20 muestra una serie de representaciones planas de cuerpos de revolución. Los alumnos deberán clasificarlos en cilindros, conos, esferas y cuerpos que no pertenecen a ninguna de las tres familias. Para ello, se valdrán de la tabla número 11.

Cilindros	Conos	Esferas	Otros

Tabla 11: Tabla para clasificar poliedros. Elaboración propia

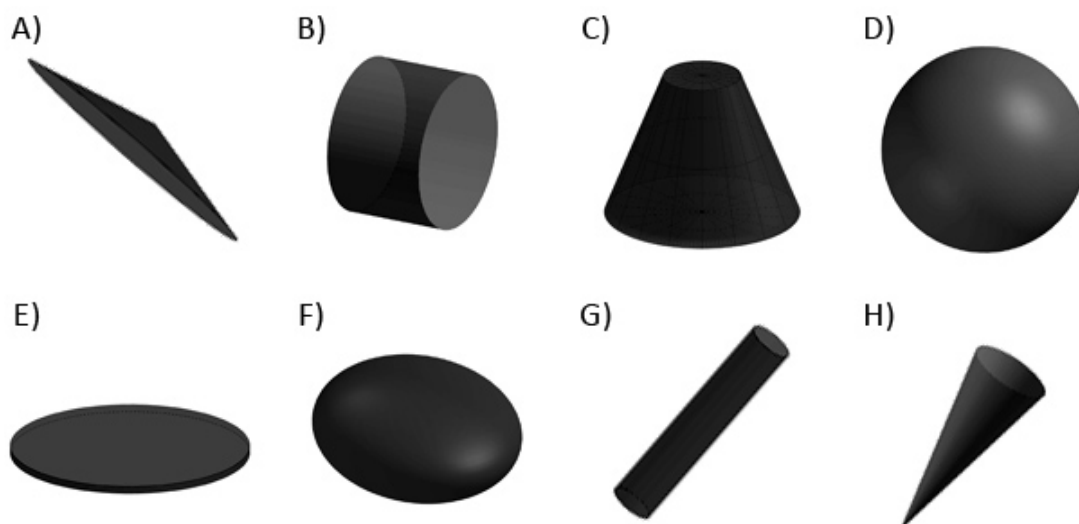


Ilustración 20: Actividad 3. Elaboración propia

Actividad 4. Construcción de cuerpos geométricos

Cada uno de los estudiantes recibirá un recortable de un poliedro o cuerpo de revolución, así como los materiales necesarios para trabajar con él: tijeras y pegamento. El objetivo de la actividad es que el estudiante manipule el recortable y construya el poliedro a través de su desarrollo plano. Los recortables se muestran en el Anexo I, Recortables de la Actividad 4. Una vez finalizada la construcción de los poliedros, los estudiantes mostrarán sus resultados al resto de los compañeros. Posteriormente, se reunirán en grupos de 3, en función del tipo de cuerpo: prismas, pirámides, poliedros regulares, poliedros semirregulares, cuerpos de revolución.

Actividad 5. Desarrollo alternativo de cuerpos geométricos

Tras poner en común los resultados de la actividad 4, los grupos tendrán que intentar dibujar un desarrollo alternativo de uno de los cuerpos construidos por alguno de los miembros del grupo. Podrán seleccionar la opción que consideren.

Actividad 6. Detección de ejes de simetría y giro

Los estudiantes recibirán un archivo de GeoGebra que constará de tres cuerpos geométricos: un tetraedro, un tronco de pirámide y un cono. El objetivo es identificar planos de simetría y ejes de giro en estas 3 figuras. Podrán valerse de GeoGebra o de su cuaderno para dibujar estos planos de simetría y ejes de giro. El archivo de GeoGebra es el recurso web Actividad 6 (ver apartado 6.8.2)

Actividad 7. Cálculo de áreas

Los estudiantes deberán calcular el área de un tetraedro de 6 cm de arista, un cilindro de 5 cm de radio y 4 cm de altura y, como extra, una esfera de 3 cm de radio. En este caso, los cuerpos se presentarán dibujados en la pizarra.

Actividad 8. Cálculo de volúmenes

Los estudiantes deberán calcular el volumen de una pirámide regular de base pentagonal de 5 cm de lado y 4 cm de altura, un prisma recto de base cuadrada de 4 cm de lado y 6 cm de altura y una esfera de 5 cm de radio. En este caso, los cuerpos se presentará dibujado en la pizarra.

Actividad 9. Cálculo de coordenadas geográficas

Cada uno de los estudiantes deberá calcular la diferencia de latitud y longitud entre la localidad de Andújar y la ciudad escogida anteriormente en la sesión. Deberán utilizar los recursos digitales a su disposición para encontrar la información relativa.

6.8.2. Recursos

El profesor contará con diversos recursos a su disposición para presentar los contenidos de la unidad didáctica. La tabla número 12 tiene como objetivo recoger estos recursos de forma resumida.

Tipo	Recursos
Impresos	-Libro de texto: <i>Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. 3º ESO</i>. Editorial Anaya. -Actividades externas al libro, proporcionadas al alumnado.
Físicos	-Representaciones físicas de cuerpos geométricos. -Desarrollos planos de cuerpos geométricos. -Tijeras y pegamento. -Globo terráqueo. -Pizarra.
Tecnológicos	-Calculadora científica. -Ordenadores.
Digitales	-Proyector, para poder visualizar los recursos web. -Navegador web. -Software de elaboración de presentaciones (PowerPoint, Prezi, Canva, etc.) -GeoGebra.
Web	-Presentación de prismas rectos -Presentación de prismas oblicuos -Presentación de pirámides -Presentación de poliedros regulares -Presentación de cilindros -Presentación de conos -Presentación de esferas -Planos de simetría del cubo -Ejes de giro del cubo -Actividad 6

Tabla 12: Recursos de la unidad didáctica. Elaboración propia

6.9. Atención a la diversidad

Para que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea satisfactorio para todas las partes, es importante que el docente sea capaz de adaptar su programación en la necesidad de lo necesario y posible en función de las necesidades de cada alumno o alumna. Esto es especialmente importante cuando se trata de estudiantes que presentan necesidades específicas de apoyo educativo, sean del tipo que sean, ya que hay que intentar que estos estudiantes también alcancen los estándares de aprendizaje mínimos.

La primera toma de contacto con la unidad es una buena oportunidad para sondear el nivel de cada miembro de la clase y estudiar la necesidad de adaptaciones curriculares, pero no es la única. El desarrollo de cada sesión, así como la evaluación continua, puede ayudar a poner de manifiesto avances o dificultades de carácter significativo, con lo que las actividades y ejercicios pueden adaptarse al progreso diario del estudiante. En el caso de esta unidad didáctica, el mayor esfuerzo de adaptación se llevará a cabo a través de los ejercicios y las actividades.

Es importante también tener en cuenta el expediente previo de cada estudiante. Además de necesidades específicas diagnosticadas, puede haber alumnos que hayan repetido curso o que hayan llegado al presente curso con algunos criterios de evaluación sin alcanzar. En ese caso, la planificación sería totalmente individualizada, a través de actividades específicas de refuerzo y repaso suministradas por el profesor o por el departamento de matemáticas, especialmente en lo relativo a polígonos y áreas.

La actividad 4 de la presente unidad, titulada Construcción de Cuerpos Geométricos, no tendrá un reparto aleatorio de las tareas. A través de la información recogida en las tres primeras sesiones de la unidad, se tratará de proporcionar los cuerpos más sencillos, los poliedros regulares, a los estudiantes que más dificultades hayan presentado, y en caso de haberlos, a los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Del mismo modo, se tratará de proporcionar los cuerpos más complejos, los sólidos arquimedianos, a los alumnos y alumnas que más avance hayan mostrado, y en caso de haberlos, a los estudiantes con altas capacidades.

Las actividades 8 y 9 presentan tres figuras cada una. A los alumnos con dificultades de aprendizaje sólo se les exigirá la primera figura. La tercera figura se presentará en ambos casos como actividad extra, y se destinará a los alumnos más avanzados en la tarea y a aquellos con altas capacidades. El diseño de los ejercicios será análogo. En el Anexo I, algunos de los ejercicios introducirán anotaciones de carácter Básico y Extra. Los estudiantes con dificultades tendrán que realizar únicamente los apartados de tipo Básico; los apartados Extra se les presentarán en todo momento como ejercicios para subir nota, pero los estudiantes con altas capacidades deberán realizarlos.

En cuanto al Trabajo en Grupo, la primera sesión servirá también para determinar la formación de los grupos y el trabajo que desarrollan. El encargado de formar los grupos será el profesor, con el objetivo de establecer unos equipos heterogéneos y lo más óptimos posibles. En caso de haber estudiantes con dificultades, se les aconsejará

sobre cómo empezar la búsqueda de información, para que puedan tenerla encaminada desde un primer momento.

En definitiva, el objetivo de estas adaptaciones es tratar de motivar tanto al alumnado con dificultades como al alumnado aventajado. En el primer caso, darle facilidades para que no se quede atrás y llegue hasta donde sus capacidades le permitan, y en el segundo caso, proporcionarle material adicional para que avance en la medida de su propio potencial y así desarrollarlo al máximo.

6.10. Temporalización

La unidad didáctica relativa a los cuerpos geométricos ocupará un total de 11 sesiones. La tabla número 13 resume su estructura, indicando el contenido de cada sesión.

N.º sesión	Contenido de la sesión
1	Principales poliedros
2	Truncamiento. Poliedros semirregulares
3	Principales superficies de revolución
4	Desarrollo plano de cuerpos geométricos
5	Planos de simetría y ejes de giro
6	Áreas de cuerpos geométricos
7	Volúmenes de cuerpos geométricos
8	Coordenadas geográficas
9	Trabajos en grupo
10	Sesión de repaso
11	Evaluación

Tabla 13: Estructura de la unidad didáctica. Elaboración propia

Cabe recordar, como se mencionó en el apartado 6.8.1., que en el presente trabajo se establece una distinción entre actividades y ejercicios. Denominamos como actividades a las tareas y problemas que se desarrollan en el aula, y como ejercicios, a las tareas y problemas que se encargan para desarrollar en casa.

A continuación, desarrollaremos al detalle cada una de las sesiones de las que consta la unidad didáctica.

Sesión 1: Principales poliedros

Competencias clave: CCL, CMCT, CD, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.3, 1.9., 1.11, 3.5

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.3.1, 1.9.1, 1.11.4, 3.5.1

Objetivos: 1, 2, 10

Desarrollo:

- Preguntamos a los estudiantes si recuerdan lo que es un polígono. Efectuamos un repaso previo de los polígonos más característicos, combinando las respuestas de los propios alumnos con las explicaciones adicionales que sean necesarias. (10 minutos)
- Introducimos el concepto de poliedro. Dibujando un poliedro cualquiera en la pizarra, nos detenemos en sus principales elementos: caras, aristas y vértices. Introducimos la fórmula de Euler, que relaciona los tres elementos. (5 minutos)
- Presentamos los principales poliedros: prismas, pirámides y poliedros regulares, incidiendo en las propiedades que los definen. Para la presentación, nos valemos de objetos físicos reales, que irán pasando por las manos de los alumnos para que tengan la ocasión de mirarlos desde todos los ángulos posibles. Complementamos con la visualización de distintos modelos de estos poliedros en Geogebra. Nos ayudamos de los recursos web Presentación de prismas rectos, Presentación de prismas oblicuos, Presentación de pirámides, Presentación de poliedros regulares (ver tabla 12). (15 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 1 (ver apartado 6.8.1). (20 minutos)
- Organizamos la tarea en grupos de la unidad didáctica. (10 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar los ejercicios 1 y 2 (Ver Anexo I, Ejercicios 1 y 2).

Tarea en grupos de la unidad didáctica

Dado que la clase consta de 15 estudiantes, propondremos la formación de 5 grupos de 3 personas cada uno. Cada uno de esos grupos tendrá como tarea desarrollar un trabajo diferente:

Grupo 1: ¿Qué es la dualidad entre poliedros? ¿Cómo afecta a los sólidos platónicos?

Grupo 2: ¿Qué formas geométricas planas surgen si seccionamos cilindros, conos y esferas?

Grupo 3: Los cuerpos geométricos en la naturaleza

Grupo 4: Los cuerpos geométricos en el arte

Grupo 5: Los cuerpos geométricos en la arquitectura

Sesión 2: Truncamiento. Poliedros semirregulares

Competencias clave: CCL, CMCT, CD, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.3, 1.9, 3.5

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.3.1, 1.9.1, 3.5.1

Objetivos: 1, 2, 4

Desarrollo:

- Corregimos los ejercicios 1 y 2 en clase, debatiendo los resultados. (10 minutos)
- Introducimos el concepto de truncamiento de sólidos. Establecemos la diferenciación entre el truncamiento de tipo 1 y el truncamiento de tipo 2. (10 minutos)
- Introducimos el concepto de poliedros semirregulares, deteniéndonos en las propiedades de sus caras, aristas y vértices. (5 minutos)
- Presentamos los sólidos arquimedianos. Nos detenemos especialmente en los siete primeros y mencionamos la existencia de los seis últimos, más complejos (ver tablas 6 y 7). (15 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 2 (ver apartado 6.8.1). (20 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar los ejercicios 3, 4 y 5 (Ver Anexo I, Ejercicios 3, 4 y 5).

Sesión 3: Principales cuerpos de revolución

Competencias clave: CCL, CMCT, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.3, 1.9., 1.11, 3.5

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.3.1, 1.9.1, 1.11.4, 3.5.1

Objetivos: 1, 2, 10

Desarrollo:

- Introducimos los ejercicios 3, 4 y 5 en clase, debatiendo los resultados. (10 minutos)
- Presentamos los principales cuerpos de revolución: cilindro, cono y esfera. Nos detenemos en el proceso de generación de esos cuerpos y en el concepto de generatriz, e incidimos en las propiedades que los definen. Para la presentación, nos valemos de objetos físicos reales, que irán pasando por las manos de los alumnos para que tengan la ocasión de mirarlos desde todos los ángulos posibles. Complementamos esta presentación con la visualización de distintos modelos de estos cuerpos en Geogebra. Nos ayudamos de los recursos

web Presentación de cilindros, Presentación de Conos, Presentación de esferas (ver tabla 12). (20 minutos)

- Presentamos los cuerpos surgidos tras seccionar un cuerpo de revolución: troncos de cono, semiesferas, casquetes esféricos. (5 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 3 (ver apartado 6.8.1). (25 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar los ejercicios 6 y 7 (Ver Anexo I, Ejercicios 6 y 7).

Sesión 4: Desarrollo plano de cuerpos geométricos

Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEP

Criterios de evaluación: 1.1, 1.8, 1.9, 3.5

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.8.1, 1.8.4, 1.9.1, 3.5.1

Objetivos: 1, 2, 5

Desarrollo:

- Corregimos los ejercicios 6 y 7 en clase, debatiendo los resultados. (10 minutos)
- Introducimos el concepto de desarrollo plano de los cuerpos geométricos. Para ello, nos valemos de un cubo construido físicamente mediante cartulina, desplegándolo para mostrar su desarrollo. (10 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 4 (ver apartado 6.8.1). (10 minutos)
- Los alumnos y alumnas mostrarán sus resultados al resto de los compañeros. Posteriormente, se reunirán en grupos, en función del tipo de cuerpo que les haya tocado. (5 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 5 (ver apartado 6.8.1). (15 minutos)
- Los estudiantes compartirán sus resultados en la pizarra. (10 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar el ejercicio 8 (Ver Anexo I, Ejercicio 8).

Sesión 5: Planos de simetría y ejes de giro

Competencias clave: CCL, CMCT, CD, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.11, 1.12, 3.5,

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.11.4, 1.12.3, 3.5.3

Objetivos: 2, 3, 10

Desarrollo:

- Corregimos el ejercicio 8 en clase, debatiendo el resultado. (10 minutos)
- Introducimos el concepto de planos de simetría. Comenzamos dibujando un ejemplo en la pizarra, valiéndonos de un prisma recto y un cilindro. Nos apoyamos de los recursos web Planos de simetría del cubo y Ejes de giro del cubo (ver tabla 12). (15 minutos)
- Introducimos el concepto de ejes de giro y orden de ejes de giro. Utilizamos para ello un poliedro físico, girándolo sobre sí mismo para explicar el concepto en profundidad. Nos apoyamos en el ejemplo del cubo de Geogebra, señalando sus ejes.(15 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 6 (ver apartado 6.8.1). (10 minutos)
- Los estudiantes compartirán sus resultados. (10 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar el ejercicio 9 (Ver Anexo I, Ejercicio 9).

Sesión 6: Áreas de cuerpos geométricos

Competencias clave: CCL, CMCT, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.5, 1.11, 3.5,

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.2.1, 1.11.1, 3.5.2

Objetivos: 1, 2, 5, 6

Desarrollo:

- Corregimos el ejercicio 9 en clase, debatiendo el resultado. (10 minutos)
- Hacemos un breve repaso del concepto de área de un polígono o figura plana. (5 minutos)
- Introducimos el concepto de área o superficie de un cuerpo geométrico. Nos valemos de un cubo físico, acompañado de su desarrollo plano, para explicar el área de los poliedros. (10 minutos)
- Presentamos y explicamos las fórmulas necesarias para calcular el área de las distintas superficies de revolución, valiéndonos de su desarrollo plano para apoyar la explicación. Posteriormente, añadimos las fórmulas para el cálculo del área de troncos de cono y casquetes esféricos. (10 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 7 (ver apartado 6.8.1). (10 minutos)
- Los estudiantes compartirán sus resultados en la pizarra. (10 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar el ejercicio 10 (Ver Anexo I, Ejercicio 10).

Sesión 7: Volúmenes de cuerpos geométricos

Competencias clave: CCL, CMCT, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.5, 1.11, 3.5,

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.2.1, 1.11.1, 3.5.2

Objetivos: 1, 2, 5, 6

Desarrollo:

- Corregimos el ejercicio 10 en clase, debatiendo el resultado. (10 minutos)
- Introducimos el concepto de volumen, diferenciándolo del concepto de área. Utilizamos para ello, como ejemplo ilustrativo, un brik de zumo o de leche. (10 minutos)
- Presentamos las fórmulas necesarias para el cálculo de un prisma, una pirámide, un cilindro, un cono y una esfera. (15 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 8 (ver apartado 6.8.1). (15 minutos)
- Los estudiantes compartirán sus resultados en la pizarra. (10 minutos)

Tarea para la siguiente sesión

Para la siguiente sesión, los alumnos y alumnas tendrán que desarrollar los ejercicios 11 y 12 (Ver Anexo I, Ejercicios 11 y 12).

Sesión 8: Coordenadas geográficas

Competencias clave: CCL, CMCT, CD, CAA

Criterios de evaluación: 1.1, 1.6, 1.12, 3.6

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.6.2, 1.12.3, 3.6.1

Objetivos: 8, 9, 10

Desarrollo:

- Corregimos los ejercicios 11 y 12 en clase, debatiendo el resultado. (10 minutos)
- Solicitamos a los estudiantes que escojan un país del mundo que les guste, excepto los más cercanos a España (Andorra, Marruecos, Argelia, Portugal, Francia, Italia). Una vez escogido, les pedimos que busquen su capital. Podrán valerse de la tecnología para ello. (10 minutos)

- Presentamos los conceptos de meridiano, paralelo y huso horario. Nos valemos para ello de un globo terráqueo físico y de una representación interactiva de la Tierra. Explicamos la forma de determinar latitudes y longitudes. (15 minutos)
- Llevamos a cabo la actividad 9 (ver apartado 6.8.1). (10 minutos)
- Los estudiantes presentarán sus soluciones en la pizarra. (15 minutos)

Tarea para la sesión de repaso

La siguiente sesión es la sesión de presentación de los trabajos en grupo, por lo que no habrá ejercicios programados para ella. Los estudiantes deberán desarrollar los ejercicios 13 a 22, y su corrección queda programada para la sesión de repaso. (Ver Anexo I, Ejercicios 13 a 22).

Sesión 9: Exposición de trabajos en grupo

Competencias clave: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, CEC, SIEP

Criterios de evaluación: 1.1, 1.5, 1.6, 1.8, 1.12, 3.5

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.5.1, 1.6.2, 1.8.1, 1.8.4, 1.12.1, 1.12.2, 1.12.3, 3.5.3

Objetivos: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10.

Desarrollo:

- Los 5 grupos formados en la sesión 1 presentan los 5 trabajos en grupo ante el profesor y el resto de la clase, valiéndose de medios tecnológicos o de la pizarra si es necesario. Cada grupo tendrá 8 minutos para realizar su exposición. Tras cada exposición, habrá tiempo para dudas y preguntas. (60 minutos)

Sesión 10: Sesión de repaso

Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP

Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8, 3.5, 3.6

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.2.1, 1.5.1, 1.6.2, 1.8.1, 1.8.4, 3.5.1, 3.4.1, 3.6.1

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Desarrollo:

- Corregimos los ejercicios 13 a 22 en clase, debatiendo el resultado. (40-45 minutos)
- Dedicamos el resto de la sesión a resolución de dudas y preguntas, repasando los conceptos con los que los estudiantes encuentren más dificultades. (15-20 minutos)

Sesión 11: Evaluación de la unidad

Competencias clave: CCL, CMCT, SIEP

Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8, 3.5, 3.6

Estándares de aprendizaje: 1.1.1, 1.2.1, 1.5.1, 1.6.2, 1.8.1, 1.8.4, 3.5.1, 3.4.1, 3.6.1

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Desarrollo:

- Presentamos una prueba escrita, de carácter individual, con el objetivo de valorar si los alumnos han adquirido los conceptos de forma adecuada, alcanzando así los objetivos de la unidad. (1 hora)

6.11. Evaluación

La evaluación del progreso y los aprendizajes adquiridos por los estudiantes es algo que se realiza de forma continua a lo largo de la unidad didáctica. Para poder realizar esta evaluación de forma justa y equitativa, tanto el Real Decreto 1105/24, de 26 de diciembre, como la Orden de 14 de julio de 2016, proporcionan una serie de criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Los criterios relativos a esta unidad ya han sido especificados en el apartado 6.6 del presente trabajo, y su implicación en el desarrollo de cada una de las sesiones de la unidad se ha especificado en el apartado 6.10.

Con los criterios ya establecidos, es importante detenerse en las herramientas que dispone el profesor para evaluar dichos criterios. La tabla número 14 muestra la ponderación de cada una de las herramientas dispuestas a lo largo de la unidad, con el objetivo de calificar a los estudiantes.

Herramienta de evaluación	Ponderación	Rúbrica
Trabajo y actitud	25%	1
Intervenciones en clase	15%	2
Trabajos en grupo	20%	3
Prueba escrita	40%	4

Tabla 14: Ponderación de las herramientas de evaluación. Elaboración propia

Para evaluar cada una de estas herramientas de evaluación, el profesor dispone de rúbricas individualizadas. Cada alumno tendrá asociada una rúbrica de su trabajo y actitud, una rúbrica de sus intervenciones en clase, una rúbrica de su desempeño en los trabajos en grupo y una rúbrica para la prueba escrita.

El artículo 18 de la Orden de 14 de julio de 2016 recoge, además, los procedimientos, técnicas e instrumentos de evaluación. En éste, se especifica que los resultados de la evaluación de cada materia se extenderán en la correspondiente acta de evaluación, en el expediente académico del alumno o alumna y en el historial

académico y se expresarán mediante una calificación numérica, en una escala de uno a diez, sin emplear decimales, que irá acompañada de los siguientes términos: Insuficiente (IN), Suficiente (SU), Bien (BI), notable (NT), Sobresaliente (SB), aplicándose las siguientes correspondencias: Insuficiente: 1, 2, 3 o 4. Suficiente: 5. Bien: 6. notable: 7 u 8. Sobresaliente: 9 o 10. Se considerarán calificación negativa los resultados inferiores a 5. Aunque esto hace referencia a las actas de evaluación, por comodidad, se calificará la unidad con este mismo sistema para facilitar el proceso de evaluación.

Las tablas 15, 16, 17 y 18 muestran las rúbricas de la unidad didáctica.

Rúbrica 1. Trabajo y actitud			
	Autonomía y confianza	Creatividad	Gestión emocional
Excelente (9-10)	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.
Bueno (7-8)	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades de manera habitual.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.
Adecuado (5-6)	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades con alguna ayuda.	Utiliza alguna estrategia creativa en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.
Mejorable (1-4)	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	Utiliza alguna estrategia de manera orientada y propone alguna iniciativa creativa con ayuda.	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones, no permitiéndole resolver sus situaciones y problemas.
Ponderación	15%	10%	20%
Valoración			
	Respeto y responsabilidad	Corrección	Conclusión del trabajo
Excelente (9-10)	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.
Bueno (7-8)	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados.
Adecuado (5-6)	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.
Mejorable (1-4)	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.
Ponderación	20%	10%	25%
Valoración			
VALORACIÓN FINAL:			

Tabla 15: Rúbrica de trabajo y actitud

Rúbrica 2. Intervenciones en clase				
	Pronunciación y entonación	Volumen y contacto visual	Contenido	Cuestiones formales
Excelente (9-10)	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	Demuestra un completo dominio del tema trata-do, destacando clara-mente los aspectos im-portantes, exponiéndolo de manera clara y correcta, y utilizando un vocabulario específico del mismo, respondiend-do adecuadamente a las preguntas del grupo.	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo adecuado.
Bueno (7-8)	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo, respon-diendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo aproximado.
Adecuado (5-6)	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes y algunas oyentes del grupo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo, no siendo certero en las respues-tas a las preguntas del grupo.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo establecido.
Mejorable (1-4)	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse al tiempo y manifestar interés y control emocional.
Ponderación	15%	10%	55%	20%
Valoración				
VALORACIÓN FINAL:				

Tabla 16: Rúbrica de intervenciones en clase

Rúbrica 3. Trabajos en grupo			
	Planificación	Responsabilidad	Participación
Excelente (9-10)	Realiza un uso adecuado de los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, valorando especialmente el esfuerzo individual y colectivo.	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.
Bueno (7-8)	Usa los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.
Adecuado (5-6)	Usa los materiales y los recursos disponibles con cierta dificultad para ajustarse al plazo previsto.	Comprende y asume sus responsabilidades, con alguna dificultad para valorar el esfuerzo individual y colectivo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.
Mejorable (1-4)	Usa los materiales y los recursos disponibles con dificultad y sin ajustarse al plazo previsto.	Elude sus responsabilidades y tiene dificultades para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.
Ponderación			
Valoración			
	Habilidades sociales		Generación y presentación del producto
Excelente (9-10)	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen a la cohesión .		Contribuye de manera activa a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.
Bueno (7-8)	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.		Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.
Adecuado (5-6)	Interacciona manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.		Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con alguna dificultad para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.
Mejorable (1-4)	Interacciona con dificultades, necesitando ayuda para mantener actitudes respetuosas.		Contribuye algo a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con dificultades para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.
Ponderación			
Valoración			
VALORACIÓN FINAL:			

Tabla 17: Rúbrica de trabajos en grupo

Rúbrica 4. Prueba escrita				
	Presentación	Ortografía	Vocabulario	Contenido
Excelente (9-10)	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	El texto está escrito correctamente.	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa por escrito de forma coherente.
Bueno (7-8)	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque palabras específicas del tema.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa por escrito de forma coherente.
Adecuado (5-6)	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa por escrito con algún error.
Mejorable (1-4)	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su edad.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa por escrito con diversos errores.
Ponderación	20%	10%	5%	65%
Valoración				
VALORACIÓN FINAL:				

Tabla 18: Rúbrica de prueba escrita

7. Conclusiones

La elaboración de este Trabajo de Fin de Máster ha tenido como meta afianzar todos los objetivos fijados en el apartado 2 del mismo, y supone la culminación de un proceso de adquisición y afianzamiento de los conocimientos adquiridos a lo largo del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Lo aprendido en las distintas asignaturas que componen el Máster se aúna en el presente trabajo, estableciendo los fundamentos necesarios para forjar un buen perfil profesional como docente y convertirse en un profesor que cumpla con su labor de manera satisfactoria. Es necesario aunar una buena base matemática, una buena capacidad de transmisión de los conocimientos, habilidad para gestionar grupos y aptitudes para adaptar las planificaciones a las necesidades reales de cada grupo y de cada clase. En el desarrollo de esta unidad didáctica, se ha tratado de tener en cuenta estos cuatro aspectos.

La base conceptual de la unidad se ha trabajado a través de la elaboración de la fundamentación epistemológica; el conocimiento profundo de los cuerpos geométricos es esencial para exponer sus características, su funcionamiento y sus propiedades, y permite la elaboración de recursos de aprendizaje precisos y constructivos.

La transmisión de conocimientos ha tenido como fundamento inicial el estudio de investigaciones didácticas, permitiendo así adquirir una consciencia de dónde se suelen encontrar las mayores dificultades para los estudiantes, dónde se originan y cómo buscar formas de evitarlas. Esta base ha sido fundamental para la búsqueda y preparación del material didáctico.

La habilidad para gestionar grupos tiene un punto inicial en de la programación de actividades en clase y trabajos en grupo. El trabajo en clase, además de los trabajos grupales, permiten el desarrollo de un aprendizaje cooperativo y colaborativo, en el que los estudiantes tienen oportunidad de interacción entre iguales, una parte fundamental del desarrollo de la personalidad en la etapa adolescente, y una fuente de motivación para abordar las tareas requeridas.

La adaptación de la planificación comienza por la previsión de medidas de atención a la diversidad, necesarias para que cualquier estudiante, independientemente de las ventajas y dificultades que presente, pueda completar su aprendizaje. A pesar de ello, conviene que el profesor tenga muy claro que toda esa estructura y toda esa preparación puede requerir de adaptaciones diferentes, en función de las necesidades generales del grupo de estudiantes. Para ello, hay que mostrar espíritu crítico con el trabajo elaborado, mentalidad abierta, flexibilidad y capacidad de adaptación, ya que el aprendizaje del alumno debe primar por encima de la rigidez de las programaciones elaboradas previamente.

El contenido de la unidad didáctica ha intentado aunar la posibilidad de trabajar de forma colaborativa con el trabajo individual, pero el principal esfuerzo ha recaído sobre la adquisición adecuada de los conceptos geométricos. Las representaciones de figuras tridimensionales, tal y como demuestran las investigaciones estudiadas en el presente trabajo, necesitan variedad para que los alumnos comprendan en profundidad sus propiedades. Es por esto que se ha tratado de proporcionar todo el material gráfico posible, tanto a través de actividades como con los recursos digitales. Es necesario afianzar los conceptos básicos para introducirse de forma satisfactoria en los cálculos relativos a la geometría espacial.

La variedad de recursos tiene, además, el objetivo de que la motivación y el interés de los estudiantes se mantengan a un nivel alto. Conseguir captar su atención a través de actividades y tareas variadas puede desembocar en un aumento de su interés por la materia de las matemáticas, ayudándoles a cambiar su perspectiva y sus concepciones previas y motivándoles así a planificar un futuro profesional en el que las ciencias, tan importantes y necesarias en el avance de la sociedad, jueguen un papel determinante.

8. Referencias bibliográficas

- Alsina, C. (2010). *Las mil caras de la belleza geométrica*. RBA Coleccionables.
- Asociación Anele (2020). *El libro educativo en España. Curso 2020-2021*. Consultado en <https://www.editoresmadrid.org/wp-content/uploads/2020/09/Informe-El-libro-educativo-en-Espa%C3%B1a-2020-2021-ANELE.pdf>
- Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. *For the learning of mathematics*, 14, 24-35.
- Arranz, J.M. (2016). *Poliedros regulares*. Material interactivo elaborado en GeoGebra. Consultado en [Dualidad de poliedros regulares – GeoGebra](#)
- Asociación DigitalES, Fundación Transforma España, HP, SM (2019). *El desafío de las vocaciones STEM*. Consultado en <https://www.digitales.es/wp-content/uploads/2019/09/Informe-EL-DESAFIO-DE-LAS-VOCACIONES-STEM-DIGITAL-AF-1.pdf>
- Barrantes, M., López, M., Fernández, M.A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 9(2), 107-127.
- Borrás, E., & Carvajal, J. (2006). A propósito de los prismas y antiprismas. *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, 2(2), 6.
- Björner, A., & Kalai, G. (1988). An extended Euler-Poincaré theorem. *Acta Mathematica*, 161, 279-303.
- Da Silva, E.M. (2018). *Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o Sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Extremera, J.I., Hernández, L.J., Rivas, M.T. (2001). *Poliedros*. Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja.
- Fernández, E. P. De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: Historia de un poliedro.
- Freudenthal (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Grünbaum, B. (1977). Regular polyhedra—old and new. *Aequationes Math*, (16), 1-20.
- Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Editorial Síntesis.
- Guillén Soler, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.
- Hernando Cuadrado, L. A., & Pacios Álvarez, M. Á. (1982). El teorema de Euler a partir de la teoría de grafos. *Revista de bachillerato*.
- Lanza González, M. H. (2015). Matemática y física en el Tímeo de Platón. Poliedros regulares y elementos naturales. *Praxis Filosófica*, (40), 85–112.

- Lima, E. L. (1985). O teorema de Euler sobre poliedros. *Revista matemática universitária*, 2.
- Mallo, M. (2013). *Un viaje por geometrías encontradas, descubiertas, redescubiertas o reinterpretadas*. Ponencia leída en las Jornadas Científicas Arquitectura, Educación y Sociedad. International Workshop. Barcelona, 29-30-31 de mayo de 2013.
- Marshall, D. (1977). Carved stone balls. *Proceedings of the Society of Antiquaries of Scotland*, (108), 40-72.
- Martínez, N., & Götte, M. (2010). Exploración, Construcción y Clasificación de Poliedros.
- Martínez Padrón, O. J. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma*, (2), 7-34.
- Martínez Padrón, O. J. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 9 (1), 237-255.
- Muñoz, J. L. F. (1994). *Poliedros regulares*. Universidad Politécnica de Valencia, Servicio de Publicaciones.
- Muñoz, P., Pereyra, N. (2005). *Poliedros semirregulares*. Laboratorio de Morfología SICyT – FADU – UBA.
- Oti Velasco, J. (2011). *Posibilidad de obtención de distintas equiparticiones y compactaciones del espacio con poliedros convexos cuyas caras no son polígonos regulares*. Universidad de Cantabria.
- Patiño, E., Arbelaez, E. (2009). *Generación y transformación de la forma. Morfología, geometría, naturaleza (biomimética) y experimentación*. Universidad Pontificia Bolivariana.
- Pereyra, Á. (2019). La regularidad de los poliedros en la mirada moderna. *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, (17), 43-55.
- Rojas, C., Sierra, T. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 41–63.
- Ruiz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana De Educación*, 47(3), 1-8.
- Universidad de Córdoba. Desarrollo de cuerpos geométricos. Recursos matemáticos. Consultado en <http://www.uco.es/~ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos/DESARROLLO-DE-CUERPOS-GEOMETRICOS.pdf>
- Weisstein, Eric W. *Archimedean Solid*. Consultado en MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html>

9. Referencias normativas

Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, del 4 de junio, BOE núm. 226 (1993)

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación por el proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA núm. 144 (2016)

Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

ANEXO I

ÍNDICE

A. Ejercicios.....	1
B. Evaluación de la unidad: prueba escrita.....	10
C. Recortables de la Actividad 4.....	12

A. Ejercicios

A continuación, se detallan los ejercicios planificados para la presente unidad didáctica. Algunos de ellos han sido extraídos de los libros de texto de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso de 3º de ESO de las editoriales Anaya y Santillana. Otros son de elaboración propia. Se detalla la procedencia de cada ejercicio en la siguiente tabla.

Editorial Anaya	Editorial Santillana	Elaboración propia
1-5, 9, 12, 16-18, 21	7, 10-11, 13-15, 19, 22	6, 8, 20

Sesión 1: Principales poliedros

Ejercicio 1

Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro, con el número de caras, vértices y aristas de los siguientes poliedros regulares.

	TETRAEDRO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
CARAS				
VÉRTICES				
ARISTAS				

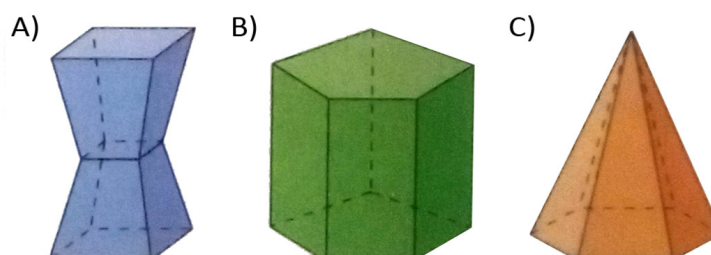
Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 216, Ejercicio 1.

BÁSICO: Realiza únicamente tetraedro y octaedro.

EXTRA: Determina cuántas caras, vértices y aristas tienen un prisma hexagonal y una pirámide pentagonal.

Ejercicio 2

Comprueba la fórmula de Euler en los siguientes poliedros:



Fuente: Libro de texto editorial Anaya, pág. 217, Ejercicio 6.

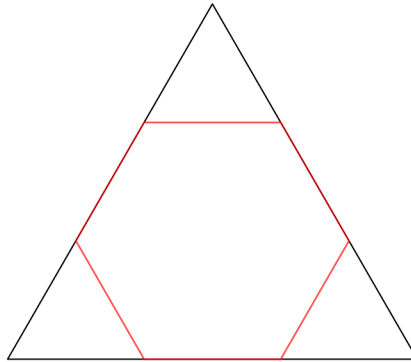
BÁSICO: Comprueba únicamente los apartados B) y C).

EXTRA: Comprueba también en el octaedro y en el icosaedro.

Sesión 2: Truncamiento. Poliedros semirregulares

Ejercicio 3

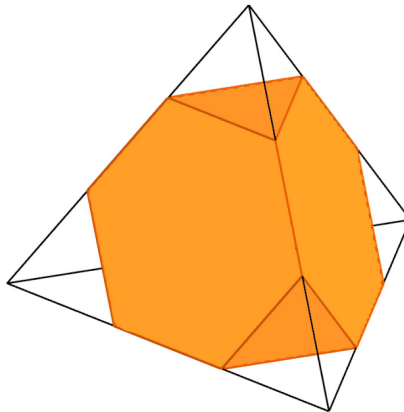
¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?



Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 219, Ejercicio 2.

Ejercicio 4

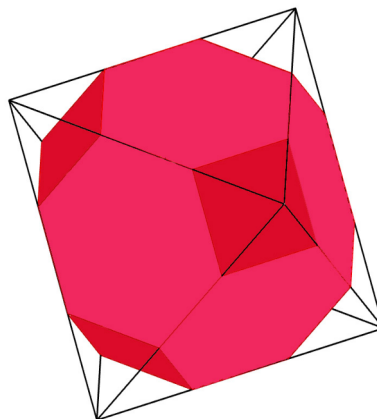
Describe el tetraedro truncado. ¿Cuántas caras tiene? ¿Cuántas son de cada tipo? ¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas? ¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado en relación a la del tetraedro original?



Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 219, Ejercicio 3.

Ejercicio 5

Describe el octaedro truncado. Indica el número de caras, aristas y vértices, y comprueba que es un poliedro semirregular y que cumple la fórmula de Euler.



Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 219, Ejercicio 4.

BÁSICO: Realizar únicamente los ejercicios 3 y 4 de esta sesión.

EXTRA: Repetir el ejercicio 4 con el dodecaedro truncado.

Sesión 3: Principales cuerpos de revolución

Ejercicio 6

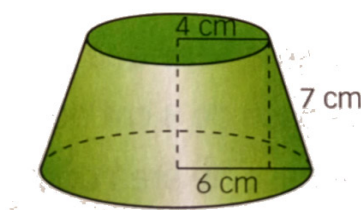
Dibuja en tu cuaderno los cilindros y conos vistos en clase e identifica correctamente sus radios y generatrices.

BÁSICO: Identifica los radios y generatrices de los cuerpos geométricos B y H vistos en clase.

EXTRA: Identifica correctamente la generatriz de una esfera.

Ejercicio 7

Obtén la altura del tronco de cono que ves en la figura.

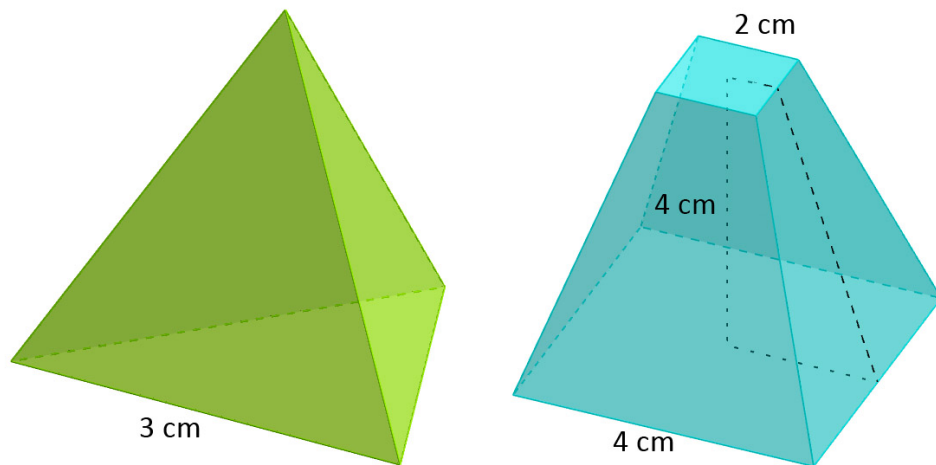


Fuente: Libro de texto Editorial Santillana, pág. 214, Ejercicio 86.

Sesión 4: Desarrollo plano de cuerpos geométricos

Ejercicio 8

Dibuja en tu cuaderno, en tamaño real, el desarrollo plano de las siguientes figuras:



Fuente: Elaboración propia

BÁSICO: Realizar únicamente el desarrollo de uno de los dos cuerpos.

EXTRA: En lugar del tetraedro, realizar un icosaedro de 3 cm de arista.

Sesión 5: Planos de simetría y ejes de giro

Ejercicio 9

a) Indica el orden de los ejes de giro dibujados. ¿Tiene algún otro eje de giro el prisma? ¿Y la pirámide?

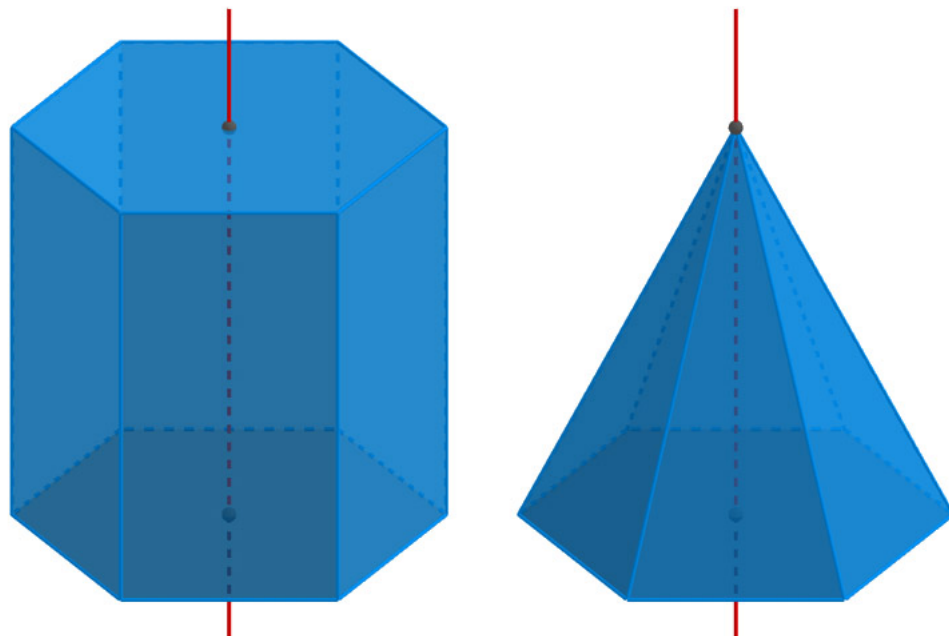


Figura 1: Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 221, Ejercicio 1. Elaboración propia

b) Dibuja ambos poliedros en tu cuaderno y traza sus planos de simetría.

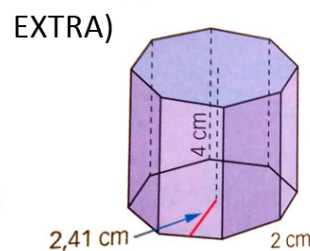
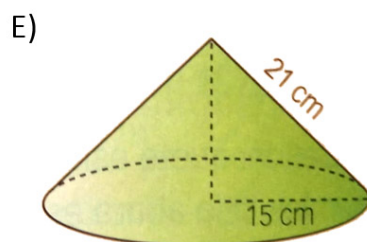
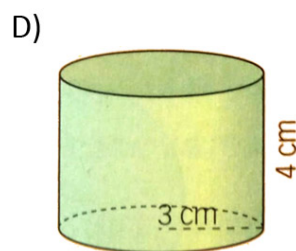
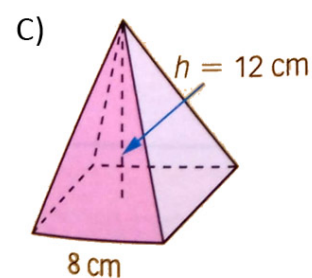
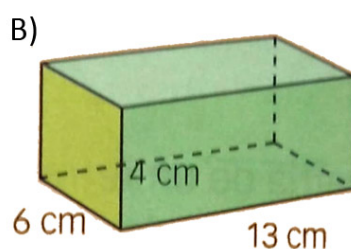
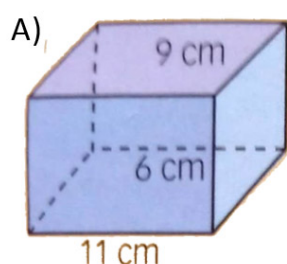
BÁSICO: realiza el ejercicio únicamente con una de las figuras.

EXTRA: Dibuja en tu cuaderno un cilindro e identifica sus ejes de giro y al menos tres planos de simetría.

Sesión 6: Áreas de cuerpos geométricos

Ejercicio 10

Halla el área de las siguientes figuras geométricas:



Fuente: Libro de texto Editorial Santillana, págs. 201 y 203, Ejercicios 10, 11, 16 y 20.

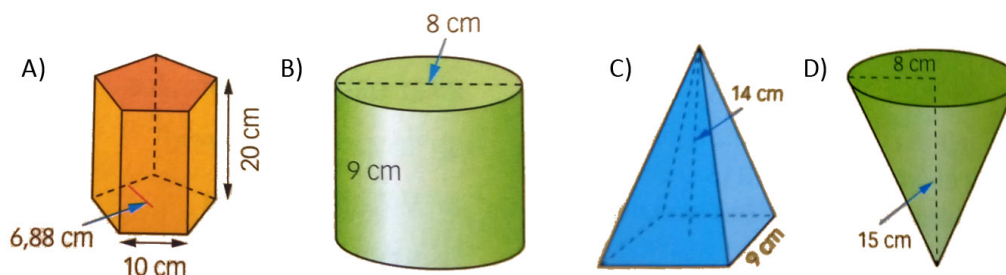
BÁSICO: Realizar sólo 3 de los 5 primeros apartados.

EXTRA: Realizar, además de los apartados generales, el apartado EXTRA.

Sesión 7: Volúmenes de cuerpos geométricos

Ejercicio 11

Determina el volumen de las siguientes figuras:

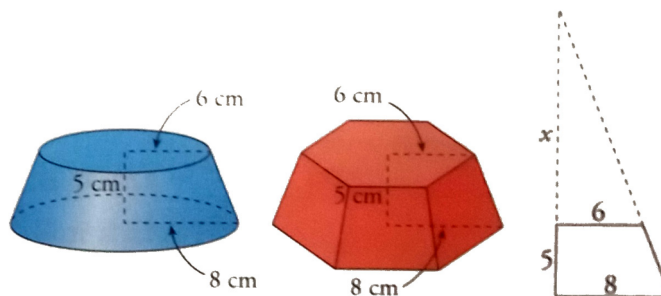


Fuente: Libro de texto Editorial Santillana, págs. 206-207, Ejercicios 33 y 36.

BÁSICO: Realizar sólo 2 de los 4 apartados.

Ejercicio 12

Calcula el volumen de las siguientes figuras:



Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 227, Ejercicio 3.

BÁSICO: Realizar sólo 1 de los 2 apartados.

EXTRA: Calcular el volumen de la primera figura si le hiciéramos un agujero en forma de cilindro de 1 cm de radio, que atravesara la figura desde la base hasta la cara superior.

Sesión 10: Sesión de repaso

Ejercicio 13

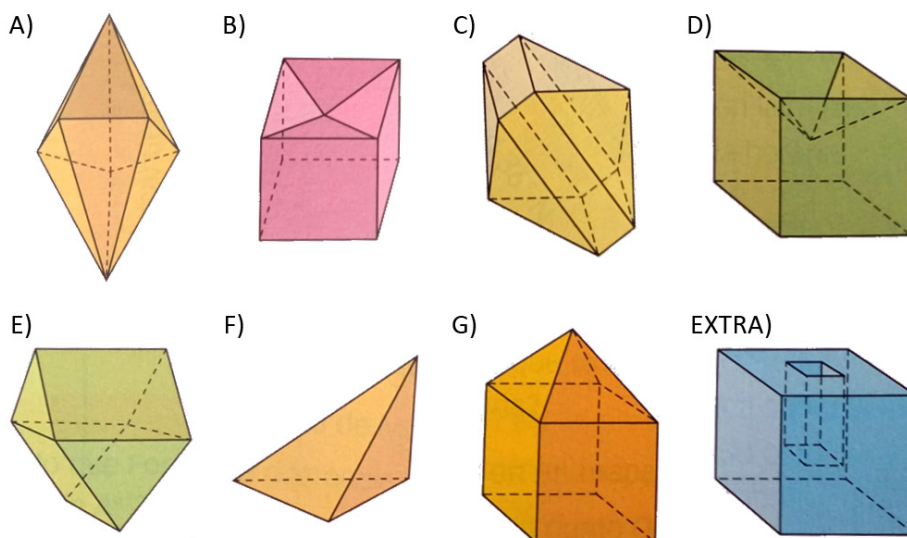
Contesta a estas cuestiones:

- ¿Cuál es el número de aristas de un pentaedro que tiene 6 vértices?
- ¿Cuál es el número de vértices de un pentaedro que tiene 8 aristas?
- ¿Cuál es el número de aristas de un heptaedro que tiene 7 vértices?
- ¿Cuál es el número de vértices de un heptaedro si tiene 15 aristas?

BÁSICO: Se escogerá 1 única cuestión entre los apartados a) y c) y otra única cuestión entre los apartados b) y d).

Ejercicio 14

Comprueba si estos poliedros cumplen la fórmula de Euler:



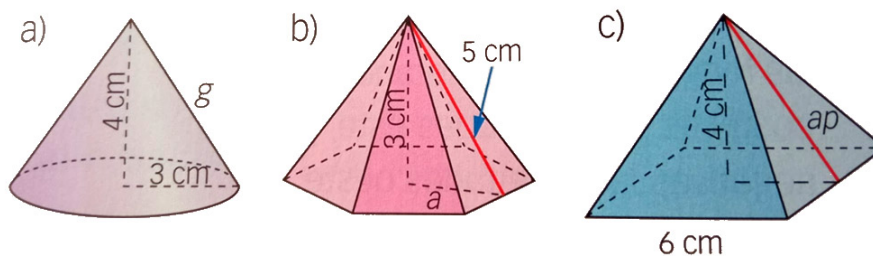
Fuente: Libro de texto Santillana, pág. 212, Ejercicio 61.

BÁSICO: Realizar únicamente 4 apartados.

EXTRA: Realizar el apartado Extra.

Ejercicio 15

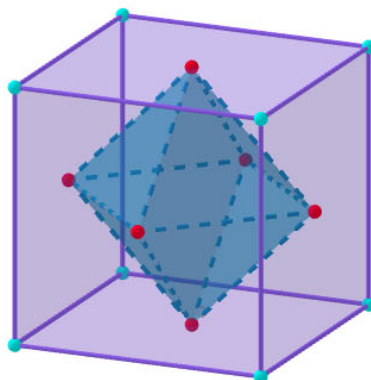
Calcula el dato desconocido en estos cuerpos geométricos:



Fuente: Libro de texto Santillana, pág. 212, Ejercicio 64.

Ejercicio 16

Conociendo la relación de dualidad entre cubo y octaedro, y los planos de simetría del cubo, determina los todos los planos de simetría del octaedro.



Fuente: Libro de texto Editorial Anaya, pág. 231, Ejercicio 6. Elaboración propia.

EXTRA: Determina también los ejes de giro del octaedro.

Ejercicio 17

Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

- a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.
- b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.
- c) Octaedro regular de 10 cm de arista.
- d) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm de longitud.
- e) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.
- f) Semiesfera de 10 cm de radio.
- g) Esfera inscrita en un cilindro de 1 m de altura.
- h) Casquete esférico de 7 cm de altura de una esfera de radio 12 cm.

Ejercicio 18

Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?

Ejercicio 19

Averigua si los siguientes listones de madera caben en una caja de 40 cm de largo, 25 cm de ancho y 18 cm de alto.

- a) 46.5 cm b) 50.3 cm c) 50,6 cm d) 51 cm

¿Cuáles se pueden apoyar en el fondo de la caja?

Ejercicio 20

En un hexaedro de 10 cm de lado, introducimos una esfera de 4 cm de radio. ¿Cuánto volumen queda sin llenar?

EXTRA: Si quisiéramos introducir esferas de 1 cm de radio, ¿cuántas cabrían? ¿Cuánto volumen quedaría libre en este caso?

Ejercicio 21

Si en La Habana (82º O) son las 8 p.m., asigna la hora teórica, según los husos horarios, a cada ciudad:

Maputo (Mozambique)	2 p.m.
Natal (Brasil)	3 a.m.
Astaná (Kazajistán)	8 p.m.
Temuco (Chile)	0 a.m.
Honolulu (Hawai)	11 a.m.
Dakar (Senegal)	11 p.m.
Katmandú (Nepal)	6 a.m.
Melbourne (Australia)	7 a.m.

Ejercicio 22

¿Cuál es la longitud del paralelo situado a 45º N de latitud? ¿Y el situado a 45º S?

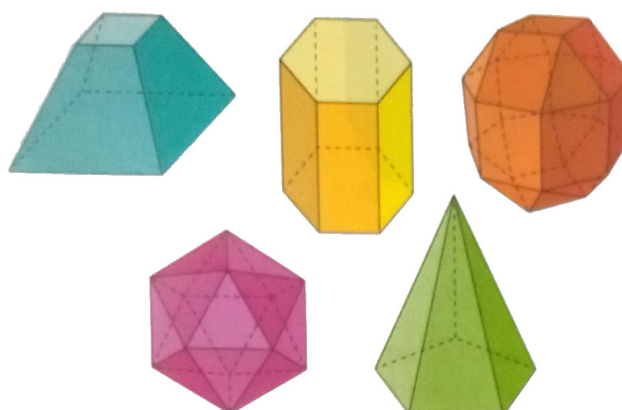
B. Evaluación de la unidad: prueba escrita

La última sesión de la unidad didáctica consiste en una prueba escrita que los alumnos tendrán que realizar para demostrar que han adquirido los conocimientos trabajados a lo largo del tema. Está diseñada para poder ser realizada en el intervalo de tiempo asignado a la sesión, es decir, 1 hora.

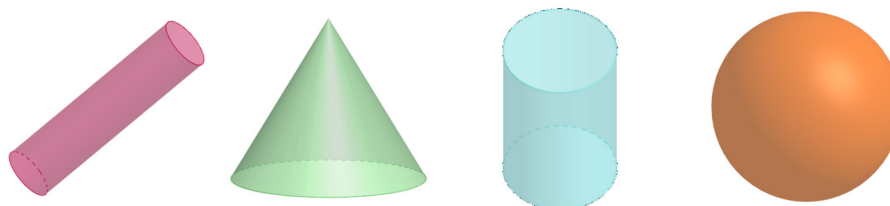
Para su diseño, se ha elaborado material propio y se han recogido ejercicios de diversas fuentes. Además de los libros de Anaya y Santillana, ya utilizados para el desarrollo de los ejercicios del apartado A de este anexo, se han extraído ejercicios de la relación de problemas de áreas y volúmenes de la página web Intergranada (https://selectividad.intergranada.com/ESO/Material/areas_volumenes.pdf). La procedencia de cada ejercicio se detalla en la siguiente tabla.

Editorial Anaya	Editorial Santillana	Intergranada	Elaboración propia
1, 3	4	5, EXTRA	2

1. Indica cuáles de los siguientes poliedros son semirregulares y explica por qué los demás no lo son.

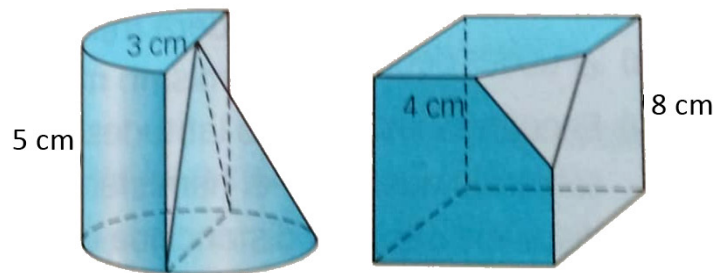


2. Determina correctamente las generatrices y radios de los siguientes cuerpos.



3. ¿Qué ejes de giro tiene un prisma con las tres dimensiones distintas? ¿De qué orden son?

4. Obtén el área total de los siguientes cuerpos geométricos.



Fuente: Libro de texto Editorial Santillana, pág. 215, Ejercicio 93.

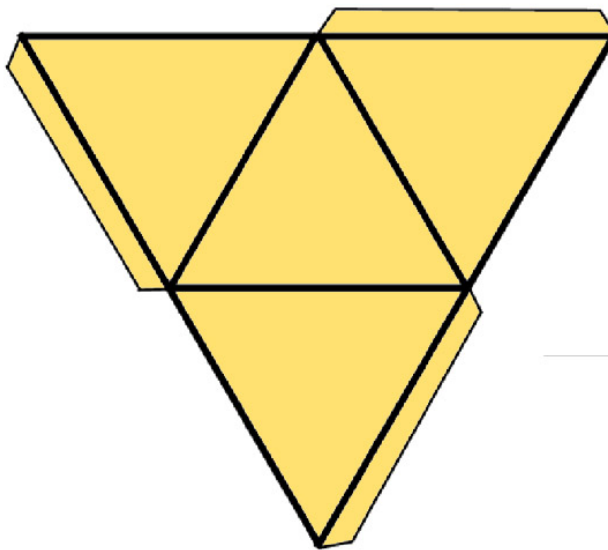
5. ¿Qué volumen de aire cabe en una pelota de 30 cm de diámetro? ¿Qué superficie tendrá esa pelota?

EXTRA: Un pintor ha cobrado 1.000 € por pintar el lateral de un depósito cilíndrico de 4 m de altura y 4 m de diámetro. ¿Cuánto deberá cobrar por pintar un depósito esférico de 2 m de radio?

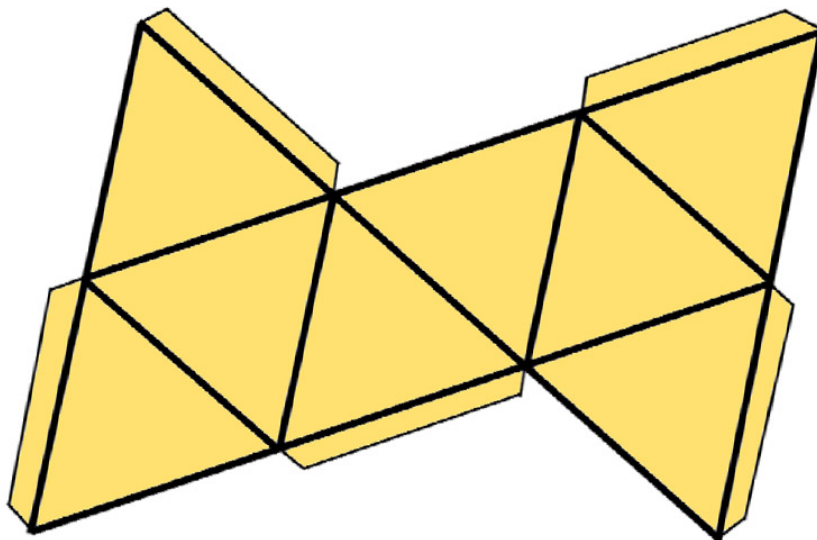
C. Recortables de la Actividad 4

La Actividad 4 de la unidad didáctica requerirá de material adicional para trabajar en clase. Los desarrollos de pirámides, prismas, cuerpos de revolución y poliedros regulares han sido obtenidos del repositorio de recursos de la Universidad de Córdoba (<http://www.uco.es/~ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos/DESARROLLO-DE-CUERPOS-GEOMETRICOS.pdf>) y los de los sólidos arquimedianos, de la Ilustración 10 del presente trabajo (ver apartado 4.6.2). En este documento, las figuras se presentan a escala 1:2.

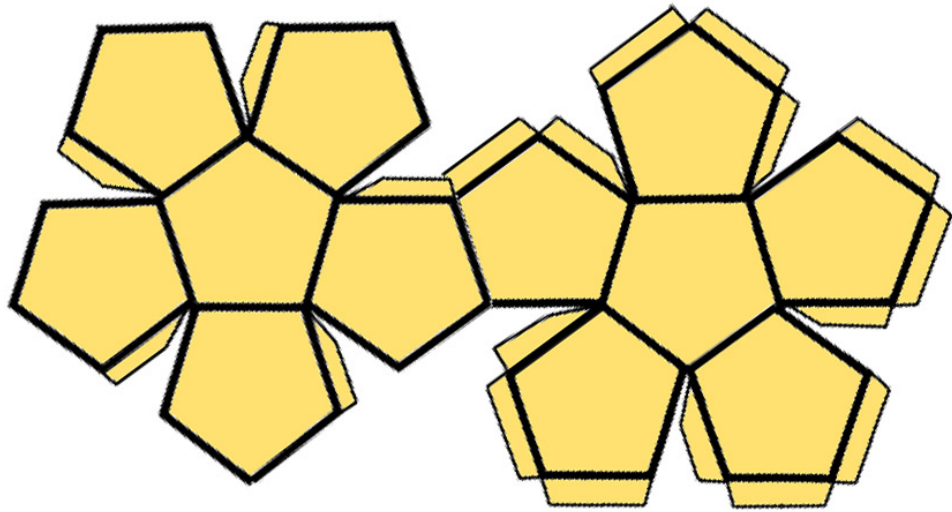
Tetraedro:



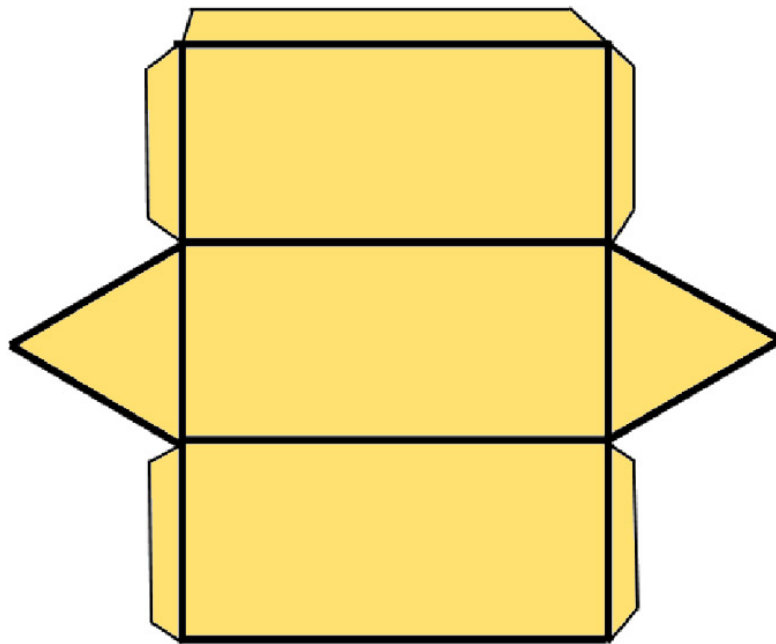
Octaedro:



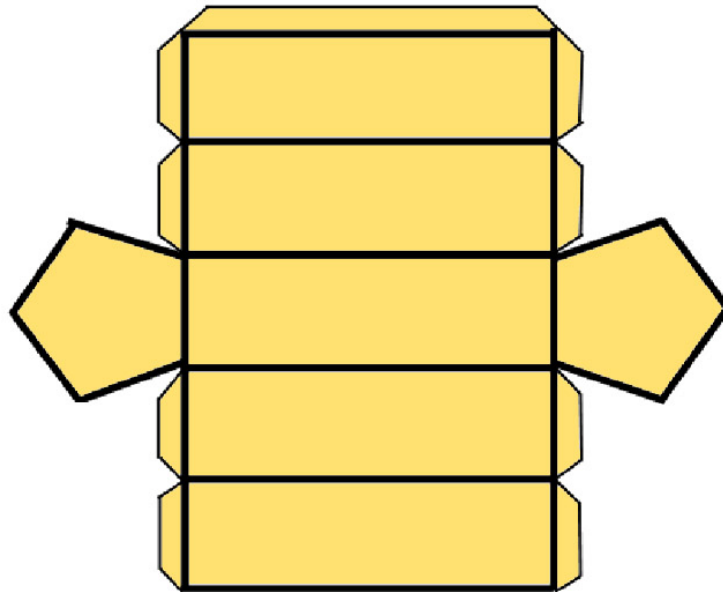
Dodecaedro:



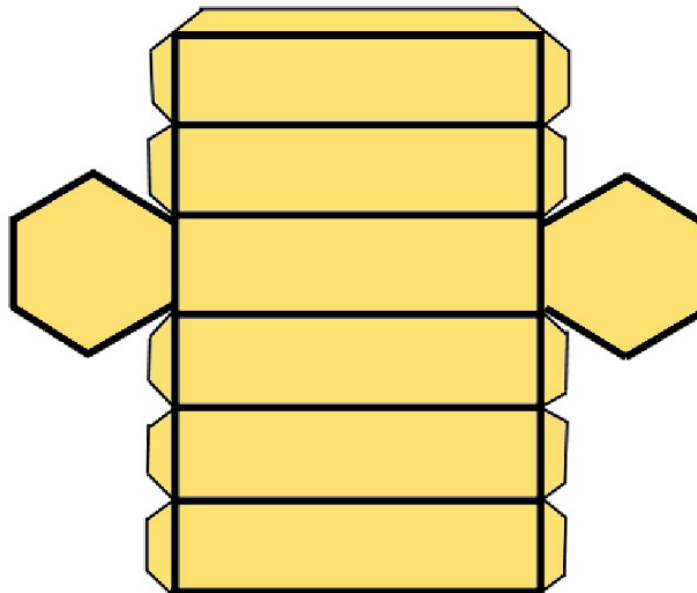
Prisma triangular:



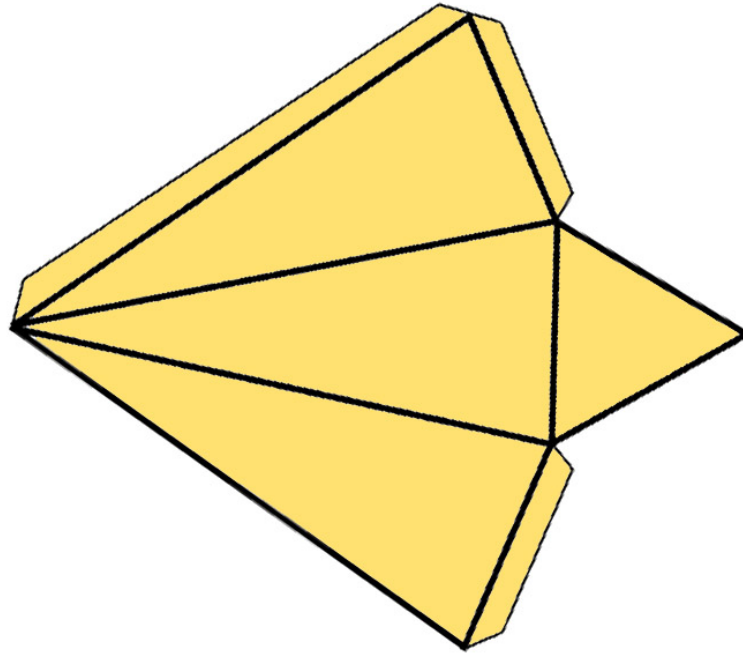
Prisma pentagonal:



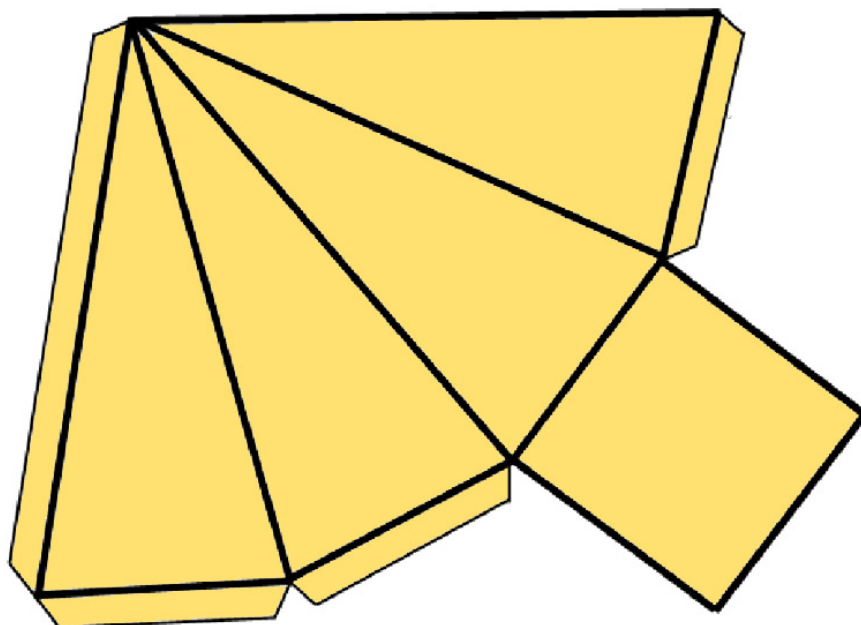
Prisma hexagonal:



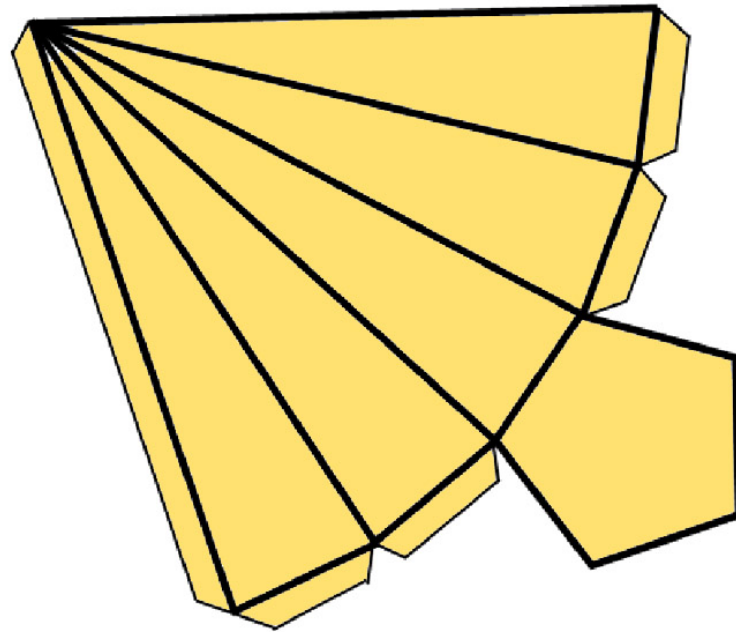
Pirámide triangular:



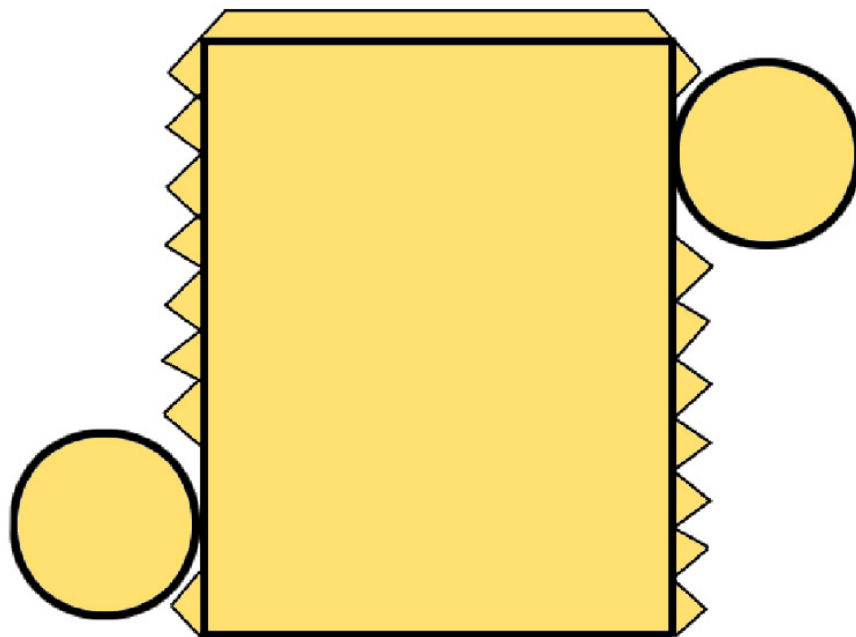
Pirámide cuadrangular:



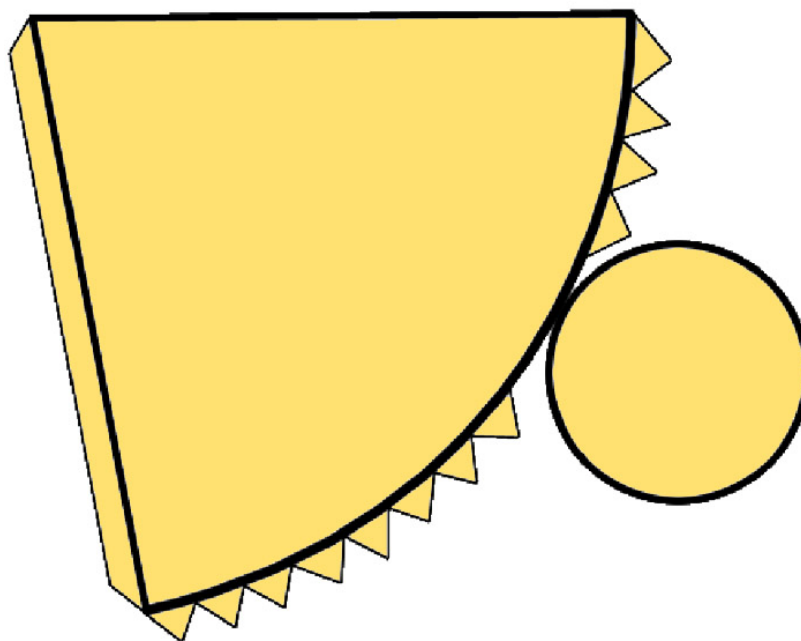
Pirámide pentagonal:



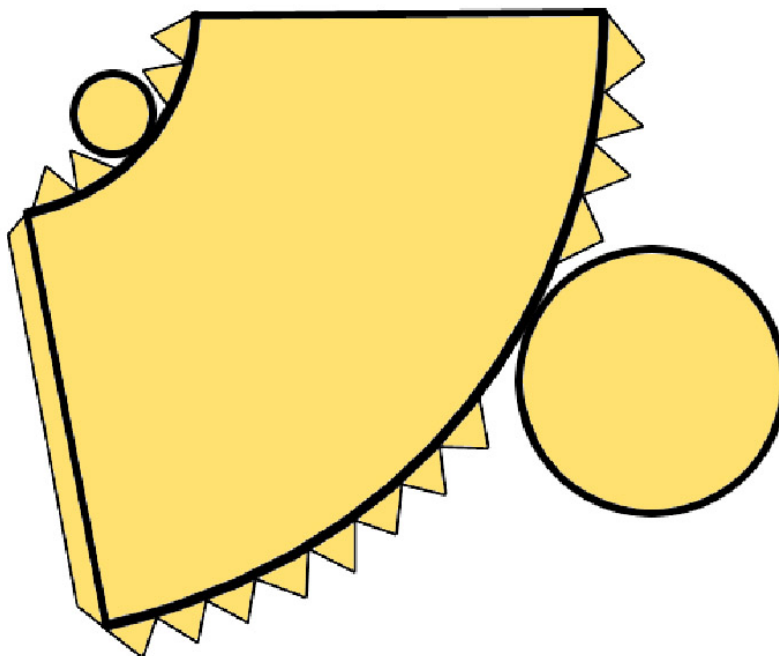
Cilindro:



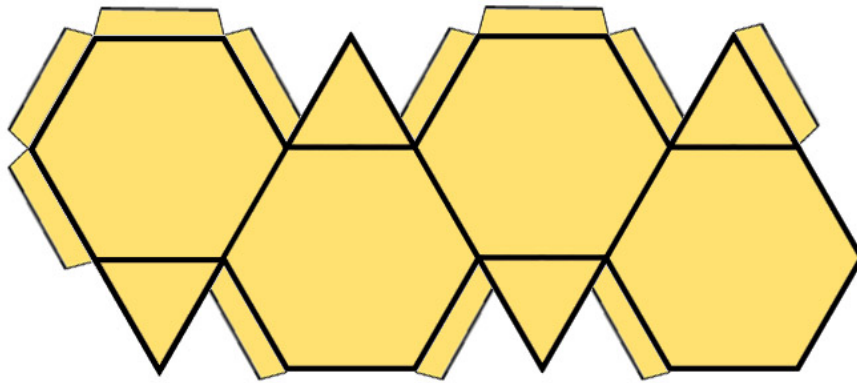
Cono:



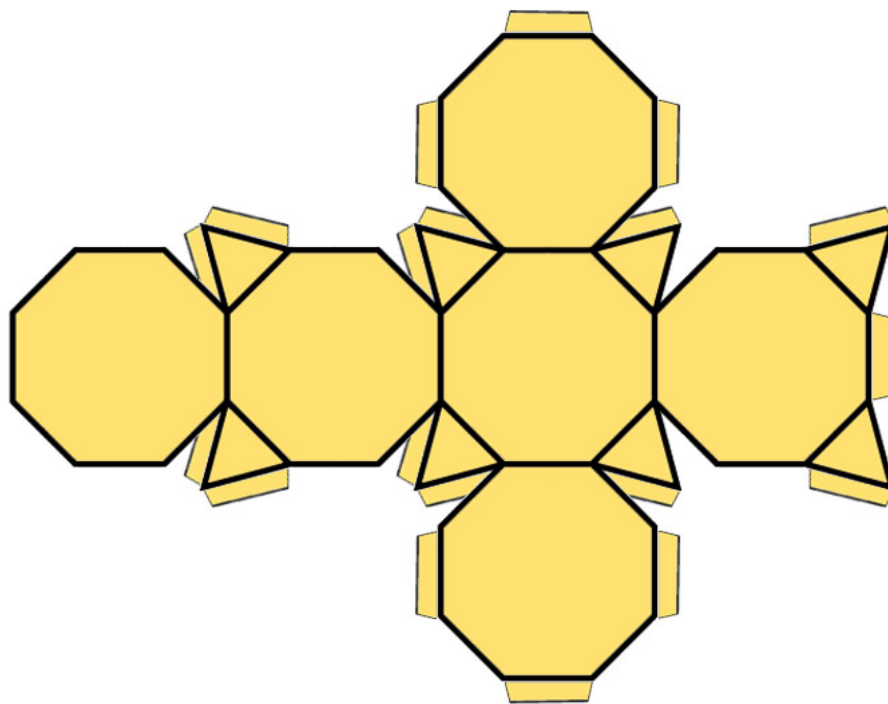
Cono truncado:



Tetraedro truncado:



Cubo truncado:



Cuboctaedro:

