



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Escuela Politécnica Superior de Jaén

Trabajo Fin de Grado

ESTUDIO DE VIBRACIONES MECÁNICAS EN VIGA DE MATERIAL COMPUESTO BIAPOYADA

Alumno: Ángel González Centeno

Tutor: Prof. D. Elías López Alba
Prof. D. Luís Antonio Felipe Sesé
Dpto: Ingeniería Mecánica y Minera

Septiembre, 2016



Universidad de Jaén
Escuela Politécnica Superior de Jaén
Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera

Don Elías López Alba y Don Luís Antonio Felipe Sesé, tutores del Proyecto Fin de Carrera titulado: Estudio de Vibraciones Mecánicas en Viga de Material Compuesto Biapoyada, que presenta Ángel González Centeno, autoriza su presentación para defensa y evaluación en la Escuela Politécnica Superior de Jaén.

Jaén, Septiembre de 2016

El alumno:

Los tutores:

Ángel González Centeno

Elías López Alba

Luís Antonio Felipe Sesé

Índice

1. Motivación	7
2. Introducción.....	10
2.1. Mecánica de los materiales compuestos.....	10
2.1.1. Comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Relación tensión-deformación para materiales ortotrópicos. Ley de Hooke generalizada.	11
2.1.1.2. Definición de constantes ingenieriles.....	16
2.1.2. Análisis de vibraciones mecánicas en materiales compuestos.	25
2.2. Correlación digital de imágenes DIC-3D.	32
2.2.1. Fundamentos de la técnica DIC-3D.	32
2.2.2. Estado del arte en la aplicación de DIC-3D en el análisis vibracional.	33
2.3. Estudio numérico del análisis vibracional.	37
2.3.1. Análisis de elementos finitos en estructuras a través del software Ansys Mechanical.	38
3. Estudio analítico del problema en estudio.....	42
3.1. Método Ritz para cálculo de vibraciones en placas.....	43
3.2. Placa biapoyada.	48
3.3. Comparativa de resultados con caso de viga.	60
4. Estudio experimental del problema en estudio	66
4.1. Descripción de los equipos experimentales.	67
4.1.1. Shaker.....	67
4.1.2. Martillo instrumentado.....	69
4.1.3. Analizador Photon+.....	71
4.1.4. Acelerómetro.....	72
4.1.5. Equipo DIC 3D	74
4.2. Ensayos en viga biapoyada.....	77
4.2.1. Determinación de la frecuencia natural mediante el uso del martillo instrumental.....	79
4.2.2. Determinación de la forma de los modos mediante el uso de técnica DIC-3D	85
4.3. Conclusiones	96
5. Estudio numérico del problema en estudio	99
5.1. Definición del objeto	99
5.2. Postprocesamiento de los datos.....	101

5.3. Conclusiones	114
6. Resultados	115
7. Conclusiones y trabajo futuro	131
Bibliografía	136

1. Motivación

La historia de los materiales compuestos aplicados a la ingeniería data del siglo XX, en torno a 1910 con la creación de los primeros métodos de fabricación, los cuales eran realizados por moldeo a mano. Estos métodos presentaban grandes problemas de forma y peso, pero ya empezaban a verse como una alternativa a los materiales tradicionales como el hormigón o el acero.

Estos materiales fueron evolucionando conforme pasaban los años hasta que en la década de los 50 aparecen los métodos automatizados, lo que permitió disponer de estos materiales de forma comercial. La fabricación de depósitos a presión, por medio de enrollamiento continuo de fibras de vidrio, fue la primera aplicación estructural de los materiales compuestos modernos. Pero el verdadero despliegue de estos materiales ocurre una década más tarde, cuando en los sesenta se comienzan a utilizar en Estados Unidos las primeras fibras avanzadas compuestas por carbono, boro y aramida en la aviación militar [1]. Con esto se crearon dos campos de aplicación:

- Aviación; donde los costes eran elevados a la vez que se obtenían grandes prestaciones.
- Comercial; en el que con costes moderados obteníamos prestaciones suficientes.

La fabricación del estabilizador para el F-14 en material compuesto a principios de la década de los setenta fue otra producción importante. Esta fue seguida por el estabilizador del F-15, y el timón y el estabilizador del F-16, siempre en materiales compuestos. A comienzos de la década de los ochenta, el Boeing 767 incorporaba casi dos toneladas de materiales compuestos en los perfiles de suelo y paneles de control. El transportador gigante soviético Antonov 124 lleva 5500 kilogramos de materiales compuestos de los cuales 2500 kilogramos corresponden a laminados de fibra de grafito. El sistema de deriva de la Industria Airbus A310-300 realizado totalmente en materiales compuestos, es una estructura impresionante por su sencillez. Prácticamente todos los aviones de reciente aparición hacen uso de forma

notable de los materiales compuestos. El 'Beech Aircraft's Starship 1' es la primera aeronave civil fabricada totalmente en materiales compuestos [1].

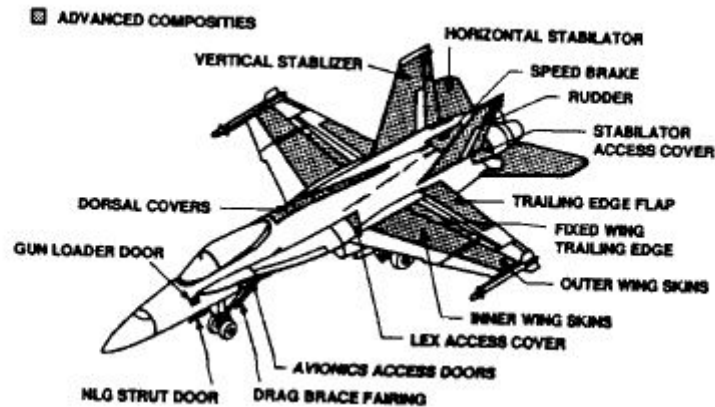


Figura 1.1. Uso de materiales compuestos en un F-18 [1]

Materiales y procesos avanzados han sido utilizados como medios para el crecimiento de esta tecnología. A principios de los setenta, las fibras de aramida y grafito estaban ya comercialmente disponibles. Las matrices de epoxy son utilizables para determinadas condiciones de uso. Mientras tanto, los materiales compuestos de alta tecnología han sido también utilizados para aplicaciones no aeronáuticas. La industria del deporte ha realizado una estimable aportación de estos materiales, laminados de grafito son usados en raquetas de tenis, palos de golf o bicicletas donde el peso, la rigidez y la resistencia son importantes [1].

Con este preámbulo, se pretende mostrar que el uso de los materiales compuestos en la ingeniería es un campo reciente, con un gran potencial para su explotación y estudio, teniendo grandes ventajas sobre muchos materiales más comunes. Entre estas ventajas, podríamos incluir el fenómeno de las vibraciones mecánicas.

Los principales problemas vibracionales aparecen debido al desbalanceamiento en los sistemas que aportan movimiento, esto es, por ejemplo,

en los motores diésel pueden aparecer ondas lo suficientemente poderosas como para crear ruido en las zonas urbanas. Algunas ruedas de ferrocarril pueden levantarse más de un centímetro por encima del carril a altas velocidades debido a los desbalanceamientos. Normalmente, las estructuras que sirven de soporte a estas también van a sufrir los efectos de las vibraciones. En todas estas situaciones, la estructura o los componentes de las máquinas están sujetos a vibraciones que pueden provocar el fallo debido a la fatiga del material provocado por la variación cíclica de las tensiones inducidas e incluso las vibraciones provocan un desgaste mayor en partes de máquinas como los rodamientos o los engranajes además del ruido excesivo generado [2].

Cuando la frecuencia natural de la vibración de la maquina o estructura coincide con la frecuencia de la excitación, aparece el fenómeno de resonancia que provocara una excesiva deflexión y fallos [2]. Por lo general, se busca que las frecuencias naturales se sitúen a valores altos para que así, durante la vida de la maquina o estructura, no se llegue a trabajar por encima de esta y por tanto, que no se produzca el fenómeno de la resonancia.

La meta de este estudio y lo que hace de interés su realización es la de avanzar en el conocimiento del fenómeno de las vibraciones mecánicas en determinados elementos fabricados a partir de material compuesto y comprender la influencia de sus parámetros mecánicos más influyentes. Por lo tanto se busca, por una parte, realizar un estudio analítico para poder prever los movimientos de los principales modos de vibración. A partir aquí, se utilizarán varias técnicas experimentales que nos permitirán indagar en varios aspectos de excitación y medición de vibraciones experimental, centrándonos en la técnica de Correlación Digital de Imágenes 3D. Por último, para terminar de comprobar todos los cálculos y experimentos realizados, se procederá a realizar un análisis por Método de Elementos Finitos a partir del software ANSYS™.

2. Introducción

En este apartado se va a exponer de manera resumida algunos conceptos relacionados con el trabajo desarrollado. Primero se van a mostrar términos fundamentales relacionados con la mecánica de los materiales compuestos laminados, necesarios para el posterior análisis de las vibraciones mecánicas. Para ello se van a presentar los conceptos de las principales constantes ingenieriles que afectan a este tipo de materiales y el método llevado a cabo para estudiar las vibraciones.

Además, se va a recoger en un apartado los principios de la Técnica de Correlación Digital de Imágenes 3D y de un análisis básico de las posibilidades de uso que tiene el software de elementos finitos ANSYS.

2.1. Mecánica de los materiales compuestos

Si tenemos un material compuesto significa que dos o más materiales a escala macroscópica o microscópica han sido combinados para formar un tercer material útil. La diferencia entre la escala macroscópica y microscópica es que en el último caso, parecerá un material homogéneo, en el que solo se podrá diferenciar sus componentes mediante el uso de dispositivos como los microscopios [3].

La ventaja de los materiales compuestos es que, si están bien diseñados, normalmente van a exhibir un mejor comportamiento en sus propiedades o incluso mostrar propiedades que antes, de manera individual no poseían [3].

Los materiales compuestos de fibras están formados por dos partes, las fibras y la matriz. Las fibras suelen ser largas y de varias formas; estas van a tener una relación longitud-diámetro muy grande y van a mostrarse más rígidas y duraderas. Los materiales más comunes para su fabricación son aluminios, titanio, grafitos, fibra de carbono, fibra de boro o fibra de vidrio [3].

Por otra parte, vamos a tener la matriz que va a servir de elemento estructural de unión con las fibras y que soportara las cargas. Entre otras propiedades, vamos a encontrarnos las de protección para las fibras o transferencia de tensiones entre fibras rotas. Frente a las fibras, nos vamos a encontrar que son de baja densidad, rigidez y durabilidad [3]. Los materiales de las matrices pueden ser polímeros, metales cerámicas o carburos.

Los materiales compuestos de plástico con fibra de vidrio tienen las siguientes características favorables: alta relación entre resistencia y peso; buena estabilidad dimensional; buena resistencia al calor, el frío, la humedad y a la corrosión; buenas propiedades de aislamiento eléctrico; facilidad de fabricación y costo relativamente bajo [4].

2.1.1. Comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Relación tensión-deformación para materiales ortotrópicos. Ley de Hooke generalizada.

La ley generalizada de Hooke se puede denotar como:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (2.1.)$$

donde σ_i son los componentes de las tensiones que se muestran en la figura 2.1. C_{ij} es la matriz de rigidez y ε_j son los componentes de la deformación.

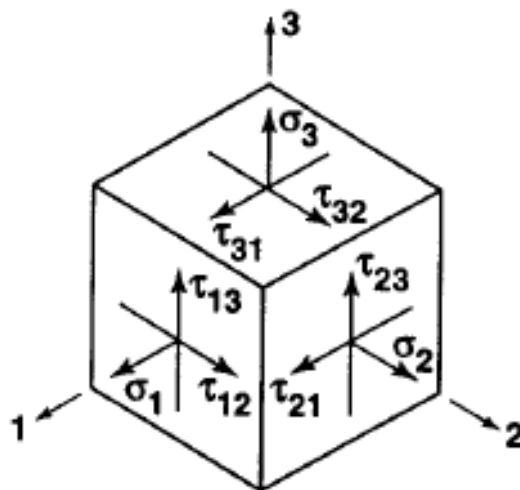


Figura 2.1. Orientaciones principales de los componentes de la tensión [3].

En forma matricial si $i=1\dots 6$ y $j=1\dots 6$; será:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez va a tener 36 constantes. Sin embargo, menos de esas 36 constantes van a ser independientes para materiales elásticos. Tomando la ecuación de la energía potencial en función del incremento de trabajo por unidad de volumen:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \quad (2.2.)$$

y usando las relaciones de tensión-deformación, obtendremos:

$$dW = C_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad (2.3.)$$

Procederemos a integrar esta ecuación y a despejar el valor de la rigidez obteniendo:

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \quad (2.4.)$$

De la misma manera, tenemos que:

$$C_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} \quad (2.5.)$$

Pero el orden de las diferencias es indiferente, por lo que:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.6.)$$

Con esto conseguiríamos pasar de 36 a 21 constantes. Además de esto, al tener un material ortótropo, como tenemos dos planos ortogonales de propiedades simétricas de material, la simetría hará que exista un tercer plano ortogonal. Lo que provocará que la matriz de rigidez quede definida como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Podemos observar como no habrá relación entre las tensiones normales σ_1 , σ_2 y σ_3 , y las deformaciones a cortante γ_{23} , γ_{31} y γ_{12} como ocurriría en el caso de materiales anisotrópicos. De forma similar, no habrá relación entre las tensiones cortantes y las deformaciones normales.

De forma similar, y debido a que en los ensayos se suele caracterizar el material a partir de las deformaciones, define la matriz de flexibilidad o tensor de flexibilidad $S = C^{-1}$. De esta forma, la relación deformación-tensión para materiales ortótropos nos va a quedar:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$

Las constantes ingenieriles son generalmente el módulo de Young (E), el módulo de Poisson (ν) y el módulo elástico transversal (G). Estas constantes pueden ser medidas mediante un simple ensayo a tensión o a cortante. La caracterización de los materiales más simple se realizan con cargas o deformaciones conocidas y el resultado del desplazamiento o tensión respectivamente son medidas. Las constantes son determinadas normalmente por la pendiente de la curva tensión-deformación ($E=\sigma/\epsilon$) o la pendiente de la curva tensión-tensión ($\nu=-\epsilon_y/\epsilon_x$ para $\sigma_x=\sigma$ con el resto de tensiones cero). Por esto, los componentes de la matriz de flexibilidad S_{ij} van a ser más fácil de determinar. Para un material ortotrópico queda:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}$$

donde E_i son los módulos de Young en las direcciones principales, ν_{ij} son los coeficientes de Poisson en las direcciones principales y G_{ij} son los módulos de elasticidad transversales en los planos 23, 31 y 12 respectivamente.

Debido a que las matrices de rigidez y flexibilidad son inversas entre sí, podremos calcular los componentes de la matriz de rigidez a partir de los componentes de la de flexibilidad:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33}-S_{23}^2}{S} & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23}-S_{12}S_{33}}{S} & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23}-S_{13}S_{22}}{S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11}-S_{13}^2}{S} & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13}-S_{23}S_{11}}{S} & C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22}-S_{12}^2}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (2.7.)$$

donde $S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2 S_{12}S_{23}S_{13}$

Si sustituimos cada S_{ij} por su correspondiente valor en constantes ingenieriles tendremos:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & C_{33} &= \frac{1+\nu_{12}\nu_{21}}{E_2E_1\Delta} \\ C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{31} & C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.8.)$$

donde $\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$

Para materiales ortotrópicos, las relaciones entre las constantes ingenieriles son complejas. Estas relaciones deben de ser rigurosamente estudiadas para evitar caer en las reglas que rigen los materiales isotrópicos. El producto de la tensión y su correspondiente deformación representa el trabajo hecho por la tensión. La suma del trabajo aportado por todas las tensiones debe ser positivo para así poder inhibir la creación de energía. Esto dará lugar a una restricción termodinámica en los valores de las contantes. Esta fue dada por Lempriere [6] y muestra que las matrices que relacionan la tensión con la deformación deben de ser positivas. Por esto, la matriz de rigidez y flexión deberán de ser positivas.

Estas condiciones se pueden remplazar por el siguiente argumento. Si únicamente una de las tensiones normales se aplica en un tiempo, la correspondiente deformación es determinada por la diagonal de la matriz. Por esto, los elementos deben ser positivos, lo que hace que:

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \quad (2.9.)$$

O en términos de constantes ingenieriles:

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} > 0 \quad (2.10.)$$

También, debido a que la diagonal de la matriz de rigidez es la que determina el trabajo, estos deberán de ser positivo lo que hace:

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \quad (2.11.)$$

2.1.1.2. Definición de constantes ingenieriles.

La regla de las mezclas permite predecir características del material, tales como el módulo elástico o la densidad, a partir de las características de la matriz y las fibras; junto a sus respectivas fracciones volumétricas [5]. Si consideramos una muestra de prueba de un compuesto laminar ideal formado por capas alternas de fibras continuas y material matriz con una deformación aplicada en la dirección de las fibras como se ilustran en la figura 2.2. En este caso, el esfuerzo sobre el material provoca una deformación uniforme en todas las capas del compuesto, suponiendo que la ligadura entre las capas se mantiene intacta mientras están sometidas al esfuerzo. Esto se va a denominar condición de isodeformación.

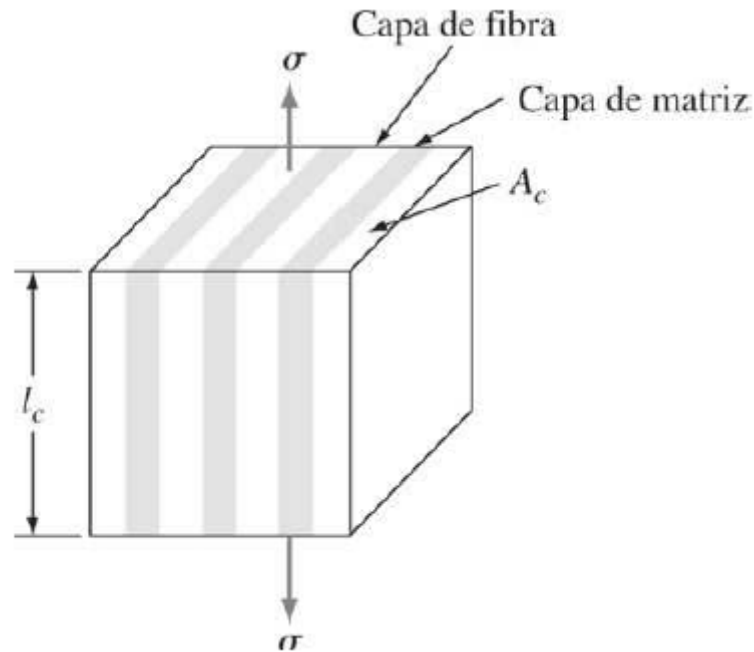


Figura 2.2. Estructura de un compuesto formado por capas de fibra y de matriz en condiciones de isodeformación bajo carga [4].

Conocido esto, podemos decir que la carga sobre la estructura del compuesto es igual a la suma de las cargas sobre las capas de fibra más las cargas sobre las capas de matriz, obteniendo la ecuación:

$$P_c = P_f + P_m \quad (2.12.)$$

Como la tensión es $\sigma = \frac{P}{A}$ o $P = \sigma A$, sustituyendo en (2.12.) tenemos:

$$\sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (2.13.)$$

donde σ_c , σ_f y σ_m son los esfuerzos y A_c , A_f y A_m son las áreas fraccionales del compuesto, la fibra y la matriz, respectivamente.

Puesto que las longitudes de las capas de matriz y fibra son iguales, las áreas A_c , A_f y A_m de la ecuación (2.13) pueden ser sustituidas por las fracciones de volumen V_c , V_f y V_m , respectivamente dando:

$$\sigma_c V_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (2.14.)$$

Como la fracción de volumen del compuesto total es 1, entonces $V_c = 1$ y la ecuación (2.14.) se convierte en:

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (2.15.)$$

Como se supuso antes, estamos bajo condiciones de isodeformación y unión entre capas perfecta, por lo que tendremos que la deformación será:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (2.16.)$$

Si dividimos (2.15.) entre (2.16.) se obtiene:

$$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{\sigma_f V_f}{\varepsilon_f} + \frac{\sigma_m V_m}{\varepsilon_m} \quad (2.17.)$$

Ahora se puede sustituir el módulo de elasticidad E_c por σ_c/ε_c y sus respectivos iguales de la fibra y la matriz. Con esto, se obtiene finalmente:

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.18.)$$

Esta ecuación se conoce como la regla de mezclas, como se comentó al inicio del apartado, para compuestos binarios y permite calcular un valor para el módulo elástico de un compuesto si se conocen los módulos elásticos de la fibra y la matriz, así como sus porcentajes en volumen [4].

Si ahora se pasa al caso de una estructura de un compuesto con una deformación aplicada en la dirección perpendicular de las fibras como se muestra en la figura 2.3. En este caso, el esfuerzo sobre la estructura del compuesto produce una condición de esfuerzos iguales sobre todas las capas, por lo cual recibe el nombre de condición de isoesfuerzo.

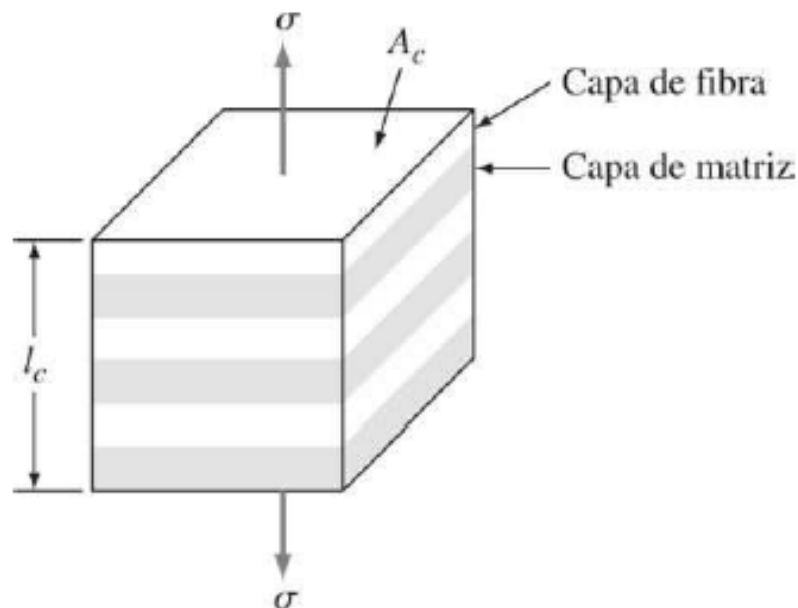


Figura 2.3. Estructura de un compuesto formado por capas de fibra y de matriz en condiciones de isoesfuerzo bajo carga [4].

Para obtener una ecuación para el módulo elástico, tal como se hizo para la condición de isodeformación, partimos de:

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m \quad (2.19.)$$

La deformación total del compuesto en las direcciones de los esfuerzos es igual a la suma de la deformaciones en las capas de fibra y de matriz.

$$\epsilon_c = \epsilon_f + \epsilon_m \quad (2.20.)$$

Suponiendo que el área perpendicular al esfuerzo no se modifique después de aplicarlo y suponiendo una longitud unitaria para el compuesto después de haberlo sometido al esfuerzo, resulta que:

$$\epsilon_c = \epsilon_f V_f + \epsilon_m V_m \quad (2.21.)$$

Suponiendo que la ley de Hooke es válida bajo la carga, entonces:

$$\epsilon_c = \frac{\sigma}{E_c} \quad \epsilon_c = \frac{\sigma}{E_f} \quad \epsilon_c = \frac{\sigma}{E_m} \quad (2.22.)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.22.) en (2.21.) y dividiendo entre σ tendremos:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2.23.)$$

Si se busca un denominador común y se reordena, se obtiene finalmente:

$$E_c = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + V_m E_f} = E_2 \quad (2.24.)$$

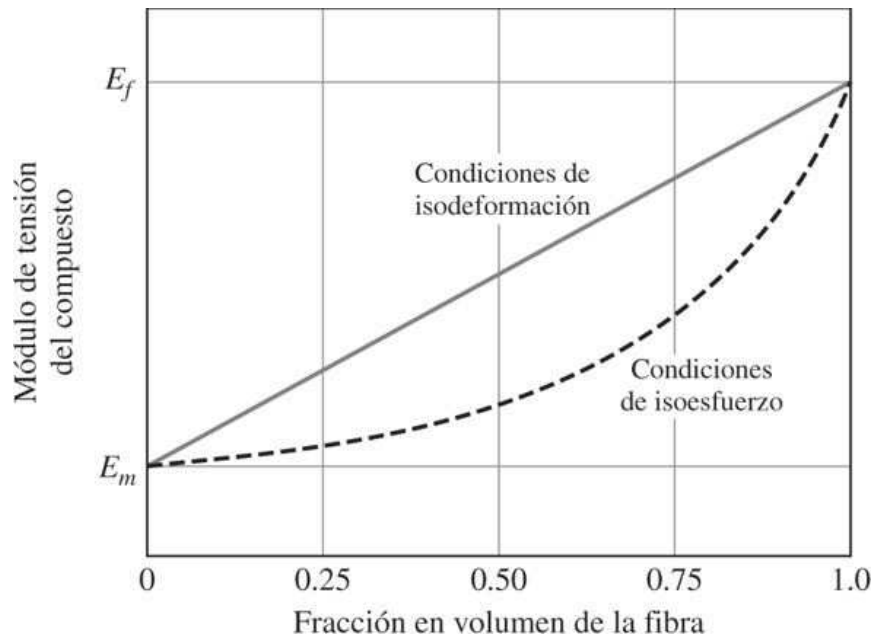


Figura 2.4. Representación esquemática del módulo de tensión elástico en función de la fracción del volumen de la fibra en un compuesto laminado unidireccional sometido a carga en condiciones de isodeformación e isoesfuerzo [4].

Como se puede observar en la imagen superior, el material cargado en condiciones de isodeformación tiene un módulo más alto para determinadas fracciones de volumen de fibra.

La determinación del módulo de Poisson, ν_{12} , se obtiene a partir de un análisis similar al de las condiciones de isodeformación. El módulo de Poisson se define como:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.25.)$$

para estados de tensión $\sigma_1 = \sigma$ con el resto de tensiones iguales a cero. Ahora se va a asumir que las deformaciones en las fibras son idénticas a las deformaciones de la matriz en la dirección de las fibras, con lo que se va a aproximar a isodeformación. La deformación transversal de forma macroscópica y microscópica será:

$$\Delta_w = -W\varepsilon_2 = W\nu_{12}\varepsilon_1 \quad \Delta w = \Delta_{mW} + \Delta_{rW} \quad (2.26.)$$

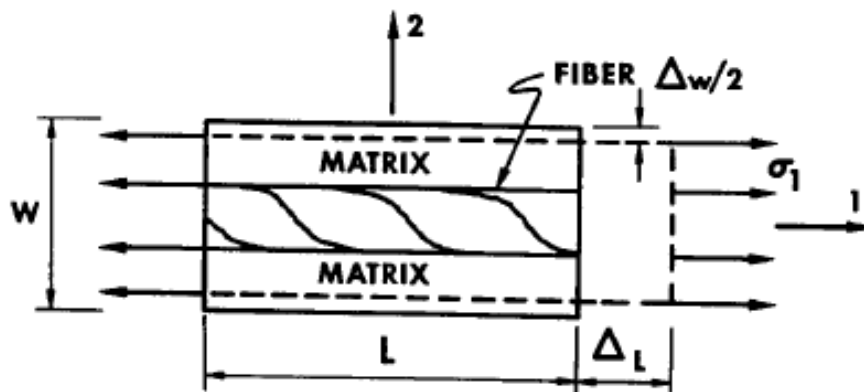


Figura 2.5. Representación del elemento cargado en la dirección 1 [3].

Si se realiza un análisis similar al de las condiciones de isoesfuerzo, las deformaciones transversales serán aproximadamente:

$$\Delta_{mw} = WV_m v_m \epsilon_1 \quad \Delta_{fw} = WV_f v_f \epsilon_1 \quad (2.27.)$$

Combinando las ecuaciones (2.26.) y (2.27.) y se divide por $\epsilon_1 \cdot W$ obtendremos:

$$v_{12} = v_m V_m + v_f V_f \quad (2.28.)$$

Lo que es la regla de las mezclas para el módulo de Poisson y que actúa de manera similar al módulo de Young en condiciones de isodeformación como se ve en la figura 2.6. Debido a que el módulo de Poisson en la matriz y en la fibra tiene valores parecidos, el módulo de Poisson del composite será neutral, es decir, no domina ni la fibra ni la matriz.

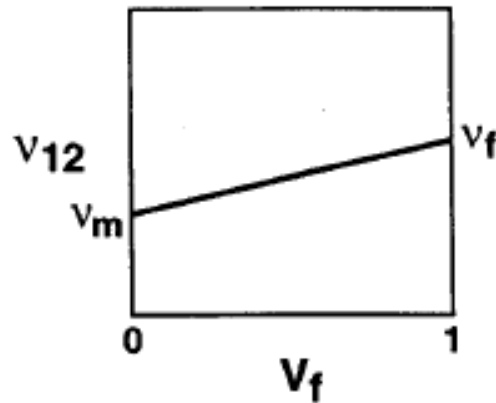


Figura 2.6. Representación esquemática de la variación del módulo de Poisson frente al volumen de fibra [3].

El módulo de cortante en el plano 12, G_{12} , se determina mediante la aproximación de que las tensiones cortantes en la fibra y la matriz son la misma (aunque esto claramente no es real). Esta suposición se muestra en la figura 2.7.

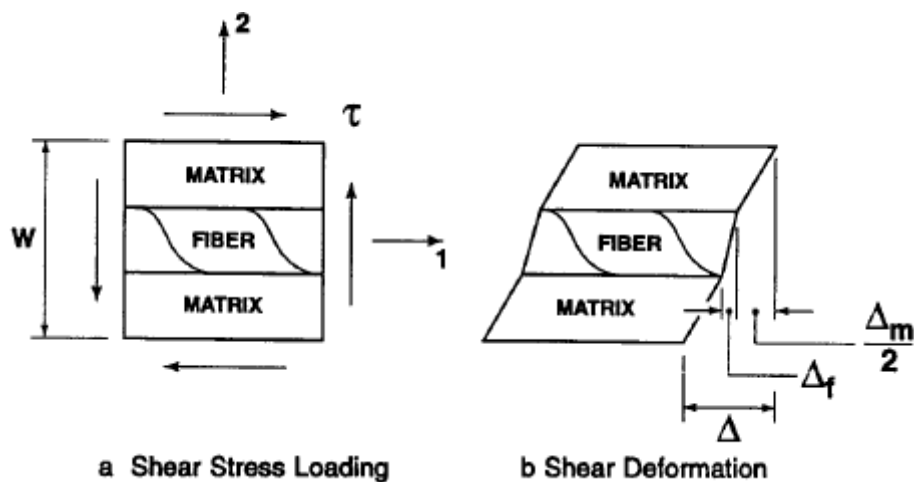


Figura 2.7. Representación del elemento cargado a cortante junto a su deformación [3].

Según lo comentado, podemos decir que:

$$\gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad (2.29.)$$

La matriz va a sufrir una deformación mayor que la fibra debido a que su módulo a cortante va a ser menor. La deformación total a cortante será:

$$\Delta = \gamma W \quad (2.30.)$$

Y las componentes de la deformación de la matriz y la fibra:

$$\Delta_m = V_m W \gamma_m \quad \Delta_f = V_f W \gamma_f \quad (2.31.)$$

Si sumamos las dos ecuaciones anteriores tendremos la deformación total. Ahora sustituyendo en (2.30) y dividiendo por W tendremos:

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f \quad (2.32.)$$

Si tomamos las ecuaciones (2.29.) y las sustituimos en (2.32.) tenemos:

$$\frac{\tau}{G_{12}} = V_m \frac{\tau}{G_m} + V_f \frac{\tau}{G_f} \quad (2.33.)$$

Con lo que despejando G_{12} se tiene:

$$G_{12} = \frac{G_m G_f}{V_m G_f + V_f G_m} \quad (2.34.)$$

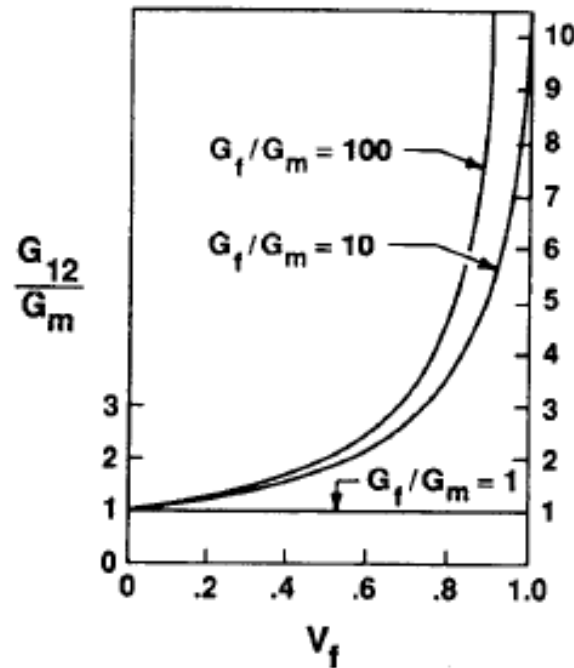


Figura 2.8. Representación de la variación de G_{12} con respecto al volumen de fibra [3].

Como se puede ver en la figura 2.8., a partir de un porcentaje de fibra mayor que el 50% del total el cortante G_{12} asciende por encima del doble incluso cuando tenemos el caso $G_f/G_m = 10$. Con esto demostramos que el módulo a cortante está dominado por la matriz.

2.1.2. Análisis de vibraciones mecánicas en materiales compuestos.

Un movimiento que se repite continuamente durante un intervalo de tiempo definido recibe el nombre de vibración u oscilación. La teoría de las vibraciones trata del estudio de los movimientos oscilatorios de cuerpos y las fuerzas asociadas a este fenómeno. [7]

Cuando estudiamos un sistema real, siempre se va a determinar un modelo matemático equivalente, para poder simplificarlo y poder trabajar con las características o propiedades físicas. Estas características serán llamadas parámetros vibracionales.

En cualquier sistema mecánico vamos a tener tres parámetros importantes; la rigidez (k), la masa (m) y el amortiguamiento (c). A su vez, estarán asociados a tres tipos de fuerzas características; las fuerzas elásticas, las fuerzas de inercia y las fuerzas de disipación de energía, respectivamente.

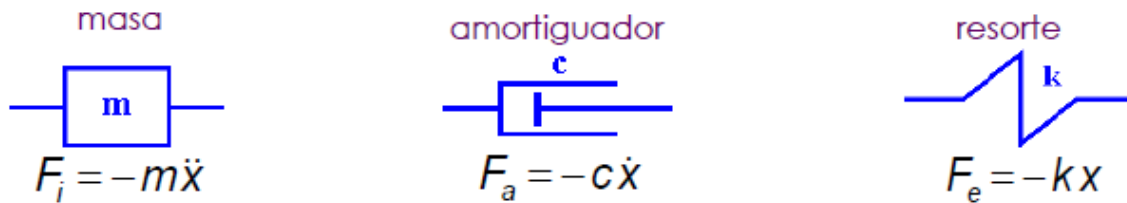


Figura 2.9. Fuerzas asociadas a un sistema mecánico vibracional [8]

A partir de estos parámetros, podremos simplificar nuestro modelo matemático, consiguiendo un menor número de incógnitas a resolver. El número de variables independientes va a recibir el nombre de grados de libertad. [2]

Los sistemas con un grado de libertad son los sistemas más sencillos de resolver. En muchos casos suelen bastar para resolver problemas prácticos y las propiedades de estos aparecerán en sistemas de mayor grado de libertad. También, podremos descomponer sistemas de altos grados de libertad y superponer sistemas de un grado de libertad obteniendo el sistema complejo. Con esto podemos deducir que se tratan de uno de los sistemas más importantes en la teoría de vibraciones y que en gran parte de los casos será el método a usar. [8]

Se sabe que si se retira un sistema de su posición de equilibrio y se suelta, comienza a vibrar con una amplitud que se va amortiguando más o menos rápido, según el sistema disponga de mayor o menor facilidad para disipar energía. A estas vibraciones, que tienen lugar en un sistema en ausencia de fuerzas externas y son debidas únicamente a unas determinadas condiciones iniciales de velocidad y/o desplazamiento, se les conoce como vibraciones libres.

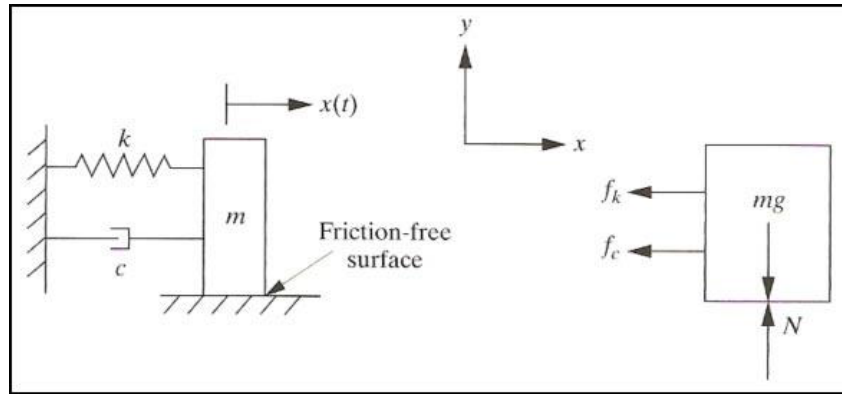


Figura 2.10. Diagrama de cuerpo libre. Vibración libre [8].

El análisis matemático comienza mediante el diagrama de cuerpo libre, tal y como se ve en la figura. Este constará de una masa, un muelle y un amortiguador, representando la inercia, la rigidez y el amortiguamiento respectivamente [8]. Realizando un equilibrio de fuerzas vamos a tener:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.35.)$$

A partir de esta podemos obtener una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo grado en la que obtenemos la posición de la masa en función del tiempo [8]. La solución de segundo grado será:

$$x(x, y, t) = X(x, y)e^{rt} \quad (2.36.)$$

Si resolvemos la ecuación y suponemos que no existe amortiguamiento, obtendremos un valor de r tal que:

$$r = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_n \quad (2.37.)$$

donde ω_n es la frecuencia natural bajo la que oscila el sistema.

De esta manera se demuestra que las frecuencias naturales de un elemento son directamente proporcionales a la rigidez del mismo, e inversamente proporcional a su masa [8]. La solución quedará:

$$x(x, y, t) = X_1(x, y) e^{i\omega_n t} + X_2(x, y) e^{-i\omega_n t} \quad (2.38.)$$

A partir de esta solución vamos a realizar el desarrollo de nuestro estudio analítico con el método de Ritz.

El método de Ritz (llamado por algunos autores como [17], [18], [19] y [20] método de Rayleigh-Ritz) es un método semianalítico que nos proporciona una solución aproximada a problemas de vibraciones libres, esto es, mediante su uso se pueden obtener las frecuencias principales y los modos de vibración de la placa. Este método está basado en el principio de la Mecánica de Hamilton que establece que la diferencia entre las energía potencial elástica (U) y energía cinética (T) debe ser un mínimo [9].

La ecuación que va a dictar el movimiento es la (2.38.) la cual se adapta al problema de vibración de placas, teniendo en cuenta las condiciones de contorno específicas. Al tratarse de una vibración libre, no vamos a tener componente temporal. Quedará de la siguiente manera:

$$w(x, y) = W(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2.39.)$$

siendo X_m y Y_n funciones compatibles con las condiciones de contorno, M y N el número de términos de los sumatorios y A_{mn} un conjunto de parámetros.

La energía elástica de deformación almacenada en un cuerpo elástico en un caso general se calcula mediante la expresión:

$$U = \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}) dx dy dz \quad (2.40.)$$

En el estudio de placas, se va a usar la hipótesis de Kirchhoff para simplificar el problema. Una de estas hipótesis dice que en los planos normales al plano medio permanecen normales al plano medio tras la deflexión, por lo que las deformaciones verticales serán despreciables [9].

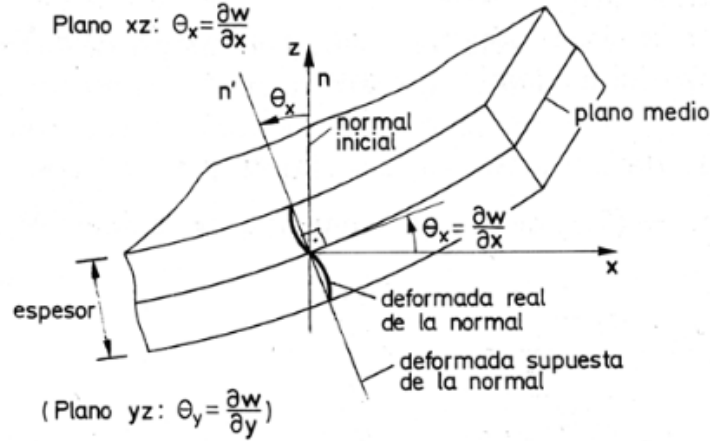


Figura 2.11. Aplicación de la hipótesis de Kirchhoff en deformaciones verticales [9].

Aplicándolo la ecuación se representa:

$$U = \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z) dx dy dz \quad (2.41.)$$

Desarrollando la fórmula de la energía elástica e integrando sobre el espesor nos quedará:

$$U = \frac{1}{2} \int \int_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4 D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4 D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.42.)$$

siendo D_{11} , D_{22} , D_{66} , D_{12} , D_{16} y D_{26} las constantes de rigidez del material y w la ecuación del movimiento.

Ahora, en cuanto a la ecuación de la energía cinética, se parte de:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz \quad (2.43.)$$

con ρ como la densidad del material.

De nuevo, para el caso de placa, se puede simplificar la ecuación mediante las hipótesis de Kirchhoff. Ahora, se empleará la siguiente: el plano medio permanecerá indeformado tras la deflexión ($u_0=u(z=0)=v_0=v(z=0)=0$). Tras simplificar e integrar sobre el espesor quedara:

$$T = \frac{1}{2} \iint_A \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2.44.)$$

donde h es el espesor.

Si a (2.44.) le aplicamos la ecuación (2.39.) y como se conoce que el término temporal no tendrá efecto se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \iint_A \rho h \omega^2 w^2 dx dy \quad (2.45.)$$

siendo ω la frecuencia angular, ρ la densidad y h el espesor de la placa.

Como se comentó anteriormente, el método establece que la diferencia entre las energía potencial elástica (U) y energía cinética (T) debe ser un mínimo y si observamos la ecuación que nos dará el movimiento de la placa; se observa como A_{mn} será la única variable [9]. Por lo que, para hallar los mínimos se derivará con respecto a estos parámetros y se impone la condición de mínimo.

$$\frac{\partial(U-T)}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (2.46.)$$

Si se introduce (2.42.) y (2.45.) en (2.46.), junto con (2.39.) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_k \iint_{A^k} \left(D_{11}^k \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^k X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\ + D_{12}^k \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4 D_{66}^k \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\ + 2 D_{16}^k \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\ + 2 D_{26}^k \left(\frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \Big) dx dy \\ \left. - \sum_k \iint_{A^k} \rho^k h^k \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n dx dy \right\} A_{ij} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{con } m=1, \dots, M \text{ y } n=1, \dots, N \quad (2.47.)$$

Analizando la expresión se puede observar cómo se trata de un sistema de ecuaciones de tamaño $M \times N$, siendo A_{ij} las incógnitas. Esto de forma matricial se representa:

$$(K - M\omega^2)A_{ij} = 0 \quad (2.48.)$$

Este sistema será homogéneo, compatible determinado. Por esto, solo tendrá soluciones distintas de la trivial para un conjunto discreto de valores que hacen que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero, haciendo que el sistema sea compatible indeterminado. Esto es:

$$|K - M\omega^2| = 0 \quad (2.49.)$$

Todo este cálculo será realizado detalladamente en el tercer apartado.

2.2. Correlación digital de imágenes DIC-3D.

2.2.1. Fundamentos de la técnica DIC-3D.

En la actualidad, las técnicas de correlación digital de imágenes son técnicas de campo completo totalmente consolidadas y utilizadas en el campo de la mecánica experimental.

Durante los años anteriores al uso de esta técnica, la información que se obtenía durante los ensayos vibracionales estaba limitada por los sensores de medición. Estos únicamente permiten obtener la respuesta a la frecuencia del elemento en un campo discreto.

Los avances en la captura y procesado de imágenes digitales ha permitido monitorizar la forma inicial, junto a su deformada, de estructuras o elementos sometidos a vibración.

La técnica de correlación digital de imágenes (DIC) permite obtener los desplazamientos y las deformaciones que sufre un elemento. Para ello se ayuda de un patrón en la superficie del elemento a estudiar conformado por pequeñas manchas aleatorias de alto contraste, denominado *speckle*.

El procesamiento que realiza el software tras la captura de imágenes consta de una primera división de la imagen de referencia en pequeñas zonas llamadas facetas, todas del mismo tamaño, cuyo valor promedio, se asigna al pixel central de cada faceta.

Tras la división de la imagen en facetas, el sistema tomara los valores de intensidad de la luz que llega a los alrededores de los píxeles que ocupan el centro de cada faceta. Los valores serán almacenados en una matriz a partir de una escala numérica de grises. A través del proceso de correlación de imágenes, el software es capaz de reconocer el posicionamiento de las facetas de la imagen inicial y los de la deformada con ayuda de los valores de intensidad lumínica registrados.

Finalmente, el software también será capaz de detectar y representar los campos de deformación y desplazamiento del elemento en base a los puntos tomados en la matriz.

Si en lugar de usar una única cámara, pasamos al uso de dos cámaras; añadiremos a los desplazamientos en el plano XY, los desplazamientos producidos en el eje Z mediante la visión estereoscópica. Con esto será requisito un proceso de sincronización y calibración.

2.2.2. Estado del arte en la aplicación de DIC-3D en el análisis vibracional.

Durante el uso y desarrollo de la técnica de correlación digital de imágenes, numerosos investigadores han investigado las formas de los modos propios durante los ensayos vibracionales. Los presentados a continuación, muestran la utilidad del DIC-3D en ensayos de alta complejidad analítica:

El primer artículo del que vamos a hablar es *Comparison of FRF measurements and mode shapes determined using optically image based, laser, and accelerometer measurements* [11] realizado por Christopher Warren y Christopher Niezrecki. En él se presentan las bases de la técnica DIC-3D, la cual, su principal

interés es el de ser una técnica de no contacto que permite modelar miles de puntos a partir de una captura fotográfica.

Para aplicar la técnica en este estudio se fabricó una base en forma de T invertida; la cual será vibrada a sus frecuencias naturales tal como se presenta en la figura 2.13.

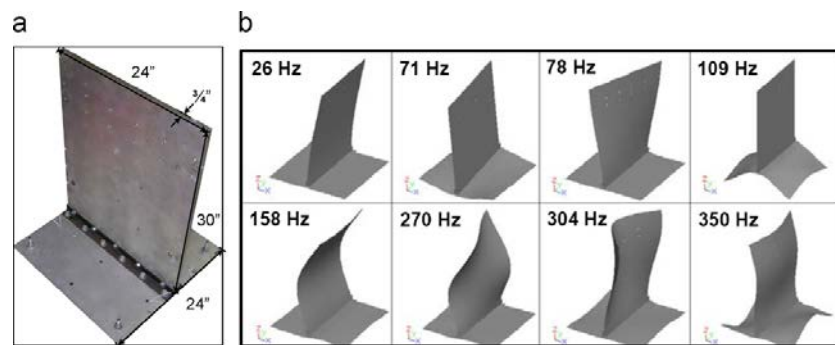


Figura 2.12. Frecuencias naturales de la base a ensayar [11].

Los datos obtenidos a través de DIC-3D fueron comprobados mediante otros datos experimentales a través de un acelerómetro y por un vibrómetro laser Doppler. Por ejemplo para el primer modo y tercer modo se obtuvo:

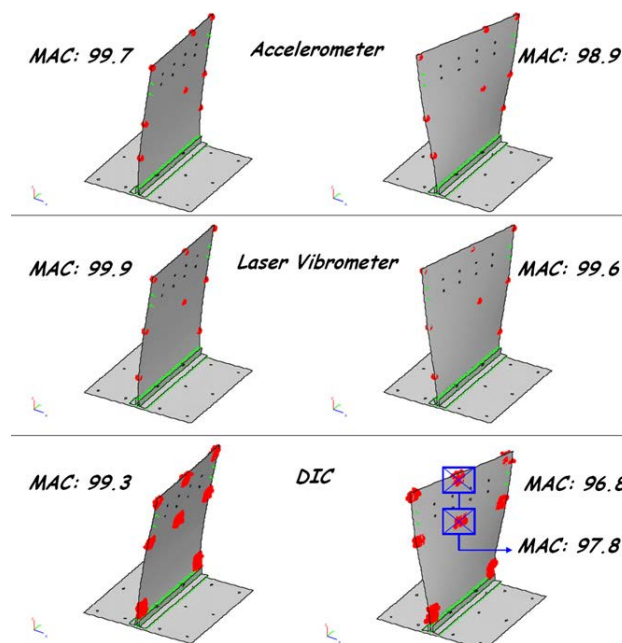


Figura 2.13. Valores MAC para el primer y tercer modo [11].

El termino MAC (Modal Assurance Criterion) es un valor calculado a partir del Software FEMtools que nos indica la precisión de las técnicas usadas en el ensayo. Como se puede comprobar, los valores de MAC son bastante buenos, lo que da por tanto una buena correlación en los resultados.

Centrándonos más en investigaciones que buscan el estudio de objetos de uso común tenemos el realizado por Mark Helfrick y Christopher Niezrecki bajo el nombre de *3D digital image correlations methods for full field vibration measurement* [12]. Para la explicación del método parten de la vibración de una chapa metálica que forma parte de una secadora a la cual van a obtener los tres primeros modos de vibración. Las condiciones de contorno de la placa fueron libres en su contorno y el estímulo sería dado a partir de un *shaker* en uno de sus extremos.

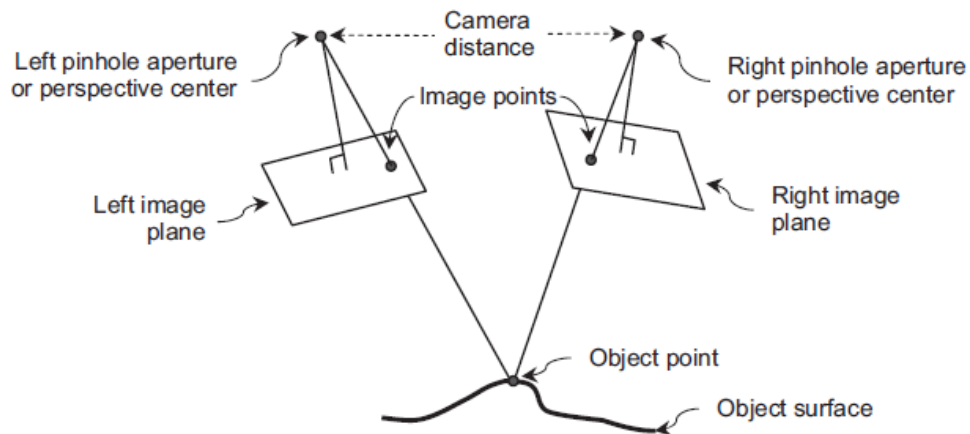


Figura 2.14. Posición de las cámaras estereoscópicas en la captura de imágenes 3D [12].

Para el experimento las imágenes fueron capturadas cada 3 kHz lo que permitió 15 imágenes por cada ciclo de vibración. Se realizaron tres ensayos, uno para cada modo de vibración. El tamaño de las facetas se fijó en 13 píxeles para dar lugar a 7000 puntos en cada ensayo.

Finalmente, para poder hacer una comparación con los resultados obtenidos, se realizó ensayos mediante martillo instrumentado y vibrometro laser, para obtener las vibraciones y los modos respectivamente, obteniendo resultados similares.



Figura 2.15. Montaje experimental [12].

En otros estudios, se busca la forma de los modos propios como es el caso de una pala de aerogenerador. Esta realizado por Javad Baqersad y Jennifer Carr y su título es *Dynamic characteristics of a wind turbine blade using 3D digital image correlation* [13]. La metodología que se lleva a cabo es similar a la del anterior trabajo; la pala es fijada para posteriormente ser excitada mediante un shaker. La respuesta que se obtenga será capturada a través de dos cámaras de alta velocidad.

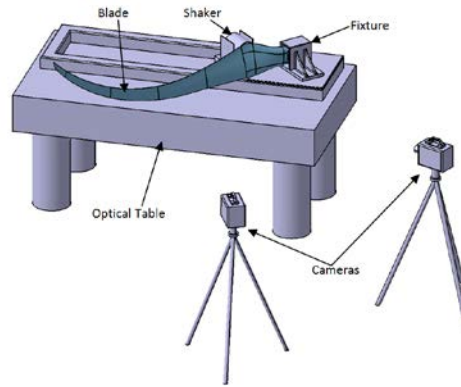


Figura 2.16. Montaje experimental [13].

También, como en el anterior artículo, se realizara un ensayo mediante el martillo instrumental y un estudio FEM (Finite Elements Method) para poder comparar los valores.

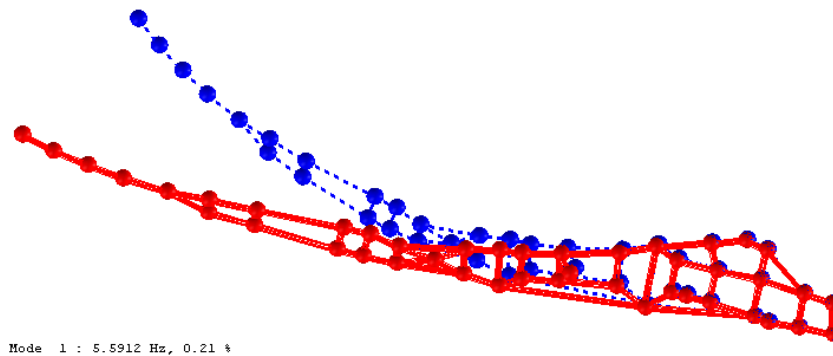


Figura 2.17. Forma del primer modo de vibración con DIC [13].

Por último, tenemos el estudio realizado por Ngoc San Ha y Tailie Jin, titulado *Modal analysis of an artificial wing mimicking an Allomyrina dichotoma beetle's hind wing for flapping-wing micro air vehicles by noncontact measurement techniques* [14]. En comparación con los dos artículos anteriores, aquí se basan en la naturaleza, concretamente en las alas de un insecto, para obtener el funcionamiento de estas frente a fuerzas dinámicas para así poder aplicarlas a dispositivos voladores cuya finalidad es el reconocimiento o rescates en zonas de difícil acceso o condiciones extremas.

2.3. Estudio numérico del análisis vibracional.

La respuesta de un sistema físico a una acción es difícil de encontrar ya que supone resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que representan el fenómeno, y eso es prácticamente imposible para la mayoría de los casos. El Método de Elementos Finitos ofrece una manera apropiada para obtener soluciones suficientemente aproximadas a casi todos los problemas de ingeniería.

El Método de Elementos Finitos (FEM) consiste en la simulación de un sistema físico (con sus geometrías y condiciones de carga) por aproximación matemática de un sistema real. Se basa en la división o discretización en bloques simples e interrelacionados (elementos), en las que infinitas incógnitas de un sistema físico se convierten en un número finito de incógnitas.

Los elementos son representaciones matemáticas de la interacción entre los grados de libertad de un conjunto de nodos. Estos podrán ser lineales, superficiales, volumétricos o puntuales; a la vez que pueden ser bidimensionales o tridimensionales. Un nodo es un punto donde se considera que existen grados de libertad y serán los puntos que soporten las acciones del sistema físico. Por último, los grados de libertad son las posibilidades de cambio que se reconocen en los nodos del sistema como consecuencia del fenómeno analizado, es decir, por ejemplo si estamos ante un análisis estructural, los grados de libertad serán los desplazamientos y giros del nodo.

Dentro del análisis FEM, los elementos estarán unidos entre sí, lo que supone una coincidencia de nodos entre elementos vecinos.

El FEM calcula los valores de los grados de libertad en los nodos únicamente, para calcular el resto del elemento recurre a las funciones de forma. La función de forma de un elemento es una función matemática que permite interpolar las soluciones a los grados de libertad desde los nodos a los demás puntos del elemento. Estas funciones de forma generalmente son polinomios cuyo grado depende del tipo de elemento y junto con las propiedades del material da el comportamiento del elemento. Para poder conseguir una mejor aproximación al

modelo real podemos realizar dos procedimientos, aumentar el número de nodos del modelo o aumentar el grado del polinomio de las funciones de forma. A su vez, esto implica un mayor gasto computacional. [15]

2.3.1. Análisis de elementos finitos en estructuras a través del software Ansys Mechanical.

En un análisis de elementos finitos, vamos a tener tres pasos fundamentales:

- Construcción del modelo. En el que:
 - o Creamos una geometría o la importamos (.catpart, .stp...). ANSYS trae su propio programa de diseño (DesingModeler™), que nos permite generar geometrías simples.

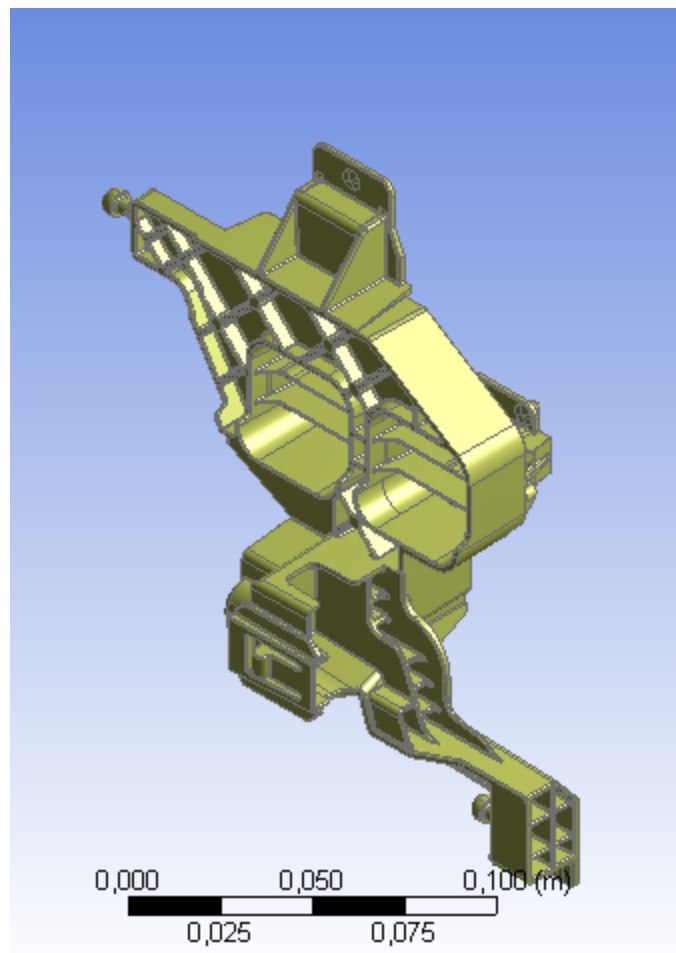


Figura 2.18. Importación de modelo CAD en ANSYS™.

- o Definimos los materiales de los que se va a componer nuestro modelo. En nuestro caso, al ser un análisis modal, deberemos de definir la densidad y las constantes de rigidez (módulo de Young, coeficiente de Poisson y el módulo de elasticidad transversal)
- o Generación de la malla; es decir, creación de los elementos y nodos que definirán a nuestro modelo. Este será uno de los pasos más importantes, ya que según el tipo de malla usada, tendremos mejores resultados; a la vez que tendremos una variabilidad en el coste computacional.

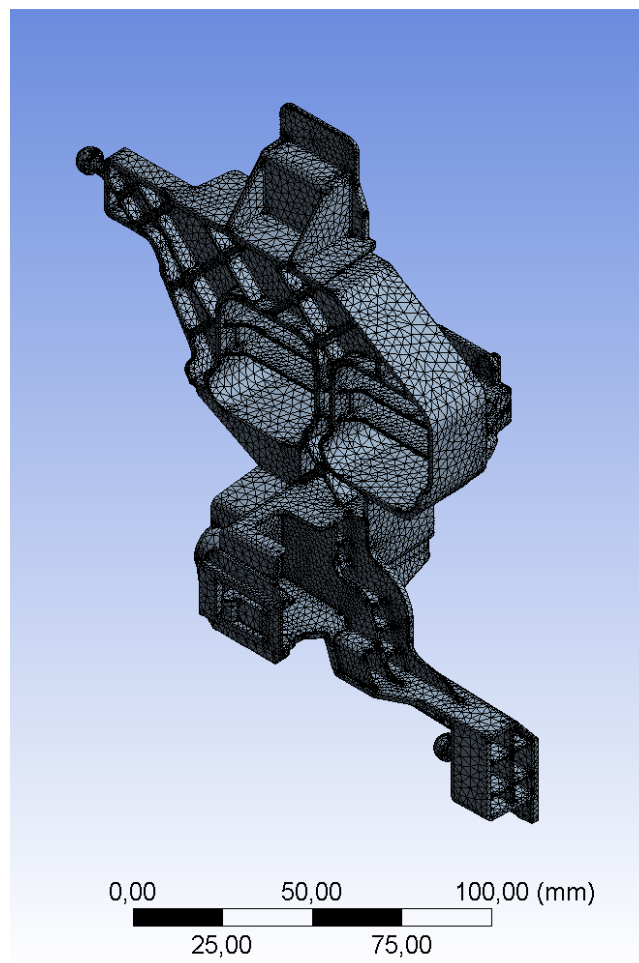


Figura 2.19. Generación de malla tetraédrica en ANSYS™.

- Definición de análisis y aplicación de condiciones
 - o En la definición de condiciones tendremos las de contorno, los contactos y las cargas. Tanto las condiciones de contorno como las cargas son fáciles de aplicar, pudiendo ser desde las más simples, como por ejemplo, apoyos simples o fuerzas aplicadas en unos nodos respectivamente, hasta la posibilidad de definir una función de forma que nos caracterice la carga.
 - o Por otra parte, la aplicación de contactos es únicamente posible cuando tenemos dos modelos en el mismo estudio. ANSYS™, de forma automática, detecta los contactos simples producidos en la geometría pero los contactos más complejos, como por ejemplo los no lineales, deberán de ser definidos por el usuario, junto a las ecuaciones que gobernarán el contacto (p.e. contacto lagrangiano).

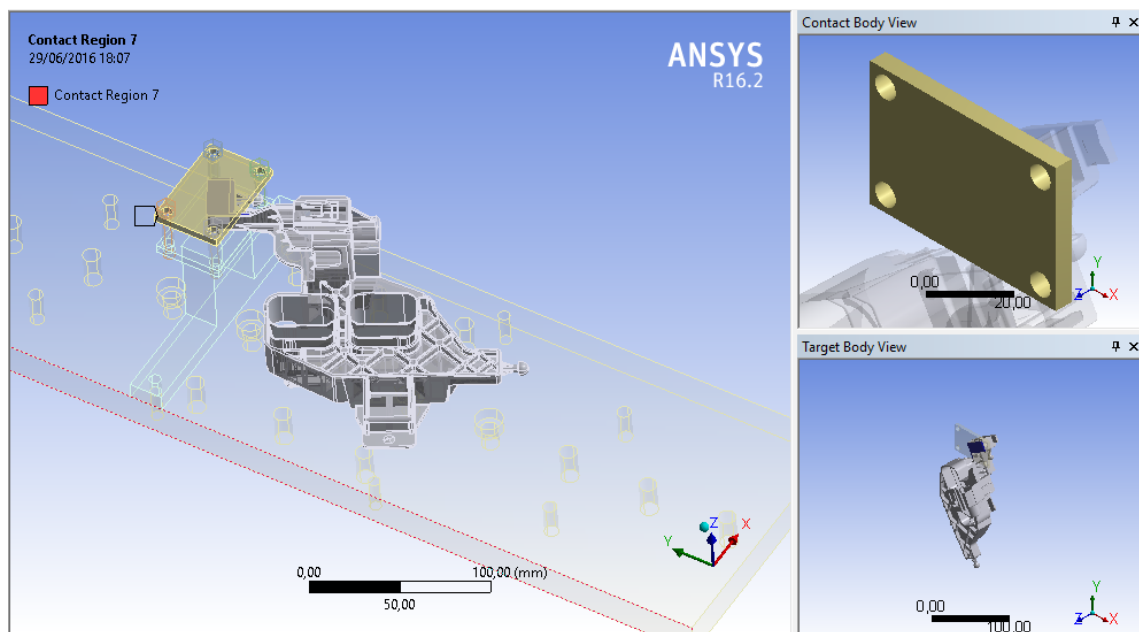


Figura 2.20. Definición de contactos en ANSYS™.

- o Tras esto, se procede a lanzar el cálculo. La duración de este estará condicionada por los distintos parámetros ya comentados como por ejemplo el tamaño de malla, la complejidad del modelo, la definición de contactos...
- Post-procesado
 - o Esta es la última etapa de un análisis de estructuras en cualquier Software de FEM. En nuestro caso, principalmente se buscara las deformaciones obtenidas en el modelo, y ver si cumple con unos criterios que previamente podremos identificar; por ejemplo que la deformación producida en el eje X no sea mayor que 2 mm.
 - o Aquí vamos a tener dos casos, que nuestro modelo cumpla con los requisitos establecidos con lo cual finalizamos el análisis, o por el contrario, que estos no sean satisfechos, lo que provocara buscar soluciones a los problemas generados y rehaciendo el análisis.

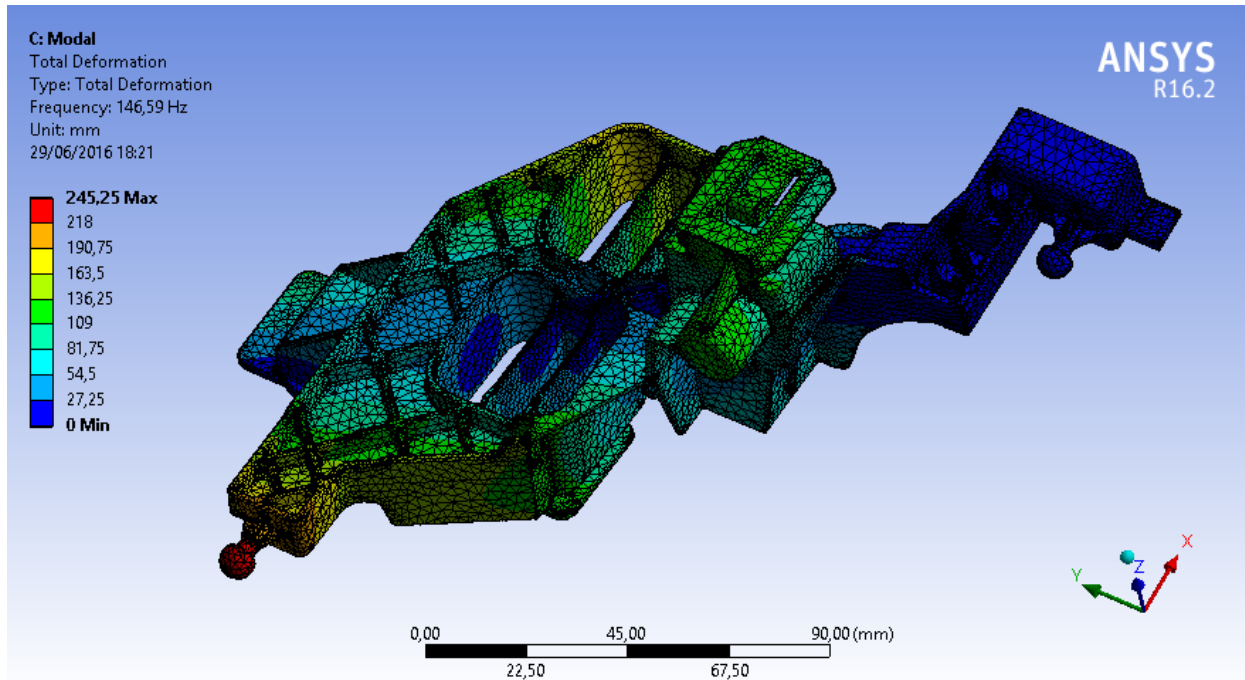


Figura 2.21. Resultados finales de un ensayo modal en ANSYS™.

3. Estudio analítico del problema en estudio

Durante el desarrollo del apartado se va a avanzar en lo presentado durante la introducción. Aquí trataremos los fundamentos de la Hipótesis de Ritz [9] (o Rayleigh-Ritz [18]), pasando por una explicación breve de la teoría de placas y acabando con la obtención de las frecuencias naturales junto a sus modos asociados.

3.1. Método Ritz para cálculo de vibraciones en placas.

Sean $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$ los desplazamientos en la placa respecto a las coordenadas x , y , z respectivamente, y sean ε_{ij} y σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) las componentes de los tensores de deformación y de esfuerzo, donde el primer subíndice indica la cara y el segundo la dirección en la que se aplica la deformación o el esfuerzo.

Para poder estudiar la deflexión de las placas, usaremos la hipótesis de Kirchhoff, como ya se hizo en la introducción [24]:

- La deflexión del plano medio de la placa es pequeña comparada con el espesor ($w \ll h$). Por tanto, la pendiente de la superficie deflectada será muy pequeña ($\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} < 1$) y su cuadrado será despreciable frente a la unidad ($\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 < 1$).
- El plano medio permanece indeformado tras la deflexión ($u_0 = u(z=0) = v_0 = v(z=0) = 0$).
- Los planos normales al plano medio permanecen normales al plano medio tras la deflexión, por tanto las deformaciones verticales serán despreciables ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0$).
- Los esfuerzos normales al plano medio son pequeños comparados con otros esfuerzos y pueden ser despreciados ($\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$).

Si se tiene una gran deformación; las dos primeras hipótesis no se cumplirán, mientras que si se está en el caso de placa gruesa, no se cumplirán las dos últimas.

Siguiendo las anteriores hipótesis, las relaciones entre deformación y desplazamiento van a quedar como:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1.)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.2.)$$

Con ϵ_z sabemos que 'w', que es la deflexión, será únicamente dependiente de x, y.

Con el resto de expresiones obtenemos las siguientes expresiones:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \epsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.3.)$$

Conocidas las relaciones de la deformación con la deflexión total, se estudiarán los cálculos de las energías elástica y potencial que serán luego aplicados en el método, tal y como se explicó en la introducción.

La energía elástica de deformación almacenada en un cuerpo elástico en un caso general se puede calcular mediante la expresión:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}) dx dy dz \quad (3.4.)$$

Que se puede simplificar a través de las hipótesis de Kirchhoff, quedando:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z) dx dy dz \quad (3.5.)$$

A partir de esta simplificación, y usando las ecuaciones de las deformaciones se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V z^2 \left[Q_{11}^k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + Q_{22}^k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4Q_{66}^k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2Q_{12}^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4Q_{16}^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4Q_{26}^k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy dz \quad (3.6.)$$

Ahora se integra en el espesor y sabiendo que $D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^k * z^2 dz$:

$$U = \frac{1}{2} \int \int_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3.7.)$$

Con esta fórmula se va a poder calcular la energía elástica de deformación de una placa. Como en el caso de estudio se va a tener una placa ortótropa; se podrán hacer las siguientes aproximaciones:

$$U = \frac{1}{2} \int \int_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (3.8.)$$

Ahora se pasará al cálculo de la energía cinética, que para un cuerpo elástico se puede calcular mediante:

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_V \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz \quad (3.9.)$$

siendo ρ la densidad del material.

Mediante el uso de la hipótesis de Kirchhoff se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_V \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \quad (3.10.)$$

Como $w=w(x, y, t)$, se puede integrar sobre la coordenada z , obteniendo finalmente:

$$T = \frac{1}{2} \int \int_A \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3.11.)$$

Obtenidas las formulas base, se pasa a aplicar el método de Ritz. El método de Ritz, tal como se comentó al inicio, es un método semianalitico que da una solución aproximada a problemas de vibraciones libres.

El método se basa en la Mecánica de Hamilton; en el que se debe de establecer un equilibrio de energías, en nuestro caso U y T, el cual debe de ser mínimo. Partiendo de la ecuación que gobierna el movimiento de la vibración, se tiene:

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (3.12.)$$

La cual será introducida en (3.11.) quedando:

$$T = \frac{1}{2} \int \int_A \rho h \omega^2 w^2 dx dy \quad (3.13.)$$

donde ω es la frecuencia angular.

Como se observa en (3.8.) y (3.13.), U y T solo dependen de $w(x, y)$, por lo que se asume una solución de la forma:

$$w(x, y) = W(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (3.14.)$$

Con $X_m(x)$ e $Y_n(y)$ funciones viga compatibles con las condiciones de contorno en los distintos ejes de la placa, M y N el número de términos de los sumatorios; que corresponden al número de modos en el eje x e y respectivamente y A_{mn} un conjunto de parámetros cuya explicación vendrá más adelante.

Siguiendo con el Método de Ritz, se realiza la diferencia de energías y se busca su mínimo. Y como A_{mn} son las únicas variables en el sistema se deriva con respecto a estos parámetros quedando:

$$\frac{\partial(U-T)}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (3.15.)$$

Si se introduce en (3.15.) las ecuaciones (3.8.) y (3.13.) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_k \iint_{A^k} \left(D_{11}^k \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^k X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\ + D_{12}^k \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4 D_{66}^k \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\ + 2 D_{16}^k \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\ + 2 D_{26}^k \left(\frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \Big) dx dy \\ \left. - \sum_k \iint_{A^k} \rho^k h^k \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n dx dy \right\} A_{ij} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{con } m=1, \dots, M; \quad n=1, \dots, N \quad (3.16.)$$

Analizando (3.16.) se podrá ver que se trata de un sistema de ecuaciones de tamaño $M \times N$, cuyas incógnitas son A_{ij} . En forma matricial quedará:

$$(K - M\omega^2)A_{ij} = 0 \quad (3.17.)$$

Este sistema será homogéneo, compatible determinado. Por esto, solo tendrá soluciones distintas de la trivial para un conjunto discreto de valores que hacen que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero, haciendo que el sistema sea compatible indeterminado. Esto es:

$$|K - M\omega^2| = 0 \quad (3.18.)$$

De esta manera tenemos un problema similar a uno de autovalores.

Las funciones $X_m(x)$ e $Y_n(y)$ deben de ser compatibles con las condiciones de contorno. En nuestro caso vamos a usar las funciones de Gartner, ya que otras formulaciones presentan problemas numéricos por el uso de funciones hiperbólicas.

$$X_m(x) = A_m \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) + B_m \sen\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) + C_m e^{\frac{-\gamma_m x}{a}} + D_m e^{\frac{-\gamma_m(a-x)}{a}} \quad (3.19.)$$

$$Y_n(y) = A_n \cos\left(\frac{\gamma_n y}{b}\right) + B_n \sen\left(\frac{\gamma_n y}{b}\right) + C_n e^{\frac{-\gamma_n y}{b}} + D_n e^{\frac{-\gamma_n(b-y)}{b}} \quad (3.20.)$$

donde a y b son los lados de la placa y A , B , C y D son parámetros dependientes de las condiciones de contorno.

Una vez que calculemos los parámetros señalados, que en la siguiente sección lo haremos para nuestra condición de contorno, quedaran definidas las funciones, y definiendo un numero de términos de los sumatorios M y N , podremos calcular los términos de las matrices K y M mediante integrales.

Por último, calculadas K y M procedemos a resolver el problema de autovalores. Obtendremos $M \times N$ valores de ω , a partir de los cuales obtendremos los valores de frecuencias naturales. Y a cada valor de ω , le corresponde una solución del sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas eran A_{mn} . Con esto, introduciendo A_{mn} junto con (3.19.) y (3.20.) en (3.14.) obtenemos los modos de vibración correspondientes a cada una de las frecuencias calculadas.

3.2. Placa biapoyada.

Para nuestro estudio vamos a emplear 3 tipos de placas fabricadas en CYPLY® 1002 de tamaños: 150x150x2.5 mm, 150x75x2.5 mm y 150x37.5x2.5 mm. Las características del material empleado vienen expuestas en la tabla 3.1:

	Dirección 1	Dirección 2
Módulo de elasticidad (GPa)	23.4	24.1
Coeficiente de Poisson	0.26	0.4
Módulo de elasticidad transversal (GPa)	4.1369	

Tabla 3.1. Parámetros principales CYPLY® 1002 [16].

Todo el desarrollo anterior ha sido programado en un *script* mediante Matlab®, para que así sea más fácil la implementación de otras condiciones de contorno; a la vez de la complejidad de cálculo de las mismas.

Para la condición apoyada-apoyada en el eje x , debemos de definir de la siguiente manera los parámetros antes comentados en (3.19.):

$$A_i = 0; \quad B_i = \sqrt{2}; \quad C_i = 0; \quad D_i = 0; \quad \gamma_i = i\pi \quad (3.21.)$$

Como se puede observar, aquí solo va a actuar la segunda parte de (3.19.) o lo que es lo mismo, vamos a tener una forma senoidal. El parámetro γ_i es el que nos va a determinar el modo en el que actuamos; mas concretamente i , que varía según este (1, 2, 3...)

Por otra parte, tenemos la condición libre-libre. Esta condición guarda una peculiaridad; y es que debemos de tener en cuenta de que sus dos primeros modos aparecen movimientos de solido rígido. De esta manera, la forma de los dos primeros modos queda respectivamente:

$$Y_1 = 1 \quad (3.22.)$$

$$Y_2 = \sqrt{3} \left(1 - \frac{2y}{b} \right) \quad (3.23.)$$

A partir del tercer modo, se usaran las mismas funciones que para el resto de casos.

Una vez definido los movimientos de solido rígido, podemos presentar los parámetros que actuaran en la ecuación (3.20.) a partir del tercer modo:

$$\begin{aligned} A_i &= 1; & B_i &= -\frac{1+(-1)^i e^{-\gamma_i}}{1-(-1)^i e^{-\gamma_i}}; & C_i &= \frac{1}{1-(-1)^i e^{-\gamma_i}} & (3.24.) \\ D_i &= -\frac{(-1)^i}{1-(-1)^i e^{-\gamma_i}}; & \cos(\gamma_i) &= \frac{2e^{-\gamma_i}}{1+e^{-2\gamma_i}} \end{aligned}$$

Ahora, el valor de γ_i esta definido por una función de la cual debemos de obtener sus raíces. Tras el cálculo obtenemos los primeros valores de este [17]:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
γ_i	4.73004074	7.85320462	10.9956078	14.1371655

Tabla 3.2. Valores de γ_i para los primeros cuatro modos [17].

Definidas ya las condiciones de contorno y las propiedades del material, pueden ser ya introducidas en el Método de Ritz a través de programa creado en MatLab®.

Como se comentó en la introducción, vamos a comprobar las variaciones que aparecen en el estudio de las distintas placas. Para ello, comenzaremos por estudio de frecuencias naturales en la placa de menor tamaño (150x37.5x2.5) y comparándola con la frecuencia obtenida a través de un elemento viga de las mismas dimensiones y mismas propiedades de material.

La ecuación que rige la frecuencia en una viga simple biapoyada es:

$$f = \frac{\lambda^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EIL}{M}} \quad (3.25.)$$

siendo L la longitud de la viga, E el módulo de elasticidad del material, I el momento de inercia de la sección de la viga y M la masa de la viga. λ es un parámetro adimensional que va a permitir variar la condición de contorno de la viga, en el caso de estudio se tiene la condición de apoyo simple-apoyo simple, por lo que el valor de λ será:

$$\lambda = i * \pi \quad (3.26.)$$

donde $i=1, \dots, N$ e indica el modo en el que está trabajando la viga.

De esta manera, se podrá calcular los valores de las frecuencias obteniendo:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x37.5	179.19	716.75	1612.7	2867	4479.7	6450.8

Tabla 3.3. Frecuencias obtenidas a partir de la formulacion de viga en placa de 150x37.5x2.5.

Obtenidos los valores, se dibujará la forma de la viga para así poder comparar los valores posteriormente.

Los modos obtenidos en una viga con condiciones de contorno apoyada-apoyada en sus extremos van a estar regidos por:

$$w(x) = \text{sen}\left(\frac{i*\pi*x}{L}\right) \quad (3.27.)$$

siendo L la longitud de la viga y i un parámetro adimensional que fija el modo en el que se trabaja con $i=1, \dots, M$.

Las formas que va a tomar la condición de viga para los tres primeros modos son:

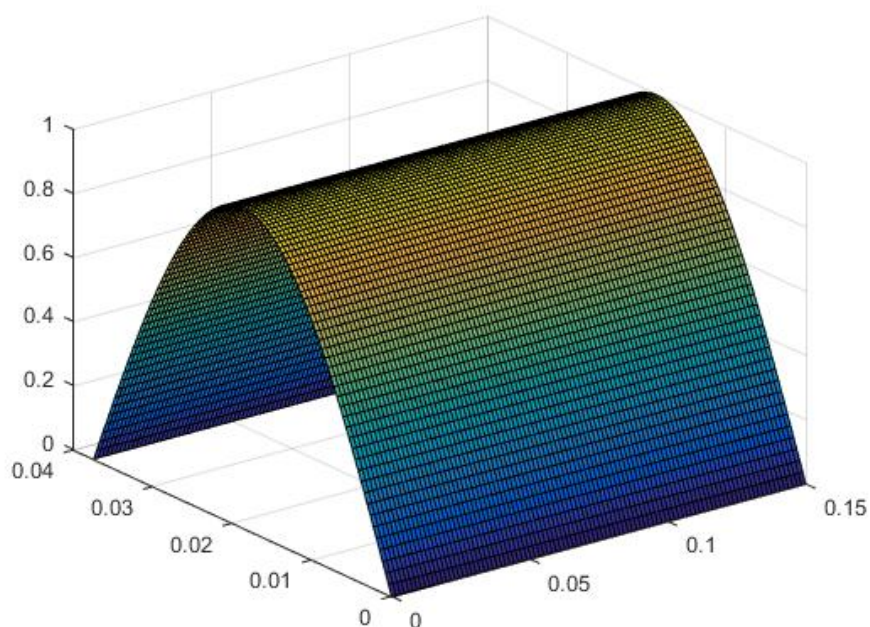


Figura 3.1. Forma del primer modo en condición de viga apoyada-apoyada.

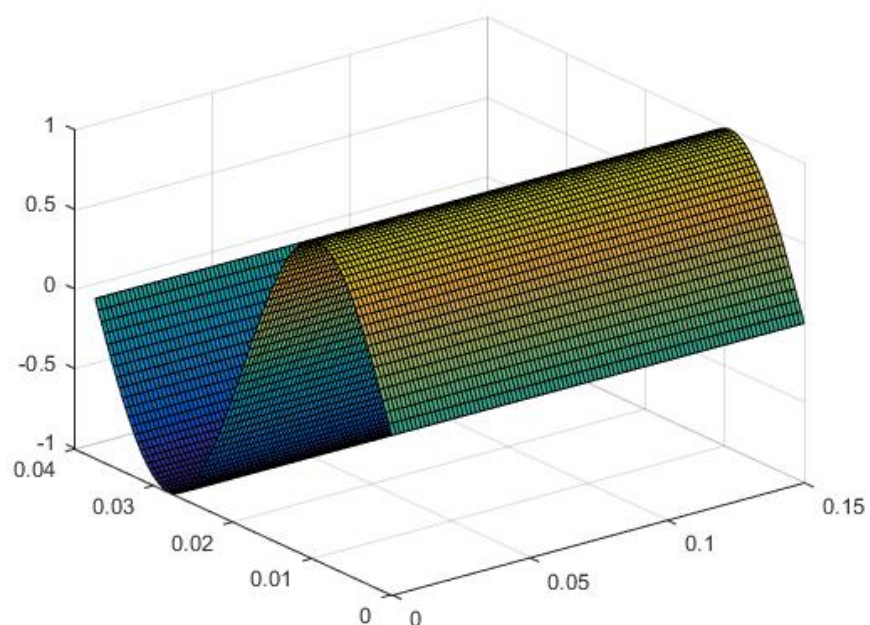


Figura 3.2. Forma del segundo modo en condición de viga apoyada-apoyada.

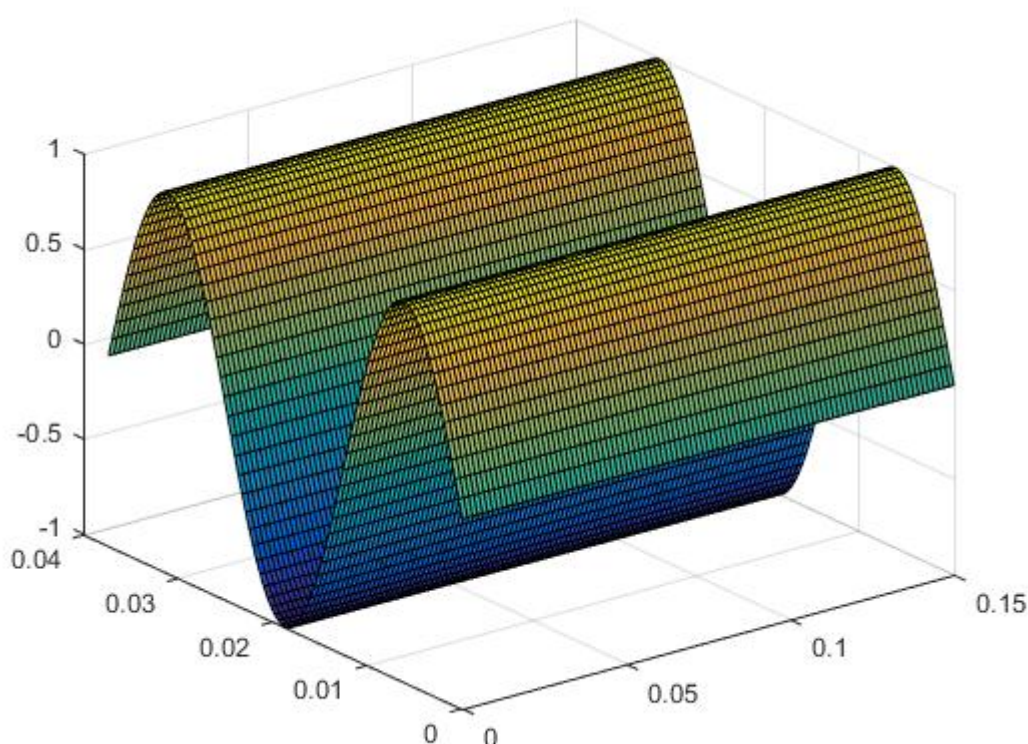


Figura 3.3. Forma del tercer modo en condición de viga apoyada-apoyada.

Ahora teniendo la base de la formulación de la viga, se va a seguir con la aplicación del Método de Ritz, siendo para los valores de frecuencia natural para la primera placa (150x37.5x2.5) de:

Placa	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x37.5	188.58	690.71	754.36	1527.4	1647.5	2615.7

Tabla 3.4. Frecuencias obtenidas para placa de 150x37.5x2.5 a partir del Metodo de Ritz.

Observamos como obtenemos variaciones entre ambas formulaciones. Estos resultados serán comentados al final de este apartado.

Siguiendo con la dinámica anterior; se pasa a calcular las formas de los modos en este primer caso:

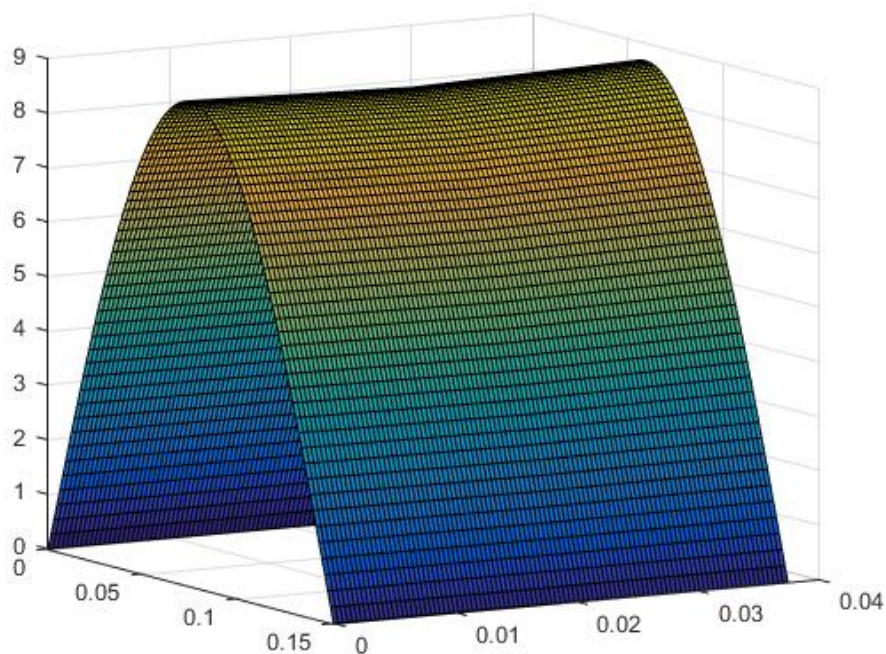


Figura 3.4. Forma del primer modo en placa de tamaño 150x37,5x2,5.

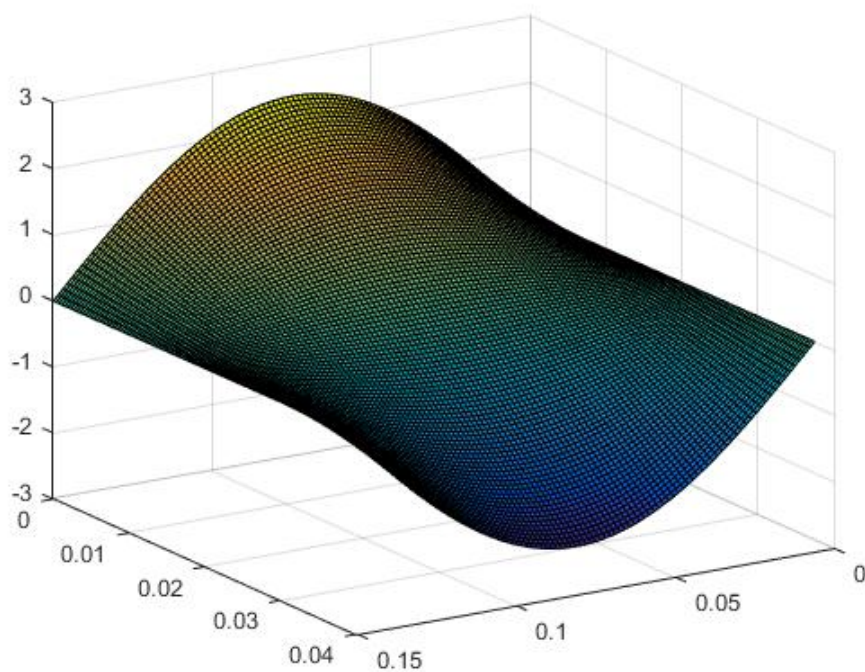


Figura 3.5. Forma del segundo modo en placa de tamaño 150x37,5x2,5.

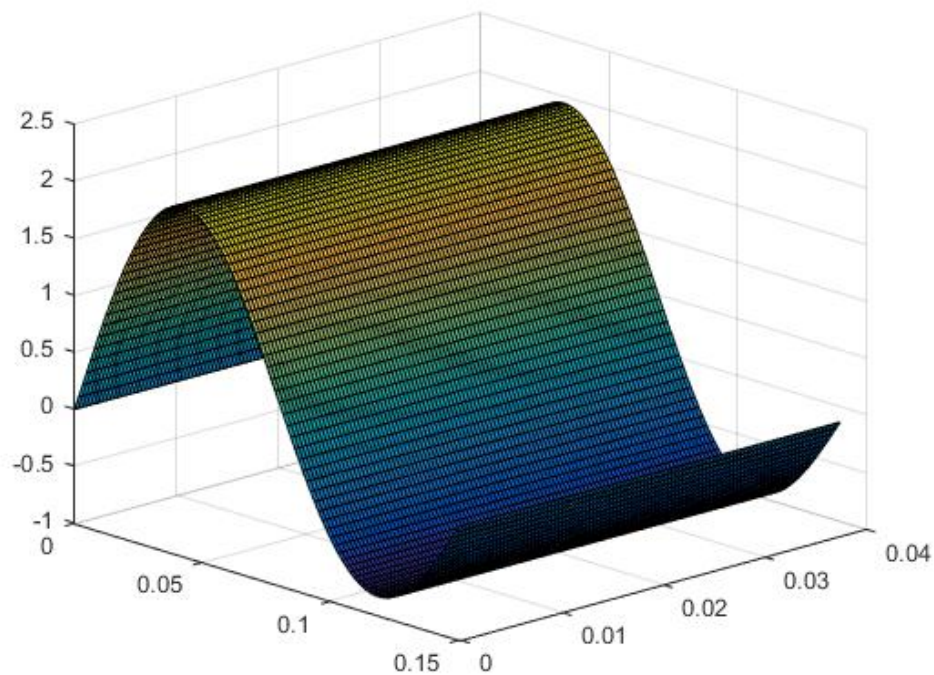


Figura 3.6. Forma del tercer modo en placa de tamaño 150x37,5x2,5.

Observando los modos se puede apreciar el porqué de las diferencias con respecto al caso de viga, pero de nuevo, esto será tratado al final del capítulo.

A continuación, se realiza el estudio de la placa que presenta una geometría de tamaño 150x75x2.5. En este caso, en principio deberíamos de alejarnos del caso de viga. Para ello, se calculará las frecuencias mediante el uso de la formula (3.25.) ya que podrían influir en ellas mediante la inercia I ($I = \frac{1}{12}bh^3$). Los modos no serán calculados ya que tendrán la mismas forma al ser (3.27.) una función dependiente exclusivamente de x .

Las frecuencias serán:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x75	179.18	716.75	1612.7	2867	4479.7	6450.8

Tabla 3.5. Frecuencias obtenidas a partir de la formulacion de viga en placa de 150x75x2,5.

Vemos como las frecuencias no varían en absoluto, por lo que se podrá decir que el valor de la inercia será insignificativo con respecto a los otros valores en (3.25.)

Ahora se aplicará el Método de Ritz para calcular las frecuencias naturales y sus modos propios de vibración:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x75	189.3	327.26	768.18	999.7	1211.4	1216

Tabla 3.6. Frecuencias obtenidas para placa de 150x75x2,5 a partir del Método de Ritz.

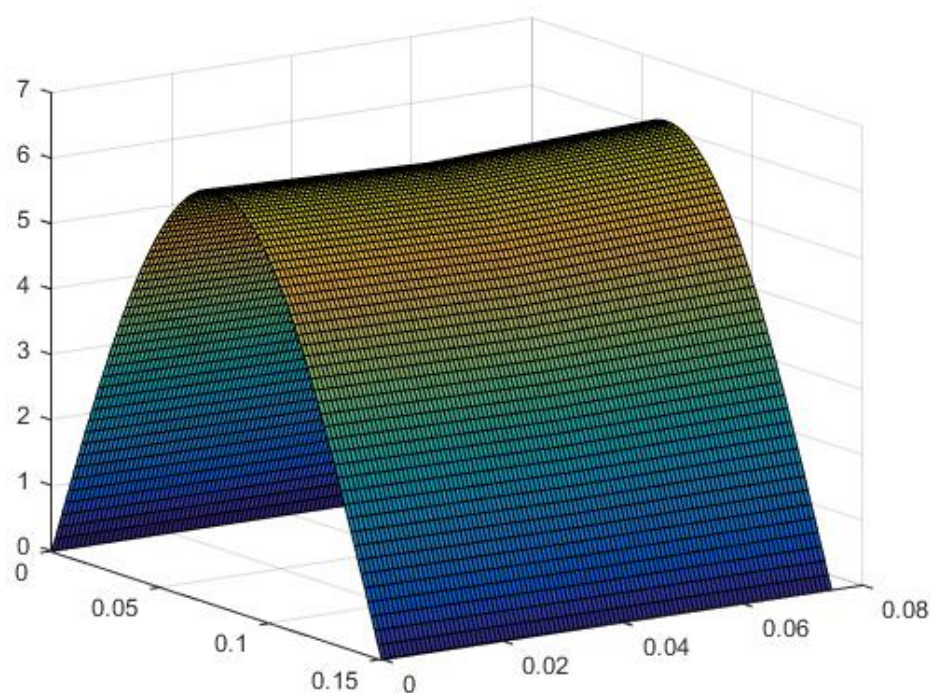


Figura 3.7. Forma del primer modo en placa de tamaño 150x75x2,5.

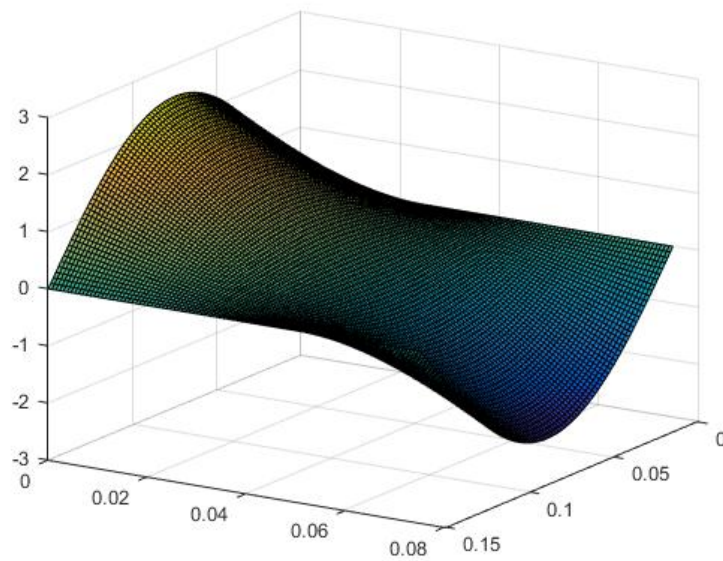


Figura 3.8. Forma del segundo modo en placa de tamaño 150x75x2,5.

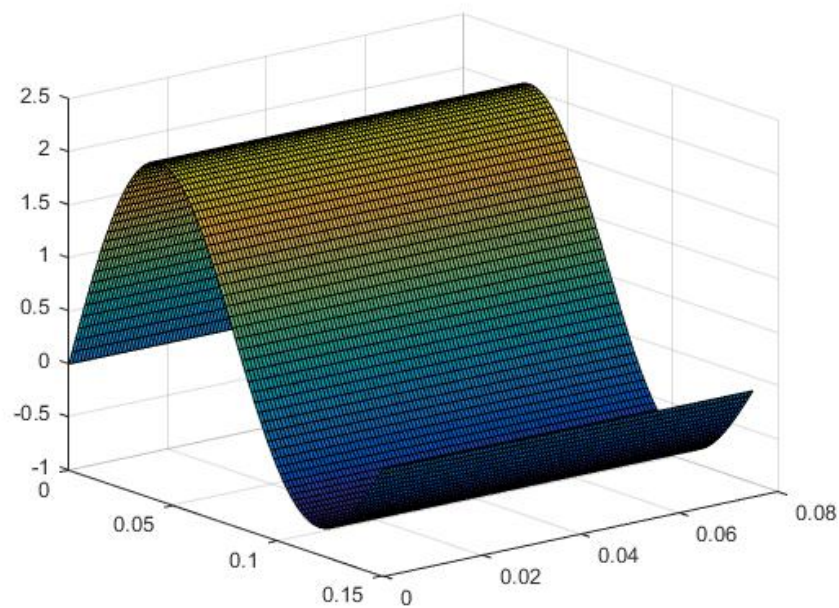


Figura 3.9. Forma del tercer modo en placa de tamaño 150x75x2,5.

Vemos de nuevo como se desvirtúan del caso con formulación viga.

Por último, tenemos la placa de tamaño 150x150x2.5, la de tamaño 150x150x2.5, en la cual se va a aplicar el Método de Ritz directamente. Según la teoría, para esta placa se encontrará el caso más alejado a la formulación de viga; con lo que los valores, tanto en frecuencia natural como modo deberán de variar. Aplicando el Método de Ritz se obtendrá:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x150	183.77	252.24	757.48	829.17	1703.7	1775.3

Tabla 3.7. Frecuencias obtenidas para placa de 150x150x2,5 a partir del Método de Ritz.

Ahora si se estudian los modos, se tiene entre algunos casos:

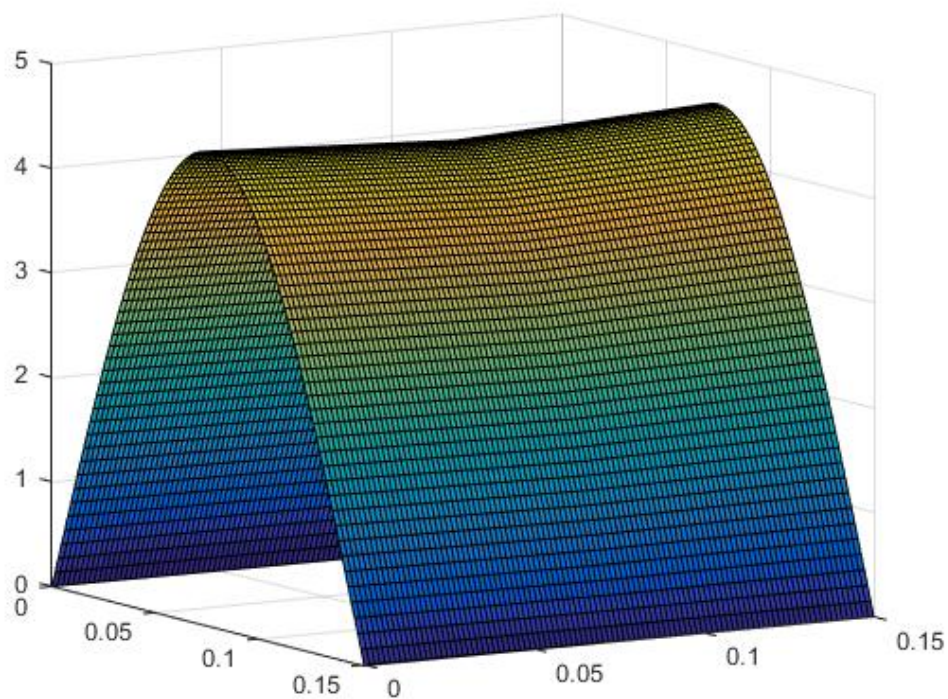


Figura 3.10. Forma del primer modo en placa de tamaño 150x150x2,5.

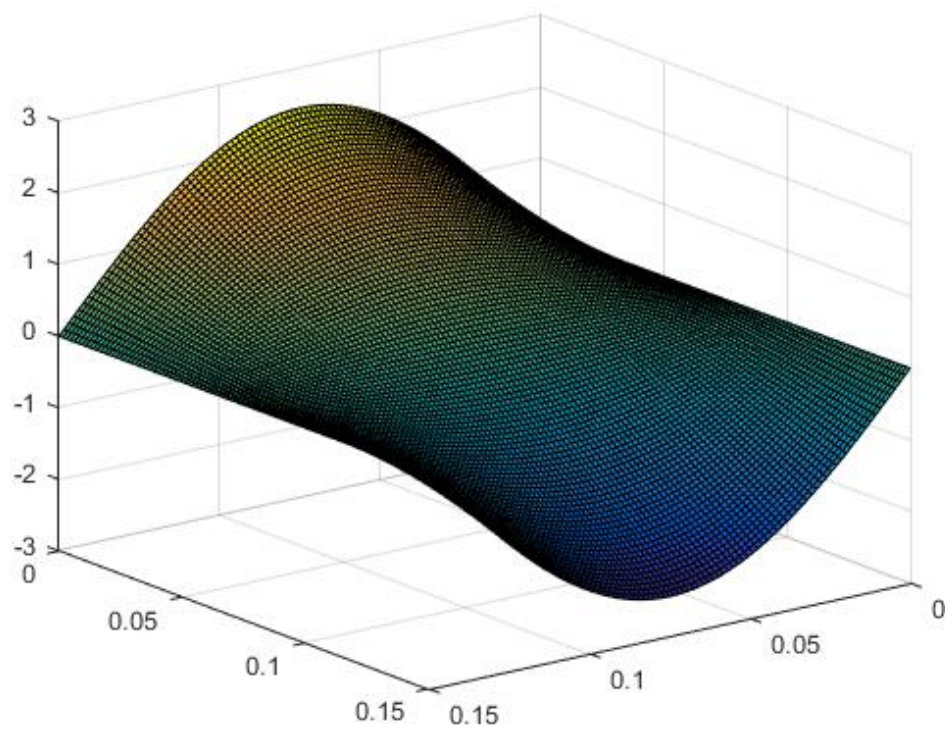


Figura 3.11. Forma del segundo modo en placa de tamaño 150x150x2,5.

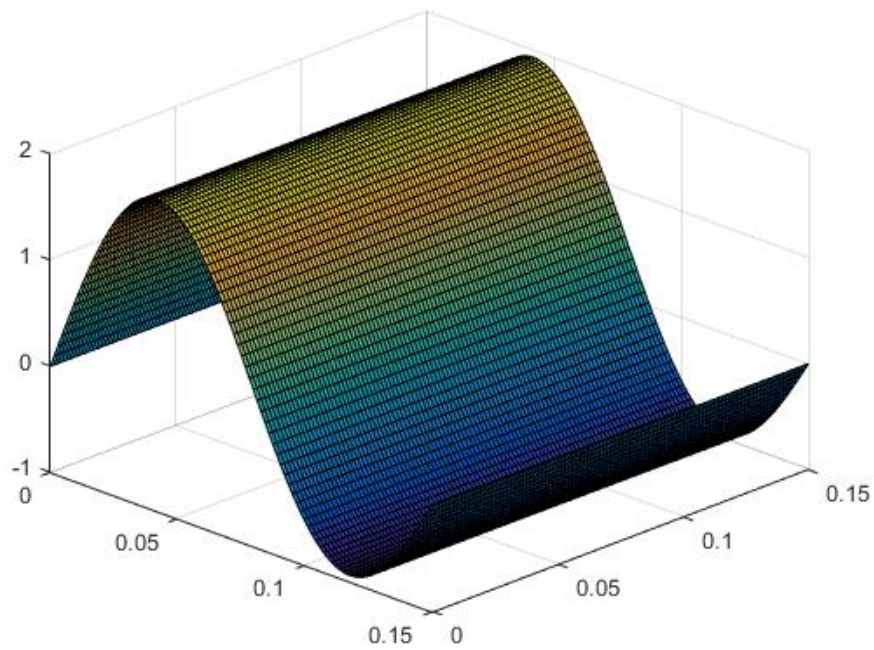


Figura 3.12. Forma del tercer modo en placa de tamaño 150x150x2,5.

3.3. Comparativa de resultados con caso de viga.

Tal y como se habló en el anterior apartado, se ha buscado estudiar la evolución de un caso de elemento tipo viga a un elemento tipo placa mediante la aplicación de la formulación viga y el Método de Ritz a tres tipos de placas, siendo estas de tamaño 150x37.5x2.5, 150x75x2.5 y 150x150x2.5 respectivamente.

Comenzando con la primera placa se observan sus frecuencias en la siguiente tabla:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
Viga	179.19	716.75	1612.7	2867	4479.7	6450.8
Placa	188.58	690.71	754.36	1527.4	1647.5	2615.7

Tabla 3.8. Comparativa entre formulacion viga y formulacion placa para 150x37.5x2.5.

Como se puede observar, para el primer modo se consiguen valores similares, obteniendo una diferencia del 4.9% entre ellas. Para el resto de modos se obtienen mayores diferencias.

Si se observa el segundo modo en formulación de viga y el segundo y tercer modo de la formulación de placa, aparece cierta similitud. Esto se verá más patente cuando se estudie las formas de los modos. Esto mismo puede observarse en el caso del tercer modo de viga con el cuarto y quinto modo de la formulación de placa y así sucesivamente.

En principio, la formulación placa va a generar mayor número de modos que la formulación de viga.

Si se pasa al estudio de los modos se tiene:

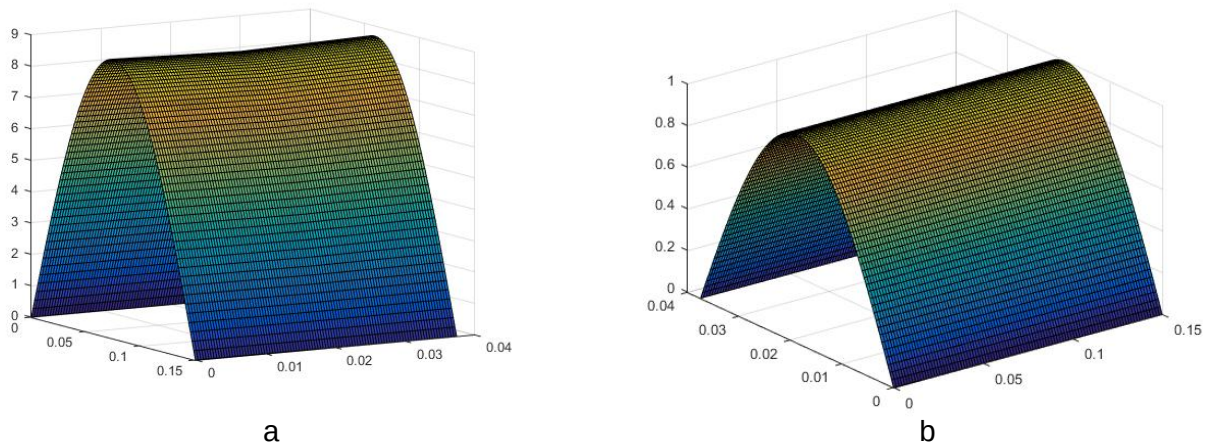


Figura 3.13. Comparativa del primer modo entre formulación placa (a) y viga (b) respectivamente para placa 150x37.5x2.5.

En este primer caso (figura 3.13.) se puede observar una pequeña diferencia entre ellos. Si se observa la figura (3.13a), que corresponde con la forma en formulación de placa, se aprecia un pequeño hundimiento en el centro de esta; mientras que en la figura (3.13b), que corresponde a la formulación viga se observa como es plana. Esto será debido a la propia naturaleza de placa. Como ya se comentó en la explicación del Método de Ritz, para obtener las frecuencias en el método, se combinan dos formulaciones de viga; una en el eje x y otra en el eje y, correspondiendo en este caso a una formulación viga apoyada-apoyada en el x y una formulación de viga en el y. La combinación de ambas genera esta pequeña concavidad.

Ahora se explica por qué las frecuencias en el segundo modo de la viga son parecidas al segundo y tercer modo de la placa, como se puede observar en la figura 3.14:

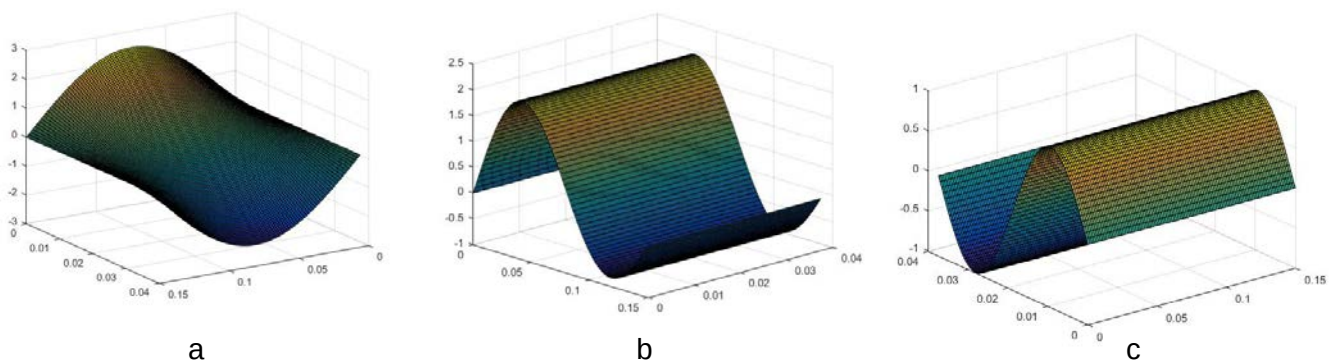


Figura 3.14. Comparativa del segundo (a) y tercer modo (b) entre formulación placa y viga (c) respectivamente para placa 150x37.5x2.5.

Se tiene en la figura (3.14a) y (3.14b) el segundo y tercer modo para la placa respectivamente y en la figura (3.14c) el segundo modo de la formulación de viga. Se puede observar como el modo al que corresponde la formulación viga se trata del tercer modo para la placa. Esto se explica de la misma manera que en el anterior caso. Para la formulación placa, tenemos dos formulaciones viga que se combinan entre sí, esto va a generar un mayor número de modos que en la formulación de viga para una sola variable. En este caso se tiene que la primera imagen se trata de una combinación del primer modo en x y el segundo modo en y; mientras que para la segunda formulación aparece la combinación del segundo modo en x y el primer modo en y.

Con respecto a la comparación de los modos que son similares (3.14b y 3.14c) no se ve ninguna diferencia significativa.

Ahora se estudiara la placa de tamaño 150x75x2.5 para comprobar si se aleja del comportamiento de viga.

Comenzando por las frecuencias naturales:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
Viga	179.19	716.75	1612.7	2867	4479.7	6450.8
Placa	189.3	327.26	768.18	999.7	1211.4	1216

Tabla 3.9. Comparativa entre formulación viga y formulación placa para 150x75x2.5.

Siguiendo las pautas del anterior caso, se observa como para el primer modo se tienen frecuencias similares (5% de diferencia), mientras que para los posteriores modos va cambiando. Se puede observar como el segundo modo para la formulación de placa ha sufrido una gran variación con respecto al anterior caso, lo que hace que nuestras predicciones se vean reforzadas (pasamos de 690.71 Hz a 327.26 Hz, lo que hace que sea más flexible la placa).

Se puede observar, que los modos que afectan al eje y sufren una mayor variación; mientras que los modos del eje x siguen con frecuencias similares (segundo modo y tercer modo en viga y placa respectivamente).

Se pasará ahora a comparar los modos:

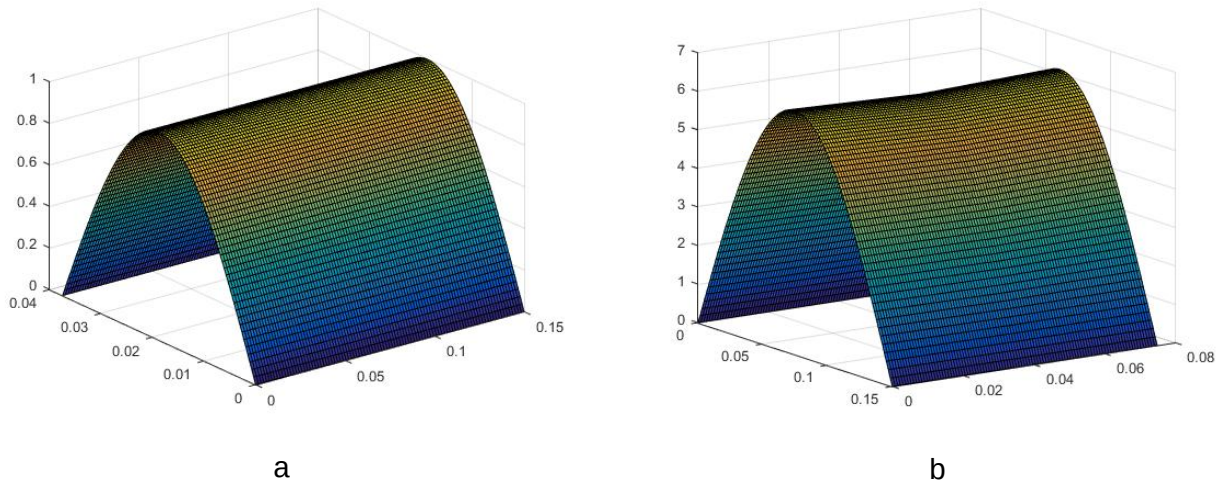


Figura 3.15. Comparativa del primer modo entre formulación placa (a) y viga (b) respectivamente para placa 150x75x2.5.

En el primer modo se deberá de observar una concavidad más pronunciada que en el caso anterior al estar alejándonos del caso de placa. Comparando con el caso de formulación de viga (3.15a y 3.15b), se sigue viendo la misma diferencia entre ellos producida en el anterior caso. Para comprobar la diferencia de concavidades, se deberá de proceder a comparar los distintos casos de placa. Esto será realizado en el sexto apartado.

Comparando ahora el segundo modo de formulación viga y tercero de formulación placa:

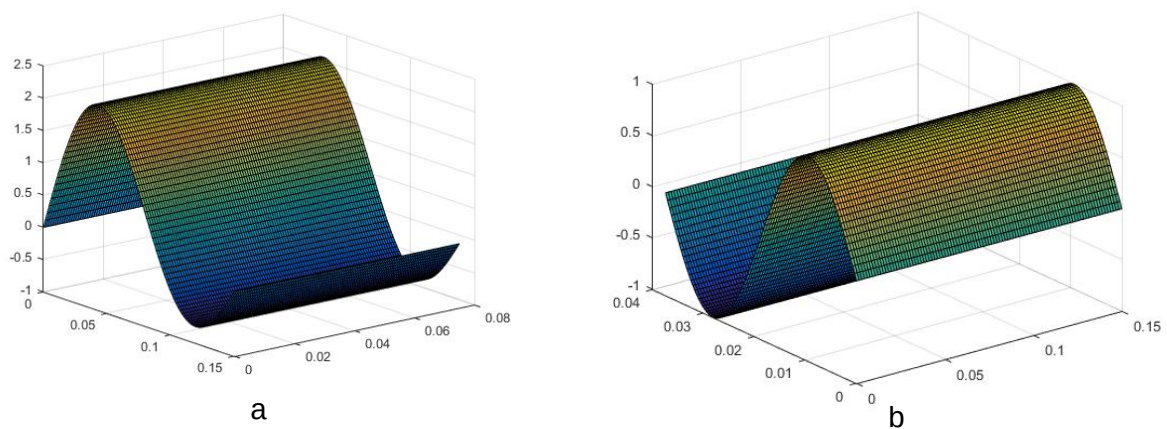


Figura 3.16. Comparativa del segundo (a) y tercer modo (b) entre formulación placa y viga respectivamente para placa 150x75x2.5.

Como se comentó en el primer caso, estos dos modos no tienen diferencias apreciables (3.16a y 3.16b). Para comprobar si en la formulación placa aparecen concavidades se compararan los distintos modos de placa en el sexto apartado obteniendo los desplazamientos localizados en el centro y sus extremos.

Por último, se pasará a la placa de tamaño 150x150x2.5 en la cual se tendrá el caso opuesto a la formulación viga. Con esto, se pasará a comprobar las frecuencias obtenidas:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
Viga	179.19	716.75	1612.7	2867	4479.7	6450.8
Placa	183.77	252.24	757.48	829.17	1703.7	1775.3

Tabla 3.10. Comparativa entre formulacion viga y formulacion placa para 150x150x2,5.

Se puede observar como los efectos sobre los modos que afectan a la placa en el eje y son los que más varían ante el anterior caso; el segundo modo sigue bajando de frecuencia, y el cuarto y sexto modo, que en el anterior no se vieron demasiado afectados; decrecen también en frecuencia.

En el caso de estar trabajando con unas condiciones de contorno en las cuales sus extremos fuesen iguales; por ejemplo apoyo-apoyo-apoyo-apoyo aparecerían frecuencias iguales cada par de modos, esto se debe a que se esta usando el caso de una placa cuadrada. Al ser la condición de contorno apoyo-apoyo más rígida que la de libre-libre, los cambios de modo en el eje y se darán antes que los cambios de modo en el eje x, lo que provoca que el segundo y tercer modo sea una combinación del primer modo en x y el segundo modo en y, y el primer modo en x y el tercer modo en y respectivamente.

Pasando a observar los modos se obtiene lo mismo que en los anteriores casos; solo que la concavidad generada será más pronunciada:

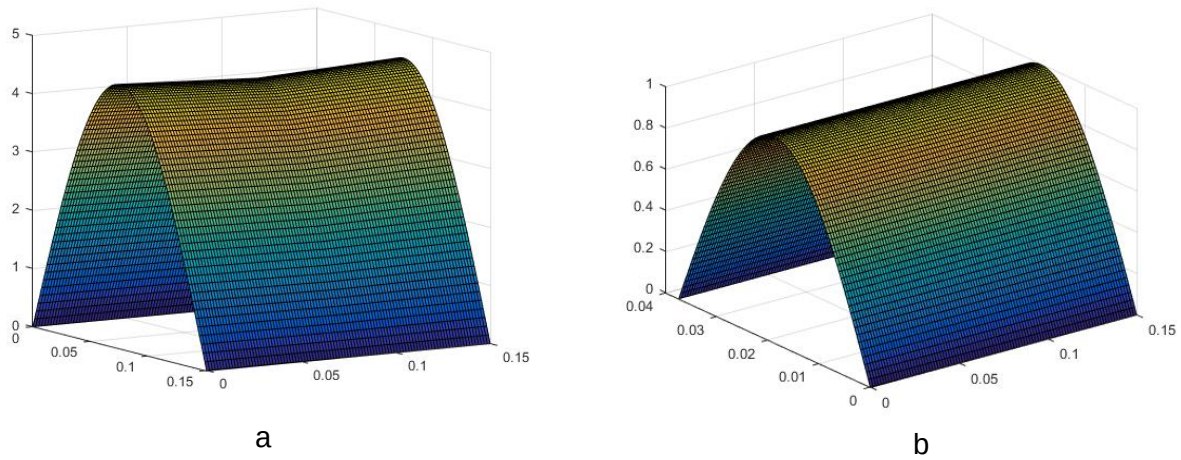


Figura 3.17. Comparativa del primer modo entre formulación placa (a) y viga (b) respectivamente para placa 150x150x2.5.

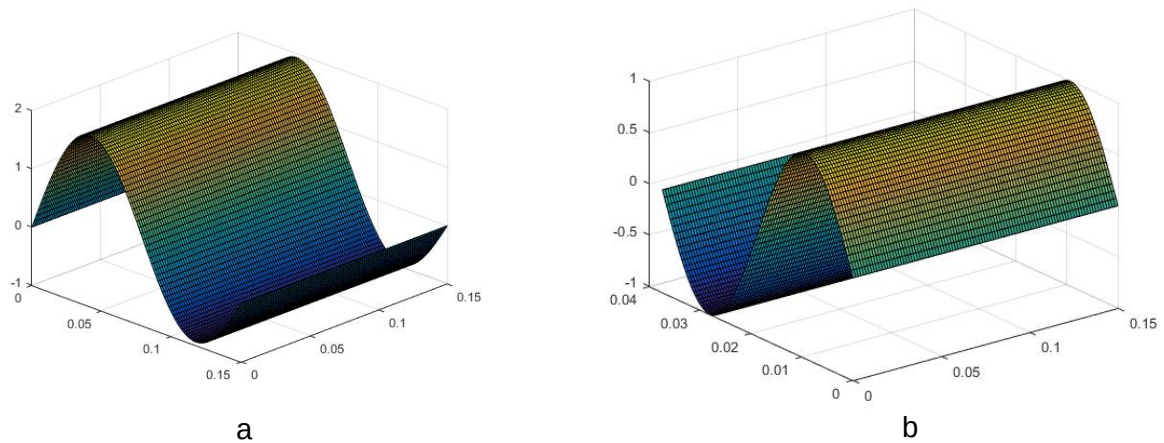


Figura 3.18. Comparativa del segundo y cuarto modo entre formulación placa (a) y viga (b) respectivamente para placa 150x150x2.5.

Se puede observar como para el primer modo (3.17a y 3.17b) se produce la concavidad mientras que para el tercer modo no se aprecian diferencias. Esto será resuelto en el sexto apartado.

4. Estudio experimental del problema en estudio

En el desarrollo experimental se va a obtener a partir de una serie de ensayos modales, los primeros valores de frecuencia junto a sus modos para las placas explicadas en el apartado anterior. Para ello, se comenzará por una breve descripción de los equipos usados, pasando a continuación a un desarrollo de la obtención de las distintas frecuencias y modos con los equipos empleados. Finalmente, obtendremos una serie de resultados que serán interpretados.

4.1. Descripción de los equipos experimentales.

En este apartado se va a mostrar una breve explicación de las características de los equipos usados a la vez de como se deben de usar durante los ensayos.

4.1.1. Shaker.

El *shaker* es un equipo que nos permite generar vibraciones de amplitud y frecuencia determinadas con el fin de obtener la respuesta a la frecuencia de un elemento o estructura, y poder así analizar su comportamiento dinámico. De esta manera, podrá ser empleado también para ensayos de resistencia a la fatiga de materiales. Según el funcionamiento, tenemos de tipo mecánico, electromagnético, electrodinámico o hidráulico. [8]



Figura 4.1. *Shaker* electrodinámico empleado.

El modelo empleado en los ensayos es de tipo electrodinámico. Estos van a poseer en su interior una bobina, la cual se encuentra en el radio de acción de un imán, generando así un campo magnético. Cuando la corriente pasa a través de la bobina, va a aparecer una fuerza de inducción que será proporcional en todo momento a la corriente que circule a través de la bobina. [8]

En la figura 4.2. se muestra la estructura interna de un *Shaker* electrodinámico. La membrana elástica dirige el movimiento del cuerpo móvil haciendo que este sea lineal. Estas dos partes van a tener por si mismas una frecuencia natural de vibración; por lo que para que el rango de operación del equipo sea amplio, y el *Shaker* no entre en resonancia, la frecuencia de la membrana elástica deberá de ser muy baja, mientras que la del cuerpo móvil deberá de ser muy alta.

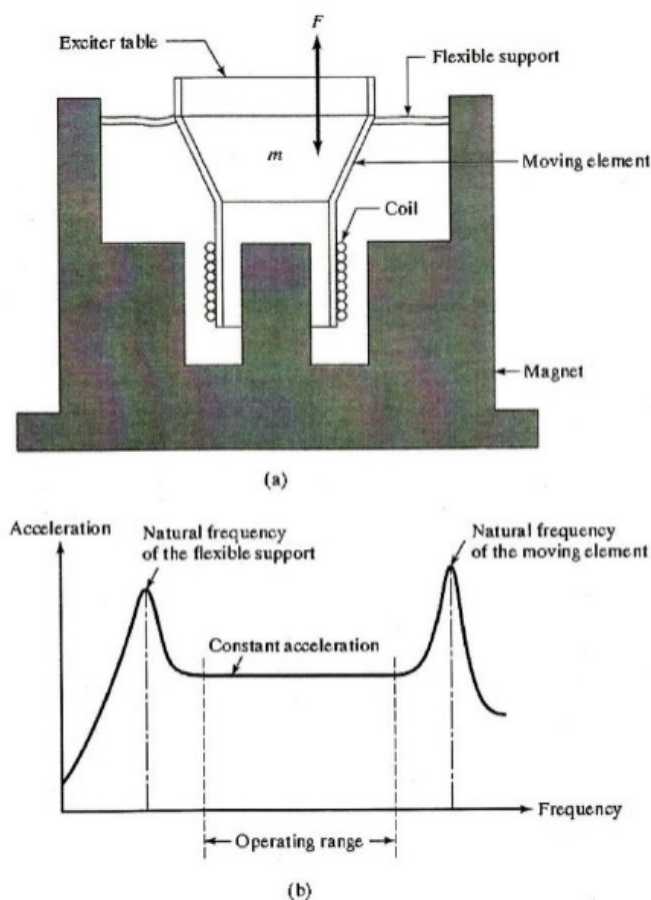


Figura 4.2. Estructura interna un *Shaker* electrodinámico y rango de trabajo del mismo.

El *Shaker* empleado durante los ensayos de DIC es un modelo V2664 de la compañía *Data Physics Corporation*.

A continuación se muestran las principales características del *Shaker* junto a sus dimensiones principales:

Fuerza máxima sinusoidal	10500 N
Fuerza máxima aleatoria	10000 N
Fuerza máxima de impulso	22260 N
Aceleración sinusoidal máxima	154 m/s ²
Diámetro de la armadura	640 mm
Masa de la armadura	68 kg
Resonancia de la armadura	2500 Hz
Rango de frecuencias	CC-3000 Hz
Rigidez axial	1.14 kgf/mm
Masa del cuerpo del <i>Shaker</i>	1830 kg
Consumo de potencia eléctrica	17.6 kW

Tabla 4.1. Especificaciones del *Shaker* empleado.

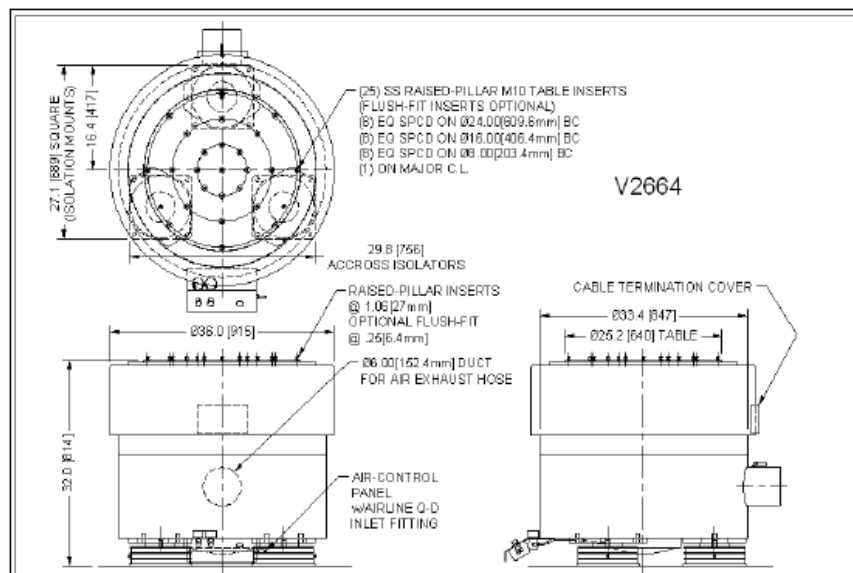


Figura 4.3. Dimensiones principales del *Shaker* empleado.

4.1.2. Martillo instrumentado

El martillo instrumentado es un elemento excitador que posee en su cabeza una célula de carga. Tras un impacto, esta célula de carga genera una señal que es recogida por un analizador. La fuerza del golpeo causado por el martillo es proporcional a la masa del cabezal por la velocidad del impacto. [8]



Figura 4.4. Martillo instrumentado Brüel&Kjaer.

El martillo posee tres puntas intercambiables cuya elección dependerá de la rigidez del material a ensayar: una será de goma, otra de plástico y por ultimo una de aluminio. A continuación se muestran los parámetros técnicos del martillo:

Sensibilidad	1.319 mV/N
Rango de medida	4448 N

Tabla 4.2. Parámetros técnicos del martillo instrumentado empleado.

El martillo instrumentado tiene integrado en su cabeza un transductor de fuerza que permite excitar el elemento en un amplio rango de frecuencias con cada impacto.

Frente a la ventaja de ser un dispositivo excitador simple, portátil y económico; tiene la desventaja de no ser capaz en determinadas ocasiones de transmitir la energía de impacto suficiente como para obtener señales de respuesta a la frecuencia que se busca.

La respuesta del elemento ante el impacto es una combinación de varias excitaciones que se sitúan al nivel de las frecuencias naturales del mismo. La forma que presenta depende de las masas y las rigideces del martillo y el elemento ensayado. Normalmente, el rango de frecuencias excitadas queda definido por una frecuencia límite, lo que quiere decir que el elemento no ha recibido suficiente energía de impacto como para excitar modos de vibración que se encuentran por encima de esta frecuencia límite.

Además, también podemos tener otros problemas, como por ejemplo la de ejecutar el golpe en la dirección en la que se busca la respuesta o la de producir un efecto rebote, provocado por mantener el martillo en la misma posición de golpeo tras este.

4.1.3. Analizador Photon+

La tarjeta analizadora Photon+ de Brüel&Kjær permite analizar y procesar en tiempo real señales de entrada y salida generadas, propias de cualquier ensayo vibracional. Puede ser conectada a un ordenador donde, a través de un software, se pueden definir distintos parámetros y visualizar señales que sean de interés al ensayo realizado. Posee cuatro canales de entrada y uno de salida pudiendo ser usado como fuente de señal. [8]



Figura 4.5. Tarjeta analizadora Photon+ de Brüel&Kjær.

El software que permite al usuario controlar la tarjeta analizadora y dispone de varias funcionalidades, entre otras la de análisis dinámico de señales (Signal Analysis and Waveform Source), que será la usada durante estos ensayos. Con ella se han registrado señales en tiempo real de los ensayos con acelerómetro, obteniendo las frecuencias de los modos para cada placa, para después ser aplicadas en el *Shaker*.

4.1.4. Acelerómetro

El acelerómetro es un pequeño dispositivo que es capaz de medir la aceleración en cualquier punto de un elemento. Este elemento es robusto, compacto, ligero y ofrece un rango de respuesta a la frecuencia amplio. [8]



Figura 4.6. Acelerómetro piezoeléctrico empleado.

Existen distintos tipos de acelerómetros dependiendo de su construcción y principio de funcionamiento. El que se emplea en este estudio es el acelerómetro piezoeléctrico, llamado así por contener en su interior un cristal piezoeléctrico.

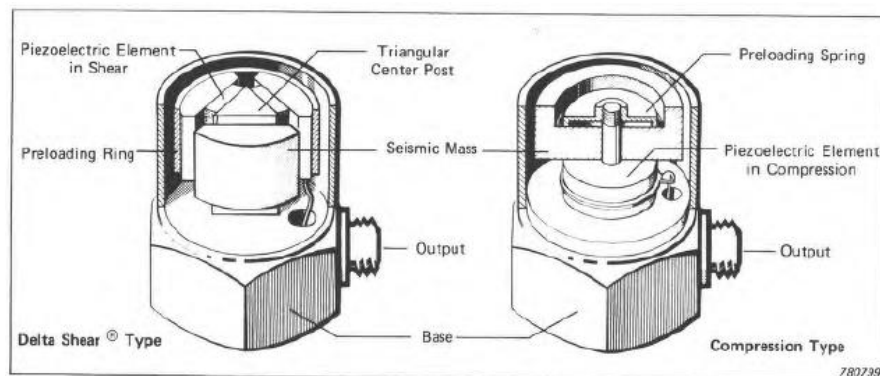


Figura 4.7. Componentes internos del acelerómetro piezoeléctrico.

El acelerómetro detecta y mide el movimiento relativo de su masa respecto a la superficie en la que se encuentra situado. Cuando se somete a vibración, la masa

aplica una fuerza sobre el cristal que es directamente proporcional a la aceleración. A su vez, la carga producida por el cristal es proporcional a la fuerza sobre el mismo.

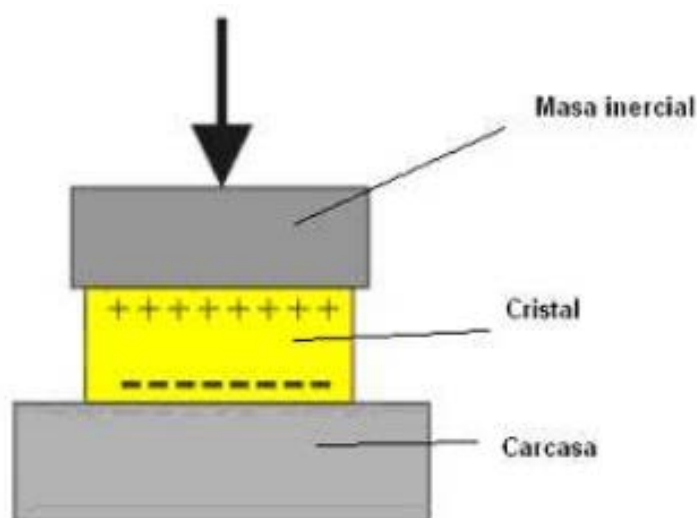


Figura 4.8. Esquema funcionamiento acelerómetro piezoeléctrico.

Para adherir el acelerómetro al elemento que se esté estudiando se suele emplear cera de abeja, ya que esta influye poco en la frecuencia natural del acelerómetro, manteniendo así el rango de medición. En la siguiente tabla se recogen las características técnicas del acelerómetro empleado en los ensayos experimentales:

Rango de aceleración	± 500 g
Sensibilidad	10.47 mV/g
Frecuencia natural	30 kHz
Rango de frecuencia	2-7000 Hz

Tabla 4.3. Características técnicas del acelerómetro empleado.

4.1.5. Equipo DIC 3D

Durante los ensayos con DIC 3D se ha hecho uso de un sistema estereoscópico formado por dos cámaras de alta velocidad Stingray F-504 fabricadas por Allied Vision. Con el uso de dos cámaras Stingray F-504 se puede obtener las imágenes en 3D. Si en lugar de usar dos cámaras se usará una, se estaría realizando el caso de DIC 2D.



Figura 4.9. Cámaras de alta velocidad Stingray.

Para obtener los campos de desplazamiento y deformación en las tres direcciones del espacio se posicionan las dos cámaras debidamente sincronizadas y calibradas.

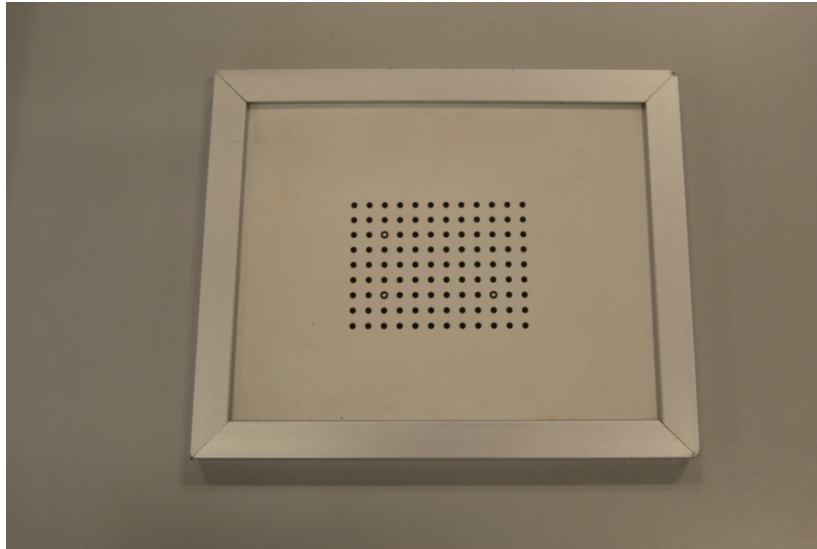


Figura 4.10. Placa de calibración para el Software DIC 3D.

Esta calibración es realizada a través de la placa mostrada en la figura 4.8. La calibración se realiza de la siguiente manera: se comienza iniciando el Software a través del cual se va a iniciar una captura de sincronización. En esta se elige el tipo de placa de sincronización junto a sus dimensiones principales (esto esta suministrado por el fabricante). Tras esto, se toma la placa, colocándose frente a las cámaras iniciando el proceso. Durante este, se ira moviendo y rotando la placa para que así el Software tome la posición de los distintos puntos que conforman la placa. Una vez finalizado, generara un archivo, el cual deberá de ser usado en el post procesado de las imágenes.

Resolución	2452 x 2056
Sensor	Sony ICX655
Tipo de sensor	CCD Progresivo
Tamaño de celda	3.45 μm x 3.45 μm
Montura de la lente	Tipo C
Max frame rate en resolución completa	9 fps

Tabla 4.4. Características de las cámaras de alta velocidad usadas.

4.2. Ensayos en viga biapoyada.

Los ensayos realizados buscan principalmente obtener las frecuencias naturales y sus correspondientes modos de forma para así poder correlar los resultados teóricos.

El *setup* del ensayo está formado por la viga de CYPLY® 1002 la cual esta amordazada por dos de sus extremos mediante dos rodillos. Estos a su vez estarán anclados a la base del *Shaker*.

La configuración de rodillos; a la vez que el propio apriete de los tornillos usados para su fijación, provocara que las condiciones de contorno no sean totalmente asimilables a una condición apoyado-apoyada perfecta. Debido a esto, las propias frecuencias naturales y formas de los modos serán ligeramente diferentes con respecto a las calculadas de forma teórica.

Como ya se comentó en el anterior apartado; se va a trabajar con tres tipos distintos de placas cuyos tamaños son 150x150x2.5, 150x75x2.5 y 150x37.5x2.5. En la figura 4.11 se muestran las placas, las cuales presentan en su superficie la textura necesaria para la aplicación de DIC, denominada *speckle*:



Figura 4.11. Placas fabricadas en CYPLY 1002 de tamaño 150x37.5x2.5, 150x75x2.5 y 150x150x2.5 respectivamente junto a su speckle.

Una vez preparadas las placas pasamos a realizar el montaje experimental. Como se observa en la figura 4.14., tenemos montada la placa de tamaño 150x150x2.5 lista para ser golpeada con el martillo instrumental.

4.2.1. Determinación de la frecuencia natural mediante el uso del martillo instrumental

El objetivo de nuestro primer ensayo será el de obtener las frecuencias naturales de las placas ensayadas y así conseguir una correlación con los resultados obtenidos en los otros análisis.

Para realizar el montaje utilizaremos el *setup* que se empleará en el *Shaker* para que así, a partir de él, no se produzcan diferencias.

El montaje del acelerómetro se realizará cerca de las zonas de menor desplazamiento vertical para así no desvirtuar los resultados. En nuestro caso, tal y como se muestra en la figura 4.12. será colocado cerca de uno de los rodillos y adherido mediante cera. Este desvirtuamiento se produce debido al propio peso del acelerómetro; que sin ser pesado puede afectar a los datos obtenidos en el experimento.

Una vez hecho esto preparamos el Software que va a ser usado *RT Photon plus*, que mediante la tarjeta analizadora *Photon+* y con las señales de entrada las producidas por el martillo y las recogidas por el acelerómetro, nos dará una serie de graficas las cuales podrán ser interpretadas para obtener las frecuencias naturales.

Los valores que deben de ser introducidos son *Lines*, *Span*, *Points* y *deltaT*, siendo los dos primeros dependientes de los dos segundos y viceversa. Los valores usados en este caso son las señales indicadas en la siguiente tabla:

Lines	6400
Span	2000
Points	16384
deltaT	195.3 ms

Tabla 4.5. Valores introducidos en RT Photon Plus para su configuración.

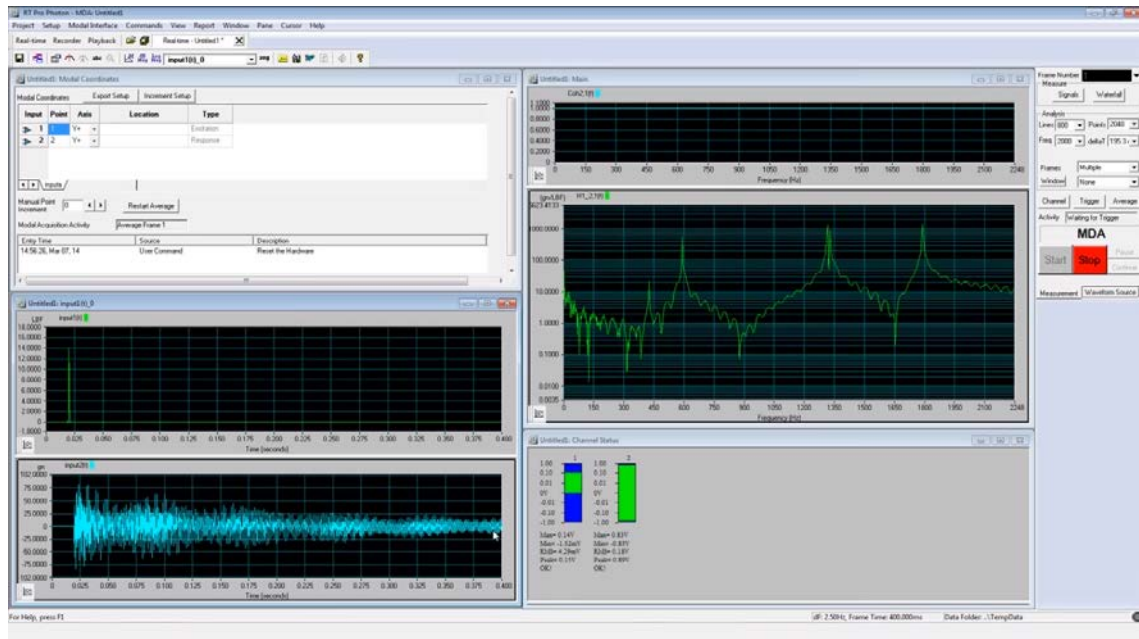


Figura 4.12. Captura del programa *RT Photon +*.

Preparado tanto el montaje como el Software pasamos a explicar la rutina seguida para el experimento.

En cada placa se procederá a golpear con el martillo instrumentado en distintas posiciones de estas para así obtener todos los modos posibles. Esto es debido a que es posible que en una posición aparezca una frecuencia natural y en otra posición de golpeo esta misma frecuencia tenga una menor visibilidad. La disposición de golpeo para las distintas placas se muestra en las siguientes figuras:

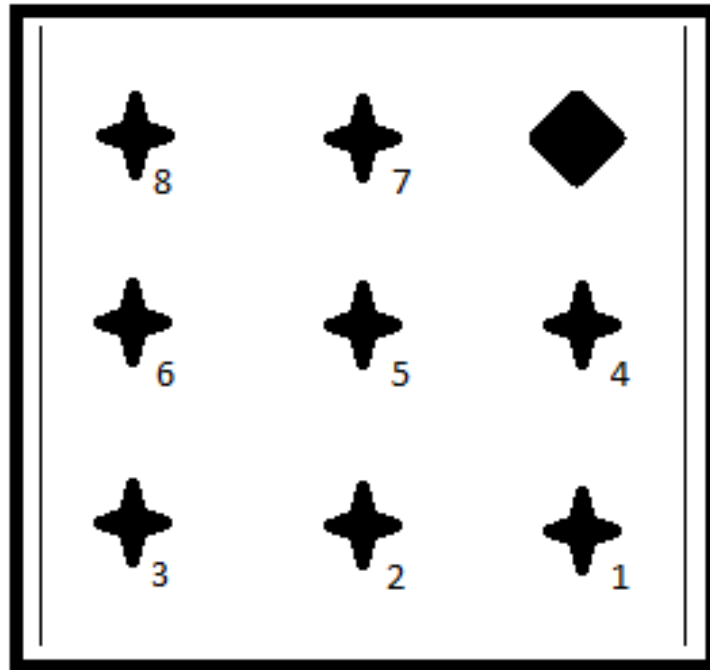


Figura 4.13. Disposición de golpeo para placa 150x150x2,5.

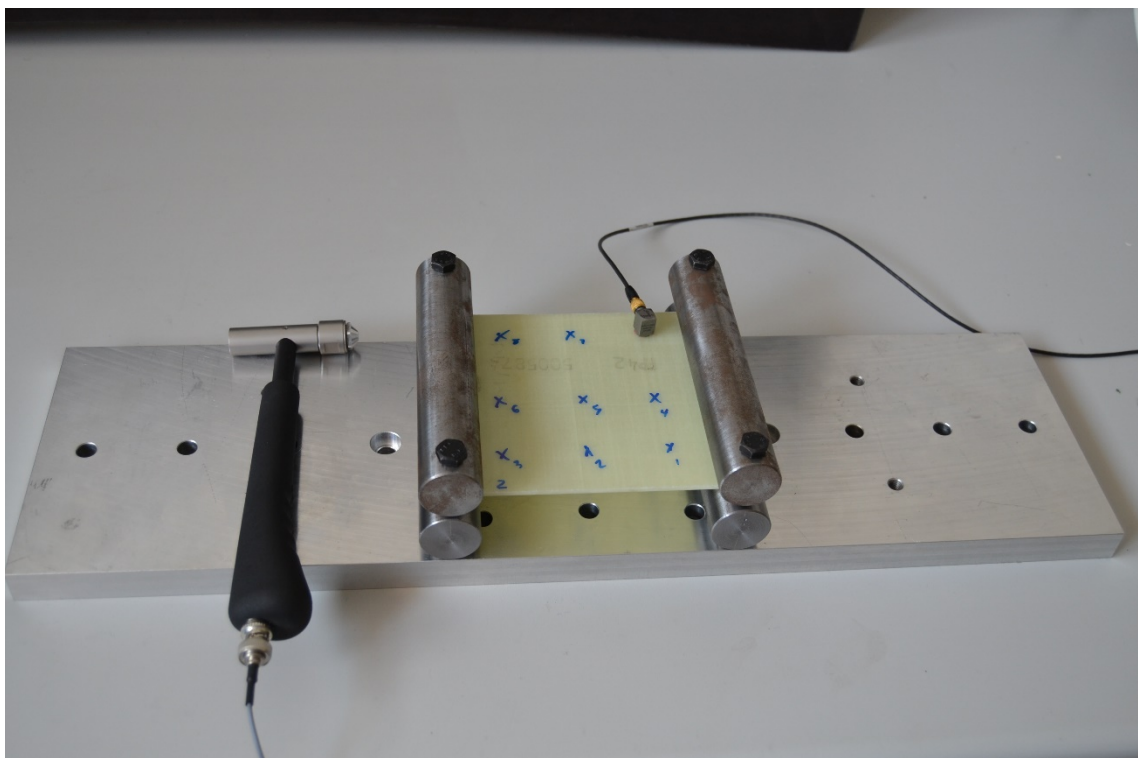


Figura 4.14. Setup para placa de 150x150x2,5.

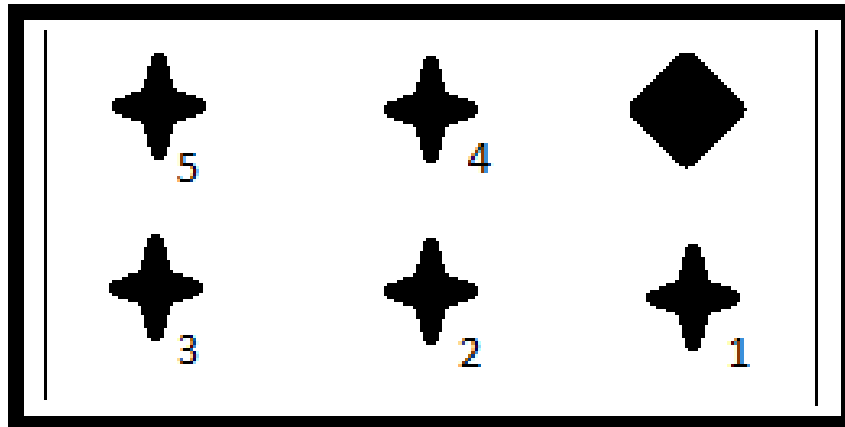


Figura 4.15. Disposición de golpeo para placa 150x75x2,5.

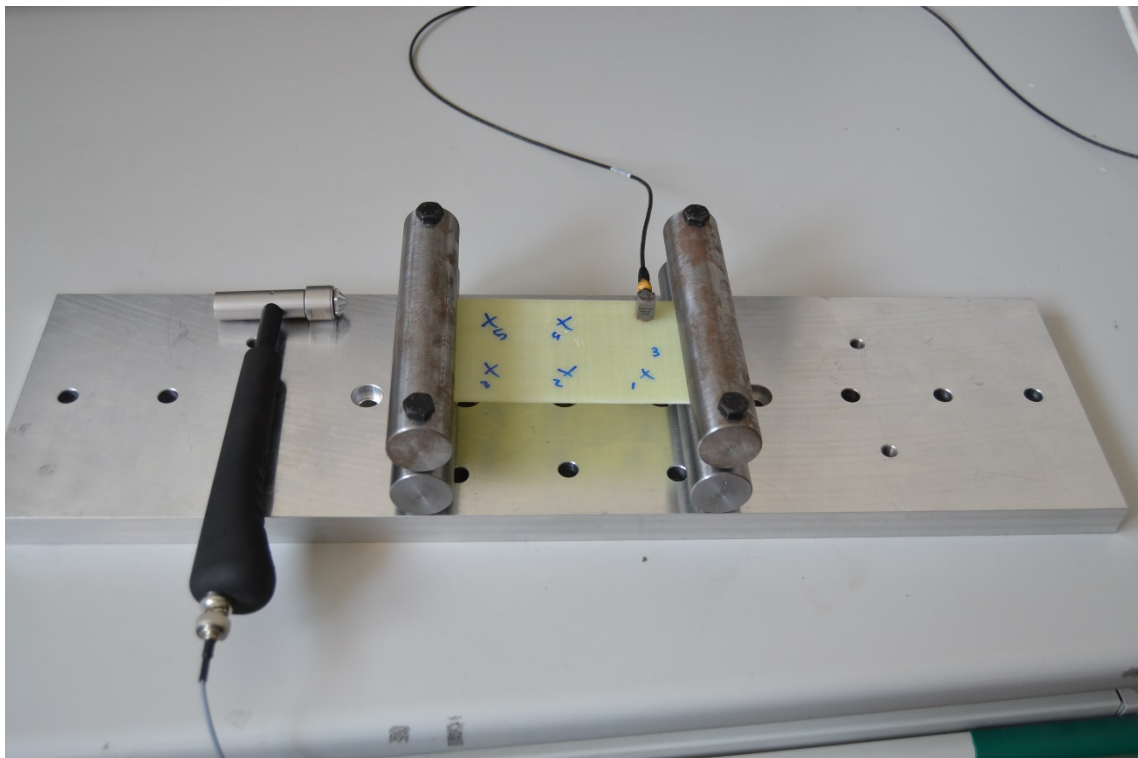


Figura 4.16. Setup para placa de 150x75x2,5.

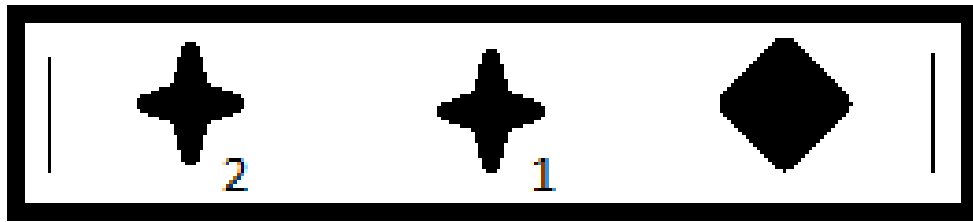


Figura 4.17. Disposición de golpeo para placa 150x37,5x2,5.

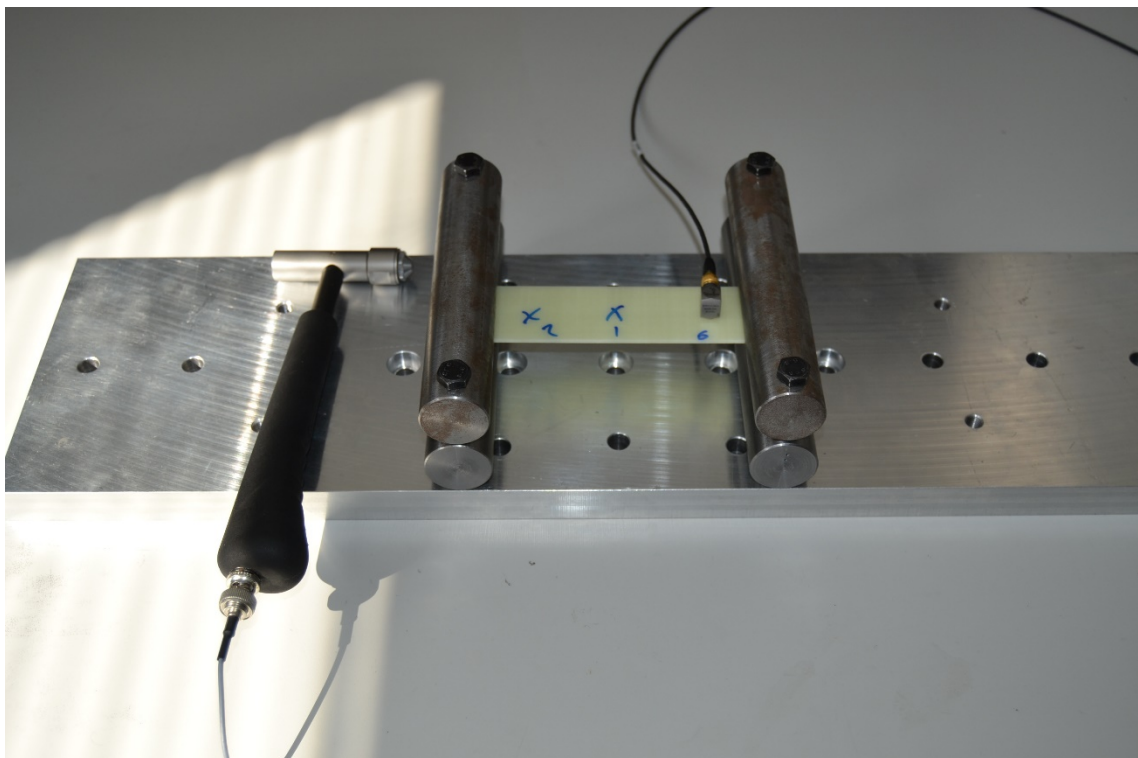


Figura 4.18. Setup para placa de 150x37,5x2,5

Siendo las estrellas los puntos de golpeo y los rombos las posiciones donde ira colocado el acelerómetro.

Conocidas las posiciones de golpeo se procede con el ensayo. Con el martillo instrumentado se golpeará cada posición marcada en la placa una serie de veces hasta obtener una señal uniforme, esto se puede observar en la figura 4.12. Una vez golpeada cada una de las posiciones, se guardará la señal obtenida y se pasará al siguiente punto y así sucesivamente.

Tras obtener todas las señales de todos los puntos, estas deberán de ser procesadas. Una de las formas posibles es la suma de todas ellas. Mediante esta forma podemos acentuar las frecuencias naturales y reducir los valores ruido.

En la figura 4.19 se muestra la onda obtenida para el caso de la placa 150x150x2,5

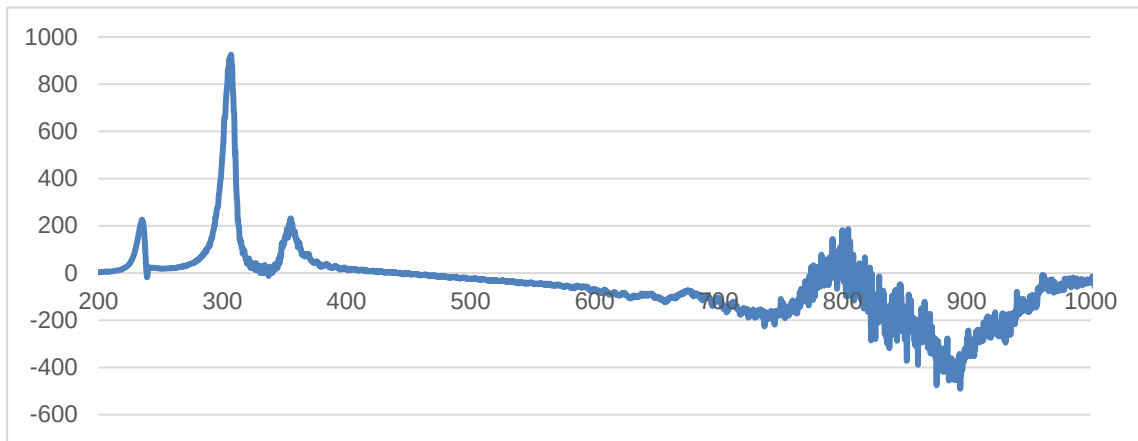


Figura 4.19. Señal obtenida a partir de la suma de las distintas señales obtenidas por el golpeo en los distintos puntos de la placa 150x150x2,5.

Si se observa la figura 4.19, aparece graficado en el eje horizontal la frecuencia natural y en el eje vertical la respuesta imaginaria del acelerómetro. Las frecuencias naturales resaltaran sobre el resto por lo que será fácil de identificar. También se puede observar como a partir de los 700 Hz aparece una señal no uniforme, esto es debido a las condiciones del ensayo que no van a permitir obtener mayores frecuencias (peso del martillo, condiciones de contorno...)

Conocido el desarrollo del ensayo, las frecuencias naturales obtenidas para las distintas placas están recogidas en la siguiente tabla:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3
150x150x2,5	236.00±1.41	307.00±1.41	355.00±6.36
150x75x2,5	209,10±14.11	305,80±14.73	784,60±35.73
150x37,5x2,5	198,30±4.24	718,20±10.97	

Tabla 4.6. Frecuencias naturales obtenidas a partir de los ensayos del martillo instrumentado.

4.2.2. Determinación de la forma de los modos mediante el uso de técnica DIC-3D

Calculadas las frecuencias mediante el ensayo de martillo instrumentado, se pasa a usar la técnica de DIC 3D, que con ayuda del *Shaker*, permitirá hallar la forma de los modos en cada una de las placas.

La preparación para el ensayo DIC 3D requiere conocer el efecto estroboscópico. Si se observa la figura 4.20, se puede ver la representación de la onda producida por una señal seno. En nuestro caso, los puntos de estudio de la placa van a realizar este movimiento alternativo.

Una de las variables que debemos de introducir en el programa de captura de imágenes es el propio periodo de captura de imágenes en *ms*, calculándose como la inversa de la frecuencia natural para el caso de estudio. De nuevo, observando la figura 4.20 aparecen marcados varios puntos rojos. En estos puntos se va a proceder a realizar capturas de imagen en cada período, lo que provoca que no se pueda capturar las formas de los modos. Para este caso usaremos el efecto estroboscópico.

El efecto estroboscópico es un efecto óptico que produce un movimiento ilusorio el cual mediante distintos fotogramas, nos permite obtener una configuración de movimiento continuo. El efecto estroboscópico en nuestro estudio será obtenido mediante la aplicación de un desfase al periodo real calculado, obtenido a partir de la siguiente formula:

$$T' = \frac{1}{\left(\frac{f}{n}\right)} + \frac{T}{20} \quad (4.1)$$

siendo T' el nuevo periodo, f la frecuencia natural, n un divisor y T el periodo real.

Con el efecto estroboscópico, mediante la utilización de material que únicamente es capaz de capturar imágenes estáticas (figura 4.9), es posible conseguir captar un efecto dinámico mediante la superposición de las distintas imágenes generadas. Esto repercutirá en un gran ahorro de costes mediante la aplicación de este simple efecto.

Si se aplica el efecto estroboscópico, se puede observar de nuevo en la figura 4.20 como quedarían los nuevos puntos de captura, esta vez representados en azul, siendo el primer punto común para ambos casos.

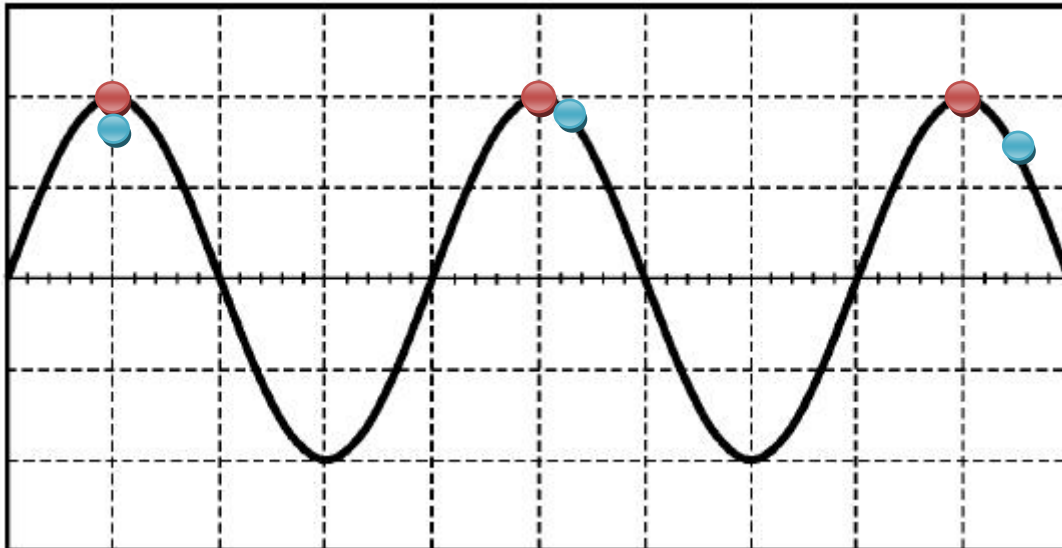


Figura 4.20. Efecto estroboscópico para onda seno. Los puntos rojos no tienen desfase aplicado. Los puntos azules tienen un pequeño desfase aplicado permitiendo obtener la forma del modo mediante la obtención de fotogramas superpuestos de forma continua.

Así pues, se puede imaginar como va a continuar la secuencia de ciclos y que tras un tiempo se podrá ver cómo se obtiene suficientes capturas como para obtener la forma del modo estudiado.

Conocido el efecto estroboscópico, podemos introducir el valor del nuevo periodo y así comenzar a capturar imágenes. En este caso se ha usado tamaño de faceta 30x30 píxeles con un overlap de 8 píxeles. Se pasa ahora a mostrar las imágenes de los distintos modos cuyo valor de desplazamiento están en el máximo y el mínimo:

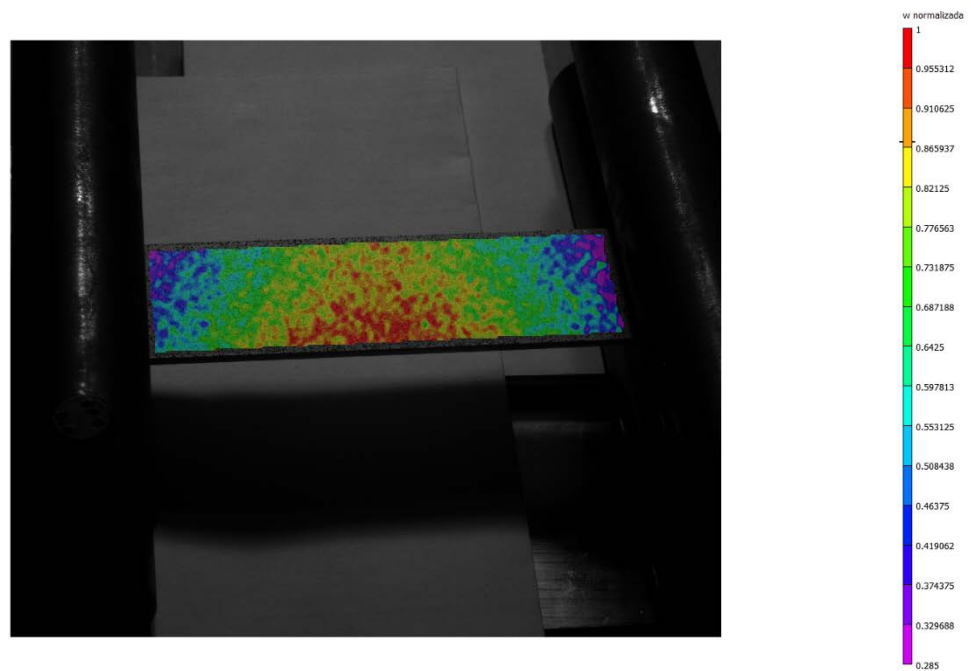


Figura 4.21. Máximo para modo 1 en placa 150x37,5x2,5.

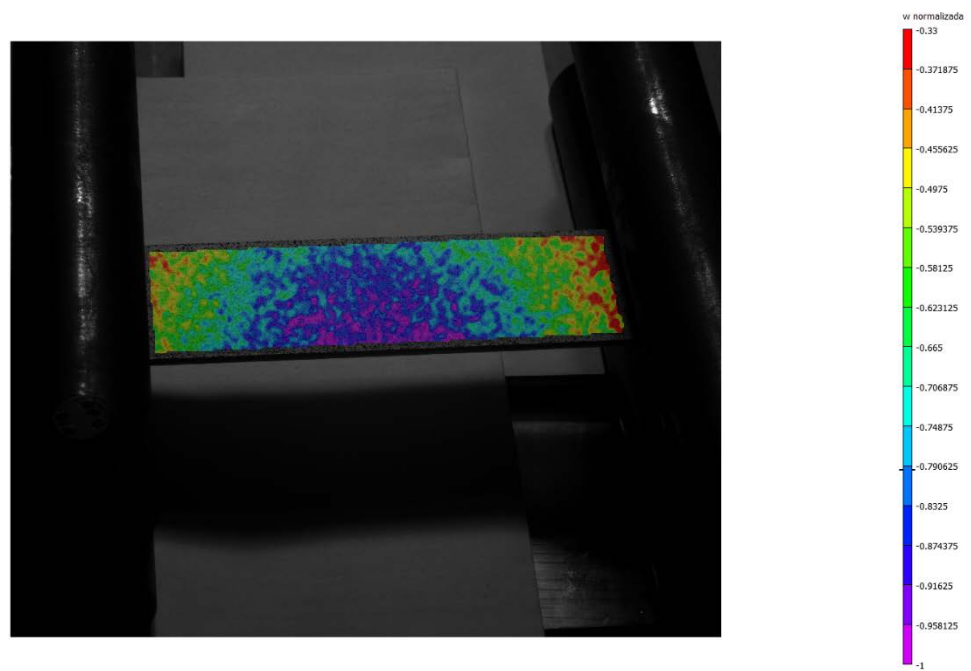


Figura 4.122. Mínimo para modo 1 en placa 150x37,5x2,5.

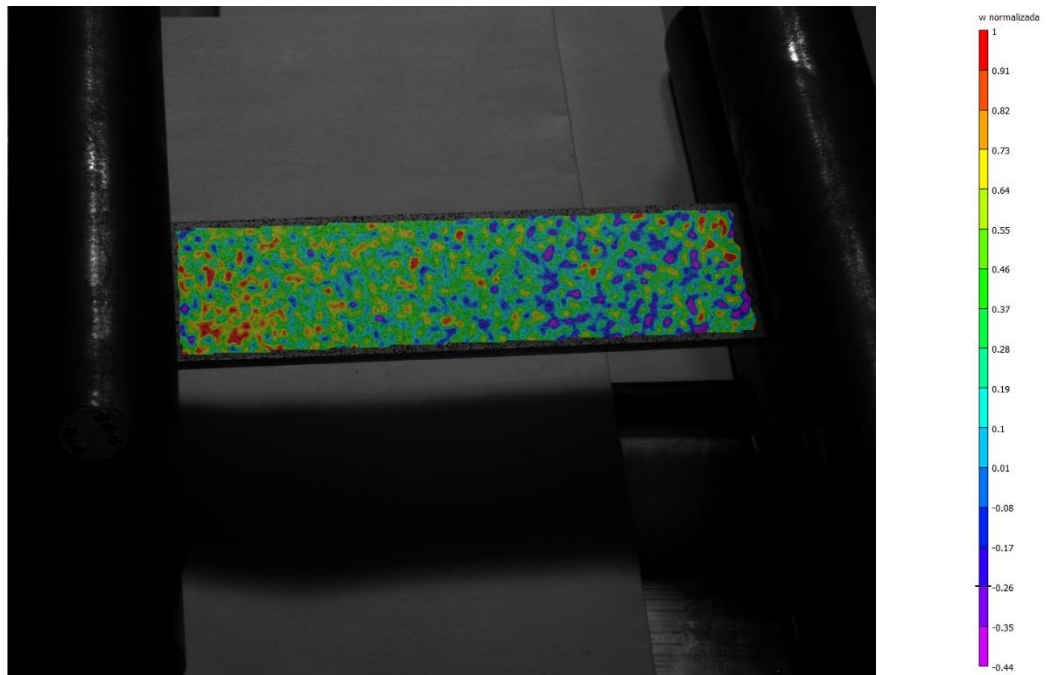


Figura 4.23. Máximo para modo 2 en placa 150x37,5x2,5.

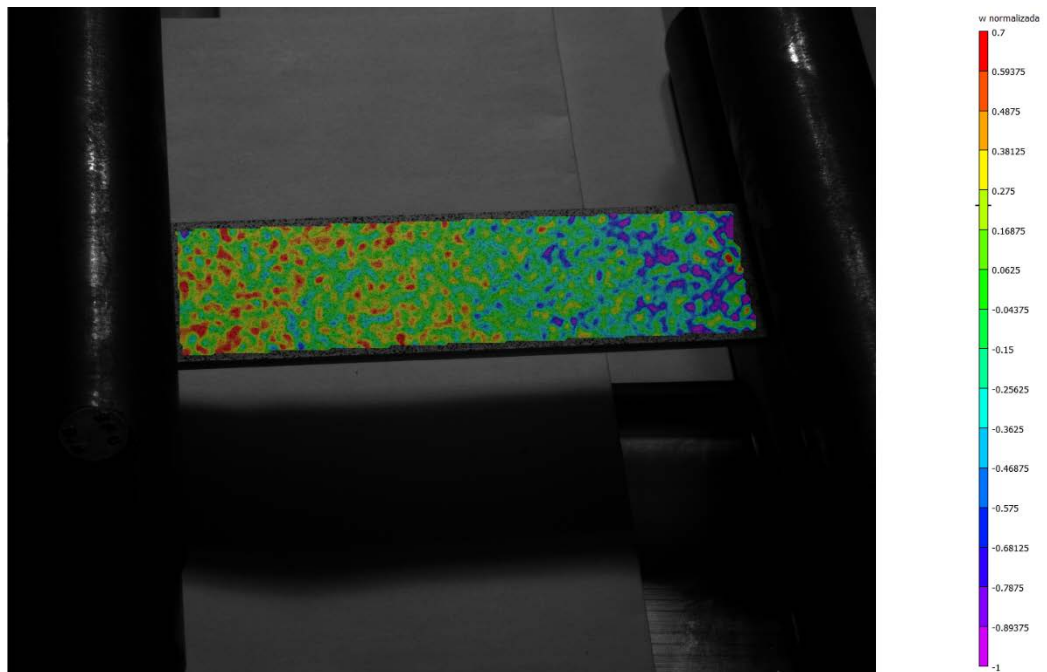


Figura 4.24. Mínimo para modo 2 en placa 150x37,5x2,5.

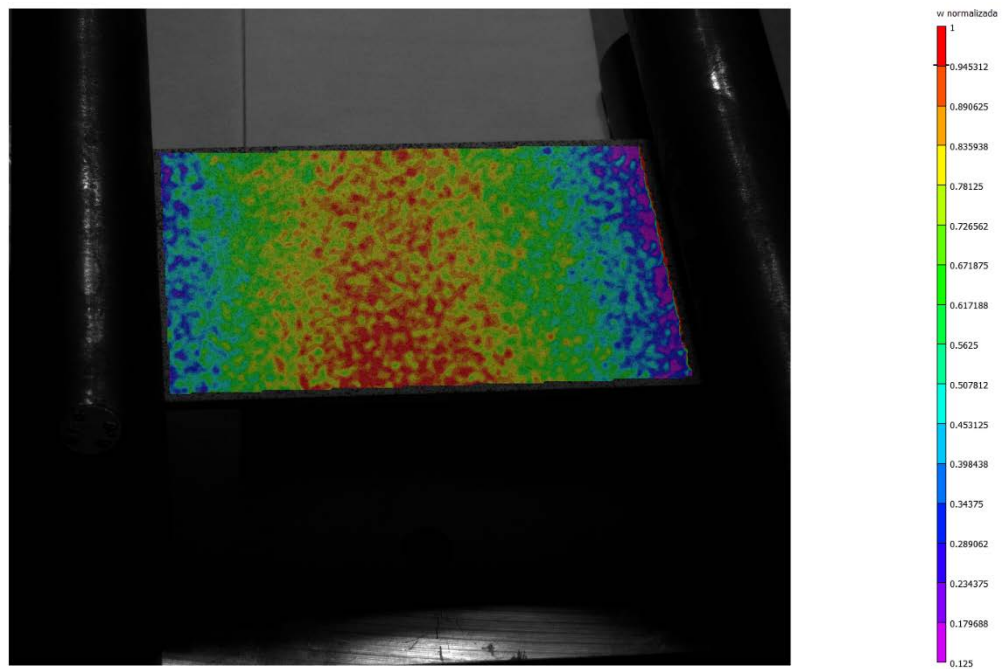


Figura 4.25. Máximo para modo 1 en placa 150x75x2,5.

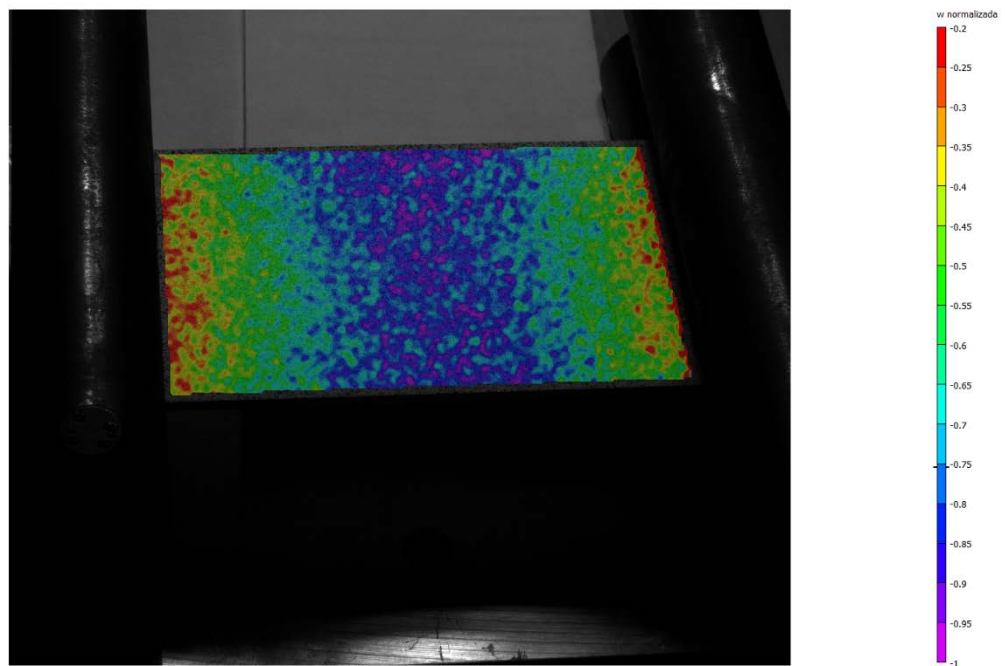


Figura 4.26. Mínimo para modo 1 en placa 150x75x2,5.

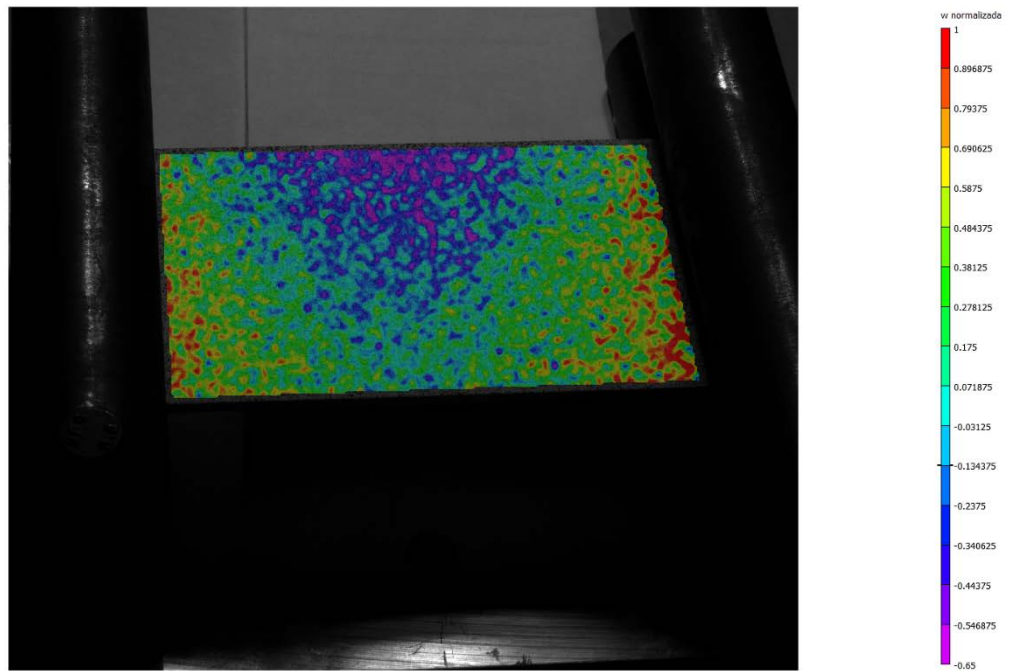


Figura 4.27. Máximo para modo 2 en placa 150x75x2,5.

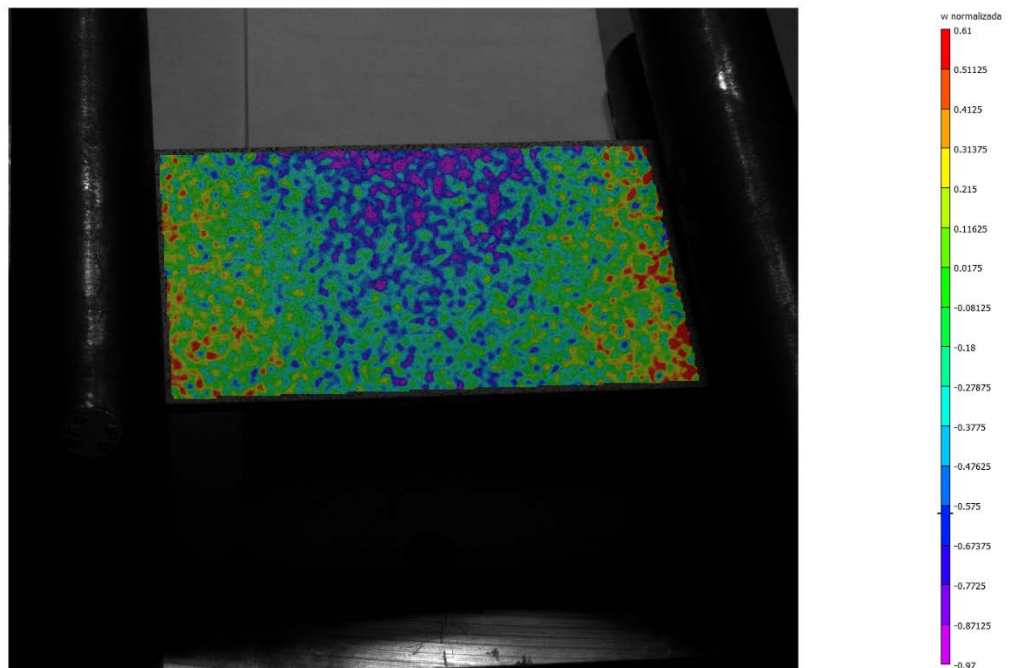


Figura 4.138. Mínimo para modo 2 en placa 150x75x2,5.

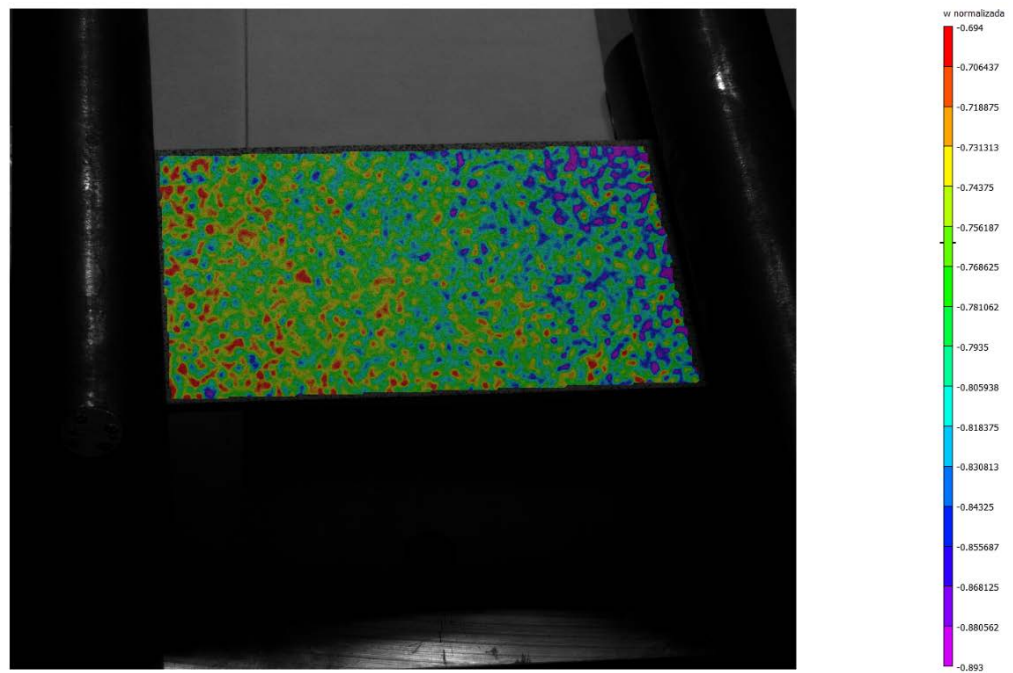


Figura 4.29. Máximo para modo 3 en placa 150x75x2,5.

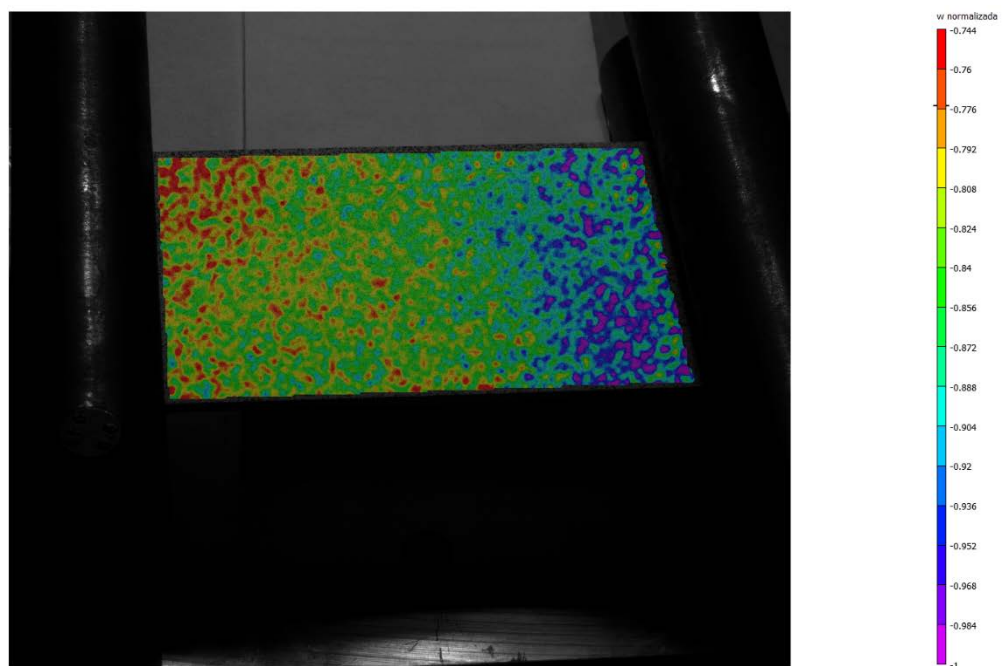


Figura 4.30. Mínimo para modo 3 en placa 150x75x2,5.

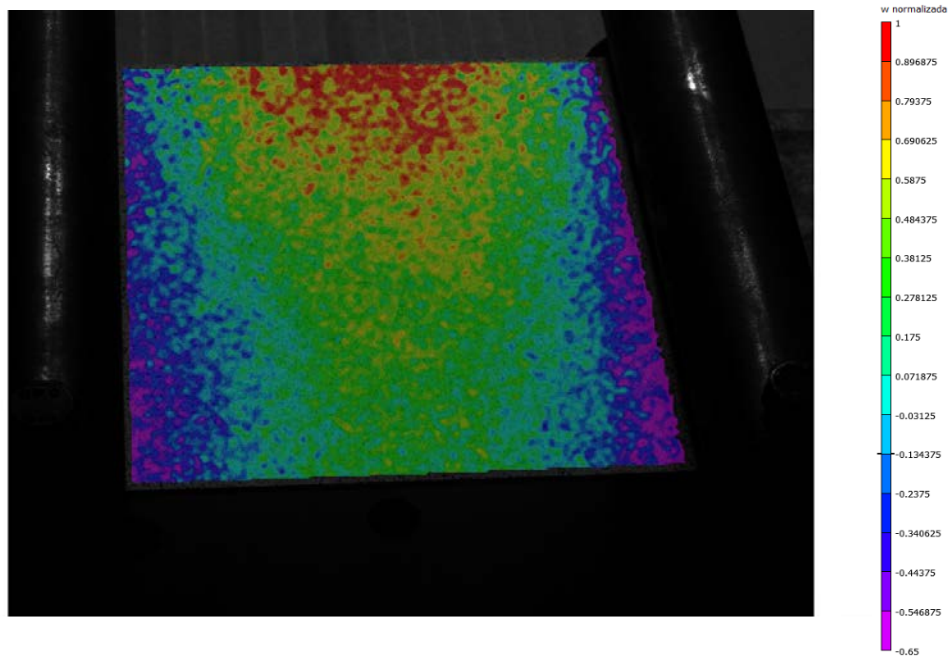


Figura 4.31. Máximo para modo 1 en placa 150x150x2,5.

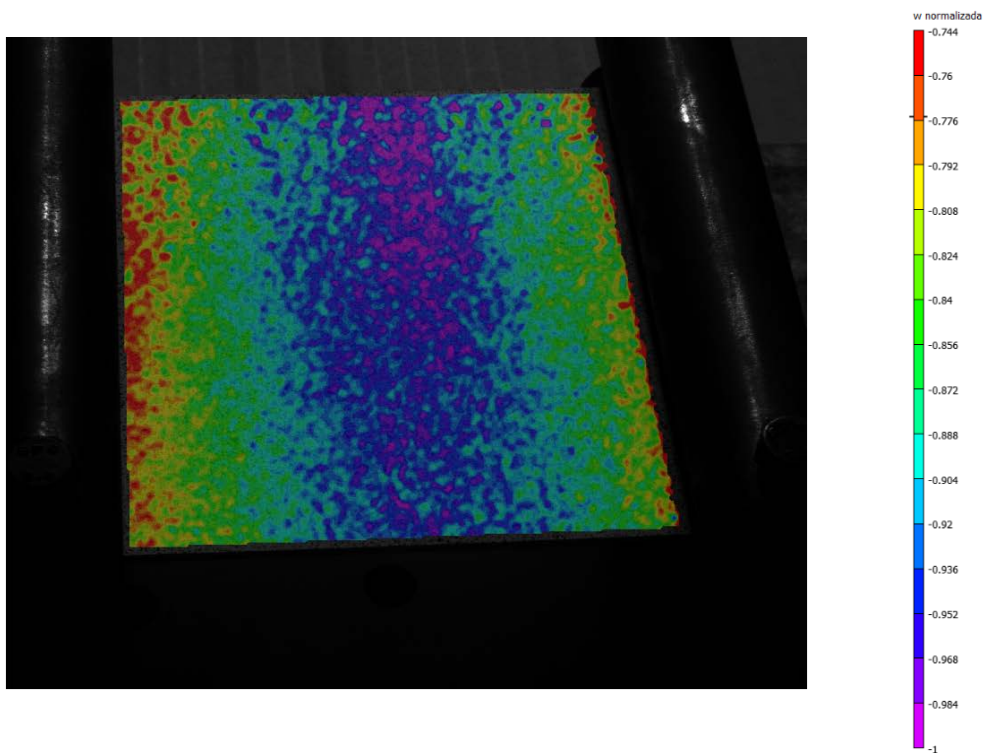


Figura 4.32. Mínimo para modo 1 en placa 150x150x2,5.

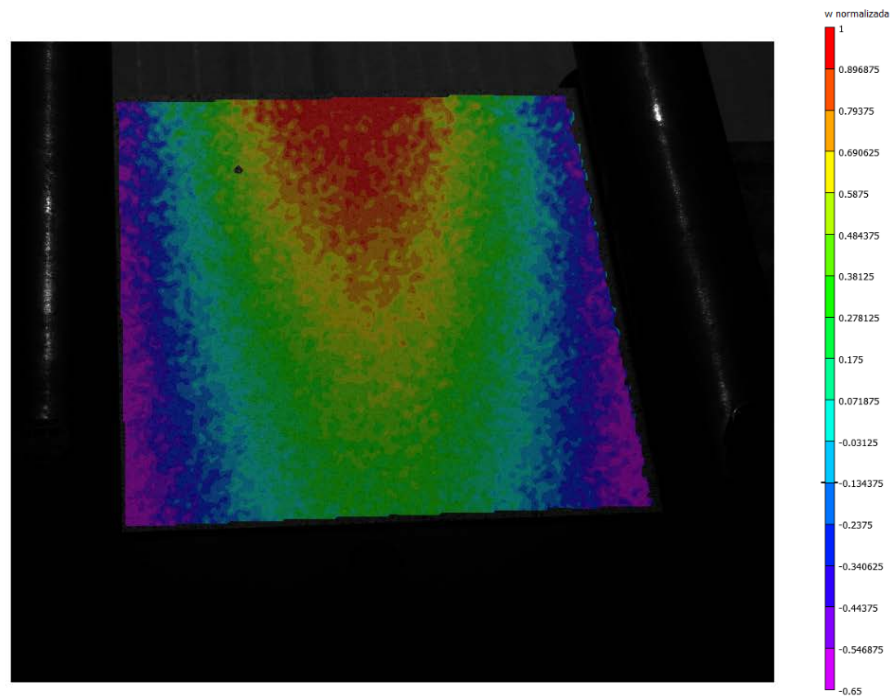


Figura 4.33. Máximo para modo 2 en placa 150x150x2,5.

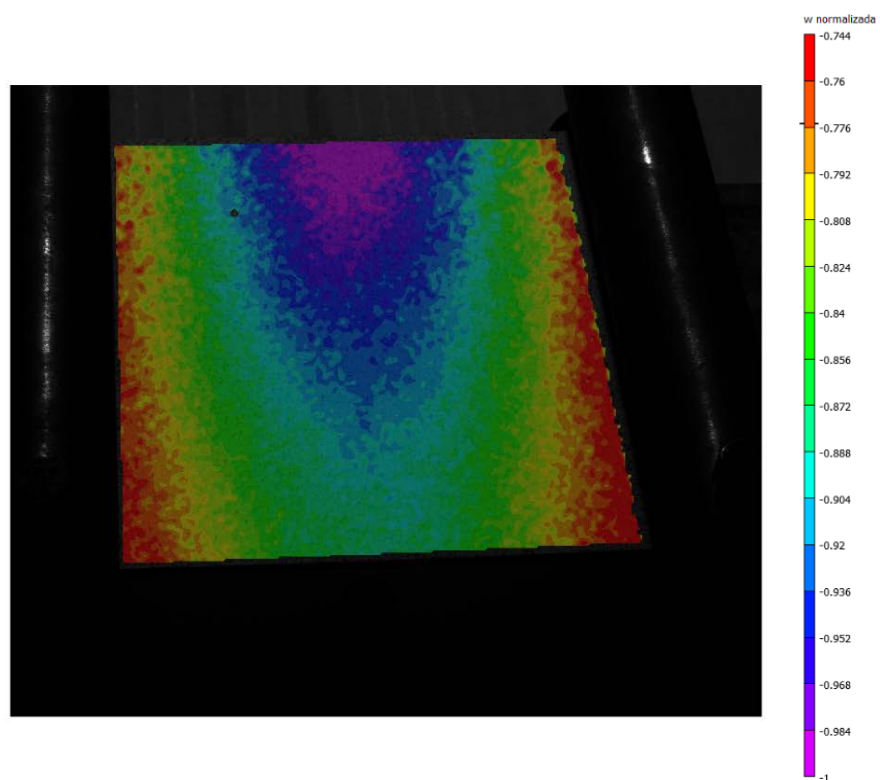


Figura 4.34. Mínimo para modo 2 en placa 150x150x2,5.

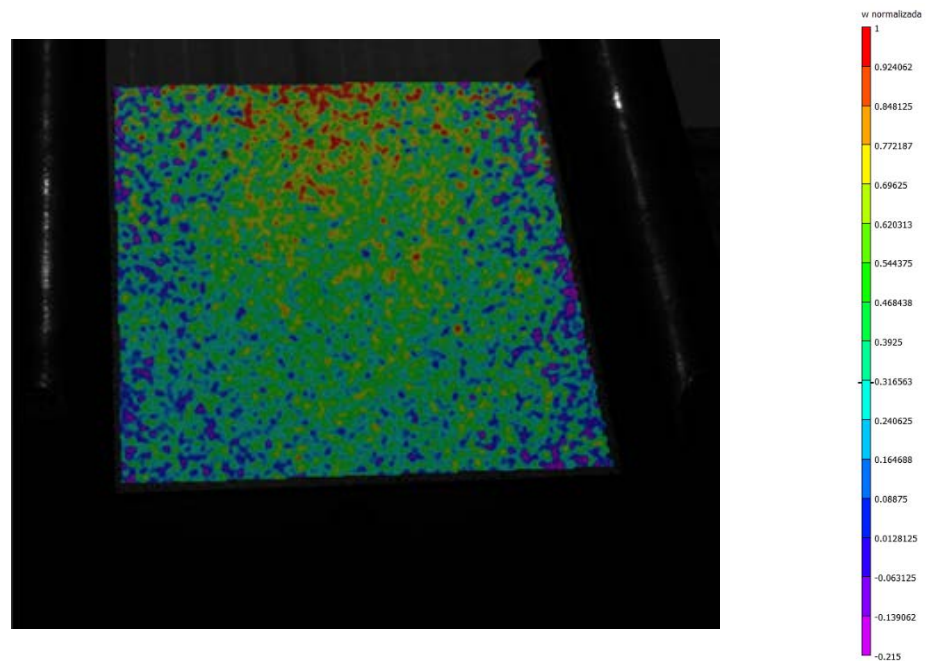


Figura 4.35. Máximo para modo 3 en placa 150x150x2,5.

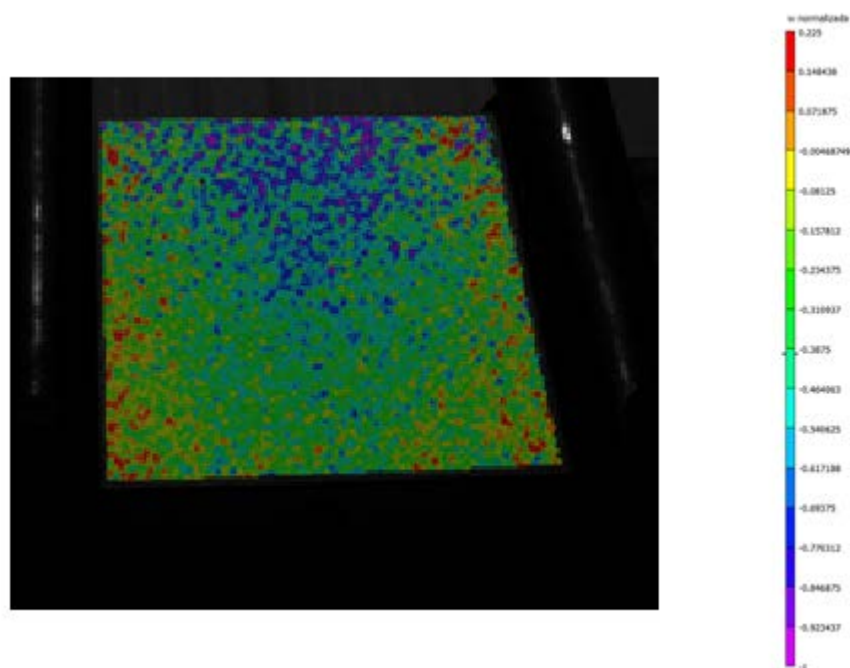


Figura 4.36. Mínimo para modo 3 en placa 150x150x2,5.

4.3. Conclusiones

A continuación se procede a realizar una comparación de los resultados obtenidos en las distintas placas, comenzando primero por las frecuencias naturales.

Como ya se comentó anteriormente, debido al equipamiento disponible, no se podían obtener valores precisos de frecuencia mayores a los 700-750 Hz lo que provoca una limitación en nuestro estudio. Por lo que solo podremos estudiar los tres primeros modos para las placas de tamaño 150x150x2,5 y 150x75x2,5 y los dos primeros para la placa de 150x37,5x2,5.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3
150x150x2,5	236±1.41	307±1.41	355±6.36
150x75x2,5	209,1±14.11	305,8±14.73	784,6±35.73
150x37,5x2,5	198,3±4.24	718,2±10.97	

Tabla 4.7. Frecuencias naturales obtenidas a partir de los ensayos del martillo instrumentado.

También se comentó al principio que el apriete iba a afectar de manera notable a los resultados obtenidos, así pues, si se observan los primeros modos aparecen diferentes frecuencias a las cuales, si tenemos en cuenta los distintos grados de rigidez, se podrá decir que se sitúan en el mismo rango.

Para el segundo modo, y siguiendo las mismas pautas, para las placas de tamaño 150x150x2.5 y 150x75x2.5 aparecen ambos a las mismas frecuencias mientras que en la placa con dimensiones 150x37.5x2.5 aparecerá a una frecuencia mucho mayor. Esto indica que este tipo de placa saltará a otra frecuencia distinta.

Por último, el tercer modo en el cual solo se pudo recoger datos para las placas de tamaño 150x150x2.5 y 150x75x2.5 ocurre un caso similar al anterior. Tenemos frecuencias muy dispares en ambos, lo que nos indica que se mueven en distintos modos de frecuencia.

Comparando la forma de los modos se observa en las figuras 4.37-4.39:

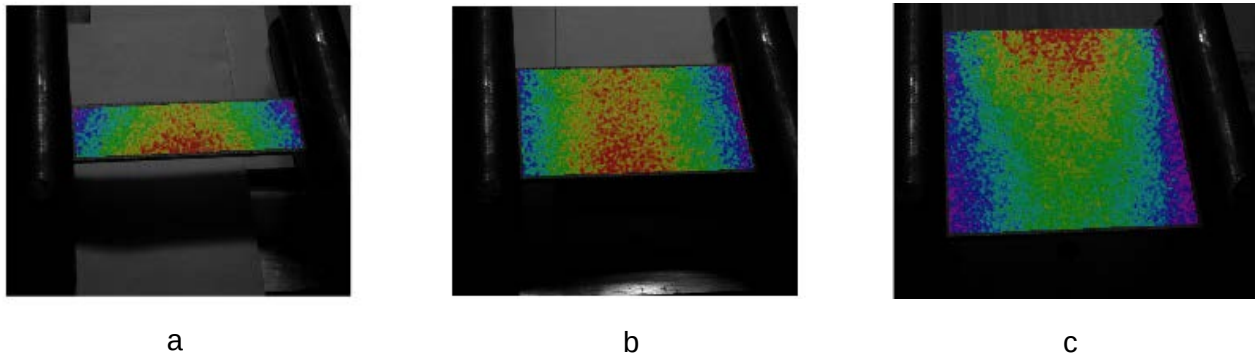


Figura 4.37. Comparativa de forma del primer modo para placa 150x37.5x2.5 (a), 150x75x2.5 (b) y 150x150x2.5 (c).

Como observamos, la forma del primer modo parece similar entre las tres placas; siendo mayor entre la placa de 150x37.5x2.5 (4.37a) y la placa de dimensiones 150x150x2.5 (4.37c) en las cuales se observa como se obtienen formas no simétricas de forma remarcada, mientras que para la placa de dimensiones 150x75x2.5 (4.37b) aparecen los desplazamientos centrales más uniformes. Esto es debido a la ya comentada rigidez, siendo en estas dos primeras, desequilibrada; mientras que en la de 150x75x2.5 esta equilibrada.

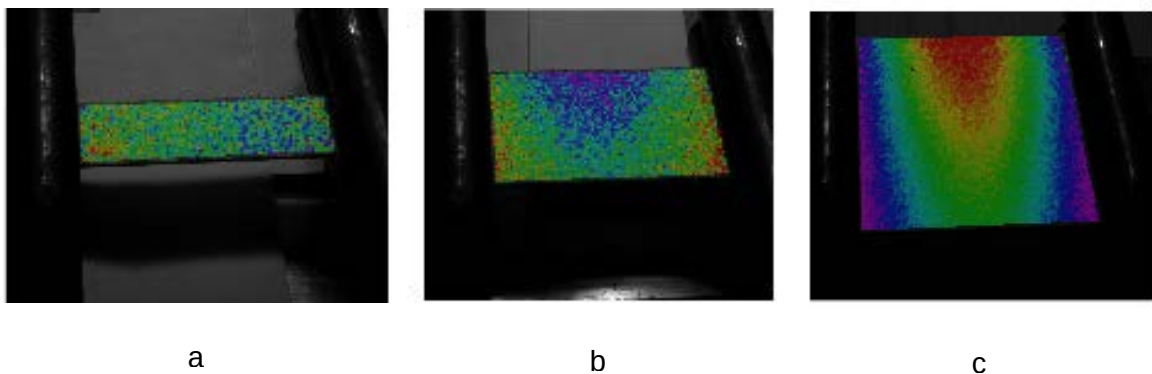


Figura 4.38. Comparativa de forma del segundo modo para placa 150x37.5x2.5 (a), 150x75x2.5 (b) y 150x150x2.5 (c).

En la figura 4.39, se representa la deformación producida por el segundo modo que presentan las tres placas, aquí se observa como la placa de 150x75x2.5 (4.38b) y la de 150x150x2.5 (4.38c) generan formas similares, mientras que la pequeña (4.38a) tiene una forma distinta. Esto confirma lo comentado anteriormente en la tabla 4.7.

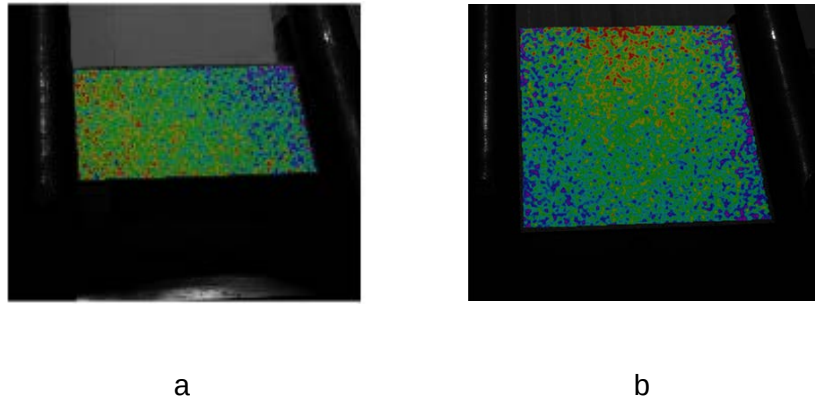


Figura 4.39. Comparativa de forma del tercer modo en placa 150x75x2.5 (a) y 150x150x2.5 (b).

Por último, pasamos a estudiar los modos generados en tercera posición. Se puede ver como de nuevo son diferentes entre sí, siendo el generado para la placa de tamaño 150x150x2,5 (4.39b) completamente distinto a la otra (4.39a). Esto último será tratado en el sexto apartado.

5. Estudio numérico del problema en estudio

Tras la realización de los estudios analíticos y experimentales se pasa al apartado numérico. El estudio numérico ayudará a comparar los resultados analíticos y experimentales obtenidos y observar las diferencias de la realidad con lo calculado.

Como ya se comentó en el apartado experimental, las condiciones de apoyo fabricadas provocaban que no se consiguiese un estado biapoyado perfecto, por lo que aquí se realizarán dos casos, primero uno con condiciones biapoyadas perfectas y otro caso en donde aparezca cierta rigidez en los apoyos.

5.1. Definición del objeto

Como ya se expuso, se va a estudiar tres tipos de placas en las que se comprobara su cambio en frecuencias naturales y sus respectivas formas. La configuración que se llevara a cabo en ANSYS™ no es compleja debido a la geometría de la placa; usándose elementos cúbicos. Los elementos de tipo cúbicos son los elegidos debido a que son los elementos que van a generar un mayor orden de precisión teniendo ocho puntos entre los que se va a interpolar en lugar de seis si estuviésemos en el caso de elementos tipo tetraédricos. Estos elementos, al ser más precisos van a generar un mayor coste computacional, pero debido a que la geometría de estudio es muy simple, el tiempo de cálculo no será longo, como ya fue explicado en el apartado 2.4.1.

Con esto, se obtiene para cada placa el siguiente número de elementos:

Placa	Elementos
150x150	256
150x75	253
150x37.5	256

Tabla 5.1. Número de elementos empleados en cada placa.

De esta manera, las geometrías ya malladas quedan:

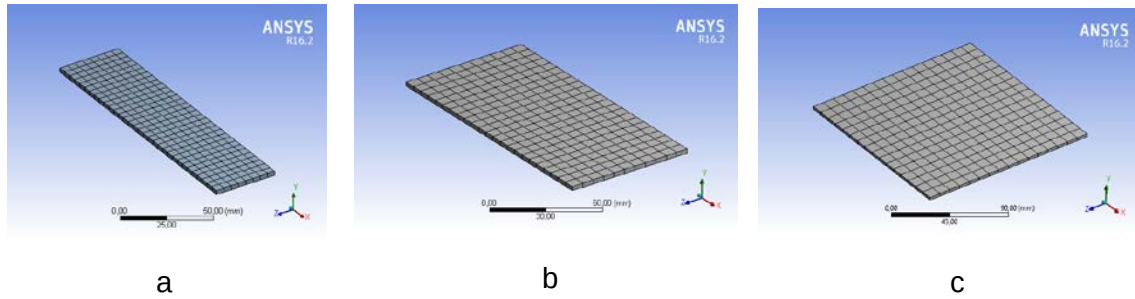


Figura 5.1. Mallado de placa de tamaño 150x37.5x2.5 (a), 150x75x2.5 (b) y 150x150x2.5 (c) a estudiar.

El material será definido de la siguiente forma:

Property	Value	Unit
 Density	1,85	g cm^{-3}
 Orthotropic Elasticity		
Young's Modulus X direction	23400	MPa
Young's Modulus Y direction	24100	MPa
Young's Modulus Z direction	23400	MPa
Poisson's Ratio XY	0,26	
Poisson's Ratio YZ	0,4	
Poisson's Ratio XZ	0,26	
Shear Modulus XY	4136,9	MPa
Shear Modulus YZ	3500	MPa
Shear Modulus XZ	4136,9	MPa

Figura 5.2. Definición de los materiales.

Como se puede observar, ANSYS™ necesita de un mayor número de datos de lo que conocemos del material. Debido a esto, deberán de ser calculados o buscar materiales parecidos ya que estos no tendrán influencia en el cálculo final al tener una condición de placa plana.

Definir las condiciones de contorno, como ya se ha comentado, será la más compleja ya que se va a estudiar dos casos.

Para el primer caso, condiciones biapoyadas perfectas, simplemente se necesitará aplicar en los lados que tendrán el apoyo la condición *Simply Supported*.

Con esto bastara para obtener los resultados analíticos. Para el segundo caso, sin embargo, se deberá de aproximar la fijación obtenida en los ensayos experimentales, que sin llegar a ser un empotramiento puro, está cerca de restringir cualquier movimiento o giro de la placa.

Para definir estas últimas condiciones de contorno y conseguir correlar los resultados experimentales y numéricos, se usará la condición de *Simply Supported* apoyada por *Elastic Support*. Esta función ayuda a controlar la rigidez de una superficie mediante un parámetro de rigidez *Foundation Stiffness* medido en N/mm³. Debido a las complicaciones obtenidas en los ensayos experimentales producidos por la diferencia de apriete entre las sujeciones, se deberá de generar distintas áreas con diferentes coeficientes de rigidez. En este caso se han creado cinco superficies diferenciadas a las cuales se les aplicara los siguientes coeficientes de rigidez de manera que este crezca a lo largo del extremo apoyado.

5.2. Postprocesamiento de los datos

Tras la definición de la malla y condiciones de contorno, y el posterior cálculo, se obtienen los datos numéricos. Primero se pasa a observar lo obtenido con la condición de apoyo simple.

Placa	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x150	183.9	249.3	594.3	749.1	824	1141
150x75	182.5	378.1	737.7	995.3	1678.5	1860.1
150x37.5	181.8	676.2	729.4	1494.3	1647.9	2559

Tabla 5.2. Frecuencias naturales obtenidas mediante ANSYS® para las distintas placas estudiadas.

Ahora se van a mostrar los tres primeros modos (excepto para la placa 150x150x2.5, como se comentó en el análisis teórico) generados para cada placa en las figuras 5.3-5.11:

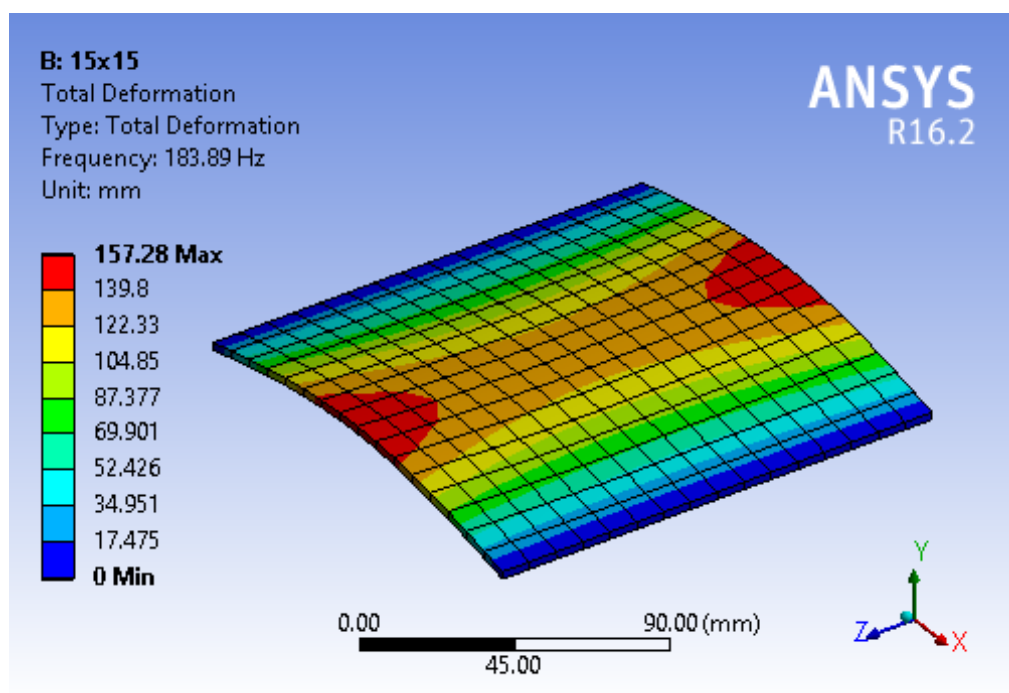


Figura 5.3. Primer modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x150x2,5.

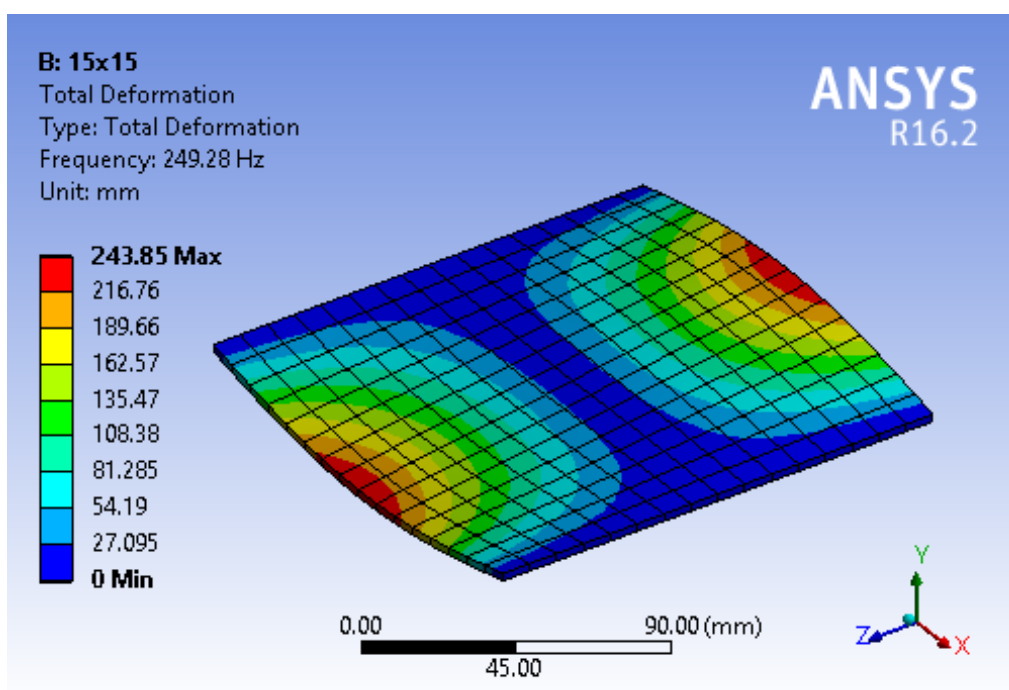


Figura 5.4. Segundo modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x150x2,5.

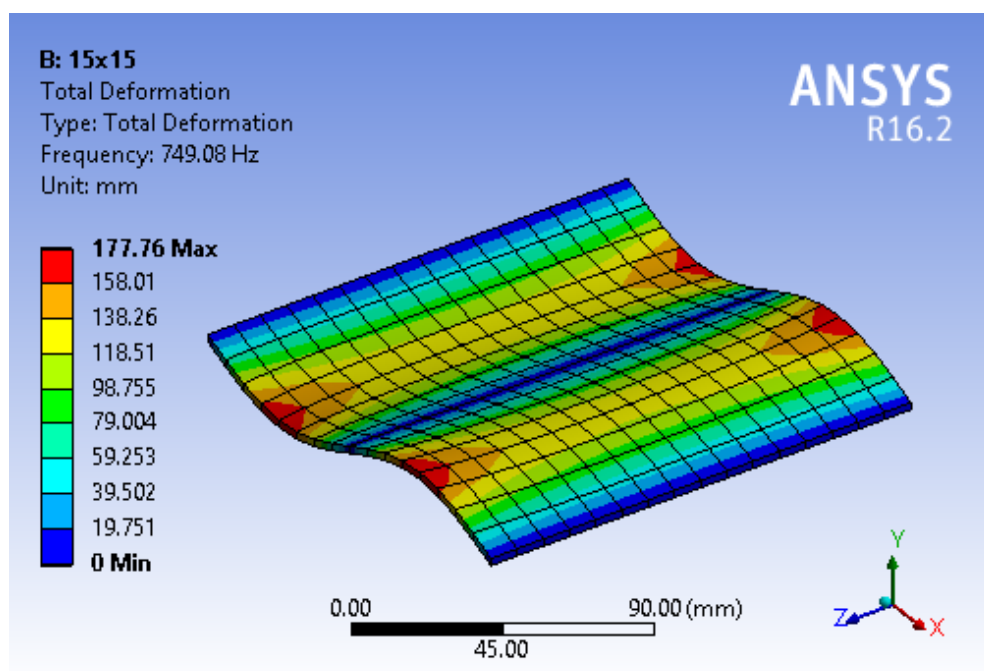


Figura 5.5. Cuarto modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x150x2,5.

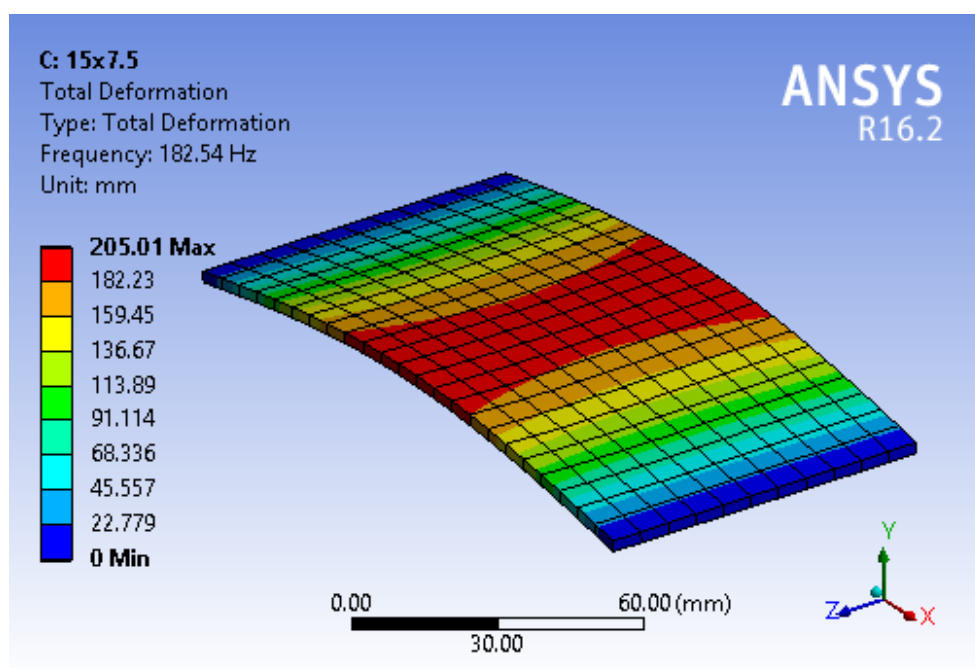


Figura 5.6. Primer modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x75x2,5.

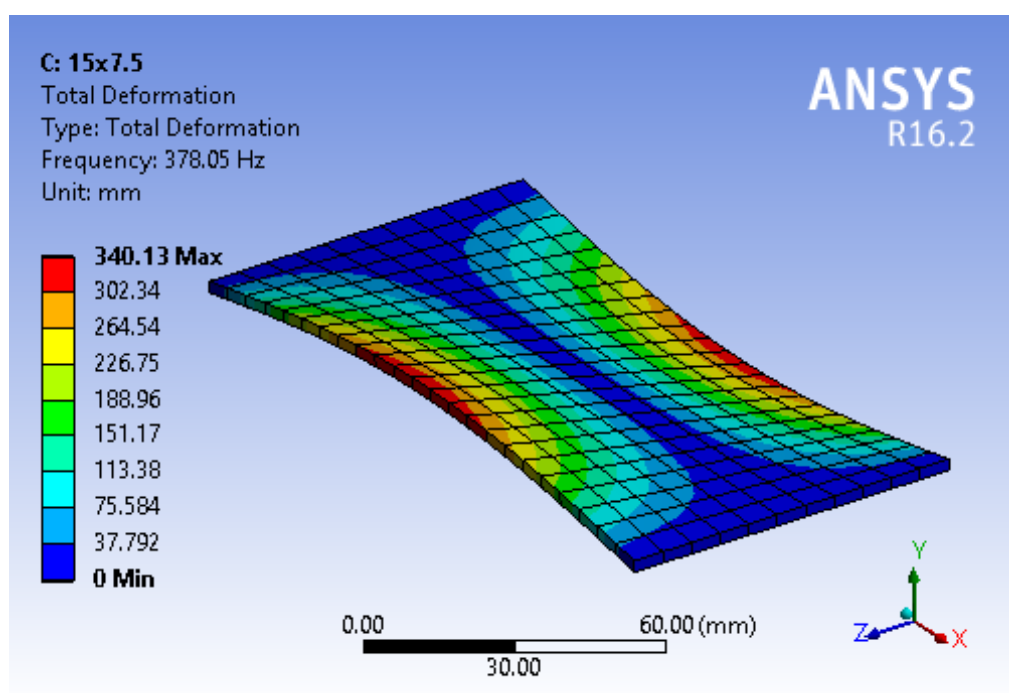


Figura 5.7. Segundo modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x75x2,5.

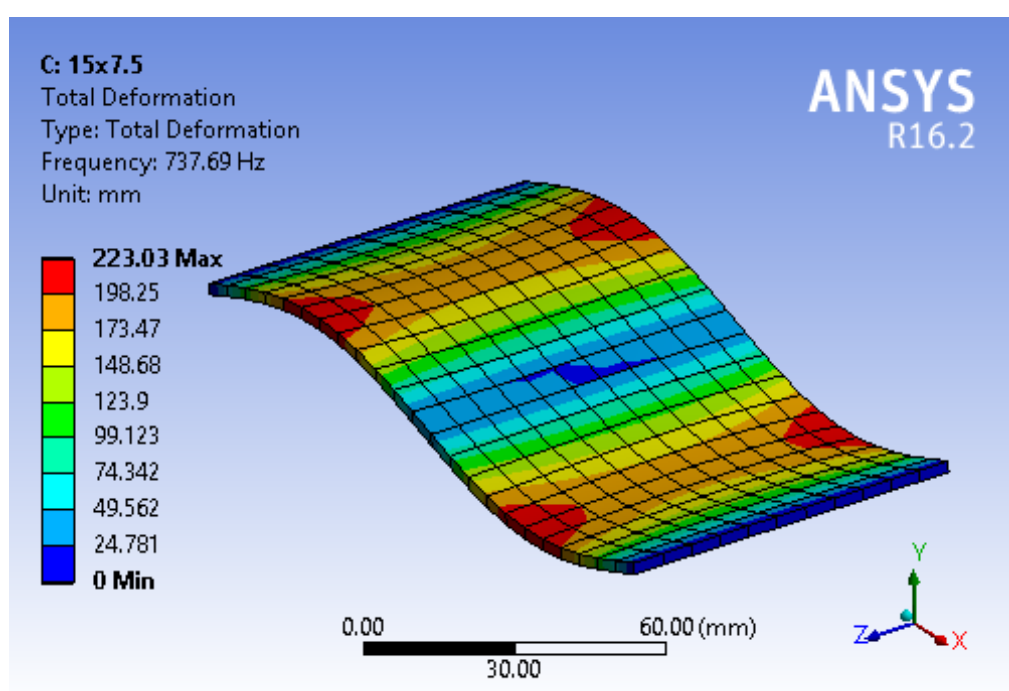


Figura 5.8. Tercer modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x75x2,5.

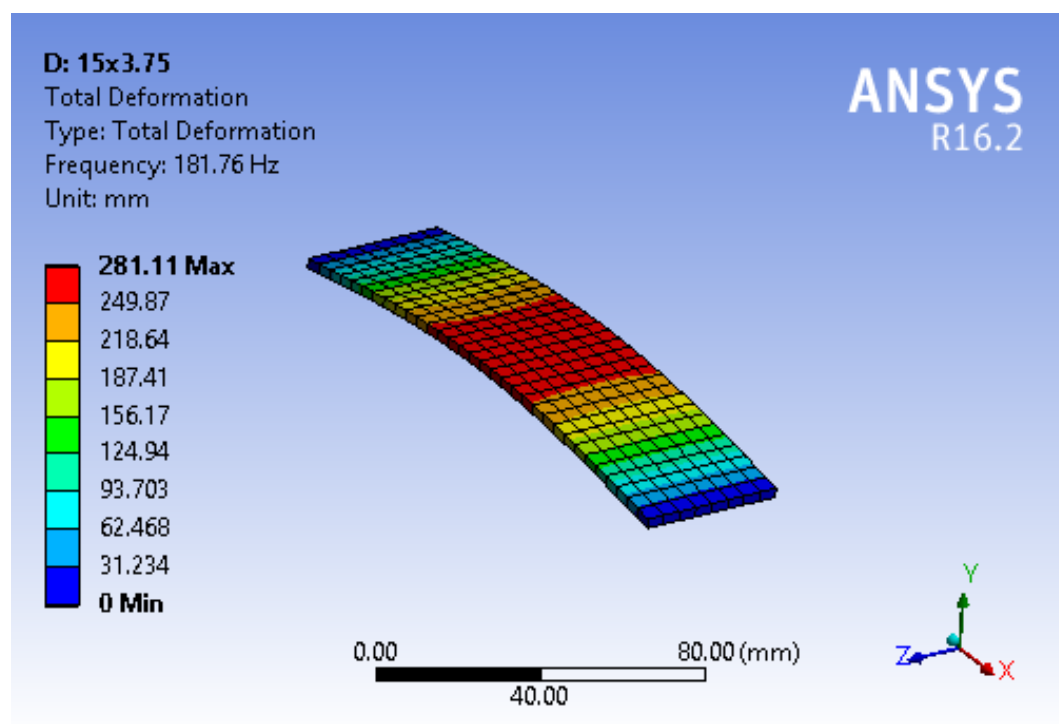


Figura 5.9. Primer modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x37,5x2,5.

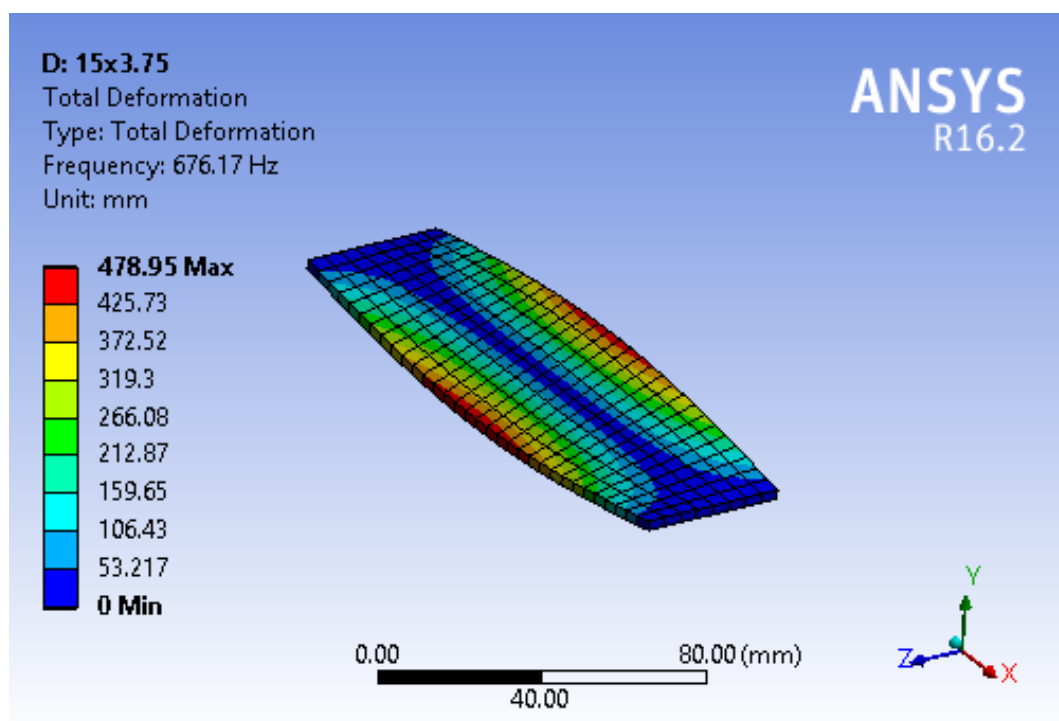


Figura 5.10. Segundo modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x37,5x2,5.

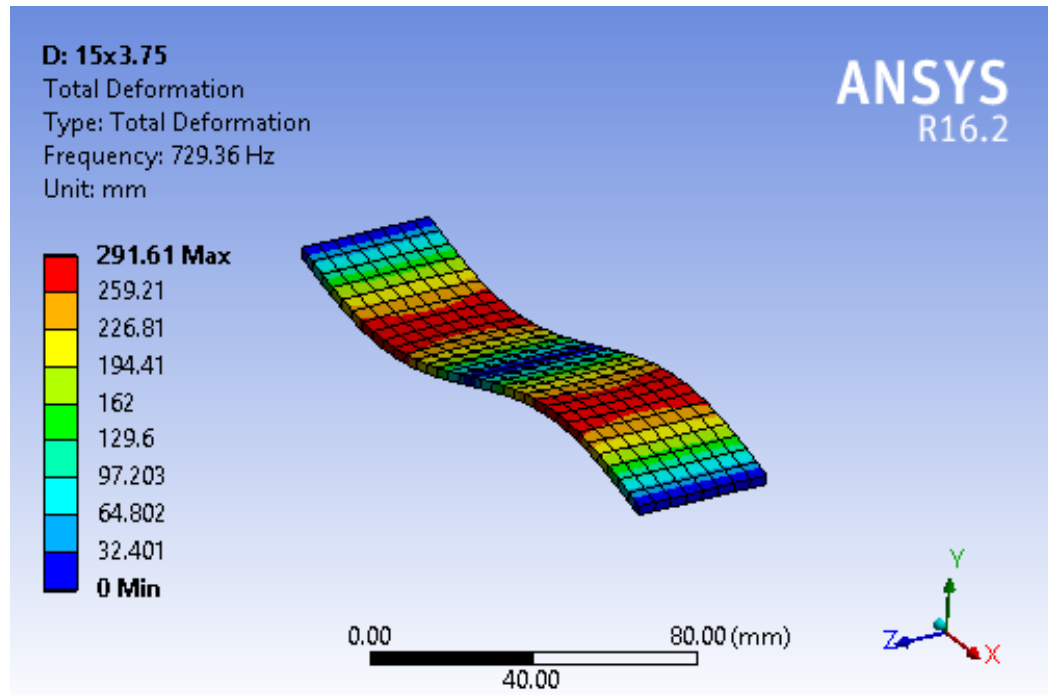


Figura 5.11. Tercer modo vibración con condición de apoyo simple para placa 150x37,5x2,5.

Con esto se han obtenido las formas ideales, que serán similares a las obtenidas en el desarrollo teórico.

A continuación, se realiza un estudio de la influencia de la rigidez en los apoyos, de manera que se pueda simular las condiciones reales debido al par de apriete. Ahora pasamos a aplicar una rigidez sobre los apoyos de la forma explicada al inicio de este apartado.

Comenzando por la placa pequeña se ha calculado la siguiente distribución de rigidez por áreas para que se asimile a lo obtenido de forma experimental:

Placa	Área 1 (N/mm ³)	Área 2 (N/mm ³)	Área 3 (N/mm ³)	Área 4 (N/mm ³)	Área 5 (N/mm ³)
150x37.5	2	2	11	11	11

Tabla 5.3. Distribución de rigideces para placa 150x37,5x2,5.

Como se observa, aquí los diferentes valores de rigidez no crecerán de forma lineal debido a que con esta se pudo conseguir un apriete uniforme.

Los valores de frecuencia obtenidos (tabla 5.4), junto a la forma de los tres primeros modos (figuras 5.12-5.14) son:

Placa	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x37.5	198.68	635.89	682.02	1385.8	1479.5	2335.1

Tabla 5.4. Frecuencias naturales obtenidas para placa 150x37,5x2,5 con rigidez aplicada.

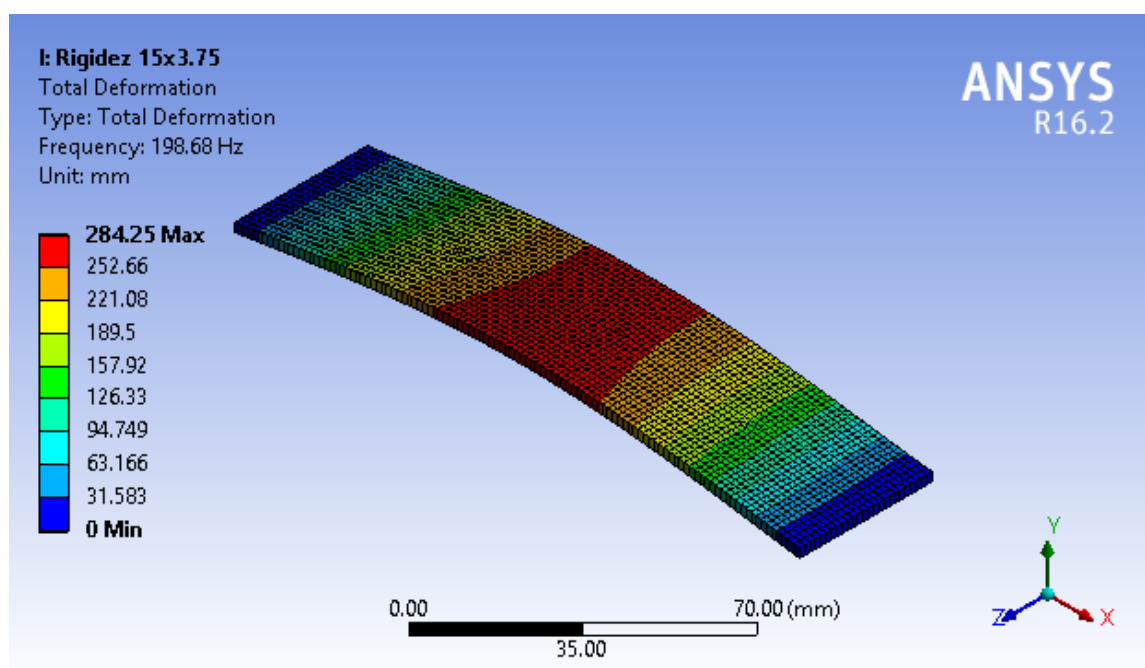


Figura 5.12. Primera forma para placa 150x37,5x2,5 con rigidez aplicada.

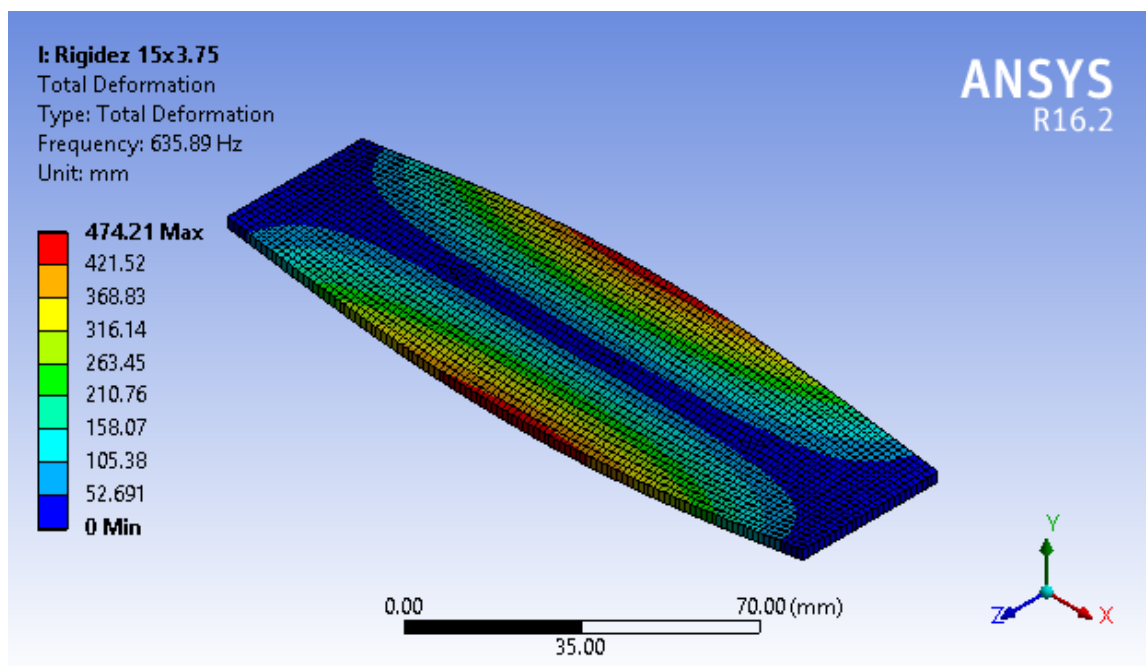


Figura 5.13. Segunda forma para placa 150x37,5x2,5 con rigidez aplicada.

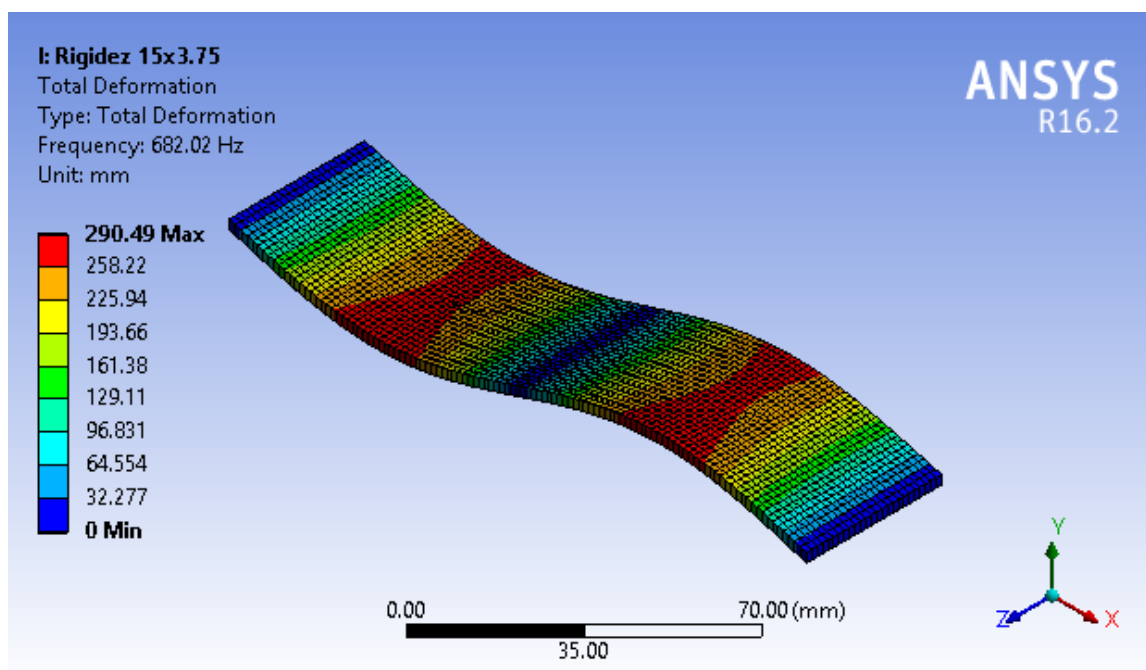


Figura 5.14. Tercera forma para placa 150x37,5x2,5 con rigidez aplicada.

Para la placa 150x75x2.5 se va a tener que usar una rigidez que no varíe linealmente, quedando:

Placa	Área 1 (N/mm ³)	Área 2 (N/mm ³)	Área 3 (N/mm ³)	Área 4 (N/mm ³)	Área 5 (N/mm ³)
150x75	9	9	11	11	11

Tabla 5.5. Distribución de rigideces para placa 150x75x2,5

Como se puede comprobar, en esta placa se ha aplicado un aprieta más uniforme, obteniendo dos zonas diferenciadas, que sin generar una homogeneidad, va a ser el caso en el que las formas de acerquen más a la realidad. De esta forma, los valores de frecuencia serán:

Placa	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x75	209.05	372.75	698.4	933.54	1505	1769.2

Tabla 5.6. Frecuencias naturales obtenidas para placa 150x75x2,5 con rigidez aplicada.

Y los modos con su correspondiente forma vendrán dados en las figuras 5.15-5.17:

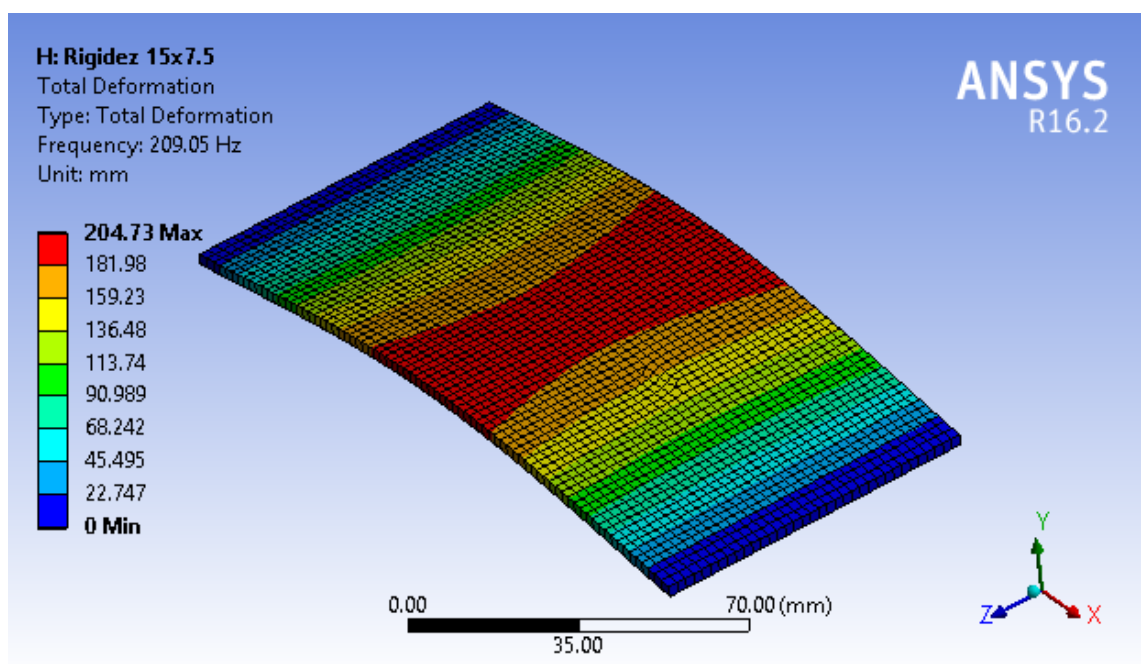


Figura 5.15. Primera forma para placa 150x75x2,5 con rigidez aplicada.

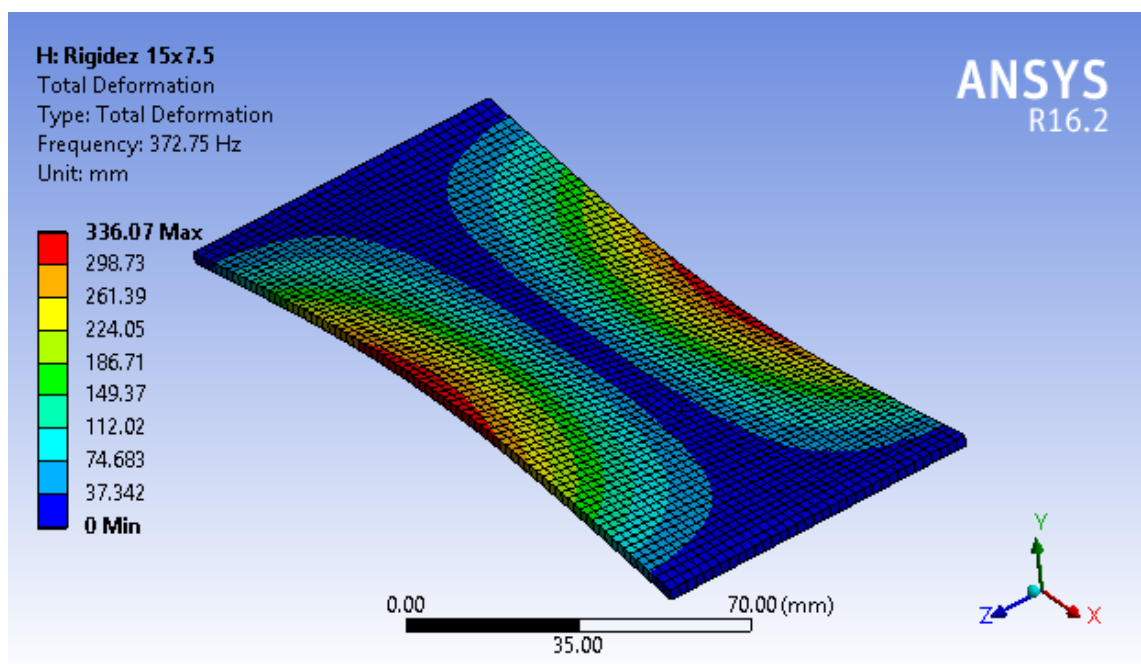


Figura 5.16. Segundo forma para placa 150x75x2,5 con rigidez aplicada.

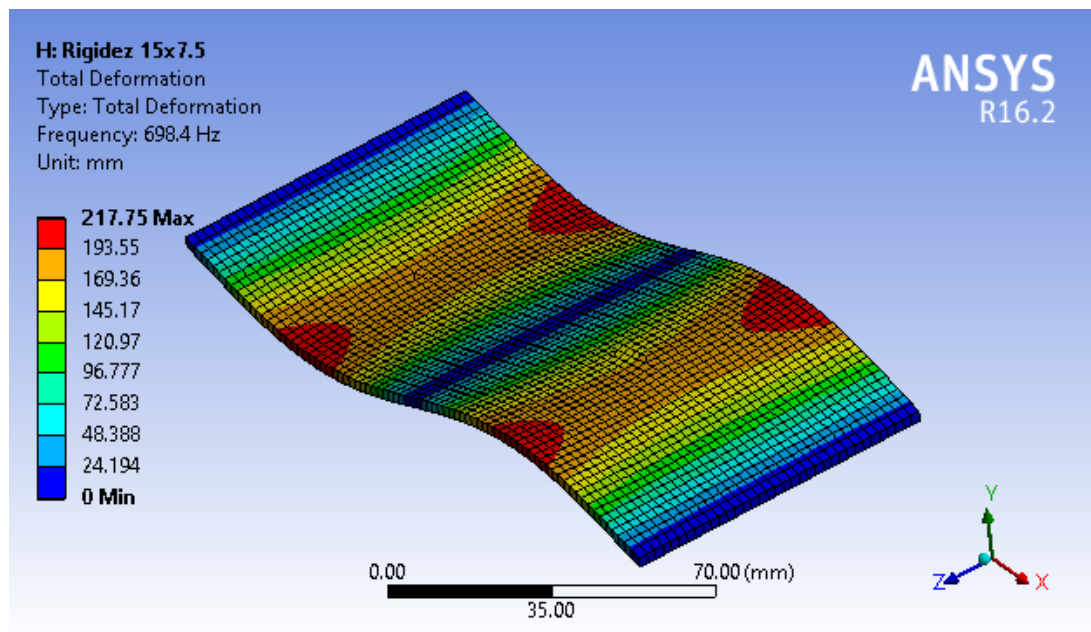


Figura 5.17. Tercera forma para placa 150x75x2,5 con rigidez aplicada.

Para la placa de 150x150x2.5 vamos a buscar un tipo de rigidez que crezca de forma lineal con respecto al largo de la placa. Con esto, los valores quedaran de la siguiente forma:

Placa	Área 1 (N/mm ³)	Área 2 (N/mm ³)	Área 3 (N/mm ³)	Área 4 (N/mm ³)	Área 5 (N/mm ³)
150x75	34	23	21	15	11

Tabla 5.7. Distribución de rigideces para placa 150x150x2,5

Se observa como en uno de los extremos se aplica un mayor apriete provocando que la forma de los modos no quede simétrica. Los valores de frecuencia con estas rigideces aplicadas quedan:

Placa	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
150x75	236.01	295.25	600.14	738.23	825.51	1107.8

Tabla 5.8. Frecuencias naturales obtenidas para placa 150x150x2,5 con rigidez aplicada.

Representando los modos generados en ANSYS® para la placa 150x150x2.5 en las figuras 5.18-5.20 vamos a tener:

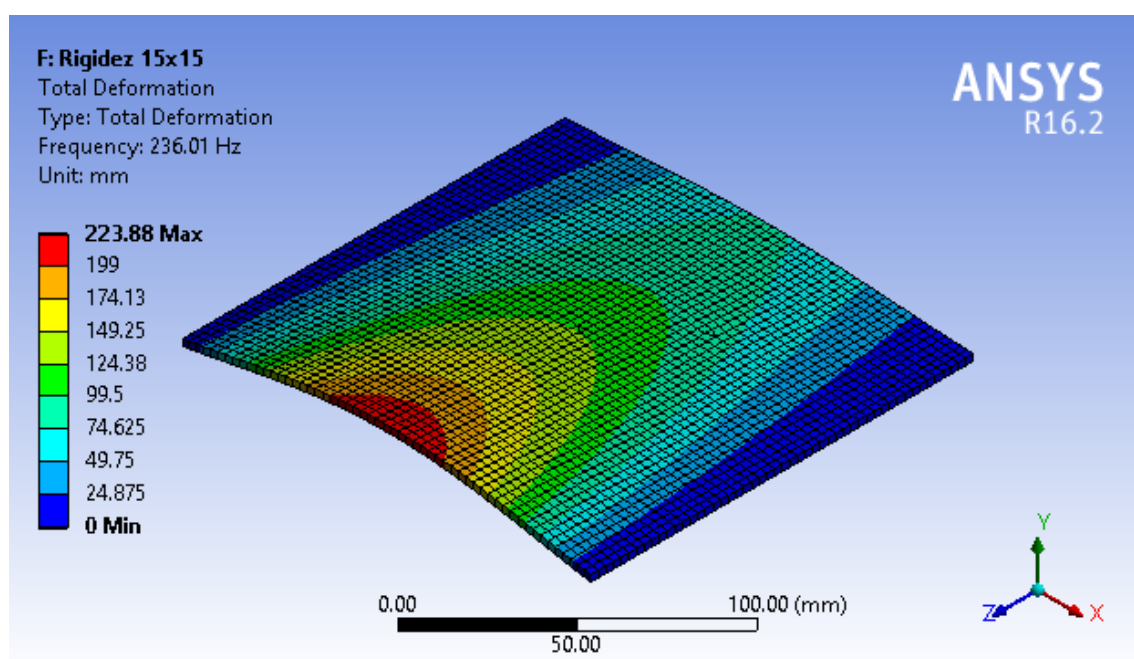


Figura 5.18. Primera forma para placa 150x150x2,5 con rigidez aplicada.

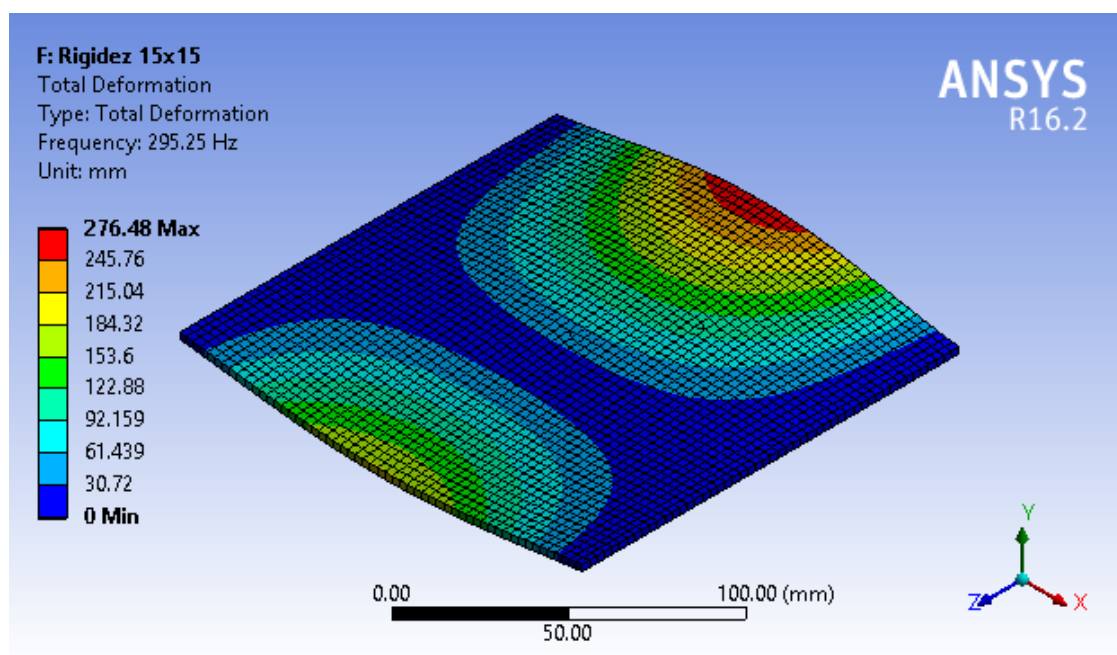


Figura 5.19. Segunda forma para placa 150x150x2,5 con rigidez aplicada.

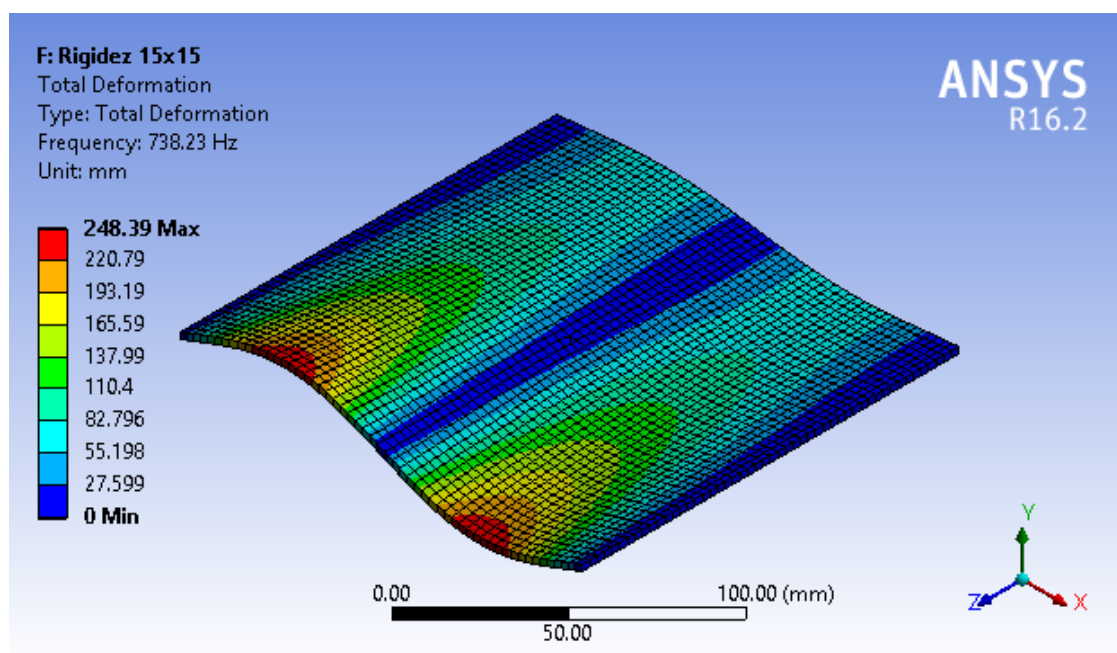


Figura 5.20. Cuarta forma para placa 150x150x2,5 con rigidez aplicada.

5.3. Conclusiones

Como se puede observar durante el desarrollo del trabajo, han aparecido diferencias entre el cálculo analítico y experimental provocadas por las condiciones de contorno conseguidas experimentalmente que se ha traducido en la dificultad de una comparación trivial entre ambos resultados. La dificultad de aplicar una rigidez teórica al cálculo teórico genera una necesidad que el cálculo numérico consiga sobrepasar.

El estudio numérico nos permite de manera relativamente sencilla abarcar problemas de gran complejidad teórica, consiguiendo un alto grado de fidelidad frente a los resultados reales.

Entrando en el apartado de los valores de rigidez, se consigue mediante una sola opción la opción de modificar las condiciones de apoyo simuladas para así conseguir adaptar a nuestra necesidad el modelo generado.

6. Resultados

En este apartado se comparan los resultados de los tres métodos aplicados para la obtención de las frecuencias naturales junto a sus modos de vibración propios. El procedimiento seguido será en el comparar los resultados obtenidos mediante el Método de Ritz con los obtenidos en ANSYS® para condiciones de apoyo perfecto y los resultados obtenidos a partir de DIC 3D con los resultados de ANSYS® donde aplicamos la condición de rigidez a los apoyos. A su vez, se analizará la influencia de la variación de la rigidez en las comparativas experimentales y numéricas.

En la tabla 6.1 se comienza comparando las frecuencias obtenidas a través del Método de Ritz y a través de ANSYS®:

		Modo 1	Modo 2	Modo 3
Met. Ritz	150x37,5x2,5	188.58	690.71	754.36
	150x75x2,5	189.3	327.26	768.18
	150x150x2,5	183.77	252.24	757.48
ANSYS ®	150x37,5x2,5	181.76	676.17	729.36
	150x75x2,5	183.54	378.05	737.69
	150x150x2,5	183.89	249.28	594.25

Tabla 6.1. Comparativa entre las frecuencias obtenidas en calculo teórico y calculo numérico con condiciones ideales.

Se observa como en la tabla 6.1, para el primer modo y segundo modo en todos los casos aparecen valores correctos, obteniendo para la placa de tamaño 150x37.5x2.5 diferencias del 3.6% para el primer modo; para la placa de 150x75x2.5 aparece una mayor diferencia en el segundo modo siendo esta del 13.4%, pero siendo la diferencia para el resto del 3.04%. Por último, para la placa de 150x150x2.5 se consigue una precisión muy alta, obteniendo diferencias del 0.065% para el primer modo y 1.17% para el segundo modo. Esto hace de nuestro método una herramienta bastante precisa para estos primeros modos.

Finalmente, para el tercer modo en los casos de placa de tamaño 150x37.5x2.5 y 150x75x2.5 aparecen diferencias entre los métodos analíticos y numéricos del 3.31% y 3.969% respectivamente pero para la placa de tamaño 150x150x2.5 aparece una mayor diferencia, siendo esta del 21.55%. Esto se debe a que se produce la aparición de un modo provocado por torsión, cosa que no va a contemplar el Método de Ritz tal y como se comenta en las referencias [9], [21] o [22].

Para poder comparar los modos, se posicionarán en vista frontal a la perspectiva de filmación y se seleccionarán varios puntos, necesarios para comparar la concavidad.

Comenzando con la placa de tamaño 150x37.5x2.5 se tiene las figuras 6.1-6.3:

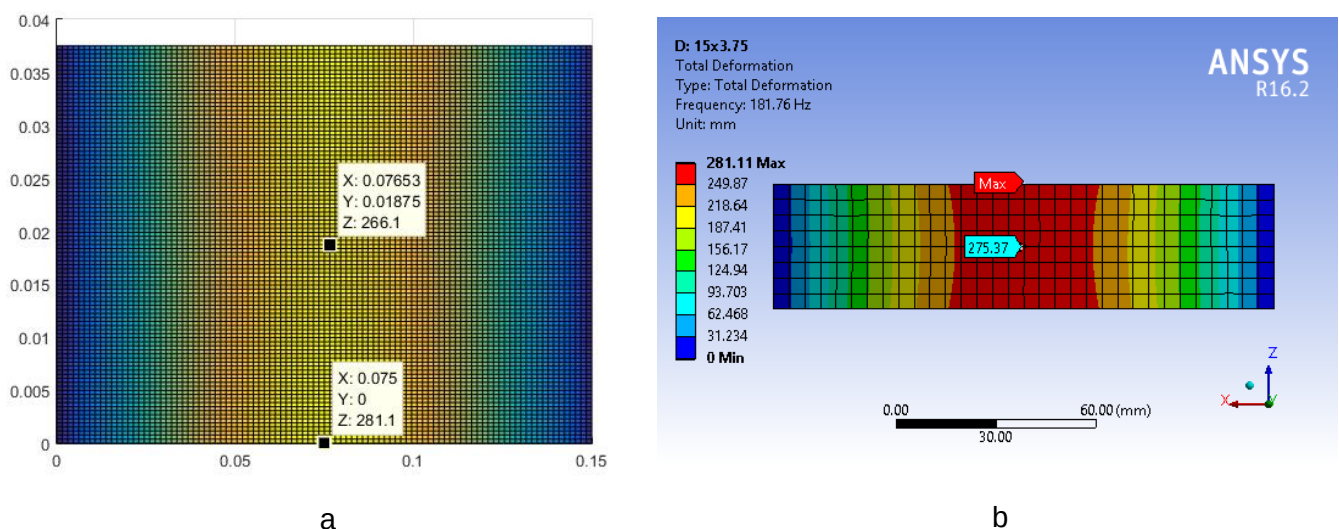


Figura 6.1. Comparativa del primer modo en placa 150x37,5x2,5.

Además de la vista en planta, vamos a necesitar reescalar ambos resultados. Debido a las limitaciones que sufre el postprocesador de ANSYS® con respecto a la escala en simulaciones modales, se deberá de ajustar el caso analítico en base al numérico. Para el primer modo, en la figura 6.1, para el caso analítico tenemos como nuevos valores en los puntos remarcados 281.1 y 266.1; mientras que en el caso

numérico tendremos 281.11 y 275.37. Si se compara el centro de la concavidad, aparece una diferencia del 3.36%, valor bastante aproximado.

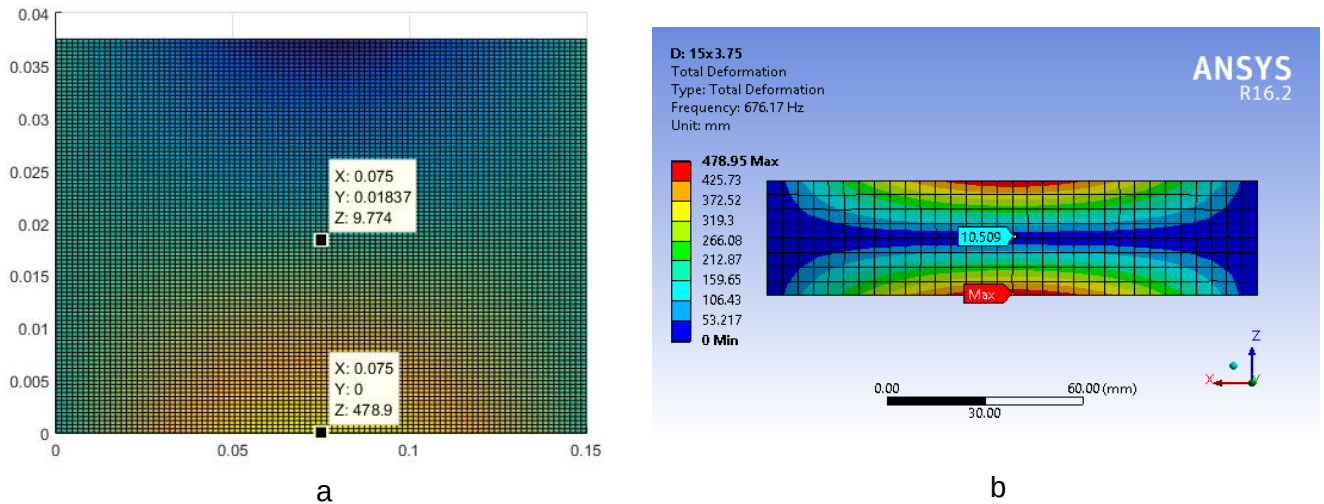


Figura 6.2. Comparativa del segundo modo en placa 150x37,5x2,5.

En el segundo modo, como se muestra en la figura 6.2 y procediendo de la misma manera que en el anterior, se va a tener para el caso analítico tenemos como nuevos valores en los puntos remarcados 478.9 y 9.774; mientras que en el caso numérico tendremos 478.95 y 10.509. Observando de nuevo la diferencia obtenida en el punto central se obtiene un valor de 6.99%.

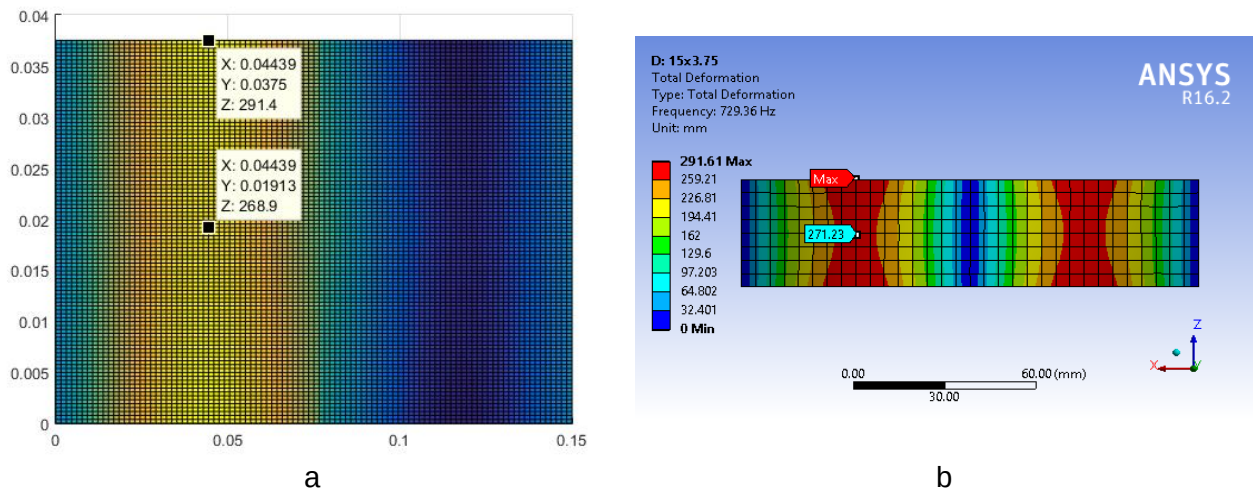


Figura 6.3. Comparativa del tercer modo en placa 150x37,5x2,5.

Y por último, para el tercer modo mostrado en la figura 6.3, en caso analítico aparecen los valores de 291.4 y 268.9 en los puntos marcados y en el caso numérico 291.61 y 273.23, obteniendo una diferencia de 1.585%. Para este modo se consiguen unos resultados positivos.

Una vez hecha la comparación con las formas en la placa de tamaño 150x37.5x2.5, si nos remontamos al capítulo 3, cuando se realizó la comparación del efecto viga frente al efecto placa, pudimos comprobar como la placa de tamaño 150x37,5x2,5 era la que más se acercaba al propio comportamiento de la viga. Aquí observamos como las deflexiones en el punto central son similares a las obtenidas en la zona lateral de la placa, teniendo mayor alcance en placas de gran tamaño, por lo que si se quiere realizar un estudio preliminar, en el que no se vaya a tener en cuenta los modos de placa en los que actué el eje secundario, se podrá usar el modelo viga.

Se pasará ahora a la placa de tamaño 150x75x2.5, mostrándose el primer modo en la figura 6.4:

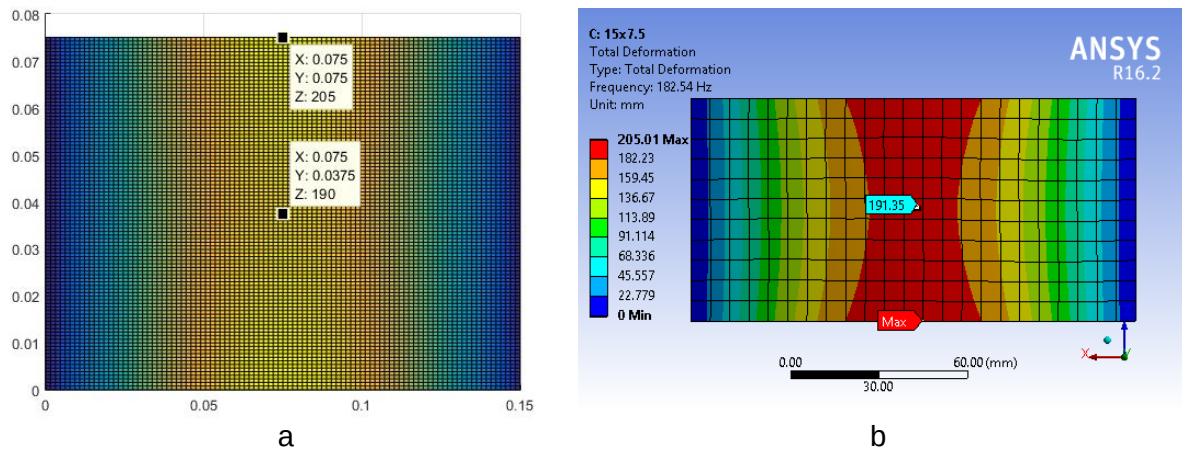


Figura 6.4. Comparativa del primer modo en placa 150x75x2,5.

En la placa de 150x75x2.5 debe de aparecer una mayor concavidad en la parte central en el primer y tercer modo. Primero se va a mostrar los resultados obtenidos en el primer modo, como se comprueba en la figura 6.4. En el caso analítico aparecen como valores en los puntos remarcados 205 y 190 y en el caso numérico se tiene 205.01 y 191.35. La diferencia que aparece entre los distintos valores en los puntos centrales será de 0.706%, un valor bastante positivo.

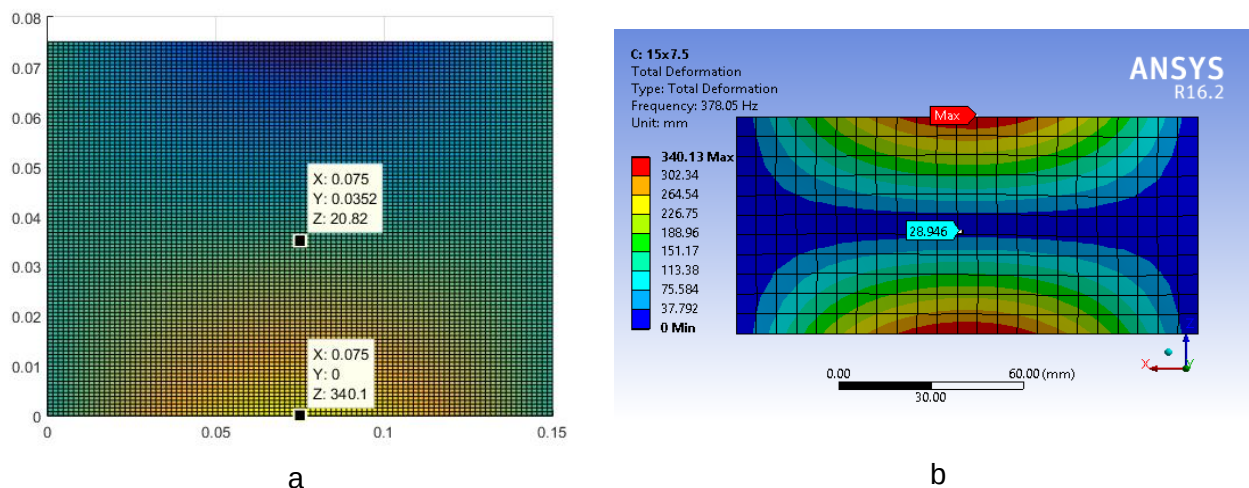


Figura 6.5. Comparativa del segundo modo en placa 150x75x2,5.

Pasando ahora al segundo modo, mostrado en la figura 6.5, para el análisis analítico se tiene valores de 340.1 y 20.82 para la periferia y el centro respectivamente; mientras que en el caso numérico se obtiene 340.13 y 28.946. La diferencia obtenida es de 28.07%.

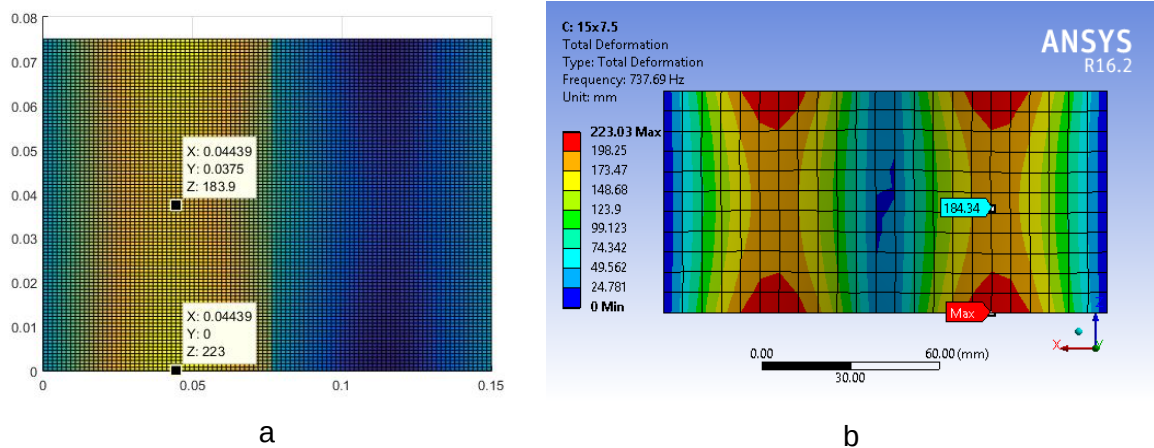


Figura 6.6. Comparativa del tercer modo en placa 150x75x2,5.

Por último, mostrado en la figura 6.6, tenemos el tercer modo para la placa de tamaño 150x75x2.5. En su estudio analítico se han obtenido valores de 223 y 183.9; mientras que en el caso numérico tendremos 223.03 y 184.34. Se consigue una diferencia del 0.239%.

A partir de aquí ya no se va a poder usar el modelo de viga debido a la importancia de los modos generados por el eje transversal. Como se observa, los valores de desplazamiento en el centro se van alejando cada vez más de los valores de desplazamiento en la zona lateral, esto corrobora lo expuesto anteriormente sobre el caso de viga.

Finalmente se compararán los distintos modos obtenidos (figuras 6.7-6.9) para la placa de tamaño 150x150x2,5:

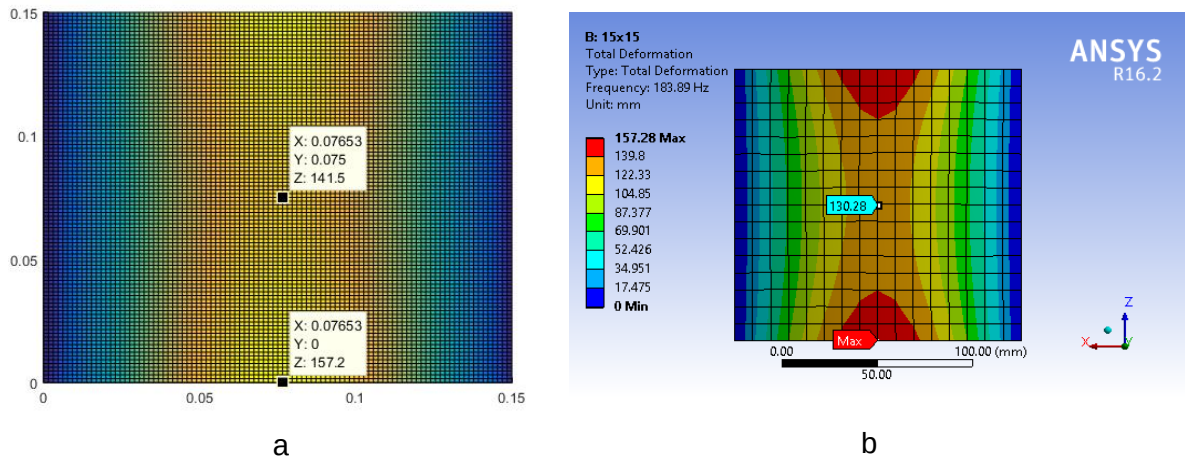


Figura 6.7. Comparativa del primer modo en placa 150x150x2,5.

Para esta última placa de tamaño 150x150x2.5, su comportamiento se deberá de alejar completamente del modelo de viga debido a la geometría de esta, por lo que deberá de aparecer la mayor concavidad en la parte central si se es comparado con los anteriores estudios. Comenzando por el caso analítico, en el primer modo, mostrado en la figura 6.7, se obtiene valores en los puntos remarcados 157.2 y 141.5 y en el caso numérico 157.28 y 130.28. Con esta serie de valores se consigue una diferencia en el punto central de 7.98%.

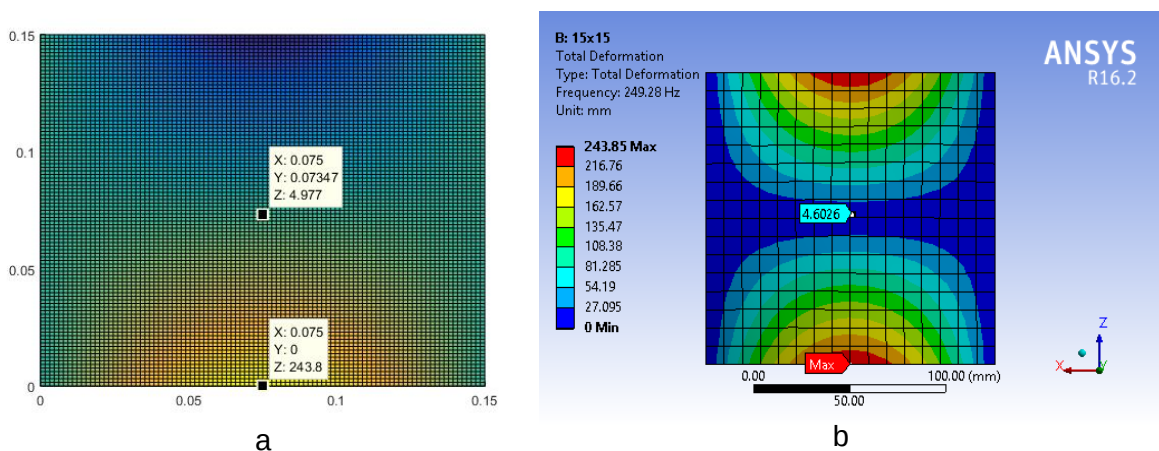


Figura 6.8. Comparativa del segundo modo en placa 150x150x2,5.

Siguiendo con el segundo modo (figura 6.8) aparecen los siguiente valores en los puntos remarcados: 243.8 y 4.977, mientras que en el caso numérico 243.85 y 4.6026. Para este valor se tiene una diferencia en la zona central de 7.52%.

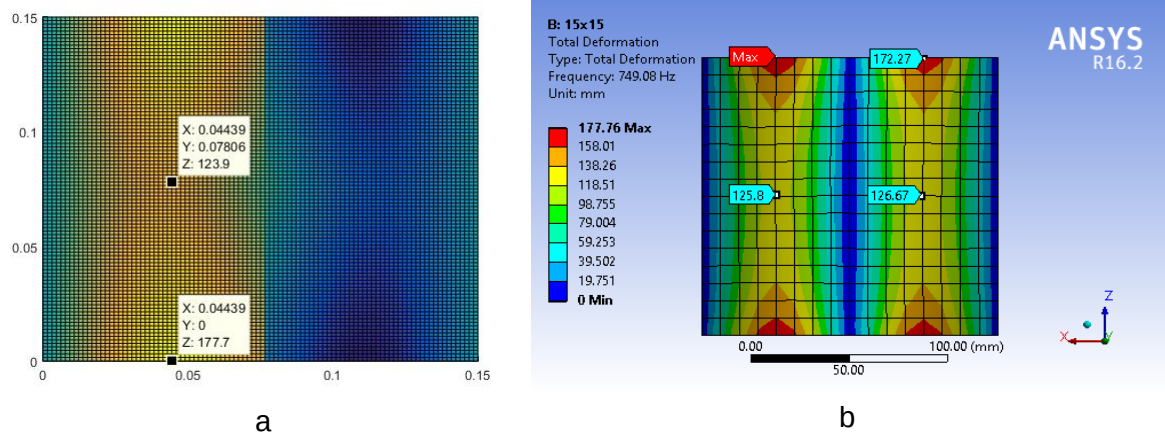


Figura 6.9. Comparativa del cuarto modo en placa 150x150x2,5.

Por último, en el tercer modo, cuya figura es la 6.9, se tiene en los puntos remarcados se tiene 177.7 y 123.9 y en el caso numérico 177.76 y 125.8. Con estos valores se obtiene una diferencia de 1.51%.

Como se ha podido observar en esta primera parte, se ha conseguido obtener en la mayoría de los casos unos valores bajos de diferencia entre los distintos casos analítico y numérico, siendo los casos más alejados los modos que aparecen en segunda posición; donde en ellos, el movimiento principal será el producido en las zonas laterales y no las centrales.

También, se ha logrado obtener una resolución para la comparativa de la formulación del caso viga frente al caso placa; dando como resultados lo que se predecía. Para placas de pequeña longitud transversal podemos considerar una formulación viga como primera aproximación; ya que las deflexiones interiores son menos importantes que en el caso en el que se vaya agrandando esta longitud transversal, donde la importancia del interior será mayor.

Una vez finalizada esta parte, se va a proceder a comparar los resultados experimentales junto a los numéricos donde cierta rigidez ha sido aplicada. Como ya fue comentado en el cuarto y quinto apartado, al realizar los ensayos experimentales apareció la necesidad de generar de forma numérica unas rigideces para que así, se pudiese poder comparar el estudio experimental. En este estudio experimental no se pudo controlar el apriete de los tornillos ya que no se disponía de las herramientas adecuadas para ello, lo que provoco hacer numerosos ajustes, tanto a la parte experimental como a la numérica. Primero serán estudiadas las frecuencias obtenidas con DIC 3D y en ANSYS®:

		Modo 1	Modo 2	Modo 3
DIC 3D	150x37,5x2,5	198.30±4.24	718.20±10.97	
	150x75x2,5	209.10±14.11	305.80±14.73	784.60±35.73
	150x150x2,5	236.00±1.41	307.00±1.41	355.00±6.36
ANSYS ®	150x37,5x2,5	198.68	635.89	682.02
	150x75x2,5	209.05	372.75	698.40
	150x150x2,5	236.01	295.25	600.14

Tabla 6.2. Comparativa entre las frecuencias obtenidas en calculo teórico y calculo numérico con condiciones ideales.

Para este caso, las frecuencias van a tener un mayor rango de error debido a que la rigidez ha sido impuesta en función del propio apriete aplicado, pudiendo actuar otros factores como el rozamiento entre placa y soporte, las propiedades del material impuestas en el programa, el comportamiento del material frente a distintas condiciones de contorno u otros no conocidos.

Se observa como ajustando la primera frecuencia se obtienen valores para el segundo y tercer modo que difieren en algunos casos. En el caso de la primera placa, la de tamaño 150x37,5x2,5 se tiene únicamente un modo para comparar, en el cual se puede observar como aparece un valor de frecuencia elevado comparado con la primera frecuencia. Para la siguiente placa ocurre algo similar, que en este caso, tanto en el segundo modo como en el tercer modo aparecen valores similares, lo que indica que la aproximación propuesta puede ser correcta. Por último, la placa

de tamaño 150x150x2.5. En esta placa se observa como el segundo modo es similar al obtenido a través de ANSYS® pero en el tercer modo no guarda relación alguna. Esto puede ser debido a una aparición de ruido entorno a la frecuencia de 355 Hz que hizo que pareciese como una frecuencia natural.

Se comienza ahora a comparar la forma de los modos obtenidos:

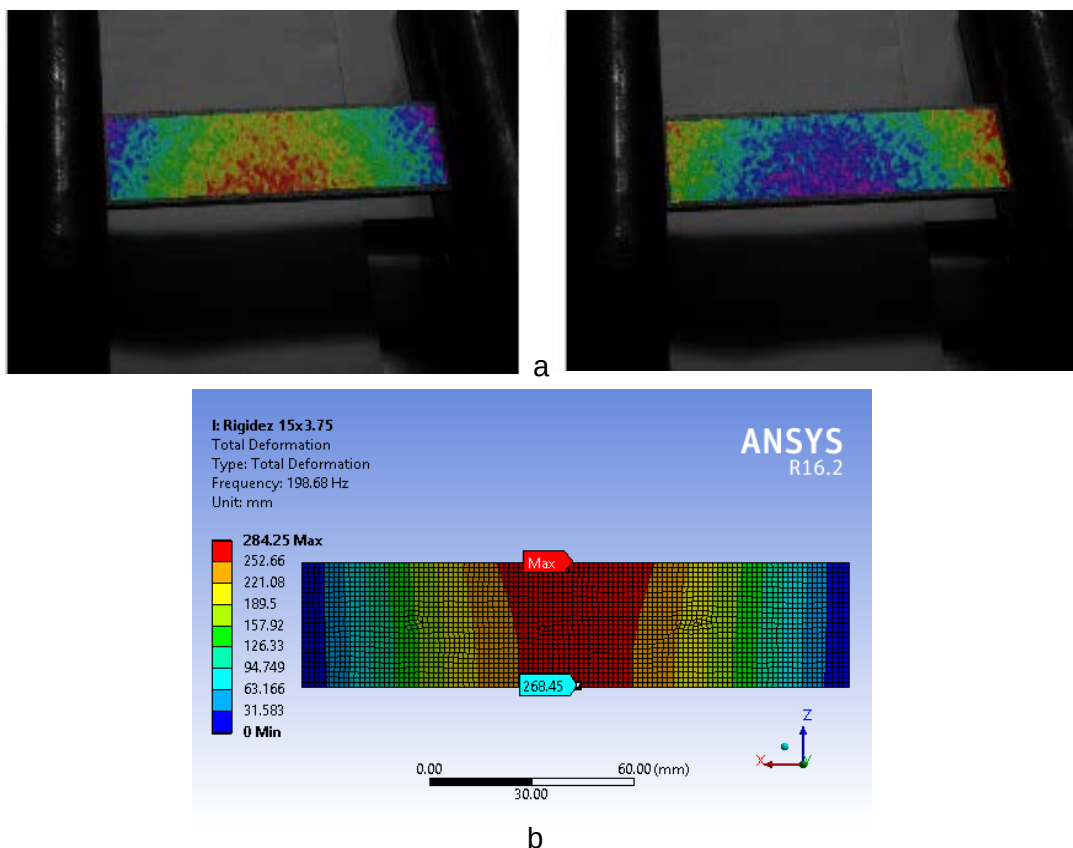


Figura 6.10. Comparativa del primer modo en placa 150x37,5x2,5.

En la figura 6.10 se observa el primer modo para la placa 150x37,5x2,5. En el caso de ANSYS® (6.10b) el valor máximo y mínimo de cada ciclo es el mismo. Se puede observar como aparece la misma tendencia, teniendo zonas asimétricas con forma de cono de desplazamiento que están provocadas por la rigidez. Para comparar los desplazamientos obtenidos, debemos de pasar los valores de

ANSYS® a otra escala, en nuestro caso será en una escala del 0 al 1, como la obtenida en los ensayos experimentales. Como ya se comentó en la anterior parte, debido a la limitación de ANSYS® no se puede cambiar la escala para ensayos modales, por lo que será realizado a mano. El valor máximo obtenido de forma numérica es 284.25, dándose en el lugar marcado y el valor en el otro extremo será de 268.45. Pasándolos a escala 0-1 queda en valores de 1 y 0.94 respectivamente. Para el ensayo DIC 3D, fijándonos en las figuras 6.10a junto con 4.21 para ver la escala, en estas posiciones se obtiene cuando la forma del modo es ascendente 1 y 0.910625 respectivamente, y cuando la forma es descendente en valores absolutos 1 y 0.91625.

Estos valores permiten decir que los resultados obtenidos en cuestión de forma son bastante fiables para el primer modo.

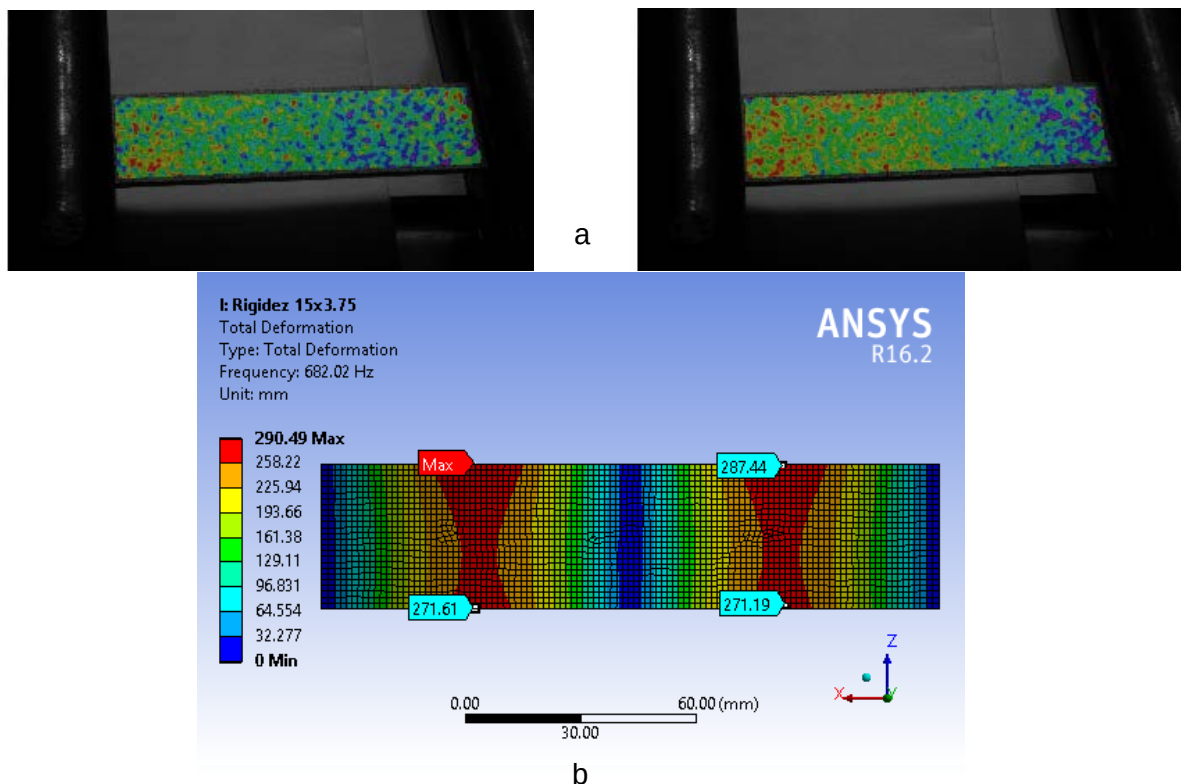


Figura 6.11. Comparativa del tercer modo en placa 150x37,5x2,5.

Para el segundo modo (figura 6.11) aparece la dificultad de la propia frecuencia. Como ya se comentó en el capítulo cuarto, a partir de 700 Hz los valores Al no obtenerse formas parecidas debido a la limitación de las herramientas utilizadas, no se realizará comparación.

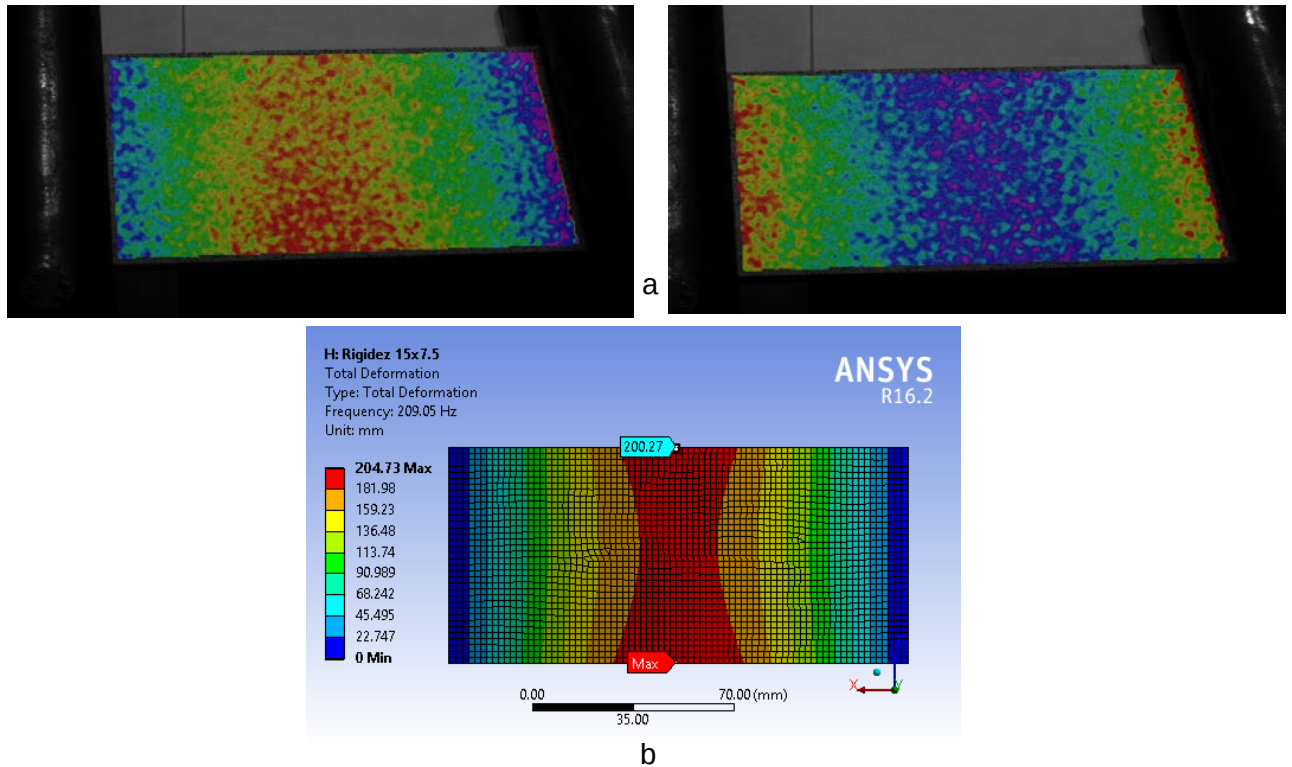


Figura 6.12. Comparativa del primer modo en placa 150x75x2,5.

Pasando ahora a la placa de 150x75x2.5, en la figura 6.12 aparece el primer modo con una forma que se asemeja mejor a las condiciones de contorno aplicadas. Obteniendo los valores en escala 0-1 se obtiene para la solución numérica: 1 y 0.978 y para la solución experimental: 1 y 0.9318 para el caso ascendente y 1 y 0.9375 para el descendente. Se sigue viendo como al aplicar los valores de rigidez debemos de ser más exactos ya que se han provocado en este caso unos mayores desplazamientos.

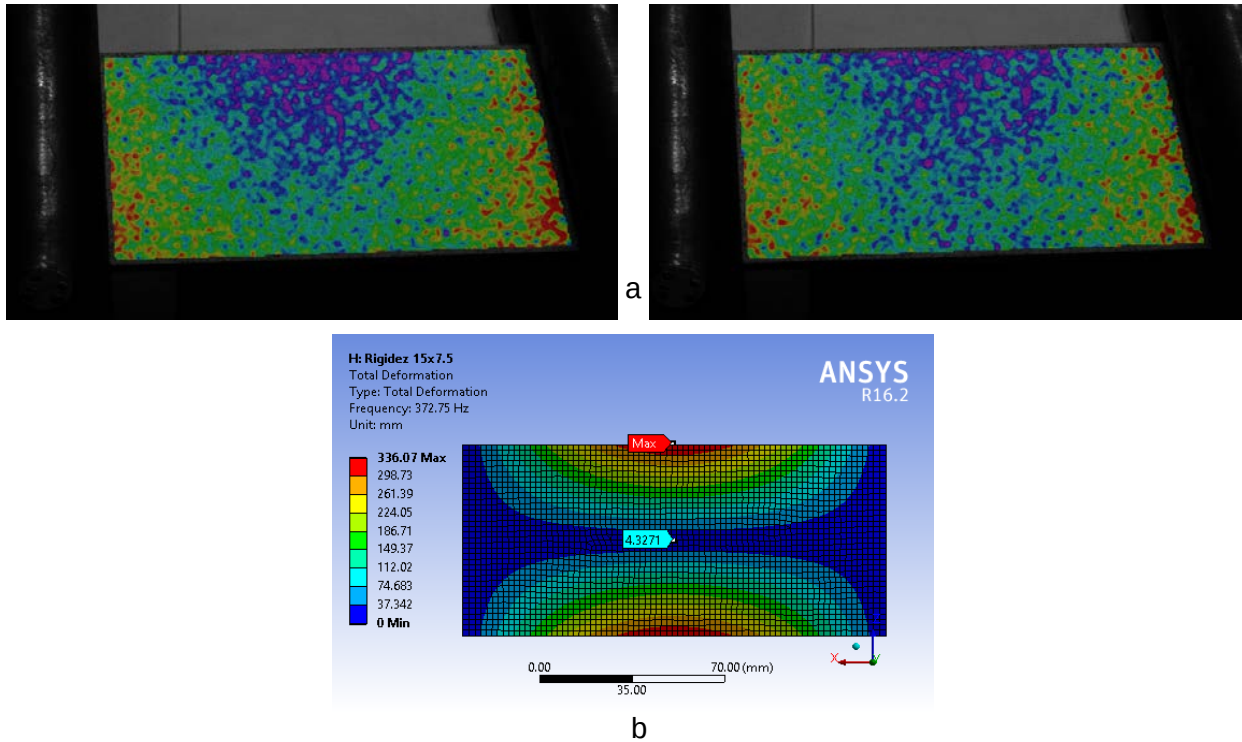


Figura 6.13. Comparativa del segundo modo en placa 150x75x2,5.

En el segundo modo, mostrado en la figura 6.13, se puede observar como una de las zonas es predominante sobre la otra para el caso experimental. Debido a esto, vamos a controlar los valores en el punto central de la placa. Para el análisis numérico tenemos: 1 y 0.0128 y para la placa en el análisis experimental, comenzando por el caso ascendente; 1 y 0.0625, y para el descendente, 1 y 0.0575.

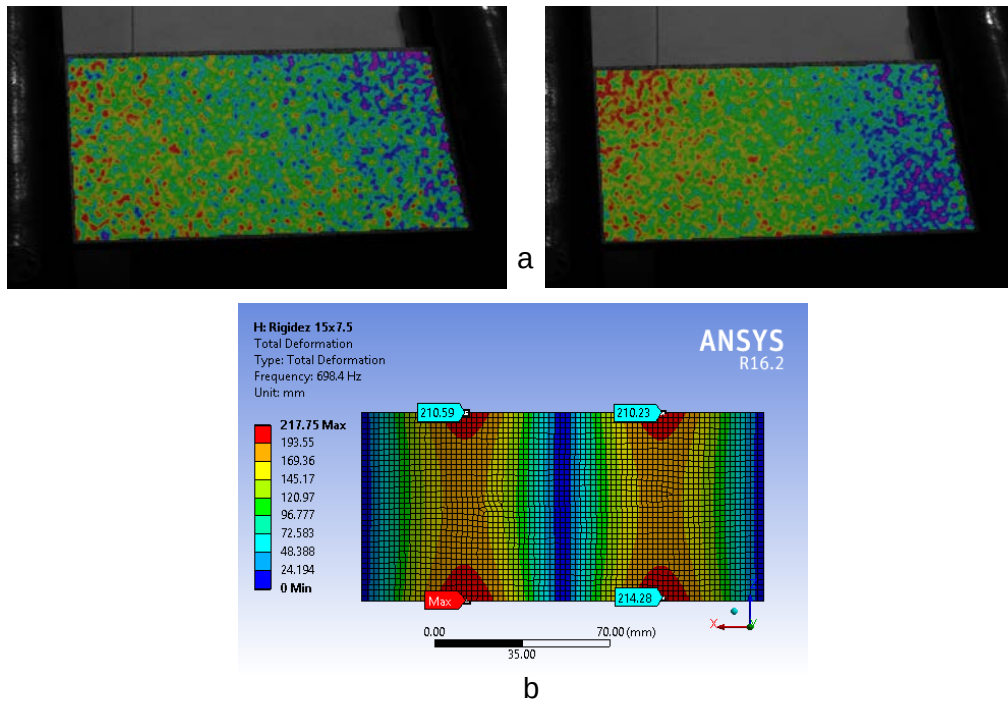


Figura 6.14. Comparativa del tercer modo en placa 150x75x2,5.

Por último, se tiene el tercer modo (figura 6.14), el cual, como ya se comentó en el caso anterior, debido a las frecuencias de trabajo no se consigue capturar bien los desplazamientos. Tomando los valores del ensayo numérico tenemos: 1, 0.984, 0.967 y 0.965. Para los ensayos experimentales, aparecen valores de: 1, 0.9375, 0.93745 y 0.875 para el ascendente, y 1, 0.9525, 0.9375 y 0.9325 para el descendente.

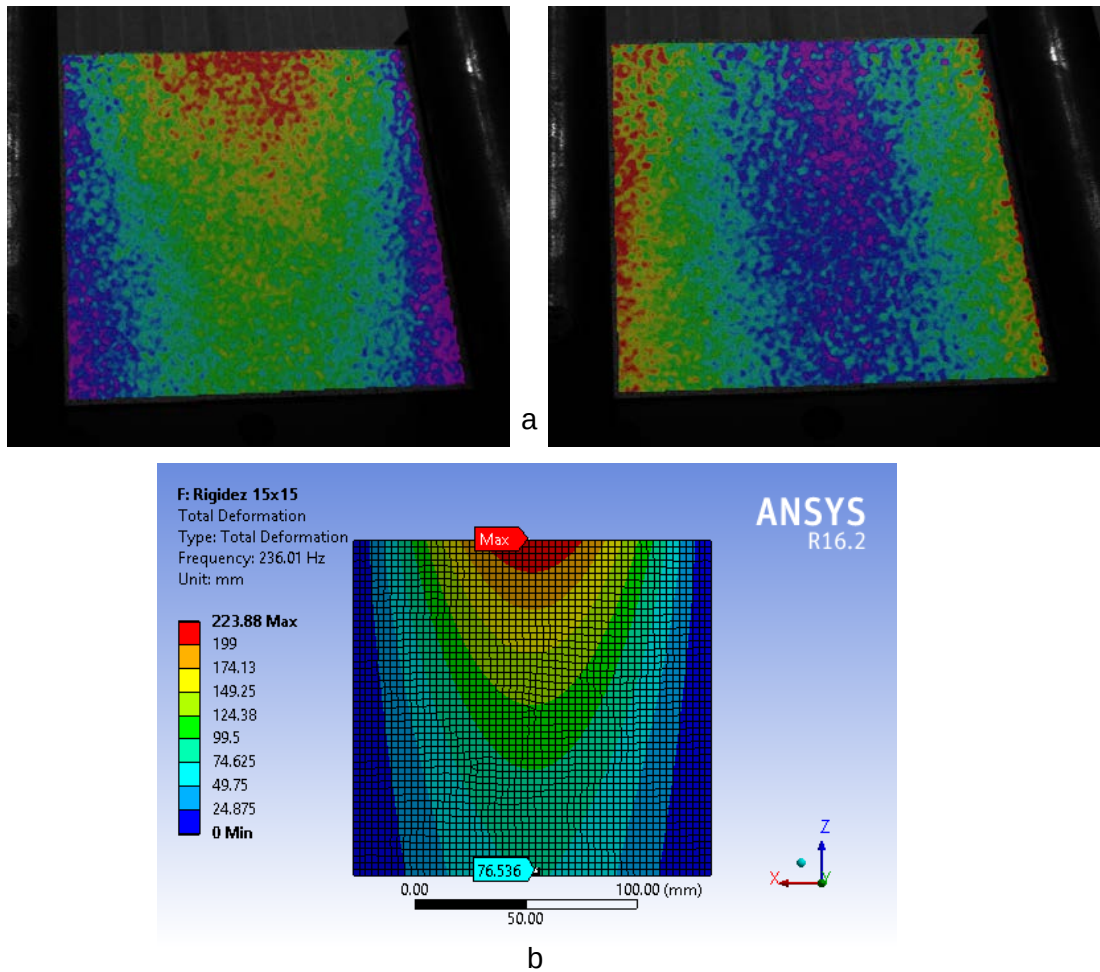


Figura 6.15. Comparativa del primer modo en placa 150x150x2,5.

Se terminará con la comparación de los resultados experimentales con los numéricos en la placa de tamaño 150x150x2.5. Como se observa, los resultados obtenidos para el primer modo (figura 6.15) son los más semejantes con los simulados en ANSYS®. Así pues pasamos a escalar los resultados, para el caso numérico tenemos: 1 y 0.34186, y para los casos experimentales tenemos 1 y 0.4375 para el ascendente; 1 y 0.7325 para el descendente. Observamos como la placa en el ensayo experimental se desplaza en mayor medida al descender que al subir. Esto puede ser debido al propio peso de la placa, que ayuda a este movimiento.

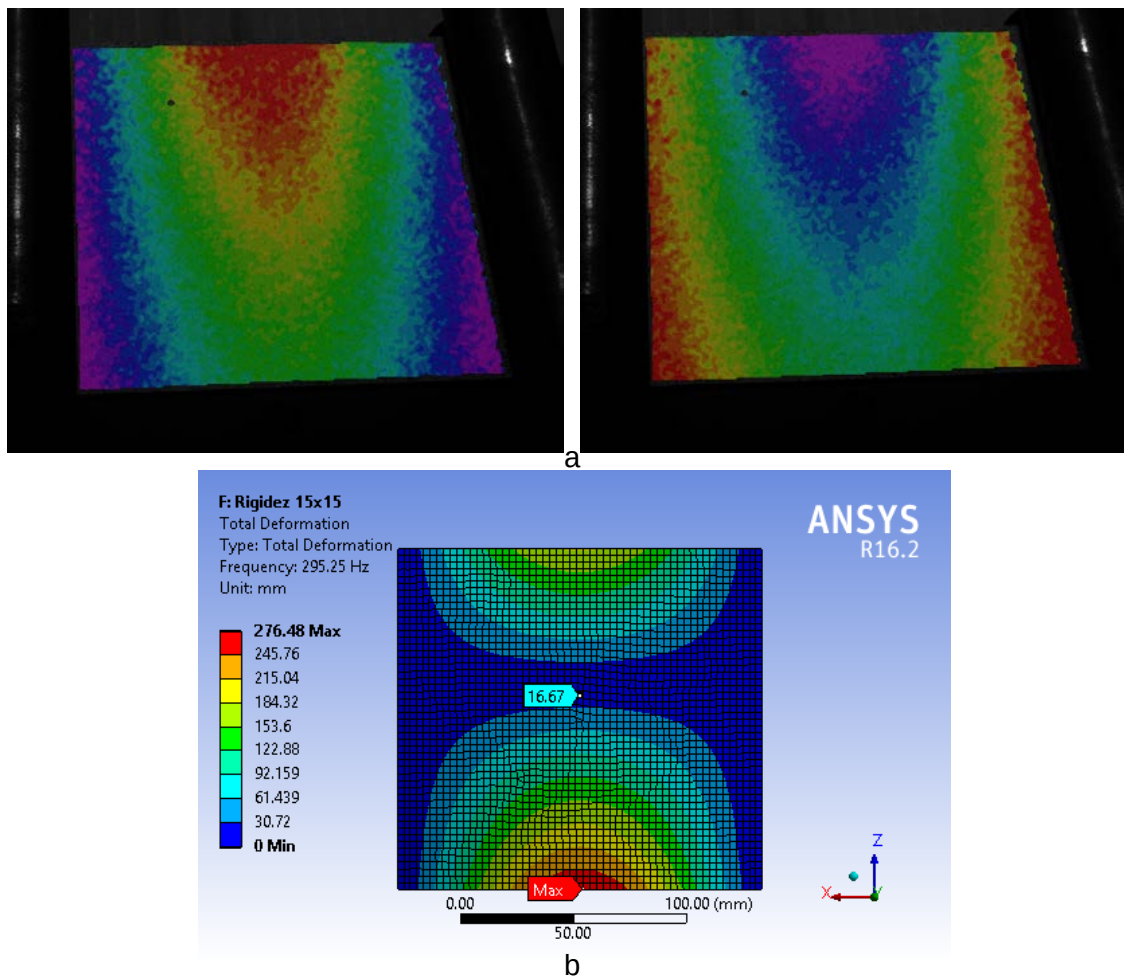


Figura 6.16. Comparativa del segundo modo en placa 150x150x2,5.

En la figura 6.16 aparece el segundo modo de la placa de 150x150x2,5 la cual al escalar resultados se obtiene para el caso numérico tenemos: 1 y 0.06029, y para los casos experimentales tenemos 1 y 0.3859 para el ascendente; 1 y 0.4013 para el descendente. Observando la placa en el ensayo experimental no aparece la simetría que si aparece en el estudio numérico, esto se debe al apriete aplicado, siendo en el caso experimental más alto en la zona donde no aparece movimiento. En el caso numérico no se ha querido dar más apriete debido a que las frecuencias variarían en un alto grado.

7. Conclusiones y trabajo futuro

Durante el desarrollo de todo lo realizado en este trabajo, se puede concluir que se ha conseguido cumplir los objetivos establecidos en el inicio del mismo:

Se ha realizado un estudio analítico, experimental y numérico que nos ha permitido observar el comportamiento de una viga de material compuesto bidireccional biapoyada, la cual, su geometría ha sido modificada para actuar como placa incrementando la longitud en la dirección y , obteniendo distintos estudios para los distintos tipos de placas usados.

En estos estudios se han estudiado las primeras frecuencias naturales de las distintas placas, mediante el desarrollo de códigos para el estudio analítico, configuración de Software para el numérico y el uso de instrumental para el trabajo experimental.

Una vez obtenidas las frecuencias naturales que iban a ser objeto de estudio se pasó a buscar las formas modos que correspondían a estas frecuencias. En la parte experimental se establece como metodología efectiva el uso de la técnica de campo completo DIC 3D que nos permitió obtener con exactitud las deformadas de estos modos, consiguiendo grandes resultados; incluso a frecuencias altas como 700 Hz donde por limitaciones del material, aparecían problemas. Todo esto ayudado de otras técnicas como el efecto estroboscópico, que mediante equipamiento que únicamente permite grabar de forma estática se ha conseguido captar el efecto dinámico de movimiento de las placas, ahorrando costes y material.

En base a los resultados mostrados en el presente trabajo, se abre un gran abanico de trabajo futuro en el cual podríamos aplicar todas las técnicas empleadas; a la vez que los cálculos realizados en la parte analítica y numérica a elementos de una complejidad mayor como por ejemplo partes móviles o partes sometidas a grandes esfuerzos por vibración.

Como ya se habló en el apartado de motivación, el uso de los materiales compuestos está muy presente en la industria de hoy en día. Desde el uso en

material deportivo como palos de golf, hasta su uso más especializado en la aviación militar por ejemplo. Con estos ejemplos podemos ver que las grandes empresas buscan, con el uso de estos materiales altas propiedades mecánicas y bajo peso.

El análisis vibracional ha sido usado durante un largo periodo en materiales de uso más común, como por ejemplo el aluminio o el acero; pero no fue hasta hace poco tiempo cuando se empezó a estudiar materiales más complejos, como por ejemplo los materiales compuestos. Estos al tener distintas propiedades según la dirección de trabajo, su estudio vibracional será más complejo que el de los materiales isótropos.

Haciendo uso de la proximidad de una de las industrias automovilísticas, se propone un ejemplo simple pero directo de las aplicaciones de estos materiales en la industria. Durante este último curso académico, he realizado unas prácticas de empresa en la Fundación ANDALTEC I+D+i en donde se realizan numerosos trabajos relacionados con lo anteriormente comentado. Entre estos trabajos, una de mis asignaciones fue la de realizar un estudio de un componente mecánico fabricado principalmente por material compuesto que pudiese ser incluido en este trabajo para así indagar más en la importancia de estos tipos de materiales en la industria.

El componente asignado fue una cápsula puente. Esta pieza, como se muestra en la figura 7.1 tomada de la página web oficial de VW [10], forma parte de los reflectores de los faros y permite mover el reflector en zonas de difícil acceso. Debido a la tarea de este componente, se necesita que sea rígido para soportar las cargas a las que se verá sometido y ligero para que así permita reducir el peso total del vehículo. Es por esta razón por la que se fabrica en material compuesto.

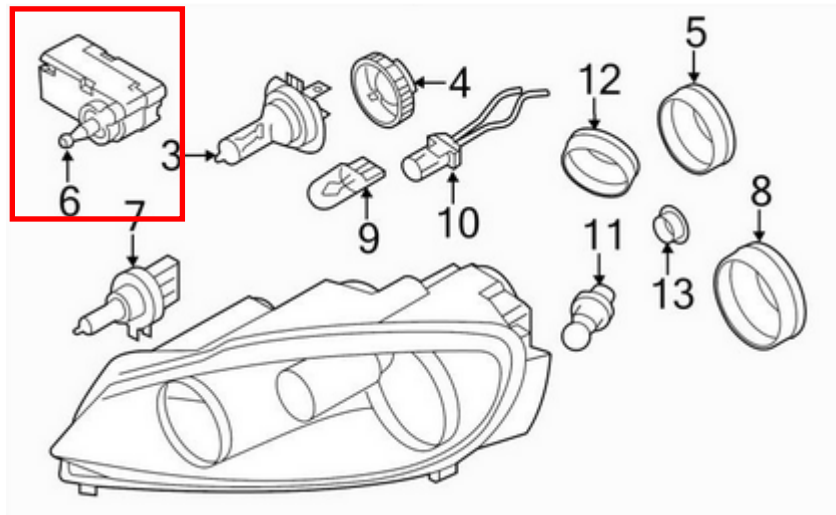


Figura 7.1. Reflector VW Golf R 2016 [10].

Durante estas prácticas se han realizado estudios modales en los que se han probado distintas configuraciones, para que más tarde, pudiese ser testado en el laboratorio, siendo la óptima la mostrada en la figura 7.2.

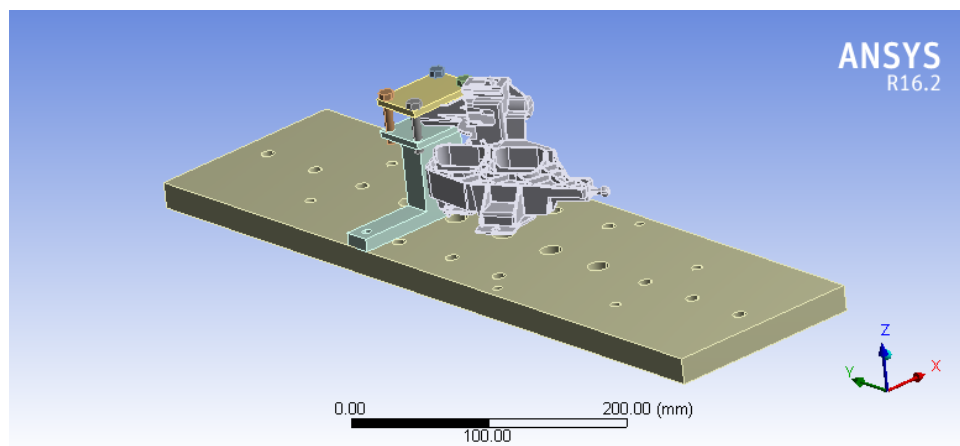


Figura 7. 2. Disposición elegida para estudio numérico de cápsula puente.

Con este estudio numérico se obtuvieron frecuencias que permitían obtener un estudio experimental posterior correcto y que a su vez eran frecuencias a las que normalmente este componente iba a trabajar durante su vida útil. Estas se pueden observar en la tabla 7.1:

Modo	Frecuencia (Hz)
1	44.214
2	59.239
3	163.85
4	402.06
5	531.08
6	742.86

Tabla 7. 1. Valores de frecuencia natural para los seis primeros modos de la cápsula puente en la disposición mostrada en la figura 7.2.

Debido a las limitaciones del Trabajo de Fin de Grado, este estudio no ha podido ser completado e incluido en su totalidad por lo que puede ser usado como base de un futuro trabajo haciendo uso de las distintas técnicas empleadas en este trabajo e intentado realizar un estudio analítico que lo corrobore.

Otro posible camino que se abre con este estudio, debido al uso de placas en lugar de vigas, es la imposición de distintas condiciones de contorno; tal y como se hizo en la segunda parte del estudio numérico. Como el elemento placa permite aplicar distintas condiciones de contorno a sus distintos lados (cuatro C.C frente a las dos que nos ofrecía la viga), se pueden obtener combinaciones varias entre estos elementos; he incluso añadir material a las propias placas y hacerlas más complejas. Por ejemplo, podemos realizar perforaciones a las placas o añadir material a la propia placa para comprobar el comportamiento de esta frente a distintos tipos de defectos. También se pueden crear extensiones en uno de los lados de la placa; por ejemplo si se tiene un extremo con condición de contorno libre, se podría añadir algún tipo de saliente para comprobar un efecto doble de movimiento según donde se colocase el observador; si este se sitúa en la unión de la placa con el saliente, observando a este último tendría ante sí un caso de placa empotrada por uno de sus lados y libre en el resto, mientras que si se situase en el exterior aparecería como una combinación entre el propio movimiento de la placa y el movimiento del saliente.

Por último, como posible trabajo futuro se podría trabajar con los desplazamientos generados en ANSYS®. Los obtenidos son simples escalados pero se pueden obtener los reales mediante la combinación de algunos de los resultados de los ensayos experimentales y el uso de los distintos módulos que ofrece ANSYS®. Conociendo la aceleración que nos genera el *Shaker* y sabiendo cómo realizar el estudio en el propio programa FEM podemos conseguir resultados fidedignos y así obtener comparativas más reales.

Bibliografía

- [1] S. W. Tsai, *Diseño y análisis de materiales compuestos* - 1st edition Editorial Reverte, 1988
- [2] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations* - 5th edition
- [3] R. Jones, *Mechanics Of Composite Materials* - 2nd edition
- [4] F. Smith, *Fundamentos de la Ciencia e Ingeniería de Materiales* - 4th edition. McGraw-Hill Interamericana, 2006
- [5] J. A. Almazán Lázaro, *Estudio del comportamiento mecánico de materiales compuestos. Fabricación mediante técnicas de vacío e infusión. Ensayos experimentales y validación numérica*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera de la Universidad de Jaén, 2014.
- [6] B. M. Lempriere, *Poisson's ratio in orthotropic materials*. AIAA Journal, Vol. 6, No. 11 (1968)
- [7] Commtest Instruments Ltd. *Beginner's Guide to Machine Vibration*.
- [8] M. J. Martínez Gracia, *Análisis Experimental y Numérico de vibraciones*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera de la Universidad de Jaén, 2015.
- [9] P. M. García, *Simulación y ensayos de vibraciones en placas de material compuesto de fibra de carbono y detección de daño mediante la Respuesta en Frecuencia y la Transformada Wavelet*. Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Granada, 2012.
- [10] http://parts.vw.com/a/Volkswagen_Golf-RBase/56655_5974960/HEADLAMPS/9274015.html, visitada 02/07/2016

- [11] C. Warren, C. Niezrecki, P. Avitabile, P. Pingle, *Comparison of FRF measurements and mode shapes determined using optically image based, laser, and accelerometer measurements*. Department of Mechanical Engineering, University of Massachusetts Lowell, 2011.
- [12] M.N. Helfrick, C. Niezrecki, P. Avitabile, T. Schmidt, *3D digital image correlation methods for full-field vibration measurement*. Department of Mechanical Engineering, University of Massachusetts Lowell, 2010.
- [13] J. Baqersad, J. Carr, T. Lundstrom, C. Niezrecki, P. Avitabile, M. Slattery, *Dynamic Characteristics of a Wind Turbine Blade using 3D Digital Image Correlation*. Department of Mechanical Engineering, University of Massachusetts Lowell, 2012.
- [14] N. S. Ha, *Modal analysis of an artificial wing mimicking an Allomyrina dichotoma beetle's hind wing for flapping-wing micro air vehicles by noncontact measurement techniques*. Department of Advanced Technology Fusion, Seoul University (2013).
- [15] C. A. Cuesta, *Curso de teoría y aplicación práctica del método de los elementos finitos y simulación*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2003
- [16] CYPLY® 1002 Reinforced Plastic Data Sheet. Cytec Engineered Materials, 2002.
- [17] R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold Company, Nueva York, 1979.
- [18] D. H. Felix, D. V. Bambill, C. A. Rossit, P. A.A. Laura, *Modos de vibraciones libres de placas ortótropas rectangulares con huecos y bordes empotrados, simplemente apoyados o libres*. Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Argentina, 2004.

- [19] P.M. Ciancio, C.A. Rossit, *Vibraciones libres de placas rectangulares de material anisótropo y bordes apoyados, empotrados o libres*. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro, Argentina, 2005.
- [20] S.M. Dickinson, *The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Rayleigh's Method*. Faculty of Engineering Science, University of Western Ontario, Canada, 1978.
- [21] A. W. Leissa, *Vibration of Plates*, Ohio State University, Ohio, EEUU, 1969.
- [22] A. W. Leissa, *The free Vibration of Rectangular Plates*, Federal Institute of Technology, Zürich, Suiza, 1973.
- [23] K. Vijayakumar, *Natural frequencies of rectangular orthotropic plates with a pair of parallel edges simply supported*, Department of Aeronautical Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, 1973.
- [24] A. C. Ugural. *Stresses in plates and shells*. McGraw-Hill, 1981.

