



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS EN 1º DE BACHILLERATO

Alumno/a: Gómez García, Javier

Tutor/a: Prof. D. Pedro Garrancho García
Dpto: Matemáticas

Junio, 2019

1. Introducción	4
2. Objetivos	5
3. Fundamentación curricular	6
3.1. Contextualización de los contenidos dentro del currículum	7
3.2. Evolución del libro de texto.....	8
4. Fundamentación epistemológica	10
4.1. Introducción	10
4.2. Algo de historia. Recta tangente a una curva.....	10
4.3. Derivada de una función en un punto	12
4.3.1. Definición	12
4.3.2. Derivabilidad y continuidad.....	13
4.4. Álgebra de derivadas	14
4.4.1. Derivada de la suma	14
4.4.2. Derivada del producto.....	14
4.4.3. Derivada del inverso.....	15
4.4.4. Derivada del cociente	15
4.4.5. Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena	15
4.4.6. Derivada de la función inversa	16
4.5. Derivadas de las funciones usuales	17
4.5.1. Función constante	17
4.5.2. Función identidad.....	17
4.5.3. Función potencia	17
4.5.4. Función logarítmica y exponencial	18
4.5.5. Función potencia de exponente real.....	18
4.5.6. Funciones trigonométricas.....	19
4.5.7. Funciones trigonométricas recíprocas	19
4.6. Aplicaciones de las derivadas	19
4.6.1. Cinemática.....	19
4.6.2. Tasa instantánea de variación de una muestra	20
4.6.3. Termodinámica	20
5. Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y la enseñanza	21
5.1. El papel del alumnado.....	21
5.2. El papel del profesorado	22
6. Proyección didáctica: Derivadas	24

6.1.	Justificación	24
6.2.	Contextualización del centro y el aula	25
6.3.	Objetivos	25
6.3.1.	Objetivos generales de etapa.....	26
6.3.2.	Objetivos del área	26
6.3.3.	Objetivos de la unidad.....	27
6.4.	Competencias clave	28
6.5.	Contenidos.....	29
6.6.	Metodología	29
6.7.	Actividades, recursos y temporalización.....	31
6.7.1.	Sesión 1: Introducción a la derivada. Significado matemático.....	32
6.7.2.	Sesión 2: Cálculo de derivadas.	33
6.7.3.	Sesión 3: Regla de la cadena y ejercicios.....	34
6.7.4.	Sesión 4: Definición de derivada.	35
6.7.5.	Sesión 5: Puntos singulares y recta tangente.....	36
6.7.6.	Sesión 6: Guerra de funciones. Actividad grupal.....	38
6.7.7.	Sesión 7: Pre-examen.	40
6.7.8.	Sesión 8: Corrección del pre-examen y dudas.	41
6.7.9.	Sesión 9: Examen.....	42
6.8.	Atención a la diversidad	42
6.8.1.	Alumnado con necesidad de refuerzo.....	42
6.8.2.	Alumnado con altas capacidades.	43
6.8.3.	Alumnado con dificultades en la interacción social.	44
6.9.	Evaluación	45
6.9.1.	Contenidos de la evaluación	45
6.9.2.	Procedimiento de evaluación.....	47
7.	Conclusiones.....	49
8.	Referencias bibliográficas	50
9.	Anexos.....	52
9.1.	Anexo 1.....	52
9.2.	Anexo 2.....	55

1. Introducción

El presente trabajo culmina el Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza de Idiomas. Con él se pretende llevar a la práctica lo aprendido mediante la búsqueda de recursos para la docencia y el posterior diseño de una unidad didáctica.

Los contenidos en torno a los que se conforma el trabajo son la derivación. Contextualizaremos estos contenidos en la asignatura de Matemáticas I de 1º de bachillerato. Es en este curso donde el alumnado tiene su primer contacto con las derivadas. Esto es una dificultad añadida y, a su vez, una motivación extra para intentar presentar los contenidos de la manera más interesante posible. Una de las razones por las que se ha elegido este curso es debido a que el desarrollo de las prácticas docentes ha tenido lugar, en gran parte, en un primero de bachillerato. Esto ha sido un aliciente más para la elección de curso.

La primera parte del presente trabajo está dedicada al estudio curricular, epistemológico y didáctico de la derivación:

- En el estudio del currículum se comenzará haciendo una comparativa de la estructuración de las derivadas en el currículum entre los documentos oficiales, BOJA (nº 145, Orden de 14 de julio de 2016), y el libro de texto, ANAYA (2016). A continuación, se hará un análisis de la evolución del libro de texto comparando dos ejemplares pertenecientes a dos leyes educativas distintas: el libro de texto de la editorial Santillana (1976), del sistema educativo de la LGE, y del libro de texto de la editorial Anaya (2013), de la LOE.
- En la fundamentación epistemológica se desarrollarán los contenidos curriculares con cierta profundidad y rigor matemático. Tras una breve introducción histórica se hará un repaso de los contenidos de las derivadas tomando como guion el tema 26 de las oposiciones para profesor de matemáticas, que consta de los siguientes contenidos: derivada de una función en un punto, función derivada, derivadas sucesivas y aplicaciones.
- La fundamentación didáctica se estará dirigida a los dos pilares del proceso enseñanza-aprendizaje: el alumnado y el profesorado. Para ello, se han revisado varias investigaciones que serán de utilidad para elegir una metodología adecuada en el aprendizaje de las derivadas y en su evaluación por la parte docente.

La segunda parte del trabajo consistirá en el diseño de una unidad didáctica teniendo en cuenta todos los recursos que se han visto en la primera parte. Para esta parte se tendrán en cuenta todos los aspectos necesarios para que la unidad sea realista y aplicable. Se tendrá en cuenta dentro de un contexto de centro y aula específicos, que

es este caso es muy similar al cursado en el periodo de prácticas. También, con el fin de poder darle uso en un futuro, algunas de las actividades más elaboradas constan con un plan de clase definido. Sin olvidar las adaptaciones curriculares pertinentes para cubrir los aspectos referentes a la atención a la diversidad.

En definitiva, este trabajo pretende ser el resultado de la aplicación de los conocimientos adquiridos en el master y el período de prácticas. A partir de estos conocimientos, se diseñará una unidad didáctica realista que estará respaldada por un estudio curricular, epistemológico y didáctico, expuesto en este mismo trabajo.

2. Objetivos

Los objetivos de este Trabajo de Fin de Master pueden ser divididos en dos bloques: adquisición de competencias y aplicación práctica en la docencia.

Las competencias necesarias para poder desarrollar la actividad docente se encuentran recogidas en el Apartado 3 del ANEXO de la Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. De estas competencias, se plantea como objetivo la adquisición de las siguientes:

1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa del alumnado, así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros/as docentes y profesionales del centro.
3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.
4. Desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad del alumnado.
5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos

humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.

6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del alumnado y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.
7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.
8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.

A su vez, se pretende que este trabajo tenga una utilidad práctica como parte de una futura programación didáctica para el concurso de oposición y, llegado el momento, como material para usarlo en la propia actividad docente.

3. Fundamentación curricular

El libro de texto es usado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de una materia concreta por el profesorado y alumnado conjuntamente en el desarrollo del curso (Gonzalez, 2002). Tal es su importancia, que ya desde hace años se ha resaltado la influencia del libro de texto en la enseñanza y la práctica educativa de un país, incluso por encima de los decretos y las órdenes ministeriales que definen el currículum (Schubring, 1987).

En la primera parte de este apartado se pretende contextualizar dentro del currículum los contenidos dedicados a la enseñanza de las derivadas en la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato. Este análisis se hará desde la perspectiva del currículum desarrollado por el BOJA (nº 145, Orden de 14 de julio de 2016) y el desarrollado por el libro de texto de la editorial ANAYA (2016) para la misma materia.

A su vez, se pretende ver la evolución en la manera de impartir los contenidos desde hace varias décadas, con un sistema educativo regido por la LGE, al año 2013, último año en vigor de la LOE. Para ello, usaremos un libro de texto de la editorial Educación

Santillana de 1976 y otro de la editorial Anaya de 2013. Ambos del mismo curso, 3º del bachillerato unificado polivalente, que es equivalente al actual 1º de bachillerato.

3.1. Contextualización de los contenidos dentro del currículum

Según la Orden del 14 de julio de 2016 del BOJA, el currículum de la asignatura de matemáticas de 1º de bachillerato sitúa a las derivadas en el Bloque III: análisis. Este bloque está precedido por el Bloque II: Números y álgebra; y seguido por el Bloque IV: Geometría. Sin embargo, los libros de texto no siempre siguen esta ordenación de contenidos. En este apartado se analizarán las diferencias en la ordenación del currículum de 1º de bachillerato entre el BOJA y el libro de texto de Anaya (2016) para la asignatura Matemáticas I. Se pondrá especial interés en el tema de las derivadas, que se sitúan al final del Bloque III según el BOJA.

En el libro de texto ya citado los contenidos se ordenan en 4 bloques: Bloque I: números y álgebra; Bloque II: Trigonometría y números complejos; Bloque III: Geometría; grupo IV: Análisis; Distribuciones bidimensionales. Como se puede observar, las derivadas son impartidas casi a final de curso.

Como punto en común, es importante señalar que tanto en el BOJA como en el libro de texto se sitúa el tema de límites justo antes del de derivación. Esto es debido a que el conocimiento del límite es fundamental para la comprensión de la derivada. Además, el hecho de que se imparte justo antes de este tema ayudará a que el alumnado tenga más recientes los contenidos referentes a los límites.

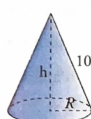
Una importante diferencia en la ordenación del currículum es la unificación de los temas de números complejos y trigonometría (de los Bloques I y IV del BOJA, respectivamente) en el Bloque II del libro de texto. Esto se traduce en que, según el libro de texto, cuando se impartan los contenidos de las derivadas, ya se habrá visto el bloque de geometría (al contrario que si se sigue el orden del BOJA) y se habrá profundizado en las funciones trigonométricas. Cabe destacar que en el Bloque III (análisis) del BOJA están incluidos los contenidos de las funciones trigonométricas, por tanto, el tema de las derivadas no estaría limitado por el desconocimiento de estas funciones. Sin embargo, se desarrolla más ampliamente en el Bloque IV (geometría), donde se hace hincapié en las relaciones trigonométricas y la resolución de ecuaciones trigonométricas. Por tanto, al seguir el orden del libro de texto, el alumnado tendrá un mayor dominio de los contenidos sobre trigonometría y se tendrá la opción de plantear ejercicios más completos en la parte que atañe a la derivada de funciones trigonométricas.

La segunda gran diferencia entre la ordenación del currículum hecha por el BOJA y por el libro de texto analizado es el posicionamiento, por parte del libro de texto, del Bloque IV del BOJA (geometría) antes del bloque de análisis. En primera instancia, no se

necesitan unas nociones de geometría muy avanzadas para estudiar las derivadas, basta con unos conceptos básicos que un/a alumno/a de 1º de bachillerato debe conocer. Sin embargo, si se quiere profundizar en la realización de problemas por parte del alumnado y tratarlos con una perspectiva transversal entre los demás contenidos de la asignatura, el conocimiento del bloque de geometría presenta una gran ventaja. Un claro ejemplo de esto son los problemas de optimización que se pueden realizar utilizando el área o volumen de figuras geométricas y sus respectivas ecuaciones, como se puede ver en la Figura 1:

8. Problema de optimización

De todos los conos cuya generatriz mide 10 cm, hallar la altura y el radio de aquel cuyo volumen es máximo.



Análisis del problema. El volumen del cono depende de dos variables, radio, R , y altura, h : $V = \frac{\pi}{3} R^2 h$.

Para resolver el problema, debemos expresar V con una sola variable, teniendo en cuenta que conocemos la generatriz.

Observamos que R y h son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la generatriz, 10 cm. Por tanto:

$$R^2 + h^2 = 10^2 \rightarrow R^2 = 100 - h^2$$

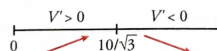
Sustituimos R^2 en la fórmula que nos da V :

$$V = \frac{\pi}{3} (100 - h^2)h \rightarrow V = \frac{\pi}{3} (100h - h^3)$$

Hallamos los puntos singulares de V :

$$V' = 0 \rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3h^2) = 0 \begin{cases} h = \frac{10}{\sqrt{3}} \\ h = -\frac{10}{\sqrt{3}} \text{ Imposible} \end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento de V a la derecha y a la izquierda de $h = \frac{10}{\sqrt{3}}$:



Por tanto, para $h = \frac{10}{\sqrt{3}}$ el volumen es máximo. Calculamos R :

$$R^2 = 100 - \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 \rightarrow R = 10\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ cm}$$

Hazlo tú. De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.

Figura 1 – Fuente: Libro de texto para 1º Bachillerato. Editorial ANAYA (2016). p. 321.

Recapitulando, podemos concluir que la ordenación del currículum hecha por el BOJA no afecta a los contenidos que se deben impartir en la unidad de las derivadas. No obstante, si limita la profundidad en el desarrollo de los contenidos cuando se trata de realizar problemas en los que estén involucradas las funciones trigonométricas y la geometría.

3.2. Evolución del libro de texto

Generalmente, las matemáticas no despiertan un interés intrínseco hacia el alumnado debido al carácter abstracto de sus contenidos, por ello es necesario un mayor acercamiento de esta materia al alumnado mediante la vinculación del currículum a

elementos de la vida cotidiana del estudiante. De esta manera, contribuiremos a aumentar el interés y disminuir el rechazo a las matemáticas (Ruiz, 2008).

En este sentido, se ha producido una mejora en cuanto a la forma en la que se adapta el currículum a un entorno más familiar para el alumnado. Así lo podemos ver en la comparativa de los dos libros de texto mencionados anteriormente. En el libro de texto de Educación Santillana de 1976 se comienza el tema de derivación con una pequeña introducción de lo que se impartirá durante el tema seguido del primer bloque de contenidos: El problema de la tangente a una curva en uno de sus puntos. Este libro de texto aborda la derivada desde un problema puramente matemático: la determinación de una recta tangente a una curva en uno de sus puntos. En ningún momento se adapta el problema matemático a elementos de la vida cotidiana de los estudiantes, esta tarea quedaría limitada a la voluntad de la persona docente. Sin embargo, en el libro de texto de Anaya (2013), el tema de derivación comienza con una pequeña introducción histórica (donde se nombra el problema de la recta tangente nombrado anteriormente) y un repaso de los matemáticos que más contribuyeron al desarrollo de la derivada. Después de esta breve introducción, se muestra una página con varios ejercicios contextualizados dentro de situaciones familiares para la clase, como tomar un autobús en marcha o una carrera de relevos, con sus representaciones gráficas correspondientes. En estos ejercicios se pretende que el alumnado reflexione sobre estas gráficas y pueda detectar, desde un inicio, la utilidad de los contenidos que aprenderán en la unidad.

En cuanto a la redacción de los contenidos, en el libro de texto del 1976 se hace un uso más formal de las matemáticas y se da una mayor importancia a los desarrollos teóricos, más que a la ejemplificación de casos concretos. Sin embargo, en el libro de texto de 2013 se hace más uso del lenguaje escrito que del matemático y los conceptos teóricos van apoyándose con ejemplos concretos. En ambos libros se usan gráficas junto con las explicaciones pertinentes. De hecho, en el libro de 1976 todas las gráficas vienen enumeradas, por el contrario, esto no ocurre en el libro de 2013 y, en cierto punto, puede suponer confusión a la persona que esté utilizándolo. Otro punto relacionado con la redacción hacia el que han evolucionado los libros de texto es la importancia en la presentación de contenidos. Incluyendo cuadros para resaltar conceptos importantes, notas orientativas para resolver los ejercicios, utilizando letra negrita en palabras clave, etc. Todo ello con el objetivo de presentar el currículum de una forma más clara al alumnado.

Por último, una de las características a destacar en la evolución de los libros de texto, y que está cada vez más presente, es la incorporación de elementos multimedia. Concretamente, el libro de texto de la editorial Anaya (2013) consta con un CD donde se pueden revisar algunos ejercicios resueltos que hacen uso de la representación

gráfica de funciones. En general, esta herramienta junto con las tecnologías de la información y la comunicación permiten indagar de manera más rápida en los conceptos matemáticos que requieren de una representación gráfica.

Para concluir, la evolución que se observa entre estos dos libros de texto analizados no es algo aislado. Cada vez se le da más importancia a los elementos que rodean los conceptos matemáticos (historia, tecnologías digitales, elementos gráficos llamativos) sobre la exposición de los contenidos teóricos (Ruiz de Gauna, 2013).

4. Fundamentación epistemológica

4.1. Introducción

La derivación es una herramienta que ha favorecido el desarrollo de todas las ciencias. El concepto de derivada surgió de la necesidad de resolver dos problemas que ocuparon el estudio de los matemáticos del siglo XVI y anteriores: calcular la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar la velocidad instantánea de un movimiento no uniforme. Hasta el siglo XVII, la solución de cada problema tenía una solución específica y no generalizable.

Fueron Newton y Leibniz, de manera simultánea e independiente, quienes desarrollaron un método para la resolución de estos problemas con la ayuda de los conocimientos acumulados hasta la fecha. De esta manera nació el cálculo diferencial.

Un siglo después, Euler contribuyó a mejorar la derivada, pero el cálculo matemático que conllevaba seguía siendo poco sistemático e intuitivo.

Finalmente, en el siglo XIX, el cálculo de las derivadas se redujo a sencillas operaciones formales. La idea de Cauchy de relacionar el concepto de derivada con el de límite nos permite hoy en día poder trabajar con soltura en el campo de las derivadas.

En este apartado se hará un repaso de la fundamentación epistemológica del tema de las derivadas en la asignatura de Matemáticas I. Los contenidos que se desarrollan en este apartado son los regidos por la Orden de 9 de septiembre de 1993 del BOE, concretamente se centra en el “Tema 26: Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones”. A continuación, se desarrollarán algunas partes de este tema que tienen relación con el contenido curricular de la asignatura.

4.2. Algo de historia. Recta tangente a una curva

Un ejemplo del cálculo de la tangente a una curva mediante técnicas antiguas corresponde a Descartes (1596-1650), descrito en su obra “La Géométrie” de 1637. El método se describe de la siguiente manera:

Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto.

Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como decía Euclides, esta recta es fácil de calcular.

(Suzuki, 2005)

Pero este método es viable solo para curvas sencillas. Vamos a ilustrarlo con un ejemplo (Martínez de la Rosa, 2009). Se quiere encontrar la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $c(a^2, a)$ (Figura 2).

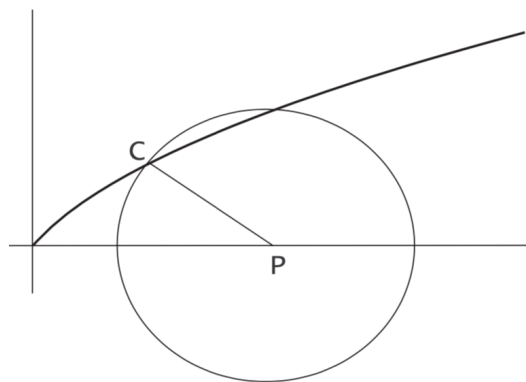


Figura 2 - Fuente: Martínez de la Rosa (2009).

Se toma una circunferencia con centro en $P = (h, 0)$ y radio r . Su ecuación sería:

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

Los puntos de intersección entre la circunferencia y la curva serían las soluciones al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Sustituyendo y por $\sqrt{x}$ en la primera se obtiene:

$$x^2 + (1 - 2h)x + (h^2 + r^2) = 0$$

La curva y la circunferencia se cortarían en el punto $C(a^2, a)$, es decir, el punto $x = a^2$ de la curva. Pero para cumplir la condición de que la circunferencia sea tangente debe de coincidir con la curva únicamente en un punto. Por tanto, se debe de cumplir que:

$$x^2 + (1 - 2h)x + (h^2 + r^2) = (x - a^2)^2$$

Operando e igualando los coeficientes de x se obtiene que $1 - 2h = 2a^2$, por tanto:

$$h = a^2 + \frac{1}{2}$$

Por tanto, el centro de la circunferencia tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en (a^2, a) es igual a

$$P(a^2 + \frac{1}{2}, 0)$$

La tangente en C es perpendicular al radio que une el centro de la circunferencia y el punto de tangencia PC, cuya pendiente es $-2a$ como se puede comprobar:

$$m_{PC} = \frac{a - 0}{a^2 - h} = \frac{a}{a^2 - a^2 - \frac{1}{2}} = -2a$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en el punto $C(a^2, a)$ será perpendicular al radio PC e igual a :

$$\frac{1}{2a}$$

Es fácil ver que coincide con la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $C(a^2, a)$:

$$f'(a^2) = \frac{1}{2\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2a}$$

4.3. Derivada de una función en un punto

4.3.1. Definición

Sea A un abierto de $\mathbf{R}$, $a \in A$ y una función $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, se llama derivada de la función $f(x)$ en un punto $x = a$ al número:

$$m = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si el límite existe es único, por tanto, la derivada de f en $x = a$, de existir, es única.

También se puede encontrar la expresión en función de h , haciendo el cambio de variable $h = x - a$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Otra manera de definir la derivada es como la tangente a una función en un punto. Se llama tangente a la gráfica de la aplicación lineal que más se aproxima a $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$. La tangente es una función afín dada por la expresión:

$$g(x) = f'(a) \cdot a + n$$

Como la recta tangente $g(x)$ y la función $f(x)$ son coincidentes en $x = a$ tenemos que

$$g(a) = f'(a) \cdot a + n = f(a)$$

Despejando n y sustituyéndola en la ecuación de la recta tangente obtenemos

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es, por tanto,

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Si existe la derivada en un punto, por definición, existe el límite que la define, por tanto, existen los límites laterales en ese punto. Cuando en la expresión de la derivada dada en primer lugar tomamos solo el límite por la derecha o por la izquierda, hablamos de derivadas laterales por la izquierda o por la derecha de f . De aquí se deduce que la derivada de f en $x = a$ existe si y solo si existen sus derivadas laterales por la izquierda y por la derecha en $x = a$ y, además, son iguales.

4.3.2. Derivabilidad y continuidad

Si una función es continua no tiene por qué ser derivable; se puede afirmar con un contraejemplo usando la función $f(x) = |x|$. Vemos que es continua en $x = 0$ no siendo derivable en este punto ya que sus derivadas laterales en $x = 0$ valen -1 y $+1$, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Sin embargo, el teorema recíproco sí es cierto:

❖ Teorema.

Si una función f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

→ Demostración:

Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se puede escribir

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$$

donde se puede hacer tender h a 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Es decir

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$$

lo que, deshaciendo el cambio de variable $h = x - a$, equivale a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, es decir, que f es continua en $x = a$.

4.4. Álgebra de derivadas

Usando las operaciones definidas en el anillo de las funciones reales de variable real, la suma y el producto, se calcularán las derivadas de la función suma, de la función producto y del cociente. Así quedará establecida la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

4.4.1. Derivada de la suma

Sea A un abierto de $\mathbf{R}$, $a \in A$ y $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $g: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dos funciones derivables en $x = a$; entonces $f + g$ es derivable en $x = a$, se cumple:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

La demostración es trivial y se obtiene aplicando la definición de derivada.

4.4.2. Derivada del producto

Sea A un abierto de $\mathbf{R}$, $a \in A$ y $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $g: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dos funciones derivables en $x = a$; entonces $f \cdot g$ es derivable en $x = a$, se cumple:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$$

Se comprueba de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) + f(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \end{aligned}$$

4.4.3. Derivada del inverso

Sea A un abierto de $\mathbf{R}$, $a \in A$ y $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función derivable en $x = a$ tal que $f(a) \neq 0$; entonces $1/f$ es derivable en $x = a$, se cumple:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}$$

Se comprueba de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1/f)(a+h) - (1/f)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(-\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a) \cdot f(a+h)} \right) = \frac{1}{[f(a)]^2} \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \\ &= -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}\end{aligned}$$

4.4.4. Derivada del cociente

Sea A un abierto de $\mathbf{R}$, $a \in A$ y $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $g: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dos funciones derivables en $x = a$ con $g(a) \neq 0$; entonces f/g es derivable en $x = a$, se cumple:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

La demostración es inmediata escribiendo $f/g = f \cdot 1/g$ y utilizando los resultados usados en los puntos 4.3.2. y 4.3.3.

4.4.5. Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena

Sean A y B abiertos de $\mathbf{R}$, de manera que $f(A) \subseteq B$, $a \in A$ y $f(a) \in B$. Y considerando $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $g: B \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Si f es derivable en $x = a$ y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en $x = a$, se cumple:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Para demostrar la regla de la cadena se construye la función $h: B \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida de la siguiente manera:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } y = f(a) \end{cases}$$

Como g es derivable en $f(a)$ se tiene

$$\lim_{y \rightarrow f(a)} h(y) = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a)) = h(f(a))$$

luego h es continua en $f(a)$.

Ahora bien, f es derivable en a , por tanto, f es continua en a . Entonces, por las propiedades de la composición de funciones continuas, la función $h \circ f$ es continua en a . Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(f(a)) = g'(f(a))$$

Por otra parte, por la definición de h , para $x \neq a$, se tiene

$$\frac{f(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

La utilidad de la regla de la cadena es evidente puesto que, conociendo la derivada de distintas funciones en un punto, podemos calcular de forma inmediata la derivada de la función compuesta por varias de ellas.

4.4.6. Derivada de la función inversa

Sea f una función monótona y continua en un intervalo. Si f es derivable en un punto a interiora dicho intervalo y $f'(a) \neq 0$, entonces su función inversa es f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Sabiendo que toda función estrictamente creciente (o decreciente) y continua tiene una inversa estrictamente creciente (o decreciente) y continua.

Se tiene que cumplir que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} = \frac{1}{f'(a)}$$

Sea

$$h = f^{-1}(b + k) - f^{-1}(b) = f^{-1}(b + k) - a$$

Entonces $a + h = f^{-1}(b + k)$ y, por tanto, $b + k = f(a + h)$; luego

$$k = f(a + h) - b = f(a + h) - f(a)$$

Además, si $k \neq 0$ también $h \neq 0$ puesto que f^{-1} es monótona y podemos escribir

$$\frac{f^{-1}(b + k) - f^{-1}(b)}{k} = \frac{h}{f(a + h) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

Por otro lado, como f^{-1} es continua en b ,

$$\lim_{k \rightarrow 0} (f^{-1}(b + k) - f^{-1}(b)) = 0$$

Es decir, $h \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow 0$, y como f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b + k) - f^{-1}(b)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(a + h) - f(a)}{h}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

4.5. Derivadas de las funciones usuales

La derivada de una función real de variable real en un punto tiene como resultado otro número real, en caso de existir.

A continuación, veremos las derivadas de las funciones más usuales.

4.5.1. Función constante

Sea la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = k$ siendo $k = \text{constante}$; existe

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

4.5.2. Función identidad

Sea la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x$, su derivada es la siguiente

$$f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

4.5.3. Función potencia

Sea la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbf{N}$ su derivada es la siguiente

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

4.5.4. Función logarítmica y exponencial

La función logaritmo neperiano es la función $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$. La función $f(x) = \ln x$ es derivable en todo $x > 0$, siendo su derivada la siguiente

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

La función inversa del logaritmo neperiano es la función exponencial $\exp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de base el número e . La función exponencial es la función $f(x) = \exp x = e^x$ y, como la función logarítmica es derivable para $x > 0$ con derivada no nula, el Teorema de derivación de la función inversa nos asegura que la función exponencial también es derivable con derivada

$$f'(x) = \exp' x = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Para $a > 0$, $a \neq 1$, se define la exponencial de base a para cada $x \in \mathbf{R}$ como

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

Si se aplica la regla de la cadena, se puede probar que $\exp_a$ es derivable para $x \in \mathbf{R}$ siendo su derivada

$$\exp'_a(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \exp_a(x) \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

La función inversa a esta es la función logarítmica de base a , $\ln_a$, que para cada $x \in \mathbf{R}^+$ verifica

$$\ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Se puede deducir que su derivada es

$$\ln'_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \forall x \in \mathbf{R}^+$$

4.5.5. Función potencia de exponente real

Para $k \in \mathbf{R}$ arbitrario se define la función potencia de exponente k para cada $x > 0$ por

$$f(x) = x^k = e^{k \cdot \ln x}$$

Esta función es derivable para cada $x > 0$ y su derivada es la siguiente

$$f'(x) = e^{k \ln x} \cdot k \cdot \frac{1}{x} = x^k \cdot k \cdot \frac{1}{x} = k \cdot x^{k-1}$$

4.5.6. Funciones trigonométricas

Para $x \in \mathbf{R}$ las funciones definidas por $\sin x$ y $\cos x$ tienen las siguientes derivadas

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

De la misma manera, teniendo en cuenta que la función tangente viene dada por

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

para todo $x \neq n\frac{\pi}{2}$ siendo $n \in \mathbf{N}$. La derivada de la función tangentes es la siguiente

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in \mathbf{R}: x \neq n\frac{\pi}{2}$$

4.5.7. Funciones trigonométricas recíprocas

Definiendo las funciones inversas a las funciones seno, coseno y tangente obtenemos las siguientes funciones

$$f(x) = \arcsin x \quad x \in [-1, 1]; f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) = \arccos x \quad x \in [-1, 1]; g(x) \in [0, \pi]$$

$$h(x) = \arctan x \quad x \in \mathbf{R}; h(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

cuyas derivadas son las siguientes, respectivamente,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in [-1, 1]$$

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in [-1, 1]$$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbf{R}$$

4.6. Aplicaciones de las derivadas

En este apartado se tratarán algunos ejemplos de la aplicación de las derivadas en la ciencia.

4.6.1. Cinemática

Por lo general, el movimiento de un objeto en el espacio se determina en función del tiempo. Siendo s el espacio recorrido por un cuerpo y t el tiempo empleado en recorrer ese espacio, se define la función $s(t)$. Si consideramos que un cuerpo se desplaza desde

un punto s_0 a otro s_1 , siendo el tiempo en cada posición t_0 y t_1 , respectivamente, se define velocidad media del móvil en dicho intervalo de tiempo como

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si el movimiento no es uniforme, es decir, no tiene velocidad constante, este cociente varía con el tiempo. Para calcular la velocidad instantánea en un instante t_0 se calcula el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \rightarrow 0$ de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$$

Por tanto, la velocidad instantánea es la derivada del espacio recorrido respecto del tiempo.

Así mismo, cuando un móvil varía su velocidad se dice que sufre una aceleración. De forma análoga, se puede calcular la aceleración instantánea del movimiento en el instante t_0 de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t_0)$$

Es decir, la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad instantánea respecto al tiempo, o lo que es lo mismo, la derivada segunda del espacio recorrido respecto al tiempo.

4.6.2. Tasa instantánea de variación de una muestra

Siendo $N = f(t)$ el número de núcleos de una muestra radiactiva en el instante t , por ejemplo, se puede definir la velocidad de desintegración como la siguiente derivada:

$$N'(t) = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Este límite será cero si t es un punto en el que la función permanece constante para un incremento de tiempo lo suficientemente pequeño, sin embargo, el límite será infinito si t es un punto en el que hay un salto. En este caso, es interesante sustituir la función empírica por una función continua y derivable en la que el límite anterior existe y nos da una idea del crecimiento instantáneo.

4.6.3. Termodinámica

El tiempo no es la única variable independiente de interés para usar la derivada como representación de la variación. En el campo de la termodinámica, podemos referirnos al

número de partículas ΔN en un volumen ΔV de un cuerpo sólido. Se puede hablar de densidad del cuerpo en un punto concreto de su estructura usando la expresión:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

De la misma forma se pueden definir otras magnitudes físicas como la velocidad de una reacción química, el calor específico, la dilatación de un sólido, etc.

5. Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y la enseñanza

En este apartado se pretende hacer un análisis de algunas investigaciones que hayan tratados aspectos de la enseñanza de las derivadas. Para ello, nos centraremos en los protagonistas en el proceso de enseñanza-aprendizaje: el alumnado y el profesorado.

5.1. El papel del alumnado

En el presente estudio se pretende dar una especial importancia al papel del alumnado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para que la clase adopte el papel protagonista se propone aplicar, al menos en parte de las sesiones, el método de enseñanza activa, en concreto, la clase invertida (flipped classroom). Los/as estudiantes tienen su primer contacto con las derivadas en 1º de bachillerato, por lo que se necesita asentar unas bases sólidas en este conocimiento. En este sentido, es importante escoger un método de enseñanza adecuado. Esta metodología está respaldada por el estudio “Impacto del aula invertida durante el proceso educativo superior sobre las derivadas considerando la ciencia de datos y el aprendizaje automático” (Salas-Rueda, R.A., & Lugo-García, J.L., 2019), el cual concluye que el aula invertida es un modelo que mejora el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. El estudio en el que está basado el artículo se realiza en la asignatura de Matemáticas Básicas de la Facultad de Negocios en una muestra 88 estudiantes. Este estudio basado en estudiantes de universidad puede extenderse a estudiantes de bachillerato. Los ejercicios propuestos en las pruebas de evaluación tienen una dificultad asumible para la asignatura Matemáticas I de primero de bachillerato. Asimismo, estos ejercicios actúan como instrumento de medición de la comprensión de las derivadas (Figura 3).

No.	Pregunta	Puntos
1	Encontrar la derivada de la siguiente función: $y = x^4 - 2x^3 + x^3 + 1000$	10%
2	Utiliza la definición de límite para encontrar la primera derivada de la siguiente función $y = x^2 + 4x + 1$	15%
3	Encontrar la distancia, velocidad y aceleración si $x=2$. Considera que la Función distancia es $y = 2x^3 + x^2 + x + 1$	15%
4	Encontrar el valor crítico, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el máximo o mínimo de la siguiente función $y = x^2 - 4x + 8$	20%
5	Encontrar la cuarta derivada y^{IV} de la siguiente función: $y = (-2x+1)^4$	20%
6	Encontrar y' $y^3 + 2x = y^2 + 1$	20%

Figura 3 - Instrumento de medición de la comprensión de las derivadas. Tomada de (Salas-Rueda y Lugo-García, 2019)

El procedimiento de clase invertida que se lleva a cabo con el alumnado comienza con la creación de contenidos, como videos de YouTube, que dotarán a la clase de los conocimientos previos a las sesiones prácticas. A continuación, durante estas sesiones deberán de trabajar en grupos de tres para reflexionar y debatir sobre la resolución de los ejercicios. Posteriormente, resolverán algunos de estos ejercicios en la pizarra. Durante este proceso el/la docente adquiere un papel de colaborador/a en las sesiones presenciales.

Partiendo de los resultados obtenidos en el artículo antes citado, se puede concluir que la utilización de la clase invertida es una metodología que da el protagonismo al alumnado y fomenta la adquisición de conocimientos de forma autónoma mediante las herramientas de la información y la comunicación. Además, durante las sesiones prácticas en grupo, se tiene una buena oportunidad para promover las competencias argumentativas y comunicativas a la vez que se pone en valor la diversidad.

5.2. El papel del profesorado

Por otro lado, el papel del profesorado también es crucial en el proceso enseñanza-aprendizaje de las derivadas y en su evaluación. Dada la novedad del concepto de derivada para la clase, es necesario asegurar el entendimiento total del mismo. Por esta razón, identificar el nivel de comprensión de la derivada por parte del alumnado es una competencia que se debe desarrollar en los futuros docentes. Con este fin se ha realizado el estudio “El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato” (Sánchez-Matamoras, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J., 2013). Este estudio consiste en evaluar en futuro profesorado el desarrollo de la competencia para identificar la comprensión de la derivada en un entorno creado con este fin. Los/as participantes del estudio realizan una prueba inicial y otra final en la que

tienen que interpretar las respuestas de estudiantes de 1º de bachillerato a ejercicios de derivadas y calificar en qué nivel han comprendido la derivada. Entre estas dos pruebas, los/as participantes reciben 5 sesiones teóricas dirigidas a desarrollar la competencia objeto de estudio. En la Figura 4 se puede observar el esquema del módulo realizado.

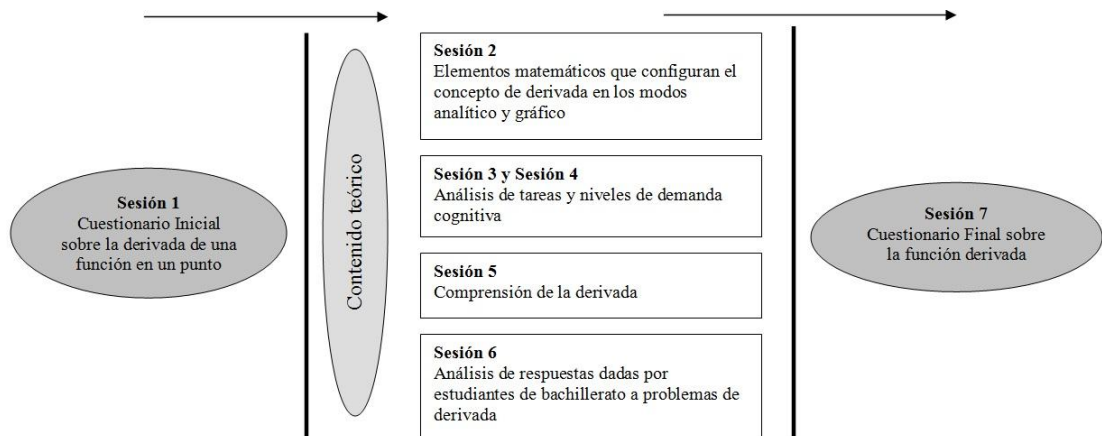


Figura 4 - Esquema de diseño del módulo derivada. (Sánchez-Matamoros et al., 2013)

Los niveles de reconocimiento de la comprensión de la derivada que se usan para medir la mejora de dicha competencia son los siguientes (Sánchez-Matamoros et al., 2013, pp.505-506):

- Nivel bajo: se considera la comprensión de los/as estudiantes como “todo o nada”.
- Nivel medio: se identifican algunas características de la comprensión de los/as estudiantes de bachillerato en relación a algunos elementos matemáticos.
- Nivel alto: se identifican las diferentes características de la comprensión de los/as estudiantes.

Los resultados del módulo mostraron que en la prueba inicial la totalidad de participantes partían de un nivel bajo. En la prueba final solo 2 llegaron a un nivel alto y 4 a un nivel medio, manteniéndose los 2 restantes en el nivel bajo (Figura 5).

		Cuestionario Inicial	Cuestionario Final
Niveles de reconocimiento de la comprensión matemática	Bajo	AAC; SAP; JGM; RLS; JMI; ABPG; ARP; MV (8)	SAP; ABPG (2)
	Medio	(0)	JGM; RLS; ARP; MV (4)
	alto	(0)	AAC ; JMI (2)

Figura 5 - Niveles de comprensión. (Sánchez-Matamoros et al., 2013)

El hecho de que no se produjera una evolución totalmente positiva en competencia de identificar la comprensión de la derivada en los/as participantes indica que su desarrollo es complejo y se requieren más actividades enfocadas a este fin (Sánchez-Matamoros et al., 2013).

En el presente Trabajo de Fin de Máster se pretende dar importancia a la comprensión de la derivada por parte del alumnado. Para ello, es esencial que los/as docentes presten atención a las respuestas del alumnado diferenciando los elementos relevantes para la comprensión de la derivada, ya que este es un indicador de esa competencia (Sánchez-Matamoros et al., 2013, p.508). Por tanto, la evaluación no debe centrarse en el resultado final de un ejercicio o problema, sino en el procedimiento empleado en la resolución del mismo. Para llevar a cabo esta evaluación se debe evitar que los problemas planteados guíen totalmente al alumnado. Deben de ser problemas cuya resolución deje libertad cada estudiante, de esta manera sabremos que conceptos han sido entendidos por parte de la clase y sobre cuales hay que trabajar más. Además, se favorece la autonomía del alumnado a la hora de resolverlos. Según este estudio, el objetivo final será que el alumnado comprenda la derivada de manera que pueda resolver el mismo ejercicio abordándolo desde distintos planteamientos.

6. Proyección didáctica: Derivadas

6.1. Justificación

Las derivadas son una herramienta de gran utilidad para el estudio de innumerables fenómenos físicos. Por esto mismo, será una herramienta especialmente importante para el alumnado que tenga una proyección académica en el mundo de las matemáticas, la industria o la física. Un buen ejemplo en el que se podrían usar las derivadas y dotarlas, a su vez, de significado físico, es la asignatura de Física de segundo de bachillerato. Incluso en el curso posterior, segundo de bachillerato, se puede mostrar las aplicaciones de las derivadas mediante la deducción de las ecuaciones de movimiento a partir de las derivadas de la posición respecto al tiempo. Pero para ello, es necesario que el

alumnado haga un aprendizaje significativo de las derivadas en primero de bachillerato. Para ello, se desarrollará esta unidad con la intención de darle un significado a las derivadas, empezando por una idea intuitiva y acabando por la comprensión a partir de la definición del concepto de derivada.

Según la normativa vigente y expuesta en el BOJA (nº 145, Orden de 14 de julio de 2016), las derivadas se encuentran en el Bloque III del currículum. Este bloque está dedicado al Análisis y, entre otros, incluye en sus contenidos los tipos de funciones básicas, los límites, las derivadas y la representación gráfica de funciones. Se puede ver que estos contenidos tienen un orden lógico, ya que para estudiar las derivadas necesitamos conocer, al menos, las funciones básicas y los límites. A su vez, para estudiar la representación gráfica de funciones es necesario conocer también las derivadas. Esto explica la situación de las derivadas en este bloque de contenidos dentro del currículum.

6.2. Contextualización del centro y el aula

El contexto elegido para desarrollar esta unidad didáctica se basa en el centro en el que he realizado las prácticas docentes: el IES Virgen del Carmen. Situado en la zona céntrica de Jaén. La tipo de alumnado que está matriculado es este centro es de familia de clase media. El alumnado que ingresa en el IES proviene tanto de colegios situados en la misma zona geográfica como de otros situados en el extrarradio de la ciudad, por lo que se puede decir que hay una rica diversidad en cuanto a alumnado se refiere.

El número de personas discentes que componen las clases de primero de bachillerato será de unas 20, aproximadamente. El aula contará con mesas y sillas que podremos mover libremente, una pizarra clásica y una pizarra digital. Además, el centro dispone de calculadoras gráficas y una sala de ordenadores que estará a disposición del cuerpo docente y alumnado.

La unidad desarrollada está pensada para aplicarse a una clase con un número suficiente de estudiantes para poder formar grupos y realizar algunas de las actividades. En el IES Virgen del Carmen también se imparte el bachillerato de adultos, en el cual yo realicé las practicas, con un número notablemente más reducido de personas que en el grupo de mañana. El desarrollo de la unidad contiene actividades en grupos, por lo que para poder aplicarlo a un grupo más reducido serían necesarios algunos ajustes de las actividades propuestas.

6.3. Objetivos

El estudio de los objetivos se hará diferenciando entre los de etapa, correspondientes a los de la última etapa de la educación secundaria; los de área, que son los propios de la

asignatura de Matemáticas I; y los de la unidad de derivadas. Estos últimos estarán más adaptados a la unidad de la que trata el presente trabajo.

6.3.1. Objetivos generales de etapa

Según la legislación publicada en el artículo 25 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, esta unidad didáctica contribuirá a que el alumnado desarrolle las siguientes capacidades propias de la etapa de Bachillerato que les permita:

- Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- Afianzar los hábitos de estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

6.3.2. Objetivos del área

Asimismo, el desarrollo del tema de las derivadas pretende la consecución de algunos de los objetivos definidos por el BOJA (nº 145, Orden de 14 de julio de 2016) para la asignatura de Matemáticas I:

- Conocer, comprender y aplicar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio y conocimiento de las distintas áreas del saber, ya sea en el de las propias Matemáticas como de otras Ciencias, así como aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de otros ámbitos.

- Reconocer el desarrollo de las Matemáticas a lo largo de la historia como un proceso cambiante que se basa en el descubrimiento, para el enriquecimiento de los distintos campos del conocimiento.
- Utilizar los recursos y medios tecnológicos actuales para la resolución de problemas y para facilitar la comprensión de distintas situaciones dado su potencial para el cálculo y representación gráfica.
- Adquirir y manejar con desenvoltura vocabulario de términos y notaciones matemáticas y expresarse con rigor científico, precisión y eficacia de forma oral, escrita y gráfica en diferentes circunstancias que se puedan tratar matemáticamente.
- Emplear el razonamiento lógico-matemático como método para plantear y abordar problemas de forma justificada, mostrar actitud abierta, crítica y tolerante ante otros razonamientos u opiniones.
- Valorar la precisión de los resultados, el trabajo en grupo y distintas formas de pensamiento y razonamiento para contribuir a un mismo fin.

6.3.3. Objetivos de la unidad

Durante el desarrollo de la unidad se pretenden conseguir los siguientes objetivos:

OB1: Desarrollar la autonomía para el aprendizaje de las derivadas mediante el uso de la clase invertida y el razonamiento de los procedimientos en los debates generados en clase.

OB2: Utilización de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) como fuente de información sobre los contenidos del tema y como soporte para la comprobación de ejercicios.

OB3: Identificar gráficamente la ecuación derivada de una función basándose en los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

OB4: Dominar el cálculo de derivadas en funciones sencillas. Conocer la expresión matemática de la definición de derivada. Saber calcular la derivada de una función sencilla partiendo de la ecuación de la definición de derivada.

OB5: Conocer la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de una recta. Saber calcular la recta tangente a una función en un punto a partir de su derivada.

OB6: Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global. Valorar la utilización de la representación gráfica de funciones en problemas generados en un contexto determinado, y usar los medios tecnológicos como herramienta para el

estudio local y global, y para la representación de funciones y la interpretación de sus propiedades.

OB7: Saber identificar los puntos de bloqueo en la realización de problemas. Argumentar y justificar el procedimiento usado en la realización de problemas. Aprender a debatir sobre problemas matemáticos escuchando y respondiendo con cierto rigor matemático.

6.4. Competencias clave

Las competencias clave que trabaja la unidad son las siguientes:

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). Se pretende dar significado a las matemáticas y hacer uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs). Esto se conseguirá contextualizando algunos de los problemas propuestos en el desarrollo de la unidad.
- Competencia en comunicación lingüística (CCL). Se pretende que se argumenten ciertos razonamientos matemáticos de forma correcta y estructurada. Se favorecerá la creación de debates en torno a problemas propuestos en los que el alumnado tenga el protagonismo y pueda justificar su trabajo.
- Competencia digital (CD). Mediante el uso de las TICs como soporte de aprendizaje. Se hará de forma autónoma y durante las clases como herramienta para una mayor comprensión de los contenidos. Estarán en todo momento disponibles para el uso por parte del alumnado y la persona docente debe de incentivar su uso.
- Competencia de aprender a aprender (CAA). Directamente relacionada con la competencia digital, donde las TICs le darán al alumnado cierta autonomía para la adquisición de conocimientos. El desarrollo de esta competencia es necesario para la consecución de los OB1 y OB2 de la unidad.
- Competencias sociales y cívicas (CSC). Mediante el trabajo en grupo y la toma de decisiones dentro el mismo. Los grupos que se formen deben de tener una diversidad que le dé al alumnado la oportunidad relacionarse con compañeros y compañeras que no lo harían fuera de clase. A su vez, la realización de debates, en torno al contenido matemático, es una oportunidad de fomentar el respeto y la cordialidad, por ejemplo, respetando el turno de palabra.

6.5. Contenidos

Los contenidos impartidos en esta unidad didáctica están basados en la Orden del 14 de julio de 2016 del BOJA. Ordenado temporalmente atendiendo en la aparición en la unidad son los siguientes:

- Interpretación de la derivada como pendiente de una curva.
- Relación entre la derivada de una función y sus intervalos de crecimiento.
- Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.
- Definición de derivada.
- Puntos singulares.
- Recta tangente a una función por un punto.
- Representación de funciones.
- Problemas de aplicaciones de las derivadas.

6.6. Metodología

La metodología que se emplee en la enseñanza de las matemáticas en bachillerato no es algo trivial, como queda reflejado en los documentos oficiales:

El profesorado debe actuar como orientador, promotor y facilitador del aprendizaje y del desarrollo competencial del alumnado, fomentando su participación activa y autónoma. Asimismo, debe despertar y mantener la motivación, favoreciendo la implicación en su propio aprendizaje; promover hábitos de colaboración y de trabajo en grupo para fomentar el intercambio de conocimientos y experiencias entre iguales; provocar una visión más amplia de los problemas al debatirlos y cuestionar las soluciones, con la posibilidad de plantear nuevos interrogantes o nuevos caminos de resolución y de aprender de los errores.

BOJA (Orden de 14 de julio de 2016)

Las metodologías usadas en esta unidad pretenden ajustarse, en la medida de lo posible, a lo recomendado para la asignatura de matemáticas.

Una de las más usadas para la unidad que se desarrolla es la clase invertida. Como ya se vio en el apartado de fundamentación didáctica, la clase invertida da el protagonismo al alumnado y pretende que éste desarrolle su autonomía en la adquisición de conocimientos, es decir, se persigue desarrollar la competencia clave CAA. En esta unidad, la clase invertida se usa para impartir algunos contenidos teóricos. En la sesión 1, se usa para que el alumnado se haga una idea intuitiva del significado matemático de la derivada. Y en la sesión 4, para deducir la expresión de la definición de la derivada a partir de la recta tangente. Un punto positivo de esta metodología es que se le otorga al alumnado el material que puede revisar cuando quiera. Desde el punto de vista docente, si se usa la clase invertida para dar contenidos teóricos, como es el caso en esta unidad, se deja más tiempo de clase para practicar con actividades. Por el contrario, existe la posibilidad de que parte del alumnado no se prepare la parte correspondiente al trabajo en casa. Para ello, se hace una breve explicación de estos contenidos a modo de repaso y, en el caso de que parte del alumnado no haya preparado los contenidos, para que ningún miembro quede totalmente desubicado durante el resto de la sesión.

Otra metodología que se usa es la creación de pequeños debates y discusiones en clase. Esta se fomenta siempre que se tiene oportunidad, pero especialmente cuando parte del alumnado comete algún error o existe un punto de bloqueo en una actividad. Lo que se pretende es que el alumnado sepa identificar el punto de bloqueo y expresarlo correctamente, para que el resto de compañeros y compañeras argumenten una solución para solucionar el problema. Por tanto, se trabajan las competencias claves CCL y CSC. El papel de la persona docente consistirá en guiar estos debates para que no pierdan el objetivo por el que se iniciaron y mediar cuando sea necesario haciendo las preguntas oportunas, para que la comunicación sea efectiva.

Una tercera metodología es la de la gamificación y el trabajo en grupo. A esta se le dedica la sesión 6 completa. De la sesión 1 a la 5 se han visto todos los contenidos teóricos de la unidad y se han trabajado con actividades. En la sesión 6 se seguirán trabajando los contenidos, pero esta vez en el contexto de un juego y formando equipos. De esta manera se pretende aumentar el interés y la motivación del alumnado, evitando que relacionen la realización de actividades con una tarea monótona. Además, contribuirá al desarrollo de las competencias CCL y CSC. De nuevo, el papel de la persona docente es de mediadora y guía para que el juego transcurra conforme a lo esperado. También se usa esta metodología junto con el uso de las TICs con recursos como el Kahoot. Con este recurso se pretende captar la atención del alumnado y el interés en la materia, motivado por la competitividad que da este juego y el uso de las tecnologías.

El uso de las TICs también está presente más veces a lo largo de la unidad, y se debe de animar a utilizar este recurso en cualquier momento que la persona docente o el alumnado lo considere útil.

En las sesiones 7 y 8 se desarrolla un simulacro de examen y la resolución del mismo, el pre-examen. Esta metodología la he extraído del período de prácticas en el IES Virgen del Carmen. La realización de un pre-examen en las sesiones previas al examen evaluable permite que el alumnado elimine posibles inseguridades de cara a la evaluación y le permita hacer autocrítica. De esta manera, podrá identificar los contenidos sobre los que más debe trabajar de cara al examen de la unidad y preguntar las dudas que se le presenten. El aspecto negativo del pre-examen es el trabajo extra de corrección que tendrá la persona docente. Si esto supusiese un problema que afectase a la temporalización de las sesiones, existe la posibilidad de corregirlo en la sesión posterior al pre-examen junto con la clase.

Por último, y de forma más general, el método empleado en la ordenación de los contenidos de las sesiones tiene también un fin didáctico. Al contrario de lo que se hace en algunos libros de texto, la definición de derivada se presenta en esta unidad después de trabajar el cálculo de las derivadas. El objetivo de este orden es hacer que el alumnado tome contacto con las derivadas, haciéndose una idea intuitiva de su significado y, posteriormente, mecanice el cálculo de la derivada de una función. Una vez estén trabajados estos contenidos, tendrá más herramientas para entender la expresión de la definición de derivada. Además, podrá dar sentido a las reglas de derivación con la obtención de la expresión de la derivada de una función a partir de la definición de derivada, ya que obtendrá por sí mismo las expresiones que ha estado usando anteriormente.

En definitiva, las metodologías usadas en la unidad de derivadas están dirigidas a incentivar la motivación y el interés en la asignatura. Se pretende centrar la atención en el alumnado, mediante el diálogo y la argumentación de los procedimientos que se usan en la resolución de ejercicios. Debido a esto, la persona docente debe actuar como mediadora para que el trabajo de los contenidos por parte del alumnado se haga de manera efectiva.

6.7. Actividades, recursos y temporalización

Usando como referencia las guías docentes de los libros de texto, el número de sesiones dedicadas a las derivadas será de 9. A continuación, se muestra tanto la adaptación de los contenidos a las 9 sesiones, como el desarrollo de los mismos, incluidos los recursos usados y las actividades.

6.7.1. Sesión 1: Introducción a la derivada. Significado matemático.

En esta sesión haremos uso de la clase invertida. En la sesión previa o mediante la plataforma digital que se use, se le envía al alumnado un vídeo que tendrán que ver y analizar antes de esta sesión.

- Recurso: vídeo de la plataforma YouTube donde se explica el significado matemático de la derivada como pendiente a una curva (Figura 6).

Compara.

$$g'(4) \text{ — } g'(6)$$

☐ $<$

☐ $>$

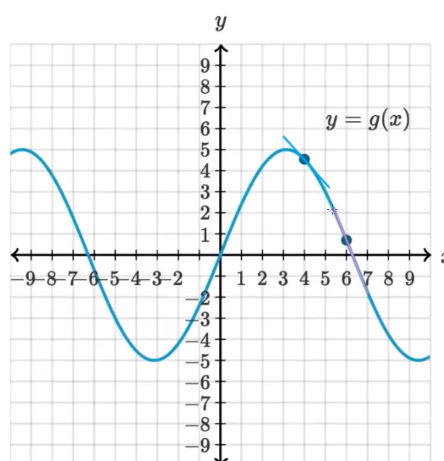


Figura 6 –Imagen del vídeo usado en la clase invertida 1. Fuente: Youtube, link: <https://youtu.be/w8hOoHjKo60>

Durante la sesión 1 se discutirá los primeros minutos sobre las posibles dudas que hayan podido surgir del vídeo.

A continuación, usando el proyector de la pizarra digital se mostrarán distintas funciones y se preguntará a la clase sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las mismas. El alumnado deberá de argumentar las respuestas que dé.

Una vez que el ejercicio anterior haya quedado claro. Se hará la siguiente actividad:

- Actividad 1: Relaciona cada ecuación con su representación gráfica correspondiente y cada representación gráfica con la gráfica de su derivada.

$$y=(x+3)^2-1$$

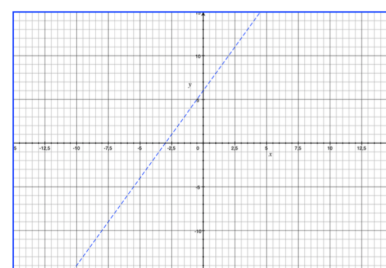
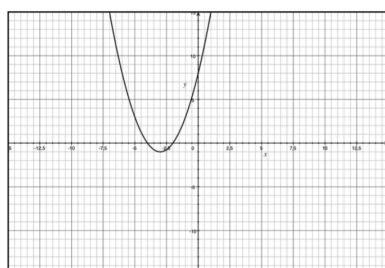


Figura 7 - Ejemplo resuelto de un caso de la actividad 1 (Sesión1).

En la Figura 7 se puede ver un ejemplo de un caso de la actividad resuelto. En el Anexo1 se puede encontrar el material para realizar el ejercicio completo y la resolución del mismo.

Con esta actividad se pretende repasar los contenidos del tema de funciones y afianzar lo dado hasta ahora sobre la función derivada de otra. En la resolución del ejercicio, de forma conjunta por toda la clase, se deben de argumentar las soluciones que se planteen, independientemente de si son correctas o no. Si no da tiempo de acabarlo en clase se mandará como tarea.

6.7.2. Sesión 2: Cálculo de derivadas.

En esta sesión se practicará el cálculo de las derivadas. Al comienzo de la clase se repartirá una hoja con las derivadas más comunes: constante, recta, polinómica de grado n , trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. También deben de estar incluidas las derivadas de los resultados operativos de una función: constante por función, suma, producto y cociente de funciones.

- Recurso: tabla con las derivadas de las funciones más comunes y las derivadas de los resultados operativos.

La primera parte de la clase se dedicará a explicar cada una de las entradas de la tabla, dedicando más tiempo a las que tienen una dificultad mayor. Es recomendable apoyarse en las TICs para representar las ecuaciones estudiadas y sus ecuaciones derivadas, de esta manera se puede resaltar la importancia del signo de la derivada con las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función.

- Recurso: TICs para representar funciones y sus derivadas. Por ejemplo, con el programa GeoGebra.

En la segunda parte de la clase se plantearán actividades para practicar el cálculo de derivadas.

→ Actividad 1: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x + 3$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 8}{x \cdot \sqrt{x}}$

→ Actividad 2: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x \cdot \cos x$

b) $f(x) = \frac{\log_2 x}{2^{x+4}}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = (\arcsen x)(x - 3)$

e) $f(x) = \frac{\arcsen x}{\cos x}$

f) $f(x) = \frac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

Se mandará como tarea para casa los ejercicios que no sean acabados en clase. Como el objetivo es familiarizarse con el cálculo de derivadas, es recomendable mandar actividades, semejantes a las anteriores, para practicarlos en casa.

6.7.3. Sesión 3: Regla de la cadena y ejercicios.

En esta sesión se comenzará con la corrección de las actividades de la sesión 2 y la resolución de posibles dudas.

Después, se procederá a la explicación de la regla de la cadena con algunos ejemplos.

El resto de la sesión, que debe de ser la mitad aproximadamente, se dedicará a actividades para practicar el cálculo de derivadas. Estas han de realizarse de manera participativa, bien con una consulta continua por parte del profesorado hacia la clase, o con una persona del alumnado en la pizarra siempre guiada por la figura docente.

Las actividades a realizar serán del tipo siguiente:

→ Actividad 1: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{7 \cdot \ln x}$

c) $f(x) = tg^3 x^2$

d) $f(x) = \arctan \frac{x^2}{3}$

e) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

f) $f(x) = \ln(\sen x^2)$

g) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

h) $f(x) = \ln(x \cdot e^{-x})$

i) $f(x) = \log(\tan x)^2$

j) $f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

En algunas de las derivadas de la actividad hay que hacer notar que es más fácil se operamos para reducir los cálculos.

Como tarea para casa se pueden mandar ejercicios semejantes al anterior.

De cara a la siguiente sesión le mandaremos, mediante la plataforma digital que se use normalmente, un vídeo explicativo de la definición de derivada que deberán ver antes de la siguiente sesión.

- Recurso: vídeo de la plataforma YouTube sobre la obtención de la derivada a partir de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto (link: <https://youtu.be/57IlIc7P8e8?t=405> desde el minuto 6:45 al 15:20)

6.7.4. Sesión 4: Definición de derivada.

La primera parte de la sesión 4 la dedicamos a la resolución de dudas sobre los ejercicios de la clase anterior. Para comprobar el grado de comprensión del alumnado sobre los contenidos impartidos hasta ahora, incluido el vídeo que se mandó ver en la sesión anterior, se hará un cuestionario de manera grupal y digital, gracias a la herramienta Kahoot que contenga preguntas como las mostradas en la actividad 1.

- Recurso: cuestionario digitalizado en la plataforma Kahoot sobre la comprensión de las derivadas.

→ Actividad 1 (dentro de Kahoot): Contesta a las siguientes preguntas sobre derivadas:

1. La derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto.

Opciones: Verdadero/Falso.

2. $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

Opciones: Verdadero/Falso.

3. Si $f'(-4) > 0$, entonces f es creciente en el punto $x = -4$.

Opciones: Verdadero/Falso.

4. Las derivadas de las funciones $f(x) = 5x^2$ y $g(x) = 5x^2 + 8$ son iguales para cualquier punto x .

Opciones: Verdadero/Falso.

5. La derivada de la función $f(x) = xe^2$ es igual a:

Opciones: $f'(x) = 2xe$ / $f'(x) = e^2 + 2xe$ / $f'(x) = e^2$ / $f'(x) = 0$.

En este ejercicio se debe de dar un tiempo de respuesta considerable, que permita pensar la respuesta. Después de cada cuestión y antes de mostrar la respuesta se debe

de plantear la cuestión a la clase y, en caso de que haya diversidad de respuestas, se deben de argumentar, favoreciendo que haya un pequeño debate. Se puede incluso animar al alumnado a reforzar sus explicaciones haciendo uso de la pizarra o los programas de representación gráfica en la pizarra digital.

En la segunda mitad de la sesión, se repasan brevemente los contenidos del vídeo para asegurarnos de que quedan claros los contenidos sobre la definición de la derivada a partir de la fórmula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Acto seguido, se procede a demostrar, con la fórmula anterior, algunas de las derivadas que se han estado practicando en las sesiones 2 y 3. Para ello se pueden realizar las siguientes actividades, la primera en clase de forma conjunta entre docente y alumnado, y la segunda para entregar:

→ Actividad 1: Demuestra, mediante la fórmula de la definición de la derivada que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es igual a $f'(x) = 2x$.

→ Actividad 2: Elige una función de la tabla de las derivadas más comunes y demuestra que su derivada coincide con la de la tabla.

Para la actividad 2 se le pedirá al alumnado que nos muestre la derivada elegida para asegurar que la demostración no exige conocimientos fuera de su alcance. Además, se debe de insistir en que los problemas que se les planteen en el desarrollo del ejercicio los consulten con la persona docente y hagan análisis de los puntos de bloqueo.

6.7.5. Sesión 5: Puntos singulares y recta tangente.

En la primera media hora de la sesión explicaremos lo que son los puntos singulares de una función y como obtenerlos. Tanto en una función en todo $\mathbf{R}$ como cuando ésta se define en un intervalo. Es recomendable ayudarse de las TICs y representar, por ejemplo, en la misma gráfica la función y su derivada. Se puede mostrar así que los puntos de corte con el eje de abscisas de la derivada corresponden a los puntos singulares de la función.

· Recurso: programa Geogebra para representar una función y su derivada conjuntamente.

Se harán un par de ejercicios como ejemplo de hallar los puntos singulares de una función.

La segunda mitad de la clase se dedicará a calcular la ecuación de la recta tangente a una función en un punto. Esto debe de hacerse mediante la resolución de ejemplos. Se deben de incluir las rectas tangentes de pendiente 0 para que se aprecie la relación entre la primera parte de la clase y esta segunda.

El tiempo restante de la clase se dedicará a la resolución de ejercicios en los que se aplique lo dado en esta sesión. Algunos de ellos se mandarán como tarea para casa. Los ejercicios deben de ser del tipo:

→ Actividad 1: Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la ecuación $y = x^4 - 2x - 3$ en los puntos de abscisa -1, 0 y 2.

→ Actividad 2: Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x$ cuya pendiente sea 3.

→ Actividad 3: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

→ Actividad 4: Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 2$, se traza la cuerda que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

→ Actividad 5: Mercedes quiere pasarle una pelota a Juan por encima de una pared. Lanza la pelota y ésta describe una trayectoria dada por la ecuación $f(x) = -5x^2 + 10x$ definida entre Mercedes, $x = 0$, y Juan $x = 2$. ¿Qué altura máxima debe de tener la pared para que Mercedes pueda pasar por encima la pelota?

Recomendaciones: Haz un dibujo de la situación del problema. Haz las consideraciones que creas necesarias siempre que estén razonadas.

Este último ejercicio permite acercar a alumnado a una situación contextualizada y ver la relación de las derivadas con la realidad. Además, se le da cierta libertad para que razone sobre el problema y pueda hacer ciertas consideraciones. Las consideraciones que se espera que el alumnado haga son del tipo: se considera el suelo en el eje de abscisas o la pared debe de estar situada en el punto de máxima altura.

En la Actividad 5 se tratan contenidos de la asignatura de Física y Química de forma transversal. Como propuesta de mejora, se propone ponerse de acuerdo con la persona docente de esta asignatura para adaptar la actividad y su presentación a los contenidos de la misma, de manera que el alumnado sea consciente de la relación entre ambas.

6.7.6. Sesión 6: Guerra de funciones. Actividad grupal.

Durante esta sesión se desarrollará una actividad en grupo. Al comienzo de la clase se dividirá al alumnado en grupos de 3 a 4 personas y cada grupo deberá de tener un grupo contrincante del mismo número de personas. Esta división la dirigirá la persona docente favoreciendo la diversidad en la formación de grupos. Como resultado se tendrán 3 parejas de grupos. La distribución de mesas en la clase debe de favorecer la comunicación entre grupos contrincantes de manera frontal, por tanto, se dispondrán las mesas de 3 isletas y cada grupo se situará en un lado de la isleta. La organización de la clase no debe de durar más de 10min, en caso de que se prevea que durará más de ese tiempo, la división de grupos la puede hacer la persona docente antes de la sesión.

A continuación, se expondrá la actividad y se presentará el plan de clase para la misma:

→ Actividad 1: Vamos a librar una batalla en 2 dimensiones entre dos mundos con una extensión de 15×15 unidades (Figura 8). Hemos conseguido infiltrar una función espía en el mundo bi-dimensional del enemigo, pero tenemos noticias de que en nuestro mundo también hay una función malvada. Para evitar conflictos de una mayor magnitud, hemos hecho un pacto con el enemigo con las siguientes reglas:

- a) Cada contrincante disparará rectas mágicas por turnos desde el centro de su mundo para descubrir la función enemiga.
- b) Cada recta tiene el poder de interaccionar con la función enemiga en los puntos de intersección con la misma.
- c) Cuando la recta mágica interaccione con la función enemiga, el contrincante deberá de darnos los puntos de intersección y el valor de la derivada de su función en esos mismos puntos.

Ganará la batalla quien antes descifre la ecuación de la función enemiga oculta.

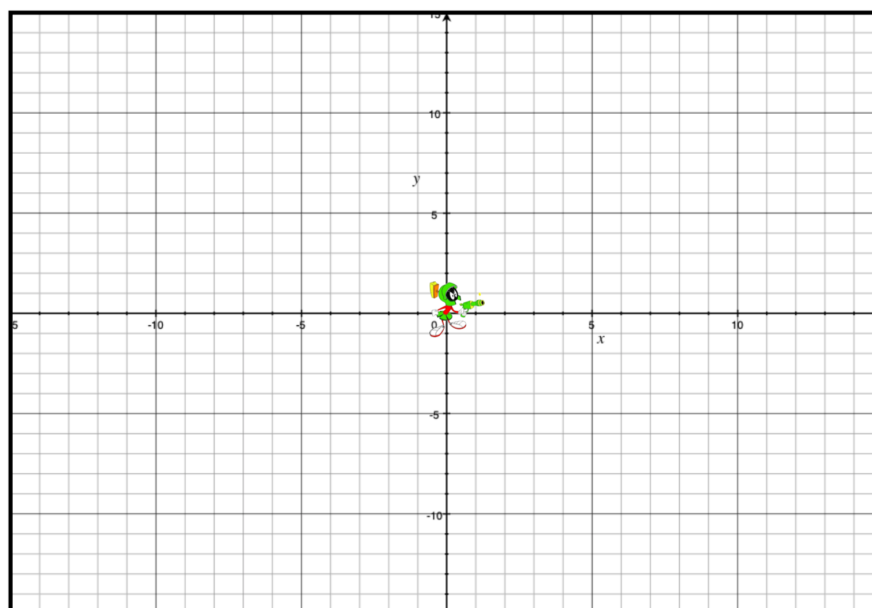


Figura 7- Mapa para actividad grupal.

El plan de clase para esta actividad se puede estructurar en 3 puntos:

1. **Presentación:** A cada grupo se le proporciona un mapa vacío (Figura 8) y un mapa con una función dibujada y la ecuación correspondiente. Este segundo mapa es el de la función que tiene que descifrar el equipo contrario. La complejidad de todas las funciones en juego debe de ser similar para evitar favorecer a ningún equipo. La actividad comienza con la lectura del enunciado por parte del alumnado. A continuación, se explica brevemente el ejercicio y se resuelven las posibles dudas que puedan surgir. La elección del primer turno se hace al azar.
2. **Desarrollo del juego:** Durante el principio del juego la figura docente debe atender a todos los grupos para asegurarse de que han entendido la dinámica del juego. Si hay dudas generalizadas se harán explicaciones para toda la clase. Este tipo de dudas generalizadas pueden indicar que hay algo que no está claro en el ejercicio, por tanto, nos ayudan a hacer una autoevaluación del mismo seguido de una posible mejora para un futuro. Además, es necesario comprobar el desarrollo de las operaciones que realiza el alumnado para evitar que den resultados erróneos al equipo rival. Si algún grupo se bloquea habrá que guiarlo mediante preguntas sobre su procedimiento, de manera que sean los mismos integrantes los que se den cuenta de su punto de bloqueo y planteen una solución. Igualmente, si un grupo se centra demasiado en los cálculos se le deberá de dar un tiempo límite y pasar de turno transcurrido ese tiempo.
3. **Finalización y debate:** Cuando haya algún equipo ganador tendrá que justificar el trabajo que ha hecho para llegar a descubrir la ecuación de la función oculta. En caso

de que haya equipos que no hayan descubierto la función enemiga, se le dedicarán los últimos minutos de la clase a que cada equipo explique brevemente el procedimiento que ha seguido y las dificultades que han tenido. El objetivo es generar un pequeño debate en el que cada equipo muestre los resultados a los que ha llegado y el contrincante la corrija o valide los mismos, siempre en un marco argumentativo en el ámbito de las matemáticas. En esta última parte la persona docente deberá de actuar de mediadora, dirigiendo las argumentaciones hacia los puntos que tengan más interés como, por ejemplo, las dudas y equivocaciones más comunes entre todos los participantes.

En el Anexo 2 se puede ver un ejemplo de resolución de la actividad propuesta.

6.7.7. Sesión 7: Pre-examen.

La sesión 7 se dedicará por completo a realizar ejercicios semejantes a los que se harán en el examen de la evaluación del tema. Durante la realización de esta prueba la persona docente estará a disponibilidad de resolver dudas sobre los ejercicios. Al ser una prueba no evaluable, se pueden ayudar a resolver algunos ejercicios si el alumnado está bloqueado y resolviendo las dudas de teoría que no puedan resolver por sí mismo, no obstante, es recomendable siempre no dar una respuesta directa a las preguntas que hagan, si no guiarlos para que ellos y ellas mismas lleguen a resolver su propia duda. La dificultad de esta prueba debe de dar al alumnado una idea de cómo será el examen evaluable del tema, a su vez, la persona docente puede extraer información sobre el nivel de aprendizaje que se ha alcanzado durante el tema. Esto será de utilidad para definir la prueba final y/o reforzar los contenidos en los que se vea un menor dominio. Para esto último se usará la próxima sesión.

El pre-examen deberá llevar, al menos, los siguientes contenidos:

- Un ejercicio de cálculo de derivadas.
- Uno o varios ejercicios de representación de funciones. En estos ejercicios se puede hacer uso de lo aprendido en la unidad de límites.
- Uno o varios problemas de optimización. Esto serán los ejercicios de mayor dificultad del pre-examen ya que, no solo se usan los contenidos, también se deben de aplicar a una situación concreta.

Un ejemplo de pre-examen puede ser el siguiente:

→ Actividad 1: Calcula las derivadas de las siguientes funciones: (las funciones deberán de ser similares a las de la Actividad 1 de la Sesión 3). (1 punto)

→ Actividad 2: Analiza y representa la función $f(x) = 3 - (x + 2)^3$. (2 puntos)

→ Actividad 3: Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \tan x$ en el punto $x = \frac{3\pi}{4}$. (2 puntos)

→ Actividad 4: De todos los rectángulos de perímetro 46cm, halla las dimensiones del que tiene mayor superficie. (2,5 puntos)

→ Actividad 5: Un banco ha analizado las variaciones en la bolsa y ha lanzado un plan de inversión que tiene una rentabilidad R en función de la cantidad invertida x (en €) dada por la ecuación $R(x) = -0.0011x^2 + 0.8x + 2$. Los clientes conocen la ecuación de la rentabilidad y tienen que tomar la decisión de invertir. Si fueras un cliente:

- a) ¿Cuánto dinero invertirías? (1,5 puntos)
- b) ¿Cuanto ganarías con esa inversión? (1 punto)

Justifica ambas respuestas.

Se puede observar que con los conocimientos básicos ya se puede aprobar el pre-examen, estos son las 3 primeras actividades. En ellas se demuestra el conocimiento de cálculo de derivadas, representación de funciones y cálculo de recta tangente a una función por un punto. Sin embargo, se espera también que el alumnado aplique los conocimientos de las derivadas a problemas reales. Por ello, una vez cubiertos los conocimientos mínimos con las 3 primeras actividades y un peso en la nota suficiente para el aprobado, se completa el pre-examen con dos actividades de aplicación de las derivadas con un peso igual al anterior.

La corrección por la parte docente de las pruebas de pre-examen debe de hacerse para la siguiente sesión.

6.7.8. Sesión 8: Corrección del pre-examen y dudas.

Esta sesión será dedicada principalmente a la corrección del pre-examen. Debe de estar centrada en las actividades en las que el alumnado haya tenido más problemas.

Una vez que el pre-examen esté corregido. Se preguntarán dudas generales sobre el tema.

El tiempo restante de la sesión será dedicado a la realización de ejercicios. Se le preguntará al alumnado qué tipo de ejercicios quiere practicar. Si no hay una respuesta clara se deben de hacer ejercicios semejantes al 4 y 5 del pre-examen, ya que son más completos y pueden aportar ideas de cara a la resolución de los mismos en la prueba de evaluación del tema.

6.7.9. Sesión 9: Examen.

En esta sesión se realizará la prueba evaluable del tema. La estructura debe de ser la misma que la del pre-examen. Sin embargo, durante la realización del mismo no se debe dar información al alumnado sobre los contenidos del tema, solamente se hará de guía, para asegurar que el entendimiento de los ejercicios es correcto.

A diferencia del pre-examen, esta prueba si forma parte de la evaluación del alumnado.

6.8. Atención a la diversidad

Es mucha la diversidad de estudiantes que pasan por una asignatura, tanto en un año como a lo largo del tiempo. Por esto mismo, el currículum de una asignatura debe de estar diseñado para posibilitar adaptaciones del mismo a casos en los que el alumnado requiera necesidades especiales. A continuación, veremos algunos casos de adaptaciones curriculares de la unidad didáctica de las derivadas.

6.8.1. Alumnado con necesidad de refuerzo.

A veces, por diversos motivos, parte del alumnado tiene un nivel de conocimiento más bajo que el resto de la clase sobre y existe la posibilidad de que no sigan con facilidad el ritmo de las sesiones. En este caso, la persona docente debe de adaptar las actividades para que este tipo de alumnado no se descuelgue de las clases. Concretamente en la unidad de las derivadas, esta adaptación consistirá en adaptar las actividades de manera que el alumnado con necesidad de refuerzo consiga, como mínimo, los conocimientos básicos del cálculo de derivadas, dándole prioridad a éstos sobre los problemas de aplicación. Es decir, las sesiones se podrían modificar de la siguiente manera:

- Sesiones 1, 2 y 3: el objetivo primario que se pretende del alumnado con necesidades de refuerzo es que maneje el cálculo de derivadas. Para ello conviene centrarse durante el tema, en primera instancia, en ejercicios similares a los de estas sesiones. Si es necesario se reducirá la dificultad de las actividades a un nivel adecuado para este tipo de alumnado.
- Sesión 4: se le puede plantear una actividad como la Actividad 2 (calcular la expresión de una derivada a partir de su definición) con una función sencilla, para que conozca el origen de la expresión de la derivada de una función.
- Sesión 5: Para las actividades de esta sesión, se le puede entregar una guía para que el alumnado siga las instrucciones de lo que le pida el problema, por ejemplo:

→ Actividad 3: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

Guía para la resolución:

- Para hallar la ecuación de la recta tangente $r(x) = mx + c$ necesitamos saber la pendiente m y el término independiente c . Si es paralela a la recta dada por la ecuación, tiene la misma pendiente. Calcula la pendiente de la recta dada. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente que buscamos?
- La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto. Es decir: $f'(x) = m$. ¿En qué punto de $f(x)$ la pendiente es igual a m ? Lo llamaremos p .
- Ya tenemos identificado el punto p , donde la recta es tangente a la función, es decir $f(p) = r(p)$. Resolviendo esta igualdad, halla el término independiente c de la ecuación de la recta tangente $r(x) = mx + c$.

Para las actividades con más dificultad, como las 4 y 5, se le puede dar un dibujo aclarativo y las unas instrucciones como las anteriores si fuera necesario. Estas instrucciones no tienen que ir escritas necesariamente, si existe la posibilidad, se puede guiar al alumnado directamente mientras hace el ejercicio y se pueden usar las TICs como ayuda a la hora de visualizar las funciones, si se piensa que esto resultará de ayuda.

- Sesión 6: en la sesión de trabajo en grupo el objetivo será integrar lo máximo posible a este tipo de alumnado. La manera de hacerlo será organizando las tareas de tal manera que el alumnado con necesidad de refuerzo realice aquellas tareas que se sabe que puede hacer sin problema, por ejemplo, los cálculos de las derivadas. También se puede facilitar la actividad de este alumnado otorgando funciones más sencillas a los grupos donde se vea implicado, de esta manera habrá más posibilidades de que sigan el juego.
- Sesiones 7, 8 y 9: En cuanto al pre-examen y examen, habrá que dar más peso a los ejercicios sobre cálculo de derivadas, Actividades 1, 2 y 3, sobre los de aplicación de derivadas. Si es necesario, se puede hacer un examen especial que contenga este tipo de ejercicios.

6.8.2. Alumnado con altas capacidades.

Para el alumnado que tiene unas capacidades para nuestra asignatura por encima del resto de la clase se puede aumentar la dificultad de las actividades propuestas e incluir nueva materia, todo con el objetivo de que este tipo de alumnado no pierda el interés en las clases debido al bajo nivel de dificultad que le puede suponer.

Durante en el transcurso de las sesiones se le pueden dar actividades que impliquen una mayor dificultad, ya sean adicionales o en sustitución de algunas de las que se imparten al resto.

Por ejemplo, se le pueden presentar actividades del tipo:

- Actividad 1: Prueba que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.
- Actividad 2: Halla las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y estudia la posición de la curva con respecto a ellas. Calcula los puntos singulares y representa la función.
- Actividad 3: Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 2x^2 - 3x - 2$ en el punto $x = 2$.
- Un agricultor calcula que, si la recogida de tomates la realiza hoy, obtendrá 120Tm y podrá vender a 150€/Tm. Sin embargo, si espera un tiempo, la cosecha aumentará en 20Tm por semana, pero el precio disminuirá en 15€/Tm a la semana. ¿Cuánto debe de esperar para sacar el máximo beneficio?
- En una lámina de cartón de $12.96dm^2$, halla el lado del cuadrado que hay que cortar a sus esquinas para formar una caja con volumen máximo.

A su vez, en la sesión 6, donde se trabaja en grupo, se puede aumentar la dificultad de la función que debe descubrir el equipo que tiene a este tipo de alumnado como integrante, siempre que no se perjudique al resto de integrantes. Sería recomendable que el resto de los compañeros del grupo tuvieran un buen nivel de conocimiento de las matemáticas, de manera que ninguno tenga dificultades para seguir el juego.

Adicionalmente, se pueden dar contenidos adicionales sobre la materia, como la regla de L'Hôpital o la clasificación de los puntos singulares a partir de la segunda derivada. Si esto supone un problema en la organización de las sesiones, se puede hacer de forma digital, seleccionando y comunicándole contenidos que pueda trabajar en casa y atendiendo a las dudas que tenga durante las sesiones. De manera semejante a como se hace cuando aplicamos la metodología de la clase invertida.

6.8.3. Alumnado con dificultades en la interacción social.

El diseño de esta unidad didáctica está fuertemente ligado a una alta participación por parte del alumnado. Ésta se llevará a cabo mediante pequeños debates, preguntas de la persona docente o actividades en grupo. La posible diversidad que puede existir en el aula con respecto al grado de desarrollo de habilidades sociales o patologías que supongan una mayor dificultad en la interacción social, hace que sea necesario un plan

de acción específico. A continuación, se exponen las pautas que se deben de seguir en estos casos:

- Preguntarle de manera que no se vea forzado/a dar una explicación delante de la clase, guiando la pregunta y facilitándole respuestas cortas.
- Incluir más actividades, como el Kahoot, en las que no se necesite una intervención directa, si no mediante un recurso digital.
- Si es necesario, hablar con él/ella para dejarle claro que no debe de exponerse a salir a la pizarra o presentar un ejercicio si él/ella no quiere.
- Adaptar los debates que puedan surgir en clase a medios digitales, de esta manera el alumnado con estas características podrá participar en un ambiente más cómodo.
- En la sesión 6, la actividad grupal, formar los equipos de manera que esté rodeado/a de la gente con la que más confianza tiene.
- Poner a disposición un correo electrónico de la persona docente y animar a la clase a preguntar dudas mediante el mismo.

Como se puede ver, el uso de las TICs puede ser una herramienta muy útil para las personas que tienen más dificultad de establecer relaciones sociales.

6.9. Evaluación

La evaluación del aprendizaje debe de dar una idea realista del éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje. No solo debe de ser una herramienta que mida los conocimientos adquiridos por parte del alumnado, también debe de ser una herramienta de estudio por la parte docente que le haga preguntarse es qué medida es responsable del resultado de una evaluación al alumnado. La respuesta a esta pregunta puede ser una oportunidad para revisar y mejorar las metodologías usadas.

6.9.1. Contenidos de la evaluación

Los contenidos objeto de evaluación de la unidad de derivadas han sido definidos en base a los criterios de evaluación publicados en la Orden del 14 de julio de 2016 del BOJA del Bloque I y III de la asignatura de Matemáticas 1 y atendiendo a los estándares de aprendizaje publicados en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre del BOE. Los contenidos evaluables (CE) han sido basados en los objetivos de la unidad didáctica (OB) y serán evaluados de en concordancia a los criterios y estándares publicados en los documentos citados. De esta manera se asegura que la evaluación del alumnado está fuertemente ligada a la consecución de los objetivos:

CE1: Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.

CE2: Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

CE3: Utiliza medios tecnológicos como una herramienta de apoyo para representaciones gráficas de funciones y extrae información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

CE4: Identifica gráficamente la derivada de una función y reconoce los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

CE5: Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados.

CE6: Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

CE7: Realiza la demostración de la derivada de una función sencilla a partir de su definición y sabe plantear la demostración para funciones más complejas.

CE8: Sabe calcular la recta tangente a una función en un punto a partir de su derivada.

CE9: Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

CE10: Calcula la derivada de una función y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.

CE11: Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

CE12: Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

Una vez definidos estos contenidos evaluables se puede hacer una tabla para tener un control de los objetivos que ha cumplido el alumnado en base a la evaluación, como se muestra en la Tabla 1:

	OB1	OB2	OB3	OB4	OB5	OB6	OB7
CE1							
CE2							
CE3							
CE4							
CE5							
CE6							
CE7							
CE8							
CE9							
CE10							
CE11							
CE12							

Tabla 1 - Evaluación de los contenidos en base a los objetivos.

6.9.2. Procedimiento de evaluación

La evaluación del alumnado se estructura de la siguiente manera:

- **Participación 20%.**

Dentro de este apartado se deben de tener en cuenta aspectos como la participación en las clases, la argumentación y el rigor matemático usado en sus explicaciones o en los debates que se generen, el respeto con el que se dirija al profesor y al resto de la clase, las dudas que se le consulten a la persona docente, etc. Si parte del alumnado tiene más reticencia a ser participativo se deberá de fomentar su participación y evaluarlo teniendo en cuenta sus características personales. En definitiva, se pretende evaluar el interés que muestre el alumnado por la asignatura.

Se valorará positivamente que el alumnado haga uso de las TICs durante las explicaciones o en la resolución de ejercicios.

En este apartado se tendrá en cuenta también la asistencia a las clases.

- **Actividades 20%.**

En este apartado se evaluarán las actividades que la persona docente mande para ser entregadas. Por ejemplo, la actividad 2 de la sesión 4. En la evaluación de las actividades debe de primar el procedimiento seguido por delante del resultado obtenido. Si un ejercicio no queda totalmente resuelto pero el alumnado es capaz de identificar el punto de bloqueo y expresarlo de forma clara la persona docente debe de valorarlo positivamente.

También se evaluará dentro de este apartado el trabajo continuo en los ejercicios que se desarrollen en clase y en casa.

- **Trabajo en grupo 10%.**

La evaluación del trabajo en grupo se centrará en la sesión 6. En el desarrollo de la actividad grupal se valorará positivamente el interés en la misma, la argumentación tanto de dudas existentes como de resultados obtenidos y, por último, el resultado obtenido. Al igual que en la participación en clase, el principal objetivo es evaluar tanto el interés mostrado como la justificación del trabajo con un cierto rigor matemático.

Otros aspectos a tener en cuenta para evaluar positivamente la actividad es el respeto a los compañeros del mismo grupo y del grupo contrincante.

- **Examen 50%.**

En el examen evaluable de la asignatura se deben de mostrar los contenidos impartidos durante todo el tema. Este examen tendrá una estructura similar a la del pre-examen realizado en la sesión 7. Por tanto, habrá una parte que evalúe los contenidos matemáticos dados, con la que se podrá aprobar. Y otra parte que evalúa la aplicación de los contenidos a situaciones contextualizadas en situaciones reales.

La repartición de pesos entre el examen y las demás partes de la evaluación continua tiene el objetivo de no cerrar la posibilidad de que parte del alumnado quiera, por los motivos que sea, hacer uso únicamente del examen. Por otro lado, si parte del alumnado ha estado participando activamente en la asignatura, pero por alguna razón obtuviese una calificación muy baja en el examen, esta manera de evaluar le permitiría aprobar la unidad. No obstante, lo que se espera del desarrollo de la unidad es que el alumnado se implique en la asignatura consiguiendo parte de la nota de la participación, actividades y trabajo en grupo y, habiendo trabajado la unidad de esta manera, no tenga problema en obtener buena calificación en el examen.

7. Conclusiones

Con el presente Trabajo de Fin de Master se ha pretendido tener una visión más profunda de la docencia de las matemáticas, en concreto, de la enseñanza de las derivadas. Este acercamiento a la docencia se ha producido en distintos ámbitos, marcados en gran medida por los objetivos que este trabajo y el propio master persiguen. Las principales contribuciones del Trabajo de Fin de Master sobre mi formación docente han sido:

- El conocimiento del currículum y la normativa vigente. Gracias a la repetitividad con la que hay que consultar la normativa para verificar aspectos del currículum, objetivos, metodologías, criterios de evaluación, competencias clave, etc., se adquiere una visión más estructurada de la normativa y un manejo en la búsqueda de información que, bajo mi punto de vista, es muy necesario y aplicable en el día a día de la labor docente.
- El desarrollo y adaptación de metodologías teniendo en cuenta investigaciones docentes. Las investigaciones que se nombran en este trabajo permiten dar un trasfondo más sólido a la aplicación de ciertas metodologías en el campo de las derivadas. Esto ha servido de ayuda para construir una unidad didáctica en base a algunas de esas metodologías, como puede ser la clase invertida.
- La adaptación curricular atendiendo a la diversidad. Algo que he aprendido en las prácticas docentes es que una sesión de clase no es algo que puedas tener totalmente controlado, por esto, hay que otorgar una mayor importancia a los recursos que hay detrás de esa clase para recurrir a ellos si es necesario. De la misma manera, hay que tener un bagaje de recursos para poder afrontar una clase atendiendo a la diversidad del alumnado. Me ha parecido muy interesante este ejercicio de adaptación de la unidad, especialmente en el caso de alumnado con dificultades en la interacción social, ya que la unidad desarrollada está bastante centrada en la participación del alumnado y el trabajo en grupo.

Por otro lado, la mayor limitación del presente trabajo está en su aplicación en el aula. Me hubiera gustado poder aplicar la unidad didáctica desarrollada para comprobar ciertos aspectos de la misma. El más importante, bajo mi punto de vista, es el hecho de trabajar el cálculo de derivadas antes de la definición de derivada. Este orden de los contenidos no es el usual en los libros de texto, sin embargo, como se explica en el apartado de metodología, considero que para el alumnado es más fácil entender la definición de derivada si antes ha trabajado los ejercicios de cálculo de derivadas y tiene una intuición sobre su significado.

Para concluir, la realización del master y del presente trabajo es una experiencia totalmente necesaria que requiere de la adquisición de numerosos recursos. Conocer la existencia de estos recursos es una herramienta indispensable que debe de respaldar el trabajo de un buen docente.

8. Referencias bibliográficas

- [1] Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, BOE, 312, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.
- [2] González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.
- [3] Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- [4] Orden de 14 de julio de 2016, BOJA, 145, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.
- [5] Ruiz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47(3).
- [6] Ruiz de Gauna, J. R. , Dávila, P., Etxeberria, J., Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2013), 16(2),245-276.
- [7] Orden de 9 de septiembre de 1993, BOE, 226, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio.
- [8] Suzuki, J. (2005). The lost Calculus (1637-1670): Tangency and optimization without limits. *Mathematics Magazine*, 78(5), 339-340.

- [9] Martínez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. *Suma+*, 61, 7-15.
- [10] Salas-Rueda, R.A., & Lugo-García, J.L. (2019). Impacto del aula invertida durante el proceso educativo superior sobre las derivadas considerando la ciencia de datos y el aprendizaje automático. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, 8(1), 147-170, doi: <https://doi.org/10.21071/edmetic.v8i1.9542>
- [11] Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM
- [12] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, BOE, 3, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato
- [13] Khan Academy en Español. (2017). *La derivada como pendiente de una curva* [Video]. Recuperado de <https://youtu.be/w8hOoHjKo60>
- [14] Matemáticas sencillas. (2015). *Derivadas de una función: definición, significado e interpretación geométrica. Cálculo Diferencial* [Video]. Recuperado de: <https://youtu.be/57llc7P8e8?t=405>

9. Anexos

9.1. Anexo 1

Imágenes del enunciado:

Ecuaciones

$$y=e^{2x}$$

$$y=(x+3)^2-1$$

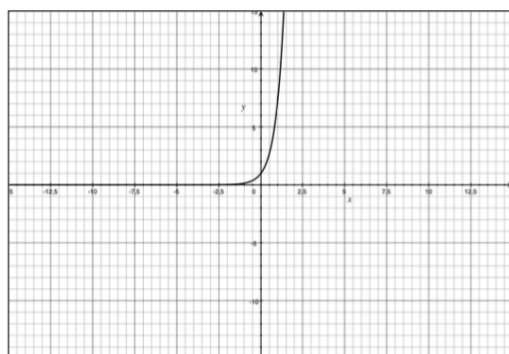
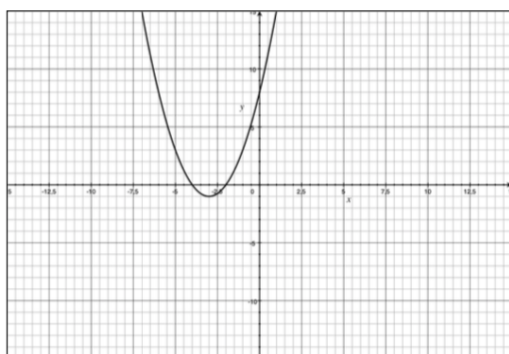
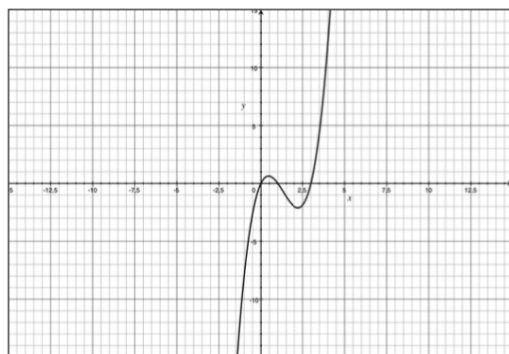
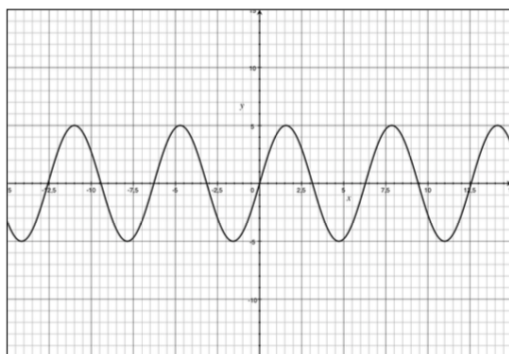
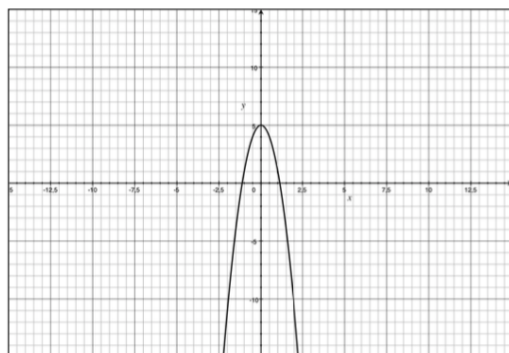
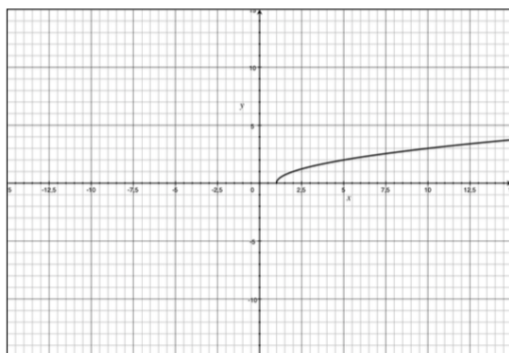
$$y=(x-1)^3-x^2+1$$

$$y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

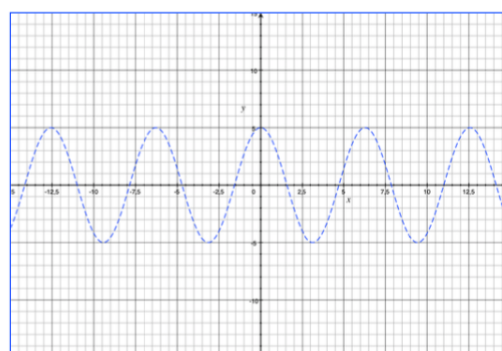
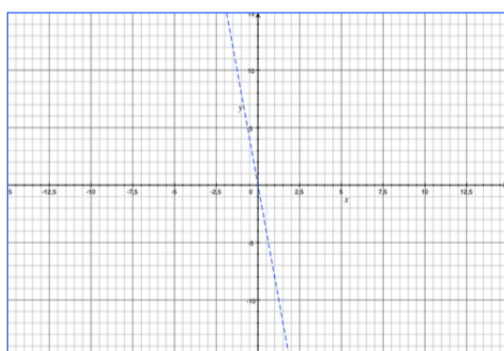
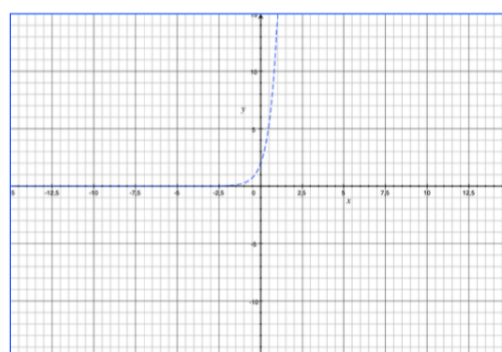
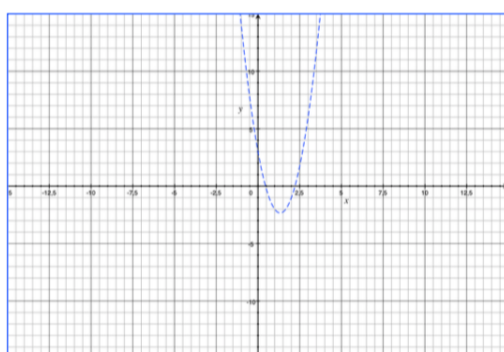
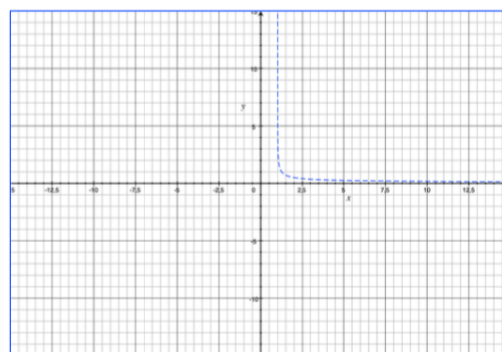
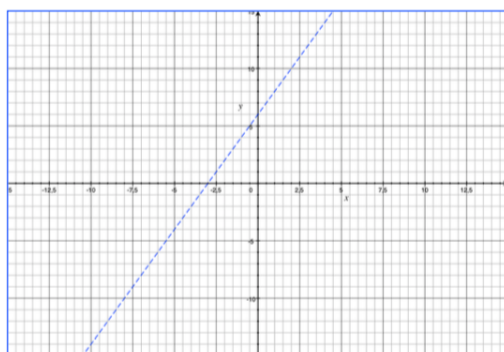
$$y=5\sin(x)$$

$$y=-4x^2+5$$

Representación gráfica de funciones

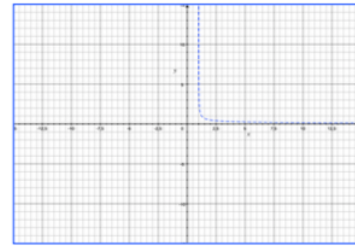
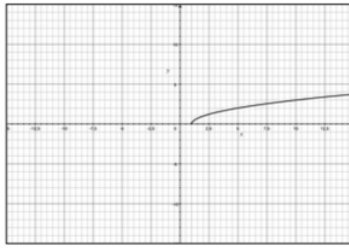


Representación gráfica de las derivadas

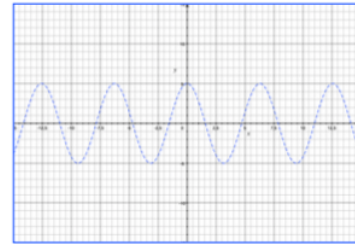
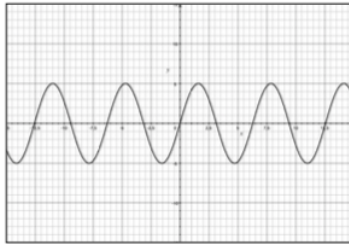


El ejercicio resuelto sería el siguiente:

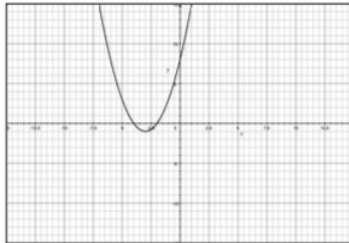
$$y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$$



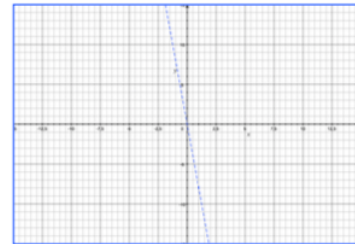
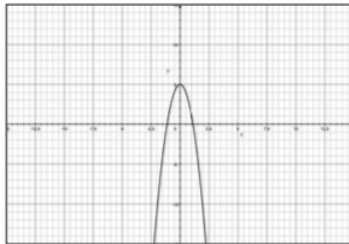
$$y=5\sin(x)$$



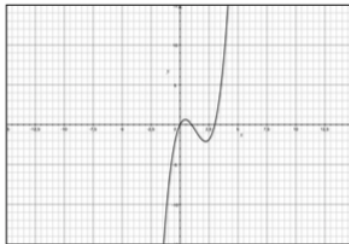
$$y=(x+3)^2-1$$



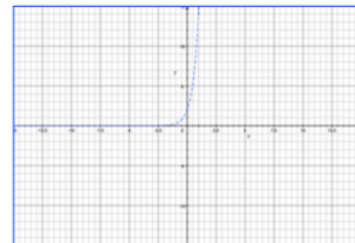
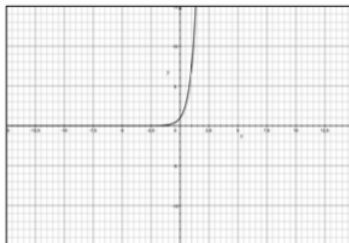
$$y=-4x^2+5$$



$$y=(x-1)^3-x^2+1$$



$$y=e^{2x}$$



9.2. Anexo 2

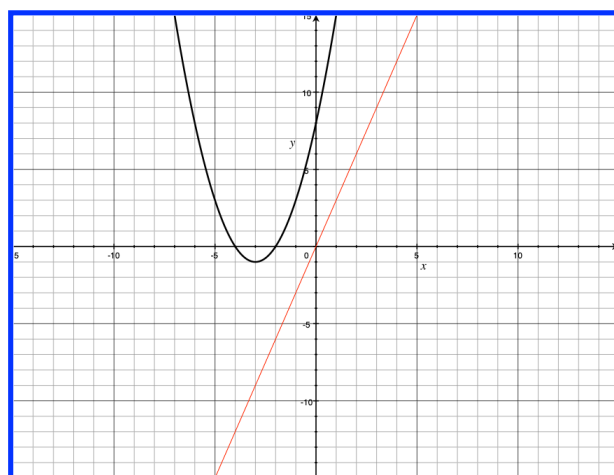
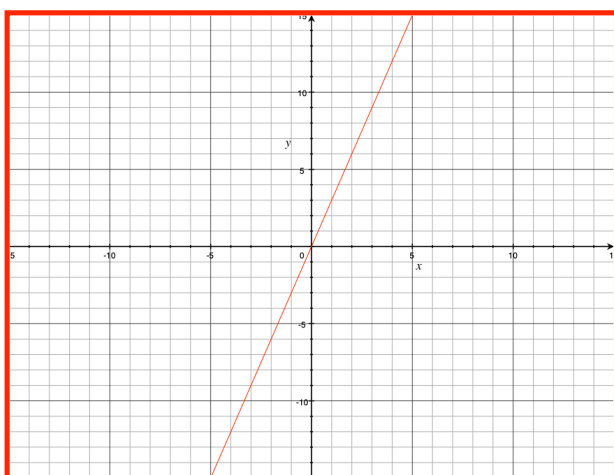
Para la segunda parte de la tarea nos pondremos en el punto de vista de un bando (equipo A) y describiremos la solución que corresponde al descubrimiento de la función oculta del equipo contrincante (equipo B). Recuadrado en rojo estará el mapa del equipo A y en azul el del equipo B. La ecuación de la función del equipo B es la siguiente (estas funciones se las proporcionamos nosotros a cada grupo junto con su representación en el mapa):

$$y = (x + 3)^2 - 1$$

Este dato, por supuesto, solo lo conoce el equipo B y conocerlo es el objetivo del equipo A.

Comenzaría el juego:

Turno 1 - Equipo A. Disparamos la primera recta: $y = 3x$

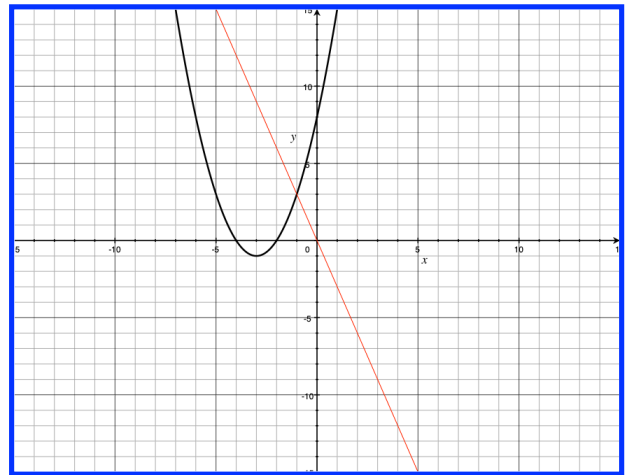
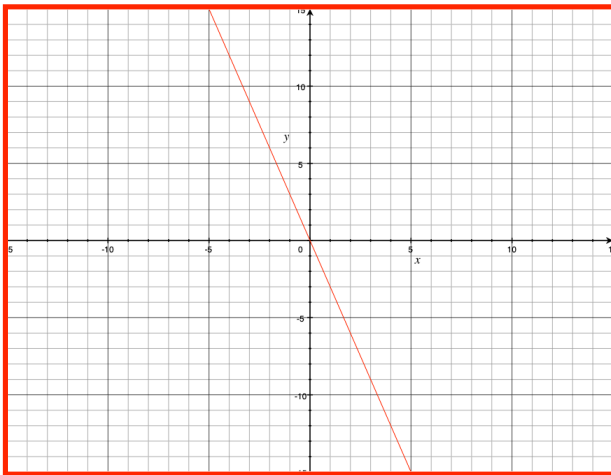


Vemos que no interseca con la función del equipo B, por tanto, este no tiene que dar ningún dato. Para verificarlo, el equipo B puede igualar la ecuación de la recta lanzada con la ecuación de su función y verán que no hay solución real:

$$3y = (x + 3)^2 - 1$$

Turno 1 - Equipo B. Ahora el equipo B haría el mismo procedimiento y nosotros comprobaríamos si su recta interseca nuestra función y le daríamos los datos correspondientes, pero para no ser redundantes vamos a solucionar solo la parte en la que el equipo A lanza rectas para descubrir la función del equipo B, la otra parte sería análoga.

Turno 2 - Equipo A. Disparamos la segunda recta: $y = -3x$



Ahora nuestra recta intersecta a la función del equipo B en un punto (dentro del mundo de 15x15). Por tanto, el equipo B nos tiene que dar el punto de intersección y la derivada en ese punto. El equipo B tendría que proceder de la siguiente manera:

- Calcular el punto de intersección con la recta lanzada igualando las dos ecuaciones y resolviendo la resultante:

$$-3y = (x + 3)^2 - 1$$

Al resolver comprobamos que las funciones intersectan en dos puntos:

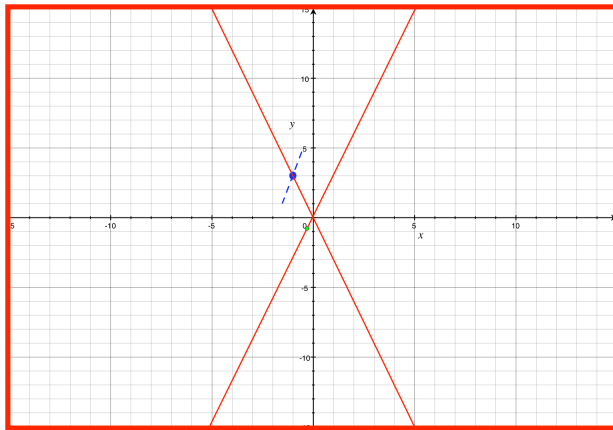
$$y(-8) = 24 \quad \rightarrow y(-1) = 3$$

El punto señalado con la flecha es el que se encuentra dentro del dominio 15x15. Este sería uno de los datos que nos tendría que dar el equipo B. El otro dato sería el valor de la derivada en ese punto. Por tanto, el equipo B tendría que calcular la función derivada de la función $y = (x + 3)^2 - 1$ y sustituir el punto de intersección con nuestra recta:

$$y' = 2x + 6 \quad \rightarrow y'(-1) = 4$$

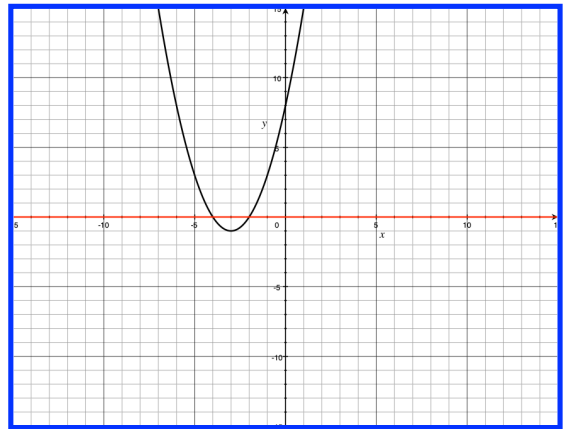
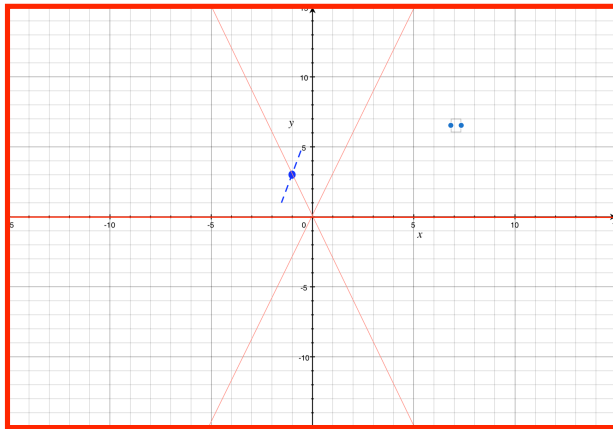
En definitiva, el equipo B tendría que informarnos de que nuestra recta intersecta a su función oculta en $y(-1) = 3$ y el valor de su derivada (es decir, su pendiente) en ese punto es 4.

Con estos datos, nosotros, el equipo A, podemos dibujar en nuestro mapa algo como lo siguiente:



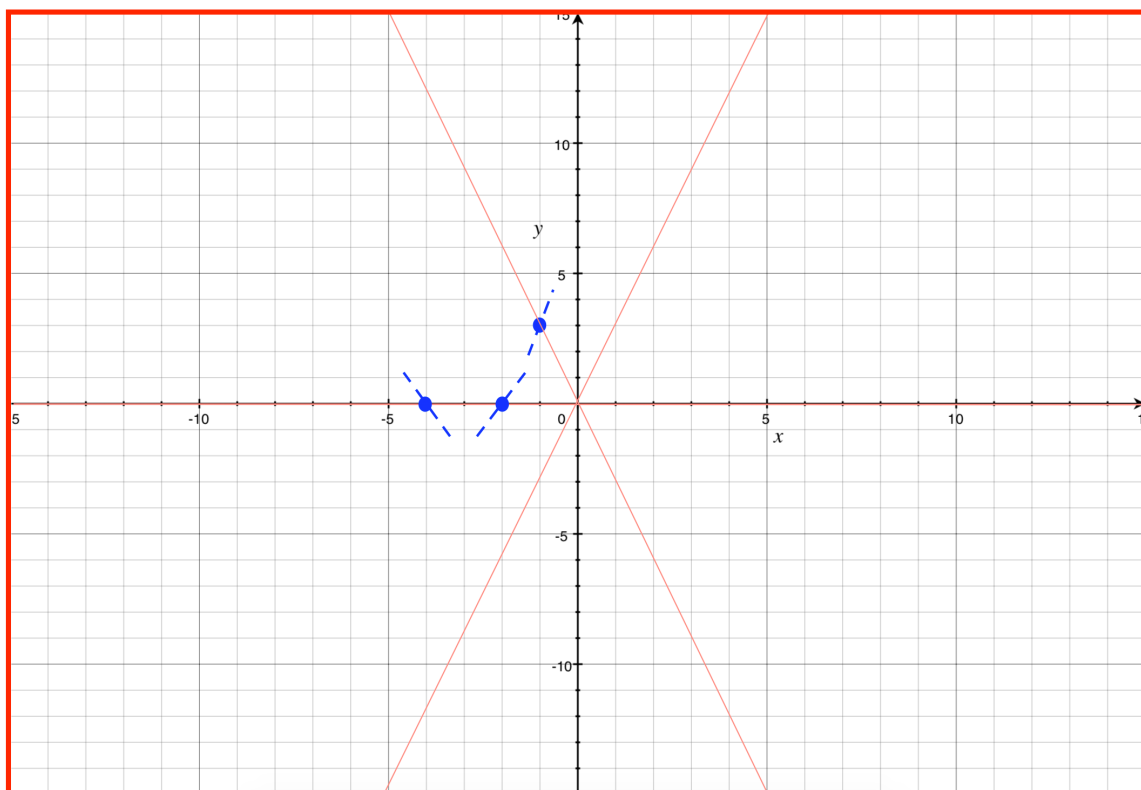
Donde se puede sacar información del punto por el que pasa la función y la tendencia que lleva. Incluso, si superponemos las dos rectas que hemos trazado sabemos que no puede intersectar a la primera.

Turno 2 - Equipo B. (se haría de forma análoga).



Turno 3 - Equipo A. Disparamos una tercera recta: $y = 0$.

Con esta tercera recta el equipo B haría el mismo procedimiento y los datos que tendría que darnos serían los puntos de corte en $y(-4) = 0$ y en $y(-2) = 0$ con el valor de sus derivadas $y'(-4) = -2$ y $y'(-2) = 2$, respectivamente. Por tanto, en el equipo A podemos dibujar toda esa información en nuestro mapa:



Aquí ya se puede intuir que la función tendrá un mínimo entre $x = 4$ y $x = -2$, ya que pasa a ser decreciente a creciente. Además, con los valores que tenemos de la función derivada se puede plantear un sistema de ecuaciones que nos dé el valor de la función derivada. Entonces, si suponemos una función derivada:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Y tenemos los siguientes datos: $y'(-1) = 4$; $y'(-4) = 2$; $y'(-2) = 2$.

Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4 = a - x + c$$

$$2 = 4a - 2b + c$$

$$-2 = 16a - 4b + c$$

Resolviéndolo podemos obtener la ecuación de la derivada $y' = 2x + 6$.

Llegados a este punto y observando la derivada, ya podemos imaginarnos que la ecuación que queremos obtener es de segundo grado, para no gastar más disparos y no darle más opciones al contrincante (porque supondría un turno más para el equipo contrario) podemos arriesgarnos y plantear un sistema de ecuaciones como el anterior sobre la función que queremos hallar y resolverlo.

Otra opción sería calcular la primitiva (para esto es posible que se necesite la ayuda del profesorado) y dejar el término independiente como incógnita de esta manera:

$$y = x^2 + 6x + A$$

A continuación, tendríamos que lanzar otra recta en $x = 0$ y despejaríamos el término independiente. Este método es más rápido, pero le concederíamos otro turno al contrincante.