



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: López García, Juan Antonio

Tutor/a: Prof. D. José Domingo Jiménez Navarro
 Prof. D. Jesús Navarro Moreno

Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2020

ÍNDICE

0.	RESUMEN Y PALABRAS CLAVES	5
0.1.	RESUMEN	5
0.2.	PALABRAS CLAVE.....	5
0.3.	ABSTRACT	5
0.4.	KEYWORDS	6
1.	INTRODUCCIÓN	6
2.	OBJETIVOS	7
3.	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	9
3.1.	ANÁLISIS DE LA UNIDAD DE TRIGONOMETRÍA	12
3.1.1.	RELACIÓN DE CONTENIDOS LIBRO-CURRICULO.....	13
3.1.2.	DESARROLLO DE CONTENIDOS EN LOS LIBROS.....	14
3.1.3.	ANÁLISIS DE COMPOSICIÓN Y CONTENIDOS.....	17
3.1.4.	ACTIVIDADES	18
3.1.5.	USO DE LAS TIC.....	20
3.1.6.	METODOLOGÍA.....	21
3.1.7.	ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	22
3.1.8.	DEMOSTRACIONES.....	22
3.1.9.	COMPETENCIAS	24
3.1.10.	CONCLUSIONES	24
4.	FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	25
4.1.	INTRODUCCIÓN	25
4.2.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO.....	26
4.2.1.	DEFINICIONES.....	26
4.2.2.	FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRÍA.....	27
4.2.3.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DE LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA.	28
4.2.4.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30º Y 60º.....	29
4.2.5.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 45º	30
4.3.	REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE	30
4.3.1.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.....	31

4.3.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN 90°	31
4.3.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS	32
4.3.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180°	33
4.3.5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO $270^\circ - \alpha$	33
4.3.6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO $270^\circ + \alpha$	33
4.3.7. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO OPUESTO $(-\alpha)$	33
4.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS SUMA, DIFERENCIA, DOBLE Y MITAD	34
4.4.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $\alpha + \beta$	34
4.4.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $\alpha - \beta$	35
4.4.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE	35
4.4.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD	35
4.5. TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS	36
4.6. RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO	37
4.6.1. TEOREMA DEL SENOS.....	37
4.6.2. TEOREMA DEL COSENO.....	38
4.7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS	40
4.7.1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	40
4.7.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS	41
4.8. APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.....	43
4.9. EXPRESIONES PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO	45
4.9.1. ÁREA DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE DOS LADOS DEL MISMO Y DEL ÁNGULO QUE FORMAN.....	46
4.9.2. FÓRMULAS DE BRIGGS.....	46
4.9.3. FÓRMULA DE HERÓN	47
4.9.4. ÁREA DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE SUS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA	47
4.9.5. ÁREA DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE SUS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA	47
4.10. UNA APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA A LOS NÚMEROS COMPLEJOS. FÓRMULA DE MOIVRE	48
5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA.....	50

5.1.	OBJETIVOS	52
5.2.	ANTECEDENTES	52
5.3.	SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO ESCOLAR.....	53
5.4.	MARCO METODOLÓGICO.....	53
5.5.	ANÁLISIS REALIZADO	55
5.5.1.	PROCEDIMIENTO, ORGANIZACIÓN E INTERPRETACIÓN DE DATOS.....	55
5.6.	RESULTADOS DEL CUESTIONARIO	59
5.6.1.	DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	59
5.7.	CONCLUSIONES	61
5.8.	OTROS ESTUDIOS DIDÁCTICOS DE LOS ELEMENTOS TRIGONOMÉTRICOS	62
5.8.1.	CONCLUSIÓN DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE MALDONADO Y MIRANDA	64
6.	UNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA.....	65
6.1.	TÍTULO	65
6.2.	JUSTIFICACIÓN.....	65
6.3.	CONTEXTO DEL CENTRO Y DEL AULA DONDE SE DESARROLLA LA UNIDAD DIDÁCTICA	66
6.4.	OBJETIVOS.....	66
6.4.1.	OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA.....	67
6.4.2.	OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS.....	68
6.4.3.	OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	69
6.5.	COMPETENCIAS CLAVE.....	69
6.6.	CONTENIDOS.....	71
6.7.	METODOLOGÍA.....	72
6.8.	ACTIVIDADES Y RECURSOS	74
6.8.1.	ACTIVIDADES	74
6.8.2.	RECURSOS.....	76
6.9.	ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	77
6.10.	TEMPORALIZACIÓN	80
6.11.	EVALUACIÓN	87
6.11.1.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	87
6.11.2.	PROCEDIMIENTOS E INSTRUMENTOS DE CALIFICACIÓN	93
6.12.	CONCLUSIÓN	94

6.13. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
ANEXO I. ACTIVIDADES QUE APARECEN EN LOS LIBROS DE LAS TRES EDITORIALES	98
ANEXO II. TAREA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	102
ANEXO III. ACTIVIDADES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	112
ANEXO IV. EVALUACIÓN.....	123
ÍNDICE DE FIGURAS	133
ÍNDICE DE TABLAS	135

0. RESUMEN Y PALABRAS CLAVES

0.1. RESUMEN

Este trabajo supone la finalización del Máster en Profesorado de Educación Secundario Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, en la especialidad de Matemáticas correspondiente al curso 2019/2020. En él se han puesto en práctica los conocimientos aprendidos en las asignaturas impartidas en este curso lectivo, con el objetivo de desarrollar la competencia profesional docente. Para ello, se ha desarrollado la unidad didáctica correspondiente al tema de Trigonometría.

Para contribuir a un desarrollo más profundo de la unidad didáctica, se han analizado tres libros desde el punto de vista curricular donde se han podido ver los contenidos de enseñanza desde tres perspectivas diferentes, además se han desarrollado los conocimientos matemáticos desde un punto de vista epistemológico del tema “Trigonometría Plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones”, correspondiente al tema 38 de las Oposiciones para Profesor de Enseñanza Secundaria en la especialidad de Matemáticas. También se ha realizado un análisis didáctico de algunos conceptos trigonométricos.

0.2. PALABRAS CLAVE

Matemáticas, Trigonometría, Unidad didáctica, Educación Secundaria.

0.3. ABSTRACT

The present research work involves the completion of the master degree in teachers from compulsory secondary education and baccalaureate, vocational training and language teaching in the mathematics specialty, corresponding to the 19-20 academic year.

In this work, the knowledge learned in the different topics taught throughout the course has been put into practice with the aim of developing professional teaching competence.

For this purpose, the educational unit corresponding to the topic of trigonometry has been fully developed.

In order to contribute to a deeper development of the educational unit mentioned, an analysis of the current curricular provisions and three books where the topic to be teach is shown from three different approaches has been made.

Mathematical knowledge of the topic nº 38 from the competitions for secondary education teacher in the specialty of math has been developed from an epistemological point of view. A didactic analysis of some trigonometric concepts has also been carried out.

0.4. KEYWORDS

Mathematics, trigonometry, educational unit, high school education.

1. INTRODUCCIÓN

En el periodo transcurrido desde octubre de 2019 hasta abril de 2020 la Universidad de Jaén ha impartido las asignaturas correspondientes al Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, en la especialidad de Matemáticas. Una vez adquiridos los conocimientos necesarios por las enseñanzas recibidas, se procede a la realización del Trabajo Fin de Máster que sirve de colofón para la finalización de este proceso de aprendizaje.

Con este Trabajo Fin de Máster se pretende desarrollar la capacidad profesional de planificar como profesional docente, de forma que se pongan en práctica las competencias y contenidos formativos adquiridos para el ejercicio de la docencia durante la realización del Máster. Esta competencia quedará plasmada en la elaboración de una unidad didáctica que versará sobre el tema de Trigonometría en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O, evitando un enfoque simplista, por lo que antes de su realización vendrá precedida principalmente por dos tareas:

1. Una fundamentación didáctica basada en el análisis de una investigación relacionada con la enseñanza y el aprendizaje.
2. Una fundamentación epistemológica donde se desarrolla desde el rigor matemático un tema correspondiente al temario de oposiciones para profesor de secundaria.

A estos dos puntos precede una fundamentación curricular en la que se hace un análisis del currículo para Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Atendiendo a estas premisas, el TFM queda estructurado de la siguiente manera:

- Objetivos: competencias y resultados formativos adquiridos para el ejercicio de la docencia durante la realización del Máster.
- Fundamentación curricular: se introducen las disposiciones curriculares y a partir de tres libros de Matemáticas Académicas de 4º de E.S.O, se realiza un análisis de la forma en que estos abordan estas disposiciones curriculares vigentes y que tratamiento se les da en ellos.
- Fundamentación epistemológica: se desarrolla el tema de oposición número 38 correspondiente a “Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones”, con el que se relaciona la unidad didáctica realizada.

- Fundamentación didáctica: el análisis de una investigación relacionada con los conocimientos matemáticos expuestos en la unidad didáctica se concretará en este apartado.
- Diseño de una unidad didáctica: los apartados anteriores permiten afrontar la unidad didáctica de forma más amplia y profunda. En el diseño de la unidad se pretende que a partir de una metodología en la que se unen explicaciones transitivas con estrategias innovadoras y motivadoras, se logren los objetivos y competencias planteados para 4º curso de la E.S.O según lo establecido en el RD: 1105/2014 y la Orden 14 de julio de 2016. La unidad didáctica desarrolla el tema de Trigonometría dentro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º curso de la E.S.O.

2. OBJETIVOS

Con este Trabajo Fin de Máster (TFM) concluyen el proceso formativo en el que durante el curso 2019/2020 se ha impartido una formación cultural, personal, ética y social adecuada para el ejercicio de la profesión docente con el rigor científico que se debe aplicar en el ámbito de la educación.

La finalidad de este TFM es la puesta en práctica de las competencias y contenidos formativos adquiridos para el ejercicio de la docencia durante la realización del Máster, de manera que integre los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del Máster y sea una herramienta preparatoria y formativa para una posterior función docente.

Los objetivos de este Trabajo Fin de Máster son: ¹

- Aplicar los conocimientos adquiridos en el transcurso de la realización del Máster de Profesor de Educación secundaria en la disciplina de Matemáticas.
- Conocer y aplicar la normativa y organización institucional del sistema educativo español, tanto a nivel estatal como autonómico.
- Profundizar en el estudio de la Trigonometría y analizar e identificar los problemas que surgen en el alumnado durante la enseñanza y aprendizaje de esta materia.
- Efectuar un análisis crítico donde se pueda poner de manifiesto fenómenos ligados al proceso de transposición didáctica de los libros de texto correspondientes a Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO.

¹ Guía docente Master Educación Secundaria Obligatoria. Universidad de Jaén

- Identificar y explicar investigaciones relevantes del área educativa encuadradas dentro de la materia de Trigonometría.
- Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de aprendizaje y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.
- Desarrollar una unidad didáctica para la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO, en función del currículo establecido y la legislación vigente.
- Conocer el entorno de desarrollo docente, así como las características del alumnado, aplicando metodologías que conlleven un aprendizaje significativo del alumno dentro de un contexto comunicativo y motivador, teniendo en cuenta las capacidades y ritmos de cada estudiante.
- Tener conocimiento de los contenidos presentes en el currículo de la asignatura de Matemáticas.
- Adquirir conocimientos en el área formativa para el desarrollo de la profesión como docente.
- Tener información de las competencias como profesor en la asignatura de Matemáticas, así como la relación que se establece entre estas y el resto de competencias.
- Transformar los contenidos curriculares en programas de actividades y de trabajo, así como elaborar materiales educativos en la asignatura de matemáticas.
- Planificar, desarrollar, evaluar y orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O.
- Alcanzar el conocimiento, destrezas y actitudes necesarias para el ejercicio de la labor docente, utilizando las TICs como herramienta de ayuda para realizar dicha labor.
- Tener conocimiento y poner en práctica metodologías innovadoras en la enseñanza de las Matemáticas.
- Incorporar en el proceso formativo metodologías que implican el uso y aprendizaje en comunicación audiovisual y multimedia.
- Favorecer los procesos de interacción y de comunicación en el aula.
- Alentar el esfuerzo del alumno y estimular su capacidad de aprendizaje por sí mismo y de forma grupal, de modo que le posibilite desarrollar habilidades de

pensamiento y decisión, y de esta manera puedan facilitar su autonomía, confianza e iniciativa personal.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

La influencia directa del entorno, tanto desde el aspecto social como desde el cultural, sobre el estudiante da lugar a la transformación del *conocimiento científico* en *conocimiento de enseñanza*, de este modo el estudiante además de conceptos teóricos aprende saberes para la vida. Esto queda de manifiesto en la obra de Yves Chevallard (1985) “La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado”, donde define el concepto de transposición didáctica como el “Conjunto de transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado”.

El proceso de transposición didáctica pasa por las siguientes fases:

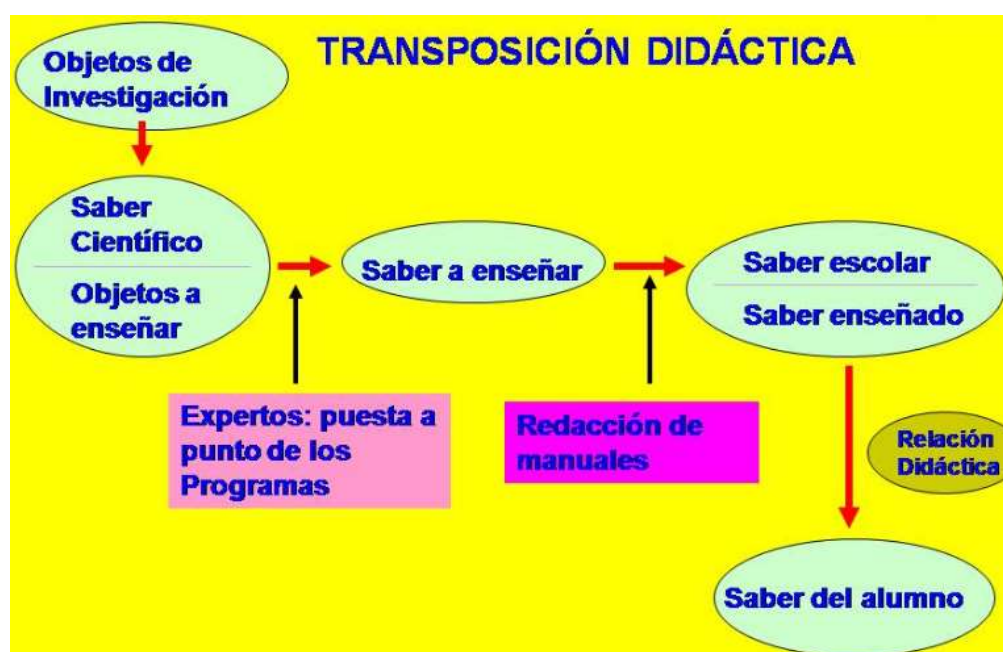


Figura 1. Esquema transposición didáctica (García Armenteros 2020).

El saber enseñar surge de la transformación externa del saber sabio al llevarlo a la escuela, quedando plasmado en el **currículo escolar**.

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa define el currículo como “la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas y etapas educativas”.

En este apartado vamos a trabajar en relación al currículo establecido para 4º de ESO dentro de la asignatura Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas. Este currículo viene definido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre donde se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, así como en la orden de 14/07/2016, por la que se desarrolla el currículo

correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, de conformidad con lo dispuesto en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, tras haber sido modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) y por la ley 17/2007 de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (L.E.A).

Los elementos que componen el currículo determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estos elementos según lo establecido en el Real Decreto 1105/2014 son:²

- **Objetivos:** hacen referencia a los logros que debe alcanzar el alumno al finalizar el proceso educativo.
- **Contenidos:** Son los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que permiten alcanzar los objetivos marcados en cada disciplina y etapa educativa, así como a adquirir las competencias fijadas. Cada asignatura tiene unos contenidos determinados clasificados en materias, ámbitos, áreas y módulos según la enseñanza.
- **Criterios de evaluación:** Con ellos se evalúa el aprendizaje del alumno. Es una respuesta o lo que queremos alcanzar en cada una de las asignaturas.
- **Estándares de aprendizaje evaluables:** Son especificaciones de los criterios de evaluación y con ellos se definen los resultados de aprendizaje, permitiendo evaluar al alumno. Con ellos se concreta lo que el alumno debe saber, comprender y saber hacer en cada una de las asignaturas.
- **Metodología didáctica:** Son las estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el docente y que permiten el aprendizaje del alumno. Su finalidad es alcanzar los objetivos planteados.
- **Competencias:** Son los conceptos, destrezas y valores que el alumno pone en activo en la aplicación de los contenidos aprendidos en las distintas asignaturas. Son capacidades con las que el alumno realiza y resuelve de forma correcta y eficaz actividades y problemas complejos.

Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje están organizados en bloques, de forma que conocimientos, competencias y valores quedan integrados.

Dentro de la asignatura Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO, vamos a tratar el tema de Trigonometría.

² Real Decreto 1105/2014, Capítulo I, art. 2

El estudio de los contenidos de Trigonometría en la asignatura de Matemáticas Académicas de 4º de ESO, queda integrado dentro del “Bloque III. Geometría”. A continuación, se detallan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de este bloque:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Figura 2. Bloque 3. Geometría Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º de ESO (R.D. 1102/2014, de 26 de diciembre)

Para el análisis del tema de Trigonometría se debe considerar también el Bloque I de “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas”, pues su desarrollo se realiza de forma transversal y conjunta al resto de bloques. Esto se debe porque tal como queda indicado en el Real Decreto 1105/2014, constituye *“el hilo conductor de la asignatura; se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos”*.³

Según la Orden de 14 de julio de 2016 las competencias claves a desarrollar en los Bloques I y III de esta asignatura vienen definidos junto con los criterios de evaluación.

Las competencias clave que aparecen en la unidad de Trigonometría son:⁴

- a) Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología (CMCT)
- b) Competencia de aprender a aprender (CAA)
- c) Competencia en comunicación lingüística (CCL)

³ Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, Anexo I.

⁴ Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, Capítulo I art. 2.

- d) Competencia digital (CD)
- e) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)
- f) Competencias sociales y cívicas (CSC)
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Los objetivos de la etapa, tal como se dijo anteriormente, quedan recogidos en la Orden de 14 de julio de 2016.

3.1. ANÁLISIS DE LA UNIDAD DE TRIGONOMETRÍA

Una vez introducidos los aspectos generales del currículo, vamos a analizar el tema de Trigonometría en tres libros de texto correspondientes a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O. Este análisis junto con el del currículo escolar nos permiten hacer una evaluación de la transposición didáctica y con ella la posible existencia de desviaciones, ausencia de objetivos presentes en el currículo, posibles errores, estado de los contenidos, estructuración, gráficos e imágenes empleadas, tipos de ejercicios..., de manera que nos permita de forma objetiva valorar estos libros en relación al currículo vigente, así como las ventajas o desventajas que puedan presentar y con ellas las mejoras a las que puedan hacer frente.

Los libros analizados son los siguientes:

- Editorial Anaya, autores: José Colera Jiménez, M^a José Oliveira González, Ignacio Gaztelu Alberio, Ramón Colera Cañas; año de edición 2016.
- Editorial Edebé, autores: obra colectiva (director general Antonio Garrido González), año de edición 2016.
- Editorial Bruño, autores: José María Arias Cabezas, Ildefonso Maza Sáez; año de edición 2017.

3.1.1. RELACIÓN DE CONTENIDOS LIBRO-CURRICULO

La siguiente tabla muestras los contenidos de Trigonometría tratados en los libros de Anaya, Edebé y Bruño:

Libro Editorial Anaya	Libro Editorial Edebé.	Libro Editorial Bruño.
Unidad 7. Trigonometría	Unidad 9. Trigonometría	Unidades 7 y 8. Semejanza y Trigonometría. Resolución de triángulos rectángulos
– Razones trigonométricas de un ángulo agudo. – Relaciones trigonométricas fundamentales. Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°. – Utilización de la calculadora en trigonometría. – Resolución de triángulos rectángulos. – Resolución de triángulos oblicuángulos. – Razones trigonométricas de 0° a 360° – Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas. Calculadora. – Funciones trigonométricas. El radián. – Actividades y taller de matemáticas.	– Medida de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. – Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Obtención de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°. Uso de la calculadora – Resolución de triángulos rectángulos. Resolución de triángulos oblicuángulos. – Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Circunferencia goniométrica. Propiedades y relaciones de las razones trigonométricas. Reducción al primer cuadrante. – Resolución de ecuaciones trigonométricas y comprobación de resultados. – Funciones trigonométricas. Identificación y descripción de sus características. – Actividades y elaboración de trabajos de investigación de forma individual o en grupos cooperativos.	– Razones trigonométricas o circulares. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Uso de la calculadora. Razones trigonométricas en triángulos semejantes. – Relaciones entre las razones trigonométricas. Relaciones trigonométricas entre ángulos complementarios. Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°. – Demostraciones. Actividades, problemas en contextos reales. Geogebra. – Circunferencia goniométrica. Medida de ángulos. Paso entre grados y radianes. Ángulos mayores de 360°. Recorrido e interpretación de las razones trigonométricas. – Resolución de triángulos rectángulos. – Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes. – Actividades, problemas en contextos reales. Geogebra.

Tabla 1. Contenidos de trigonometría libros Anaya, Bruño y Edebé.

El contenido curricular en relación a Trigonometría para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO, queda establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, Anexo I. Estos contenidos aparecen en el “Bloque III. Geometría” de la tabla de “contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables” de este anexo y son:⁵

- *Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.*
- *Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.*
- *Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.*

Si analizamos los contenidos de los libros de Anaya, Edebé y Bruño y los comparamos con el contenido curricular establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, podemos decir que los tres libros desarrollan los contenidos establecidos en este Real Decreto.

Tanto la editorial Anaya como Edebé desarrollan la Trigonometría en unidades independientes, mientras que Bruño establece dos unidades quedando en una de ellas englobada Semejanza y Trigonometría, siendo el contenido de la otra unidad exclusivamente de Trigonometría. Este tema de Semejanza tanto Anaya como Edebé los tratan como unidad independiente previa a la de Trigonometría.

3.1.2. DESARROLLO DE CONTENIDOS EN LOS LIBROS

A continuación, se presenta la estructura y el desarrollo de contenidos de los tres libros analizados.

• LIBRO EDITORIAL ANAYA

En el libro de Anaya la unidad se inicia con una breve introducción histórica de Trigonometría, de esta manera se hace una contextualización histórica de esta. A continuación, aparece descrita una actividad introductoria que muestra a la Trigonometría como una herramienta práctica.

Desarrollo de los contenidos

Los contenidos desarrollados en la unidad están divididos en apartados y sub-apartados. Los conceptos más relevantes están remarcados de forma que de cara al lector sirve como llamada de atención. Vamos a ver las secciones de las que se compone el bloque de contenidos:

⁵ Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre. Anexo I. Bloque III Geometría.

- **Piensa y practica:** ejercicios relacionados con el contenido que se acaba de exponer.
- **Ejercicios y problemas resueltos.** Aparecen estrategias y formas de afrontar los problemas que ayudan a su resolución. Su finalidad es tener procedimientos de resolución ante problemas similares.
- En los márgenes aparecen observaciones y actividades TIC que ayudan a la comprensión de la materia.

Una vez finalizado el bloque de contenidos nos encontramos con las secciones correspondientes a ejercicios, problemas y actividades:

- **Ejercicios y problemas resueltos.** Donde se manifiestan los conocimientos adquiridos para su resolución y se muestra el proceso resolutorio.
- **Ejercicios y problemas.** Son ejercicios propuestos al final del tema donde se repasan los contenidos estudiados. Cada ejercicio viene identificado mediante un icono según su grado de dificultad.
- **Reflexiona la teoría:** En esta sección se trabajan los conceptos adquiridos en el bloque de contenidos.
- **Taller de matemáticas.** En esta sección aparecen lecturas, informaciones y actividades abiertas. Se divide en tres apartados llamados “entrénate resolviendo problemas”, “emprende y aprende” y “lee y comprende”. Con estos talleres se activan capacidades como la creatividad, la autoestima o la motivación.

El tema de Trigonometría finaliza con una sección de autoevaluación:

- **Autoevaluación.** Se proponen actividades como medio de autoevaluación. Aquí el alumno pone a prueba lo aprendido en la unidad.

• LIBRO EDITORIAL EDEBÉ

El tema comienza con una breve introducción referente a la evolución histórica y usos de la Trigonometría, un índice de contenidos de la unidad y un apartado llamado “rutina de pensamiento” como propuesta de actividades que introducen al alumnado en el tema de Trigonometría.

Desarrollo de los contenidos

En las siguientes páginas se desarrollan los contenidos curriculares, estando estos acompañados de sus respectivos ejemplos, recursos y actividades a realizar. En los ejemplos se distinguen las fases de comprensión, resolución y comprobación (esta última en algún caso) y ocupan un espacio importante en el contenido de la unidad, siendo expuestos a continuación de los conceptos ejemplificados.

Finalizado el bloque de contenidos nos encontramos con:

- **Actividades resueltas.** Estas actividades vienen estructuradas de modo que se afrontan siguiendo unas pautas metodológicas para la resolución de un problema modelo: “Comprender”, “Planificar”, “Ejecutar el plan” y “Revisar”
- **Síntesis y actividades finales.** Esquema síntesis donde se relaciona los contenidos clave del tema. Las actividades que aparecen están clasificadas según su nivel de dificultad y cuya utilidad es el repaso y afianzamiento de los contenidos. La graduación por nivel de dificultad de las actividades permite prestar atención a la diversidad del alumnado. Las actividades finales están distribuidas por los distintos temas en que se divide el bloque de contenidos.
- **Matemáticas a tu alcance.** Actividades IBL y secciones cuya finalidad es desarrollar habilidades matemáticas contextualizadas.
- **Pon a prueba tu competencia.** Comprobación de la asimilación de competencias aprendidas en el bloque de contenidos mediante actividades aplicadas a contextos reales y situaciones cotidianas.

En este libro al terminar los temas correspondientes al bloque de geometría aparecen unas secciones donde se repasan los contenidos de dicho bloque y son:

- **Historia y actualidad.** Esta sección está relacionada con contenidos matemáticos tanto a lo largo de la historia como en la actualidad.
- **Evaluación de competencias.** Evaluación de las competencias adquiridas en el bloque de geometría.
- **Actividades de síntesis.** Aquí se pone de manifiesto los conocimientos aprendidos en el bloque de geometría.

• LIBRO EDITORIAL BRUÑO

La unidad se inicia con una presentación donde figura el índice de la unidad y un texto introductorio.

Desarrollo de los contenidos

En el bloque de contenidos las explicaciones de los conceptos trigonométricos vienen acompañados de ejercicios rápidos en la sección llamada “**Piensa y calcula**”, ejercicios y problemas resueltos de cada concepto estudiado, además de ejercicios de aplicación en la sección denominada “**Aplica la teoría**”.

Una vez desarrollado el bloque de contenidos nos encontramos con las siguientes secciones de ejercicio, problemas y actividades:

- **Ejercicios y problemas resueltos.**
- **Ejercicios y problemas propuestos.** Estos ejercicios se clasifican según su grado de dificultad. estando estos últimos clasificados por la sección a la que pertenecen, así como por su grado de dificultad
- **Matematización en contextos reales.** En esta sección se realizan ejercicios aplicados a la vida cotidiana.
- **Comprueba lo que sabes.** Se ponen a prueba los conocimientos adquiridos mediante un examen de autoevaluación.
- **Geogebra.** Ejercicios y problemas para repasar los contenidos matemáticos con el uso de la herramienta informática Geogebra. Esta sección se compone de:
 - Ejercicios resueltos paso a paso.
 - Breves aspectos del funcionamiento del programa.
 - Ejercicios y problemas propuestos para que los resuelva el alumnado.
- **Comprueba lo que sabes con Geogebra.** Examen para realizar con el programa informático Geogebra
- **Organiza tus ideas.** Esquema de los contenidos de la unidad relacionados para facilitar la organización de las ideas.

Al igual que en el libro de la editorial Edebé, al finalizar los temas del bloque de geometría aparecen unas secciones de actividades y evaluación, que sirven de repaso de los contenidos vistos, estas secciones son:

- **Investiga y calcula.** Repaso de actividades
- **Evaluación del bloque.**

3.1.3. ANÁLISIS DE COMPOSICIÓN Y CONTENIDOS

La estructuración que realizan las tres editoriales a grandes rasgos tienen una línea común, pues se parte de una introducción, se realiza el desarrollo del bloque de contenidos acompañado por ejemplos y ejercicios, para finalizar con relaciones de ejercicios y actividades cooperativas. En el caso de la Editorial Bruño y Edebé también tienen actividades para realizar al finalizar las unidades correspondientes al bloque de Geometría.

Para explicar grados sexagesimales y radianes, tanto Bruño como Edebé lo desarrollan en el apartado “medida de ángulos”, mientras que Anaya no da la definición de grado y en cuanto a la definición de radian lo explica en el apartado “Funciones trigonométricas” como medida relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas.

Edebé y Bruño definen las razones secantes, cosecante y cotangente, mientras que Anaya no las define en sus contenidos.

En cuanto a la resolución de triángulos, Bruño se restringe a la resolución de triángulos rectángulos, mientras que Anaya y Edebé la amplía a los triángulos oblicuángulos.

Las funciones trigonométricas son únicamente tratadas en los libros de Edebé y Anaya.

Bruño es la única editorial que incorpora dentro del bloque de contenidos un apartado para aplicación de la Trigonometría al cálculo de distancias, áreas y volúmenes.

Tanto Edebé como Bruño incorporan un esquema conceptual como síntesis y organización de las ideas estudiadas. Anaya carece de dicho esquema.

En relación al formato y presentación de los contenidos, en los tres libros Las explicaciones son ayudadas para su comprensión por dibujos, gráficos, así como por aclaraciones, anotaciones y reflexiones que aparecen en los márgenes de las páginas. Las definiciones son acompañadas en los tres casos por ejemplos (Edebé) o ejercicios y problemas resueltos (Anaya y Bruño).

3.1.4. ACTIVIDADES

Si analizamos los libros de las tres editoriales según los ejercicios que presentan, obtenemos los siguientes resultados:

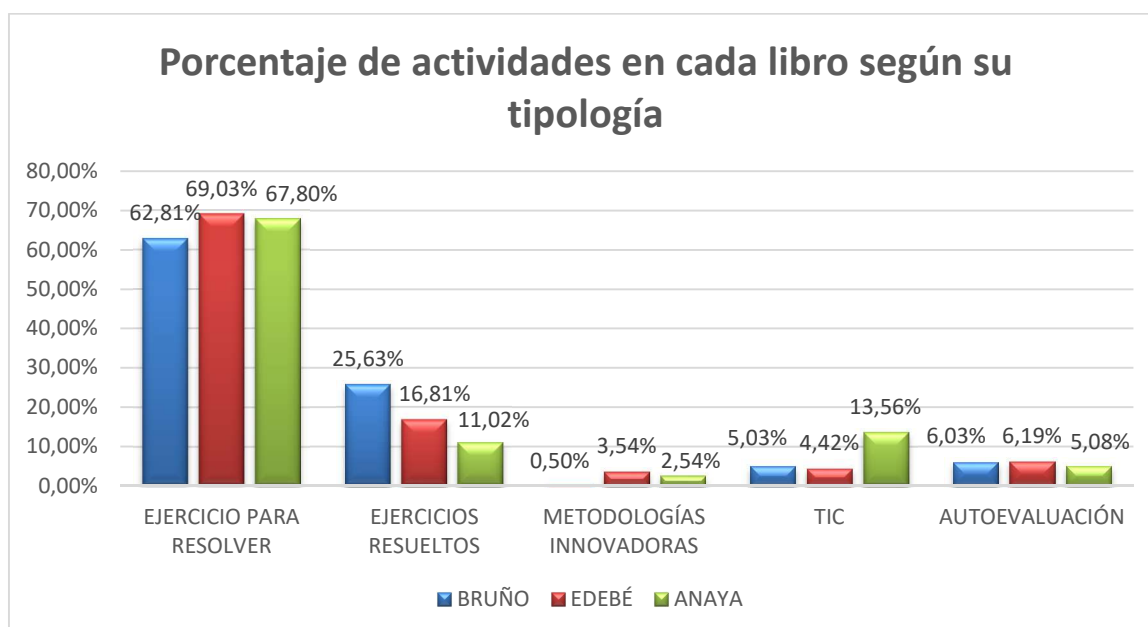


Figura 3. Porcentaje de actividades según su tipología (elaboración propia).⁶

⁶ En el Anexo I se adjuntan tablas y gráficos que complementan esta información

- **EDITORIAL ANAYA**

El número total de actividades presentadas en el libro de la editorial Anaya es de 118, de las que 80 son ejercicios para resolver, 13 ejercicios resueltos, 3 actividades donde se aplican metodologías innovadoras, 16 actividades de consulta a través de las TIC y 6 ejercicios de autoevaluación.

En este libro aparece un apartado con ejercicios y problemas con distinto grado de dificultad, por lo que pueden adaptarse al nivel de aprendizaje del alumnado.

Ocho de los ejercicios resueltos se intercalan en los diferentes apartados del bloque de contenidos ayudando a su comprensión.

- **EDITORIAL EDEBÉ**

El libro de la editorial Edebé presenta un total de 113 actividades de las que 102 están en la unidad de Trigonometría y 11 actividades de repaso se encuentran al final del bloque de geometría.

El bloque de contenidos, donde se explican los conceptos trigonométricos viene acompañado de 16 ejemplos que facilitan su comprensión.

En cuanto al número de actividades por tipología 4 pertenecen a metodologías innovadoras (una de ella de carácter cooperativo), hay 78 actividades para resolver y 19 resueltas (incluidos ejemplos), 5 actividades son enlaces que aparecen en el bloque de contenidos para buscar información en la red (TIC) y 7 actividades son de autoevaluación (5 de la sección de la unidad “Pon a prueba tus competencias” y 2 de la sección “Evaluación por competencias” (que se encuentra al final del bloque de geometría).

- **EDITORIAL BRUÑO**

Las actividades correspondientes a trigonometría en el libro de la editorial Bruño son 199 distribuidas entre las unidades 7 y 8 del libro. De estas 125 son ejercicios para resolver, 51 son ejercicios resueltos, 1 aplica metodologías innovadoras, 10 deben ser resueltas con herramientas tecnológicas (Geogebra) y 12 son de autoevaluación.

En este libro no aparecen graduados por su nivel de dificultad los problemas y ejercicios.

Dos de los ejercicios propuestos para resolver están aplicados a contextos reales, pero al igual que el resto de ejercicios son de tipo cerrado.

3.1.5. USO DE LAS TIC

○ Libro de Anaya

Mediante el uso de iconos en los márgenes de las páginas aparecen llamadas de consulta, repaso y ampliación de la información a través de recursos y herramientas tecnológicas (uso de las TIC).

Considerando el uso de la calculadora como recurso TIC, este libro le dedica un punto en exclusiva “Utilización de la calculadora en trigonometría”.

○ Libro de Edebé

En este libro se utilizan las TIC en secciones como la denominada “Matemáticas a tu alcance” donde aparecen enlaces interactivos a recursos de la editorial. Las actividades TIC vienen identificadas por el símbolo “@”.

Al igual que Anaya, Edebé tiene un apartado cuyo contenido va dedicado al uso de la calculadora en Trigonometría.

○ Libro de Bruño

De los tres libros analizados es el único que dedica una sección a la herramienta tecnológica Geogebra. Además de proporcionar el enlace con la página oficial de este programa, ofrece unos videos tutoriales, así como los pasos para su instalación. Este programa se emplea como medio de resolución de ejercicios y problemas donde se repasan los conocimientos adquiridos, además el libro ofrece un examen de evaluación que se resuelve con Geogebra.

Este libro también presenta una novedad respecto a los dos anteriores y es que, en su edición digital hay apartados del bloque de contenidos donde se adjunta un enlace mediante el cual se puede acceder a videos donde se explican los contenidos de dichos apartados, más concretamente son 3 video tutoriales de Geogebra en la unidad 7 y 5 enlaces a videos explicativos en el bloque de contenidos de la unidad 8, además de 3 video tutoriales de Geogebra en esta misma unidad.

Respecto al uso de la calculadora, este libro le dedica un apartado en la unidad 7 en el bloque de contenidos, pero su contenido y explicación es el más reducido de los tres libros analizados. También hay un listado de problemas en la sección “Ejercicios y problemas propuestos” para resolverlos utilizando la calculadora.

A continuación, se adjunta tabla comparativa en relación al uso de las TIC en los tres libros.

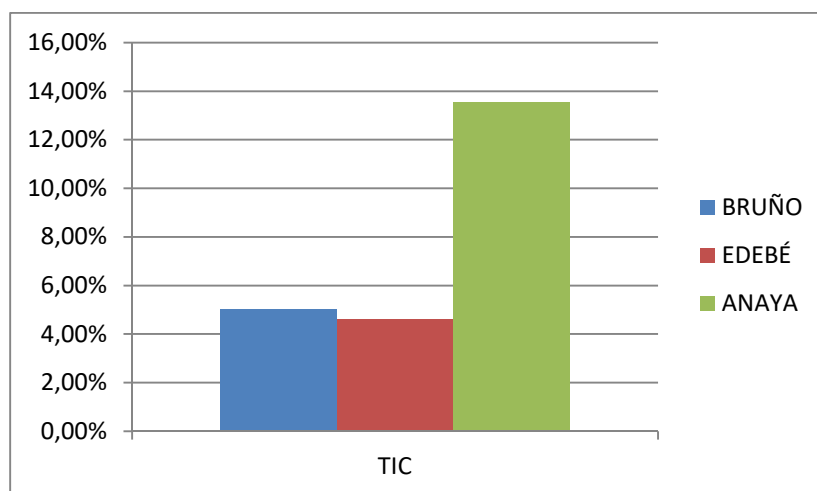


Figura 4. Comparativa según el peso del uso de las TIC respecto al total de actividades.

3.1.6. METODOLOGÍA

Algo común en los tres libros es que el peso de las actividades experimentales y el uso de las TIC son pequeños en relación al contenido general de la unidad, por lo que se puede decir que la metodología imperante es la tradicional transmisiva.

En el caso de Anaya con la sección “Taller de matemáticas”, tal como se ha comentado anteriormente, se pretenden introducir elementos innovadores y activar capacidades como la creatividad, la autoestima o la motivación.

El uso de la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos, está más acentuado en el libro de Edebé que en el de Anaya y Bruño. En la sección “Matemáticas a tu alcance” del libro de Edebé, nos encontramos con una sección denominada PBL (aprendizaje basado en problemas), además de encontrarnos con una actividad manipulativa y otra en la que es necesaria la consulta en la red donde indagar para ayudar a resolverla, poniendo de esta manera de relieve la competencia digital.

La unidad de Trigonometría de Bruño consta principalmente de ejercicios de metodología tradicional dejando en la sección “Matematización en contextos reales” la realización de ejercicios aplicados a la vida cotidiana, pero no dejan de ser problemas de metodología tradicional. Al final del bloque de Geometría en la sección “Investiga y calcula” se muestra una actividad consistente en la medición de alturas con distintos procedimientos, donde se aplican modelos matemáticos en diferentes contextos. Este caso es el que este libro presenta como actividad más abierta.

A continuación, se adjunta gráfico comparativo en el que se puede el peso de las actividades de metodología innovadora sobre el total de actividades presentes en la unidad.

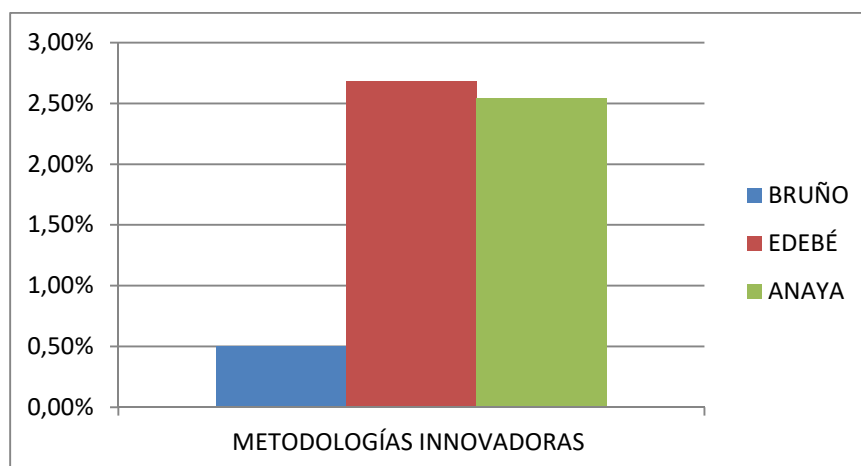


Figura 5. Comparativa según el peso de las actividades con metodologías innovadoras respecto al total de actividades.

3.1.7. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En el libro de Anaya y en el de Edebé, una vez finalizado el bloque de contenidos hay una sección de ejercicios y problemas los cuales vienen identificados por su nivel de dificultad. Esto supone una ayuda para poder utilizarlos en el alumnado según su nivel de aprendizaje.

3.1.8. DEMOSTRACIONES

El libro de la editorial Bruño desarrolla los contenidos a lo largo de la unidad presentando los conceptos de forma más concisa que los libros de Anaya y Edebé. El libro de Bruño tiene un apartado específico de demostraciones al final de la unidad 7 “Semejanza y Trigonometría”. En esta sección llamada “Profundización: demostraciones” se demuestra:

- Relación entre las razones trigonométricas
- Razones trigonométricas de 45°
- Razones trigonométricas de 30° y 60°

El libro de la Editorial Anaya y Edebé no tienen un apartado concreto para las demostraciones, de manera que estas se desarrollan junto a los conceptos trigonométricos.

Veamos a continuación como demuestra cada uno de los libros la relación $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Los valores de sen , cos y tg de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que *conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos*. Las relaciones que los ligan son las siguientes (se las suele llamar **relaciones fundamentales**):

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1 \quad [\text{I}]$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha \quad [\text{II}]$$

Estas igualdades son fáciles de demostrar:

$$[\text{I}] \quad (\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2} = 1$$

(*) Por el teorema de Pitágoras, se cumple que $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$.

$$[\text{II}] \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{tg } \alpha$$

En los siguientes ejercicios resueltos vemos cómo, conocida una razón trigonométrica de un ángulo, se pueden calcular las otras dos.

Figura 6. Ejemplo de demostración en libro de la editorial Anaya

4.1 Relación entre las razones trigonométricas

a) Relación fundamental:

- $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

Relaciones derivadas de la relación fundamental:

- $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha$

- $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha$

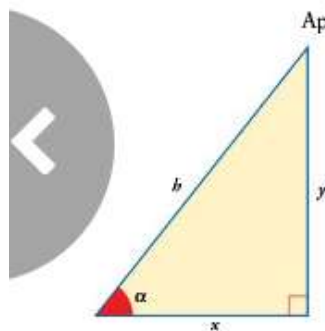
b) $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$

Demostración

a) Relación fundamental

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Aplicando la definición de seno y coseno y el teorema de Pitágoras, se tiene:



$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{b}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{b}$$

$$b^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2} = \frac{y^2 + x^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

Figura 7. Ejemplo de demostración en libro de la editorial Bruño

Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo

Consideremos la circunferencia goniométrica y, por ejemplo, un ángulo α del primer cuadrante (fig. 4). Los catetos del triángulo rectángulo coloreado miden $y = \operatorname{sen} \alpha$ y $x = \cos \alpha$. Si aplicamos el teorema de Pitágoras a este triángulo, se tiene: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Puesto que obtendríamos el mismo resultado si el ángulo perteneciera al segundo, al tercero o al cuarto cuadrantes, podemos entonces afirmar que para cualquier ángulo α se verifica:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Esta expresión se conoce como **fórmula fundamental de la trigonometría**.

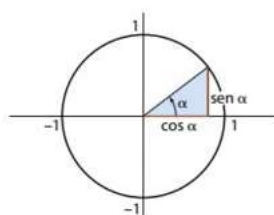


Fig. 4

Figura 8. Ejemplo de demostración en libro de la editorial Edebé

3.1.9. COMPETENCIAS

Analizados y revisados los 3 libros de Matemáticas Académicas de 4º de E.S.O correspondientes a las editoriales Anaya, Edebé y Bruño, tanto en contenido como en actividades y metodologías, cabe indicar que las competencias claves asociadas a los criterios de evaluación (según la orden *de 14 de julio de 2016*) para los bloques I y III de este curso y asignatura, están desarrolladas en la unidad o unidades dedicadas a Trigonometría.

3.1.10. CONCLUSIONES

Una vez revisados y analizados los libros de las editoriales Anaya, Edebé y Bruño; cabe indicar que los tres libros cumplen con el currículo establecido para Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO. El desarrollo del contenido es algo más amplio en los libros de Edebé y Anaya, siendo los desarrollos incluidos en el libro de Bruño algo más restringidos y tratados con más sencillez. La metodología predominante es la tradicional, mientras que las metodologías innovadoras tienen más presencia en los libros de Anaya y Edebé, pero siempre desde un papel secundario. En cuanto al uso de las TIC, su peso es más elevado en el libro de Anaya, pero desde un enfoque consultivo, mientras que el libro de Bruño es el más práctico en el uso de las TIC al utilizar Geogebra como una importante herramienta en Trigonometría.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Para el desarrollo de la fundamentación epistemológica entendida como el estudio de la constitución de los conocimientos matemáticos, vamos a estudiar el tema 38 “Trigonometría Plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones”, el cual queda establecido en el BOE, NUM.226, de 21 de septiembre de 1993 como parte del temario de las Oposiciones para Profesor de Enseñanza secundaria en la especialidad de Matemáticas.

El desarrollo de este tema queda articulado de la siguiente manera:

Se empieza con una breve introducción histórica, de este modo se presenta el contexto donde se han formado y desarrollado los contenidos de Trigonometría, así como su evolución a lo largo de los tiempos hasta llegar a nuestros días. A continuación, pasamos al estudio de las razones trigonométricas de un ángulo. En este punto se definirán las distintas razones, las estudiaremos a partir de la circunferencia goniométrica y veremos las razones trigonométricas de los ángulos de 30° , 45° y 60° . Extenderemos el estudio a las razones trigonométricas para cualquier ángulo α real, para finalizar este apartado con el estudio de sus propiedades.

Una vez estudiadas las razones trigonométricas se pasará al apartado de identidades trigonométricas donde se expondrán las demostraciones de las identidades más relevantes. Seguidamente, estudiaremos los teoremas del seno, coseno y tangente; para a continuación pasar a la resolución de triángulos tanto rectángulos como oblicuángulos.

La fundamentación epistemológica finalizará con los apartados de “aplicaciones de la trigonometría” y con el de la “obtención del área de un triángulo”.

4.1. INTRODUCCIÓN

La palabra Trigonometría derivó de los vocablos griegos “trigonom” (triángulo) y “metria” (medición). Podemos decir, que “la Trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, así como las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos” (Encabo de Lucas, 2010, Tomo II pág. 237). Cuando trabajamos en dos dimensiones hablamos de la Trigonometría plana, la cual estudia los triángulos que se encuentran en un plano. Sobre esta parte de la Trigonometría es sobre la que tratará nuestra fundamentación epistemológica.

La Trigonometría se origina en Babilonia y Egipto donde fue utilizada principalmente en la agricultura, construcción de las pirámides y astronomía principalmente, pero es en Grecia donde se produce un gran desarrollo, destacando el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea (190-120 A.C), el cual es artífice de las tablas de “cuerdas de arco”. Estas tablas junto con la geometría plana permitían resolver

triángulos planos. Es el interés de los griegos por la astronomía lo que permite el desarrollo de la Trigonometría, naciendo como rama de las Matemáticas. Otra figura importante griega fue Ptolomeo (85-165 A.C) autor del teorema de Melenao y de la obra Almagesto utilizada en astronomía durante siglos.

Tanto los astrónomos indios como los árabes utilizaron la Trigonometría heredada de los griegos. Fue en la India donde se utilizó por primera vez el seno y con él se desarrolló un sistema trigonométrico. La trigonometría árabe se nutre tanto de la Trigonometría griega como de los trabajos realizados por los hindúes. Entre las contribuciones que realizaron los árabes a la Trigonometría cabe destacar la circunferencia goniométrica y especialmente el desarrollo de las funciones trigonométricas.

Con la traducción de los libros de astronomía árabe se introduce la trigonometría en Europa. Cabe citar como figuras relevantes al matemático y astrónomo alemán Johan Müller estudioso de la obra de Ptolomeo, al matemático francés François Viète, el matemático escocés John Napier o a Leonhard Euler padre de la trigonometría moderna.

En la actualidad la trigonometría es utilizada en numerosos campos siendo aplicada en la arquitectura, ingeniería, astronomía, topografía, navegación, geografía, telecomunicaciones, electricidad...

Hoy en día la Trigonometría está encuadrada en el programa matemático surgido en el encuentro respaldado por la OECE en Dubrownik (1960), formando actualmente parte del currículo de la enseñanza secundaria obligatoria.

4.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO.

Sea α el ángulo de vértice A y lados b y c de un triángulo rectángulo, siendo los lados b y a los catetos y el lado c la hipotenusa.

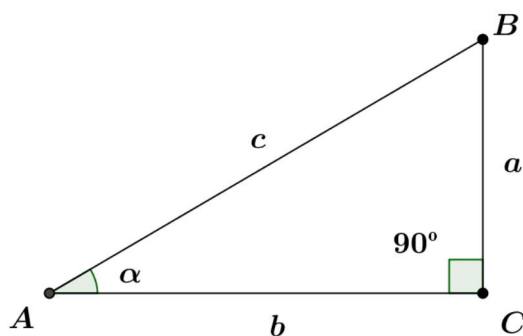


Figura 9. Triángulo rectángulo (Elaboración propia)

4.2.1. DEFINICIONES

- a) Se llama *sen* α a la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

b) Se llama $\cos \alpha$ a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

c) Se llama tangente de α a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Relación existente entre seno, coseno y tangente de un mismo ángulo:

1. Dividiendo miembro a miembro a) y b):

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

2. Sumando miembro a miembro los cuadrados de a) y b):

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{Fórmula fundamental de la trigonometría}).$$

Vamos a definir las funciones inversas a las anteriores:

– Se llama cotangente de α a la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

– Se llama secante de α a la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Se llama cosecante de α a la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

4.2.2. FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRÍA

A continuación, vamos a ver las identidades trigonométricas o fórmulas fundamentales:

$$\text{a) } \boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

DEMOSTRACIÓN:

Basándonos en las definiciones de seno y coseno dadas anteriormente en función del triángulo de la ilustración 1, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

b) $\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha}$

c)

DEMOSTRACIÓN:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

d) $\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha}$

DEMOSTRACIÓN:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

4.2.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DE LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA.

Sea una circunferencia de centro O y radio 1 (circunferencia goniométrica)

Sea $P(x, y)$ un punto de la circunferencia, de las anteriores definiciones obtenemos:

$\operatorname{sen} \alpha = y$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$
$\cos \alpha = x$	$\sec \alpha = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg} = \frac{y}{x}$	$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y}$

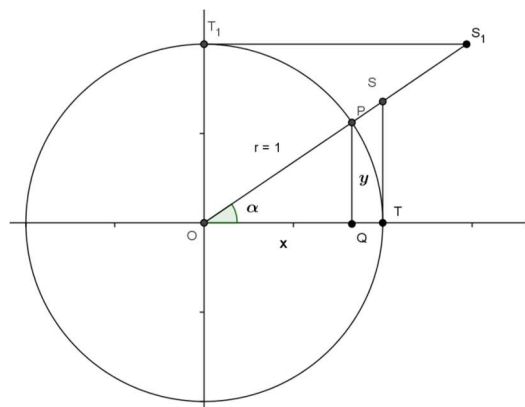


Figura 10. Circunferencia goniométrica (elaboración propia).

Con esto, podemos estudiar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo:

α	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Tabla 2. Signos razones trigonométricas (Encabo de Lucas, Gómez, de Haro, Miranda, Nicolás, 2010).

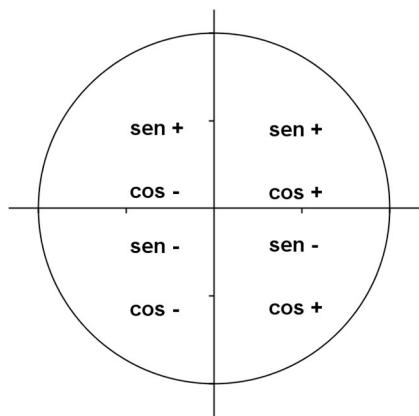


Figura 11. Signos seno y coseno de un ángulo (elaboración propia).

4.2.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30° Y 60°

$\text{sen} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$	$\text{sen} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{cos} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cos} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$
$\text{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

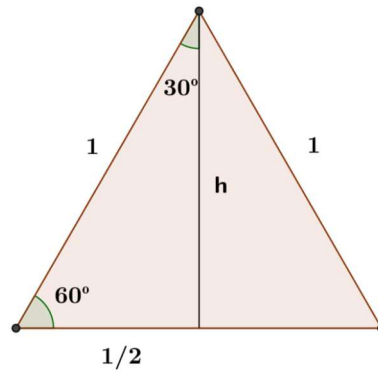


Figura 12. Razones trigonométricas ángulos 30° y 60° (elaboración propia).

4.2.5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 45°

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad \cos 45^{\circ} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad \operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

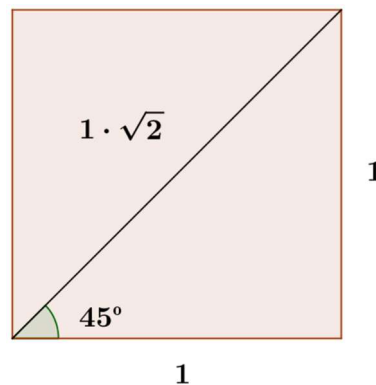


Figura 13. Razones trigonométricas del ángulo de 45° (elaboración propia).

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Tabla 3. Razones trigonométricas de ángulos notables (Encabo de Lucas et al. 2010).

4.3. REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

A continuación, veremos cómo quedan definidas las razones trigonométricas de un ángulo situado en cualquier cuadrante en función de las razones de un ángulo del primer cuadrante.

4.3.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos α y β son complementarios si su suma es 90° , de donde se deduce que $\beta = 90^\circ - \alpha$. Se calcularán las razones trigonométricas de β en función de las de α .

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a} \quad \cos \alpha = \frac{b}{a} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a} \quad \cos \beta = \frac{c}{a} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

De donde:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$$

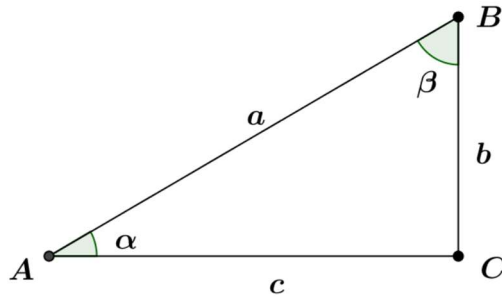


Figura 14. Triángulo rectángulo (elaboración propia)

4.3.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN 90°

En la figura podemos ver que los triángulos $\triangle OAA'$ y $\triangle BOB'$ al ser triángulos rectángulos, en los que la hipotenusa es la misma y el ángulo $\angle AOA'$ es el mismo que $\angle BOB'$ al ser sus lados perpendiculares a los del primero. De este modo, $\overline{AA'} = \overline{OB'}$ y $\overline{OA'} = \overline{BB'}$, en módulo, por lo que:

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \overline{BB'} = \overline{OA'} = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \overline{OB'} = -\overline{AA'} = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = -\operatorname{cotg} \alpha$$

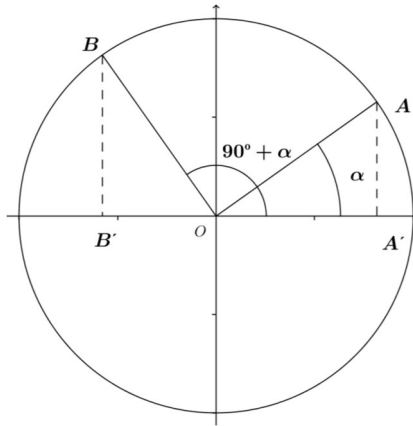


Figura 15. Ángulos que difieren 90º (elaboración propia).

Se puede observar que se ha tomado el signo de cada segmento en función del eje en el que se mide. De este modo, el segmento $\overline{OB'}$ es negativo al medirse en el eje de abscisas y estar a la izquierda del origen.

4.3.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos son suplementarios cuando suman 180º (π radianes). Entonces vamos a calcular las razones trigonométricas del ángulo $180^\circ - \alpha$ en función de las de α .

Los triángulos $\triangle OAA'$ y $\triangle OBB'$ son iguales, por lo que tendremos:

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \overline{B'B} = \overline{AA'} = \text{sen} \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \overline{OB'} = -\overline{OA'} = -\cos \alpha$$

$$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = -\text{tg} \alpha$$

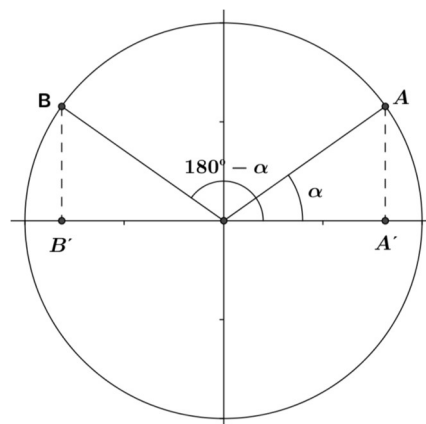


Figura 16. Ángulos suplementarios (elaboración propia).

4.3.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180°

Para este caso tenemos que:

$$\text{sen}(180^\circ + \alpha) = \overline{B'B} = -\overline{AA'} = -\text{sen}\alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = \overline{OB'} = -\overline{OA'} = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen}(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \text{tg}\alpha$$

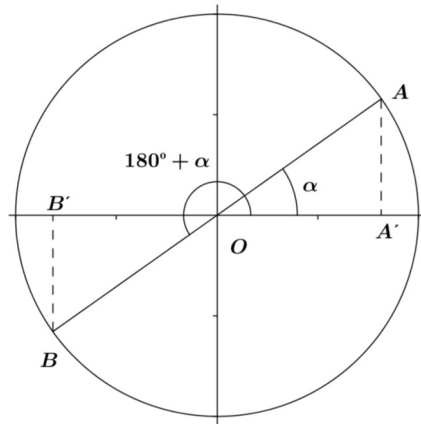


Figura 17. Ángulos que difieren 180° (elaboración propia).

Razonando de la misma manera tendremos que:

4.3.5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO $270^\circ - \alpha$

$$\text{sen}(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\text{sen}\alpha$$

$$\text{tg}(270^\circ - \alpha) = -\text{cotg}\alpha$$

4.3.6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO $270^\circ + \alpha$

$$\text{sen}(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \text{sen}\alpha$$

$$\text{tg}(270^\circ + \alpha) = -\text{cotg}\alpha$$

4.3.7. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO OPUESTO $(-\alpha)$

$$\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}(360^\circ + \alpha) = -\text{sen}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{tg}(-\alpha) = \text{tg}(360^\circ - \alpha) = -\text{tg}\alpha$$

4.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS SUMA, DIFERENCIA, DOBLE Y MITAD

4.4.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $\alpha + \beta$

$$\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{OA'}}, \cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA'}}, \sin \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB'}}, \cos \beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{DB}}{\overline{OB}}; \cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

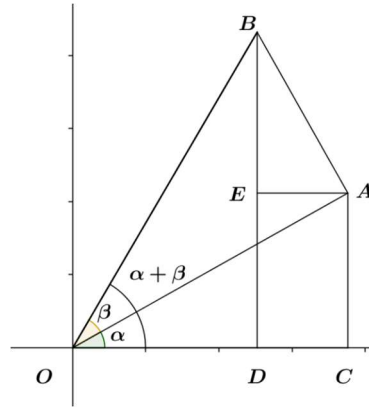


Figura 18. Suma de ángulos (elaboración propia).

Para hallar las razones del ángulo suma, tendremos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{DB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DE} + \overline{EB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{EB}}{\overline{OB}}$$

Y como, $\overline{DE} = \overline{CA} = \overline{OA} \cdot \sin \alpha$ y en el triángulo $\triangle BEA$ (el ángulo $\angle ABE$ es igual a α por ser sus lados perpendiculares a los de α), tenemos que $\cos \alpha = \frac{\overline{EB}}{\overline{BA}}$ de donde, $\overline{EB} = \overline{BA} \cdot \cos \alpha$. Si sustituimos estas expresiones en la fórmula anterior, tendremos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \sin \alpha + \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} \cdot \cos \alpha$$

Por lo que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (1)$$

Del mismo modo

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC} - \overline{CD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{CD}}{\overline{OB}}$$

Y como, $\overline{OC} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha$ y en el triángulo $\triangle ABE$ $\text{sen} \alpha = \frac{\overline{EA}}{\overline{BA}}$, de donde $\overline{DC} = \overline{EA} = \overline{BA} \cdot \text{sen} \alpha$. Sustituyendo en la fórmula anterior, tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta \quad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) y (2), se obtiene

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta} \quad (3)$$

4.4.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $\alpha - \beta$

A partir de las fórmulas (1), (2) y (3), llegamos a:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}(\alpha + (-\beta)) = \text{sen} \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \text{sen}(-\beta) \\ \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen} \beta \end{aligned} \quad (4)$$

Para el coseno se tendrá

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \text{sen} \alpha \text{sen}(-\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \end{aligned} \quad (5)$$

Para la tangente tendremos:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha - \beta) &= \text{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg}(-\beta)}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg}(-\beta)} \\ \text{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \beta} \end{aligned} \quad (6)$$

4.4.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Si utilizamos las fórmulas de la suma y se considera $\beta = \alpha$, entonces

$$\begin{aligned} \text{sen} 2\alpha &= \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \text{sen} \alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \text{sen} \alpha \text{sen} \alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

4.4.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Teniendo en cuenta la fórmula del coseno del ángulo doble y la primera fórmula fundamental:

$$1 = \cos^2 a + \text{sen}^2 a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

Sumando y restando estas 2 fórmulas, se obtiene:

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$$

$$1 - \cos 2a = 2 \operatorname{sen}^2 a$$

Si despejamos $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$, y haciendo el cambio $\alpha = 2a$, se obtiene

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

4.5. TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS

Utilizando las fórmulas (1) y (4),

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Y sumándolas y restándolas, se obtiene

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si hacemos lo mismo con las fórmulas (2) y (5)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Se obtiene:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Si Hacemos el cambio $\alpha + \beta = A$, y $\alpha - \beta = B$, tenemos que

$$\alpha = \frac{A+B}{2}; \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

Si sustituimos en las fórmulas anteriores, se obtiene

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

4.6. RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

4.6.1. TEOREMA DEL SENO

Los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos y la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia

circunscrita al triángulo. Es decir, en cualquier triángulo $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$$

Donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

DEMOSTRACIÓN

Si el ángulo γ es recto, entonces $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$ y $\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c}$. Al despejar c en ambas igualdades e igualar las expresiones resultantes, será

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = c = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}, \text{ pues } \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} 90^\circ = 1.$$

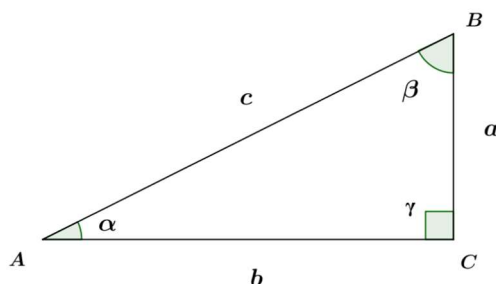


Figura 19. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

Si el ángulo γ es agudo, trazamos la altura h desde B . Los triángulos $\triangle AHB$ y $\triangle BHC$ son rectángulos, luego $\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{c}$ y $\operatorname{sen} \gamma = \frac{h}{a}$. Al igualar el valor de h en ambas expresiones se obtiene $c \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \gamma$, es decir, $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$. Si se traza ahora la altura desde el vértice C se llega a qué $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$.

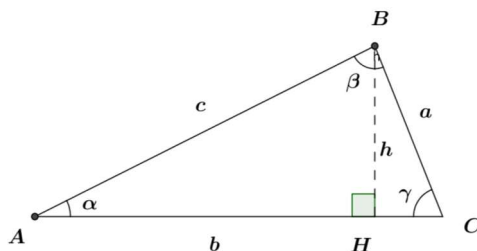


Figura 20. Triángulo acutángulo (elaboración propia).

La demostración para el caso γ obtuso es totalmente análoga a la anterior cambiando γ por $\pi - \gamma$ si se repara en que dos ángulos suplementarios tienen el mismo seno.

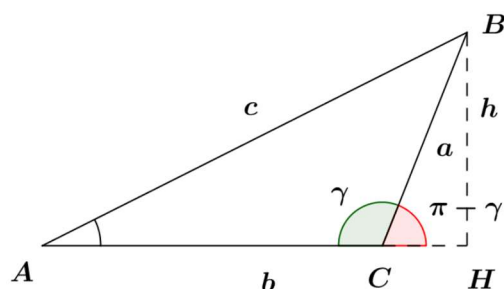


Figura 21. Triángulo obtusángulo (elaboración propia).

Probamos, para terminar, que la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita. Si α es uno de los ángulos agudos del triángulo $\triangle ABC$ y O es su circuncentro, la mediatriz del lado $\overline{AC}$ pasa por O . Además, β está inscrito en la circunferencia circunscrita, luego $\beta = \frac{1}{2} \hat{AOC} = \theta$ y de aquí que

$$\text{sen} \beta = \text{sen} \theta = \frac{b/2}{R} = \frac{b}{2R} \text{ y por tanto, } \frac{b}{\text{sen} \beta} = 2R \blacksquare$$

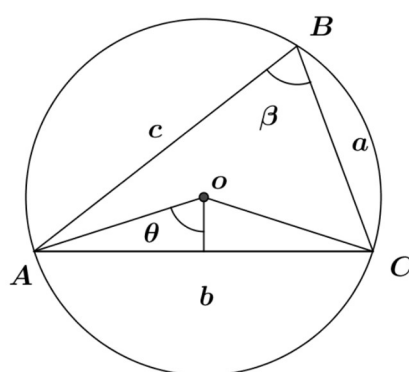


Figura 22. Circunferencia circunscrita (elaboración propia).

A continuación, veremos el teorema del coseno. Su demostración se realiza para cualquier triángulo a partir del teorema de Pitágoras generalizado.

4.6.2. TEOREMA DEL COSENO

En cualquier triángulo $\triangle ABC$ ocurre que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

DEMOSTRACIÓN

Si γ es un ángulo recto, $\cos \gamma = 0$ y, por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Si γ es agudo, en los triángulos rectángulos $\triangle AHB$ y $\triangle BHC$ es $c^2 = \overline{AH}^2 + h^2$ y $a^2 = \overline{CH}^2 + h^2$. Restando ambas expresiones queda $c^2 - a^2 = \overline{AH}^2 - \overline{CH}^2$ (2). Ahora bien, como es $\cos \gamma = \frac{\overline{CH}}{a}$, entonces $\overline{CH} = a \cos \gamma$ y $\overline{AH} = b - a \cos \gamma$ y, al sustituir en (2) tenemos:

$$c^2 - a^2 = (b - a \cos \gamma)^2 - (a \cos \gamma)^2 = b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma = b^2 - 2ab \cos \gamma$$

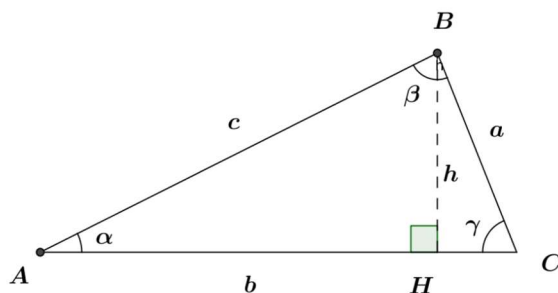


Figura 23. Triángulo acutángulo (elaboración propia).

Para el caso γ obtuso, el razonamiento es idéntico sustituyendo γ por $\pi - \gamma$ y recordando que dos ángulos suplementarios tienen cosenos opuestos. ■

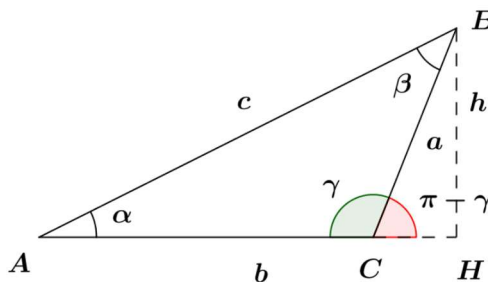


Figura 24. Triángulo obtusángulo (elaboración propia).

Seguidamente, vamos a ver otra forma de demostración. En este caso el teorema del coseno se demostrará de forma gráfica (demostración “sin palabras”)

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA DEL COSENO

Para el triángulo:

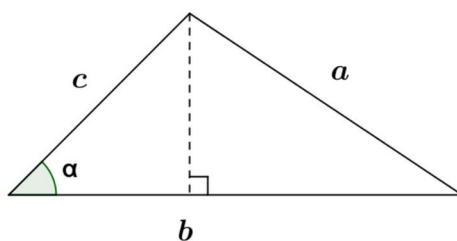


Figura 25. Triángulo acutángulo de lados a, b, c y ángulo α (elaboración propia).

Tenemos:

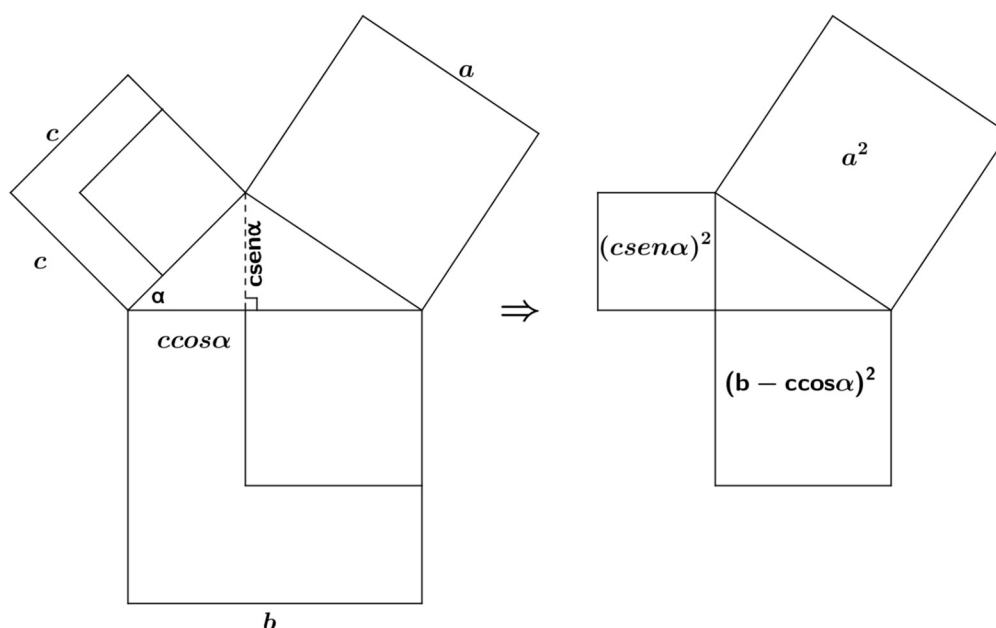


Figura 26. Demostración sin palabras teorema del coseno (Elaboración propia).

$$a^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$$

4.7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

4.7.1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Llamamos triángulo rectángulo al que posee un ángulo recto (90°). Estos rectángulos están compuestos por los catetos, que son los lados que forman el ángulo de 90° y la hipotenusa que es el lado contrario al ángulo de 90° .

Vamos a tomar el siguiente triángulo rectángulo, donde b y c son los catetos y a es la hipotenusa.

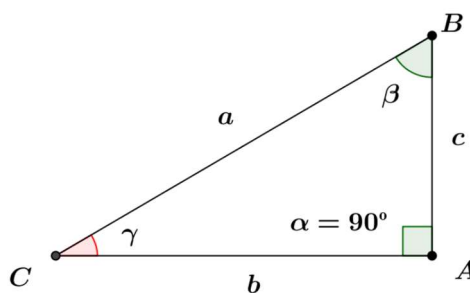


Figura 27. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

En este triángulo conocemos el ángulo recto $\alpha = 90^\circ$, por lo tanto, $\beta + \gamma = 90^\circ$. Estos triángulos cumplen el teorema de Pitágoras, es decir, $a^2 = b^2 + c^2$. En la resolución de estos triángulos, el ángulo recto es conocido, nos dan dos datos y debemos calcular el resto de datos desconocidos. Según esto nos encontraremos con distintos casos:

Conocidos un ángulo agudo y su cateto opuesto	$\beta + \gamma = 90^\circ \quad \text{sen} \beta = \frac{b}{a} \quad \text{tg} \beta = \frac{b}{c}$ $\text{de donde: } \gamma = 90^\circ - \beta \quad a = \frac{b}{\text{sen} \beta} \quad c = \frac{b}{\text{tg} \beta}$
Conocidos un ángulo agudo y su cateto adyacente	Supongamos ahora que los datos sean β y c, con lo que tendremos $\beta + \gamma = 90^\circ \quad \cos \beta = \frac{c}{a} \quad \text{tg} \beta = \frac{b}{c}$ $\text{de donde: } \gamma = 90^\circ - \beta \quad a = \frac{c}{\cos \beta} \quad b = c \cdot \text{tg} \beta$
Conocidos un ángulo agudo y la hipotenusa	Supongamos ahora que los datos sean β y a, con lo que tendremos $\beta + \gamma = 90^\circ \quad \text{sen} \beta = \frac{b}{a} \quad \cos \beta = \frac{c}{a}$ $\text{de donde: } \gamma = 90^\circ - \beta \quad b = a \cdot \text{sen} \beta \quad c = a \cdot \cos \beta$
Conocidos los dos catetos	Supongamos ahora que los datos sean b y c, con lo que tendremos $a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{tg} \beta = \frac{b}{c} \quad \text{tg} \gamma = \frac{c}{b}$ $\text{de donde: } a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \beta = \text{arctg} \frac{b}{c} \quad \gamma = \text{arctg} \frac{c}{b}$
Conocidos un cateto y la hipotenusa	Supongamos ahora que los datos sean b y a, con lo que tendremos $a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{sen} \beta = \frac{b}{a} \quad \cos \gamma = \frac{b}{a}$ $\text{de donde: } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \beta = \text{arcsen} \frac{b}{a} \quad \gamma = \text{arccos} \frac{b}{a}$

Tabla 4. Resolución de triángulos rectángulos (García, Gómez, Navarro, García, Pina, 2013).

4.7.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Para determinar un triángulo necesitamos conocer tres elementos del mismo entre los cuales debe de haber necesariamente un lado. Por tanto, para resolver un triángulo cualquiera se nos pueden presentar cuatro casos.

Primer caso: conocemos un lado y dos ángulos

Para resolver este caso, aplicaremos que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180° y bastará con aplicar el teorema de los senos. Supongamos que los datos que nos dan son a , β y γ , suponiendo que la suma de estos ángulos es menor de 180° . Los valores de las incógnitas serán:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) ; \quad b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} ; \quad c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Segundo caso: conocemos dos lados y el ángulo comprendido

Aquí tendremos que aplicar el teorema del coseno y el teorema de los senos además de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180° . Supongamos que los datos que nos dan son a , b y γ . Utilizando el teorema del coseno para el ángulo γ , llegamos a:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

Calculado ya c , utilizaremos ahora dos veces el teorema de los senos para calcular α y β .

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \gamma}{c} \Rightarrow \alpha = \arcsen \frac{a \cdot \operatorname{sen} \gamma}{c}$$
$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{c} \Rightarrow \beta = \arcsen \frac{b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Tercer caso: conocemos los tres lados

Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Obtenemos así los ángulos α, β, γ del triángulo.

Cuarto caso: conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Este caso puede ser ambiguo ya que puede tener una, dos o ninguna solución. Inicialmente vamos a hacer la resolución mediante las fórmulas conocidas, haciendo posteriormente la discusión sobre sus posibles soluciones. Supongamos que los datos que nos dan son a , b y A . Para calcular el ángulo β , utilizamos el teorema de los senos, teniendo

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \alpha}{a} \Rightarrow \beta = \arcsen \frac{b \cdot \operatorname{sen} \alpha}{a} \quad (7)$$

La solución de esto último nos puede dar dos valores ya que el seno de un ángulo es igual al seno de su suplementario. Por lo tanto, si β tiene dos soluciones a γ le ocurriría lo mismo, teniendo

$$\beta \begin{cases} \beta_1 < 90^\circ \\ \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \end{cases} \Rightarrow \gamma \begin{cases} \gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) \\ \gamma_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_2) \end{cases}$$

Con cualquiera de los valores de β y γ , para calcular el lado c , haremos uso del teorema de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Discusión de los posibles casos:

- a) Si $a > b$, el problema tiene solución única porque el valor de $\operatorname{sen} \beta$ en la ecuación (7) resulta menor que el de $\operatorname{sen} \alpha$, y por tanto menor que 1. Y como a mayor lado se opone mayor ángulo $\alpha > \beta$, por lo que la solución de β , tendrá que ser menor de 90° .
- b) Si $a = b$, entonces $\alpha = \beta$. Por ello si $\alpha \geq 90^\circ$ el problema no tiene solución.
- c) Si $a < b$, entonces $\alpha < \beta$, lo que exige que A sea agudo. Si $\alpha \geq 90^\circ$ el problema no tiene solución y si $\alpha < 90^\circ$ pueden ocurrir tres casos:
 - Si $a < b \operatorname{sen} \alpha$, el problema no tiene solución ya que resultaría que $\operatorname{sen} \beta > 1$.
 - Si $a = b \operatorname{sen} \alpha$, el problema tiene solución única ya que $\operatorname{sen} \beta = 1 \Rightarrow \beta = 90^\circ$ y el triángulo sería rectángulo.
 - Si $a > b \operatorname{sen} \alpha$, el valor de $\operatorname{sen} \beta$ es menor que 1 y se obtienen dos valores para β , uno menor de 90° y el otro su suplementario. En ambos casos el ángulo β , será menor que α .

4.8. APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Desde sus orígenes la Trigonometría se ha aplicado en numerosos campos como la astronomía, navegación, topografía o la ingeniería. En algunos casos es necesario resolver casos reales donde necesitemos obtener algún elemento de un triángulo a partir de otros dados. A continuación, vamos a ver algunos casos en su aplicación:

- **ALTURA DE PIE INACCESIBLE**

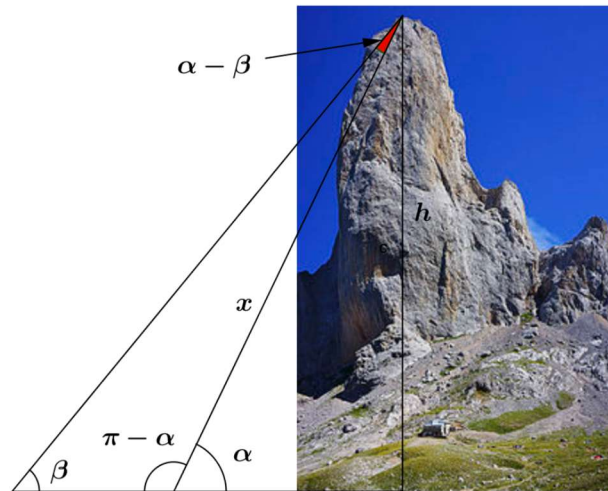


Figura 28. Altura de pie inaccesible (elaboración propia).

Supongamos que necesitamos calcular la altura h de una montaña, en este caso se opera de la siguiente manera: se mide el ángulo α que forma la horizontal con la visual a la cima de la montaña, a continuación, retrocedemos una distancia d y se mide el ángulo análogo al anterior, en este caso le llamaremos $\beta < \alpha$. Consideramos x la distancia desde el primer punto de observación a la cima, al ser los ángulos del triángulo de la izquierda β , $\pi - \alpha$ y $\pi - (\pi - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$, aplicando el teorema del seno en este triángulo obtendremos:

$$\frac{x}{\text{sen}\beta} = \frac{d}{\text{sen}(\alpha - \beta)} \Rightarrow x = \frac{d \text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

Por tanto, la altura de la montaña se tiene del triángulo rectángulo de la derecha, siendo:

$$h = x \text{sen}\alpha = \frac{d \text{sen}\alpha \text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

- **DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS INACCESIBLES**

En este caso tenemos dos puntos A y B que son inaccesibles y de los que queremos conocer su distancia. Para resolverlo tomaremos dos puntos con acceso C y D a los que medimos la distancia entre ellos d_1 . Con un teodolito podemos medir los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 .

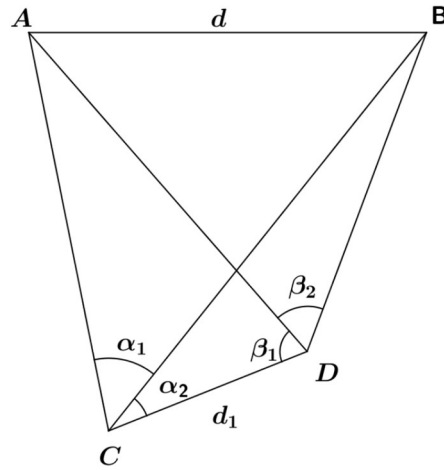


Figura 29. Distancia entre dos puntos inaccesibles (elaboración propia).

Si aplicamos el teorema del seno en los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, obtendremos:

$$\frac{\overline{AD}}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{d_1}{\text{sen}[\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)]}, \quad \frac{\overline{BD}}{\text{sen}\alpha_2} = \frac{d_1}{\text{sen}[\pi - (\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)]}$$

Al tener los ángulos suplementarios el mismo seno, las igualdades anteriores quedarán de la siguiente forma:

$$\overline{AD} = \frac{d_1 \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)}, \quad \overline{BD} = \frac{d_1 \text{sen}\alpha_2}{\text{sen}(\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABD , se obtiene la distancia buscada:

$$d^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \beta_2 \quad \blacksquare$$

4.9. EXPRESIONES PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Sea el siguiente triángulo:

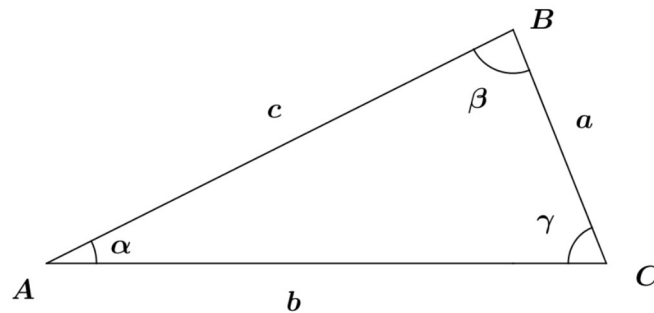


Figura 30. Notación Triángulo (elaboración propia).

A continuación, se va a calcular su área en distintos casos.

4.9.1. ÁREA DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE DOS LADOS DEL MISMO Y DEL ÁNGULO QUE FORMAN

El área S de un triángulo $\triangle ABC$ de lados a , b y c puede obtenerse mediante:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

DEMOSTRACIÓN

- Si el ángulo α es agudo, $\sin\alpha = \frac{h}{c}$, de donde $h = c\sin\alpha$ y entonces el área es $S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.
- Si α es recto, el triángulo es rectángulo y $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.
- Si α es obtuso, $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{h}{c}$ y $S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ ■

Una forma de medir superficies únicamente utilizando la cinta métrica es triangulando la superficie, de este modo el problema pasa al cálculo del área de un triángulo en función de sus lados. Este problema fue resuelto por Arquímedes, pero es Herón de Alejandría quien le da nombre a esta fórmula. La forma de demostrarla es mediante las siguientes fórmulas:

4.9.2. FÓRMULAS DE BRIGGS

Sea p el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$, entonces:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

DEMOSTRACIÓN

Del teorema del coseno obtenemos $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, si sustituimos esta expresión

en la primera de las igualdades: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$, tenemos:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

Para la segunda igualdad escribiremos:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{p(p-a)}{bc}.$$

4.9.3. FÓRMULA DE HERÓN

Si p es el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$, el área de éste es

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DEMOSTRACIÓN

Aplicando las fórmulas de Briggs:

$$S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}bc2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4.9.4. ÁREA DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE SUS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

Si R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , el área de éste es:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

DEMOSTRACIÓN

Según el teorema del seno es $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$, es decir, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$, así que el área del triángulo es $S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

4.9.5. ÁREA DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE SUS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA

Sea p el semiperímetro de un triángulo ABC y r es el radio de su circunferencia inscrita, el área del triángulo ABC es:

$$S = pr$$

DEMOSTRACIÓN

Sea I es el centro de la circunferencia inscrita, el área del triángulo ABC es la suma de las áreas de los triángulos CIB , AIB y AIC , siendo esta:

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr.$$

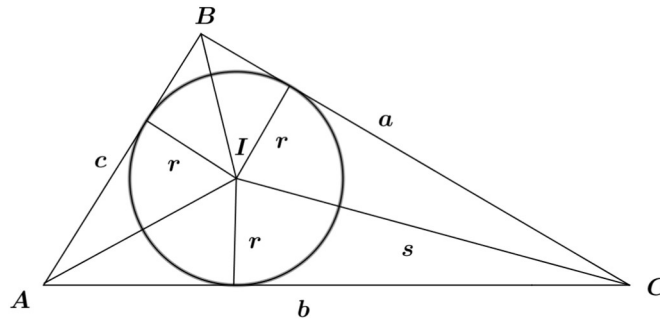


Figura 31. Circunferencia inscrita (elaboración propia).

4.10. UNA APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA A LOS NÚMEROS COMPLEJOS. FÓRMULA DE MOIVRE

Con esta fórmula Abraham de Moivre relacionó los números complejos con la Trigonometría a partir del seno y el coseno. Vamos a verlo a continuación.

Fórmula de Moivre

Si se tiene un número complejo en la forma polar $z = r_{\theta}$, donde r es el módulo del número complejo z , y el ángulo θ es llamado amplitud o argumento de cualquier número complejo con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, al escribir z en su forma trigonométrica, para calcular la n -ésima potencia se procede de la siguiente manera:

$$\text{Si } z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \text{ entonces } z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

DEMOSTRACIÓN

– Base inductiva

Primero se comprueba para $n=1$

$$\text{Como } z^1 = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^1 = r^1 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r^1 [\cos(1 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(1 \cdot \theta)]$$

, se tiene que para $n = 1$ se cumple el teorema.

– Hipótesis inductiva

Se supone que la fórmula es cierta para algún entero positivo, es decir, $n=k$.

$$z^k = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^k = r^k (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta))$$

Comprobación

Se prueba que es cierta para $n = k + 1$.

Como $z^{k+1} = z^k \cdot z$, entonces:

$$z^{k+1} = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^{k+1} = r^k (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)) \cdot r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Multiplicando las expresiones:

$$z^{k+1} = r^{k+1} (\cos(k\theta) \cdot \cos \theta + \cos(k\theta) \cdot i \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen}(k\theta) \cdot \cos \theta + i \operatorname{sen}(k\theta) \cdot i \operatorname{sen} \theta)$$

Si se ignora r^{k+1} y sacamos factor común i :

$$\cos(k\theta) \cdot \cos \theta + i(\cos(k\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta) + i(\operatorname{sen}(k\theta) \cdot \cos \theta) - \operatorname{sen}(k\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Ordenamos la parte real y la imaginaria:

$$\cos(k\theta) \cdot \cos \theta - \operatorname{sen}(k\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta + i[\operatorname{sen}(k\theta) \cdot \cos \theta + \cos(k\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta]$$

Para simplificar la expresión se aplican las identidades trigonométricas de suma de ángulos para el coseno y seno, que son:

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cdot \cos B + \cos A \cdot \operatorname{sen} B$$

En este caso, las variables son los ángulos θ y $k\theta$. Aplicando las identidades trigonométricas, se tiene:

$$\cos(k\theta) \cdot \cos \theta - \operatorname{sen}(k\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta = \cos(k\theta + \theta)$$

$$\operatorname{sen}(k\theta) \cdot \cos \theta + \cos(k\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(k\theta + \theta)$$

De este modo, nos queda:

$$z^{k+1} = r^{k+1} (\cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta))$$

$$z^{k+1} = r^{k+1} (\cos[(k+1) \cdot \theta] + i \operatorname{sen}[(k+1) \cdot \theta])$$

De esta manera se demuestra que el resultado es verdadero para $n = k + 1$. Por el principio de inducción matemática, el resultado es verdadero para todos los enteros positivos; es decir, $n \geq 1$.

Para el caso de $n < 0$, siendo n un entero negativo lo escribimos como $n = -m$, siendo m un entero positivo. Entonces:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^m}$$

Utilizando que si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces $\frac{1}{z} = a - bi$, por lo que

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y que $-\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(-\theta)$, se tiene que:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = [\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)]$$

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)$$

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \blacksquare$$

Bibliografía

- Ayres Jr. F., Moyer R. E. (1991). Trigonometría. México: McGraw-Hill.
- De Diego Martín, B., Llerena Achútegui, A. Padilla Garvía, F. (2000). Temas de oposiciones a profesores de enseñanza secundaria Matemáticas. Tomo 2. Madrid: Deimos.
- Encabo de Lucas J.A., Gómez P., de Haro G., Miranda E., Nicolás F.J. (2010). Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas. Volumen II. Madrid: editorial CEP.
- García I., Gómez J., Navarro J., García F., Pina E.M. (2013). Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas. Volumen II. Sevilla: Editorial MAD
- Nelsen R.B. (1993). Proofs Without Words. Portland: The Mathematical Association of America.
- D'Alessio V.J. (s. f). Teorema de Moivre: demostración y ejercicios resueltos. Recuperado el 10 de junio de 2020, de Lifeder.com website: <https://www.lifeder.com/teorema-moivre/>

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

La Trigonometría es una parte fundamental del currículo de la ESO y Bachillerato, pero al igual que ocurre con otras ramas de las Matemáticas sus conceptos y definiciones suelen ser causa de una mala interpretación y concepción por parte del alumnado. Es por este motivo por el que se ha escogido el análisis didáctico y cognitivo de algunos elementos trigonométricos, más en particular, en los significados e interpretaciones que otorgan los estudiantes de ESO y Bachillerato a las razones trigonométricas. A tal efecto, a partir del artículo “Significado escolar de las razones trigonométricas elementales” escrito por Enrique Martín Fernández, Juan Francisco Ruiz Hidalgo y Luis Rico, editado en la revista “Enseñanza de las ciencias” (2016), se analiza, indaga y desarrolla esta temática junto con el trabajo de investigación “significados

puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio” de Enrique Martín Fernández (2013), así como con la comunicación “Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de Bachillerato” escrita por estos mismos autores, presentada en XVIII simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM 2014) y recogido en sus actas correspondientes. Tanto el artículo como la comunicación versan sobre el mismo tema tratado por Martínez Fernández en su estudio de investigación, siendo este la raíz y base para la realización de dichos artículos.

Posteriormente, también se analizará el artículo “Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría” de José Luis Miranda Nava y Erika S. Maldonado Mejía publicado en el año 2009 por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C; basado en alumnos de México con el nivel académico correspondiente a ESO y Bachillerato en España, donde se analiza cómo se enseñan los elementos trigonométricos y el concepto resultante de dicha enseñanza en los estudiantes de estos cursos.

Martín Fernández expone tanto en sus artículos como en el trabajo de investigación las lagunas e interpretaciones erróneas que el estudiante tiene sobre las razones trigonométricas, así pues, cita en su estudio a algunos autores como Merkel (1982) el cual en su publicación *Trigonometry -forgotten and abused-*, escribe sobre la poca atención que se le da a la trigonometría en la enseñanza secundaria, lo cual provocaba grandes lagunas en conceptos básicos de esta rama de las matemáticas cuando el alumno pasaba a realizar los estudios universitarios.

En el trabajo de Martín Fernández queda claramente expuesta la importancia de la Trigonometría, tanto desde el aspecto matemático, la aplicación en la vida real, así como su relevancia en la enseñanza secundaria. En este trabajo queda recogida la idea en la que según The Mathematical Association (1950), citada por Fi (2003, p.13), la trigonometría provee a los estudiantes del conocimiento matemático necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes y suministra a los estudiantes una coherente visión de las matemáticas. En relación con este aspecto, Gelfand y Saul (2001) afirman que la trigonometría se sitúa en el centro de las matemáticas en la enseñanza secundaria.

La dificultad que entraña la Trigonometría para los estudiantes se debe a distintos factores (Brown 2005), entre los que cabe citar la complejidad que supone, así como las interrelaciones que se establecen con otras áreas del conocimiento. Esto puede influir en la forma de cómo los alumnos entienden y representan las razones trigonométricas

En este análisis, vamos a ver como los alumnos de E.S.O y Bachillerato comprenden e interpretan las razones trigonométricas y en especial los conceptos de

seno y coseno, apoyándonos en las representaciones gráficas y descripciones verbales realizadas por un grupo muestral de alumnos. Este estudio se caracteriza por ser cualitativo desde el punto de vista de identificar, analizar y describir los términos y representaciones utilizadas por los estudiantes para definir las razones trigonométricas del seno y el coseno.

5.1. OBJETIVOS

Martínez Fernández pretende responder a cómo expresan los estudiantes los conceptos de seno y coseno, tanto de forma verbal como simbólica, mediante representaciones gráficas e ideas verbales. También responde a los usos que hacen de estos conceptos y como resuelven e interpretan actividades relacionadas con estas razones trigonométricas.

Para dar respuesta a las preguntas anteriores, el autor de este trabajo realiza una recogida de información mediante un cuestionario a un grupo muestral de alumnos. De los datos obtenidos realiza una clasificación estableciendo unos temas, categorías y subcategorías en función del tipo de representación y respuesta verbal emitida por el alumno. Para finalmente llegar a un resultado que permite conocer los significados que los estudiantes conceden al seno y coseno de un ángulo.

5.2. ANTECEDENTES

Martín Fernández realiza una revisión de los escritos que han tratado sobre investigaciones referentes a la enseñanza de la trigonometría y que han ayudado a la elaboración de su trabajo de investigación. Esta revisión se realiza desde dos aspectos que son: las técnicas para la enseñanza de trigonometría y la comprensión de esta.

Enrique Martín Fernández enumera algunas de las investigaciones realizadas sobre técnicas para la enseñanza de la Trigonometría. Entre todas ellas cabe destacar:

- Enseñanza de la Trigonometría aplicando situaciones reales como son las investigaciones de Army (1991) y Thompson (2007) con el propósito de mejorar su comprensión.
- Uso de Software interactivo y calculadoras gráficas, como son el caso de las investigaciones de Blackett y Tall (1991), Army (1991), Zengin, Furkan y Ketluca (2011) con el uso del software de geometría dinámica (Geogebra). Los resultados obtenidos en estas investigaciones favorecen la comprensión de los conceptos trigonométricos mediante el uso de estas herramientas informáticas.
- Introducción de la trigonometría utilizando el triángulo rectángulo o mediante la circunferencia goniométrica, Kendal y Stacey (1998), Bressoud (2010). En ambas investigaciones se concluye que el uso de la circunferencia unidad es la más recomendable para el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Martín 2013).

En cuanto a investigaciones sobre la comprensión de la trigonometría Martín Fernández expone de manera sucinta las investigaciones de Weber (2005) y Brown (2005). Brown (2005, p. 11) hace un estudio de cómo los estudiantes llegan a entender las funciones seno y coseno. Por otro lado, Weber (2008, pp. 1-2) manifiesta que existen dos formas principales en que se representan las funciones trigonométricas: como cociente y como función.

Byers (2010, pp. 1-5) basa su investigación en el tratamiento dado a las representaciones trigonométricas en los libros de textos de la enseñanza secundario y de la universidad. Con esto pretende detectar las dificultades en la transición entre ambas etapas. De esta investigación identificó seis dominios conceptuales por los que se caracterizan las representaciones de las funciones trigonométricas, siendo estos:

1. Los cocientes trigonométricos
2. La función trigonométrica.
3. La circunferencia unidad.
4. La onda sinusoidal.
5. El vector.
6. El triángulo rectángulo.

5.3. SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO ESCOLAR

El significado de concepto matemático escolar que adopta Enrique Martínez en su estudio está basado en la propuesta presentada por Rico (2007) y en la cual se consideran tres componentes, tal como viene indicado en su estudio de investigación:

- Estructura conceptual: Son los conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones, además de los criterios de veracidad derivados.
- Sistemas de representación: Son los signos, gráficos y reglas que determinan al concepto.
- Fenomenología: Compuesta por los fenómenos, contextos y situaciones en los que aparece el concepto o le dan sentido

5.4. MARCO METODOLÓGICO⁷

La investigación de Martín Fernández se basa en “delimitar, describir y caracterizar los significados puestos de manifiesto por estudiantes españoles de primero de Bachillerato sobre las razones trigonométricas seno y coseno” (Martín 2013).

El estudio se caracteriza por ser exploratorio, ya que se examina un tema de investigación poco estudiado; es innovador. Está centrado en los significados de dos

⁷ (Martín 2013)

conceptos tan importantes en las matemáticas escolares como son el seno y el coseno. Además, es un estudio descriptivo al recoger datos sobre los significados otorgados por los alumnos sobre las razones trigonométricas seno y coseno.

En cuanto al análisis de los datos se categorizan observando la relación entre las representaciones verbal y gráfica, para analizarlos de forma cualitativa.

Para el estudio se han escogido 74 alumnos de primero de Bachillerato, de la asignatura de Matemáticas I, pertenecientes al Instituto de Educación Secundaria Padre Suárez de Granada. Cuando se realizó el estudio los conocimientos de Trigonometría de estos alumnos eran los adquiridos en 4º curso de la E.S.O y estaban desarrollando o acababan de finalizar la unidad didáctica de Trigonometría correspondiente a Bachillerato, dependiendo a qué grupo perteneciesen; por este motivo se hizo una selección de la muestra para que esta situación no afectase a los resultados y fuese representativa de la realidad. De este modo los grupos quedaron conformados según las calificaciones de los alumnos, resultando 3 grupos; el grupo 1 con notas de 0 a 3, el grupo 2 con notas de 3 a 7 y el grupo 3 con notas de 7 a 10.

La recogida de datos se realizó mediante aplicación de dos cuestionarios semánticos (Blok, 2014) de ocho ítems de respuesta abierta cada uno, estructuralmente iguales, que denominamos opción A y opción B. Todas las preguntas de la opción A eran relativas al seno de un ángulo menor de 90° , mientras que las preguntas de la opción B lo eran sobre el coseno; la sexta pregunta fue idéntica en ambos cuestionarios.

El cuestionario constaba de 15 cuestiones y cada una de ellas de 8 ítems. Entre las actividades elegidas en la investigación cabe citar:

- Ítem 1. Se pretende conocer el grado de comprensión de las razones trigonométricas del $\text{sen}30^\circ$ y $\text{cos}30^\circ$, mediante su representación y las preferencias en las formas de representarlas. Las preguntas realizadas son:
 - cuestionario A. “Haz un dibujo en el que se muestre $\text{sen}(30^\circ)$ ”.
 - cuestionario B. “Haz un dibujo en que se muestre $\text{cos}(30^\circ)$ ”.
- Ítem 2. Va relacionado con el modo de representación verbal. Las preguntas realizadas son:
 - cuestionario A. “Explica verbalmente qué entiendes por $\text{sen}(45^\circ)$ ”.
 - cuestionario B. “Explica verbalmente qué entiendes por $\text{cos}(45^\circ)$ ”.
- Ítem 6. Este ítem es común a las dos opciones y en él los alumnos deberán mostrar alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo a partir de un dibujo. En este caso la pregunta es:
 - cuestionarios A y B. “Haz un dibujo que muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo”.

5.5. ANÁLISIS REALIZADO

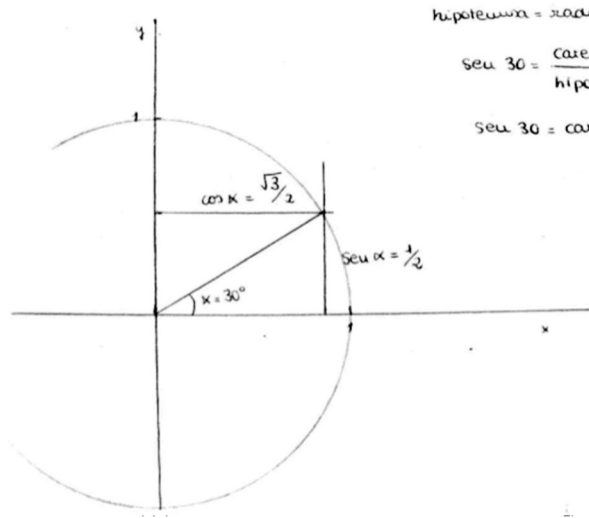
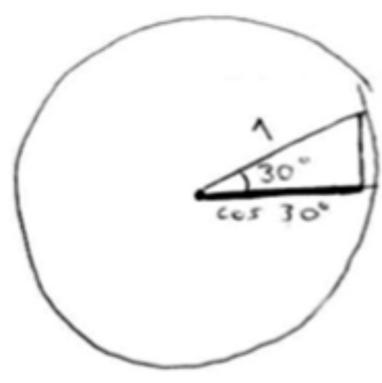
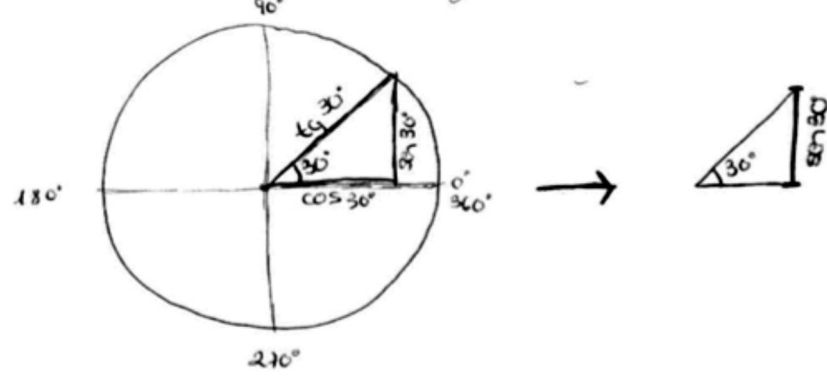
En este estudio Martín Fernández realiza un análisis en el que se han considerado unidades simples de contenido que identifican hechos, conceptos y destrezas, a partir de los cuales se inducen categorías mediante su análisis y comparación.

5.5.1. PROCEDIMIENTO, ORGANIZACIÓN E INTERPRETACIÓN DE DATOS

En la siguiente tabla se muestran algunas representaciones gráficas realizadas por los alumnos al contestar los ítems del cuestionario y como ya se dijo anteriormente con el propósito de investigar el concepto que tiene el alumnado de las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo.

Martín Fernández tal como deja de manifiesto en su estudio de investigación, hace un análisis de las producciones de cada individuo; examina comparativamente las producciones e identifica los conceptos que emergen de los datos; de este modo se puede detectar las ideas centrales y se delimitan unos temas principales (Strauss y Corbin, 1998). Dichos temas, en nuestro caso, fueron el triángulo y la circunferencia.

ALGUNOS RESULTADOS MEDIANTE LA UTILIAZACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA	
Ejemplos de producciones de los estudiantes con los temas triángulo y circunferencia.	
Ejemplos de producciones de estudiantes con los temas ángulo y función trigonométrica.	

Respuesta de estudiante utilizando ejes como elemento de división de la circunferencia.	 hipotenusa = radio = 1 $\text{sen } 30 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\text{sen } 30 = \text{cateto opuesto} = \frac{1}{2}$
Respuesta de estudiante utilizando radios como elemento de división de la circunferencia.	
Producción asociada a la categoría «ángulo interior de un triángulo».	

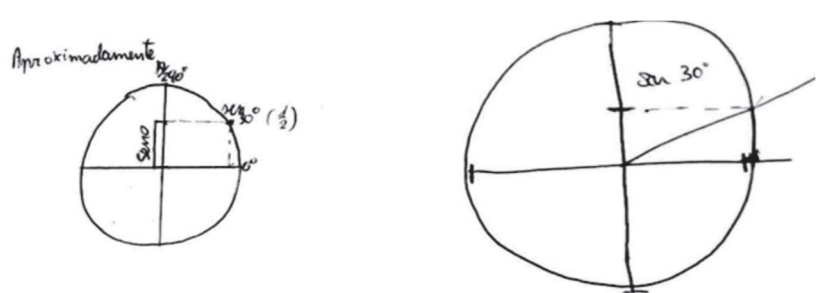
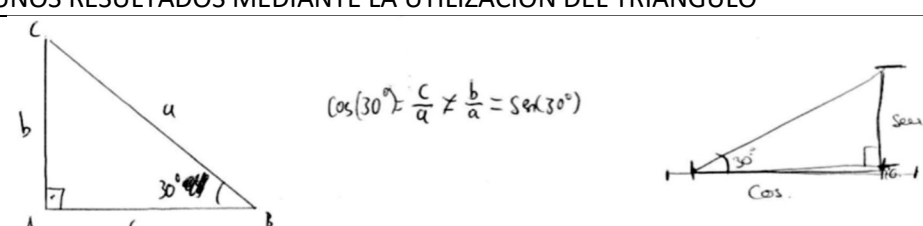
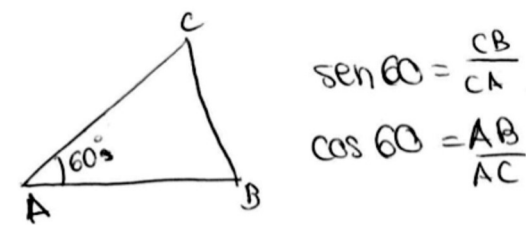
Producción asociada a la subcategoría «punto en una circunferencia y un segmento» y «ángulo central».	
ALGUNOS RESULTADOS MEDIANTE LA UTILIZACIÓN DEL TRIANGULO	
Producciones de estudiantes utilizando un triángulo rectángulo.	
Producciones asociadas a las subcategorías «longitud» y «ángulo interior».	
Producción asociada a la subcategoría «cociente».	

Tabla 5. Representaciones gráficas de las razones trigonométricas. cuestionario.

(Martín, Ruíz y Rico 2016)

Los datos obtenidos de los cuestionarios dan dos ideas principales en la interpretación de las razones trigonométricas que son el triángulo y la circunferencia, en un tercer lugar también aparece la función trigonométrica. De esas ideas principales aparecen otras unidades de información, siendo en el caso de la circunferencia los ejes, el radio y el diámetro, también aparecen subcategorías donde se encuentran dichas unidades. En la siguiente tabla quedan sintetizados todos los elementos resultantes del análisis del cuestionario para el tema circunferencia:

Categorías	Circunferencia		
	Identificación		Señalización
Elementos de división de la circunferencia	Ejes		Con señalización X-Y
			Sin señalización
	Segmentos	Diámetros Radios Radios y diámetros	
Modo de indicar el ángulo	Ángulo central		Se indica amplitud
	Ángulo interior de un triángulo		Se indica o no la amplitud
	Un punto en una circunferencia y un segmento		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto/ hipotenusa	Indicación interna: color, subrayado y segmento
	Coordenada cartesiana		Indicación externa: flecha, corchete, segmento auxiliar y cota
	Longitud		

Tabla 6. Categorización de las producciones para el tema circunferencia. (Martín et al. 2016)

Para el concepto de triángulos quedaron identificadas como subcategorías: “triángulo rectángulo” y “triángulo no rectángulo”, de estas subcategorías se obtuvo la categoría “tipo de triángulo utilizado”. De la misma manera, se analizaron las respuestas de los estudiantes a las razones trigonométricas, dando lugar a las siguientes subcategorías: “cociente” (mediante cateto partido hipotenusa o razón de lados), “longitud” y “ángulo interior” (ver tabla 1). En último lugar quedó establecida la categoría “modo de indicar el valor de la razón trigonométrica” (ver tabla 2), (Martín, Ruíz y Rico, 2016).

Las categorías, subcategorías y unidades obtenidas en relación al triángulo quedan resumidas en la siguiente tabla:

Categorías	Triángulo		
	Identificación		Señalización
Tipo de triángulo	Rectángulo		Con o sin el símbolo del ángulo recto
	No rectángulo		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto/ hipotenusa	Mediante vértices
		Lados	Mediante lados
	Longitud	Cateto Lado	Indicación interna: color, subrayado y segmento
	Ángulo interior		Indicación externa: flecha, corchete, segmento auxiliar y cota

Tabla 7. Categorización de producciones para el tema triángulo. (Martín et al. 2016)

5.6. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

En un primer nivel la circunferencia y el triángulo son los elementos utilizados por los estudiantes para representar las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo.

La utilización de triángulos rectángulos y no rectángulos por un lado y la circunferencia representada como circunferencia de radio R o como circunferencia goniométrica aparecen en un segundo nivel (ver tabla 1).

Si tenemos sólo en consideración la circunferencia, los ángulos aparecen representados de dos formas: por la longitud de un segmento y teniendo en cuenta sus coordenadas en la circunferencia goniométrica.

En el caso de considerar el triángulo, aparece el triángulo rectángulo y el no rectángulo. Este último al representar los alumnos la medida de un ángulo, pasan a interpretarlo como un triángulo rectángulo también. En cuanto a una interpretación correcta del seno y el coseno de un ángulo, nos encontramos que los estudiantes lo entienden como razón. Además de las interpretaciones ya mencionadas, aparecen otras erróneas mediante el uso del triángulo como son: reconocer las razones trigonométricas de seno y coseno como un ángulo interior o identificarlas con una distancia en un triángulo rectángulo de hipotenusa diferente de uno (Martín et al. 2016).

5.6.1. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El concepto de seno y coseno queda expresado por parte de los alumnos con una gran variedad de ideas y representaciones. Vamos a ver algunas de ellas:

- Nociones relacionadas con la idea de ángulo como son: ángulo interior de un triángulo y la razón entre los lados de un triángulo.
- Nociones relacionadas con la idea de longitud: ordenada de una función trigonométrica, coordenada cartesiana y distancia, lados de un triángulo y segmentos.

De las interpretaciones realizadas una mayoría de participantes interpretaron el seno y el coseno como una longitud (56,10 %), (Martín, 2014).

De los resultados obtenidos en el cuestionario podemos decir que los estudiantes tienen un conocimiento mínimo del seno y coseno como coordenada. En el caso del uso de la circunferencia (56,10%), los segmentos son los elementos utilizados para dividirla (40,85%), representándose de forma errónea los ejes de coordenadas ya que el alumno emplea segmentos en lugar de rectas o de semirrectas. También se observa el uso de la circunferencia de forma casual en la mayoría de los casos representados y se aprecia que la mayoría de los alumnos comienzan con la representación de la circunferencia

(56,10%) para terminar utilizando el triángulo a la hora de identificar tanto seno como coseno. En la figura siguiente podemos ver esta situación:

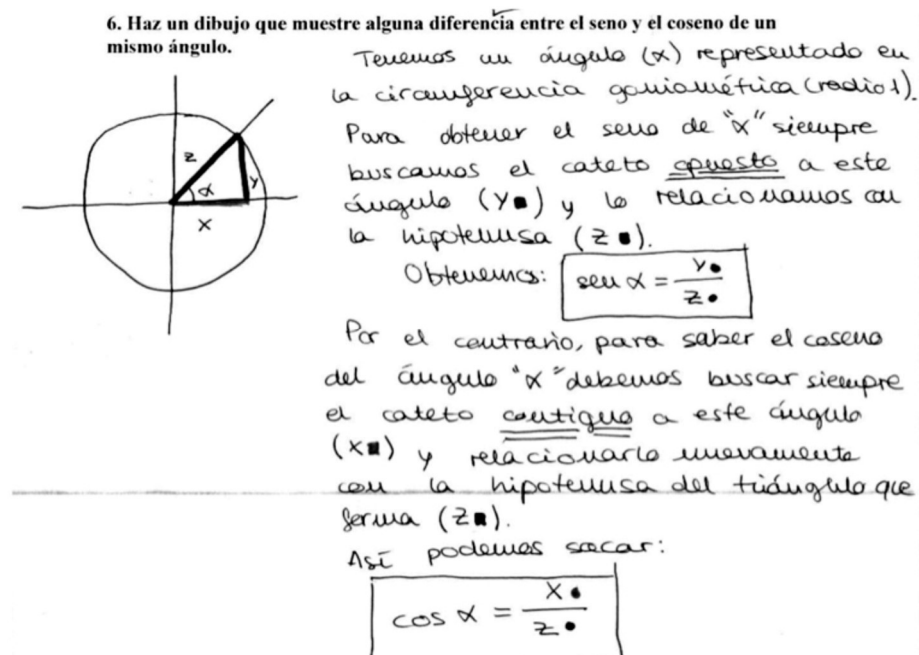


Figura 32. Producción asociada a la sub-categoría "cociente" (Martín et al. 2016).

También podemos ver que, de los resultados obtenidos del cuestionario, para mostrar el seno y coseno de un ángulo, estos son interpretados por los estudiantes de forma errónea, considerándolos como segmentos en vez de como razón. Para su representación los alumnos se ayudan de una circunferencia de radio R1.

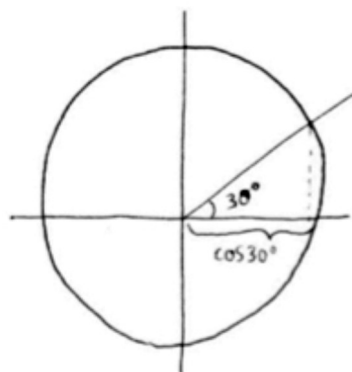


Figura 33. Representación asociada a la sub-categoría longitud (Martín et al, 2016).

En cuanto a la circunferencia goniométrica, un gran número de alumnos no la entiende correctamente, ya que muchos de ellos desconocen el valor de su radio. El rango de valores de las razones trigonométricas también es desconocido por algunos de ellos.

Los alumnos establecieron una relación entre las razones trigonométricas y el triángulo rectángulo, siendo un 37,20% los que establecieron dicha relación y únicamente un 3,66% los que la dispusieron respecto a triángulos no rectángulos.

La mayoría de los estudiantes tampoco establecen una relación de las razones trigonométricas con la idea de proporción ni con los valores de las funciones trigonométricas.

En las contestaciones al cuestionario aparecen otras representaciones como son: la noción de razón trigonométrica interpretada como cociente, distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes, la idea de razón trigonométrica como cociente entre los lados de un triángulo rectángulo, representación de ángulo, ángulo interior de un triángulo o la representación como cociente entre lados de un triángulo (ver tabla 1).

Por último, cabe indicar que en el cuestionario únicamente apareció un 6,10% de respuestas en blanco, de lo que podemos inferir que el estudiante está familiarizado con estos conceptos. También se observó una familiarización de los alumnos con la representación de ángulos en una circunferencia (Martín et al. 2016).

5.7. CONCLUSIONES

A continuación, se detallan las conclusiones a las que se llega en el estudio de investigación en relación al concepto que tienen los alumnos respecto al seno y coseno.

En un análisis general de las cuestiones planteadas podemos decir que:

- El concepto de seno y coseno es muy diverso entre los estudiantes cuando lo explican verbalmente.
- Los alumnos mediante las ideas de razón o cociente, valor, segmento, medida y herramienta conciben de forma verbal las nociones de seno y coseno de un ángulo.
- Los estudiantes no establecen una relación entre las razones trigonométricas y los valores dados por una función trigonométrica.

Seguidamente vamos a ver de forma pormenorizada las conclusiones resultantes según las cuestiones planteadas.

Para la cuestión 2 “sobre qué entienden los alumnos por razón trigonométrica seno o coseno” se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- No se identifican con la proporción.
- Los conceptos de seno y coseno como segmentos deberían estar solamente ligados a tema de la circunferencia, también los relacionan con el triángulo.
- No relacionan estas razones trigonométricas con la vida real, por lo que no las expresan como elementos útiles.

- Los alumnos conocen el rango de valores del seno y coseno de 45° .
- La dificultad de los dos conceptos es la misma para los estudiantes.
- Los conceptos de seno y coseno se relacionan con nociones ya manifestadas en otros estudios con el de Weber (2005) donde se relacionaban con el cociente; o con otras ideas como distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes; cociente entre los lados de un triángulo rectángulo (Brown, 2006). También aparecen relacionados con nuevas ideas como las de medida, valor numérico y herramienta.
- Las expresiones utilizadas por los alumnos para definir seno y coseno se muy variadas, lo que supone una gran variedad de significados a la hora de interpretar estos términos.

En cuanto a las conclusiones obtenidas de las respuestas dadas a las cuestiones 1 y 6, relacionadas con la representación del seno y el coseno tenemos:

- La idea de longitud es la más empleada por parte de los estudiantes cuando representan las razones trigonométricas.
- Se presentan una gran variedad de interpretaciones, entre ellas podemos mencionar: idea de ángulo para el caso del coseno, idea de ángulo interior de un triángulo, razón entre los lados del triángulo, noción de longitud en relación a los lados de un triángulo o la ordenada de una función trigonométrica.
- En la mayoría de las representaciones para la definición del seno y coseno de un ángulo se emplea la circunferencia, pero en la mayoría de los casos no se utiliza correctamente terminando por utilizar el triángulo para definir estas razones trigonométricas. Además, el triángulo utilizado suele ser el triángulo rectángulo.
- Los alumnos no entienden de forma correcta la circunferencia goniométrica, obviando el valor de su radio.

5.8. OTROS ESTUDIOS DIDÁCTICOS DE LOS ELEMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

En este apartado analizaremos el artículo “Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría” (Maldonado y Miranda, 2009). Con esto se pretende completar desde un enfoque diferente el estudio de investigación analizado anteriormente y ver si los resultados obtenidos añaden nuevos conflictos didácticos en la comprensión de los conceptos trigonométricos ya analizados.

Tal como se comentó con el análisis del trabajo realizado por Enrique Martín Fernández, el alumnado presenta distintas ideas respecto a los conceptos matemáticos de ángulo y razón trigonométrica. Esta afirmación está avalada por trabajos anteriores como son los de Martínez y Rodríguez (2005) en cuanto a la noción de ángulo, estudios realizados respecto a las razones trigonométricas (Araya et al, 2007) o los realizados por Maldonado (2005) y Montiel (2005) respecto al el conocimiento erróneo de la función trigonométrica. De aquí parte el estudio que estamos tratando y cuya autoría se debe a

José Luis Miranda Nava y Erika S. Maldonado Mejía (2009), desde donde pretenden analizar de forma didáctica los elementos trigonométricos desde dos perspectivas: como aparecen en la escuela y como son concebidos e interpretados por los escolares.

Ya hemos comentado con antelación la importancia de la Trigonometría como rama de las Matemáticas y dentro de la Trigonometría debemos hacer hincapié en la gran importancia que supone el conocimiento y dominio de los elementos de trigonometría para el posterior estudio de las funciones trigonométricas.

Con estas premisas parte el estudio realizado por Maldonado y Miranda (2009) y que hicieron tomando una muestra de alumnos del sistema educativo de México enmarcados en el nivel básico (secundaria) y nivel medio (superior). Estos niveles de estudio se corresponden en España con los cursos de E.S.O y Bachillerato, por lo que es un estudio sobre una muestra equiparable a la escogida por Enrique Martínez y que vimos anteriormente. Estos cursos escolares fueron escogidos por los autores del estudio motivados por el hecho de que la Trigonometría se imparte en el nivel medio (equivalente en España a 4º de E.S.O y Bachillerato).

El aprendizaje incorrecto de los conceptos de ángulo y razón trigonométrica puede causar una mala comprensión de la función trigonométrica, de aquí que surja la pregunta “¿Cómo están presentes los elementos de la trigonometría en el medio escolar y cuáles son las concepciones que el estudiante tiene con respecto a los conceptos previos a la función trigonométrica, como son los elementos de trigonometría?” (Miranda y Maldonado 2009). La razón de esta pregunta se debe a dos propósitos (como ya se dijo en párrafos anteriores), que son por un lado cómo se enseñan los elementos de la trigonometría y por otro identificar la concepción que tienen los estudiantes de estos elementos.

Al referirnos al término concepción los autores de este trabajo de investigación didáctica⁸ se refieren a “los conocimientos del sujeto sobre un objeto, originados como consecuencia de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el seno de sistemas didácticos o en entornos informales, (Ruiz, 1998, p.49)”.

Como se comentó al inicio de este punto, distintas investigaciones anteriores han tratado este tema, así pues, podemos citar investigaciones que tratan de los problemas de los estudiantes frente al significado de la función trigonométrica (Montiel 2005), el concepto que tienen el alumnado de la idea de ángulo, razón y función trigonométrica (Martínez y Rodríguez 2005). De la investigación de Martínez y Rodríguez realizada mediante cuestionario a diecinueve alumnos, concluye que la mayoría de estos alumnos desconocen los ángulos que son mayores de 360º así como los negativos, además de que no relacionan las funciones trigonométricas y sus gráficas. Maldonado (2005) en un

⁸ Maldonado y Miranda (2009)

estudio didáctico realizado de la función trigonométrica deja de manifiesto el desconocimiento que tienen los estudiantes de este concepto. Montiel (2005) también trata el tema de la función trigonométrica en relación al tratamiento escolar que se le da y los problemas y errores que tienen los estudiantes con este concepto, pudiendo citar:

- Problemas procedimentales en el cociente entre lados de un triángulo rectángulos como medio de definir el seno y coseno de un ángulo.
- Identificación de las coordenadas cartesianas de un punto situado en un círculo con el seno y el coseno de ese punto.
- Valores dados por una calculadora para el seno y coseno como la expresión de la medida de un ángulo.
- Conflictos en el significado de las representaciones gráficas de funciones trigonométricas.
- Errores en el concepto de ecuación las pocas veces que es utilizada por los alumnos.

La investigación de Maldonado y Miranda se centra principalmente en el estudio de los elementos de trigonometría que son necesarios con anterioridad al estudio de la función trigonométrica y se fundamenta en la transposición didáctica que se produce al pasar del “saber sabio” al “saber enseñar”, es decir, al paso del saber matemático al contenido a enseñar, así como del “saber enseñar” al “saber enseñado” donde el alumno llega a tener una concepción personal de los contenidos enseñados (Chevallard, 1991). En este contexto se producen cambios en el saber y se generan determinadas concepciones del alumno respecto a los conceptos aprendidos (las razones trigonométricas en nuestro caso). Este es el marco donde se mueve y desarrolla el estudio que estamos tratando.

Maldonado y Miranda se basan en el análisis de los libros de texto que se utilizan para la enseñanza de la Trigonometría en los niveles escolares ya descritos con anterioridad. Fruto de este análisis se hace un cuestionario en relación a los conceptos que definen los elementos trigonométricos y una vez resuelto por los estudiantes se compara con el contenido de los libros, de esta manera se extrae la concepción que tiene el estudiante de estas ideas de trigonometría.

5.8.1. CONCLUSIÓN DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE MALDONADO Y MIRANDA

La conclusión resultante de este estudio de investigación desarrollado por Maldonado y Miranda es que la conformación de los libros hace que el desarrollo de los conceptos trigonométricos queden dirigidos a la algoritmización, es decir, los ejercicios son de tipo cerrado estando enfocados a realizar de forma mecánica los cálculos necesarios que lleven a la solución directa de estos, de esta manera el

estudiante se ve limitado en el aprendizaje de los significados de los elementos trigonométricos y por tanto, adquiere un aprendizaje incorrecto de estos conceptos.

6. UNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA

6.1. TÍTULO

Una vez realizada la primera parte del Trabajo Fin de Master y sirviéndonos como marco de referencia, vamos a tratar la proyección didáctica para 4º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria dentro de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, mediante el desarrollo de una unidad didáctica denominada: Trigonometría.

6.2. JUSTIFICACIÓN

La Trigonometría es una rama de las Matemáticas con una importante riqueza conceptual y vinculada con otras disciplinas como la geometría, álgebra, aritmética y mecánica (Mathematical Association, 1950: 3). Su relevancia en la vida real se ve reflejada en su aplicación en diversos campos como la arquitectura, ingeniería, astronomía, topografía, geografía, telecomunicaciones y electricidad.

Hoy en día la Trigonometría está encuadrada en el programa matemático surgido en el encuentro respaldado por la OECE en Dubrownik (1960), formando actualmente parte del currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato. La Trigonometría forma parte del currículo de cuarto de E.S.O en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, así como en Matemáticas I de primero de Bachillerato según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y la orden de 14/07/2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación en el proceso de aprendizaje del alumnado, de conformidad con lo dispuesto en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, tras haber sido modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) y por la ley 17/2007 de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (L.E.A).

El Real Decreto 1105/2014 establece el desarrollo de la competencia matemática especialmente gracias a la asignatura de Matemáticas. La competencia matemática queda expresada “como habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas”, también pone de manifiesto que el “pensamiento matemático ayuda a la adquisición

del resto de competencias y contribuye a la formación intelectual del alumnado, lo que permitirá que se desenvuelva mejor tanto en el ámbito personal como social”.

Estas características justifican la importancia de las Matemáticas como disciplina escolar y por tanto la Trigonometría como rama de esta disciplina, que como se dijo anteriormente tiene una gran relevancia al ser aplicada en numerosos contextos de la vida real.

6.3. CONTEXTO DEL CENTRO Y DEL AULA DONDE SE DESARROLLA LA UNIDAD DIDÁCTICA

Debido a la situación provocada por el Covid-16, las prácticas docentes en institutos de Educación Secundaria se han realizado vía online. A pesar de la situación descrita vamos a considerar el supuesto de desarrollar la unidad didáctica en condiciones de normalidad en el instituto donde se han realizado las prácticas online del Máster.

Las prácticas se realizan en el I.E.S Alfonso XI de Alcalá la Real (Jaén). Este es el contexto donde se desarrolla la unidad didáctica.

El instituto está formado por dos edificios anexos de tres plantas y tres pistas polideportivas. Las aulas son pequeñas especialmente las de los cursos de post-obligatoria. Las aulas específicas, la sala de exámenes, el gimnasio y el salón de actos están ubicadas en la planta baja-sótano. En la planta primera se encuentran doce aulas, la biblioteca, la sala de profesores, secretaría, los despachos del equipo directivos, la sala de visitas, departamento de actividades extraescolares y servicios.

El aula donde se imparten las clases es un aula para 30 alumnos. Este curso académico está ocupada por 26 alumnos. Las mesas se distribuyen en forma de u, de esta manera hay una buena interacción con los alumnos. Por otro lado, la mesa del profesor está situada al lado de la pizarra sobre una tarima.

Los recursos que posee el aula son pizarra tradicional, proyector, pizarra digital, equipo informático y de audio, herramientas de medición como reglas, compás, transportador de ángulos, escuadra y cartabón. Además, el instituto dispone de ordenadores portátiles y un aula de informática.

Todos estos medios han sido tenidos en cuenta durante la planificación y desarrollo de la unidad didáctica.

6.4. OBJETIVOS

En este apartado vamos a trabajar en los objetivos que se trabajan en la unidad didáctica que vamos a desarrollar.

En el “artículo 2. Definiciones” del Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, se definen objetivos como “referentes relativos a los logros que el estudiante debe

alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin”.

A continuación, vamos a enunciar los objetivos desde tres grados de concreción curricular:

- Objetivos generales de etapa que se trabajan en la unidad didáctica
- Objetivos del área de matemáticas trabajados en la unidad didáctica
- Objetivos de la unidad didáctica

6.4.1. OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA⁹

La unidad didáctica se desarrolla en el cuarto curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria, siendo los objetivos marcados para esta etapa los establecidos en el Real Decreto 1105/2014, capítulo II, artículo 11. De estos, en nuestra unidad didáctica se fijarán los objetivos que vienen numerados por las letras **a, b, e, f, g, h y j** en este artículo 11 correspondiente al Capítulo II del Real Decreto 1105/2014. Por tanto, en la unidad didáctica quedarán desarrolladas las capacidades que permitan lograr los siguientes objetivos de etapa (la numeración respeta la presentada en el Real Decreto 1105/2014):

“a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

⁹ Real Decreto 1105/2014, Capítulo II, art. 11.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural”.

6.4.2. OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Para lograr los objetivos del área de Matemáticas, nos remitimos a la Orden de 14 de Julio de 2016, donde queda de manifiesto que la enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan alcanzar los 11 puntos que a continuación se presentan:¹⁰

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

¹⁰ Orden de 14 de julio de 2016. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Objetivos

6.4.3. OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

- Saber utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional.
- Conocer y aplicar las razones trigonométricas elementales (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo y las relaciones existentes entre estas.
- Conocer la circunferencia goniométrica, así como reconocer y utilizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
- Usar la calculadora para la resolución de problemas trigonométricos.
- Resolución de problemas en contextos de la vida real del alumno.
- Aplicar las TIC y en particular los sistemas de geometría dinámica como Geogebra, que permitan la resolución de problemas trigonométricos y faciliten la comprensión de los conceptos y propiedades de los elementos de la Trigonometría.
- Usar procesos y estrategias razonadas para la resolución de problemas.
- Aplicar la modelización matemática y metodologías innovadoras como recurso para la resolución de problemas en contexto reales.
- Desarrollar las actitudes del alumno propias al quehacer matemático.
- Aportar seguridad ante la resolución de situaciones desconocidas.

6.5. COMPETENCIAS CLAVE

En la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, se habla de la importancia de alcanzar las competencias clave como medio de afrontar el desarrollo, personal, social y profesional de las personas.

En el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre se define el término competencia como “las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”.

En el artículo 2 apartado 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre se establecen las competencias clave que aparecen en el currículo, y que quedaron ya numeradas en el apartado 3 de este TFM.

En la unidad didáctica además de las competencias matemáticas están involucradas otras competencias clave que a continuación vamos a detallar:¹¹

Competencia en comunicación lingüística. Se manifiesta en el uso continuo de la expresión oral y escrita cuando leemos de forma comprensiva la formulación, los problemas y tareas y expresamos nuestras ideas o en el desarrollo de los razonamientos. También en la realización de trabajos en grupo o en la

¹¹ Real Decreta 1105/2014, de 26 de diciembre, apartado 2, art. 2.

participación en clase en acciones comunicativas respetando los tiempos de intervención y coloquio.

Competencia matemática. La unidad se fundamenta en la adquisición de esta competencia basándose en la comprensión de los argumentos, la comunicación del lenguaje matemático, la aplicación del razonamiento matemático a la hora de la formulación, planteamiento, interpretación y la resolución de problemas. También se desarrolla al representar elementos de trigonometría, usar la simbología matemática o al resolver problemas trigonométricos en contextos reales.

Competencia digital. Con el uso de las TIC. Al utilizar la calculadora y herramientas informáticas como los sistemas de geometría dinámica, en nuestro caso más particularmente con el uso de Geogebra, al consultar y trabajar en Internet o al utilizar cualquier otro elemento informático que nos ayude a tratar, resolver y comprobar los problemas.

Competencia de aprender a aprender. Se presenta al valorar el conocimiento en trigonometría como elemento útil y de desarrollo de otros conocimientos. Esta competencia queda de manifiesto al usar herramientas matemáticas en la resolución de problemas. Al comunicar de forma eficiente los resultados. Al realizar de forma autónoma, responsable y con esfuerzo los problemas y actividades. En la explicación de los procesos de aprendizaje. En las metodologías empleadas para el proceso de aprendizaje de la trigonometría.

Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. Al resolver problemas, tareas y actividades con la planificación y toma de decisiones.

Competencias sociales y cívicas. Al presentar una actitud abierta en la resolución de las tareas, afrontando los errores cometidos con espíritu crítico y teniendo en cuenta otras perspectivas y enfoques. Esta competencia también aparece con el trabajo en equipo.

Competencia conciencia y expresiones culturales. Queda expresa en la Trigonometría como medio de expresión artística, así como su desarrollo y evolución histórica a través de diferentes culturas. Con el estudio de las Matemáticas y en particular con la Trigonometría como disciplina de carácter universal. Con Metodologías IBL mediante el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad.

6.6. CONTENIDOS

Los contenidos que se van a abordar en esta unidad didáctica corresponden al “Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” y “Bloque III. Geometría” de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, según queda establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El bloque I de “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” es el eje en el que se vertebra la asignatura y en él aparecen los contenidos transversales que se desarrollarán en esta unidad didáctica y que a continuación, se proceden a enunciar:

Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas ¹²

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas.1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.1.3 Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.1.5 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.1.6 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.1.7 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:<ul style="list-style-type: none">a) la recogida ordenada y la organización de datos.b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas. |
|--|

¹² Real Decreto 1105/2015 de 26 de diciembre. Anexo I

Bloque III. Geometría¹³

Al bloque III corresponde a los contenidos específicos de Trigonometría.

- 3.1 Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- 3.2 Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
- 3.3 Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
- 3.5 Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

6.7. METODOLOGÍA

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en su artículo 2 define metodología didáctica como: conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.

En el artículo 14.1 del Decreto 111/2016, de 14 de junio queda recogido “la aplicación de metodologías innovadoras, lo que facilitará el desarrollo de las capacidades de los alumnos y las alumnas y el logro de los objetivos de la etapa”.

La Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, en su artículo 4 dispone las recomendaciones de metodología didáctica para la Educación Secundaria Obligatoria según lo establecido en el artículo 7 del Decreto 111/2016, de 14 de junio. Entre las recomendaciones cabe indicar:¹⁴

- a) En estas recomendaciones queda patente que el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe afrontarse desde distintos ámbitos y debe tener un carácter transversal. Para llegar a este fin se indica la inclusión de estrategias dentro del P.E.C y de las programaciones didácticas para que los estudiantes alcancen las competencias clave.
- b) El profesor es la figura que orienta y facilita el desarrollo del alumno, teniendo en consideración los ritmos de cada alumno y la atención a la diversidad.
- c) Trabajo, confianza y respeto son característica que deben fomentar los centros de enseñanza.

¹³ Real Decreto 1105/2015 de 26 de diciembre. Anexo I

¹⁴ Orden de 14 de julio de 2016, artículo 4.

- d) La superación individual, desarrollar el potencial de cada alumno, promover el concepto propio y la autoconfianza, el aprendizaje por uno mismo y fomentar la colaboración entre compañeros, así como el trabajo en grupo; son el objetivo que deben alcanzar las metodologías aplicadas en los centros docentes.
- e) Dentro de las programaciones didácticas de la E.S.O habrá actividades que fomenten la lectura, hablar en público y la expresión escrita.
- f) Se fomentará el espíritu crítico, la investigación y el espíritu emprendedor.
- g) Se trabajará en actividades que desarrollen modos de tratar la información, el análisis, la observación y la experimentación.
- h) Aplicación de estrategias interactivas que permitan el intercambio de ideas entre los alumnos.
- i) Uso de metodologías activas que permitan la contextualización y que promuevan el aprendizaje basado en proyectos. Que sean motivadoras y fomenten la participación y experimentación de los alumnos.
- j) Se apuesta por un aprendizaje transversal en el que se tengan en cuenta las diferentes disciplinas para lograr las competencias poniendo en práctica trabajos de investigación y actividades integradas.
- k) Las TIC serán herramientas de usuales como medio para desarrollar el currículo.

Para la explicación y desarrollo de esta unidad didáctica la metodología empleada combinará aportes de metodología innovadora y tradicional. De este modo se utilizarán metodologías de tipo transitivo para la explicación de conceptos y definiciones, también se aplicarán estas metodologías tradicionales en la resolución de ejemplos prácticos, ejercicios y problemas. En las actividades realizadas con metodología tradicional se procurará huir de tendencias memorísticas y recetas, tendiendo a reflexionar sobre conceptos.

Las metodologías innovadoras serán utilizadas en contenidos transversales relacionados con el bloque I de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas donde mediante actividades y tareas de investigación nos adentraremos en la historia de la Trigonometría, así como las aplicaciones de esta disciplina una nuestra vida cotidiana.

El uso de las TIC y herramientas tecnológicas como la calculadora o el uso de programas de sistemas de geometría dinámica, en nuestro caso el uso de Geogebra, también serán útiles para la explicación y resolución de actividades. Estos elementos ayudarán a la conformación del pensamiento matemático en los alumnos. También serán un medio útil para un aprendizaje colaborativo y participativo del estudiante. El acceso a búsquedas en Internet también será un elemento de trabajo en esta unidad didáctica.

La experimentación y los recursos manipulativos serán parte activa del modelo de enseñanza-aprendizaje puesto en práctica dentro de metodologías IBL y de modelización. Con la puesta en escena de estas metodologías se busca una mejora en la motivación de los alumnos, un espíritu crítico, prácticas cooperativas y una identificación de la materia impartida con contextos cotidianos de los alumnos.

6.8. ACTIVIDADES Y RECURSOS

6.8.1. ACTIVIDADES

Las actividades que se van a realizar durante el desarrollo de la unidad didáctica están en consonancia con los contenidos de la unidad y su dificultad se irá graduando en función del avance de las sesiones. Con estas actividades se deberán alcanzar los objetivos fijados y en ellas se pondrán en práctica las distintas metodologías y herramientas citadas en el apartado anterior.

La unidad didáctica estará presidida por una tarea fundamentada en el aprendizaje basado en proyectos (ABP o IBL) denominada “Vamos a medir la Tierra”, por la que mediante descubrimiento guiado los alumnos tomarán contacto con los distintos conceptos y contenidos principales de la unidad. Esta tarea servirá de correa de transmisión en la puesta en práctica del aprendizaje de los elementos trigonométricos y se irá realizando durante varias sesiones. La tarea se realizará al inicio de estas sesiones como antesala a la explicación conceptual por parte del profesor. Una vez realizada la parte de la tarea que corresponda al contenido que se quiere impartir en la sesión, se presentarán los resultados de los alumnos y posteriormente el profesor dará una explicación tradicional del contenido tratado. Esta explicación irá acompañada de ejemplos de los conceptos tratados.

La tarea “Vamos a medir la Tierra” aparece explicada y desarrollada en el Anexo II de este TFM.

Otras actividades que se irán realizando en esta unidad didáctica son:

Ejercicios y problema:

- Ejercicio y problemas tradicionales que se realizarán en el aula o en horario no lectivo como deberes escolares, de modo que sirvan de repaso y afiancen las ideas aprendidas en clase. Aparecerán ejercicios con distintos niveles de dificultad, de esta manera se podrán adaptar al ritmo de aprendizaje del alumnado.
- Actividades que se identifique con aspectos curiosos y llamativos de la Trigonometría.
- Ejercicios de aplicación directa, que se realizarán una vez explicado cada concepto por el profesor.

- Ejercicios de evaluación, consistentes en la evaluación de los contenidos integrados en la unidad de forma que se puedan valorar los conocimientos adquiridos.

En las actividades que vamos a realizar tienen un importante papel el uso de las TIC, utilizándose en distintas situaciones como:

- En la proyección de algún video, en particular en la primera sesión que introduzca a los alumnos en la trigonometría.
- En las explicaciones del profesor mediante el apoyo en herramientas tecnológicas.
- Se hará uso de proyector y pizarra digital como medida auxiliar para las explicaciones cuando sea necesario.
- Utilización de internet como elemento de consulta. Estas consultas serán guiadas por el profesor.
- Uso de la calculadora, siendo esta parte del contenido de la unidad didáctica.
- Actividades con Geogebra. El uso de sistemas de geometría dinámica se utilizará como agente motivador, los elementos trigonométricos dejan de ser estáticos y podemos observarlos y manipularlos desde distintos puntos de vistas, de manera que se vayan explorando distintos conceptos y con ello consolidando su aprendizaje.

En las últimas sesiones se hará una segunda tarea ABP consistente en la realización de una revista de Trigonometría. Esta Tarea se realizará en grupos de 3 o 4 alumnos y con el Tema “Vamos a publicar una revista” cada grupo escribirá un artículo de cada uno de los siguientes temas:

- Historia de la Trigonometría. Con la consulta en páginas web se hará una breve introducción a la Trigonometría desde sus inicios hasta la actualidad. Se podrán utilizar para su redacción el contenido utilizado en la primera sesión. El profesor pondrá a disposición de los alumnos direcciones de páginas web y otros recursos de consulta.
- Trigonometría en la vida cotidiana. Se identificará un caso de la Naturaleza, o cualquier elemento inventado o hecho por el hombre donde aparezca representado un concepto o idea de la Trigonometría. El profesor mostrará un ejemplo de este tema.
- Aplicaciones de la Trigonometría. Aquí se escribirá un artículo donde mediante el uso de la trigonometría podemos resolver problemas prácticos en la vida real. El profesor presentará un ejemplo de aplicación.

Las actividades que se van a realizar a lo largo de la unidad didáctica se clasifican en los siguientes tipos:

TIPO DE ACTIVIDAD		FINALIDAD DE LA ACTIVIDAD
Actividad de diagnóstico	DIAG	Realizar un tanteo del nivel de alumnado
Actividad de Introducción	INT	Adaptarse al posterior ritmo de trabajo
Actividad de motivación	MOT	Buscan la implicación y "motivación" del alumno
Actividad de aprendizaje	AP	Adquirir destrezas procedimentales y conceptuales
Actividad de desarrollo	DES	Desarrollar y fijar los contenidos propuestos
Actividad consolidación	CON	Reforzar los aprendizajes
Actividad creativas	CRE	Posibilitan a partir de una idea desarrollar la creatividad
Actividad resumen	RESU	Permiten al alumno observar los procesos obtenidos
Actividad de evaluación	EV	Determinan el grado de consecución de los objetivos

Tabla 8. Tipos de actividades en la unidad didáctica (Luque 2019).

La clasificación de esta tabla se ha hecho en función de los apuntes de la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de la Matemáticas II del profesor Lorenzo Luque.

Las actividades realizadas en esta unidad didáctica están desarrolladas en los Anexos II y III de este Trabajo Fin de Master.

6.8.2. RECURSOS

Los materiales y recursos utilizados en esta unidad didáctica para el desarrollo de la práctica educativa son:

Material Impreso

- Utilización de libros de texto. Para desarrollar esta unidad se utilizará el libro: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. Editorial: Anaya. Autores: José Colera Jiménez; Ignacio Gaztelu Albero; María José Oliveira González; Ramón Colera Cañas. Año: 2016.
- Apuntes propios del profesor. Estos apuntes servirán de complemento al libro de texto utilizado en clase.
- Fotocopias y material complementario facilitado por el profesor.

- Cuaderno de clase. Los alumnos además de apoyarse en el libro de texto, tomarán apuntes y realizarán los ejercicios indicados por el profesor.

Material audiovisual

- Pizarra digital para presentaciones e Internet.
- Proyector.
- Videos divulgativos de Youtube.

Material manipulativo

- Elementos de medida como regla, escuadra, cartabón, compás, transportador de ángulos y cinta métrica.
- Lápiz, bolígrafo, lápices de colores.

TIC

- Ordenadores en el aula de informática.
- Programa informático: Geogebra. Será el programa con el que el alumno se introducirá en los sistemas de geometría dinámica.
- Uso de páginas web. La explicación de contenidos estará apoyada por el acceso a páginas web como medio complementario.
- Calculadora.

Ambiental

- Aula (tanto la habitual como el aula de informática).
- Patio del Instituto.

Personal y humano

- Profesor de matemáticas.
- Alumnos
- Otro profesorado (departamento de matemáticas, profesores de otras disciplinas y equipo directivo)
- Tutor como figura responsable del alumno

6.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre hace referencia en su Artículo 9 al alumnado con necesidad específica de apoyo educativo de la siguiente manera:¹⁵

“Será de aplicación lo indicado en el capítulo I del título II de la Ley 2/2006, de 3 de mayo, en los artículos 71 a 79 bis, al alumnado que requiera una atención educativa diferente a la ordinaria, por presentar necesidades educativas especiales, por dificultades específicas de aprendizaje, Trastorno por Déficit de

¹⁵ Real Decreto 115/2014, de 26 de diciembre, artículo 9.

Atención e Hiperactividad (TDAH), por sus altas capacidades intelectuales, por haberse incorporado tarde al sistema educativo, o por condiciones personales o de historia escolar, para que pueda alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos establecidos con carácter general para todo el alumnado

Para que el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo al que se refiere el artículo 71 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, pueda alcanzar el máximo desarrollo de sus capacidades personales y los objetivos y competencias de cada etapa, se establecerán las medidas curriculares y organizativas oportunas que aseguren su adecuado progreso”.

En la Orden de 14/7/2016 también se regulan determinados aspectos de atención a la diversidad. En esta Orden queda de manifiesto que la finalidad de las actuaciones educativas que se realizan en la atención a la diversidad, es la consecución de las competencias claves y objetivos de etapa. También expresa que dan respuesta a diferentes situaciones en las que se puede encontrar el alumno como ritmos de aprendizaje, distintas capacidades, situaciones socioeconómicas, culturales, lingüísticas o de salud.

Debido a que estamos tratando un unidad didáctica concreta, las medidas de atención a la diversidad que sean de aplicación en esta unidad vendrán dadas por una evaluación al inicio del curso que permita ofrecer información individualizada del alumnado, así como un seguimiento de cada uno de los alumnos durante el curso, es decir, en el desarrollo de esta unidad se considera que ya se parte de un conocimiento del alumnado para poder aplicarles medidas individualizadas de atención a la diversidad.

En la atención a la diversidad durante el desarrollo de esta unidad didáctica tendrá un papel de especial importancia el uso de las TIC, ya que son flexibles y adaptables a la situación de cada alumno y se presentan como elemento motivador en el aprendizaje.

Para suplir las necesidades educativas de los alumnos producto de su diversidad se aplicarán dos tipos de medidas de apoyo ordinario y medidas de apoyo específico.

- **MEDIDAS DE APOYO ORDINARIO**

Con estas medidas se adaptan las prescripciones del currículo a la situación social y cultural del Instituto, así como a las características de los alumnos dándoles una atención individualizada sin que haya cambios en los objetivos. Para tomar estas medidas se tendrá el apoyo del departamento de orientación.

Las medidas de apoyo ordinario implantadas son:

Refuerzo individual, mediante programación de actividades de refuerzo para alumnos con un modo de aprendizaje más lento, y actividades de ampliación para alumnos con un aprendizaje más rápido.

Agrupamiento de alumnos que impliquen un refuerzo colectivo, mediante la realización de actividades cooperativas en las que aprenderán unos alumnos de otros e impliquen motivación.

Actividades heterogéneas. Con ellas se atenderá a la diversidad de la clase y mediante pequeñas modificaciones no habrá una diferenciación de los alumnos en la clase. Para ello, se realizará una adecuación de las actividades por nivel de dificultad de manera que puedan realizarse según el ritmo de aprendizaje de los alumnos.

Actividades de refuerzo. A partir de contextos diferentes y con distintos niveles de dificultad se tratan los mismos contenidos.

Realización de actividades en Geogebra adaptadas por niveles de dificultad.

• **MEDIDAS DE APOYO ESPECÍFICO**

Se realizan de forma personalizada a alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo que no respondan a las medidas de apoyo.

Los alumnos con necesidades específicas son alumnos con:

- Dificultades de aprendizaje. Con estos alumnos habrá una adaptación curricular y se utilizarán metodologías lúdicas y motivadoras con la realización de actividades manipulativas y el apoyo en las TIC. Se deberá establecer un trabajo coordinado con otros profesores y establecer un ambiente colaborativo con la familia.
- Alumnos TDA y TDAH. Habrá una adecuación y flexibilización del currículo en un ambiente estructurado y predecible donde estos alumnos aprenden con más facilidad. Otros elementos que se aplicarán con estos alumnos será: uso de material audiovisual, no poner tiempo en la realización de los exámenes, sentarlos en primera fila, permitir que corrijan sus errores.
- Alumnos con falta de motivación. Se aplicarán metodologías motivadoras mediante el uso de las TIC y la contextualización de las actividades.
- Alumnos NEAE. Habrá una adaptación curricular a las necesidades del alumno.
- Alumnos de incorporación tardía. Con estos alumnos se trabajará la socialización en el grupo mediante actividades grupales. En caso de alumnos con lengua distinta al español, se incorporarían a programas específicos para el aprendizaje del español.

- Alumnos de altas capacidades. Se adaptará el currículo a la situación de estos alumnos aportándoles contenidos más avanzados propios de un curso superior.

6.10. TEMPORALIZACIÓN

La unidad didáctica se desarrollará a lo largo del curso académico 2019/2020 durante 12 sesiones lectivas de una hora de duración cada una. En cada semana se impartirán 4 clases por lo que la unidad didáctica se extenderá a lo largo de 3 semanas. Estas clases se impartirán en el segundo trimestre.

Las sesiones que se impartirán son:

- Sesión 1: Introducción
- Sesión 2: Medidas angulares
- Sesión 3: Razones trigonométricas de un ángulo agudo
- Sesión 4: Relaciones trigonométricas fundamentales
- Sesión 5: Aplicaciones de la Trigonometría
- Sesión 6: Trigonometría Aplicada. Actividad en el patio
- Sesión 7: Razones trigonométricas 0° y 360°
- Sesión 8: Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas
- Sesión 9: Geogebra
- Sesión 10: Funciones trigonométricas
- Sesión 11: Clase de repaso y resolución de dudas
- Sesión 12: Evaluación

Las sesiones serán flexibles en cuanto al tiempo empleado en el desarrollo de los distintos contenidos que las componen.

La tarea “Medir la Tierra” será utilizada como directriz a lo largo de las sesiones para adentrarnos en la explicación de los distintos conceptos trigonométricos. Las actividades que se realizan en las sesiones están descritas en los Anexos II y III.

A continuación, se describen de forma más concreta cada una de las sesiones en las que se va a desarrollar la unidad didáctica.

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN	
Desarrollo: En esta primera sesión se hará un repaso por la historia de la Trigonometría, desde sus inicios hasta la actualidad. Posteriormente se verán los campos de aplicación de la Trigonometría y su presencia en la vida cotidiana de los alumnos. Se proyectará el vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4 y a continuación, se hará un debate en el que se irán intercalando preguntas relacionadas con conceptos básicos trigonométricos con las que se tendrá un primer contacto con los conocimientos previos que tienen los alumnos en esta disciplina.	
Tipo de Actividades: INT, MOT, DIAG	Objetivos Didácticos: 6
Contenidos: 1.6, 1.7.	Organización: individual
Competencias: CCL,CMCT,CD,CAA,CEC	
Metodología: Uso de las TIC	
Recursos: Ordenador, proyector y conexión a internet	

Tabla 9. Sesión 1 (elaboración propia).

SESIÓN 2: Medidas angulares.	
Desarrollo: Esta sesión se inicia con la explicación de medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Se ponen algunos ejemplos que faciliten su comprensión y se realizarán los ejercicios 2.1 y 2.2 (ver Anexo III). Seguidamente se realiza la actividad 1 de la Tarea “Medir la Tierra” (su explicación está en el Anexo II), que servirá de antesala a la explicación de las razones trigonométricas que se realizará en la próxima sesión. La clase finalizará dando a conocer el programa Geogebra a los alumnos. Se explicará su funcionamiento y se pondrán algunos ejemplos. Se utilizará la página web oficial de Geogebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=es	
Tipo de Actividades: INT, AP, DES	Objetivos Didácticos: 1, 2, 6
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.7, 3.1, 3.2, 3.5	Organización: individual
Competencias: CMCT, CD	
Metodología: Transmisiva, Uso de las TIC	
Recursos: Libro de texto, ordenador, proyector y conexión a internet, regla, compás.	

Tabla 10. Sesión 2 (elaboración propia).

SESIÓN 3: Razones trigonométricas de un ángulo agudo	
Desarrollo: En esta sesión se explican las razones trigonométricas de ángulos agudos. Se trabaja en la actividad 2 de la tarea “Medir la Tierra”. Mediante el uso de Geogebra se refuerzan los conceptos de seno, coseno y tangente, utilizando la dirección web: https://www.geogebra.org/m/tezrgs9Z Para trabajar en casa se proponen los ejercicios 3.1, 3.2 y 3.3 (ver Anexo III).	
Tipo de Actividades: INT, AP, DES, CON	Objetivos Didácticos: 1, 2, 6
Contenidos: 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2, 3.5	Organización: individual
Competencias: CMCT,CD	
Metodología: Transmisiva, Uso de las TIC	
Recursos: : Libro de texto, ordenador, proyector y conexión a internet, regla, compás, transportador de ángulos, calculadora.	

Tabla 11. Sesión 3 (elaboración propia).

SESIÓN 4: Relaciones trigonométricas fundamentales	
Desarrollo: Se explica las relaciones trigonométricas $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y $\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}$. Se hacen los ejercicios 4.1 y 4.2 (ver Anexo III). Se explica cómo utilizar la calculadora en Trigonometría y se practica con ella calculando distintos conceptos trigonométricos. Como actividad para casa se propone consultar la siguiente dirección web: https://www.geogebra.org/m/meadu4hg donde se puede observar cómo se cumple la relación $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ conforme va variando α .	
Tipo de Actividades: INT, AP, CON	Objetivos Didácticos: 3, 4, 5
Contenidos: 1.1, 1.7, 3.2, 3.5	Organización: individual
Competencias: CMCT,CD	
Metodología: Transmisiva, Uso de las TIC	
Recursos: Libro de texto, calculadora, ordenador, proyector y conexión a internet	

Tabla 12. Sesión 4 (elaboración propia).

SESIÓN 5: Aplicaciones de la Trigonometría	
Desarrollo: En esta sesión se enfocan los conceptos vistos en días anteriores desde un aspecto práctico. Por lo que se explica la resolución de triángulos rectángulos y triángulos oblicuángulos aplicados a situaciones en contextos reales. Se continúa con la realización de la actividad 3 correspondiente a la tarea “Medir la Tierra”. Se realizan los ejercicios 5.1 y 5.2 (ver Anexo III).	
Tipo de Actividades: INT, AP, DES	Objetivos Didácticos: 2, 5, 6
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.6, 1.7, 3.3, 3.5	Organización: individual
Competencias: CMCT,CD	
Metodología: Uso de las TIC	
Recursos: Libro de texto, calculadora, ordenador, proyector y conexión a internet, regla.	

Tabla 13. Sesión 5 (elaboración propia).

SESIÓN 6: Trigonometría Aplicada. Actividad en el patio	
Desarrollo: En esta sesión se realiza la actividad 4 de la tarea “Medir la Tierra”. Esta actividad es de carácter colaborativo y consiste en la medición de un árbol del patio del instituto. Antes de salir a hacer la actividad se hará un breve repaso de los principales conceptos ya estudiados. Como ejercicio para realizar en casa se propone el 6.1 (ver Anexo III).	
Tipo de Actividades: INT, MOT, AP, DES, CON, CRE	Objetivos Didácticos: 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10
Contenidos: 1.1, 1.6, 1.7, 3.1.	Organización: cooperativa
Competencias: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CSC	
Metodología: activa	
Recursos: varilla recta de madera, plomada, cinta métrica, calculadora.	

Tabla 14. Sesión 6 (elaboración propia).

SESIÓN 7: Razones trigonométricas 0° y 360°	
Desarrollo: Se revisa el ejercicio propuesto para casa en la sesión anterior. Se explica la circunferencia goniométrica y en base a esta se estudian las razones trigonométricas para un ángulo entre 0° y 360°. Una vez explicado hacemos uso de Geogebra entrando en la dirección: https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc para ver el desarrollo de seno, coseno y tangente de forma gráfica. Se explica la actividad 5 de la tarea “Medir la Tierra” y se propone su realización en casa. Conforme se hace la explicación de esta tarea se establece un debate en relación a sus contenidos y se comienza a resolver alguna pregunta.	
Tipo de Actividades: INT, MOT, AP, DES, CON, CRE.	Objetivos Didácticos: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 3.1, 3.2, 3.3, 3.5	Organización: individual, cooperativa
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA	
Metodología: transmisiva, activa, uso de las TIC	
Recursos: Libro de texto, ordenador, proyector y conexión a internet, reglas, transportador de ángulos.	

Tabla 15. Sesión 7 (elaboración propia).

SESIÓN 8: Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas	
Desarrollo: La sesión se inicia resolviendo las preguntas de la actividad 5 dentro de la tarea “Medir la Tierra” que se propusieron en la sesión anterior, estas preguntas se irán resolviendo conjuntamente con la realización de la actividad 6 de esta tarea, dando con esta actividad por finalizada la Tarea “Medir la Tierra” que con sus distintos apartados nos ha ido acompañando a lo largo de las sesiones dadas. Para finalizar la sesión se explicarán las razones trigonométricas para cualquier ángulo y se propondrá para la realización en casa los ejercicios 8.1 y 8.2 (ver Anexo III).	
Tipo de Actividades: INT, MOT, AP, DES, CON, CRE, RES, CONC	Objetivos Didácticos: 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3	Organización: cooperativa
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA	
Metodología: transmisiva, activa	
Recursos: Libro de texto, calculadora, ordenador, proyector y conexión a internet, reglas, transportador de ángulos, compás.	

Tabla 16. Sesión 8 (elaboración propia).

SESIÓN 9: GEOGEBRA	
Desarrollo: Esta sesión se impartirá en el aula de informática y en ella se realizarán actividades utilizando el programa Geogebra. Las actividades que se realizarán son: Medida de distancias no accesibles (Ejercicio 4.1): http://www.infoymate.es/recursos/bruno.htm Cálculo de áreas (ejercicio 4.2): http://www.infoymate.es/recursos/bruno.htm Cálculo de volúmenes (ejercicio 4.3): http://www.infoymate.es/recursos/bruno.htm Se proponen de forma individualizada actividades de repaso clasificadas por nivel de dificultad. Estas actividades serán para realizarlas en casa y servirán para adaptarlas a los distintos niveles de aprendizaje del alumnado. Las dudas se irán resolviendo a lo largo de las siguientes sesiones. Las actividades serán las enumeradas desde la 9.1 hasta la 9.15 (ver Anexo III).	
Tipo de Actividades: INT, MOT, AP, DES, CON.	Objetivos Didácticos: 2, 5, 6, 9
Contenidos: 1.1, 1.3, 1.7, 3.2, 3.3, 3.5	Organización: individual
Competencias: CMCT,CD	
Metodología: Uso de las TIC	
Recursos: Ordenador, proyector y conexión a internet	

Tabla 17. Sesión 9 (elaboración propia).

SESIÓN 10: Funciones trigonométricas	
Desarrollo: Al inicio de la clase se revisan las actividades propuestas en la sesión anterior para realizar en casa. A continuación, se explican las funciones trigonométricas, gráficamente nos ayudamos de Geogebra entrando en la dirección: https://www.geogebra.org/m/jmUuq8ga Una vez explicadas las funciones trigonométricas se realiza una actividad cooperativa, donde intervienen otros conceptos además de los trigonométricos. La actividad que se va a realizar es la 10.1 (ver Anexo III) y se realizará en grupos de 2 o 3 alumnos. Una vez hecha se establecerá una puesta en común de la solución entre los distintos grupos. Se proponen las siguientes actividades para realizar en casa: 10.2, 20.3, 10.4, 10.5, 10.6 (ver Anexo III)	
Tipo de Actividades: INT, AP, DES, MOT, CON	Objetivos Didácticos: 1, 2, 6, 7, 8, 9
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 3.1.	Organización: cooperativa
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC	
Metodología: Transmisiva, activa, Uso de las TIC	

Recursos: Libro de texto, calculadora, ordenador, proyector y conexión a internet.

Tabla 18. Sesión 10 (elaboración propia).

SESIÓN 11: Clase de repaso y resolución de dudas	
Desarrollo: En esta sesión se revisan las actividades propuestas para casa en la sesión anterior. Seguidamente se realizan las actividades 4, 30 y 31 Santillana. Una vez realizadas las actividades se abre un espacio para repaso general de los contenidos de la unidad y resolución de dudas.	
Tipo de Actividades: INT, DES, CON, RESU, CONC	Objetivos Didácticos: 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6	Organización: individual
Competencias: CMCT	
Metodología: transmisiva, activa	
Recursos: Libro de texto, calculadora, ordenador, proyector y conexión a internet	

Tabla 19. Sesión 11 (elaboración propia).

SESIÓN 12: Evaluación	
Desarrollo: Se realizará un examen cuya duración será de 1 hora, donde aparecerán problemas parecidos a los realizados en clase.	
Tipo de Actividades: EV	Objetivos Didácticos: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.5	Organización: cooperativa
Competencias: CCL, CMCT, SIEP	
Metodología:	
Recursos: reglas, compás, transportador de ángulos, calculadora	

Tabla 20. Sesión 12 (elaboración propia).

6.11. EVALUACIÓN

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre define criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en el Capítulo I artículo 2 de la siguiente manera:¹⁶

“Criterios de evaluación: son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura”.

“Estándares de aprendizaje evaluables: especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables”.

Además, en el artículo 14.1 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, queda de manifiesto que los criterios de evaluación son la referencia para valorar el aprendizaje y el nivel de competencias adquiridas en cada disciplina. En este decreto también se establece la relación existente entre los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje.

6.11.1. CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje establecidos en esta unidad didáctica son:¹⁷

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
CE.1.1.Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.	CCL CMCT	EA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema aplicando el uso del lenguaje matemático acorde a su etapa educativa.

¹⁶ Real Decreto 115/2014, de 26 de diciembre, Capítulo I, art.2.

¹⁷ Real Decreto 115/2014, de 26 de diciembre, Capítulo II.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT CAA	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas, identificando los datos, relacionándolos entre ellos y entendiendo el contexto donde se desarrolla el problema.
		EA.1.2.2. Entiende lo que se requiere en el enunciado del problema y es capaz de detectar las soluciones que éste puede tener.
		EA.1.2.3. Realiza una valoración del problema y es capaz de utilizar estrategias inductivas o deductivas realizando una validación de los resultados obtenidos.
CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT CAA	EA.1.4.1. Es capaz de indagar en el resultado del problema ya resuelto, formulando otras maneras de resolución y razonando el significado del resultado obtenido, analizando su coherencia.
		EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas a partir de los resueltos, con nuevas aportaciones y proponiendo nuevos casos de planteamientos.
CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o	CMCT CAA	EA.1.6.1. Identifica elementos o situaciones en la realidad que tienen posible relación con problemas matemáticos. Realiza su modelización.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CSC SIEP	EA.1.6.2. Establece vínculos entre problemas de su vida cotidiana y el mundo matemático, interpretándolo y aportando los conocimientos matemáticos necesarios.
CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT CAA	EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT	EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, planificación del proceso y aceptación de la crítica razonada.
		EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos con la precisión de su nivel educativo y a la dificultad de la situación.
		EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.
		EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, plantea y se encuentra en una búsqueda de respuestas adecuadas, tanto para el aprendizaje de conceptos como para la obtención de resultados en problemas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT CAA SIEP	EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización acorde a sus consecuencias y conveniencias de sencillez y utilidad.
CE.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT CAA SIEP	EA.1.10.1. Reflexiona sobre la solución de los problemas abordados y su proceso de resolución, recopilando las ideas claves para su aplicación en situaciones futuras similares
CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT CD CAA	EA. 1.11.1. Utiliza los medios tecnológicos adecuados para interpretar los conceptos trigonométricos, aumentando la facilidad de su comprensión.
		EA.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para identificar y asociar elementos del entorno real con las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas, extrayendo Información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.
		EA.1.11.3. Mediante la utilización de medios tecnológicos, elabora la representación gráfica del problema para identificar los datos que se requieren.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
CE.1.12.Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL CMCT CD CAA	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios, tras un proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante.
		EA.1.12.2. Utiliza los recursos creados para cimentar la base de su aprendizaje y poder utilizarla durante las distintas sesiones de clase.
		EA.1.12.3. Mediante los medios tecnológicos estructura adecuadamente sus conocimientos, mejorando su proceso de aprendizaje. Con los resultados obtenidos, es capaz de analizar sus puntos fuertes y débiles, focalizando y autoevaluándose para establecer pautas de mejora.
CE.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT CAA	EA.3.1.1. Relaciona los ángulos y lados de un triángulo rectángulo. Calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
		EA.3.1.2. Conoce y obtiene las razones trigonométricas, así como las relaciones en la circunferencia goniométrica. Aplica el concepto de radián.
		EA.3.1.3. Utiliza la trigonometría para la resolución de áreas de polígonos.
		EA.3.1.4. Utiliza medios tecnológicos para la resolución de problemas trigonométricos.
		EA.3.1.5. Identifica, reconoce y resuelve problemas cotidianos mediante la aplicación de razones trigonométricas.
CE.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT CAA	EA.3.2.1. Obtiene valores geométricos mediante la medición directa de datos y la resolución de triángulos aplicando las razones y relaciones trigonométricas.
		EA.3.2.2. Resuelve problemas mediante aplicaciones informáticas y recursos Web, fortaleciendo los conceptos teóricos y prácticos desarrollados en clase.

Tabla 21 Criterios de Evaluación, Estándares de Aprendizaje y Competencias Clave.

El Decreto 111/2016 de 14 de junio en su Capítulo III artículo 15, en relación a procedimientos, técnicas e instrumentos de evaluación; dice:¹⁸

¹⁸ Decreto 111/2016 de 14 de junio, Capítulo III, art.15

“El profesorado llevará a cabo la evaluación, preferentemente, a través de la observación continuada de la evolución del proceso de aprendizaje de cada alumno o alumna y de su maduración personal en relación con los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria y las competencias clave. A tal efecto, utilizará diferentes procedimientos, técnicas o instrumentos como pruebas, escalas de observación, rúbricas o portfolios, entre otros, ajustados a los criterios de evaluación y a las características específicas del alumnado”.

6.11.2. PROCEDIMIENTOS E INSTRUMENTOS DE CALIFICACIÓN

Los criterios de evaluación concretados en los estándares de aprendizaje serán evaluados utilizando los instrumentos de calificación que a continuación se enuncian:

1. Las pruebas escritas realizadas a lo largo de la unidad didáctica.
2. Intervención en clase.
3. Actividades individuales y resolución de ejercicios y problemas.
4. Hábitos personales y actitud. Observación directa del alumnado sobre aspectos como el comportamiento en clase, realización de tareas, colaboración con el profesorado y los compañeros, puntualidad, respeto del orden y buen clima de la clase.
5. Trabajo en grupo.

Como instrumento de ayuda en la evaluación del alumno se utilizarán rúbricas ajustadas a los criterios de evaluación, tal como viene indicado en el Decreto 111/2016 de 14 de junio. En el Anexo IV se acompañan tablas de calificación de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, así como de las competencias clave. También se anexan las rúbricas que serán utilizadas.

Las ponderaciones y rúbricas aplicadas a cada uno de los instrumentos de calificación son:

- **Prueba escrita:** para su calificación se utiliza la rúbrica 1 y su ponderación es del 60%.
- **Intervención en clase:** se califica mediante la rúbrica 2 y su ponderación es del 10%.
- **Actividades individuales y resolución de ejercicios y problemas:** para su calificación se utiliza la rúbrica 3 y su ponderación es del 20%.
- **Hábitos personales y actitud:** se califica utilizando la rúbrica 4 y su ponderación es del 5%.
- **Trabajo en grupo:** para su calificación se utiliza la rúbrica 5 y su ponderación es del 5%.

6.12. CONCLUSIÓN

A lo largo de este TFM se han aplicado los conocimientos adquiridos en las asignaturas del Máster en Profesorado de Educación Secundario Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, con el objetivo de desarrollar la competencia profesional docente. Para ello, se ha desarrollado la unidad didáctica de Trigonometría para 4º de ESO en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Se ha hecho un estudio curricular que ha permitido conocer y aplicar la normativa actual vigente del sistema educativo español. El análisis de tres libros de distintas editoriales nos ha servido de introducción a los contenidos impartidos, así como a la metodología utilizada. De este análisis se ha podido deducir que la estructura y metodología empleada en las tres editoriales es similar, siendo el tipo tradicional la imperante.

La fundamentación epistemológica nos ha aproximado a un conocimiento más formal y matemático de la Trigonometría, permitiéndonos conectarlo con el conocimiento de enseñanza plasmado en el currículo (saber enseñar) y a través de los libros analizados transponerlo al saber enseñado.

El estudio didáctico y cognitivo de algunos elementos trigonométricos, a través del análisis de algunos artículos y un trabajo de investigación nos acerca a la dificultad que tienen los alumnos en el aprendizaje de algunos conceptos de la Trigonometría, siendo una de las causas la metodología con que son enseñados.

Con la unidad didáctica se culmina el TFM. Los análisis y conclusiones obtenidos de los apartados anteriores son en este punto de utilidad para el desarrollo de la unidad. En ella se ha realizado una planificación, desarrollo y evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje, con la finalidad de que los alumnos adquieran las competencias exigidas en el currículo. Mediante el empleo de metodología tradicional e innovadora se ha pretendido la consecución de un aprendizaje significativo y motivador. Herramientas manipulativas y el uso de las TIC ha servido para la consecución de tal objetivo.

Cabe indicar que la situación extraordinaria que estamos viviendo debido al Covid-19 no ha permitido poner en práctica de forma presencial elementos de la unidad didáctica, pero sí se ha hecho en la medida de lo que ha sido posible un acercamiento en la realización de alguna actividad durante el “prácticum” online de este Máster.

Finalmente, ha de mencionarse que con el desarrollo de este trabajo se han pretendido alcanzar los objetivos planteados en su inicio.

6.13. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arias Cabezas, J. M., Maza Sáez, I. (2017). Matemáticas Académicas 4 ESO. Madrid: Grupo Editorial Bruño, S.L.
- Ayres Jr. F., Moyer R. E. (1991). Trigonometría. México: McGraw-Hill.
- Colera Jiménez. J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2016). Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4 ESO. Madrid: Grupo Anaya, S.A.
- De Diego Martín, B., Llerena Achútegui, A. Padilla GarvÍ, F. (2000). Temas de oposiciones a profesores de enseñanza secundaria Matemáticas. Tomo 2. Madrid: Deimos.
- Encabo de Lucas J.A., Gómez P., de Haro G., Miranda E., Nicolás F.J. (2010). Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas. Volumen II. Madrid: CEP.
- García I., Gómez J., Navarro J., García F., Pina E.M. (2013). Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas. Volumen II. Sevilla: MAD.
- Grenire, C. (2004). "Eratóstenes: la Tierra es redonda" en "Héroes de Grecia en la antigüedad". Madrid: Editorial Anaya. Páginas 139 -154.
- Lozano Layva, M. (2006) "Eratóstenes, medida de la circunferencia de la Tierra" en "De Arquímedes a Einstein. Los diez experimentos más bellos de la física". Madrid: Editorial Debate. páginas 33-47.
- Martín Fernández, E. (2013). Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio. Universidad de Granada, Granada.
- Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.
- Martin Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F., Rico, L., (2016) Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. Enseñanza de las Ciencias, 34.3, pp. 51-71. DOI: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871>
- Miranda Nava, J.L., Maldonado Mejía, E. (2009). Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. pp. 169-178. México.
- Nelsen R.B. (1993). Proofs Without Words. Portland: The Mathematical Association of America.

Obra colectiva. (2016). Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4 ESO. Barcelona: Ediciones Edebé, S.L.

Obra colectiva (2016). Matemáticas Enseñanzas académicas 4 ESO. Madrid. Ediciones Santillana Educación S.L.

Sagan, C. (1988). “En la orilla del océano cósmico” en “El cosmos”. Barcelona: Editorial Planeta. Página 15.

- **LEGISLACIÓN**

Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. BOJA núm. 122, 28 de junio de 2016.

Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 26 de diciembre de 2007, nº 252.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, de 10 de diciembre de 2013, nº 295.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 de enero de 2015, nº 25, p.6986-7003.

Orden de 14/7/2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación en el proceso de aprendizaje del alumnado. BOJA núm. 144, 28 de julio de 2016

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE núm. 3, 3 de enero de 2015.

- **APUNTES DE ASIGNATURAS**

García Armenteros, M. (2020). Aprendizaje y enseñanza II de la materia de matemáticas. Universidad de Jaén.

Luque Cañada, L. (2020). Aprendizaje y enseñanza I de la materia de matemáticas. Universidad de Jaén.

- **VIDEOS Y PÁGINAS WEB**

Junta de Andalucía (s. f). Rúbricas de evaluación. Recuperado de colaboraeducación.30
<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/document/s/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

Hohenwarter M. (2020). Geogebra. Recuperado de Geogebra Classic website:
<https://www.geogebra.org/classic?lang=es>

Sancerni P.M. (s. f). Variación de seno, coseno y tangente de un ángulo orientado.
Recuperado de Geogebra website: <https://www.geogebra.org/m/jmUuq8ga>

Valdés P. (s. f). Relación fundamental de la trigonometría. Recuperado de Geogebra website: <https://www.geogebra.org/m/meadu4hg>

Omatos A. (s. f). Circunferencia goniométrica. Recuperado de Geogebra website:
<https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc>

Promotor I. y García E. (s. f). Razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Recuperado de Geogebra website: <https://www.geogebra.org/m/tezrgs9Z>

Árias J.M. (s. f). 4º ESO ACAD, ejercicios 4.1,4.2, 4.3. Recuperado de infoymate.es website: <http://www.infoymate.es/recursos/bruno.htm>

Godoy. (2013). Trigonometría: orígenes y aplicaciones. Recuperado de
<https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4>

D'Alessio V.J. (s. f). Teorema de Moivre: demostración y ejercicios resueltos. Recuperado de Lifeder.com website: <https://www.lifeder.com/teorema-moivre/>

ANEXO I. ACTIVIDADES QUE APARECEN EN LOS LIBROS DE LAS TRES EDITORIALES

EDITORIAL ANAYA

El número total de actividades presentadas en el libro de la editorial Anaya es de 102 además de 16 actividades de consulta a través de las TIC.

LIBRO EDITORIAL ANAYA			
Unidad 7. Trigonometría			
ACTIVIDADES EXPUESTAS DURANTE EL DESARROLLO DE CONTENIDOS			
Bloque de contenidos	Ejercicios y problemas para resolver	Ejercicios y problemas resueltos	Ejercicio y actividades TIC
Introducción.	1		16
Razones trigonométricas de un ángulo agudo.	4		
Razones trigonométricas fundamentales.	7	2	
Utilización de la calculadora en trigonometría.	3	1	
Resolución de triángulos rectángulos.	4	3	
Resolución de triángulos oblicuángulos.	2	2	
Razones trigonométricas de 0º a 360º.	6	1	
Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas.	1	1	
Funciones trigonométricas. El radián.	3		
ACTIVIDADES EXPUESTAS AL FINAL DE LA UNIDAD			
Ejercicios y problemas resueltos.		3	
Ejercicios y problemas (con distinto grado de dificultad).		49	
Taller de matemáticas.		3	
Autoevaluación.		6	

Tabla 22. Actividades por secciones. Editorial Anaya. (elaboración propia).

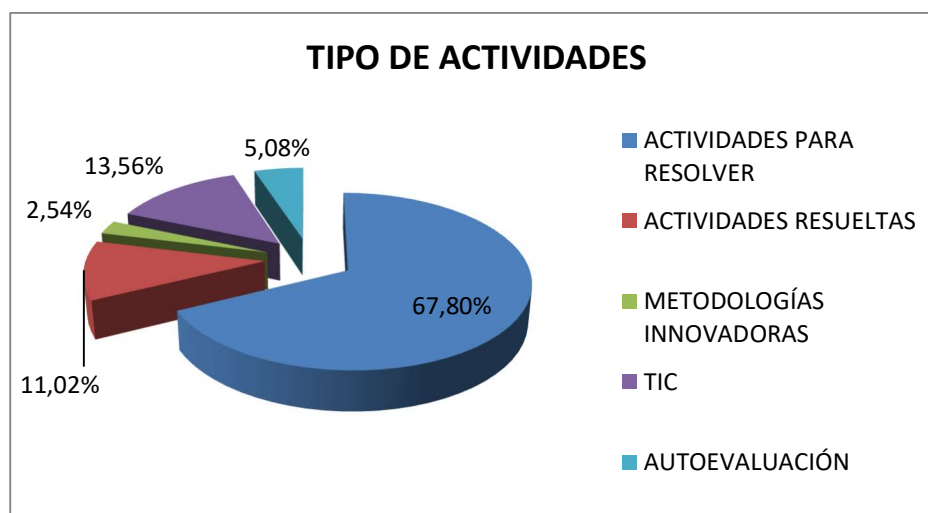


Figura 34. Gráfico representativo del tipo de actividades libro Anaya (elaboración propia).

EDITORIAL EDEBÉ

El libro de la editorial Edebé presenta 102 actividades en la unidad de Trigonometría y 11 actividades de repaso que aparecen al final del bloque de geometría, es decir, hay un total de 109 actividades.

	LIBRO EDITORIAL EDEBÉ				
	Unidad 9. Trigonometría				
Bloque de contenidos	Ejercicios y problemas para resolver	Ejercicios y problemas resueltos	Metodologías innovadoras	TIC	Autoevaluación
Medida de ángulos.	78	19	4	5	7
Razones trigonométricas de un ángulo.					
Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.					
Ecuaciones trigonométricas.					
Funciones trigonométricas.					
Nota: De las 19 actividades resuelta 16 son ejemplos en el bloque de contenidos De las actividades contabilizadas al ffinal del Bloque de Geometría son: – Sección “Evaluación de competencias”: 2 ejercicios, – Sección “actividades de síntesis”: 9 actividades (se consideran únicamente las relacionadas con Trigonometría).					

Tabla 23. Actividades por secciones. Editorial Edebé. (elaboración propia).

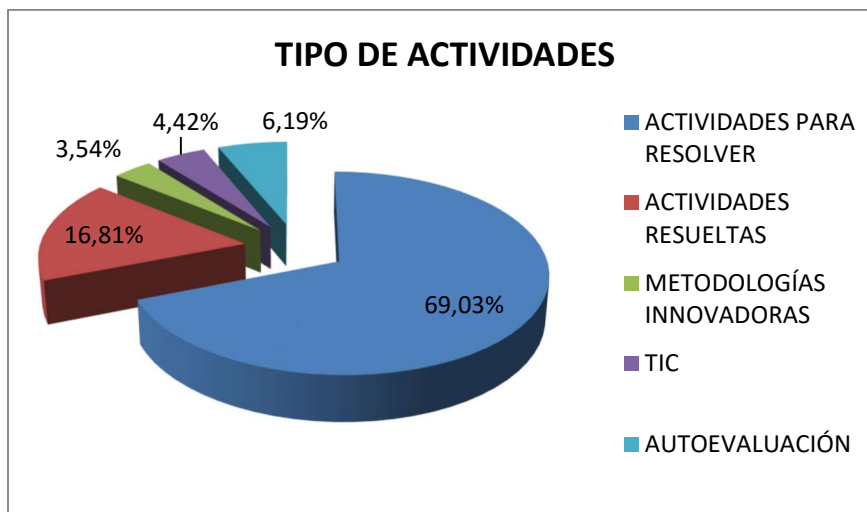


Figura 35. Gráfico representativo del tipo de actividades libro Edebé (elaboración propia).

EDITORIAL BRUÑO

Las actividades correspondientes a trigonometría en el libro de la editorial Bruño son 198 distribuidas entre las unidades 7 y 8. De estas 10 deben ser resueltas con herramientas tecnológicas (Geogebra) y 12 son de autoevaluación.

LIBRO EDITORIAL BRUÑO				
Unidad 7. Semejanza y trigonometría (Sólo se contabilizan actividades trigonométricas)				
Bloque de contenidos	Ejercicios y problemas para resolver	Ejercicios resueltos	TIC Geogebra	Autoevaluación
– Razones trigonométricas o circulares. – Relaciones entre las razones trigonométricas.	12	31	6	4
Unidad 8. Resolución de triángulos rectángulos				
	Ejercicios y problemas para resolver	Ejercicios resueltos	TIC Geogebra	Autoevaluación
– Circunferencia goniométrica. – Reducción de razones. Identidades y ecuaciones. – Resolución de triángulos rectángulos.	113	20	4	8

- Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes.				
Final del Bloque de Geometría, sección “Investiga y calcular”: 1 actividad de metodología innovadora.				

Tabla 24. Actividades por secciones. Editorial Bruño. (elaboración propia)

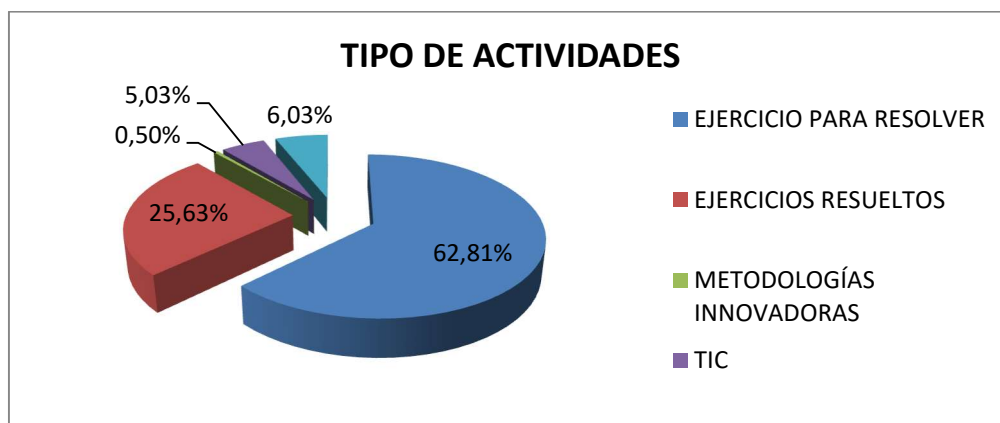


Figura 36. Gráfico representativo del tipo de actividades libro Bruño (elaboración propia).

ANEXO II. TAREA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

TAREA: MEDIR LA TIERRA.

INTRODUCCIÓN.

Esta tarea pretende ser el motor para adquirir de forma autónoma conocimiento sobre ángulos y las razones trigonométricas de los ángulos (seno, coseno y tangente) de los alumnos de 4º de ESO en la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

La tarea tiene carácter transversal, de modo que no sólo se restringe a las competencias matemáticas y competencias básicas en ciencia y tecnología matemáticas (CMCT), sino que también se trabajan prácticamente el resto de las otras competencias claves.

En relación a conceptos matemáticos, no solo tratará ideas trigonométricas, sino que también se hará uso de otros elementos como la aproximación o el cálculo de áreas y volúmenes. Estos últimos casos serán apartados complementarios de ampliación, de tal manera que pueda servir como actividad extraordinaria para alumnos con niveles más avanzados.

La Tarea se irá impartiendo durante seis sesiones, compartiendo en algunas de estas sesiones espacio con explicaciones teóricas, también se saldrá al patio del instituto y mediante elementos manipulativos se realizarán prácticas de campo donde se plasme las explicaciones dadas en el aula.

Con esta tarea se ha pretendido tener una herramienta que sea un elemento dinamizador y motivador durante el desarrollo de la unidad didáctica y que en ella se conjugue el desarrollo de la autonomía del alumno, el trabajo colaborativo, la contextualización de los conceptos y el trabajo de las diferentes competencias claves.

Como hemos dicho anteriormente se van a usar las mediciones del perímetro para calcular el volumen de la Tierra y posteriormente la densidad.

En el apartado de fundamentación didáctica ya vimos los problemas que tiene el alumnado con la conceptualización de las razones trigonométricas, para evitar este problema en esta tarea se van a revisar las razones trigonométricas, adquiriéndolas de forma autónoma y siendo reforzadas posteriormente, de esta manera es más probable que estos conocimientos se conviertan en significativos y por tanto duraderos.

Además, la noción de exactitud y de error se desarrolla fácilmente en este contexto (basta con comprobar que las mediciones son más exactas cuánto más grandes

son los dibujos y que pequeños errores pueden conducir a resultados muy alejados de la realidad). La diferencia entre la coincidencia en las mediciones y el demostrar que algo es siempre así también queda fácilmente a la vista al comprobar la relación entre los ángulos en el dibujo. El hecho de medir la Tierra, una cosa que no se puede “hacer” materialmente y que se calcula da sentido a todo el experimento y significado al conocimiento abstracto (matemático). Más adelante se repite esto mismo: ¿Cómo podríamos pesar la Tierra? No hay balanzas tan grandes.

PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES (EN EL AULA Y FUERA DEL AULA).

Esta tarea se desarrollará en varias sesiones compaginando en algunos casos la tarea con explicaciones y otras actividades (en el apartado de temporalización de la unidad didáctica aparece de forma detallada el desarrollo de cada sesión). A continuación, pasamos a describir la tarea:

Primera Sesión

La sesión se hará de forma individual por parte de los alumnos.

1. Comenzamos por pedir a los alumnos que dibujen unas circunferencias concéntricas. Pasando por el centro de las circunferencias dos rectas que se corten en justamente el centro. Ahora dibujar perpendiculares a una de las rectas que corten a la otra (b_1, b_2, b_3); hacerlo donde la recta corta a cada circunferencia. Los alumnos deben medir a continuación la distancia desde el origen (el centro de la circunferencia) hasta el punto de corte (a_1, a_2 y a_3) y la longitud de la recta perpendicular que corta al otro radio (b_1, b_2 y b_3), hasta el punto de corte. Atención, la recta de corte debe ser perpendicular a la primera.

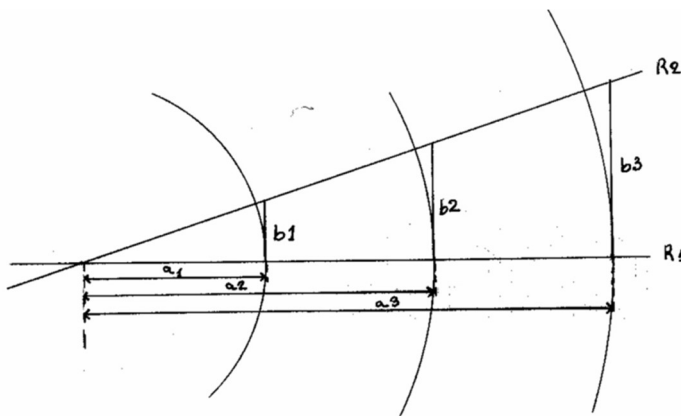


Figura 37. Ejercicio, razones trigonométricas (elaboración propia).

A continuación, los alumnos calcularán las razones entre la segunda medición y la primera (b/a , ¡siempre medida desde el centro de la circunferencia!). Debe pedírseles que sean lo más exactos posible en sus mediciones. Naturalmente obtendrán siempre el mismo valor o muy próximo.

Es importante pedirles ahora que explique a qué creen que se debe esto. No importa la forma en que lo expliquen, seguro que todos lo relacionan con el ángulo.

2. Se les pide que repitan el mismo experimento, pero dibujando todo más grande. Surgirán algunos problemas al medir, los milímetros de la regla no coincidirán siempre exactamente con los cortes. Se les explica sobre el redondeo de las mediciones y la noción de exactitud.

3. Ahora es el momento de aclarar que la relación que calculan se llama tangente del ángulo y que es siempre la misma para el mismo ángulo (no importa lo largos que sean los catetos) y que en la práctica solo puede variar por errores o inexactitudes en la medición. A continuación, se procede a calcular con ellos el ángulo que corresponde a la tangente que han calculado, con ayuda de una calculadora. Se explica que la calculadora tiene unas tablas donde están guardadas todas las tangentes y sólo busca en la memoria.

Con este apartado de la tarea una vez realizada se pretende que los alumnos lleguen a la concepción de las razones trigonométricas fundamentales por descubrimiento. Una vez realizado este apartado se procede a explicar las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente.

Para la realización de esta actividad se utilizará papel, compas, regla y calculadora.

Segunda sesión

Esta segunda actividad se realizará de forma individual por parte de los alumnos.

4. Ahora introduciremos el transportador de ángulos y procederemos al revés. Se les pedirá que dibujen un ángulo determinado (a elegir por ellos, pero controlando que usen ángulos centrales entre 30° y 60°). Deben repetir los mismos cálculos: hacer las mediciones oportunas y repetir el cálculo de la tangente. A continuación, calcular el ángulo con ayuda de la calculadora y comprobar que coincide con el del transportador de ángulos. Se puede pedir también que midan el ángulo del ejercicio anterior.

En esta segunda sesión se pretende que los alumnos consoliden lo aprendido en el ejercicio anterior (razones de los ángulos, dibujo y medición de ángulos), además de incidir en el manejo de la calculadora. Desde un punto de vista curricular se trata de motivar a los alumnos haciendo que adquieran una actitud positiva hacia lo que se está haciendo y por tanto hacia las asignaturas donde se hace. Se puede comentar ya que se va a medir la Tierra, por si alguno no se había enganchado.

Tercera sesión. Medición de la altura en un triángulo rectángulo

Esta tercera actividad se realizará en el aula de forma individual y servirá como introducción a las aplicaciones de la trigonometría.

5. Ahora vamos a calcular la altura de un árbol del patio del instituto (o cualquier otra cosa que se preste como monumentos, farolas, etc. externos al centro).

Primero en el papel. Se les pide que dibujen una recta horizontal con el papel apaisado y luego una que corte a ésta con un ángulo agudo entre 20 y 60 por ejemplo. A cualquier distancia del punto de corte se dibuja una recta perpendicular a la primera hasta alcanzar la segunda. Vamos a calcular la altura de este segmento. Para ello medimos el ángulo con el transportador de ángulos que forman las dos rectas y a continuación calculamos la tangente con ayuda de la calculadora. Sabemos que la tangente será $\tan \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$ (1), siendo a la altura que queremos calcular.

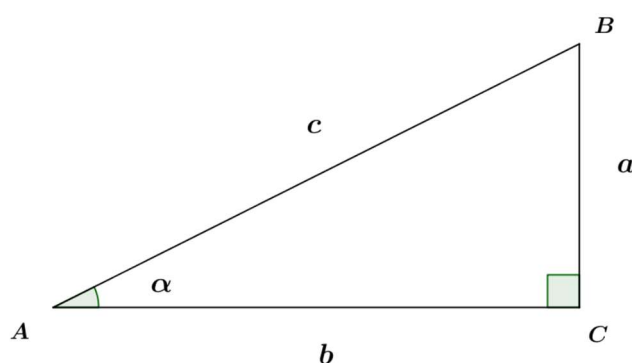


Figura 38. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

Se trabaja en la pizarra con la ecuación (1). Despejamos a de esta ecuación y consideramos conocida la distancia horizontal b , de esta manera calculamos la altura de nuestro segmento.

Se repite el experimento, pero dibujando un árbol (farola, monumento o cualquier otro elemento) en lugar del segmento a medir. Se puede añadir un sol al final de la recta que forma el ángulo dejando ver claramente que ésta es el rayo solar y la horizontal la longitud de la sombra. Se les pide que hagan un dibujo similar y calculen la altura de su objeto.

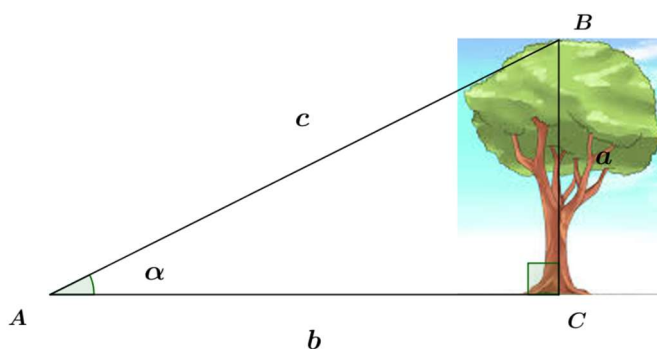


Figura 39. Medición altura de un árbol (elaboración propia).

Cuarta sesión. Medición de un árbol

Este apartado o actividad se realizará en el patio del instituto y a partir de esta sesión el resto de actividades (o apartados con componen la tarea general) se harán formando grupos de 3 o 4 alumnos.

6. Medir un árbol en el patio del instituto (Parte práctica)

Para medir en la práctica la altura de un árbol, edificio, farola, etc. se necesita medir el ángulo, lo que no se puede hacer con esos objetos. Para medir el ángulo dispondremos de un segmento de madera o metal, recto y manejable. La altura de este segmento puede medirse previamente y ahora hay que colocarlo al sol y medir la longitud de la sombra, pero debe estar recto. Para comprobar que está recto usaremos una plomada (otra posibilidad es colocar la plomada colgando de algún lugar y prácticamente tocando el suelo (cuidado con el viento)). A partir de estas mediciones calculamos el ángulo y como el ángulo será el mismo (los rayos del sol son paralelos) este ángulo es el mismo para el árbol, la farola, etc. Se les pide a los alumnos que midan el ángulo de la vara varias veces (a los distintos grupos con varas de la misma altura) y que comprueben si les da lo mismo (es normal que les den variaciones pequeñas, errores de medida). Aprovechamos para reforzar el concepto de error de medida. Ahora planteamos la siguiente cuestión ¿Cuál de los ángulos medidos debemos elegir? Se les deja que planteen distintas soluciones. Si no sale de ellos planteamos descartar las más alejadas y con las otras hacer una media.

A continuación, se les da una vara más larga, pero de la que tienen que calcular la longitud (repiten el proceso: colocarla vertical con ayuda de la plomada y medir la longitud de la sombra (solo unos “jueces” disponen de cinta métrica que van midiendo la longitud de la vara para los distintos grupos). Cada grupo calcula la longitud de la vara (han de repetir el proceso completo) y después los jueces les piden sus cálculos y miden la vara con ellos.

Ahora es el momento de medir la longitud de algún objeto real (árbol, farola, etc.).

Para finalizar esta sesión, plantea la siguiente pregunta: En el antiguo Egipto un hombre con una cinta métrica de menos de 2 metros de longitud midió una pirámide ¡sin subirse a ella! ¿Cómo lo hizo?

Es posible que la mayor parte de los alumnos adivinen que el hombre midió su propia sombra y cuando su sombra media lo mismo que él, entonces midió la sombra de la pirámide.

Quinta sesión.

En esta sesión se dará una explicación del método que utilizó Eratóstenes para medir el perímetro de la Tierra. Una vez explicado se darán unas preguntas que los grupos deberán resolver en casa. En estas actividades se permite cualquier tipo de consulta. Al final de la sesión se les dará a los alumnos un enlace de un video de Youtube en relación a la temática que estamos tratando.

7. Eratóstenes y la biblioteca de Alejandría

Es la hora de introducir la historia de Eratóstenes. En la bibliografía se da información suficiente. Esta actividad se realizará en casa, no sin antes explicar con detalle como lo hizo Eratóstenes en la pizarra.

A continuación, puedes plantear la siguiente actividad:

ASÍ ES LA TIERRA:

1.-

¹⁹“Hace aproximadamente 2300 años (300 a.C.) vivió en la ciudad de Alejandría un personaje conocido como Eratóstenes (según sus enemigos, “beta”). Eratóstenes fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Eratóstenes fue también director de la biblioteca de Alejandría. Por aquella época toda nave que entraba en la ciudad debía dejar una copia de sus libros en la biblioteca. Así fue como un día leyó en un libro de papiro que en la ciudad de Siena (actualmente Asuán), cerca de la primera catarata del Nilo, en el mediodía del 21 de junio un palo vertical no proyectaba sombra. En el solsticio de verano, el día más largo del año, a medida que avanzaba el día las sombras de las columnas del Templo iban acortándose. En el mediodía habían desaparecido. En aquel momento podía verse el sol reflejado en el fondo de un pozo hondo: el Sol estaba directamente encima de las cabezas.

Es una observación que otros podían haber ignorado con facilidad. Palos, sombras, reflejos en pozos, la posición del Sol ¿Qué importancia podían tener estas cosas tan sencillas y cotidianas? Pero Eratóstenes era un científico y sus pensamientos sobre estas cosas cambiaron el mundo. Eratóstenes tuvo la presencia de ánimo de hacer

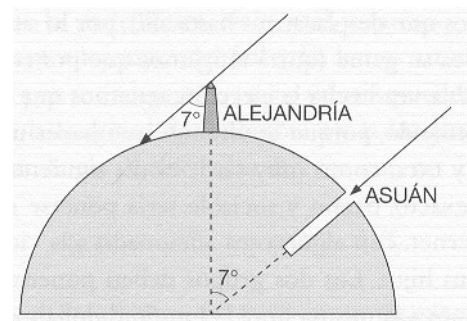


Ilustración 40. Ángulo rayos del Sol y superficie de la Tierra.

¹⁹ El Cosmos, Carl Sagan

un experimento: observar realmente si en Alejandría los palos verticales proyectaban sombra hacia el mediodía del 21 de junio. Y descubrió que sí lo hacían”.

(“El Cosmos”. Carl Sagan)

Resuelve las siguientes preguntas:

- a. Busca un mapa del antiguo Egipto y trata de situar las ciudades de Siena y Alejandría.
- b. ¿Cómo creían los antiguos que era el mundo?
- c. Busca una explicación para el hecho observado por Eratóstenes, es decir, un palo en el mediodía del solsticio de verano proyecta sombra en Alejandría, pero no en Siena. Haz una explicación ayudándote de un dibujo.
- d. ¿Conoces otras pruebas de que la superficie terrestre no es plana?

2.-

²⁰“Eratóstenes se preguntó entonces a qué se debía que en el mismo instante un bastón no proyectara en Siena ninguna sombra mientras que en Alejandría, a gran distancia hacia el norte, proyectaba una sombra pronunciada. Supongamos que en un momento dado cada palo no proyectara sombra alguna. El hecho se explica de modo muy fácil: basta suponer que la tierra es plana. El Sol se encontrará entonces encima mismo de nuestras cabezas. Si los dos palos proyectan sombras de longitud igual, la cosa también se explica en una Tierra plana: los rayos del Sol tienen la misma inclinación y forman el mismo ángulo con los dos palos. Pero ¿cómo explicarse que en Siena no había sombra y al mismo tiempo en Alejandría la sombra era considerable?

Eratóstenes comprendió que la única respuesta posible es que la superficie de la Tierra está curvada. Y no sólo esto: cuanto mayor sea la curvatura, mayor será la diferencia entre las longitudes de las sombras. El Sol está tan lejos que sus rayos son paralelos cuando llegan a la Tierra. Los palos situados formando ángulos diferentes con respecto a los rayos del Sol proyectan sombras de longitudes diferentes. La diferencia observada en las longitudes de las sombras hacía necesario que la distancia entre Alejandría y Siena fuera de unos 7'2 grados a lo largo de la superficie de la Tierra; es decir que, si imaginamos los palos prolongados hasta llegar al centro de la Tierra, formarán allí un ángulo de 7,2

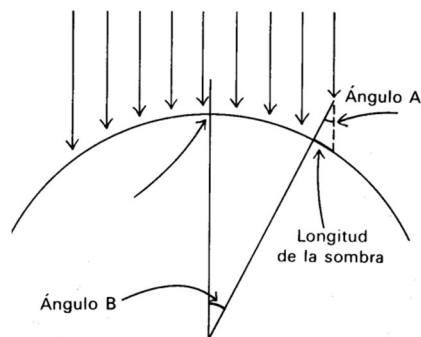


Figura 41. Ángulos rayos del Sol y superficie de la Tierra.

²⁰ El Cosmos. Carl Sagan

grados. 7,2 grados es una cincuentava parte de los trescientos sesenta grados que contiene la circunferencia entera de la Tierra. Eratóstenes sabía que la distancia entre Alejandría y Siena era de unos 800 kilómetros, porque contrató a un hombre para que lo midiera a pasos. Ochocientos kilómetros por 50 dan 40000 kilómetros: ésta debía ser pues la circunferencia de la Tierra.

Ésta es la respuesta correcta. Las únicas herramientas de Eratóstenes fueron palos, ojos, pies y cerebros, y además el gusto por la experimentación.

Con estos elementos dedujo la circunferencia de la Tierra con un error de sólo unas partes por ciento, lo que constituye un logro notable hace 2 300 años. Fue la primera persona que midió con precisión el tamaño de un planeta”.

(“El Cosmos”. Carl Sagan)

Resuelve las siguientes preguntas:

a. Observa el esquema e identifica las líneas que representan: rayos solares, Siena y Alejandría, perímetro de la Tierra, centro de la Tierra.

b. Reescribe los cálculos de Eratóstenes. Recuerda que el ángulo medido fue de $7^{\circ}2'$ y que la distancia entre Siena y Alejandría es de 800 Km ¿Cuál es el perímetro de la Tierra?

c. ¿Cuál sería el perímetro terrestre si la distancia medida entre Siena y Alejandría fuese de 1000 Km?

d. ¿Cuál sería el perímetro terrestre si el ángulo medido fuese de 9° ? ¿Cuál es el radio terrestre?

f. ¿cuál es el volumen de la Tierra?, ¿y su peso? (pregunta complementaria de ampliación)

g. ¿Según tus conocimientos de la forma de la Tierra, es exacto este volumen? ¿Por qué? (pregunta complementaria de ampliación)

Sexta sesión.

Con esta última sesión se pretende generalizar el problema de Eratóstenes visto en la quinta sesión y contextualizarlo a otro lugar. A continuación, se hará una puesta en común de las preguntas hechas en la quinta sesión mediante un debate. Por último, se hará un repaso de lo aprendido en las distintas sesiones en las que se ha realizado esta tarea y de las razones trigonométricas fundamentales.

8. Medir la Tierra si no estás en Alejandría

Como acabamos de decir en esta sesión se hace una puesta en común de las preguntas propuestas en la sesión anterior, de modo que se establezca un debate entre los distintos grupos para llegar a la solución de las preguntas realizadas. Antes se hace una introducción mediante el libro de Lozano Leyva por el que se calcula el perímetro de la Tierra independientemente del lugar desde donde estés midiendo.

Obviamente lo más probable si vives en España es que el sol nunca esté perpendicular sobre tu cabeza. Esto complica algo los cálculos, pero no los hace imposibles. El siguiente fragmento tomado del libro de Lozano Leyva explica como calcular el ángulo. El resto del proceso es similar al ilustrado para Eratóstenes.

Obsérvese bien el esquema siguiente.

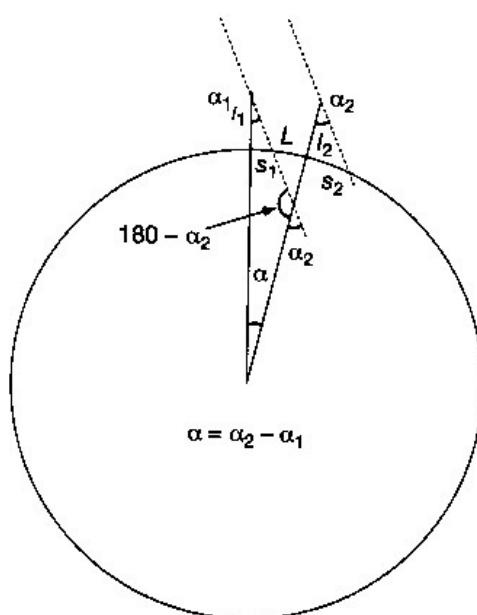


Figura 42. Con dos listones de longitudes l_1 y l_2 situados en dos puntos cualesquiera del mismo meridiano.

²¹“Si recordamos la matemática elemental, estaremos de acuerdo en que los ángulos entre los rayos del Sol y las barras en uno y otro lugar vienen definidos por sus tangentes, cuyos valores pueden calcularse por el cociente entre la longitud de la sombra S y la longitud de la barra l; distinguiremos las de un pueblo y las de otro con un 1 y un 2. O sea:

$$\tan \alpha_1 = \frac{S_1}{l_1} \quad \text{y} \quad \tan \alpha_2 = \frac{S_2}{l_2}$$

²¹ Lozano (2006)

Con una calculadora hallamos el arco cuya tangente es el cociente anterior. Con ayuda del gráfico, cuya interpretación es obvia, convendremos que:

$$\alpha_1 + 180 - \alpha_2 + \alpha = 180^\circ, \text{ o sea } \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

Con esta α y la distancia D entre los dos pueblos, que calculamos en el mapa, ya sólo nos resta hacer una simple regla de tres:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \rightarrow D \\ 360^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{360^\circ \cdot D}{\alpha} ; \text{ siendo } x \text{ el perímetro de la Tierra''}.$$

(Lozano 2006).

Utilizando este fragmento del libro de Lozano Leyva generalizamos la forma de obtener el perímetro de la Tierra. Conociendo el perímetro x tendremos el radio de la Tierra R , ya que:

$$\text{Perímetro de la Tierra} = x = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$$

Considerando que la Tierra es una esfera su volumen será:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Por último, si queremos saber cuánto pesa la Tierra, aplicando la fórmula de la densidad tendremos:

$$d = \frac{m}{V}, \text{ donde } d \text{ es la densidad de la Tierra y la podemos considerar } = 5,51 \text{ g/cm}^3 ; \text{ siendo: } m = \text{masa de la Tierra y } V = \text{volumen de la Tierra. Por tanto,}$$

$$m = d \cdot V$$

Los cálculos del volumen y masa de la Tierra son ejercicios complementarios de ampliación para el alumnado con nivel más avanzado.

Con esto queda finalizada la tarea que se irá realizando a lo largo de 6 sesiones, alternándose con las explicaciones de los contenidos de la unidad didáctica.

ANEXO III. ACTIVIDADES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

EJERCICIO, PROBLEMAS Y ACTIVIDADES

Ejercicios y problemas sesión 2

Ejercicio 2.1:

- a) Pasa el ángulo 68° a radianes.
- b) Pasa el ángulo $2,5$ rad a grados.

(Aria y Maza., 2017)

Ejercicio 2.2:

Representa e indica a qué cuadrante pertenece cada uno de estos ángulos; reduciéndolos al primer giro en caso necesario:

- a) 257°
- b) -73°
- c) 420°
- d) 135°
- e) -870°

(Arias et al., 2017)

Ejercicios y problemas sesión 3

Ejercicio 3.1

Expresa las razones trigonométricas del ángulo α de la figura:

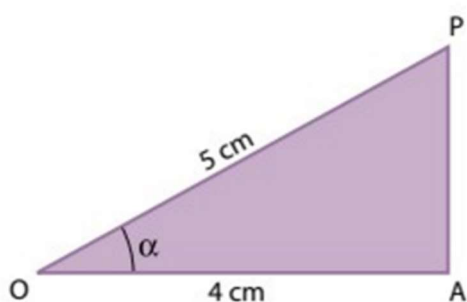


Figura 43 Triángulo rectángulo (Obra colectiva Ediciones Edebé, 2016).

(Obra colectiva Edebé, 2016).

Ejercicio 3.2

El hilo de una cometa mide 100 m y se encuentra atado al suelo. Si la cometa ondea formando un ángulo de 30° con la horizontal, calcula la altura a la que se encuentra.

(Obra colectiva Edebé, 2016).

Ejercicio 3.3

Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 40° , y calcula el cociente de su cateto opuesto entre su cateto contiguo. Comprueba, dibujando un ángulo de 40° , que el cociente anterior coincide con el cociente del seno entre el coseno del ángulo.

(Obra colectiva Edebé, 2016).

Ejercicios y problemas sesión 4

Ejercicio 4.1

Sabiendo que $\cos \alpha = 0,63$, calcular $s = \operatorname{sen} \alpha$ y $t = \operatorname{tg} \alpha$

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 4.2

Sabiendo que α es un ángulo del tercer cuadrante y que $\operatorname{sen} \alpha = -0,6$; calcula $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

(Obra colectiva Edebé, 2016).

Ejercicios y problemas sesión 5

Ejercicio 5.1

Desde el borde de un acantilado de 50 metros de altura, Ángel observa, bajo un ángulo de 60° , cómo una embarcación realiza las tareas de pesca. ¿A qué distancia de la costa se encuentra aproximadamente la embarcación?

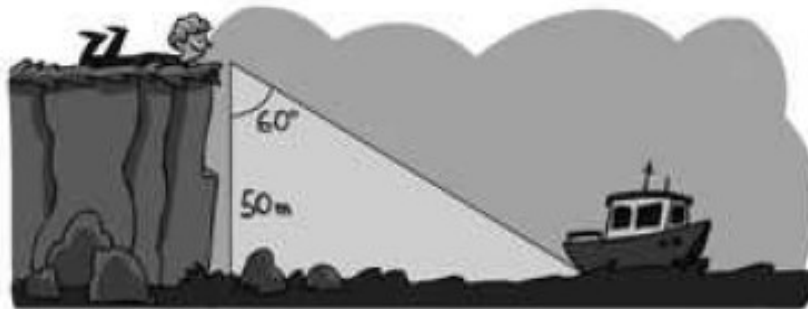


Figura 44. Croquis ejercicio 5.1

(<http://alfonso11mates.blogspot.com/2017/02/trigonometria-4-eso-matematicas.html>)

Ejercicio 5.2

Desde el lugar donde se encuentra María, puede observar una torre con un ángulo de elevación de 32° . Si María avanza 40 metros en dirección a la torre, la observa con un ángulo de 70° .

- Calcula la altura de la torre si la estatura de María es de 1,65 metros.
- ¿A qué distancia de la torre estaba María inicialmente?

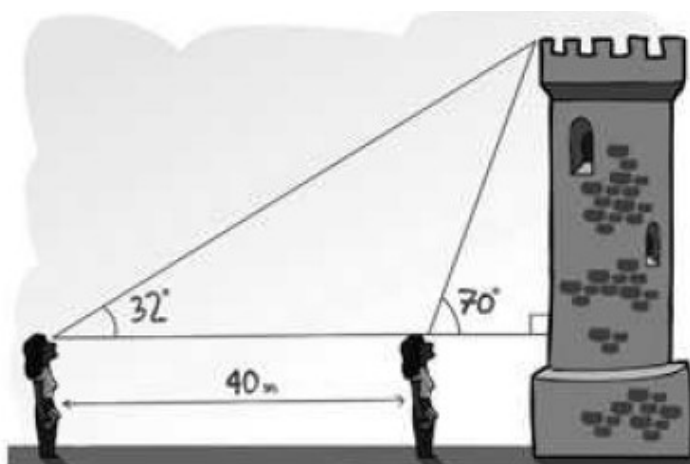


Figura 45. Croquis ejercicio 5.2

(<http://alfonso11mates.blogspot.com/2017/02/trigonometria-4-eso-matematicas.html>)

Ejercicios y problemas sesión 6

Actividad 6.1

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo. Ahora son 23° (Colera et al, 2019).

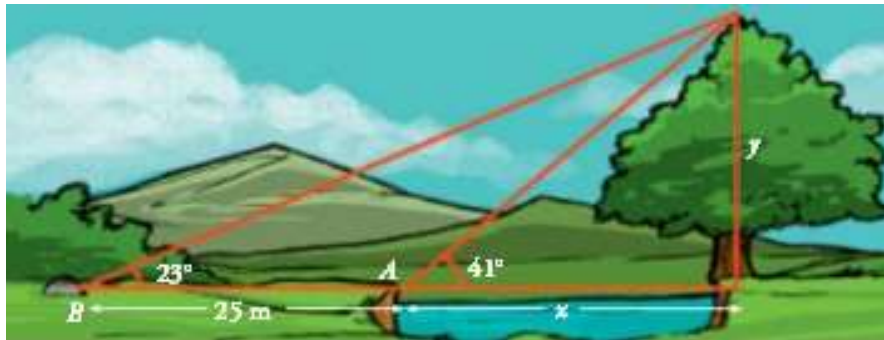


Figura 46. Croquis actividad 6.1 (Colera et al, 2016)

Ejercicios y problemas sesión 8

Ejercicio 8.1

Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.

- a) 128°
- b) 198°
- c) 87°
- d) 98°
- e) 285°
- f) 305°

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 8.2

Explica en qué cuadrante está el ángulo α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,6; \cos \alpha < 0$
- b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}; \operatorname{tg} \alpha > 0$
- c) $\operatorname{tg} \alpha = -2; \operatorname{sen} \alpha > 0$
- d) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}; \operatorname{tg} \alpha < 0$

(Colera et al., 2016)

Ejercicios y problemas sesión 9

En esta sesión se proponen actividades de repaso clasificadas por nivel de dificultad. Estas actividades servirán para adaptarlas a los diferentes niveles de aprendizaje de los alumnos. Ver apartado “EJERCICIOS Y PROBLEMAS CLASIFICADOS POR NIVEL DE DIFICULTAD. ADAPTACIÓN A LA DIVERSIDAD”.

Ejercicios y problemas sesión 10

Ejercicio 10.1 Actividad cooperativa

En el último fin de semana del verano se ha producido un incendio en un parque natural. Desde un helicóptero, situado en el radar en el origen de coordenadas, se observa un fuego en dirección Norte y la situación de la piscina municipal a 25° y del lago más cercano a 120° .

La torre de control le apremia con el aviso de que el viento empieza ser más fuerte.

- a) Dibuja en un sistema de coordenadas la situación del helicóptero, del fuego, del lago y de la piscina.
- b) ¿Qué distancia debe recorrer si carga agua en el lago? ¿Y en la piscina?
- c) La velocidad del helicóptero descargado es de 150 km/h y cargado es de 110 km/h, y en la operación de carga se tarde 5 minutos más en la piscina que en el lago. ¿Dónde debe repostar?

(Obra colectiva Santillana, 2017)

Ejercicio 10.2

Di si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, razonando la respuesta.

- a) $\cos 390^\circ = \sin 60^\circ$
- b) $\sin 405^\circ = \cos 45^\circ$
- c) $\sin 520^\circ = \cos 30^\circ$
- d) $\cos 850^\circ = -\cos 50^\circ$
- e) $\tan 720^\circ = \cos 90^\circ$
- f) $\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ$

(Obra colectiva Santillana, 2017)

Ejercicio 10.3

Si $\sin \alpha = -0,2$ y α pertenece al 4º cuadrante, calcula $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$

(Obra colectiva Santillana, 2017)

Ejercicio 10.4

¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa mide 10 cm?

(Obra colectiva Santillana, 2017)

Ejercicio 10.5

Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60° . Suponiendo que el hilo esté completamente estirado, halla la altura a la que está la cometa.

(Obra colectiva Santillana, 2017)

Ejercicio 10.6

Desde un barco vemos la luz de un faro con una inclinación de 20° y, después de avanzar 18 km en esa dirección, se ve con un ángulo de 30° . ¿A qué distancia estamos del faro?

(Obra colectiva Santillana, 2017)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS CLASIFICADOS POR NIVEL DE DIFICULTAD. ADAPTACIÓN A LA DIVERSIDAD

Esta relación de ejercicio y problemas se reparte en la sesión 9 para ir realizándola durante varias sesiones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS CON GRADO DE DIFICULTADO BAJO

Ejercicio 9.1

 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

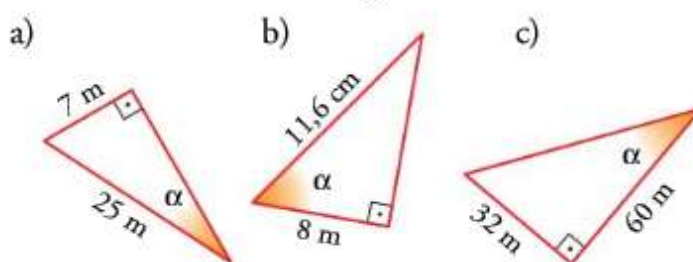


Figura 47. Triángulos rectángulos, enunciado ejercicio 9.1 (Colera et al., 2016).

(Colera et al, 2016)

Ejercicio 9.2

 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90^\circ$):

a) $b = 56$ cm; $a = 62,3$ cm

b) $b = 33,6$ cm; $c = 4,5$ cm

c) $c = 16$ cm; $a = 36$ cm

(Colera et al, 2016)

Ejercicio 9.3

 Si $\text{sen } \alpha = 0,28$, calcula $\cos \alpha$ y $\text{tg } \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90^\circ$).

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.4

 Halla el valor exacto (con radicales) de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = 2/3$ ($\alpha < 90^\circ$).

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.5

 Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo $\alpha < 90^\circ$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,23$ b) $\cos \alpha = 0,74$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,75$

d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ f) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.6

 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C} = 90^\circ$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm. Halla c , $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43$ m, $\hat{A} = 37^\circ$. Halla b , c , $\hat{B}$.

c) $a = 7$ m, $\hat{B} = 58^\circ$. Halla b , c , $\hat{A}$.

d) $c = 5,8$ km, $\hat{A} = 71^\circ$. Halla a , b , $\hat{B}$.

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.7

 Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

(Colera et al., 2016)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS CON GRADO DE DIFICULTADO MEDIO

Ejercicio 9.8

▢ Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.

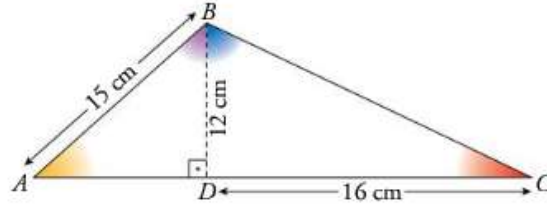


Figura 48. Triángulo acutángulo del enunciado del ejercicio 9.8 (Colera et al., 2016)

(Colera et al, 2016)

Ejercicio 9.9

▢ Calcula la altura, h , y el área de los siguientes triángulos:

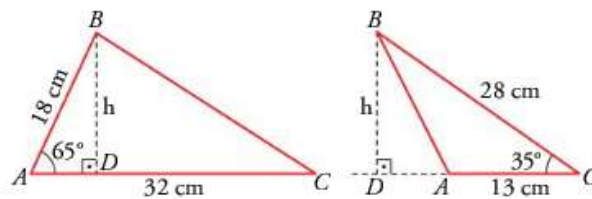


Figura 49. Triángulo acutángulo y obtusángulo, enunciado ejercicio 9.9 (Colera et al., 2016)

(Colera et al, 2016)

Ejercicio 9.10

▢ Explica en qué cuadrante está el ángulo α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$; $\cos \alpha < 0$ b) $\cos \alpha = -1/3$; $\operatorname{tg} \alpha > 0$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = -2$; $\operatorname{sen} \alpha > 0$ d) $\operatorname{sen} \alpha = -2/3$; $\operatorname{tg} \alpha < 0$

Representa el ángulo α en una circunferencia goniométrica en cada caso.

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.11

Un avión P vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\widehat{PAB} = 20^\circ$ y $\widehat{PBA} = 30^\circ$. ¿A qué altura está el avión?

(Colera et al., 2016)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS CON GRADO DE DIFICULTAD ALTO

Ejercicio 9.12

Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B , bajo un ángulo de 21° . El barco A está a 5 km de la costa, y el B , a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.

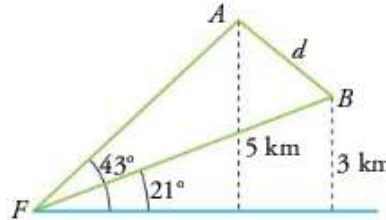
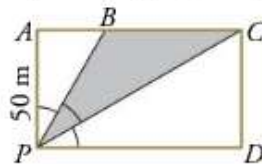


Figura 50. Croquis enunciado ejercicio 9.11 (Colera et al., 2016).

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.13

Para iluminar una parcela rectangular se han colocado tres focos en P de modo que los ángulos de iluminación $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ y $\widehat{CPD}$ son iguales.



Una avería apaga el foco central. ¿Cuál es el área y el perímetro de la zona oscura, si $\overline{AP} = 50$ m?

Figura 51. Croquis del enunciado ejercicio 9.13 (Colera et al., 2016).

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.14

En la parcela $ABCD$ conocemos $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$; $\hat{A} = 120^\circ$; $\overline{AD} = 18 \text{ m}$ y $\overline{AB} = 29 \text{ m}$. Queremos averiguar la longitud de la diagonal AC .

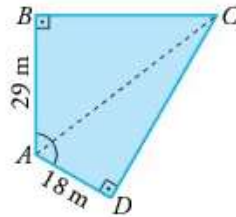


Figura 52. Croquis del enunciado ejercicio 9.14 (Colera et al., 2016).

(Colera et al., 2016)

Ejercicio 9.15

Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican las siguientes ecuaciones, como en el ejemplo:

▪ $1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1/2 \rightarrow x = 60^\circ; x = 300^\circ$

a) $2\sin x = \sqrt{3}$ b) $2\sin x = -\sqrt{2}$

c) $3\operatorname{tg} x + 3 = 0$ d) $(\sin x)^2 = 1$

e) $(\sin x)^2 - \sin x = 0$ f) $4(\sin x)^2 - 1 = 0$

g) $2(\cos x)^2 - \cos x - 1 = 0$

(Colera et al., 2016)

ANEXO IV. EVALUACIÓN

TABLA DE CALIFICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	INSTRUMENTOS DE CALIFICACIÓN (*)					VALORACIÓN ESTÁNDARES	VALORACIÓN CRITERIOS
		1	2	3	4	5		
CE.1.1.	EA.1.1.1.							
CE.1.2.	EA.1.2.1.							
	EA.1.2.2.							
	EA.1.2.3.							
CE.1.4.	EA.1.4.1.							
	EA.1.4.2.							
CE.1.6.	EA.1.6.1.							
	EA.1.6.2.							
CE.1.7.	EA.1.7.1.							
CE.1.8.	EA.1.8.1.							
	EA.1.8.2.							
	EA.1.8.3.							
	EA.1.8.4.							
CE.1.9.	EA.1.9.1.							
CE.1.10.	EA.1.10.1							
CE.1.11	EA.1.11.1.							
	EA.1.11.2.							
	EA.1.11.3.							
CE.1.12.	EA.1.12.1.							
	EA.1.12.2.							
	EA.1.12.3.							
CE.3.1.	EA.3.1.1.							
	EA.3.1.2.							
	EA.3.1.3.							
	EA.3.1.4.							
	EA.3.1.5.							
CE.3.2.	EA.3.2.1.							
	EA.3.2.2.							
MEDIA								

Tabla 25. Calificación de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.

(*) Nota: En la columna de instrumentos de calificación la numeración 1, 2, 3, 4 y 5 se refiere a las rúbricas tal como están definidas en el apartado 6.11.2 de este TFM y desarrolladas desde la página 125 hasta la 132 de este Anexo IV.

TABLA DE CALIFICACIÓN DE LAS COMPETENCIAS CLAVE

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	VALORACIÓN ESTÁNDARES	VALORACIÓN CRITERIOS	COMPETENCIAS CLAVE					
				CMCT	CCL	CAA	CSC	SIEP	CD
CE.1.1.	EA.1.1.1.								
CE.1.2.	EA.1.2.1.								
	EA.1.2.2.								
	EA.1.2.3.								
CE.1.4.	EA.1.4.1.								
	EA.1.4.2.								
CE.1.6.	EA.1.6.1.								
	EA.1.6.2.								
CE.1.7.	EA.1.7.1.								
CE.1.8.	EA.1.8.1.								
	EA.1.8.2.								
	EA.1.8.3.								
	EA.1.8.4.								
CE.1.9.	EA.1.9.1.								
CE.1.10	EA.1.10.1								
CE.1.11	EA.1.11.1.								
	EA.1.11.2.								
	EA.1.11.3.								
CE.1.12.	EA.1.12.1.								
	EA.1.12.2.								
	EA.1.12.3.								
CE.3.1.	EA.3.1.1.								
	EA.3.1.2.								
	EA.3.1.3.								
	EA.3.1.4.								
	EA.3.1.5.								
CE.3.2.	EA.3.2.1.								
	EA.3.2.2.								
VALORACIÓN MEDIA									

Tabla 26. Calificación competencias clave.

RÚBRICAS

RÚBRICA 1. PARA LA EVALUACIÓN DE PRUEBAS ORALES Y ESCRITAS

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Valoración
Presentación (escrita)	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	
Corrección ortográfica (escrita)	El texto está escrito correctamente	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su Edad.	
Expresión oral	Expone con un buen nivel de pronunciación y se expresa con confianza y seguridad.	Expone con un buen nivel de pronunciación y se expresa con alguna pausa o titubeo.	Expone nivel de pronunciación aceptable y se expresa con titubeos.	Expone con un nivel bajo de pronunciación y se expresa con muletillas, desconfianza y falta de fluidez.	
Vocabulario empleado	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	
Contenido	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de con algún error.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito) con diversos errores.	

Tabla 17. Rúbrica 1. Evaluación de pruebas orales y escritas.

El link de donde procede la rúbrica 1 es:

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

RÚBRICA 2. PARA LA EVALUACIÓN DE LAS INTERVENCIONES EN CLASE: EXPOSICIÓN ORAL.

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Valoración
Pronunciación y entonación	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	
Volumen y contacto visual	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes y algunas oyentes del grupo.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	
Recursos y apoyos	Utiliza diversos apoyos visuales y referencias al trabajo realizado a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	Utiliza algunos apoyos visuales a lo largo de su exposición y referencias al trabajo realizado que refuerzan el contenido.	Utiliza pocos apoyos visuales a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	No utiliza apoyos visuales en su exposición o apenas lo hace.	
Contenido	Demuestra un completo dominio del tema tratado, destacando claramente los aspectos importantes, exponiéndolo de manera clara y correcta, y utilizando un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo, no siendo certero en las respuestas a las preguntas del grupo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	
Cuestiones formales y secuencia	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo adecuado.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo aproximado.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo establecido.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse al tiempo y manifestar interés y control emocional.	

Tabla 28. Rúbrica 2. Evaluación de las intervenciones en clase: exposición oral.

El link de donde procede la rúbrica 2 es:

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

RÚBRICA 3. PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Valoración
Lectura y comprensión del problema	Lee el enunciado adecuadamente identificando e interpretando los datos necesarios que se dan en él, ya sea de forma narrativa, por medio de gráficos, tablas, diagramas, etc., además, localiza los elementos a resolver, así como los posibles elementos intermedios necesarios para llegar a estos.	Lee el enunciado adecuadamente identificando e interpretando los datos necesarios que se dan en él, ya sea de forma narrativa, por medio de gráficos, tablas, diagramas, etc., además, localiza los elementos a resolver, pero le cuesta ver los posibles elementos intermedios necesarios para llegar a estos.	Lee el enunciado e identifica los datos que se dan en él, aunque le cuesta los que no son dados de forma narrativa. Presenta dificultades para entender cuáles son los elementos a resolver.	Tiene muchas dificultades para extraer los datos, incluso con ayuda. La verbalización sobre la situación problemática planteada es inexistente o incorrecta.	
Selección y aplicación de la estrategia	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra la total comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, ya que, de todas las estrategias trabajadas en clase, elige de forma individual la más eficiente y efectiva sin necesidad de ayuda. Además, relaciona en todo momento los datos con las cantidades desconocidas y deja rastro de lo que va a hacer.	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, ya que elige de forma individual la más efectiva, pero no relaciona los datos con las cantidades desconocidas o no deja rastro de lo que va a hacer.	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra comprensión parcial de los conceptos matemáticos involucrados, ya que la estrategia elegida no es la más adecuada en esta ocasión.	No es capaz de generar posibles estrategias para la resolución del problema o el desarrollo de la estrategia elegida es incorrecto y no repara en ello.	

Solución	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y/o a su interpretación.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos y ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y/o a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos y ayudándose, si es necesario de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta.	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula que utiliza no es correcta.	
Análisis de la solución	Comprueba si la solución es coherente, sustituyendo el valor obtenido en el razonamiento inicial y viendo que es válida, tanto matemáticamente como en la realidad a la que el enunciado se refiere, dando una frase que responde a la pregunta planteada.	Da la solución, comprobando previamente si es coherente, sustituyendo el valor obtenido en el razonamiento inicial y viendo que es válida matemáticamente, pero no comprueba si tiene sentido en la realidad a la que el enunciado se refiere.	Da la solución del problema, pero no comprueba si es coherente en ningún caso.	No explicita la solución ni la contrasta.	

Tabla 29. Rúbrica 3. Para la resolución de problemas.

El link de donde procede la rúbrica 3 es:

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

RÚBRICA 4. PARA LA EVALUACIÓN DE HÁBITOS PERSONALES Y ACTITUD.

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Valoración
Autonomía y confianza	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades de manera habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades con alguna ayuda.	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	
Creatividad	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza alguna estrategia creativa en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza alguna estrategia de manera orientada y propone alguna iniciativa creativa con ayuda.	
Gestión emocional	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones, no permitiéndole resolver sus situaciones y problemas.	

Actitud respetuosa y responsable	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	
Corrección en la presentación	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	
Conclusión del trabajo	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.	

Tabla 30. Rúbrica 4. Evaluación de hábitos personales y actitud.

El link de donde procede la rúbrica 4 es:

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

RÚBRICA 5. PARA LA EVALUACIÓN EN LA PARTICIPACIÓN EN TRABAJOS COOPERATIVOS

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Valoración
Planificación del trabajo	Realiza un uso adecuado de los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con cierta dificultad para ajustarse al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con dificultad y sin ajustarse al plazo previsto.	
Responsabilidad	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, valorando especialmente el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades, con alguna dificultad para valorar el esfuerzo individual y colectivo.	Elude sus responsabilidades y tiene dificultades para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	
Participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	

Habilidades sociales	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen a la cohesión.	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona con dificultades, necesitando ayuda para mantener actitudes respetuosas.	
Generación y presentación del producto	Contribuye de manera activa a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con alguna dificultad para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye algo a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con dificultades para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	

Tabla 31. Rúbrica 5. Evaluación en la participación en trabajos cooperativos.

El link de donde procede la rúbrica 5 es:

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Esquema transposición didáctica (García Armenteros 2020).

Figura 2. Bloque 3. Geometría Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º de ESO (R.D. 1102/2014, de 26 de diciembre).

Figura 3. Porcentaje de actividades según su tipología (elaboración propia).

Figura 4. Comparativa según el peso del uso de las TIC respecto al total de actividades.

Figura 5. Comparativa según el peso de las actividades con metodologías innovadoras respecto al total de actividades.

Figura 6. Ejemplo de demostración en libro de la editorial Anaya

Figura 7. Ejemplo de demostración en libro de la editorial Bruño

Figura 8. Ejemplo de demostración en libro de la editorial Edebé

Figura 9. Triángulo rectángulo (elaboración propia)

Figura 10. Circunferencia goniométrica (elaboración propia).

Figura 11. Signos seno y coseno de un ángulo (elaboración propia).

Figura 12. Razones trigonométricas ángulos 30° y 60° (elaboración propia).

Figura 13. Razones trigonométricas del ángulo de 45° (elaboración propia).

Figura 14. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

Figura 15. Ángulos que difieren 90° (elaboración propia).

Figura 16. Ángulos suplementarios (elaboración propia).

Figura 17. Ángulos que difieren 180° (elaboración propia).

Figura 18. Suma de ángulos

Figura 19. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

Figura 20. Triángulo acutángulo (elaboración propia).

Figura 21. Triángulo obtusángulo (elaboración propia).

Figura 22. Circunferencia circunscrita (elaboración propia).

Figura 23. Triángulo acutángulo (elaboración propia).

Figura 24. Triángulo obtusángulo (elaboración propia).

Figura 25. Triángulo acutángulo de lados a , b , c y ángulo α (elaboración propia).

Figura 26. Demostración sin palabras teorema del coseno (elaboración propia).

Figura 27. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

Figura 28. Altura de pie inaccesible (elaboración propia).

Figura 29. Distancia entre dos puntos inaccesibles (elaboración propia).

Figura 30. Notación Triángulo (elaboración propia).

Figura 31. Circunferencia inscrita (elaboración propia).

Figura 32. Producción asociada a la sub-categoría “cociente” (Martín et al. 2016).

Figura 33. Representación asociada a la sub-categoría longitud (Martín et al. 2016).

Figura 34. Gráfico representativo del tipo de actividades libro Anaya.

Figura 35. Gráfico representativo del tipo de actividades libro Edebé.

Figura 36. Gráfico representativo del tipo de actividades libro Bruño.

Figura 37. Ejercicio, razones trigonométricas (elaboración propia).

Figura 38. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

Figura 39. Medición altura de un árbol (elaboración propia).

Figura 40. Ángulo rayos del Sol y superficie de la Tierra.

Figura 41. Ángulos rayos del Sol Superficie de la Tierra.

Figura 42. Con dos listones de longitudes l_1 y l_2 situados en dos puntos cualesquiera del mismo meridiano.

Figura 43. Triángulo rectángulo (Obra colectiva Ediciones Edebé, 2016).

Figura 44. Croquis ejercicio 5.1

Figura 45. Croquis ejercicio 5.2

Figura 46. Croquis actividad 6.1 (Colera et al, 2016).

Figura 47. Triángulos rectángulos, enunciado ejercicio 9.1 (Colera et al., 2016).

Figura 48. Triángulo acutángulo del enunciado del ejercicio 9.8 (Colera et al., 2016).

Figura 49. Triángulo acutángulo y obtusángulo, enunciado ejercicio 9.9 (Colera et al., 2016).

Figura 50. Croquis enunciado ejercicio 9.12 (Colera et al., 2016).

Figura 51. Croquis del enunciado ejercicio 9.13 (Colera et al., 2016).

Figura 52. Croquis del enunciado ejercicio 9.14 (Colera et al., 2016).

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Contenidos de trigonometría libros Anaya, Bruño y Edebé.

Tabla 2. Signos razones trigonométricas (Encabo de Lucas, Gómez, de Haro, Miranda, Nicolás, 2010).

Tabla 3. Razones trigonométricas de ángulos notables (Encabo de Lucas, Gómez, de Haro, Miranda, Nicolás, 2010).

Tabla 4. Resolución de triángulos rectángulos (García, Gómez, Navarro, García, Pina, 2013).

Tabla 5. Representaciones gráficas de las razones trigonométricas (cuestionario).

Tabla 6. Categorización de las producciones para el tema circunferencia (Martín et al. 2016).

Tabla 7. Categorización de producciones para el tema triángulo (Martín et al. 2016)

Tabla 8. Tipos de actividades en la unidad didáctica; Fuente: Luque (2019)

Tabla 9. Sesión 1 (elaboración propia).

Tabla 10. Sesión 2 (elaboración propia).

Tabla 11. Sesión 3 (elaboración propia).

Tabla 12. Sesión 4 (elaboración propia).

Tabla 13. Sesión 5 (elaboración propia).

Tabla 14. Sesión 6 (elaboración propia).

Tabla 15. Sesión 7 (elaboración propia).

Tabla 16. Sesión 8 (elaboración propia).

Tabla 17. Sesión 9 (elaboración propia).

Tabla 18. Sesión 10 (elaboración propia).

Tabla 19. Sesión 11 (elaboración propia).

Tabla 20. Sesión 12 (elaboración propia).

Tabla 21 Criterios de Evaluación, Estándares de Aprendizaje y Competencias Clave.

Tabla 22. Actividades por secciones. Editorial Anaya. (elaboración propia).

Tabla 23. Actividades por secciones. Editorial Edebé. (elaboración propia).

Tabla 24. Actividades por secciones. Editorial Bruño. (elaboración propia)

Tabla 25. Calificación de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.

Tabla 26. Calificación competencias clave.

Tabla 27. Rúbrica 1. Evaluación de pruebas orales y escritas.

Tabla 28. Rúbrica 2. Evaluación de las intervenciones en clase: exposición oral.

Tabla 29. Rúbrica 3. Para la resolución de problemas.

Tabla 30. Rúbrica 4. Evaluación de hábitos personales y actitud.

Tabla 31. Rúbrica 5. Evaluación en la participación en trabajos cooperativos.