



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

GEOMETRÍA ANALÍTICA: VECTORES Y RECTAS.

Alumno/a: Galán Moral, Belén

Tutor/a: Prof. D. Cristina Rodríguez Montealegre
Dpto: Matemáticas

INDICE

RESUMEN	4
ABSTRACT	5
1. INTRODUCCIÓN	6
2. OBJETIVOS	8
3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	10
3.1. Análisis del currículo	11
3.2. Análisis de los libros de texto	14
3.2.1. Análisis de los contenidos	15
3.2.2. Estructura de los contenidos.	17
3.2.3. Ejemplos y ejercicios resueltos.	18
3.2.4. Actividades y problemas propuestos	18
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.	21
4.1. Introducción. Historia de la Geometría Analítica.....	22
4.2. Nomenclatura.....	23
4.3. El plano afín.....	24
4.4. Sistemas de referencia en el plano. Cambio de sistema de referencia.	26
4.4.1. Cambio de sistema de referencia	27
4.5. Ecuaciones de la línea recta.	28
4.6. Propiedades afines: incidencia, intersección y paralelismo.	31
4.7. El espacio afín.....	34
4.8. Sistemas de referencia en el espacio. Cambio de sistema referencia.....	35
4.8.1. Cambio de sistema de referencia.	36
4.9. El plano en el espacio afín.....	37
4.9.1. Ecuación implícita del plano.	39
4.9.2. Plano determinado por tres puntos no alineados.	40
4.10. La recta en el espacio afín.	41
4.10.1. Ecuaciones continuas de la recta.....	41
4.10.2. Ecuaciones implícitas de la recta.	42
4.10.3. Recta que pasa por dos puntos.	43

4.11.	Posiciones relativas entre dos planos.	43
4.12.	Posiciones relativas entre recta y plano.	44
4.13.	Posiciones relativas entre dos rectas.	45
4.14.	Haces de planos.	46
5.FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA: INVESTIGACIONES SOBRE APRENDIZAJE Y/O LA ENSEÑANZA.....		47
5.1.	Didáctica de la Geometría	47
5.1.1.	Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele	48
5.1.2.	Habilidades Básicas en Geometría.....	49
5.1.3.	Principios didácticos fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.	50
5.2.	Estudio de los errores en Matemáticas	51
5.2.1.	Estudio de los errores en geometría.....	52
6.	PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA	60
6.1.	Título.....	60
6.2.	Justificación	60
6.2.1.	Justificación curricular	60
6.2.2.	Justificación social y/o profesional	61
6.2.3.	Justificación interna	62
6.3.	Contextualización del centro y del aula	63
6.3.1.	Situación geográfica del centro	63
6.3.2.	Aspectos demográficos y socioeconómicos del municipio	64
6.3.3.	Perfil del alumnado	65
6.3.4.	Instalaciones, materiales y recursos humanos.....	65
6.3.5.	Descripción del aula	66
6.4.	Objetivos	67
6.4.1.	Objetivos generales de etapa	67
6.4.2.	Objetivos del área de matemáticas	68
6.4.3.	Objetivos concretos de la unidad didáctica	69
6.5.	Competencias Clave	70
6.6.	Contenidos	73

6.6.1.	Contenidos de la unidad didáctica.....	73
6.6.2.	Contenidos interdisciplinarios y transversales	75
6.7.	Metodología	75
6.8.	Actividades y recursos.....	77
6.8.1.	Actividades.....	77
6.8.2.	Recursos.....	78
6.9.	Atención a la diversidad	79
6.10.	Temporalización	81
6.11.	Evaluación.....	93
6.11.1.	Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.....	93
6.11.2.	Criterios de calificación e instrumentos de evaluación	94
7.	CONCLUSIONES	95
8.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	96
9.	REFERENCIAS NORMATIVAS.....	99
10.	ANEXOS.....	100
	ANEXO I: Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave de los bloques primero y tercero de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O.	100
	ANEXO II: Comparativa de los libros de texto de Anaya, SM y Edelvives.	105
	ANEXO III: Investigaciones sobre enseñanza-aprendizaje de Geometría.	108
	ANEXO IV: Contenidos transversales.....	116
	ANEXO V: Recomendaciones sobre la metodología didáctica a seguir.....	117
	ANEXO VI: Actividades y recursos.	119
	A. Actividades iniciales o de diagnóstico.	119
	B. Actividades de aprendizaje, desarrollo y consolidación	120
	C. Actividades y recursos para fomentar el uso de las TIC en el aula	126
	D. Actividades de tipo ABP	131
	E. Examen de la unidad.....	138
	ANEXO VII: Criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave de la Unidad Didáctica.	145
	ANEXO VIII: Rúbricas de evaluación.	150

RESUMEN

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster es aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, durante el curso 2020/2021.

El presente trabajo, titulado “Geometría Analítica: vectores y rectas”, se centra en la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de geometría analítica, presentes en el currículo de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O., de acuerdo al Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre.

En este TFM, se distinguen dos partes.

La primera parte se compone de las fundamentaciones curricular, epistemológica y didáctica. En la fundamentación curricular, se analiza el currículo vigente, así como tres libros de texto. En la fundamentación epistemológica, se desarrolla un tema del temario de las oposiciones para el acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, de la especialidad de Matemáticas. Por último, en la fundamentación didáctica, se examinan varias investigaciones sobre la didáctica de la geometría.

En la segunda parte, se desarrolla una unidad didáctica sobre geometría analítica en el plano, en la que se organizan todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje: objetivos, contenidos, metodología empleada, actividades y recursos y criterios e instrumentos de evaluación.

Este TFM se ha realizado siguiendo tanto la normativa estatal vigente (el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato), como la normativa autonómica (la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía).

PALABRAS CLAVE: Vectores y rectas, Geometría, Matemáticas, Unidad Didáctica, Educación Secundaria Obligatoria, Trabajo Fin de Máster.

ABSTRACT

The main purpose of this Master's Thesis is to apply the acquired knowledge throughout the Master's Degree in Teaching Staff of Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Professional Training and Language Teaching, in the specialty of Mathematics, during the 2020/2021 academic year.

This current work, titled "Analytic Geometry: vectors and lines", focuses on the teaching-learning of analytical geometry contents, available in the Mathematics Oriented to Academic Teachings of 4th ESO curriculum, according to the RD 1105/2014, December 26.

This TFM is divided in two parts.

The first part is composed by the curriculum foundation, the epistemological foundation and the didactic foundation. In the curricular foundation, the current curriculum is analyzed, as well as three textbooks. In the epistemological foundation, we developed a subject of the opposition agenda for access to the Body of Teachers of Secondary Education, specializing in mathematics. Finally, in the didactic foundation, we examine several investigations on the didactics of geometry.

In the second part, we developed a teaching unit on analytical geometry in the plane, in which all the elements involved in the teaching-learning process are organized: objectives, content, methodology used, activities and resources, and evaluation criteria and instruments.

This TFM has been carried out following the current state regulations (RD 1105/2014, of December 26, which establishes the basic curriculum of Compulsory Secondary Education and Baccalaureate), as well as the regional regulations (Order of 14 July 2016, by which the curriculum of Compulsory Secondary Education in the Autonomous Community of Andalucía is developed).

KEYWORDS: Vectors and lines, Geometry, Mathematics, Didactic Unit, Compulsory Secondary Education, Master's Thesis.

1. INTRODUCCIÓN

La elaboración de este Trabajo Fin de Máster, supone la culminación del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, del curso 2020/2021.

Este TFM, en el que se ponen en práctica todos los conocimientos adquiridos a lo largo del máster, se centra en los contenidos relativos a “Geometría Analítica” de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, del curso 4º de Educación Secundaria Obligatoria.

La geometría analítica tiene una gran importancia en las matemáticas, pues es un puente entre el Álgebra y la Geometría, y su enseñanza es vital para que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos y desarrollen la visión y el razonamiento espacial.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte, se desarrollan los fundamentos Didácticos, Epistemológicos y Curriculares, que servirán de base para llevar a cabo la segunda parte del trabajo, el diseño de una unidad didáctica.

En fundamentación curricular, se analiza el currículo académico, según el Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre, y según la Orden de 14 de julio de 2016, para conocer el contexto curricular del tema objeto de estudio. Posteriormente, se examinan y comparan varios libros texto, para comprobar si se ajustan a los contenidos del currículo.

En la fundamentación epistemológica, se desarrolla un tema del temario de las oposiciones para el acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, de la especialidad de Matemáticas, relacionado con la geometría analítica. Se exponen definiciones, propiedades, teoremas y corolarios, necesarios para tener un conocimiento matemático-científico más profundo de los contenidos de la Unidad Didáctica que se va a desarrollar.

En la fundamentación didáctica, se han examinado diversos artículos de investigación centrados en didáctica de las matemáticas, en concreto, en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Se ha buscado información sobre cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los estudiantes, qué dificultades tienen para alcanzar un aprendizaje significativo de los conceptos geométricos, y cuáles son los errores y las dificultades más comunes de los estudiantes en geometría.

En la segunda parte del trabajo, se elabora una Unidad Didáctica sobre el tema de geometría analítica en el plano (vectores, operaciones con vectores, rectas, ecuaciones de la recta, posiciones relativas de rectas en el plano, distancias entre elementos, etc.), dirigida a estudiantes de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.

La Unidad Didáctica se ha diseñado con el objetivo de favorecer el aprendizaje del alumnado, facilitar su comprensión de los contenidos del tema y promover el desarrollo de las competencias clave. Se combinarán diferentes metodologías docentes,

Se combinarán diferentes metodologías, desde métodos más tradicionales, hasta métodos activos, con los que se fomenta que el alumnado participe en su propio aprendizaje. Para lograr que los estudiantes construyan aprendizajes significativos y sean conscientes de la utilidad y la interdisciplinariedad de las matemáticas, se les planteará problemas relacionados con la vida real y con otras materias. También se desarrollarán actividades que promuevan el aprendizaje cooperativo y el uso de recursos TIC, con lo que se pretende motivar a los estudiantes y que construyan su conocimiento trabajando en equipo, a la vez que adquieren competencias y habilidades sociales.

2. OBJETIVOS

Este trabajo se ha elaborado para aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo del Máster y persiguiendo otros objetivos, relacionados con la formación como futuro docente y con el desarrollo de tareas propias de la profesión:

1. Conocer la normativa educativa vigente, así como la organización institucional del sistema educativo y los modelos de mejora de la calidad de la enseñanza.
2. Conocer los contenidos curriculares de la materia de matemáticas, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje.
3. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
4. Conocer el valor formativo y cultural de las matemáticas y los contenidos que se cursan en la E.S.O. y el Bachillerato.
5. Conocer el desarrollo teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
6. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), para aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
7. Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de la asignatura de matemáticas.
8. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo, seleccionando y elaborando aquellos materiales didácticos y tareas educativas más adecuados.
9. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las matemáticas, atendiendo al nivel, la formación previa y la orientación de los estudiantes, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
10. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje y dominar las TICS para aprovecharlas en la función docente.
11. Adquirir estrategias para conseguir que los estudiantes se esfuercen y participen en su propio aprendizaje, y para fomentar la autonomía y el espíritu crítico, reflexivo y emprendedor.
12. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.

13. Comprender y valorar la diversidad en el alumnado según sus diferentes capacidades y ritmos de aprendizaje, conocer las repercusiones que tienen en el aprendizaje e intervenir adecuadamente.
14. Conocer las medidas de atención a la diversidad que se pueden adoptar para poder realizar el asesoramiento necesario en cada caso.
15. Desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes
16. Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones, y comprender el desarrollo de su personalidad y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje.
17. Conocer las estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.
18. Analizar los resultados de la evaluación e identificar los problemas relativos a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, para plantear alternativas y soluciones.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En este apartado, se llevará a cabo un análisis del currículo escolar, así como el análisis y la comparación de varios libros de texto, centrados en el tema que se trata en este trabajo.

El diseño de la unidad didáctica de este trabajo será de acuerdo a la legislación educativa vigente. A nivel nacional, se siguen las disposiciones del R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, para determinar los elementos curriculares de la unidad didáctica. A nivel autonómico, la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, sirve de referencia para determinar los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, elementos transversales y la metodología didáctica recomendada de la unidad didáctica.

Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Con el objetivo de conocer el contexto curricular del tema expuesto en el apartado 5 (Fundamentación Didáctica) y sobre el que se desarrollará la unidad didáctica, se lleva a cabo un análisis del currículo académico según el Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Básica Obligatoria y el Bachillerato. En la Tabla 1 se muestran los contenidos del tema “Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y el plano. Relaciones afines”, presentes en cada curso de la ESO y el Bachillerato.

Tabla 1. Asignaturas y bloques de los cursos de la ESO y el Bachillerato en los que se presenta contenido del tema (RD 1105/2014, 26 de diciembre; Elaboración propia).

Asignatura	Bloque	Contenidos
Matemáticas. 1º y 2º de ESO.	3. Geometría.	Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.
	4. Funciones.	Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y

		decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º de ESO.	3. Geometría.	Geometría del plano. Lugar geométrico. Geometría del espacio.
	4. Funciones.	Expresiones de la ecuación de la recta.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO.	3. Geometría.	Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.
Matemáticas I. 1º Bachillerato.	4. Geometría.	Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas. Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores. Bases ortogonales y ortonormales. Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. Lugares geométricos del plano.
Matemáticas II. 2º Bachillerato.	4. Geometría.	Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, escalar y mixto. Significado geométrico. Ecuación de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

La unidad didáctica que se desarrollará pertenece al currículo de 4º de ESO de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y se centra en la geometría analítica, que es una rama de las matemáticas dedicada al estudio en profundidad de las figuras geométricas y sus respectivos datos (áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección, ángulos de inclinación, etc.), empleando técnicas básicas de análisis matemático y de álgebra (“Geometría Analítica,” n.d.).

3.1. Análisis del currículo

Para analizar el currículo vigente, nos remitimos al Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Básica Obligatoria

y el Bachillerato. En el Anexo I de este decreto, se encuentran los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 4º de ESO, así como del resto de materias de la ESO y el Bachillerato.

De acuerdo al RD 1105/2014, 26 de diciembre, la asignatura en la que nos centramos se divide en los siguientes bloques:

1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
2. Números y Álgebra.
3. Geometría.
4. Funciones.
5. Estadística y probabilidad.

De estos cinco bloques, nos interesan el Bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas), por ser un bloque que debe desarrollarse de modo transversal y simultáneo al resto de bloques, y el Bloque 3 (Geometría), que trata los contenidos referentes a geometría.

Para analizar el currículo, también se debe consultar la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. En esta orden, se muestra la asociación de cada criterio de evaluación a la competencia o competencias clave con la que está vinculado.

Los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave de los bloques primero y tercero se presentan en las Tablas 28 y 29 del **Anexo I**.

Las competencias clave que los alumnos deben adquirir tras haber estudiado los bloques primero y tercero aparecen en la Tabla 2.

Tabla 2. Competencias clave logradas en los bloques 1 y 3 (Orden de 14 de julio de 2016; Elaboración propia)

CCL	Competencia en Comunicación Lingüística
CMCT	Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología
CD	Competencia Digital
CAA	Competencia de Aprender a Aprender
CSC	Competencias Sociales y Cívicas
SIEP	Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor

En la Orden de 14 de julio de 2016, aparecen los objetivos a alcanzar de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, materia troncal impartida en tercero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria. Esta asignatura debe contribuir a que los alumnos y alumnas desarrollen las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

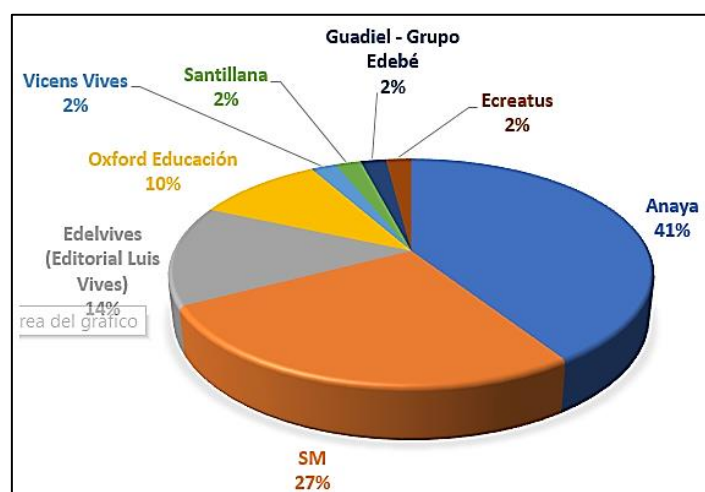
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

3.2. Análisis de los libros de texto

Un problema que surge a la hora de analizar libros de texto es seleccionar aquellos que son de mayor interés. Para ello, consultamos los datos disponibles en la página web de la Junta de Andalucía sobre la selección de libros de texto en diferentes centros de la provincia de Jaén para el curso 2020/2021 (Junta de Andalucía, Consejería de Educación y Deporte, 2020).

En la Gráfica 1, se muestran los libros de texto seleccionados para la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO en el curso 2020/2021 en un total de 49 centros (31 públicos y 18 privado-concertados) de la provincia de Jaén.



Gráfica 1. Libros de texto utilizados en Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas en los centros de la provincia de Jaén en el curso 2020/2021 (Elaboración propia).

Como se ve en la gráfica anterior, en la mayoría de centros se usa el libro de la editorial Anaya (41%), seguido de SM (27%), Edelvives (14%) y Oxford Educación (10%).

Ante los datos obtenidos, se hará una comparativa de los libros de Anaya, SM y Edelvives, por ser los más utilizados los institutos de educación secundaria públicos y concertados de la provincia de Jaén.

- Colera, J., Colera, R., Gaztelu, I., & Oliveira, M. J. (2017). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas. 4º ESO. Aprender es crecer en conexión*. Anaya. ISBN: 978-84-698-1640-0
- Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, E. (2017). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Savia Andalucía*. SM. ISBN: 978-84-675-8636-7
- Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Matemáticas Académicas. Proyecto SomosLink*. Edelvives. ISBN: 978-84-140-0300-8

3.2.1. Análisis de los contenidos.

En la Tabla 3 se muestra una comparativa de los contenidos de los tres libros de la unidad en la que se trata la geometría analítica.

Tabla 3. Contenidos de la unidad Geometría Analítica de los libros de las editoriales Anaya, SM y Edelvives (Elaboración propia).

Anaya	SM	Edelvives
Unidad 8. Geometría Analítica.	Unidad 7. Geometría Analítica.	Unidad 9. Geometría Analítica.
1. Vectores en el plano.	1. Vectores fijos y libres en el plano.	1. Vectores en el plano.
2. Operaciones con vectores.	2. Operaciones con vectores.	2. Operaciones con vectores.
3. Vectores que representan puntos.	Combinación lineal.	3. Vectores dependientes e independientes. Base del espacio vectorial. Sistema de referencia.
4. Punto medio de un segmento.	3. Producto escalar de vectores. Aplicaciones.	4. Ecuaciones de la recta.
5. Puntos alineados.	4. Ecuaciones de la recta.	5. Posiciones relativas de dos rectas.
6. Ecuaciones de la recta.	5. Problemas de incidencia.	6. Relaciones métricas.
7. Rectas. Paralelismo y perpendicularidad.		
8. Rectas paralelas a los ejes coordenados.		
9. Posiciones relativas de dos rectas.		

10. Distancia entre dos puntos.		
11. Ecuación de una circunferencia.		

Al examinar los libros, lo primero que se comprueba es que cumplen con los contenidos mínimos del bloque de geometría de 4º de ESO, según el RD 1105/2014: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Respecto a los contenidos del bloque 1, su cumplimiento dependerá de los recursos materiales y de tiempo de los que se disponga.

En las Tablas 30 y 31 del **Anexo II**, aparece una comparativa entre los libros de texto, en la que se identifican los contenidos comunes y no comunes. De los tres libros de texto analizados, los de Edelvives y SM son los que tienen un contenido más extenso y completo.

Tanto en la organización, como en la forma de expresar algunos de los contenidos comunes, se han encontrado diferencias.

En el apartado de “Vectores en el plano”, los libros de SM y de Edelvives introducen el concepto de “vector de posición”, mientras que Anaya destina el apartado del tema “Vectores que representan puntos”, para enunciar ese concepto, pero sin llegar a denominarlo por su nombre técnico. Otra diferencia que se aprecia es que en el libro de Edelvives se habla del argumento de un vector, o ángulo que forma el vector con la horizontal, concepto que no aparece ni el de SM ni el de Anaya.

En la sección de operaciones con vectores, Anaya no incluye el producto escalar de vectores, ni el cálculo del ángulo que forman dos vectores. Edelvives es el único que muestra las propiedades de la suma de vectores (conmutativa y asociativa).

La siguiente diferencia aparece al explicar el concepto de puntos alineados: SM lo expone en una actividad resuelta, Anaya emplea una sección del tema y Edelvives lo presenta en el apartado “Relaciones métricas”.

Los tres libros tratan la combinación lineal de vectores y el concepto de vectores linealmente dependientes, pero Edelvives, a diferencia de Anaya y SM, habla de los vectores linealmente independientes para poder introducir el concepto de base de un espacio vectorial y definir qué es un sistema de referencia:

“Un sistema de referencia es una terna $\{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, formada por un origen de coordenadas, O, y dos vectores, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, no nulos y linealmente independientes que forman una base”.

Seguidamente habla del sistema de referencia cartesiano, cuyos vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son perpendiculares y unitarios, e iguales a (1,0) y (0,1), respectivamente.

Respecto a las ecuaciones de la recta, Anaya explica cómo se halla la ecuación general o implícita: $Ax+By+C=0$

Se detectan diferencias a la hora de definir dos vectores perpendiculares entre sí: en el libro de SM se hace referencia a que el valor de su producto escalar es igual a cero, mientras que el de Anaya, puesto que no habla de producto escalar, indica que el vector perpendicular a (a, b) es (-b, a). En cuanto al libro de Edelvives, se demuestra en una actividad resuelta que un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es perpendicular a $\vec{v} = (-u_2, u_1)$, mediante el cálculo del ángulo que forman.

En el estudio de las posiciones relativas de dos rectas, Edelvives es el único que relaciona la posición entre rectas con el tipo de sistema de ecuaciones forman: paralelas (incompatible), secantes (compatible) o coincidentes (incompatible determinado).

También se encuentran diferencias en la organización de los contenidos de los libros: Anaya dedica una sola sección para explicar las rectas paralelas a los ejes coordenados, mientras que SM introduce la pendiente de estas rectas como aclaración en el apartado de “Ecuaciones de la recta”. Lo mismo ocurre con los contenidos del apartado “Distancia entre dos puntos” de Anaya, que SM los incluye en el punto “Vectores fijos y libres en el plano” y Edelvives en “Relaciones métricas”.

Por último, se debe señalar que hay contenidos que solo aparecen en el libro de Edelvives, que sería de interés que los incluyesen el resto de libros: haz de rectas, haz de rectas paralelas, distancia entre un punto y una recta y distancia entre dos rectas paralelas.

3.2.2. Estructura de los contenidos.

Para analizar la estructura de los contenidos de los libros de texto, primero se observa cómo introducen el tema.

El libro de Anaya comienza el tema con una introducción histórica sobre el nacimiento de la geometría analítica y su “paternidad múltiple”. Para despertar el interés de los alumnos, se expone que, aunque Descartes es reconocido como el padre de la geometría analítica, Fermat consiguió desarrollar un sistema similar un año antes, pero no ejerció tanta influencia. Posteriormente, se plantean dos actividades muy simples para poner a los alumnos en situación y que recuerden cómo utilizar los vectores para designar posiciones y desplazamientos.

En la introducción del libro de SM se conectan los vectores y el billar. Mediante las leyes de conservación del momento lineal y la energía cinética, se relacionan las velocidades, expresadas en forma de vectores, de la bola y de otra bola de igual masa y

tamaño, antes y después de chocar. Seguidamente, propone una serie de preguntas para que los estudiantes reflexionen y recuerden cómo operar con vectores, cómo hallar el ángulo que forman, cuáles son las ecuaciones de una recta y las diferencias entre rectas paralelas, secantes y coincidentes.

En el libro de texto de Edelvives, la unidad comienza mostrando imágenes de paisajes y objetos que contienen rectas. Llama la atención de los estudiantes haciendo que reflexionen sobre la relación entre la unidad y su entorno. Después, habla de las posiciones relativas entre rectas (perpendiculares, paralelas o secantes) y pregunta a los estudiantes si reconocen esas posiciones en las imágenes mostradas en la introducción.

En cuanto a la forma de exponer los contenidos, los tres libros de texto, siguen una estructura deductiva. Cada punto del tema comienza con la explicación de los contenidos teóricos, después se presentan un par de ejercicios resueltos de aplicación de esos contenidos y, por último, se proponen una serie de actividades para que los alumnos puedan practicar lo aprendido.

Después de presentar todos los contenidos de la unidad, tanto el libro de Anaya como el de SM, incluyen unas actividades clave resueltas paso a paso. En el libro de Edelvives, por el contrario, aparece un tutorial de cómo realizar ejercicios del tema empleando el software GeoGebra.

Antes de presentar la relación de actividades y problemas, los libros de SM y Edelvives incluyen un esquema resumen del tema, mientras que el de Anaya no.

Por último, los tres libros de texto incorporan al final de la unidad una serie de problemas de ampliación (para desarrollar el pensamiento crítico, tipo PISA, etc.) y una autoevaluación.

3.2.3. Ejemplos y ejercicios resueltos.

En lo referente a los ejercicios resueltos, en los tres libros de texto aparecen, después de los contenidos teóricos de cada apartado, un par de ejemplos de ejercicios resueltos. En el caso del libro de SM, los ejercicios resueltos consisten en ejemplos muy sencillos para mostrar aplicación de los contenidos, así como ejercicios un poco más complejos que se encuentran a continuación de los ejemplos y en la propia relación de ejercicios final.

Al final del tema y antes de la relación de ejercicios, aparecen en los libros de SM y de Anaya, pero no el de Edelvives, las actividades clave del tema resueltas y explicadas.

3.2.4. Actividades y problemas propuestos.

Si se considera el tipo de ejercicios propuestos, los tres libros presentan ejercicios de aplicación de los conceptos teóricos después de cada punto, una relación de actividades y problemas al final del tema y una autoevaluación.

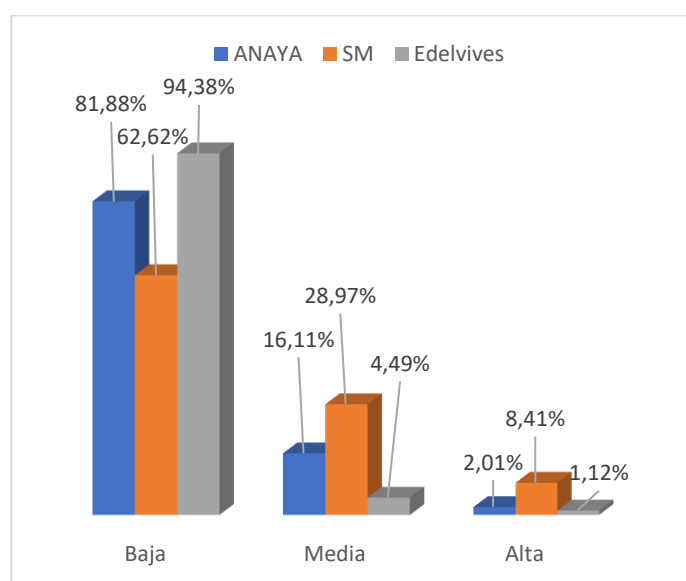
Los ejercicios son variados respecto a su contenido, como se observa en la Tabla 4. El libro de Anaya es el que contiene más ejercicios y el que concede mayor importancia a la asimilación de conceptos básicos (punto medio de un segmento, puntos alineados), a los que destina bastantes ejercicios muy repetitivos. El libro de SM tiene menos ejercicios mecánicos y se centra más en problemas, cuya resolución precisa la asociación y aplicación de distintos conceptos. El libro de Edelvives es el que cuenta con menor número de ejercicios, y además carece de problemas de mayor dificultad, en los que se asocian diferentes conceptos (problemas de cálculo de medianas, baricentro y ortocentro de un triángulo, problemas de ampliación...).

Tabla 4. Análisis de los ejercicios de los libros de texto de las editoriales Anaya, SM y Edelvives (Elaboración propia).

Tipo de ejercicios.	Anaya	SM	Edelvives
Ejercicios resueltos.	25	18	18
Ejercicios de representación de vectores en el plano.	10	6	7
Ejercicios operaciones con vectores y combinación lineal.	12	10	11
Ejercicios cálculo del punto medio de un segmento.	8	2	4
Ejercicios de puntos alineados.	6	4	4
Simétrico de un punto respecto a un punto/una recta	5	3	2
Ejercicios de bases y sistemas de referencia en el plano	-	-	5
Ejercicios sobre el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre dos vectores.	-	18	6
Ejercicios de ecuaciones de la recta.	25	17	7
Ejercicios de paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas de dos rectas.	22	13	9
Ejercicios sobre la ecuación de la circunferencia.	12	-	-
Ejercicios de haces de rectas	-	-	1
Ejercicios de distancia entre puntos.	10	4	3
Ejercicios de distancia entre un punto y una recta	2	-	3
Ejercicios de distancia entre dos rectas paralelas.	-	-	2
Problemas de cálculo de medianas, baricentro y ortocentro de un triángulo	3	4	-
Problemas de ampliación.	3	5	-
Problemas para reforzar el pensamiento crítico y actividades tipo PISA.	6	3	3

Problemas a resolver empleando herramientas tecnológicas.	Web	Web	4
Total	149	107	89

De acuerdo a la Gráfica 2, en los libros de SM y Anaya, la mayor parte de las actividades y los problemas son de baja y media dificultad, aunque también se incluyen problemas de dificultad elevada para favorecer el razonamiento lógico de los estudiantes, especialmente en el libro de SM. Por el contrario, en el libro de Edelvives, la gran mayoría de los ejercicios son de baja dificultad y bastante mecánicos, no se proponen problemas de dificultad alta, en los que se relacionan los diferentes conceptos de la unidad y se estimule el razonamiento y el aprendizaje de los estudiantes.



Gráfica 2. Dificultad de las actividades de los libros de las editoriales Anaya, SM y Edelvives (Elaboración propia).

Respecto a la presencia de actividades en grupo y los recursos TIC, en el libro de Anaya se menciona el uso de herramientas TIC, animando a los alumnos a buscar información y recursos en las webs de Anaya y de GeoGebra, así como el aprendizaje cooperativo, proponiendo la realización de actividades en pequeños grupos. El libro de SM también propone una serie de actividades disponibles en su web (smSaviadigital.com) haciendo uso de GeoGebra, pero no hace referencia al aprendizaje cooperativo. En cuanto al libro de Edelvives, contiene algunas actividades que sugiere realizar en parejas y mediante GeoGebra y, también, actividades disponibles en la web.

Después de analizar los libros de texto de las tres editoriales, se concluye afirmando que:

- La estructura de los contenidos es prácticamente la misma en los tres libros de texto y los ejercicios son muy parecidos, pues en su mayoría son de baja o media dificultad.

- El libro de texto de la editorial Edelvives es el que presenta más contenido teórico (base de un espacio vectorial, sistema de referencia, haz de rectas, distancia punto-recta, distancia entre rectas paralelas), pero las actividades y problemas propuestos son insuficientes y carecen de la dificultad que estimule el razonamiento y el aprendizaje de los estudiantes.
- El libro de Anaya es el que presenta menor contenido y da mucha importancia a la asimilación de conceptos básicos (distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento, puntos alineados, vectores que representan puntos), ya que destina un apartado para tratar cada uno de ellos e infinidad de ejercicios mecánicos. En los otros dos libros, se contemplan mayor cantidad de contenidos y más complejos, que no aparecen en el de Anaya (vector fijo, vectores equipolentes, vector unitario, vectores libres del plano, producto escalar de vectores, ángulo entre vectores, ecuación general de una recta). Aunque la mayor parte de los ejercicios que propone son de baja y media dificultad, incorpora también problemas más complejos, que relacionan los distintos conceptos de la unidad y les incita a desarrollar un pensamiento más profundo.
- El libro de texto de SM, aunque no incluye algunos de los contenidos que sí que presenta Edelvives, propone actividades y problemas mucho más enriquecedores para el alumnado. De los tres libros, es el más completo en cuanto a contenidos y tipos de actividades y problemas propuestos: explica de forma detallada tanto los contenidos básicos (elementos de un vector, tipos de vectores, operaciones con vectores...), como los más complejos (ecuaciones de una recta, posiciones relativas entre rectas...), e incluye variedad de actividades mecánicas y de problemas de dificultad elevada que favorecen el razonamiento lógico de los estudiantes.

Los tres libros incluyen actividades online o relacionadas con el uso del software Geogebra, lo que puede ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor los ejercicios.

En cuanto a la presencia de actividades de carácter colaborativo, es escasa (Anaya y Edelvives) o ninguna (SM), a pesar de los beneficios que tiene el aprendizaje cooperativo. Los libros de texto deberían incluir más actividades que promuevan el trabajo cooperativo, para mejorar las relaciones interpersonales, la autoestima, la gestión de conflictos, la solución de problemas, la toma de decisiones; aumentar la motivación y promover el pensamiento crítico, por medio del análisis, síntesis y evaluación de los conceptos entre los integrantes del grupo.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.

Con el objetivo de profundizar en el trasfondo matemático de la geometría analítica, en este apartado se desarrolla el Tema 51, “Sistemas de referencia en el plano y en el

espacio. Ecuaciones de la recta y el plano. Relaciones afines”. Este tema pertenece al temario para el ingreso y acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria de la especialidad de Matemáticas, recogido en el Anexo III de la Orden de 9 de septiembre de 1993 (BOE 226 de 21 de septiembre de 1993), regulado mediante el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio.

El tema presenta la siguiente estructura:

1. Introducción.
2. El plano afín.
3. Sistemas de referencia en el plano. Cambio de sistema de referencia.
4. Ecuaciones de la línea recta.
5. Propiedades afines: incidencia, intersección y paralelismo.
6. El espacio afín.
7. Sistemas de referencia en el espacio. Cambio de sistema de referencia.
8. El plano en el espacio afín.
9. La recta en el espacio afín.
10. Posiciones relativas entre dos planos.
11. Posiciones relativas entre recta y plano.
12. Posiciones relativas entre dos rectas.
13. Haces de planos.

4.1. Introducción. Historia de la Geometría Analítica.

La Geometría es una parte de las matemáticas que tiene por objeto las formas espaciales y las relaciones de los cuerpos reales, eliminando de ellos las restantes propiedades, y considerándolos desde un punto de vista puramente abstracto (A. D. Aleksandroz, A. N. Kolmogorov, 2014).

Hasta el siglo XVII, sólo era conocida la geometría en su rama más pura. No existía ninguna conexión entre ésta y otros ámbitos de las matemáticas, lo que hacía que los razonamientos fueran largos y complejos. En el siglo XVII, con los trabajos de **René Descartes** (1596-1650) y **Pierre de Fermat** (1601-1665), nace la Geometría analítica, que estudia las figuras geométricas considerando que cada punto viene representado por dos números (A. D. Aleksandroz, A. N. Kolmogorov, 2014).

Frente a la geometría intrínseca, **René Descartes** (1596-1650), en un apéndice de su «Discurso del Método», propuso utilizar un sistema de referencia, llamado actualmente cartesiano en su honor, ligando la geometría con la aritmética y el álgebra.

Este descubrimiento, poco parecido a lo que conocemos hoy en día, fue toda una revolución y tuvo grandes defensores y grandes detractores. Pese a ello consiguió seguir desarrollándose, gracias a personajes como **Blaise Pascal** (1623-1662) y **Pierre de Fermat** (1601-1665) que le dieron la forma que utilizamos actualmente. También

consiguió avances **Gaspard Monge** (1746-1818), encontrando importantes aplicaciones a la geometría de tres dimensiones. **Bellavitis** (1803-1880) y **Grassmann** (1809-1877) realizaron un tratamiento vectorial de la geometría, desarrollando con ello en álgebra de vectores (C. B. Boyer, 2011).

4.2. Nomenclatura.

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales.

E : conjunto $\mathbb{R}$ de puntos del espacio.

V : espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

$+$: aplicación de $E \times V$ en E .

V_2 : espacio vectorial real de dimensión 2.

$(\mathbb{R}^2, V_2, +)$: plano afín sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

A : punto perteneciente al conjunto E .

B : punto perteneciente al conjunto E .

C : punto perteneciente al conjunto E .

$\overrightarrow{AB}$: vector que parte del punto A hasta el punto B .

$\vec{v}$: vector perteneciente al espacio vectorial V_2 .

$\vec{w}$: vector perteneciente al espacio vectorial V_2 .

$\vec{0}$: vector nulo perteneciente al espacio vectorial V_2 .

$\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$: sistema de referencia en el plano afín $(\mathbb{R}^2, V_2, +)$.

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$: base del sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

0 : origen del sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

$\{0 + x \vec{u}_1 : x \in \mathbb{R}\}$: eje OX del sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

$\{0 + y \vec{u}_2 : y \in \mathbb{R}\}$: eje OY del sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

$\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: sistema de referencia del plano afín.

(p_1, p_2) : coordenadas del punto P en el plano.

(v_1, v_2) : componentes del vector $\vec{v}$ en el plano.

(w_1, w_2) : componentes del vector $\vec{w}$ en el plano.

S : dirección de una recta.

t : número real.

Q: todo punto de la recta que pasa por un punto $P = (P_1, P_2)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

(q_1, q_2) : coordenadas del punto Q en el plano.

$\vec{r}$: ecuación vectorial de la recta que pasa por un punto $P = (P_1, P_2)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

α : ángulo que forma el vector dirección $\vec{v}$ de la recta r del plano afín con la parte positiva del eje OX.

m: pendiente de la recta r del plano afín.

n: ordenada en el origen de la recta r del plano afín.

V_3 : espacio vectorial real de dimensión 3.

$(\mathbb{R}^3, V_3, +)$: espacio afín sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

$\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$: sistema de referencia en el espacio afín $(\mathbb{R}^3, V_3, +)$.

(a_1, a_2, a_3) : coordenadas del punto A en un sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

T: $\{r\vec{v} + s\vec{w} : r, s \in \mathbb{R}\}$ o subespacio vectorial de V_3 engendrado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

X: $\{P + r\vec{v} + s\vec{w} : r, s \in \mathbb{R}\}$: conjunto de puntos del plano π que pasa por un punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene por dirección el subespacio engendrado por dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, linealmente independientes.

(x, y, z) : coordenadas del punto X, punto arbitrario del plano π .

$\{\vec{v}, \vec{w}\}$: base en la dirección del plano π .

r: número real arbitrario.

s: número real arbitrario.

r(A): rango de la matriz A de coeficientes del sistema de ecuaciones

r($\bar{A}$): rango de la matriz ampliada $\bar{A}$ de coeficientes del sistema de ecuaciones

4.3. El plano afín.

Definición 1. Un plano afín sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es una terna $(E, V, +)$ donde E es un conjunto de elementos llamados puntos, V es un espacio vectorial de dimensión dos sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, y + es una aplicación de $E \times V$ en E que cumple los siguientes axiomas:

- Axioma I: $\forall A, B \in E \quad \exists$ un único $\vec{v} \in V : A + \vec{v} = B$
- Axioma II: $\forall A \in E \quad y \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad (A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$

Dados dos puntos $A, B \in V$, a veces se escribe $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ para indicar que $A + \vec{v} = B$.

En todo lo que sigue se supondrá que E es el conjunto $\mathbb{R}^2$ de puntos del espacio y que V es, por tanto, un espacio vectorial real de dimensión 2, V_2 .

Proposición 1. Si $\vec{0} \in V_2$ es el vector nulo, entonces $\vec{0} + A = A, \forall A \in \mathbb{R}^2$.

Demostración: según el axioma I, $\forall A \in \mathbb{R}^2 \exists$ un único $\vec{v} \in V_2$:

$A + \vec{v} = A$, y como $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ según el axioma II, se verifica:

$$A = A + \vec{v} = A + (\vec{v} + \vec{0}) = (A + \vec{v}) + \vec{0} = A + \vec{0}$$

Proposición 2. $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Demostración: llamemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$, entonces:

$$A + \vec{v} = B \quad \text{y} \quad B + \vec{w} = A$$

Se verifica que:

$$A = B + \vec{w} = (A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$$

Como $A = A + \vec{0}$, según el axioma I, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, luego $\vec{w} = -\vec{v}$ y se cumple que

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Proposición 3. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^2$, se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Demostración:

$$A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$$

Entonces:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Donde se han usado sucesivamente los axiomas I y II de la definición 1.

Consideremos ahora los vectores $\vec{v}, \vec{w} \in V_2, \vec{v} \neq \vec{0}$, el conjunto

$$S = \{\vec{w} : \vec{v} = t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Es un subespacio vectorial de V_2 de dimensión uno.

Definición 2. Sea A un punto de $\mathbb{R}^2$ y S el subespacio vectorial engendrado por el vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ perteneciente a V_2 . El conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$.

$$A + S = \{A + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

Se dice que es la recta que pasa por A y que tiene dirección S . Cualquier vector no nulo de S se llama vector de dirección de la recta $A+S$.

Se puede comprobar sin dificultad que el conjunto (1) tiene estructura de espacio afín. Como (1) está incluido en $(\mathbb{R}^2, V_2, +)$ se dice que es un subespacio afín de $(\mathbb{R}^2, V_2, +)$.

Definición 3. Dos rectas $A_1 + s_1$ y $A_2 + s_2$ se dice que son paralelas si $s_1 = s_2$

4.4. Sistemas de referencia en el plano. Cambio de sistema de referencia.

Definición 1. Un sistema de referencia en el plano afín $(\mathbb{R}^2, V_2, +)$ es una terna $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ donde 0 es un punto de $\mathbb{R}^2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de V_2 .

El punto 0 y la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ reciben el nombre de origen y base del sistema de referencia.

Los tres puntos 0, $A_1 = 0 + \vec{u}_1$ y $A_2 = 0 + \vec{u}_2$ reciben el nombre de puntos fundamentales del sistema.

Las dos rectas $\{0 + x\vec{u}_1 : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{0 + y\vec{u}_2 : y \in \mathbb{R}\}$ se denominan ejes del sistema de referencia. Se les llamará ejes OX y OY, respectivamente.

Sea $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia y sea A un punto de $\mathbb{R}^2$. Existe un único vector $\vec{a} \in V_2 : 0 + \vec{a} = A$, se escribe $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Sean a_1 y a_2 las coordenadas de este vector en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, entonces:

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2$$

Los números a_1 y a_2 reciben el nombre de coordenadas del punto A en el sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, a_1 recibe el nombre de abscisa y a_2 el de ordenada.

El punto A se suele escribir como $A = (a_1, a_2)$.

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ en un sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, entonces:

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 \quad ; \quad \overrightarrow{OB} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$$

Y como $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, queda:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{u}_1 + (b_2 - a_2)\vec{u}_2$$

De donde resulta que las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Se puede dibujar un sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ representando los ejes del sistema, como se muestra en la Figura 1.

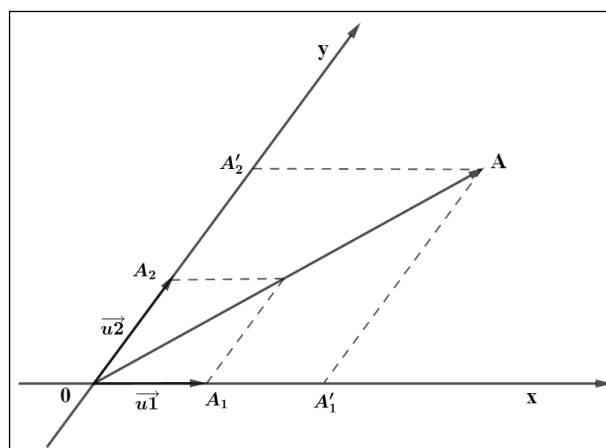


Figura 1. Representación gráfica de un punto A en el sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ (Elaboración propia con GeoGebra).

Las coordenadas (a_1, a_2) de un punto A tiene una interpretación geométrica sencilla. La recta paralela al eje OY por el punto A es $\{A + \vec{u}_2\}$. Sea A_1' el punto de intersección de esta recta con el eje OX. Las abscisas de todos los puntos de la anterior recta coinciden con las de A y son iguales a a_1 . Por tanto, la abscisa de A_1' es a_1 y la ordenada de A_1' es cero ya que está en el eje OX. Las coordenadas de A_1' son $(a_1, 0)$. Esto indica que la abscisa de un punto A es la abscisa del punto de corte del eje OX con la recta paralela al eje OY que pasa por A.

4.4.1. Cambio de sistema de referencia

Dados dos sistemas de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{0', \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$. Sean (x, y) las coordenadas de un punto P en el primer sistema de referencia y (x', y') las coordenadas de dicho punto en el segundo, entonces:

$$\vec{OP} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \quad ; \quad \vec{O'P} = x'\vec{u}_1' + y'\vec{u}_2'$$

Tratamos de hallar la relación que existe entre las coordenadas de P en uno y otro sistema de referencia. Para ello, es necesario conocer la coordenada de $0'$ en el sistema $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1', \vec{u}_2'$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ o conocer las coordenadas de 0 en el sistema de referencia $\{0', \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ y las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ en la base $\{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$. En la Figura 2, se observa la relación entre los dos sistemas de referencia: $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$.

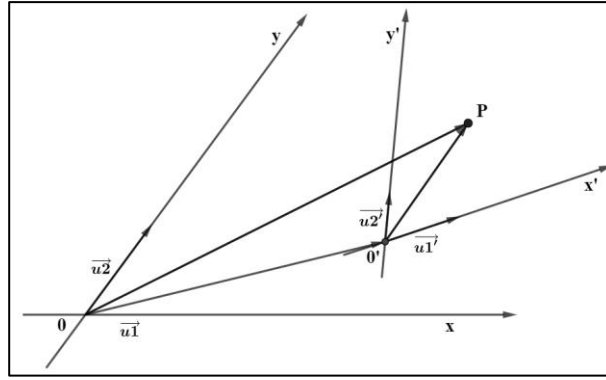


Figura 2. Relación entre los sistemas de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{0', \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ (Elaboración propia con GeoGebra).

Supongamos que las coordenadas de $0'$ en el sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son (a_1, a_2) y que

$$\vec{u}_1' = b_{11} \vec{u}_1 + b_{12} \vec{u}_2 \quad ; \quad \vec{u}_2' = b_{21} \vec{u}_1 + b_{22} \vec{u}_2$$

Como $\vec{OP} = \vec{O0'} + \vec{O'P}$, resulta:

$$\begin{aligned} x \vec{u}_1 + y \vec{u}_2 &= a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + x' \vec{u}_1' + y' \vec{u}_2' \\ &= a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + x' (b_{11} \vec{u}_1 + b_{12} \vec{u}_2) + y' (b_{21} \vec{u}_1 + b_{22} \vec{u}_2) \\ &= (a_1 + x' b_{11} + y' b_{21}) \vec{u}_1 + (a_2 + x' b_{12} + y' b_{22}) \vec{u}_2 \end{aligned}$$

De donde resultan las **ecuaciones del cambio de sistema de referencia**:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + x' b_{11} + y' b_{21} \\ y &= a_2 + x' b_{12} + y' b_{22} \end{aligned}$$

Estas se pueden escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Si las coordenadas de 0 en el sistema de referencia $\{0', \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ son (a_1', a_2') y

$$\vec{u}_1 = b_{11}' \vec{u}_1' + b_{12}' \vec{u}_2' \quad ; \quad \vec{u}_2 = b_{21}' \vec{u}_1' + b_{22}' \vec{u}_2'$$

Razonando de forma similar al primer caso, se obtiene como ecuaciones del cambio de base:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}' & b_{21}' \\ b_{12}' & b_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4.5. Ecuaciones de la línea recta.

Consideremos el sistema de referencia $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ del plano afín, siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base canónica del espacio vectorial real bidimensional.

La recta que pasa por un punto $P = (P_1, P_2)$ y tiene como vector direccional $\vec{v} = (v_1, v_2)$, ($\vec{v} \neq \vec{0}$) es por definición el conjunto de puntos:

$$\{P + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

Como se ve en la Figura 3, todo punto de la recta es de la forma:

$$Q = P + t\vec{v}$$

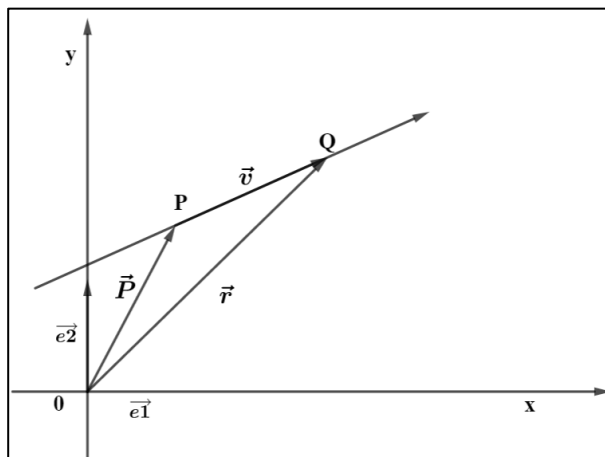


Figura 3. Representación gráfica de la línea recta en el plano (Elaboración propia con GeoGebra).

Llamando $\vec{r}$ al vector de posición del punto Q y $\vec{p}$ al vector de posición del punto P, se obtiene la **ecuación vectorial** de la línea recta:

$$\vec{r} = \vec{p} + t\vec{v} \quad (1)$$

El punto Q es un punto arbitrario de la recta, $Q = (x, y)$, el punto P es un punto dado de la recta, $P = (p_1, p_2)$ y $\vec{v}$ es un vector de dirección de la recta.

De la ecuación (1), se deduce que:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) = (p_1 + v_1)\vec{e}_1 + (p_2 + v_2)\vec{e}_2$$

De donde resultan las **ecuaciones paramétricas** de la recta:

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 + t v_1 \\ y &= p_2 + t v_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si en las ecuaciones paramétricas suponemos que $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$, entonces un punto (x, y) pertenece a la recta si y solo si:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \quad (3)$$

La ecuación (3) representa la **ecuación continua** de la línea recta.

Operando en la ecuación (3) de la línea recta, queda:

$$v_2(x - p_1) - v_1(y - p_2) = v_2 x - v_1 y - v_2 p_1 + v_1 p_2 = 0$$

Llamando $A = v_2$, $B = -v_1$, $C = -v_2 p_1 + v_1 p_2$, se tiene:

$$Ax + By + C = 0 \quad (4)$$

Que es la **ecuación general** o **implícita** de la línea recta.

Definición 1. Se llama inclinación de una recta r del plano afín y se designa por α al ángulo que forma el vector dirección $\vec{v}$ con la parte positiva del eje OX.

A la tangente trigonométrica del ángulo α se le denomina pendiente de la línea recta y se le designa por m .

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} \quad (v_1 \neq 0)$$

De la ecuación continua (3) de la línea recta se deduce: $y - p_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - p_1)$

Y como $m = \frac{v_2}{v_1}$, queda la ecuación de la línea recta:

$$y - p_2 = m(x - p_1) \quad (5)$$

La ecuación (5) se conoce como **ecuación de la línea recta en la forma punto-pendiente**.

De la ecuación general (4), resulta que:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (B \neq 0)$$

Teniendo en cuenta que $-\frac{A}{B} = -\frac{v_2}{v_1} = m$, y llamando $-\frac{C}{B} = n$, se obtiene:

$$y = mx + n \quad (6)$$

Que es la **ecuación explícita** de la línea recta, m es la pendiente y n es la ordenada en el origen, como se ve en la Figura 4. Luego la pendiente de una línea recta es el cociente de y en la ecuación explícita.

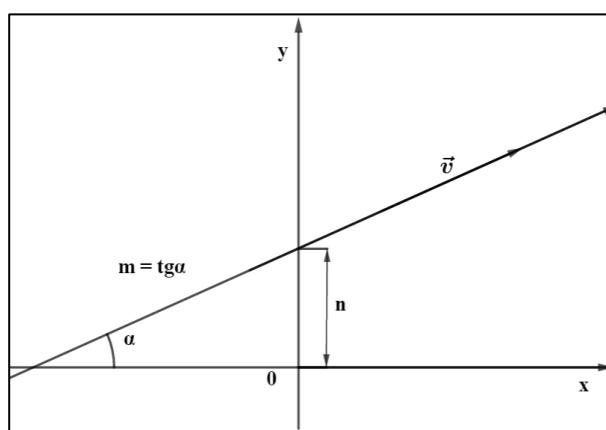


Figura 4. Pendiente (m) y ordenada en el origen (n) de una recta (Elaboración propia con GeoGebra).

Si se conocen dos puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ situados en la línea recta, un vector de dirección de la línea recta es:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$$

Al sustituir en (3), resulta la ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2} \quad (7)$$

En cuanto a la anterior expresión, debe entenderse que, si alguno de los denominadores es nulo, también debe ser nulo el correspondiente numerador. Esta última ecuación se puede escribir en forma de determinante de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x - p_1 & p_1 & q_1 - p_1 \\ y - p_2 & p_2 & q_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la primera y a la tercera columna la segunda, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Que es la ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos expresada en forma de determinante.

4.6. Propiedades afines: incidencia, intersección y paralelismo.

Definición 1. Se dice que dos puntos P y Q son incidentes cuando son idénticos, es decir $P \equiv Q$.

Si dos puntos son incidentes, entonces sus vectores de posición y sus coordenadas coinciden.

Definición 2. Se dice que el punto P es incidente con la recta r, cuando el punto P pertenece a la recta. También se dice en este caso que r pasa por P.

Es evidente que si $P = (x_1, y_1)$ es incidente con la recta r, $Ax + By + C = 0$, entonces $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Si P y Q son dos puntos distintos, existe una recta r que es incidente con P y Q. Esta recta es precisamente la recta que pasa por los dos puntos P y Q.

Definición 3. Se dice que tres puntos distintos P, Q y R están alineados si son incidentes con una misma recta.

Proposición 1. Tres puntos $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ y $R = (r_1, r_2)$ distintos, están alineados si:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración: la recta que pasa por Q y R tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & q_1 & r_1 \\ y & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

Si el punto P pertenece a esta recta, debe verificar también su ecuación, de donde se deduce inmediatamente la proposición.

Definición 4. Dos rectas r y s son secantes si se cortan en un punto, es decir, son secantes si $r \cap s = \{P\}$.

Proposición 2. Sean r y s dos rectas del plano afín, de ecuaciones generales:

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad s \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

Las rectas r y s son secantes si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$.

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Para que exista una única solución, debe ocurrir que:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$$

De donde se deduce inmediatamente que $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$.

Proposición 3. Sean r , s y t tres rectas del plano afín distintas dos a dos, que tienen por ecuaciones generales:

$$r \equiv Ax + By + C = 0 ; s \equiv A'x + B'y + C' = 0 ; t \equiv A''x + B''y + C'' = 0$$

Estas tres rectas se cortan en un mismo punto si:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \text{rango} \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix} = 2$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \\ A''x + B''y + C'' = 0 \end{cases}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga solución única, se tiene que cumplir (T. Rouché-Frobenius) que:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

En el apartado 1 del presente tema, se han definido como rectas paralelas aquellas que tienen la misma dirección y se ha demostrado que dos rectas paralelas son coincidentes o disjuntas. Cuando dos rectas paralelas son disjuntas se dice que son paralelas en sentido estricto.

Si r y s son dos rectas paralelas, entonces sus vectores de dirección $\vec{v}$ y $\vec{w}$ deben verificar que $\vec{v} = t \vec{w}$.

Proposición 4. Si r y s son dos rectas paralelas del plano afín, entonces sus pendientes m y m' son iguales.

Demostración. Si r y s son paralelas y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$ son sus vectores directores, entonces $\vec{v} = t \vec{w}$. Por otra parte:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{t w_2}{t w_1} = \frac{w_2}{w_1} = m'$$

Corolario 1. Si las rectas r y s del plano, que tiene por ecuaciones generales:

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \quad y \quad s \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

Son paralelas, entonces $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

Demostración:

Las pendientes de las dos rectas son $m = -\frac{A}{B}$ y $m' = -\frac{A'}{B'}$, luego:

$$m = m' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

Proposición 5. Sean r y s dos rectas del plano, y

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \quad y \quad s \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

sus ecuaciones generales, entonces si r y s son paralelas, se verifica:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} \neq \text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ o } \text{rango} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$

Demostración:

Es consecuencia del teorema de Rouché-Frobenius, la primera parte indica que el sistema no tiene solución, y las rectas son paralelas en sentido estricto. Además, si las

rectas son paralelas, entonces según el corolario 1, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, luego dos rectas paralelas en sentido estricto verifican que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

La segunda condición expresa que las rectas son coincidentes, luego son paralelas. En este caso se cumple:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Proposición 6. Sea $P = (x_1, y_1)$ y t una recta de ecuación general $Ax + By + C = 0$. Entonces la recta s que es paralela a r y pasa por A tiene por ecuación

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Demostración: basta hallar la **ecuación de la recta en forma punto pendiente**. La pendiente de r es $m = -\frac{A}{B}$, que es también la de s por ser paralelas, luego la ecuación de s es:

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1) \rightarrow (x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

4.7. El espacio afín.

Definición 1. Un espacio afín sobre el cuerpo de los números reales es una terna $(E, V, +)$ donde E es un conjunto cuyos elementos se llaman puntos, V es un espacio vectorial de dimensión tres sobre $\mathbb{R}$, y $+$ es una aplicación de $E \times V$ en E que verifica los siguientes axiomas.

- I) Para cada par de puntos A y B existe un único vector $\vec{v}$ de V , tal que $A + \vec{v} = B$.
- II) Para cada punto $A \in E$ y cada par de vectores $\vec{v}, \vec{w} \in V$, se verifica:

$$(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$$

En todo lo que sigue, se supondrá que V es el espacio vectorial real tridimensional V_3 y que E es el conjunto $\mathbb{R}^3$ de puntos del espacio.

Dados dos puntos A y B de $\mathbb{R}^3$, se escribe $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ para indicar que el vector $\vec{v}$ de V_3 verifica que $A + \vec{v} = B$, cuya existencia y unicidad asegura el axioma I.

De manera análoga a como se hizo en el apartado 1, se demuestran las siguientes proposiciones.

Proposición 1. Si $\vec{0}$ es el vector nulo de V_3 , entonces $A + \vec{0} = A$ para todo A de $\mathbb{R}^3$.

Proposición 2. Para cada par de puntos A y B de $\mathbb{R}^3$, se verifica que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Proposición 3. Cualesquiera que sean los puntos A, B y C de $\mathbb{R}^3$, se verifica que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un vector de V_3 , el subespacio vectorial S de V_3 engendrado por $\vec{v}$ es de dimensión 1.

$$S = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

Definición 2. Sea A un punto de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ un vector de V_3 y $S = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$ el subespacio vectorial de V_3 engendrado por $\vec{v}$. La recta que pasa por A y tiene por dirección S , es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$.

$$A + S = \{A + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ de S se llama vector de dirección de la recta $A + S$.

Definición 3. Dos rectas $A_1 + S_1$ y $A_2 + S_2$ se dice que son paralelas cuando tienen la misma dirección, es decir, si $S_1 = S_2$.

Definición 4. Se dice que dos rectas se cruzan cuando no se cortan ni son paralelas.

Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dos vectores linealmente independientes de V_3 , el subespacio vectorial T de V_3 engendrado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es de dimensión 2.

$$T = \{r\vec{v} + s\vec{w} : r, s \in \mathbb{R}\}$$

Definición 5. Sea A un punto de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores linealmente independientes de V_3 y $T = \{r\vec{v} + s\vec{w} : r, s \in \mathbb{R}\}$ el subespacio vectorial de V_3 engendrado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$. El plano que pasa por A y tiene por dirección T es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$.

$$A + T = \{A + r\vec{v} + s\vec{w} : r, s \in \mathbb{R}\}$$

Definición 6. Dos planos $A_1 + T_1$ y $A_2 + T_2$ se llaman paralelos cuando $T_1 = T_2$.

4.8. Sistemas de referencia en el espacio. Cambio de sistema referencia.

Definición 1. Un sistema de referencia en el espacio afín $(\mathbb{R}^3, V_3, +)$ es una cuaterna $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de V_3 (Figura 5).

Al punto 0 se le llama origen del sistema de referencia y a la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, base del sistema de referencia.

Los cuatro puntos $0, A_1 = 0 + \vec{u}_1, A_2 = 0 + \vec{u}_2$ y $A_3 = 0 + \vec{u}_3$ se llaman puntos fundamentales del sistema.

Las tres rectas $\{0 + x\vec{u}_1 : x \in \mathbb{R}\}$, $\{0 + y\vec{u}_2 : y \in \mathbb{R}\}$ y $\{0 + z\vec{u}_3 : z \in \mathbb{R}\}$ se denominan ejes del sistema. La primera se llamará eje OX , la segunda eje OY y la tercera eje OZ .

Los tres planos $\{0 + x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\{0 + x\vec{u}_1 + z\vec{u}_3 : x, z \in \mathbb{R}\}$ y $\{0 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 : y, z \in \mathbb{R}\}$ se llaman planos del sistema.

Al primero se le llama plano XY , al segundo XZ y al tercero YZ .

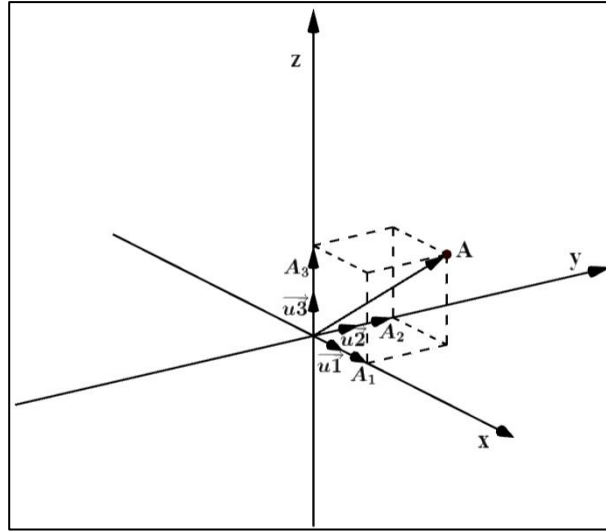


Figura 5. Sistema de referencia en el espacio (Elaboración propia con GeoGebra).

Sea $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia y sea A un punto de $\mathbb{R}^3$. Existe un único vector $\vec{a}$ de V_3 , tal que $0 + \vec{a} = A$. Sean (a_1, a_2, a_3) las coordenadas de este vector en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Definición 2. Se llaman coordenadas de un punto A en un sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a las coordenadas (a_1, a_2, a_3) del vector $\vec{a} = \overrightarrow{0A}$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Las coordenadas de los cuatro puntos fundamentales del sistema $0, A_1, A_2$ y A_3 son respectivamente: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Los puntos del plano XY tienen nula la tercera componente, los del YZ la primera y los del XZ tienen nula la segunda componente.

Sean (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) las coordenadas de dos puntos A y B en un sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Entonces:

$$\overrightarrow{0A} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3 ; \quad \overrightarrow{0B} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3$$

Ya que $\overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AB}$, se tiene que:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1) \vec{u}_1 + (b_2 - a_2) \vec{u}_2 + (b_3 - a_3) \vec{u}_3$$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son por consiguiente:

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

4.8.1. Cambio de sistema de referencia.

Dados dos sistemas de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $\{0', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, representados en la Figura 6. Sean (x, y, z) las coordenadas de un punto P en el primer sistema de referencia y (x', y', z') las coordenadas de dicho punto en el segundo sistema de referencia.

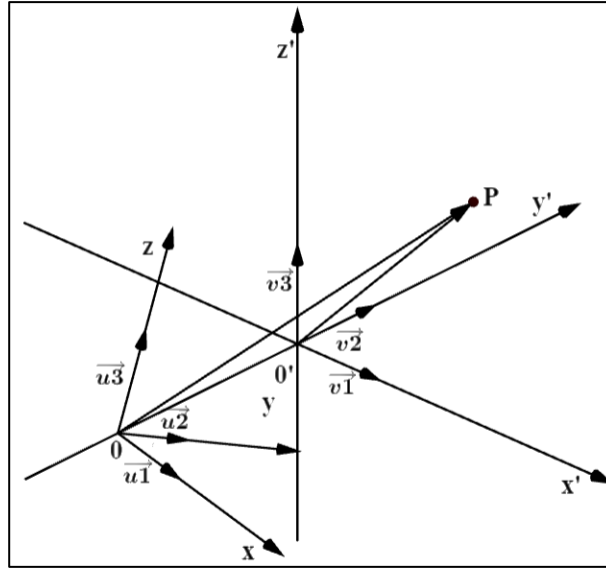


Figura 6. Cambio de sistema de referencia (Elaboración propia con GeoGebra).

Supongamos que las coordenadas de $0'$ en el sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sean (a, b, c) y que $\vec{0}'\vec{P}$:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = b_{11}\vec{u}_1 + b_{12}\vec{u}_2 + b_{13}\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = b_{21}\vec{u}_1 + b_{22}\vec{u}_2 + b_{23}\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = b_{31}\vec{u}_1 + b_{32}\vec{u}_2 + b_{33}\vec{u}_3 \end{cases} \quad (1)$$

Como $\vec{0}\vec{P} = \vec{0}\vec{0}' + \vec{0}'\vec{P}$, resulta:

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3) + x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 + z'\vec{v}_3$$

Sustituyendo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ por sus expresiones (1):

$$\begin{aligned} x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 &= a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 + x'(b_{11}\vec{u}_1 + b_{12}\vec{u}_2 + b_{13}\vec{u}_3) \\ &+ y'(b_{21}\vec{u}_1 + b_{22}\vec{u}_2 + b_{23}\vec{u}_3) + z'(b_{31}\vec{u}_1 + b_{32}\vec{u}_2 + b_{33}\vec{u}_3) \end{aligned}$$

Operando queda:

$$\begin{cases} x = a + b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z' \\ y = b + b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z' \\ z = c + b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z' \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

4.9. El plano en el espacio afín.

Consideremos un sistema de referencia $\{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ del espacio afín $(\mathbb{R}^3, V_3 +)$ donde $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es la base canónica de V_3 .

El plano π que pasa por un punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene por dirección el subespacio engendrado por dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, linealmente independientes es, por definición, el conjunto de puntos:

$$\{P + r\vec{v} + s\vec{w} : r, s \in \mathbb{R}\}$$

Un punto X es de la forma:

$$X = P + r\vec{v} + s\vec{w} \quad (1)$$

La anterior ecuación se llama **ecuación vectorial del plano π** .

$P = (x_1, y_1, z_1)$ es un punto dado del plano π , $X = (x, y, z)$ es un punto arbitrario del plano, $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base en la dirección del plano π , y r y s son dos números reales arbitrarios (Figura 7).

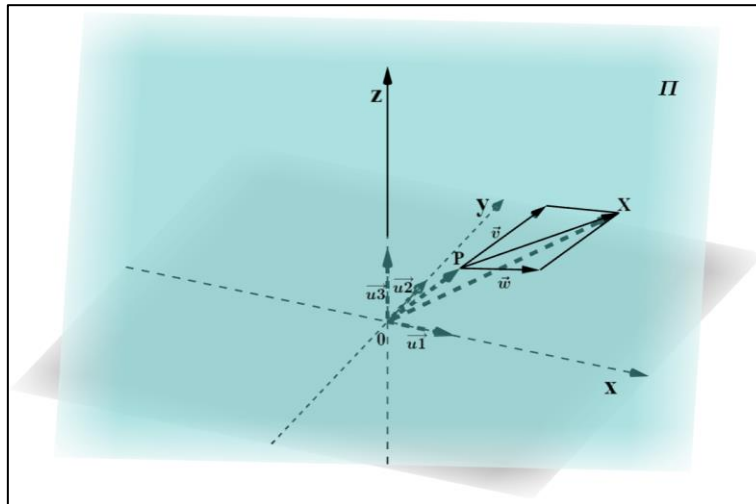


Figura 7. Representación de un plano en el espacio (Elaboración propia con GeoGebra).

Si consideramos $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de (1), se deduce que:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r v_1 + s w_1 \\ y &= y_1 + r v_2 + s w_2 \\ z &= z_1 + r v_3 + s w_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Estas ecuaciones (2) se llaman **ecuaciones paramétricas del plano π** que pasa por el punto $P = (x_1, y_1, z_1)$, y se tiene por dirección el subespacio engendrado por los vectores linealmente independientes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Para cada par de números (r, s) se obtiene un punto (x, y, z) del plano π , y recíprocamente, para cada punto (x, y, z) de existe un único par de números (r, s) que verifican las ecuaciones (2).

4.9.1. Ecuación implícita del plano.

Un punto (x, y, z) pertenece al plano π , si y solamente si el siguiente sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son r y s , es compatible.

$$\left. \begin{aligned} r v_1 + s w_1 &= x - x_1 \\ r v_2 + s w_2 &= y - y_1 \\ r v_3 + s w_3 &= z - z_1 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, las siguientes matrices han de tener el mismo rango.

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x - x_1 \\ v_2 & w_2 & y - y_1 \\ v_3 & w_3 & z - z_1 \end{pmatrix}$$

Como $r(A) = 2$ por ser $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes, entonces:

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x - x_1 \\ v_2 & w_2 & y - y_1 \\ v_3 & w_3 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

La expresión anterior es la **ecuación implícita del plano π** .

Desarrollando este determinante por la tercera columna, resulta:

$$(x - x_1) \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - (y - y_1) \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + (z - z_1) \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

Llamando:

$$a = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} ; \quad b = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} ; \quad c = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} ; \quad d = a x_1 + b y_1 + c z_1$$

Queda la siguiente ecuación:

$$a x + b y + c z = d \quad (4)$$

La ecuación (4) es otra forma de escribir la **ecuación implícita del plano π** .

Los coeficientes a , b y c no pueden ser simultáneamente cero, ya que la matriz A tiene rango igual a dos, y por tanto, al menos uno de sus menores de orden dos será nulo.

Recíprocamente, la ecuación (4), al menos uno de los coeficientes a , b , c es no nulo, representa un plano.

Supongamos, por ejemplo, que $a \neq 0$ llamando $y = r$ y $z = s$, resulta:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d}{a} - \frac{b}{a} r - \frac{c}{a} s \\ y &= r \\ z &= s \end{aligned} \right\}$$

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P = (\frac{d}{a}, 0, 0)$ y tiene por dirección el subespacio engendrado por los vectores linealmente independientes $(-\frac{b}{a}, 1, 0)$ y $(-\frac{c}{a}, 0, 1)$.

4.9.2. Plano determinado por tres puntos no alineados.

El único plano que pasa por los tres puntos no alineados $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$ y $R = (x_3, y_3, z_3)$ es el siguiente:

$$\{P + r\vec{v} + s\vec{w}, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \quad \vec{w} = \overrightarrow{PR}\}$$

Su ecuación vectorial es, por tanto:

$$X = P + r\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR}$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ y $\overrightarrow{PR} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, las ecuaciones paramétricas del plano π serán:

$$\begin{cases} x = x_1 + r(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + r(y_2 - y_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + r(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{cases}$$

y su ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x - x_1 & x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando la segunda columna a cada una de las otras tres, queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

que es la **ecuación en forma de determinante del plano** que pasa por tres puntos no alineados.

4.10. La recta en el espacio afín.

Como se ve en la Figura 8, la recta r que pasa por un punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene un vector de dirección no nulo $\vec{v}$ es, por definición, el conjunto de puntos:

$$\{P + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

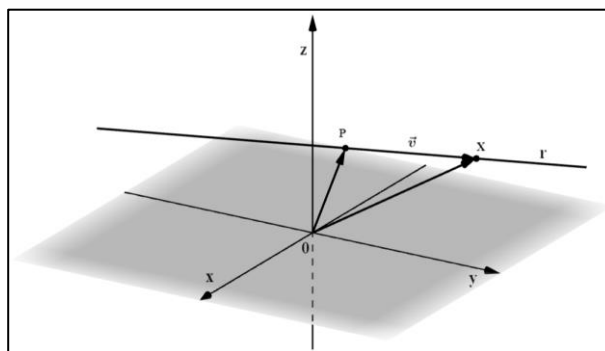


Figura 8. Representación de una recta en el espacio (Elaboración propia con GeoGebra).

Todo punto de la recta es, por tanto, de la forma:

$$X = P + t\vec{v} \quad (1)$$

Esta ecuación dará para cada número real $t \in \mathbb{R}$ un punto X perteneciente a la recta r .

La ecuación (1) se llama **ecuación vectorial de la recta r** . El punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ es un punto dado de la recta, $X = (x, y, z)$ es un punto arbitrario de la misma, $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un vector de dirección de la recta, y t un número real arbitrario.

Si consideramos que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \vec{0}$, la ecuación vectorial de la recta puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t v_1 \\ y &= y_1 + t v_2 \\ z &= z_1 + t v_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas de la recta r** . Para cada valor del parámetro t , se obtiene un punto (x, y, z) de la recta, y recíprocamente, para cada punto (x, y, z) existe un único número real t que verifica las ecuaciones (2).

4.10.1. Ecuaciones continuas de la recta.

A partir de las ecuaciones paramétricas se deduce que un punto (x, y, z) está situado en la recta r si y solo si se cumple que:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3} \quad (3)$$

Estas ecuaciones (3) se llaman **ecuaciones continuas de la recta**. Si alguno de los denominadores que aparecen en (3) fuese cero, deberá ser también cero su correspondiente numerador.

4.10.2. Ecuaciones implícitas de la recta.

Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, al menos uno de sus componentes es no nula. Supongamos, por ejemplo, que $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, entonces de (3) se obtiene:

$$v_2(x - x_1) = v_1(y - y_1) \quad ; \quad v_3(x - x_1) = v_1(z - z_1)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\left. \begin{array}{l} v_2x - v_1y = v_2x_1 - v_1y_1 \\ v_3x - v_1z = v_3x_1 - v_1z_1 \end{array} \right\} \quad (4)$$

El sistema anterior es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). La matriz del sistema A tiene rango dos.

$$A = \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 \end{pmatrix}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema (4) representa un plano, cuya intersección es la recta.

En general, si la intersección de dos planos $ax + by + cz = d$ y $a'x + b'y + c'z = d'$ es una recta, las ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones implícitas de la recta**.

$$\left. \begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array} \right\} \quad (5)$$

Sean A la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones y $\bar{A}$ la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Para que las ecuaciones (5) representen una recta, es necesario y suficiente que $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

Si $r(A) = r(\bar{A}) = 1$, las ecuaciones (5) representan un plano y, si $r(A) = 1$ y $r(\bar{A}) = 2$, el sistema es incompatible y no existe solución.

Si $r(A) = 2$, existe al menos un menor de orden dos no nulo en la matriz A. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

Escribiendo el sistema (5) como:

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= -cz + d \\ a'x + b'y &= -c'z + d' \end{aligned} \right\}$$

Llamando $z = t$, se puede resolver el sistema aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -ct + d & b \\ -c't + d' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = mt + p$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & -ct + d \\ a' & -c't + d' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = nt + q$$

$$z = t$$

Estas son las **ecuaciones paramétricas de una recta** que pasa por el punto $(p, q, 0)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v} = (m, n, 1)$.

4.10.3. Recta que pasa por dos puntos.

Si $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos distintos, un vector de dirección de la recta que pasa por estos puntos es:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Las **ecuaciones continuas** de esta recta son:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

4.11. Posiciones relativas entre dos planos.

Sean π y σ dos planos de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv ax + by + cz = d \\ \sigma &\equiv a'x + b'y + c'z = d' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

y sean A y $\bar{A}$ la matriz de este sistema del sistema de ecuaciones y la matriz ampliada, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Sabemos que $r(A) \geq 1$, entonces pueden ocurrir tres casos solamente:

a) Si $r(A) = r(\bar{A}) = 1$, el sistema de ecuaciones (1) es equivalente a una de las dos ecuaciones y, por tanto, los planos π y σ son coincidentes (Figura 9, a).

b) Si $r(A) = 1$ y $r(\bar{A}) = 2$, el sistema de ecuaciones es incompatible y los planos π y σ , no tienen puntos comunes y son, por tanto, paralelos (Figura 9, b).

c) Si $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, el sistema de ecuaciones es compatible con grado de indeterminación 1. Los planos π y σ se cortan según una recta, como se estudió en el apartado 8 de este tema (Figura 9, c).

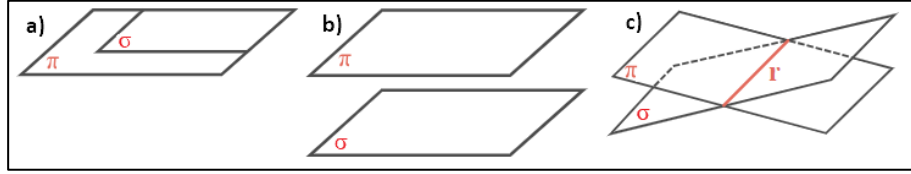


Figura 9. Posiciones relativas de dos planos en el espacio ("Relative position of two planes," n.d.).

4.12. Posiciones relativas entre recta y plano.

Sea el plano π , cuya ecuación es:

$$\pi \equiv ax + by + cz = d \quad (1)$$

y la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \quad (2)$$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Sus matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir que $r(A) \geq 2$, pues en caso contrario las ecuaciones (2) no definirían una recta. Se pueden dar los siguientes tres casos:

a) $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, el sistema (3) es equivalente al formado por las dos últimas ecuaciones, es un sistema compatible e indeterminado con grado de indeterminación 1. Todos los puntos de la recta r pertenecen al plano π y, por consiguiente, la recta r está contenida en el plano π (Figura 10, a).

b) $r(A) = 2$ y $r(\bar{A}) = 3$, el sistema de ecuaciones es incompatible, la recta r y el plano π no tienen puntos comunes, luego r y π son paralelos (Figura 10, b).

c) $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, el sistema (3) es un sistema de Cramer que tiene una única solución (x_1, y_1, z_1) . También se dice en este caso que la recta r y el plano π son incidentes (Figura 10, c).

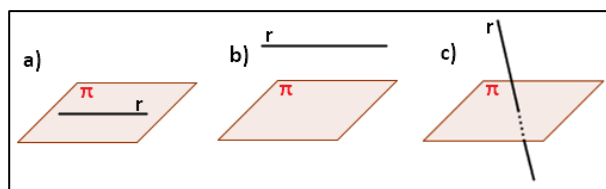


Figura 10. Posiciones relativas entre una recta y un plano en el espacio (Blázquez, n.d.).

4.13. Posiciones relativas entre dos rectas.

Sean las rectas r y s de ecuaciones respectivas:

$$r \equiv \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} c_1x + c_2y + c_3z \\ d_1x + d_2y + d_3z \end{cases}$$

Por tanto,

$$r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = 2$$

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = a \\ b_1x + b_2y + b_3z = b \\ c_1x + c_2y + c_3z = c \\ d_1x + d_2y + d_3z = d \end{cases} \quad (1)$$

Sea A la matriz de los coeficientes del sistema (1) y $\bar{A}$ su matriz ampliada. Como $r(A) \geq 2$, se pueden dar los siguientes casos:

a) $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, el sistema de ecuaciones (1) es compatible e indeterminado con grado de indeterminación 1. En este caso, las ecuaciones (1) definen una línea recta, por lo que las rectas r y s son coincidentes (Figura 11, a).

b) $r(A) = 2$ y $r(\bar{A}) = 3$, el sistema es incompatible y las rectas r y s no tienen puntos comunes. Además, según se estudió en el epígrafe dos de este tema, las dos rectas r y s tienen la misma dirección y serán paralelas (Figura 11, b).

c) $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, el sistema de ecuaciones es un sistema de Cramer y tiene una única solución (x_1, y_1, z_1) . Las rectas r y s son incidentes (Figura 11, c).

d) $r(A) = 3$ y $r(\bar{A}) = 4$, el sistema es incompatible y las rectas r y s no tienen ningún punto en común. Además, al ser $r(A) = 3$, las rectas r y s tienen distinta dirección y, por consiguiente, se cruzan en el espacio (Figura 11, d).

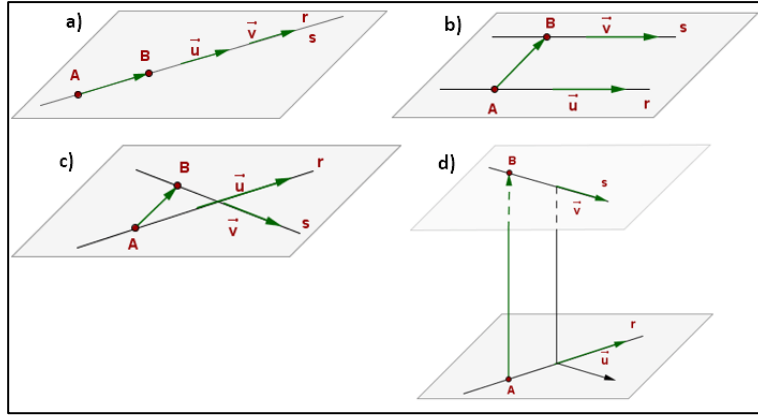


Figura 11. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio (“Las posiciones relativas de dos rectas,” 2020).

4.14. Haces de planos.

Definición 1. Sea r una recta del espacio afín, se denomina haz de planos que pasa por la recta r , al conjunto de todos los planos que contienen a dicha recta (Figura 12).

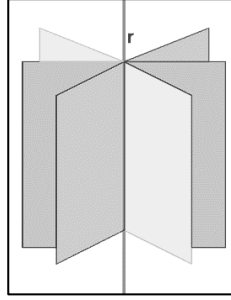


Figura 12. Haz de planos que pasa por la recta r .

Proposición 1. Dada la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \end{cases}$$

El conjunto de planos (1) describe, al variar el parámetro λ , todo el haz de planos que pasa por r , excepto el plano $b_1x + b_2y + b_3z = b$.

$$a_1x + a_2y + a_3z - a + \lambda(b_1x + b_2y + b_3z) = 0 \quad (1)$$

Demostración:

Para cualquier valor de λ , si un punto (x_1, y_1, z_1) están el recta r , sus coordenadas satisfacen simultáneamente las ecuaciones de la recta, y por tanto, verifican también la ecuación (1).

Por otra parte, si el plano π , de ecuación $c_1x + c_2y + c_3z = c$, contiene a la recta r y es distinto del plano $b_1x + b_2y + b_3z = b$, entonces:

$$r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{pmatrix} = 2 \quad y \quad r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \end{pmatrix} = 2$$

Se cumple que $(c_1, c_2, c_3, c) = \alpha(a_1, a_2, a_3, a) + \beta(b_1, b_2, b_3, b)$, para ciertos valores de α y β , y la ecuación del plano π se escribe como:

$$(\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)y + (\alpha a_3 + \beta b_3)z = \alpha a + \beta b \quad (2)$$

Si $\alpha = 0$, el plano π coincidiría con $b_1x + b_2y + b_3z = b$ y si $\alpha \neq 0$, entonces dividiendo en (2) por α , queda:

$$\left(a_1 + \frac{\beta}{\alpha} b_1\right)x + \left(a_2 + \frac{\beta}{\alpha} b_2\right)y + \left(a_3 + \frac{\beta}{\alpha} b_3\right)z - a - \frac{\beta}{\alpha} b = 0 \quad (3)$$

Esta ecuación corresponde a un plano de la colección (1), para $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$.

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA: INVESTIGACIONES SOBRE APRENDIZAJE Y/O LA ENSEÑANZA

En este apartado se han consultado diferentes artículos de investigación en didáctica de las matemáticas, en concreto, aquellos centrados en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

En primer lugar, se ha buscado información acerca de los obstáculos a la hora de transmitir a los estudiantes los contenidos del área de geometría y los problemas de los métodos de enseñanza empleados.

Seguidamente, se ha analizado el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, que describe la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, y que constituye uno de los marcos de referencia más usados en el diseño curricular de los contenidos de geometría de los diferentes niveles educativos.

Posteriormente, se presentan unas pautas a seguir para conseguir que los estudiantes tengan un aprendizaje significativo de los conceptos geométricos: las fases de aprendizaje de Van Hiele, las habilidades básicas en geometría de Hoffer (1981) y los principios didácticos fundamentales de Báez & Iglesias (2007).

Por último, se muestran los errores y las dificultades más comunes de los estudiantes en geometría, concretamente, en los contenidos tratados en este trabajo: vectores, rectas y planos.

5.1. Didáctica de la Geometría

La Geometría es considerada la ciencia encargada de analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales. Esta rama de las matemáticas ha sido considerada, durante siglos, pilar básico de la formación académica y la cultura del hombre (Báez & Iglesias, 2007).

La Geometría debe estar presente en los diferentes niveles del sistema educativo, ya que ayuda a la construcción del pensamiento espacial y matemático, y permite descubrir

el espacio físico, para luego pasar al espacio geométrico. A pesar de su importancia, su enseñanza y aprendizaje se han limitado a la memorización y la repetición de fórmulas y la representación de figuras clásicas en posiciones análogas. Se presenta de forma descontextualizada de la realidad, por lo que los alumnos no ven su utilidad ni su relevancia (Arrieche, 2002; Barrantes, M. & Blanco, 2004; Iglesias, 2000).

Además de todo lo anterior, según Barrantes y Blanco (2004), también falla la forma en que se transmiten los contenidos:

1. Los docentes desconocen tanto las aplicaciones de la geometría en la vida cotidiana, como las habilidades que permite desarrollar.
2. Algunos docentes ignoran los conceptos y procedimientos geométricos.
3. Las técnicas y los instrumentos geométricos se usan de forma inadecuada en los procesos de construcción geométrica.
4. Las fórmulas para el cálculo de áreas se manejan de forma memorística y automatizada, sin atender las relaciones existentes entre éstas.

5.1.1. Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

La enseñanza de la geometría puede resultar muy difícil, pues a los estudiantes les puede resultar comprender hasta los conceptos más simples. Por ello, es necesario conocer las características del razonamiento geométrico típico de cada periodo de escolarización, para poder organizar mejor la enseñanza de la geometría y ayudar a los estudiantes a mejorar sus formas de razonamiento (Jaime & Gutiérrez, 2016).

Van Hiele, citado por Jaime y Gutiérrez (2016), propuso un modelo que establecía que, en el aprendizaje de la Geometría, los estudiantes pasaban por cinco niveles de razonamiento geométrico (reconocimiento, análisis, ordenamiento, deducción formal y rigor lógico). En la Tabla 32 del **Anexo III**, aparecen las características de cada nivel de razonamiento.

A diferencia de otras teorías como la de Piaget, el nivel de razonamiento de los estudiantes no depende de su edad, sino de la experiencia que haya ganado con el uso de las habilidades propias de un determinado nivel de razonamiento. Para conocer el nivel en el que se encuentran los estudiantes, se debe plantear problemas o actividades y, evaluando su resolución, se sabrá el nivel de cada estudiante (Jaime & Gutiérrez, 2016).

En un estudio realizado por Jaime y Gutiérrez (1998) se elaboró un cuestionario para identificar los niveles de Van Hiele de estudiantes desde 6º de Primaria hasta final del Bachillerato. Los resultados que obtuvieron (Figura 13) muestran que un alumno, aunque no domine por completo un nivel, puede mostrar habilidades de un nivel superior. Los autores justifican este hecho afirmando que los estudiantes no consiguen

ganar suficiente experiencia, son forzados a llevar a cabo razonamientos de un nivel superior sin haber completado el nivel en el que se encontraban (Jaime & Gutiérrez, 1998).

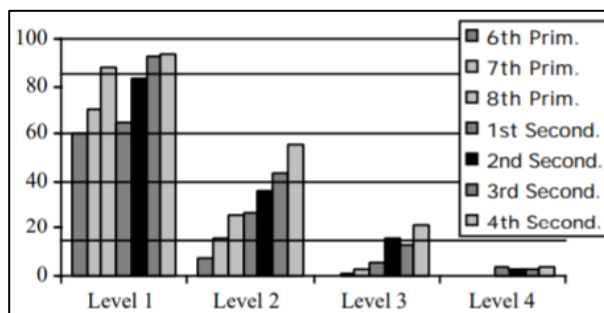


Figura 13. Resultados obtenidos en el test para determinar los niveles de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1998).

Aunque el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele no sea totalmente exacto y los estudiantes no se encuentren en un único nivel de razonamiento, en la actualidad este modelo es el marco referencial más usado en el diseño curricular de los contenidos de geometría de los diferentes niveles educativos (estándares de geometría en National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

Van Hiele, además de describir la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, también planteó unas instrucciones o fases de aprendizaje (ver Tabla 33, **Anexo III**). Estas servían de guía al profesor para organizar la enseñanza de la geometría, de forma que los alumnos progresaran en su razonamiento geométrico y avanzasen de acuerdo a los niveles anteriormente mencionados.

5.1.2. Habilidades Básicas en Geometría.

Hoffer (1981) defiende que la enseñanza de la geometría no se debería limitar a memorizar demostraciones, sino que tendría que fomentar el desarrollo de cinco tipos de habilidades básicas (Tabla 5). Estas habilidades están relacionadas con cada uno de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, por lo que su desarrollo también es progresivo.

Tabla 5. Habilidades básicas trabajadas en Geometría (Hoffer, 1981).

Habilidad	Descripción
Visual	Capacidad de observación, fundamental en Geometría, ya que permite la representación mental a través de formas visuales. En las clases de geometría se debe procurar que los estudiantes desarrollen tanto el hemisferio izquierdo (función lógica y analítica), como el derecho (función espacial y holística).

Verbal	El vocabulario que los estudiantes deben aprender en Geometría es extenso (definiciones, proposiciones, teoremas), por lo que pueden presentar dificultades al expresar conceptos de forma verbal.
De dibujo	La Geometría permite a los estudiantes expresar sus ideas mediante dibujos y diagramas. También les ayuda a analizar figuras, fijarse en las proporciones y pensar en figuras semejantes, aprender relaciones geométricas del entorno y demostrar teoremas mediante métodos gráficos.
Lógica	Capacidad de estructurar argumentaciones lógicas. La Geometría ayuda a los estudiantes a aprender a analizar un argumento y reconocer si es válido o no, en el contexto de las figuras geométricas. Para desarrollar habilidades lógicas, los estudiantes deben trabajar primero con ideas verbales y gráficas, para luego demostrarlas de manera formal.
De aplicación o modelización	Capacidad de crear modelos matemáticos de fenómenos reales. Dedicando más tiempo al desarrollo de estas habilidades, se dará a los estudiantes la oportunidad de conocer más aplicaciones prácticas de la geometría (arquitectura, astronomía, ingeniería...).

Hoffer (1981) también expone ejemplos de las habilidades, para cada una de las áreas descritas anteriormente, que se esperaría que los alumnos mostrasen en los niveles de razonamiento geométrico (ver Tabla 34, **Anexo III**).

5.1.3. Principios didácticos fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Según Báez e Iglesias (2007), la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría presenta varios problemas. Por una parte, los alumnos no dominan los contenidos conceptuales y procedimentales del área de Geometría, se encuentran en un nivel de Van Hiele muy inferior al que deberían y su disposición hacia el estudio de esta área es desfavorable. En cuanto a los docentes, carecen de unos criterios unificados para organizar y enfocar los contenidos geométricos y las estrategias metodológicas. Ante esta situación, proponen unos principios didácticos fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría:

1. **Principio globalizador o interdisciplinar:** ser consciente de que en la realidad todos los elementos están relacionados entre sí.
2. **Integración del conocimiento:** el conocimiento representa un saber integrado, por ello, objetivos, contenidos, metodología y evaluación también deben estar integrados.
3. **Contextualización del conocimiento:** los conocimientos deben adaptarse a las necesidades y características de las estudiantes y los estudiantes.

4. **Principio de flexibilidad:** la organización y administración del proceso educativo debe adaptarse a las necesidades del alumnado, a la vez que se cumplen los objetivos propuestos.
5. **Aprendizaje por descubrimiento:** en el proceso de enseñanza debe conseguirse la participación activa del estudiantado, propiciando la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.
6. **Innovación de estrategias metodológicas:** los docentes deben buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al alumnado hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje.

5.2. Estudio de los errores en Matemáticas

El estudio de los errores que cometen los alumnos en la construcción del conocimiento es fundamental, ya que estos muestran las dificultades en la asimilación de los conceptos. Según Rico (1995), cuando un alumno comete un error, muestra que su conocimiento está incompleto y permite al profesor, o a sus compañeros, ayudarlo a completar este conocimiento, o a comprender por sí mismo aquellas concepciones erróneas.

Según Abrate, Pochulu y Vargas (2006: 139), el 72% de los errores que cometen los alumnos se resumen en:

1. **Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas**, generados por la aplicación de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares, o por inferirse que son válidas en contextos parecidos o relacionados.
2. **Errores debidos a dificultades para obtener información espacial**, atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, que llevan a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.
3. **Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos**, causados por la carencia de aprendizajes relativos a hechos, destrezas y conceptos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información e impiden dar una respuesta a la situación.

Rico (1995) también llega a la conclusión de que el tipo de errores que presentan los estudiantes de nivel medio y universitario están relacionados. Esto se debe a que los problemas en el aprendizaje de conceptos matemáticos básicos generan insuficiencias en la concepción de nuevos conocimientos matemáticos más avanzados.

Los problemas de aprendizaje de los conceptos fundamentales de matemáticas en el nivel medio se deben, según afirman Abrate, Pochulu y Vargas (2006: 141), a defectos del tipo de enseñanza:

- Uso de técnicas algorítmicas sin fundamento teórico.
- Utilización de reglas poco trascendentes en la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones.

- Desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas.
- Contenidos descontextualizados y poco vinculados con los restantes.
- Escasa importancia al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas.
- Abuso de prototipos visuales que impiden la formación de imágenes conceptuales.

5.2.1. Estudio de los errores en geometría.

Según Abrate et al. (2006:122), el uso de un lenguaje matemático específico puede suponer un obstáculo para los alumnos. La Geometría demanda una notación particular y unas definiciones mucho más específicas que la Aritmética y el Álgebra. De modo que, si el alumno no entiende el significado de los símbolos y términos que emplea el profesor en clase, puede ocurrir que no comprenda el mensaje del profesor o que use una notación distinta. Además de los errores por desconocimiento del lenguaje geométrico, los alumnos también cometen errores por falta de visión espacial.

El análisis de los tipos de errores que se cometen en Geometría ha sido escasamente estudiado, a pesar de que es en esta rama de las matemática donde los alumnos presentan, en general, mayor dificultad (Canter, C. & Bocco, 1997; Franchi, L. & Hernández de Rincón, 2004).

De los artículos encontrados dedicados al estudio de los errores que los estudiantes cometen en geometría analítica, se han seleccionado aquellos de mayor interés para este trabajo. Primero se presentan investigaciones sobre las dificultades y los errores en el área de geometría, y, posteriormente, estudios que se centran en las dificultades del uso de vectores y de rectas y planos.

Debido a la necesidad de ampliar el estudio de los errores en geometría, Franchi y Hernández de Rincón (2004) realizaron una investigación con el objetivo de diseñar una tipología que permitiera identificar, clasificar y cuantificar los errores en esta. De esta forma, se ayudaría a los profesores a seleccionar aquellas estrategias de enseñanza más adecuadas. El estudio exploratorio consistió en el análisis de los errores que cometían los alumnos de ingeniería en la asignatura de Geometría (exámenes, trabajos, intervenciones en clase...). Se encontraron 27 errores diferentes y se clasificaron atendiendo a diferentes tipologías, en la Tabla 35 del **Anexo III**, se encuentra la clasificación de acuerdo a la tipología de Movshovitz (1987).

5.2.1.1. *Errores y dificultades en el aprendizaje de vectores.*

Las dificultades de aprendizaje y la mala asimilación de los conceptos geométricos en la educación secundaria, se pone de manifiesto en la educación superior. Knight (1995) se centró en averiguar los conocimientos que tenían sobre vectores estudiantes de Física, que cursaban el primer semestre de varias carreras de ingeniería. Mediante el

Vector Knowledge Test, que se aplicó a 286 alumnos, se pretendía determinar la capacidad de los estudiantes para:

1. Reconocer y utilizar las componentes de un vector.
2. Evaluar la magnitud y dirección de un vector.
3. Sumar dos vectores gráficamente.
4. Sumar dos vectores utilizando componentes.

Los resultados obtenidos mostraron que el 70% de los estudiantes eran incapaces de escribir una breve definición de un vector, el 57% no sabía sumar dos vectores gráficamente y el 85% no podía expresar un vector dado como una magnitud y un ángulo.

Flores García et al. (2008) defienden que entender las propiedades básicas de los vectores es fundamental para tener un aprendizaje significativo de la naturaleza vectorial de las cantidades físicas, como la fuerza (suma vectorial) y la aceleración (resta vectorial). Debido a que muchos estudiantes en los cursos introductorios de física no desarrollan ese aprendizaje significativo, se centraron en analizar qué dificultades presentaban en las operaciones de suma y resta de vectores. En el estudio participaron estudiantes que cursaban Física en la Universidad Estatal de Nuevo México (NMSU) y la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ), y el instrumento de evaluación aparece en la Figura 14.

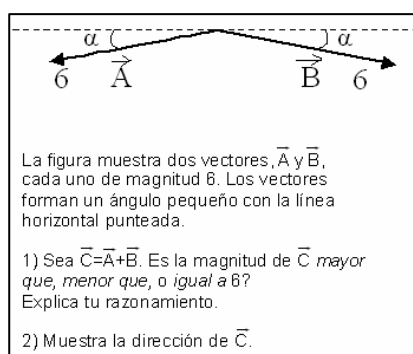


Figura 14. instrumento de evaluación de las dificultades en la suma de vectores (Flores García et al., 2008).

Los principales errores que cometieron los estudiantes al sumar vectores se presentan en la Tabla 6. En la Figura 15 se pueden ver algunos ejemplos de esos errores.

Tabla 6. Errores más comunes de los estudiantes en la suma de vectores (Flores García et al., 2008)

Errores más comunes	Porcentaje de errores	Figura
Suma de vectores como escalares.	10% de los estudiantes de NMSU	3
	38% de los estudiantes de UACJ	(a)
Uso incorrecto del Teorema de Pitágoras.	25% de los estudiantes de NMSU	3
	13% de los estudiantes de UACJ	(b)

Suma de vectores utilizando el procedimiento llamado “cerrando el ciclo”.	10% de los estudiantes de NMSU 16% de los estudiantes de UACJ	3 (c)
Suma de vectores colocando los vectores “cola-con-cola”.	11% de los estudiantes de NMSU 15% de los estudiantes de UACJ	3 (d)

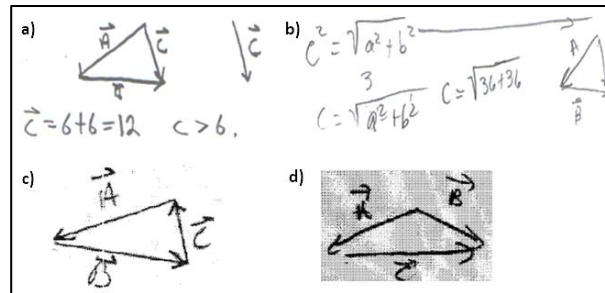


Figura 15. Ejemplos de los errores más comunes en la suma de vectores (Flores García et al., 2008).

Barniol y Zavala (2014), ante la necesidad de una herramienta de evaluación fiable para analizar la comprensión de los estudiantes de los conceptos relacionados con vectores, diseñaron el “Test of understanding of vectors” o TUV. Este consistía en un test con 20 preguntas multirrespuesta, referidas a conceptos vectoriales, tanto en sus aspectos gráficos, como de cálculo. Para evaluar su fiabilidad, se administró a 423 estudiantes que asistían a un curso introductorio de Física. Los errores cometidos en el test se analizan en la Tabla 36 del **Anexo III**.

En la Figura 16 se muestran los errores más comunes cometidos por los estudiantes en la suma de vectores.

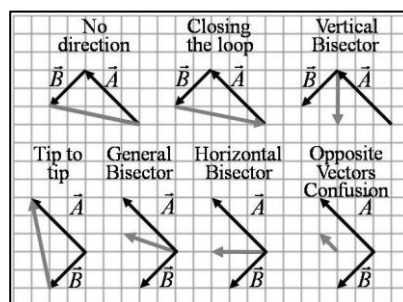


Figura 16. Errores cometidos en la suma de vectores (Barniol & Zavala, 2010).

Barniol y Zavala (2014) concluyen destacando que:

- La considerable diferencia entre los aciertos de las preguntas 5 (86%) y 17 (54%), muestra que los estudiantes tienen mayor dificultad al calcular la dirección de un vector que al seleccionar vectores con la misma dirección.
- El contraste entre los aciertos de la pregunta 14 (73%) y las preguntas 4 y 9 (82% y 88%, respectivamente), indica que a los estudiantes les resulta más difícil

calcular la componente de un vector (dado el ángulo que forma con uno de los ejes), que seleccionar gráficamente las componentes x e y del vector.

- El porcentaje de aciertos de la pregunta 6 (78%) es muy superior al de la 3 y la 8 (33% y 42%), debido a que los estudiantes tienen más dificultades al interpretar y calcular el producto escalar de dos vectores dados en notación de vectores unitarios, que al aplicar la ecuación: $A \cdot B \cdot \cos \theta$.
- La diferencia entre la proporción de respuestas correctas en la cuestión 15 (77%) y las cuestiones 12 y 18 (57%), refleja que para los estudiantes es más fácil calcular el producto vectorial de dos vectores dados en notación de vectores unitarios, que interpretarlo y calcular su magnitud como: $A \cdot B \cdot \sin \theta$.
- Cuando los vectores están dados en notación de vectores unitarios, los estudiantes tienen menos dificultad al interpretar el producto vectorial que el escalar (33% de aciertos en la cuestión 3, frente al 57% de la cuestión 12), ya que una proporción significativa de estudiantes piensa erróneamente que el producto escalar es un vector.
- Cuando se los cálculos involucran ángulos, funciones trigonométricas o el teorema de Pitágoras, los estudiantes cometen más errores al calcular el producto vectorial que el escalar, debido a una generalización de los estudiantes de que el producto entre dos vectores es: $A \cdot B \cdot \cos \theta$.

5.2.1.2. Errores y dificultades en rectas y planos.

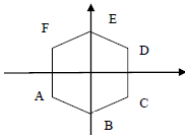
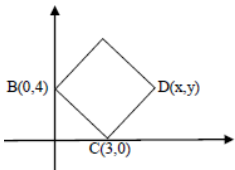
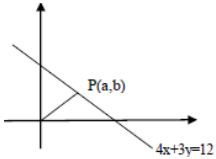
Según González-García et al. (2018) el aprendizaje deficiente de los conceptos básicos de geometría analítica en secundaria (pendiente de una recta e interpretación de su signo, crecimiento y decrecimiento, ecuación punto-pendiente, etc.), se manifiestan en niveles superiores. Para detectar dificultades de aprendizaje, analizaron los errores que cometían respecto a la derivada un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato científico, de un instituto urbano de Oviedo (España). Uno de los ámbitos en los que centraron su investigación fue en la interpretación geométrica de la derivada, en la que los estudiantes mostraron:

- Dificultades al calcular la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de una recta. Dada la ecuación de una recta, confundían la pendiente de la recta con su ordenada en el origen. También cometían errores al determinar la ecuación de una recta conocidos un punto y su pendiente.
- Problemas para calcular la recta tangente a una función en el punto $x=a$, para determinar la ordenada del punto y para identificar el parámetro “ a ” como la abscisa del punto, y la “ x ” como la variable independiente que toma el valor “ a ”.
- Incapacidad para resolver aspectos relacionados con la interpretación geométrica de la derivada. Especialmente, la confusión entre el valor de la función y el valor de la pendiente en un punto.

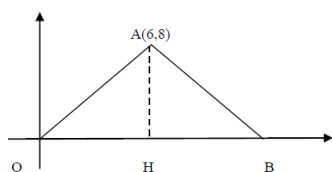
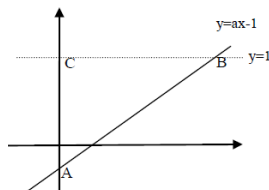
Ozkan et al. (2018) también tomaron como participantes de su investigación a alumnos de secundaria. Su propósito era determinar la actitud de los estudiantes hacia la geometría analítica y las concepciones erróneas que tenían en esta área, que les llevaba a cometer errores. La investigación se dividió en tres etapas: en la primera, se les hizo diez preguntas abiertas sobre geometría analítica a 2552 alumnos de décimo grado (15-16 años) que estudiaban en uno de los mejores institutos de Estambul, en la segunda, se les aplicó un test multi-respuesta a 299 alumnos de dos de los centros con peores resultados de la ciudad; y en la tercera se entrevistó a 10 alumnos, para examinar qué errores cometieron y las causas de dichos errores.

En la Tabla 7 se muestran las preguntas del test y los errores más comunes cometidos en cada pregunta.

Tabla 7. Cuestiones del test de geometría analítica y errores cometidos (Ozkan et al., 2018).

Cuestión	Errores
1. Coordenadas de puntos en el plano 	No se percataron de que el centro del hexágono estaba en el origen.
2. Coordenadas de un punto 	Pensaron que el cuadrado estaba situado de tal manera que formaba un triángulo isósceles con el origen.
3. Según la posición relativa de dos rectas perpendiculares, encontrar la pendiente de estas.	Se intentó ayudar al alumno recordándole que podía resolver la pregunta con condición de perpendicularidad de dos líneas, pero se observó que el alumno no dominaba la asignatura.
4. Según la posición relativa de dos rectas paralelas, encontrar la pendiente de estas.	No se observó ningún error.
5. Distancia entre dos puntos. 	Resolvieron la pregunta prediciendo que el punto requerido debía ser el punto medio de los valores de abscisas.
6. Distancia entre un punto y una recta .	No sabían cómo hallar la distancia más corta de un punto a una línea.

7. Ecuación de la recta que es una de las medianas de un triángulo de vértices conocidos.	Desconocen cómo determinar la ecuación de una recta.
8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto de intersección de otras dos líneas.	Desconocen cómo determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, cuando uno de los dos está en el origen de coordenadas.
9. Área determinada por dos rectas que se cortan y los ejes coordinados.	Desconocen cómo calcular el área.
10. Área del triángulo que determinan tres vértices.	Malinterpretan la figura pensando que es un triángulo isósceles.



Los alumnos de la primera etapa presentaron dificultades al hallar las distancias entre dos puntos (5) y entre un punto y una recta (6), al determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos (8) y al calcular el área entre dos rectas que se cortan y los ejes coordinados (9).

En cuanto a los estudiantes de la segunda etapa, estos tuvieron problemas en la mayoría de las cuestiones (2,5,6,7,8,9). Las dificultades fueron menores en las preguntas sobre hallar las coordenadas de los puntos (1), calcular el área del triángulo (10) y hallar la pendiente de las rectas (3 y 4).

Los principales errores que cometen se deben a:

- Malinterpretar la forma de las figuras que muestran los enunciados de las preguntas (1,2,10).
- No comprender bien el concepto de pendiente de una línea recta (3).
- No saben interpretar la posición relativa de dos rectas.
- Desconocen cómo hallar la distancia más corta de un punto a una recta (6).
- Carecen de los conocimientos necesarios para determinar la ecuación de una recta que pasa dos puntos (7,8).
- Desconocen cómo calcular el área cuando las longitudes son negativas (9).

El artículo de investigación de Bravo y Patiño (2016) muestra como la mala asimilación de los conceptos relacionados con las rectas y los planos, también afecta a los estudiantes universitarios. En el estudio, en el que participaron 310 alumnos de la Fundación Universidad Argentina de la Empresa (UADE), se analizaron los errores que cometían en el tema de rectas y planos en la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica. Los errores encontrados se organizaron en 9 categorías (Tabla 8).

Tabla 8. Tipos de errores que cometen los alumnos en geometría (Bravo, V. L. y Patiño, 2016).

	Tipo de error	Descripción
E1	Errores vinculados a errores de cálculos.	Debidos al olvido de algún signo en alguna expresión o a transcribir mal el enunciado a la resolución, no están vinculados a los conceptos de rectas y planos.
E2	Errores vinculados a ejercicios incompletos, desarrollados a la mitad o hasta cierto instante.	El alumno no termina un ejercicio y no contesta a la consigna pedida, pero durante el procedimiento realizado no comete otro tipo de error. Pueden deberse a no completar el ejercicio por no saber cómo hacerlo o por no entender que pide el enunciado.
E3	Errores vinculados a resolución correcta de procedimientos, pero con información incorrecta.	El alumno manifiesta capacidad de aplicar procedimientos algebraicos (factorización, resolución de sistemas, producto vectorial o escalar entre vectores, etc.), pero los aplica en datos no relevantes a los solicitados.
E4	Errores vinculados a la falta de conocimiento para extraer información de los enunciados.	El alumno, aunque sabe los procedimientos que tiene que desarrollar, no logra obtener los datos del enunciado o de otra fuente para solucionar el ejercicio.
E5	Errores por desconocimiento del tema.	El alumno tiene pleno desconocimiento de los procedimientos o de los conceptos para solucionar el ejercicio. También se incluyen los errores en los que la respuesta del alumno manifiesta una clara incoherencia con los aspectos teóricos del tema.
E6	Errores vinculados a la forma de presentar las respuestas.	La notación de la respuesta que presenta el alumno es incorrecta.
E7	Errores vinculados a incoherencias o mezcla de conceptos sin sentido.	El alumno conoce algunos conceptos, pero no el vínculo entre ellos, generando una mezcla de conceptos sin sentido para la realización del ejercicio.
E8	Errores vinculados a falta de conocimientos sobre procedimientos algebraicos para desarrollar los ejercicios.	El alumno sabe cómo proceder para solucionar un ejercicio, pero no puede hacerlo por no saber aplicar los procedimientos algebraicos necesarios (factorización, resolución de sistemas lineales, etc.).
E9	Errores vinculados a la afirmación de conceptos erróneos.	Los alumnos asumen como verdaderas propiedades que son falsas. Un caso típico de este tipo de error encontrado en los exámenes es que al preguntar sobre la intersección entre dos rectas en el espacio y obtener que no existe intersección entre

éstas, afirman que las rectas son paralelas, sin considerar que podrían cruzarse. Intentan resolver un problema de intersección de rectas en el espacio con el marco de aquello que conocen en el plano.

De los errores cometidos por los alumnos, los más frecuentes fueron los de tipo E1, E3 y E5. De estos tres tipos de errores, a los que los autores dan más importancia son a los de tipo E3 y E5, por ser errores de concepto.

Respecto a los errores de tipo E4, E7, E8 y E9, a pesar de su baja frecuencia, se consideran muy relevantes y su corrección precisa la intervención del profesor. Esto se debe a que el obtener la información útil del enunciado, vincular los conceptos, conocer y saber aplicar las herramientas algebraicas y relacionar propiedades válidas, es esencial para poder resolver de forma correcta un ejercicio.

Por último, a los errores de tipo E2 y E6, se les da una importancia media, ya que para superarlos no es esencial la actuación del profesor, sino que el alumno puede corregirlos por sí mismo con la práctica (resolviendo mayor número de ejercicios, leyendo atentamente el enunciado, prestando atención a la presentación de las respuestas).

Otro estudio que muestra como la mala asimilación de los conceptos básicos de geometría analítica afectan a los estudiantes en niveles superiores, fue el llevado a cabo por Ramírez Palacios, M. C., Oktaç, A. y García (2006). En este caso, se centraron en las dificultades de los estudiantes en la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El cuestionario diagnóstico fue realizado a cinco estudiantes de nuevo ingreso en carreras de ingeniería, que acababan de cursar Álgebra Lineal (números complejos, vectores, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes). Se les proporcionó a los estudiantes ejes cartesianos y se les planteó las siguientes preguntas:

1. Representa gráficamente las posibles posiciones que tienen dos rectas en el plano.
2. Representa:
 - a. Dos rectas que tengan un solo punto en común en el plano.
 - b. Un par de rectas que no tengan puntos en común.
 - c. Un par de rectas que tengan más de un punto en común.

En la primera pregunta, solo uno de los cinco estudiantes identificó el caso de las rectas colineales. En los dos primeros apartados de la segunda pregunta, ningún estudiante muestra dificultades, sin embargo, solo uno de ellos pudo responder al apartado c. Esto se debe a que el enunciado indicaba “más de un punto” y los alumnos lo interpretan con un número finito de puntos, no infinito, desconocen que la misma resta puede tener dos representaciones distintas (ecuaciones equivalentes).

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado se expone una unidad de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, se contextualiza el centro en el que se va a desarrollar, se enuncian las actividades y recursos que se utilizan a lo largo de la unidad didáctica y se presentan las medidas de atención a la diversidad, la temporalización y la evaluación.

6.1. Título

A continuación, se va a desarrollar la unidad didáctica “Geometría Analítica”, incluida en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O., según el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

6.2. Justificación

Antes de proceder al desarrollo de la unidad didáctica, se debe justificar por qué es importante y necesario trabajar los contenidos y los criterios de evaluación de la misma.

6.2.1. Justificación curricular

La geometría analítica es una rama de las matemáticas, incluida entre los contenidos del bloque de Geometría de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O, según lo establecido tanto en el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, como en la Orden de 14 de julio de 2016. Aunque en el apartado de fundamentación curricular se indicaba que el primer bloque (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) debe desarrollarse de forma transversal al resto de bloques, nos centraremos en el tercer bloque (Geometría), en concreto en los contenidos relacionados con la geometría analítica:

“Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad” (Orden de 14 de julio de 2016).

Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables asociados a esos contenidos se encuentran en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. En cuanto a las competencias clave, que desarrollan los alumnos con el estudio de los contenidos de esta unidad, aparecen en la Orden de 14 de julio de 2016: CCL (Competencia en Comunicación Lingüística), CMCT (Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología), CD (Competencia Digital) y CAA (Competencia de Aprender a Aprender). En la Tabla 9, se muestran los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje y las competencias clave que se tratan en esta unidad didáctica, referentes a los contenidos de geometría analítica. En la unidad didáctica también se deben

incorporar los contenidos del bloque primero, “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” (ver Tabla 28, **Anexo I**), por ser un bloque transversal de la asignatura.

Tabla 9. Criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave de la unidad didáctica. (RD 1105/2014, de 26 de diciembre; Orden de 14 de julio de 2016)

Unidad Didáctica. Geometría Analítica.		
Criterio de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.	CCL, CMCT, CD, CAA
	3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.	
	3.3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.	
	3.3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.	
	3.3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.	
	3.3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.	

6.2.2. Justificación social y/o profesional

La geometría analítica está presente en múltiples ámbitos de la vida cotidiana. Esta ayuda a modelar de forma matemática la mayoría de las formas que nos rodean, así como las trayectorias de los objetos.

En Física, la geometría analítica permitió el estudio de las secciones cónicas (parábola, elipse, hipérbola, y circunferencia), las cuales son necesarias para describir el movimiento de los cuerpos (creación de la teoría heliocéntrica, trayectoria de los planetas, trayectorias de los proyectiles, etc.) y para explicar el funcionamiento de diferentes dispositivos que utilizan las propiedades físicas de estas curvas (antenas parabólicas y elípticas, faros de automóvil, las lentes del telescopio y del microscopio, calentadores solares parabólicos, estufas solares, etc.).

La aplicación de la geometría analítica es esencial en ingeniería civil (estructuras), ya que permite conseguir estructuras funcionales, de la forma más económica posible. Sus aplicaciones en esta área son diversas:

- En la edificación de carreteras y autopistas se aplican los conceptos sobre vectores y rectas.
- En la mecánica de suelos y geotecnia se utilizan las ecuaciones lineales para determinar la porosidad de los suelos.
- En el análisis y diseño estructural se utiliza la teoría de vectores en el espacio para determinar la cantidad de materiales que se emplea en una obra.
- En el diseño de puentes colgantes se usan parábolas.
- En el campo de la hidráulica se usa para determinar la velocidad de caída de un chorro de agua y su alcance horizontal.

Otros ámbitos donde está presente la geometría, son en el diseño de ordenadores (los gráficos de los ordenadores se basan en geometría), en robótica (se usa para programar los movimientos) o en topografía (ubicación de los lugares y puntos en un mapa topográfico).

6.2.3. Justificación interna

La geometría analítica supone la unificación del Álgebra y la Geometría y su enseñanza es vital para que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos y desarrollen la visión y el razonamiento espacial.

Los estudiantes deben comprender los conceptos relacionados con la geometría analítica (sistemas de coordenadas, vectores, rectas, planos), pues a lo largo de su trayectoria académica, necesitarán estos conocimientos para poder afrontar contenidos relacionados, mucho más complejos y avanzados.

Como se veía en el apartado de fundamentación curricular, los contenidos de geometría analítica vistos en el curso de 4º de ESO, serán ampliados a lo largo del Bachillerato. Si los estudiantes no construyen una base sólida de conocimientos geométricos, les será imposible abordar y entender nuevos conceptos, tanto en matemáticas, como en otras disciplinas. Tener un aprendizaje significativo de los vectores, las rectas y los planos, es esencial para entender el sistema diédrico de representación, contenido básico de la asignatura de dibujo técnico. En la asignatura de física también es fundamental comprender las propiedades básicas de los vectores, ya que a través de ellos se representan las magnitudes vectoriales; lo que permite una mejor descripción y comprensión de los fenómenos físicos.

Por otro lado, no solo es importante dominar los contenidos referentes a geometría en la ESO y el Bachillerato, sino al continuar con estudios superiores, especialmente en aquellas carreras relacionadas con ciencias y tecnología (física, ingenierías, arquitectura, matemáticas, geología...).

6.3. Contextualización del centro y del aula

La presente Unidad Didáctica está proyectada para su aplicación en el centro I. E. S. Miguel Sánchez López de Torredelcampo (Jaén), donde he realizado mi periodo de prácticas docentes. Este es un centro de titularidad pública, donde se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato en las modalidades de Ciencias de la Salud y Tecnología, y Humanidades y Ciencias Sociales, y el Ciclo Formativo de grado medio “Sistemas Microinformáticos y Redes”. La unidad didáctica se desarrolla, concretamente, en 4º de ESO de Matemáticas aplicadas a las enseñanzas académicas.

6.3.1. Situación geográfica del centro

El centro donde se han realizado las prácticas, el I. E. S. Miguel Sánchez López, se encuentra en Torredelcampo, un municipio ubicado a 11 km al noroeste de la capital (Jaén), al borde de la A-316 que conecta Jaén con Córdoba, Madrid y Granada (Figura 17).

Su altitud es de 640 metros sobre el nivel del mar, su término municipal se extiende sobre 182,08 km² y su población es de 14.142 habitantes (padrón del INE de 2020). Tiene límites municipales con Los Villares, Jamilena, Torredonjimeno, Villardompardo, Escañuela, Higuera de Arjona y Fuerte del Rey.

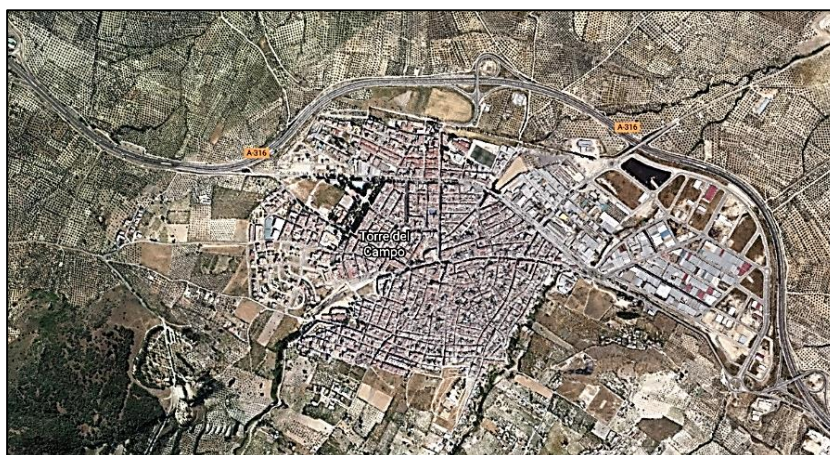


Figura 17. Mapa de situación de Torredelcampo (Jaén) ('Google Maps', Elaboración propia).

El centro I.E.S. Miguel Sánchez López se encuentra en el suroeste de la localidad y se trata del único centro educativo que imparte Educación Secundaria y Bachillerato del municipio, por lo que recoge a alumnado de toda tipología social, procedente tanto de barrios céntricos, de clase media-alta y con alta densidad de población, como de barrios periféricos.

Está situado a poca distancia del centro comercial y administrativo del municipio, y muy cerca de la principal vía de acceso a la misma (Avenida de la Constitución), lo que posibilita una buena comunicación vial con el centro, como se ve en la Figura 18.



Figura 18. Mapa de ubicación del I.E.S. Miguel Sánchez López (Torredelcampo) ('Google Maps', Elaboración propia).

6.3.2. Aspectos demográficos y socioeconómicos del municipio

La información demográfica y económica sobre Torredelcampo se ha obtenido de su PGOU, publicado en 2017, y de la información suministrada por el Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía.

Su situación geográfica estratégica, al borde de la autovía A-316 que conecta Jaén, Córdoba, Madrid y Granada, le confiere un papel determinante en su desarrollo económico y social.

Según el Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía, en los diez últimos años, la variación relativa de la población ha sido de -3,5%, lo que refleja el envejecimiento social y el descenso de la natalidad. La renta media declarada en 2018 fue de 12.723 € y la tasa de desempleo en 2020 de 21,3%.

De entre los 97 municipios de Jaén, Torredelcampo se encuentra situado en el 7º lugar en cultivos leñosos, el 11º en turismos matriculados, el 9º en establecimientos con actividad económica, el 9º en paro registrado, el 9º en contratos totales registrados, el 15º en contratos registrados a mujeres, el 8º en nº de recibos de contribución urbana y el 11º en Renta Media declarada.

El término municipal de Torredelcampo posee una superficie general de 182 km², de la que el 90% se encuentra cultivada.

En el sector primario, sobresale el olivar, con 16.000 hectáreas dedicadas a este cultivo y una producción de entre 8 y 10 millones kilos de aceite al año, lo que sitúa a la localidad entre los diez principales municipios de la provincia productores de aceite de oliva.

El sector industrial constituye en Torredelcampo uno de los pilares más importantes del desarrollo económico del municipio. Además de la actividad industrial relacionada

con la extracción de aceites y grasas, a lo largo de estas últimas dos décadas, el sector industrial ha adquirido un peso específico en el desarrollo socioeconómico de la localidad. El polígono industrial "Los Llanos" (212.296m² y 450.000 m² de ampliación) alberga en su interior importantes industrias relacionadas con la metalurgia, la elaboración de productos metálicos y de materiales de construcción, manufactureras (muebles, textiles, confección)

En cuanto al sector terciario, asume el 47,9% de la población ocupada local y agrupa actividades como el comercio, hostelería, transporte y comunicaciones, instituciones financieras, seguros, servicios prestados a empresas, recreativos y culturales, educación, sanidad, actividades profesionales, etc.

Las principales actividades económicas en 2019 fueron el comercio (al por mayor y al por menor), reparación de vehículos de motor y motocicletas, construcción, industria manufacturera, actividades profesionales, científicas y técnicas y hostelería.

6.3.3. Perfil del alumnado

En el instituto estudian en torno a 750 alumnos/as, según el curso académico. La mayoría del alumnado es local, mientras una pequeña parte procede de las localidades de Jamilena y Torredonjimeno. También cuenta con alumnos/as de otras localidades de la provincia en el ciclo formativo.

Si se analiza el ámbito familiar del alumnado, a nivel sociocultural, la mayoría de los padres de los alumnos (más del 50%) solo cuentan con estudios primarios.

En lo que se refiere al perfil económico, éste procede mayoritariamente de un sector social de clase media-alta.

En cuanto al ambiente familiar, son familias nucleares, en general estables (aproximadamente un 8% de alumnos presentan desintegración familiar por muerte, divorcio o separación de los padres). Siendo en un 53,9 % familias numerosas.

La relación de las familias con el Centro en general es muy buena y la participación de los padres/madres en actividades propuestas por el Centro, como por ejemplo las Actividades extraescolares, es muy grande.

En cuanto a los intereses académicos y profesionales de los alumnos, más de la mitad desea continuar sus estudios en Bachillerato. Los alumnos restantes quieren cursar Ciclos Formativos de Grado Medio o están en la ESO a la fuerza.

6.3.4. Instalaciones, materiales y recursos humanos

El centro fue creado en el año 1970, y sufrió una profunda remodelación y ampliación en el curso 2010/2011, para acondicionarlo a las necesidades actuales. Actualmente, el Centro cuenta con espacios e instalaciones suficientes y dotadas de la última tecnología.

El Centro está compuesto de las siguientes instalaciones:

- 40 aulas ordinarias, dotadas con pizarra, pizarra digital, un ordenador para el profesorado con acceso a internet y un proyector.
- Un aula de orientación, así como dos aulas de apoyo.
- Salón de actos, utilizado para ciclos de conferencias, proyecciones audiovisuales, representaciones teatrales y como espacio deportivo cubierto.
- Un patio de recreo, en el que la distribución de los estudiantes está regulada por el Protocolo Anti-Covid del centro.
- Tres pistas: dos de fútbol y otra de baloncesto.
- Recibidor, Portería, Conserjería, 2 salas de profesores, Biblioteca, Departamento del Área Científica, Departamento de las Áreas Lingüística y Social.
- Aula de informática (con ordenadores y tablets), Aula de plástica y Dibujo Técnico, Aula de Tecnología, Aula de Música, Laboratorio de Física, Laboratorio de Química, Laboratorio de Biología y un gimnasio.
- Diversos despachos dedicados a la Dirección, Jefatura de Estudios y Secretaría.

En cuanto a los recursos humanos:

- El Claustro de profesores del centro cuenta con un total de 56 profesores y profesoras (curso 2016/17).
- El equipo directivo se compone de la Directora, el Vicedirector, el Secretario, la Jefa de Estudios y la Jefa de Estudios Adjunta.
- El Personal de Administración y Servicios (PAS) está formado por una auxiliar administrativa, dos conserjes y un monitor de Educación Especial.

6.3.5. Descripción del aula

El aula donde se desarrolla la unidad didáctica, tiene forma rectangular y cuenta con dos puertas de acceso, una en cada extremo.

Las mesas de los alumnos están colocadas de una en una, formando 6 filas y 5 columnas (30 mesas).

La mesa del profesor está equipada con un ordenador con acceso a internet y se ubica en la parte delantera del aula. Al lado de esta, hay una pizarra blanca, una pizarra digital y un proyector.

En cuanto a las características del grupo/clase, este está formado por 14 alumnos y 16 alumnas. Entre la diversidad del alumnado, hay dos alumnas que están repitiendo curso y no hay ningún alumno/a con NEAE (Necesidades Específicas de Apoyo Educativo). Se trata de un grupo que, en general, trabaja bien y está respondiendo a la metodología empleada.

6.4. Objetivos

En este apartado se definen los objetivos que los alumnos deben alcanzar al final de la Unidad Didáctica. Estos objetivos se organizan partiendo de lo general a lo más específico: objetivos de etapa, objetivos del área de matemáticas y objetivos concretos de la unidad.

6.4.1. Objetivos generales de etapa

Los objetivos generales de etapa los fija el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O y del Bachillerato, y son aquellos logros de aprendizaje que el alumno debe alcanzar al finalizar la etapa. En el artículo 11 de este mismo decreto, se encuentran los objetivos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, que son contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades que les permitan:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

6.4.2. Objetivos del área de matemáticas

Los objetivos de las Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas se encuentran en la Orden del 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas es una materia troncal general que se imparte en tercero y cuarto la E.S.O. y cuyos objetivos son que los alumnos y las alumnas desarrollen las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Objetivos concretos de la unidad didáctica

1. Identificar vectores y calcular las coordenadas de un vector dado por dos puntos.
2. Identificar los elementos de un vector (módulo, dirección y sentido.).
3. Calcular el módulo y el argumento de un vector.

4. Conocer y comprender los conceptos de vector fijo, vector de posición, vectores equipolentes, vector unitario y vectores libres del plano.
5. Realizar operaciones con vectores (suma, resta, producto de un vector por un escalar, producto escalar, ángulo que forman dos vectores).
6. Reconocer vectores paralelos y perpendiculares.
7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
8. Conocer y utilizar las ecuaciones de la recta (vectorial, paramétricas, continua, general o implícita, explícita, punto-pendiente).
9. Reconocer el vector director, el vector normal y la pendiente de una recta.
10. Calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada.
11. Identificar puntos alineados.
12. Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano (paralelas, perpendiculares, secantes o coincidentes).
13. Calcular el punto medio de un segmento.
14. Calcular la distancia entre dos puntos.
15. Calcular la distancia entre un punto y una recta.
16. Calcular la distancia entre dos rectas paralelas.
17. Fomentar el uso de herramientas tecnológicas para analizar y comprender los vectores y las rectas y, de esta forma, mejorar el proceso de aprendizaje de los alumnos.
18. Identificar elementos de la geometría analítica en el entorno (rectas paralelas, perpendiculares, secantes).
19. Interpretar el enunciado de un problema y transcribirlo de forma adecuada al lenguaje algebraico.
20. Valorar de forma crítica las posibles estrategias para llegar a la solución de un problema.
21. Expresar el razonamiento matemático seguido en la resolución de un problema.
22. Comprobar si la solución obtenida es coherente con el enunciado del problema.
23. Relacionar problemas cotidianos con los conceptos de geometría analítica y transcribirlos a problemas matemáticos, para así poder dar solución a problemas de la vida real.

6.5. Competencias Clave

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, las competencias son:

“Capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”.

En el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, se establecen las competencias del currículo:

- a) Comunicación lingüística (CCL).

b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).

c) Competencia digital (CD).

d) Aprender a aprender (CAA).

e) Competencias sociales y cívicas (CSC).

f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).

g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

El Anexo I de la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, recoge la descripción de las competencias clave. En la Tabla 10 aparecen ejemplos de cómo se desarrolla cada una de las competencias.

Tabla 10. Competencias Clave (Orden ECD/65/2015, de 21 de enero; Elaboración propia).

Competencias Clave	Descripción	Desarrollo de la competencia
Comunicación lingüística (CCL)	Comprender el sentido de los textos escritos y orales.	· Entiende los contenidos de la unidad expuestos por el docente durante las explicaciones teóricas. · Comprende, basándose en sus conocimientos sobre geometría analítica, los diferentes textos que se presentan en la unidad (contenidos teóricos, enunciados de ejercicios y problemas...). · Comprende el enunciado de los problemas y selecciona la información relevante para su resolución.
	Utilizar el vocabulario adecuado, las estructuras lingüísticas y las normas ortográficas y gramaticales para elaborar textos escritos y orales.	· Expresa ideas, de forma verbal y escrita, utilizando un lenguaje matemático adecuado. · Expresa de forma verbal el razonamiento seguido en la resolución de un problema.
	Respetar las normas de comunicación en cualquier contexto: turno de palabra, escucha atenta al interlocutor...	· En las actividades de grupo o las explicaciones del docente, escucha de forma activa las intervenciones de sus compañeros e interviene de forma adecuada.
Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y	Conocer y utilizar los elementos matemáticos básicos: operaciones, magnitudes, porcentajes, proporciones, formas geométricas, criterios de	· Interpreta la representación gráfica de vectores y rectas e identifica sus elementos y propiedades. · Realiza operaciones con vectores y aplica fórmulas de forma correcta.

Tecnología (CMCT)	medición y codificación numérica, etc.	
	Expresar con propiedad en el lenguaje matemático.	· Utiliza de forma adecuada el lenguaje matemático para expresar los conceptos y procedimientos seguidos en la resolución de problemas.
	Resolver problemas seleccionando los datos y las estrategias apropiadas.	· Comprende el enunciado de un problema, selecciona la información relevante y sigue las estrategias más adecuadas para su resolución. · Interpreta y valora los resultados obtenidos tras la resolución de un problema.
Competencia digital (CD)	Emplear distintas fuentes para la búsqueda de información.	· Usa Internet para buscar la información necesaria para resolver dudas o ampliar su conocimiento sobre los contenidos de la unidad.
	Manejar herramientas digitales para la construcción de conocimiento.	· Utiliza diferentes programas informáticos (GeoGebra, Mathematica) para representar gráficamente elementos de geometría analítica y resolver actividades. · Utiliza de forma adecuada la calculadora para realizar los cálculos necesarios en la realización de actividades.
Aprender a Aprender (AA)	Desarrollar estrategias que favorezcan la comprensión rigurosa de los contenidos.	· Organiza los conceptos tratados en la unidad (mapas mentales, resúmenes, esquemas, tablas, etc.) para comprenderlos correctamente.
	Evaluar la consecución de objetivos de aprendizaje.	· Realiza las actividades finales y la autoevaluación de la unidad para comprobar los conocimientos adquiridos.
Competencias sociales y cívicas (CSC)	Desarrollar capacidad de diálogo con los demás en situaciones de convivencia y trabajo y para la resolución de conflictos.	· Dialoga con sus compañeros y compañeras cuando se presenta una situación de conflicto en el aula.
	Reconocer riqueza en la diversidad de opiniones e ideas.	· Valora de forma positiva los diferentes puntos de vista de sus compañeros y compañeras cuando trabaja en grupo o se expresa en el aula sobre los conceptos de la unidad.

Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor (SIEP)	Asumir las responsabilidades encomendadas y dar cuenta de ellas.	· Toma la iniciativa y tiene un pensamiento crítico al enfrentarse a problemas de índole menos tradicional. · Explica las responsabilidades asumidas en una determinada tarea.
	Gestionar el trabajo del grupo, coordinando tareas y tiempos.	· Organiza de forma adecuada el trabajo que realiza en grupo.
Conciencia y expresiones culturales (CEC)	Apreciar los valores culturales del patrimonio natural y de la evolución del pensamiento científico.	· Ser consciente de la aplicación de la geometría analítica en la vida real. · Comprender la presencia de las matemáticas en las diversas manifestaciones culturales (arquitectura, pintura...). · Entender la importancia de la aparición y el desarrollo de la geometría analítica para las matemáticas y para otras disciplinas (física, ingeniería...).

6.6. Contenidos

6.6.1. Contenidos de la unidad didáctica

Los contenidos que se trabajarán en esta Unidad Didáctica de Geometría Analítica son los contenidos de los bloques 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) y 3 (Geometría) de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, indicados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, tal y como muestra la Tabla 11.

Tabla 11. Contenidos de los bloques 1 y 3 de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O. presentes en la Unidad Didáctica (RD 1105/2014, de 26 de diciembre).

Contenidos del Real Decreto 1105/2014	Contenidos de la Unidad Didáctica
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.	
1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.	· Lectura comprensiva de los enunciados de las actividades y problemas planteados. · Selección de los datos necesarios para la resolución de problemas y su representación.
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	· Resolución de problemas mediante el desarrollo de procesos matemáticos. · Expresión de los razonamientos matemáticos seguidos en la resolución de problemas. · Utilización del lenguaje matemático de forma adecuada. · Utilización de patrones en la resolución de ejercicios matemáticos.

1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	· Reflexionar sobre la coherencia de los resultados obtenidos al resolver un problema y el enunciado del mismo. · Analizar las diferentes estrategias de resolución de un problema y elegir la más adecuada.
1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	· Buscar la información necesaria para realizar actividades de mayor dificultad. · Investigar aplicaciones de los contenidos del tema en la realidad.
1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	· Modelar matemáticamente situaciones y problemas de la vida real empleando conceptos de la geometría analítica.
1.6. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	· Actitudes adecuadas para la práctica de las matemáticas. · Tomar la iniciativa y mostrar un pensamiento crítico al enfrentarse a problemas de índole menos tradicional.
1.7. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.	· Buscar información en la web (información sobre la historia de la geometría, información necesaria para resolver actividades). · Resolver actividades mediante el uso del software GeoGebra.
Contenidos del Real Decreto 1105/2014	Contenidos de la Unidad Didáctica
Bloque 3. Geometría.	
3.4. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.	· Identificar vectores en el plano y calcular las coordenadas de un vector dado por dos puntos. · Identificar los elementos de un vector. · Calcular el módulo y el argumento de un vector. · Reconocer vectores paralelos y perpendiculares. · Determinar el vector de posición de un punto. · Conocer y comprender los conceptos de vector fijo, vector de posición, vectores equipolentes, vector unitario y vectores libres del plano.

	· Operaciones con vectores. · Calcular las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos. · Determinar las ecuaciones de la recta (vectorial, paramétricas, continua, general o implícita, explícita, punto-pendiente). · Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano. · Calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada. · Calcular la distancia entre: dos puntos, un punto y una recta, y dos rectas paralelas.
3.6. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que faciliten la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	· Resolución de actividades mediante el uso del software GeoGebra.

6.6.2. Contenidos interdisciplinarios y transversales

Según la Orden 14 de julio de 2016, los elementos transversales deben integrarse con el resto de elementos curriculares, para garantizar la educación integral en la etapa. Estos vienen especificados en el artículo 6 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, y pueden encontrarse en la Tabla 37 del **Anexo IV**.

6.7. Metodología

El **Anexo V** del presente documento recoge las recomendaciones sobre la metodología didáctica a seguir en la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, según el artículo 7 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, y la Orden de 14 de julio de 2016.

Considerando estas recomendaciones, en el desarrollo de la Unidad Didáctica se combinarán varias metodologías, con el objetivo de que los estudiantes puedan construir un aprendizaje significativo de los contenidos.

Durante las explicaciones de los contenidos teóricos del tema y las actividades, se empleará una metodología transmisiva, basada en la instrucción directa del docente. Aunque esta metodología es la más tradicional, su implementación es fundamental, ya que, sin las explicaciones ordenadas, claras y lógicas de los contenidos por parte del docente y la realización de ejercicios para asentar esos contenidos, los estudiantes no podrán comprender los conceptos teóricos.

A pesar de que en este estilo de enseñanza el papel de los estudiantes es mayormente pasivo, durante las exposiciones teóricas se intentará integrar al alumnado en la dinámica general del aula y en la adquisición de los aprendizajes, haciendo que

reflexionen y participen en su propio proceso de aprendizaje. Para combinar el estilo de enseñanza tradicional con el estilo activo, se atenderá a las cuestiones espontáneas que puedan surgir en la clase, se intentará relacionar los temas expuestos con la actualidad, se permitirá que los alumnos debatan en la clase sobre cuestiones relacionadas con los contenidos, se hará preguntas durante las explicaciones para captar la atención de los estudiantes, etc. Con el objetivo de entiendan la importancia de las matemáticas en la historia, se les mandará una actividad de investigación sobre algún matemático relacionado con el tema. Además, se despertará el interés de los estudiantes en la geometría, mostrando sus aplicaciones en otros ámbitos, como el arte, la arquitectura o el diseño.

Tras explicar los contenidos, se realizarán actividades de aprendizaje, para adquirir las destrezas procedimentales y conceptuales, y actividades de desarrollo, para afianzar lo explicado. En la realización de las actividades, también se tratará de coordinar la metodología tradicional con la activa, para favorecer el pensamiento crítico, la reflexión, el intercambio verbal y colectivo de ideas, la autonomía y la iniciativa en los estudiantes. Se propondrán problemas contextualizados, relacionados con el entorno, se fomentará la reflexión y la búsqueda de diferentes soluciones, y se organizará a los estudiantes para que trabajen de forma tanto individual, como en equipo. Tanto el artículo 7 del Decreto 111/2016, como la Orden ECD/65/2015, destacan la importancia del aprendizaje cooperativo y las estrategias interactivas, ya que, a través de la resolución conjunta de tareas, se promueve la colaboración, el trabajo en equipo y la construcción del conocimiento mediante el intercambio de ideas.

Para poder atender a la diversidad en el aula e individualizar la enseñanza, se elaborarán diferentes tipos de actividades, desde actividades de refuerzo, para los estudiantes que presentan dificultades, hasta actividades de ampliación, para aquellos alumnos con mayores capacidades o intereses.

La Orden de 14 de julio de 2016, sugiere emplear además la metodología ABI (Aprendizaje Basado en la Investigación), o IBL (Inquiry-based learning), en la resolución de problemas. El objetivo de esta estrategia de enseñanza-aprendizaje es conectar la investigación basada en métodos científicos con la enseñanza, bajo la supervisión del docente.

En la metodología ABI, el alumnado tiene que recurrir a sus conocimientos previos, así como a una serie de procedimientos generales (simplificación de problemas, abstracción, observación sistemática, etc.). Los estudiantes participan de forma activa en la construcción de su aprendizaje: plantean preguntas, toman decisiones, diseñan planes y experimentos, discuten, colaboran y comunican y justifican los resultados y del proceso de investigación. Los profesores, por su parte, asumen el papel de motivadores y facilitadores del aprendizaje de los estudiantes, mejoran la reflexión, el pensamiento

crítico y lógico y la autorregulación de los estudiantes (Čeretková, Melušová, & Šunderlík, 2013).

Para aprovechar los beneficios de esta metodología, se dedicarán sesiones para realizar tareas no estructuradas que proporcionen contextos ricos para facilitar el aprendizaje y motivar a los estudiantes.

Por último, a lo largo de toda la unidad se usarán de manera habitual herramientas TIC. Se utilizará la web para buscar información de interés (información histórica, ejemplos de actividades resueltas, libros interactivos, blogs, wikis, etc.), aplicaciones multimedia de evaluación y autoevaluación, así como programas y aplicaciones informáticas de geometría dinámica, para motivar al alumnado y mejorar la comprensión y la asimilación de los conceptos teóricos del tema.

6.8. Actividades y recursos

En esta sección se muestran las actividades y recursos que se van a utilizar a lo largo de la Unidad Didáctica, con el objetivo de que los estudiantes adquieran las destrezas procedimentales y conceptuales y asimilen los contenidos desarrollados en el tema.

6.8.1. Actividades

Considerando los objetivos y las competencias clave que los estudiantes deben conseguir al final de esta unidad didáctica, se han seleccionado las actividades que vienen recogidas en el **ANEXO V**. Se plantearán distintos de tipos actividades:

- **Actividades iniciales:** para presentar la unidad (actividades de introducción), despertar el interés de los alumnos (actividades de motivación) y realizar un cómputo del nivel de conocimiento de los estudiantes sobre contenidos de cursos anteriores, que son necesarios para abordar el tema (actividades de diagnóstico).
- **Actividades de desarrollo y aprendizaje:** para desarrollar y fijar los contenidos del tema. Estas pueden ser ejercicios prácticos, para que el alumnado adquiera los contenidos expuestos (actividades de consolidación), problemas de dificultad similar a los resueltos por el docente en clase, para que adquieran las destrezas procedimentales y conceptuales necesarias (actividades de aprendizaje), o problemas relacionados con la vida cotidiana.
- **Actividades de síntesis, de resumen o finales:** se realizan al final del desarrollo de la unidad didáctica, para que los estudiantes pongan en práctica y aseguren, de forma global, los contenidos adquiridos del tema. Sirven para reforzar los nuevos conocimientos, establecer conexiones con otros contenidos o ayudar a memorizar datos. También son muy útiles para el docente, pues dan información sobre el nivel de aprendizaje alcanzado por el alumnado.

- **Actividades de refuerzo y ampliación o profundización:** imprescindibles para atender a la diversidad. Las actividades de refuerzo permiten que los alumnos/as con dificultades de aprendizaje alcancen los mismos objetivos que el resto del grupo (actividades descompuestas en sus pasos fundamentales, señalando ayudas para realizarlas, trabajo en pequeños grupos o por parejas, etc.). Por otro lado, las actividades de ampliación están destinadas a que, los estudiantes con mayores capacidades o intereses, profundicen o sigan construyendo conocimientos.
- **Actividades TIC:** resolución de actividades mediante el uso programas y aplicaciones informáticas de geometría dinámica (GeoGebra), que hacen que la enseñanza de la geometría sea más motivadora y consiguen que el aprendizaje sea más efectivo.
- **Actividades de evaluación:** sirven para determinar el grado de consecución de los objetivos. Pueden ser tanto pruebas escritas, como trabajos.

6.8.2. Recursos

Los recursos necesarios para desarrollar la unidad didáctica y realizar las actividades y tareas propuestas, se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 12. Recursos de la Unidad Didáctica.

Tipo de recursos	Recursos
Impresos	· Cuaderno del alumno. · Libro de texto: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Savia Andalucía. SM. ISBN: 978-84-675-8636-7. · Fotocopias de actividades y apuntes.
Audiovisuales	· Proyector, para la presentación de la unidad didáctica, las actividades planteadas y los vídeos explicativos.
Informáticos	· GeoGebra · Páginas interactivas · Ordenadores con conexión a internet, para la búsqueda de información, realizar actividades en páginas interactivas o en programas (GeoGebra).
Tecnológicos	· Pizarra digital, para llevar a cabo las explicaciones, las actividades y los ejercicios. · Calculadora científica
Ambientales	· Aula · Aula de informática

Humanos/personales

- Profesora de matemáticas, que coordina el trabajo de la clase y lleva a cabo el desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica.
- Alumnos y alumnas, que protagonizan el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Docentes de otras asignaturas, cuya colaboración es necesaria para la interdisciplinariedad.
- Equipo directivo
- Departamento de Orientación
- Familias de los estudiantes y toda persona externa al centro invitada a formar parte del proceso de enseñanza-aprendizaje.

6.9. Atención a la diversidad

Según la Orden 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía, debido al carácter obligatorio de estas enseñanzas, se deben organizar de acuerdo a los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Por ello, se deben tomar medidas para asegurar la adquisición de las competencias básicas y la detección y tratamiento de las dificultades de aprendizaje tan pronto como se produzcan.

De acuerdo al artículo 7 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los centros docentes desarrollarán y complementarán el currículo y las medidas de atención a la diversidad establecidas por las Administraciones educativas, adaptándolas a las características del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad del centro en el que se desarrolla la presente unidad didáctica vienen recogidas en el Proyecto educativo del I.E.S. Miguel Sánchez López (2017), en el que se proponen tres medidas educativas para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje:

1. **Medidas preventivas.** Permiten evitar o detectar tempranamente dificultades de aprendizaje en los alumnos (problemas de expresión y comprensión verbal, problemas de cálculo numérico, problemas de ortografía y caligrafía, etc.). Los resultados del informe de orientación educativa y del Informe de Evaluación Individualizado, determinarán la inclusión, o no, en el currículo de un refuerzo de las materias instrumentales (Lengua o en Matemáticas).
2. **Medidas de apoyo ordinario.** Una vez se detecta la necesidad educativa en algún/a alumno/a, el profesorado (junto con el tutor/a y el orientador/a) organizará actividades de recuperación y refuerzo (para el alumnado que muestre dificultades para alcanzar los objetivos educativos) y actividades de ampliación o desarrollo (para el alumnado que necesite actividades de enriquecimiento, para desarrollar al máximo sus capacidades).

El profesorado podrá realizar (en coordinación con el departamento de Orientación) las **adaptaciones curriculares** necesarias para que el alumnado, que no consiga los objetivos previstos en la programación aun mostrando interés en el aprendizaje, alcance las capacidades básicas previstas en la etapa.

Se establecerán programas de compensación educativa implementando grupos flexibles, que permitan recuperar al alumnado que presente unas deficiencias muy significativas en materias instrumentales, si la disponibilidad de profesorado lo permite.

3. **Medidas de carácter extraordinario.** Estas van dirigidas a:
 1. **Alumnos que permanecen un año más en el mismo ciclo o curso.** Entre otras medidas, se mantendrá una entrevista grupal con los padres de los alumnos repetidores y con los propios alumnos, para extraer conclusiones que permitan acabar con éxito el presente curso y facilitar información a los padres sobre alternativas para sus hijos (prueba de acceso a FP, ...).
 2. **Alumnos que sigan un Programa de Mejora del Aprendizaje y de los Rendimientos Escolares (PMAR).** Los alumnos que se incorporan a este programa son aquellos con dificultades de aprendizaje que, aun trabajando adecuadamente, no logran obtener las competencias clave previstas. En ningún caso puede incorporarse a un PMAR alumnado que no obtiene los resultados adecuados por falta de esfuerzo o compromiso. De acuerdo a la orden del 25 de julio de 2008 por la que se regula la atención a la diversidad, los alumnos adscritos a un programa de diversificación curricular no tendrán que superar las materias no superadas de cursos previos a su incorporación a dicho programa. Una vez incorporado al programa, si obtiene la promoción de curso con materias o ámbitos pendientes, éstas se recuperan superando las correspondientes al 2º año. Las materias que no tengan continuidad de un año al siguiente deberán ser superadas mediante un programa de refuerzo.
 3. **Alumnos con necesidades educativas especiales,** que tengan o necesiten una Adaptación Curricular menos o más significativa. El Departamento de Orientación realiza el dictamen de escolarización (grupo ordinario a tiempo completo, grupo ordinario con apoyos en períodos variables o escolarización en un aula de educación especial) y el profesorado del equipo educativo elabora las adaptaciones curriculares, coordinados por el tutor y asesorados por el Departamento de Orientación. El desarrollo y seguimiento de las AC corresponderá a todos los miembros del Equipo Educativo, incluidos la maestra de PT y, en su caso, de Audición y Lenguaje u otros profesionales que intervengan en la atención de este alumnado, coordinados por el tutor.
 4. **Alumnos/as que asisten al Aula de Apoyo a la Integración.**

5. **Alumnos con materias pendientes de cursos anteriores.** Los Departamentos fijarán en sus programaciones los criterios, pautas y profesores del Departamento que se harán cargo de los alumnos con materias pendientes.
6. **Alumnos/as que pertenecen al Plan de Compensación Educativa.**

Con el objetivo de que todo el alumnado alcance los objetivos y las competencias establecidos en el currículo, independientemente de sus necesidades educativas especiales (NEE), se desarrollaran medidas de atención a la diversidad adaptadas a dichas necesidades. Se organizarán:

- **Actividades de recuperación:** actividades específicas para los alumnos con asignaturas pendientes de cursos anteriores y para alumnos que repitan curso.
- **Actividades de refuerzo:** para los estudiantes a los que les cueste llegar a los objetivos educativos. En estas actividades se abordan los mismos conocimientos, pero tratándolos con distintos niveles de dificultad. Los refuerzos también serán individuales, de manera que se diseñan actividades adaptadas al alumno/a para conseguir el desarrollo de las capacidades individuales, en función de sus posibilidades.
- **Actividades de ampliación o profundización,** para los estudiantes con mayores capacidades o intereses.
- **Adaptaciones curriculares:** modificar aquellos elementos del currículum que no sean funcionales para la totalidad de los estudiantes, para que los alumnos con NEE puedan desarrollar al máximo sus capacidades.

Antes de comenzar las explicaciones de los contenidos del tema, se realizará una evaluación inicial, para conocer en qué nivel se encuentra cada uno de los estudiantes. Los resultados de esta evaluación y el progreso que muestren durante el desarrollo de la unidad, permitirán ajustar las actividades para atender a la diversidad de la clase y, así, evitar que algún/a alumno/a se quede atrás.

Por otra parte, se llevarán a cabo actividades en grupo o en parejas, creados por el docente, para que sean lo más heterogéneos posible. De esta forma, compartirán sus conocimientos, aprenderán unos de otros y se motivarán.

6.10. Temporalización

De acuerdo al Anexo IV de la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, a la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O. le corresponden 4 horas lectivas semanales.

En la página web de la Junta de Andalucía (Consejería de Educación y Deporte, 2020), se puede consultar el calendario escolar del centro I.E.S. Miguel Sánchez López. Las

horas lectivas totales del curso 2020-2021, correspondientes a la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas en 4º de E.S.O, son 140 horas, distribuidas de acuerdo a la Tabla 13.

Tabla 13. Temporalización de los contenidos de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O.

	Bloque ¹	Unidad Didáctica	Título	Nº de sesiones
1º TRIMESTRE	-	-	Presentación y evaluación inicial.	1
	2. Números y álgebra.	1	Números reales. Potencias, radicales, logaritmos y porcentajes.	25
		2	Expresiones algebraicas: polinomios y fracciones algebraicas.	12
		3	Ecuaciones y sistemas.	12
2º TRIMESTRE	3. Geometría.	4	Inecuaciones y sistemas.	12
		5	Semejanza y trigonometría	7
		6	Aplicaciones de la trigonometría.	12
		7	Geometría Analítica.	12
3º TRIMESTRE	4. Funciones.	8	Funciones.	10
		9	Funciones polinómicas y racionales.	9
		10	Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.	8
	5. Estadística y probabilidad.	12	Combinatoria.	6
		13	Probabilidad.	7
		14	Estadística.	7
Sesiones totales				140

La temporalización de los contenidos de las unidades que se verán en el 2º trimestre de la asignatura, se presentan en la Tabla 14. En esta tabla se ve que la unidad didáctica que se desarrolla en este trabajo, Geometría Analítica, se imparte en 12 sesiones. Cada sesión será de una hora de duración y en la última sesión se realizará una evaluación al alumnado, que consistirá en una prueba escrita sobre los contenidos del tema.

Tabla 14. Temporalización del 2º trimestre de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O.

¹ El bloque 1, Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, se desarrollará de modo transversal y simultáneo al resto de bloques.

ENERO	L	M	X	J	V	S	D
					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	U.D.4.			U.D.4.			
	18	19	20	21	22	23	24
	U.D.4.			U.D.4.			
FEBRERO	L	M	X	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6	7
	U.D.5.						
	8	9	10	11	12	13	14
	U.D.5.						
	15	16	17	18	19	20	21
	U.D.6.			U.D.6.			
MARZO	L	M	X	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6	7
	U.D.6.						
	8	9	10	11	12	13	14
	U.D.7.			U.D.7.			
	15	16	17	18	19	20	21
	U.D.7.			U.D.7.			
	22	23	24	25	26	27	28
	U.D.7.			U.D.7.			
	29	30	31				

Días no lectivos
 Unidad didáctica 4
 Unidad didáctica 5
 Unidad didáctica 6
 Unidad didáctica 7

A continuación, se desarrollan las sesiones. En cada una, se indican los contenidos que se impartirán, las actividades que se realizarán, los criterios de evaluación, así como las competencias clave y los objetivos de la unidad que se trabajan.

Tabla 15. Desarrollo de la sesión 1.

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN. VECTORES EN EL PLANO.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 3.4	Tipo de actividades: de introducción, de diagnóstico, de aprendizaje y desarrollo.
Objetivos: 1, 2, 3, 4, 14, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para ver el vídeo y mostrar las actividades, pizarra
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., CE.1.8., CE.1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional en la exposición de los contenidos por parte del docente.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual y en grupo.
Desarrollo: La sesión comienza con el visionado de un video de introducción a la Geometría Analítica https://www.youtube.com/watch?v=aI4VWXIQPGU (6,08 min.). En este vídeo se presenta el nacimiento de esta rama de la Geometría (su historia, sus padres) y los problemas que	

estudia: dado un lugar geométrico, determinar la expresión algebraica que lo representa, y dada una expresión algebraica, determinar el lugar geométrico que representa (10 minutos).

A continuación, el docente reparte a los estudiantes una ficha que contiene una actividad de diagnóstico, para evaluar los conocimientos previos del alumnado (ver **ANEXO V** Actividad A.1.). La actividad se resolverá entre toda la clase, los alumnos y alumnas participarán de forma activa, debatiendo las posibles soluciones. (10 minutos)

Seguidamente, se reparte a los estudiantes las fotocopias del tema (una relación de problemas y apuntes del tema) y se empieza con las explicaciones teóricas: el concepto de vector, cuáles son sus elementos (dirección, sentido, módulo y argumento), qué es un vector equipolente, cómo hallar un vector dado por dos puntos y un vector de posición y cómo calcular el módulo de un vector. Se ponen ejemplos para aclarar estos conceptos y se resuelven las dudas que surjan durante las explicaciones (20 minutos).

Después de las explicaciones, se proponen una serie de ejercicios para aplicar los contenidos vistos en la sesión (ver **Anexo V** Actividades B.1., B.2., B.3., B.4.a). Se dejan unos minutos para que los alumnos/as intenten resolverlos individualmente y, posteriormente, se lleva a cabo la corrección de las actividades entre toda la clase. (20 minutos)

Por último, se pide a los estudiantes que finalicen la actividad B.4. y que intenten hacer en casa las actividades B.5. y B.6.

Tabla 16. Desarrollo de la sesión 2.

SESIÓN 2: OPERACIONES CON VECTORES.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de aprendizaje y desarrollo.
Objetivos: 5,19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las diapositivas del tema y las actividades, y pizarra para llevar a cabo las explicaciones, los ejemplos y la corrección de las actividades
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional en la exposición de los contenidos por parte del docente.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual, por parejas, en grupo
Desarrollo: La sesión comienza con la corrección en pizarra de las actividades propuestas para casa, para lo que se piden voluntarios. Mientras los alumnos/as voluntarios/as realizan los ejercicios en la pizarra, la profesora los revisa y resuelve dudas que aparezcan. (15 minutos)	

Después, la profesora continúa con la explicación de los contenidos del tema: suma y resta de vectores, producto de un número por un vector y combinación lineal de vectores. Pone varios ejemplos de cada uno de los conceptos, muestra en la pizarra cómo sumar y restar vectores gráficamente (mediante el método del paralelogramo y por el de extremo-origen) y cuál es el vector resultante de multiplicar un vector por un número. (20 minutos)

A continuación, se proyectan las actividades B.7, B.8. y B.9. (ver **Anexo V**) para que asimilen cómo sumar y restar gráfica y analíticamente y cómo saber cuándo dos vectores son linealmente dependientes. Se anima a que, por parejas, piensen e intenten resolver los ejercicios y, tras unos minutos se piden voluntarios para que los corrijan en la pizarra. En grupo se comentan las actividades, los errores cometidos y cómo evitarlos. (25 minutos)

Tabla 17. Desarrollo de la sesión 3.

SESIÓN 3: PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO, PUNTOS ALINEADOS Y PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de aprendizaje y de desarrollo
Objetivos: 5, 6,11,13, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las diapositivas del tema y las actividades, y pizarra para llevar a cabo las explicaciones, los ejemplos y la corrección de las actividades
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional en la exposición de los contenidos por parte del docente.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual, por parejas, en grupo
Desarrollo: Se comienza la sesión con un breve repaso de los contenidos vistos anteriormente y se pide a los estudiantes que manifiesten sus dudas y cuestiones. (5 minutos) Seguidamente, se explican los siguientes contenidos del tema: punto medio de un segmento y puntos alineados. Se realizan en la pizarra varios ejemplos de aplicación de estos conceptos y proponen actividades (ver Anexo V Actividades B.10, B.11., B.13 a y B.14 a). (15 minutos) Se deja a los alumnos/as un tiempo para realicen las actividades y se resuelven en la pizarra explicándolas paso a paso. (10 minutos) Después, se continúa con la explicación de los conceptos: producto escalar de vectores conocido el módulo de los vectores y el ángulo que forman o conocidas las componentes, ángulo que forman dos vectores, vectores paralelos y perpendiculares. Se insiste a los estudiantes que el resultado del producto escalar es un número y no un vector. Se demuestra	

mediante ejemplos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a cero, pues el coseno del ángulo que forman es cero, mientras que el coseno del ángulo que forman dos vectores paralelos es igual a 1. (15 minutos)

Se plantean una serie de actividades (ver **Anexo V** Actividades B.15, B.16 a y b, B. 17 a y b, B.18) para poner en práctica los conceptos vistos y se pide a los estudiantes que los trabajen en parejas. Una vez hayan terminado los ejercicios, se corrigen en pizarra, preguntando a las distintas parejas si sus resultados coinciden con los escritos en la pizarra. (15 minutos)

Como tarea para casa, se mandan las actividades B.12, B.13 b, B.14 b, B.19. para que practiquen los contenidos de la sesión con unas actividades un poco más complejas que las resueltas en clase.

Tabla 18. Desarrollo de la sesión 4.

SESIÓN 4: ECUACIONES DE LA RECTA.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de aprendizaje y de desarrollo
Objetivos: 7, 8,9, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector (diapositivas del tema y actividades) y pizarra (explicaciones, ejemplos y corrección de las actividades)
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional en la exposición de los contenidos por parte del docente.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual, en grupo
Desarrollo: Al inicio de la sesión, se pide voluntarios para que corrijan en la pizarra las actividades mandadas para casa. De esta forma, se repasan los contenidos de la sesión anterior. (15 minutos) Una vez corregidas las actividades y resueltas las dudas, se prosigue con las explicaciones de los contenidos: ecuaciones de la recta (vectorial, paramétricas, continua, general o implícita, punto-pendiente y explícita). En la pizarra, se toma el ejemplo de una recta r que pasa por dos puntos, A y B, y se va calculando su ecuación en cada una de las formas posibles. (15 minutos) Para que los alumnos/as empiecen a familiarizarse con estas ecuaciones, se les propone la Actividad B.20.a (ver Anexo V), se les da unos minutos para que la realicen individualmente y se corrige en la pizarra. (15 minutos) Seguidamente, se propone la Actividad B.21 (ver Anexo V), para que aprendan a obtener las ecuaciones de la recta dados: un punto perteneciente a esta y su vector director, y dada	

su pendiente y un punto. Tras unos minutos, se piden voluntarios para corregirla actividad en la pizarra. (15 minutos)

Tabla 19. Desarrollo de la sesión 5.

SESIÓN 5: POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de aprendizaje y de desarrollo
Objetivos: 10,12, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las diapositivas del tema y las actividades, y pizarra para llevar a cabo las explicaciones, los ejemplos y la corrección de las actividades
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional en la exposición de los contenidos por parte del docente.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual, en parejas, en grupo
Desarrollo: Se inicia la sesión recordando los contenidos vistos en la sesión anterior. (5 minutos) Después, se continúa con el concepto de: posición relativa entre rectas en el plano. Se muestra mediante ejemplos cómo estudiar la posición relativa entre dos rectas: resolviendo el sistema de ecuaciones que forman las ecuaciones de estas o relacionando los coeficientes de sus ecuaciones generales. (15 minutos) Se proyectan una serie de actividades de aplicación de los conceptos recién vistos (ver Anexo V actividades B.22.a y B.23 a y c). Se pide que por parejas resuelvan los ejercicios: uno de ellos resolviendo el sistema de ecuaciones y otro, relacionando los coeficientes de sus ecuaciones generales. Se deja a los alumnos que trabajen y, transcurrido un tiempo, se pide que salgan voluntarios a la pizarra para resolver los ejercicios y poder comentar los resultados entre toda la clase. (15 minutos) Seguidamente, se prosigue con las explicaciones de los conceptos de: rectas paralelas y perpendiculares a una dada. Se les recuerda que, anteriormente, habían visto que la pendiente de dos rectas paralelas era la misma ($m=m'$) y que, cuando dos vectores eran perpendiculares, su producto escalar era nulo, como ocurría con el vector director ($\vec{u} = (u_1, u_2)$) y el vector normal ($\vec{n} = (u_2, -u_1)$) de una recta. (15 minutos) Como ejemplo, se plantean en la pizarra las actividades B.24.a y B.24.c (ver Anexo V). (10 minutos) Se pide que trabajen en casa las actividades: B.23 b, d, e y B.24 b y d (ver Anexo V)	

Tabla 20. Desarrollo de la sesión 6.

SESIÓN 6: POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de aprendizaje y de desarrollo
Objetivos: 10,12, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las actividades, y pizarra para llevar a cabo las explicaciones, los ejemplos y la corrección de las actividades
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual, en parejas, en grupo
Desarrollo: Se comienza la clase pidiendo que salgan voluntarios a corregir las actividades que se mandó realizar en casa (B.23 b, d, e y B.24 b y d.). Se debate entre toda la clase si las resoluciones son correctas o no, si les coinciden los resultados y si entienden los procedimientos de resolución, y se responden las dudas y cuestiones que surjan. (15 minutos) A continuación, se proyecta la actividad B.28 (ver Anexo V) y se pide que, por parejas discutan cómo la resolverían. Se les deja unos minutos para que la intenten y se pregunta a los alumnos/as cómo la han resuelto. Después de un breve debate, la profesora les explica que, si una recta es paralela al eje X, su vector director tiene la forma $(a, 0)$, y si es paralela al eje Y, entonces su vector director será $(0, a)$. Para comprobar que lo han entendido, se les propone la actividad B.29 (ver Anexo V) y se corrige en la pizarra. (20 minutos) Por último, en grupos, se harán en clase las actividades B.25, B.26 y B.27, dejando unos 15 minutos para realizarlas. En este tiempo, la profesora pasará por cada grupo observando cómo trabajan y resolviendo dudas. Tras ese tiempo, se corrigen las actividades. (25 minutos)	

Tabla 21. Desarrollo de la sesión 7.

SESIÓN 7: DISTANCIAS ENTRE PUNTOS, ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA Y ENTRE RECTAS PARALELAS.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de aprendizaje y de desarrollo
Objetivos: 14,15,16, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las diapositivas y las actividades, y pizarra para llevar a cabo las explicaciones, los ejemplos y la corrección de las actividades

Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.4., CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional durante las explicaciones
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: individual, en parejas, en grupo
Desarrollo: Se introduce la sesión recordando cómo se calculaba la distancia entre puntos, mediante un ejemplo. Seguidamente, se expone cómo calcular la distancia entre un punto y una recta de forma gráfica y después se traducen esos pasos a la forma analítica. También se les muestra la fórmula disponible para hacer el cálculo directo y, como ejemplo, se realiza la actividad B.30.a (ver Anexo V) en la pizarra, paso a paso y de forma directa mediante la fórmula. (20 minutos) Se propone a los alumnos/as que realicen en clase y por parejas los apartados b y c de la actividad B.30. Un miembro de la pareja debe calcular las distancias mediante la fórmula y el otro paso a paso (recta perpendicular a la recta por el punto, intersección de las rectas y distancia punto-punto) y deben comprobar que obtienen el mismo resultado. Se les deja 15 minutos para que trabajen y se corrigen las actividades. (25 minutos) Por último, se explica cómo hallar la distancia entre dos rectas paralelas de forma analítica y se muestra la fórmula para calcular la distancia directamente. Se realiza la actividad B.30.e (ver Anexo V) paso a paso y se anima a los estudiantes que apliquen la fórmula para comprobar que se obtiene el mismo resultado. (15 minutos)	

Tabla 22. Desarrollo de la sesión 8.

SESIÓN 8:	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 3.4	Tipo de actividades: de síntesis
Objetivos: 1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 , 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector (actividades) y pizarra (explicaciones y corrección de las actividades)
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.4, CE.1.8., CE1.9., CE.3.3.	Metodología: activa (realización de las actividades), tradicional (explicaciones)
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: en grupos
Desarrollo: En esta sesión, se realizarán en clase problemas de síntesis, en los que se aplican todos los contenidos del tema. Se proyectan los problemas con el proyector y se organiza a los alumnos/as en grupos de 3 o 4 integrantes.	

El primer problema (Actividad B.31.a, **Anexo V**) consiste en calcular el simétrico de un punto respecto a una recta, antes de que los estudiantes comiencen a realizarlo, se les recuerda, mediante un ejemplo en la pizarra, cómo calcular el simétrico de un punto respecto a otro punto. Se les da 15 minutos para que lo intenten resolver. En ese tiempo, la profesora circula entre los grupos solucionando dudas y dando pequeñas pistas, pero sin llegar a darles la solución. Pasados los 20 minutos, la profesora pregunta a los distintos grupos cómo lo han resuelto y procede a resolverlo en la pizarra, primero de forma gráfica y, luego traduciéndolo a forma analítica. (5 minutos)

El siguiente problema (Actividad B.33, **Anexo V**) pregunta por las rectas notables de un triángulo (mediana, mediatriz, altura). Antes de que los estudiantes empiecen el problema, se les recuerda que la altura debe ser perpendicular al lado opuesto al vértice por el que se trace, que la mediatriz del lado es perpendicular a dicho lado y que la mediana es una recta que une uno de los vértices con el punto medio del lado opuesto a ese vértice. De nuevo, se les da 20 minutos para resolverlo y la profesora circula entre los grupos viendo cómo trabajan. Una vez pasado ese tiempo, se debate cómo se ha resuelto cada apartado y, una vez hablado dado todos los grupos, la profesora explica cómo solucionar el problema. (30 minutos)

Al final de la clase, se les indica los problemas de la relación que son similares a los vistos en clase (Actividades B.31.b, B.32, B.34, y B.35, **Anexo V**), para que practiquen en casa. (5 minutos)

Tabla 23. Desarrollo de la sesión 9.

SESIÓN 9:	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.6, 1.7.,3.4, 3.6	Tipo de actividades: actividades de síntesis, actividades para fomentar el uso de las TIC
Objetivos: 1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 , 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las actividades, ordenadores con conexión a internet, aplicación GeoGebra.
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.5., CE.1.8., CE1.9., C.E.1.11., C.E.1.12. CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional durante las explicaciones
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: en parejas
Desarrollo: En esta sesión se introduce el software GeoGebra, aplicado a vectores y rectas en el plano. Empleando GeoGebra, se logrará que los estudiantes comprendan mejor los conceptos vistos en la unidad, ya que permite asociar las expresiones algebraicas a objetos geométricos y poder resolver los problemas de una forma mucho más visual.	

Los alumnos/as se organizan por parejas, compartiendo un ordenador, y se les reparte un tutorial, con los principales comandos que se usarán en las dos sesiones en las que se trabaja con este software.

La profesora abre GeoGebra en su ordenador y proyecta la pantalla, para explicar mediante ejemplos cómo usar los diferentes comandos que van a utilizar en las actividades. (15 minutos)

Después, le reparte a cada pareja una relación de ejercicios, que servirá para dar un repaso de todos los contenidos del tema. Deberán entregar las actividades de esta relación resueltas en *Google Classroom*, haciendo capturas del programa y respondiendo a los diferentes apartados. Los estudiantes trabajan las actividades durante el resto de la clase, mientras la profesora circula entre ellos para resolver dudas y cuestiones. (45 minutos)

Las actividades propuestas sirven para dar un repaso de todos los contenidos del tema (ver **Anexo V** Actividades C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6, C.7, C.8, C.9, C.10, C.11, C.12)

Tabla 24. Desarrollo de la sesión 10.

SESIÓN 10:	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4., 1.6, 1.7.,3.4, 3.6	Tipo de actividades: actividades de síntesis, actividades para fomentar el uso de las TIC
Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22	Recursos: proyector para mostrar las actividades, ordenadores con conexión a internet, aplicación GeoGebra.
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.4., C.E.1.5., CE.1.8., CE1.9., C.E.1.10. C.E.1.11., C.E.1.12. CE.3.3.	Metodología: activa durante la realización de las actividades y tradicional durante las explicaciones
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC, CEC	Organización: en parejas
Desarrollo: En esta sesión se propone a los estudiantes una serie de actividades de síntesis, que condensan todos los contenidos del tema. Primero deberán resolverlas de forma escrita, y luego ayudándose de GeoGebra, para comprobar si es correcta la solución. La profesora proyecta las actividades con el proyector y pide a los estudiantes que se organicen por parejas, procurando que sean las mismas de la sesión anterior. Se propone a los alumnos/as las actividades C.13., C.14. Y C.15. del Anexo V . Se les da tiempo para que trabajen las actividades y, en ese tiempo, la profesora circula entre los alumnos/as para ver cómo avanzan y comprobar si tienen dificultades con las actividades o con el uso del programa. Si se atascan con alguna actividad, la profesora intenta que reflexionen, evitando introducir información o posibles soluciones. (45 minutos)	

Una vez transcurrido el tiempo de trabajo, la clase debate sobre cómo han resuelto las actividades las distintas parejas, se comparan las soluciones obtenidas y se decide que método de resolución es el más coherente. Por último, la profesora realiza y explica las actividades en la pizarra, y resalta aquellos aspectos en los que se detecte que los alumnos/as cometen más errores. (15 minutos)

Tabla 25. Desarrollo de la sesión 11.

SESIÓN 11:	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3,1.5.,1.6,1.7. 3.4, 3.6	Tipo de actividades: motivadora, creativa, de síntesis
Objetivos: 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 , 11, 12, 13, 14, 17, 18,19, 20, 21, 22,23	Recursos: pizarra, proyector, ordenadores, GeoGebra,
Criterios de evaluación: CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.4., C.E.1.5., C.E.1.6, C.E.1.7., CE.1.8., CE1.9., C.E.1.10., C.E.1.11., C.E.1.12. CE.3.3.	Metodología: activa, motivadora, contextualizada
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP, CD, CSC	Organización: en grupos
Desarrollo: En esta sesión se realiza una actividad de tipo ABP (Actividad D, Anexo V), en la que se ponen en práctica los conocimientos adquiridos a lo largo de las sesiones anteriores. El plan de clase de esta actividad se desarrolla en el Anexo I. La actividad traslada una situación de la realidad (una partida de billar) al sistema de coordenadas, de forma que la posición de cada bola vendrá dada por su coordenada, y su trayectoria, por una serie de vectores. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes apliquen todo lo que han aprendido sobre vectores y rectas para resolver un problema en el que se ha modelizado matemáticamente una situación de la realidad. Para realizar la actividad los estudiantes se organizan en grupos de 3 o 4 personas. (50 minutos) Al final de la sesión, tras debatir entre toda la clase los distintos planteamientos del problema, la profesora los corrige en la pizarra. Los estudiantes comparan su resolución con la de la pizarra y la profesora resuelve las dudas surjan respecto a la correcta solución del problema. (10 minutos)	

Tabla 26. Desarrollo de la sesión 12.

SESIÓN 12:	
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.5., 1.6., 3.4.	Tipo de actividades: de evaluación

Objetivos: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22	Recursos: Prueba escrita
Criterios de evaluación: C.E.1.2., C.E.1.3., CE.1.5., C.E.1.9., C.E.3.3	Metodología: autónoma
Competencias Clave: CLL, CMCT, SIEP	Organización: individual
Desarrollo: Se realiza una prueba escrita individual, que contiene ejercicios sobre los contenidos del tema, con el objetivo de valorar si los estudiantes han alcanzado los objetivos de la unidad tras el desarrollo de las sesiones correspondientes a esta (ver Anexo V, Examen). (1 hora)	

6.11. Evaluación

Según el artículo 20 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, *la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de la Educación Secundaria Obligatoria será continua, formativa e integradora.*

La evaluación debe ser continua, para seguir el progreso del alumnado durante el proceso educativo y, así, poder detectar dificultades y establecer las medidas de refuerzo educativo necesarias.

La evaluación del aprendizaje del alumnado tendrá un carácter formativo, ya que será un instrumento para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje. La evaluación proporciona la información necesaria, al inicio y durante el desarrollo de dicho proceso, para adoptar las medidas que favorezcan que el alumnado alcance los objetivos y las competencias curriculares.

La evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado deberá ser integradora, para considerar todos los elementos que componen el currículo y cómo contribuye cada una de las materias a alcanzar los objetivos y las competencias clave. El carácter integrador no impedirá que el profesorado realice de manera diferenciada la evaluación de cada materia en función de los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

En la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, se considerarán:

- Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.
- Los criterios de calificación y los instrumentos de evaluación, asociados a los criterios de evaluación.

6.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

Los criterios de evaluación de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, se encuentran tanto en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre,

como en la Orden de 14 de julio de 2016. En esta Orden, aparecen las competencias clave que se desarrollan con cada criterio de evaluación, mientras que, en el Real Decreto, se presentan los estándares de aprendizaje evaluables, asociados a cada uno de los criterios de evaluación.

Los contenidos de la presente Unidad Didáctica pertenecen al tercer bloque, *Geometría*, pero también se tratan, de forma transversal, los contenidos del primer bloque, *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, por lo que hay que considerar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje de ambos bloques. Los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje evaluables y las competencias clave de la Unidad Didáctica se encuentran en el **Anexo VI**.

6.11.2. Criterios de calificación e instrumentos de evaluación

Se llevará un seguimiento y un control personalizado del alumnado, considerando el trabajo individual y grupal, sus actuaciones y la evolución de sus capacidades y actitudes. La evaluación se llevará a cabo mediante:

- Una **ficha de evaluación inicial**: para conocer los conocimientos previos del alumnado sobre el tema.
- El **cuaderno del alumno**: se comprobará la presentación y la limpieza, que contenga todas las actividades realizadas en clase y casa y que estas estén corregidas.
- La **observación directa**. Se tendrán en cuenta:
 - El **trabajo individual**, se comprueba que realice todas las actividades propuestas, y su trabajo y actitud en clase.
 - Análisis y evaluación de las **producciones de los alumnos** (monografías, resúmenes, trabajos individuales y en grupo, textos y producciones escritas).
 - **Participación e interés** de cada alumno/a en las actividades de clase.
 - Realización, comprensión y desarrollo de las actividades propuestas en clase y para casa.
 - Puntualidad y asistencia a clase.
 - Los **intercambios orales** con los alumnos/as, donde se evalúa la correcta expresión oral durante las intervenciones (diabetes, diálogos, puestas en común, etc.)
- **Pruebas escritas**: se realizará una prueba escrita al finalizar la unidad didáctica.

Para cada instrumento de evaluación, se usará como guía de puntuación una rúbrica, para evaluar de la forma más objetiva el desempeño de los estudiantes. Las rúbricas empleadas se encuentran en el **Anexo VII**.

La calificación final integra los instrumentos de evaluación como se indica a continuación:

Tabla 27. Criterios de calificación.

Instrumento de evaluación	Ponderación en la calificación final de evaluación	Rúbrica
Prueba escrita	60%	(ver tabla 39, Anexo VII)
Trabajos en grupo	15%	(ver tabla 40, Anexo VII)
Participación en clase	10%	(ver tabla 41, Anexo VII)
Cuaderno de clase	05%	(ver tabla 42, Anexo VII)
Actitud y trabajo individual	10%	(ver tabla 43, Anexo VII)

7. CONCLUSIONES

Para la realización de este trabajo, se han llevado a la práctica los conocimientos adquiridos en el Máster en Profesorado durante el curso 2020/2021. Para su desarrollo, también se ha examinado la legislación educativa vigente, para así, poder conocer los distintos aspectos del currículo.

Se han analizado y comparado los contenidos y las actividades de las unidades didácticas sobre geometría analítica de tres libros de texto. Se ha comprobado que los tres libros incluían los contenidos mínimos exigidos por la ley, que su estructura era prácticamente la misma y que la mayor parte de los ejercicios eran mecánicos y que no estimulaban la reflexión ni el pensamiento crítico de los estudiantes. En los libros de texto, tampoco se le daba importancia al trabajo en equipo, y la presencia de actividades de carácter cooperativo era mínima. Por ello, en la unidad didáctica, se ha intentado dar importancia al aprendizaje cooperativo, organizando por parejas o en grupo a los estudiantes para la realización de las actividades.

Con el objetivo de integrar a todos los estudiantes en la dinámica general del aula, mejorar su capacidad para argumentar y expresarse oralmente, en la corrección de las actividades toda la clase debate sobre cómo resolverlas, las soluciones que han obtenido, dificultades y dudas, etc.

Se ha hecho un estudio sobre las investigaciones en didáctica de la geometría, para conocer las dificultades de aprendizaje y los errores más comunes entre los estudiantes y cómo mitigarlos. Una forma de facilitar la comprensión de los conceptos geométricos y que la enseñanza de la geometría sea más motivadora, es empleando recursos tecnológicos interactivos que permitan crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características. Así, los estudiantes pueden resolver problemas, construyendo y manipulando tanto expresiones algebraicas, como representaciones

geométricas. Para aprovechar los beneficios de estas tecnologías, en la unidad didáctica se incluyen varias sesiones destinadas a trabajar con el software *GeoGebra*.

En la unidad didáctica, se ha destinado una sesión al desarrollo de una actividad basada en un problema real. Con ello, se pretende que los estudiantes sean capaces de relacionar la vida cotidiana con las matemáticas y ver la utilidad de los conceptos teóricos explicados durante la unidad.

La Unidad Didáctica se ha diseñado con el objetivo de motivar a los estudiantes y aumentar su interés hacia las matemáticas. Mediante variedad de actividades y recursos, se ha pretendido dinamizar las clases y facilitar el aprendizaje de contenidos, cuya comprensión es esencial en niveles superiores del ámbito de las ciencias y la tecnología.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A. D. Aleksandroz, A. N. Kolmogorov, M. A. L. (2014). *La matemática: su contenido y método y significado*. Madrid: Alianza editorial.
- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1º; U. N. de Villa & María, eds.). Retrieved from <https://www.yumpu.com/es/document/read/14250276/errores-y-dificultades-en-matematica-analisis-proyecto>
- Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, E. (2017). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Savia Andalucía*. SM.
- Arrieche, B. (2002). *Estrategias metodológicas para la enseñanza de geometría dirigido a los estudiantes de la especialidad en Educación Integral de la UPEL-Maracay*. Universidad Pedagógica Experimental. Maracay.
- Báez, R., & Iglesias, M. (2007). Principios Didácticos a Seguir En El Proceso De Enseñanza Y Aprendizaje De La Geometría En La Upel "El Mácaro." *Enseñanza de La Matemática, Vols. 12 Al 16*, 16, 67–87. Retrieved from <https://core.ac.uk/download/pdf/287746183.pdf>
- Barniol, P., & Zavala, G. (2010). Vector addition: Effect of the context and position of the vectors. *AIP Conference Proceedings*, 1289(October), 73–76. <https://doi.org/10.1063/1.3515252>
- Barniol, P., & Zavala, G. (2014). Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 10(1). <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121>
- Barrantes, M. & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría Escolar. *Enseñanza de Las Ciencias*, 22(2), 241–250. Retrieved from https://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004Barrantes_Blanco_recuerdos.pdf
- Blázquez, V. M. (n.d.). Geometry In Space. Retrieved from mathspadilla.com website: <http://www.mathspadilla.com/matII/Unit12->

GeometryInSpace/relative_positions.html

- Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas* (2nd ed.). Madrid: Alianza Editorial.
- Bravo, V. L. y Patiño, J. C. (2016). Análisis de los errores de los alumnos en el concepto de recta y plano en álgebra y geometría analítica. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo* (Noviembre 2016). Retrieved from <http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/11/recta.html>
- C. B. Boyer, U. C. M. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
- Canter, C. & Bocco, M. (1997). Errores en geometría : clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana de Educación*, 53(2). Retrieved from <https://rieoei.org/historico/deloslectores/3241Bocco.pdf>
- CEDEC. (n.d.). Rúbrica para evaluar el trabajo en equipo. Retrieved from <https://cedec.intef.es/cedec-rubrica-para-evaluar-trabajo-equipo-elementos-de-geometria-3/>
- Čeretková, S., Melušová, J., & Šunderlík, J. (2013). *Guide of supporting actions for teachers in promoting inquiry-based learning*. 37. Retrieved from https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/FINAL_WP5_short-Guide-supporting-actions_licence_150708.pdf
- Colabora Educación 30. (n.d.). Rúbricas de evaluación. Retrieved from <https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/document/s/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>
- Colera, J., Colera, R., Gaztelu, I., & Oliveira, M. J. (2017). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º E.S.O. Aprender es crecer en conexión*. ANAYA.
- Consejería de Educación y Deporte, J. de A. (2020). Calendario Escolar del curso actual. Retrieved from <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/ced/calendario-escolar>
- Educativos para opositores padres y maestros. (2019). Rúbricas de evaluación en el aula. Retrieved from <https://www.educativospara.com/rubricas-de-evaluacion-en-el-aula/#.YKVEkFwzZPb>
- Flores García, S., González-Quezada, M., Alfaro-Avena, L., Hernández-Palacios, A., & Barrón López, J. (2008). Uso de vectores en su propio contexto (parte I). *CULCyT: Cultura Científica y Tecnológica*, 5(26), 17–25.
- Franchi, L. & Hernández de Rincón, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, 8(24), 63–71. Retrieved from <https://www.redalyc.org/pdf/356/35602411.pdf>
- GeoGebra. (2021). Comandos de Geometría. Retrieved from https://wiki.geogebra.org/es/Categoría:Comandos_de_Geometría
- Geometría Analítica. (n.d.). Retrieved from Wikipedia website: https://es.wikipedia.org/wiki/Geometría_analítica

- González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, 47(4), 449–462. <https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462>
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than a proof. *The Mathematics Teacher*, 74(1), 11–18. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/27962295>
- Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos asistido por computadora*. Universidad Pedagógica Experimental, Maracay.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2 & 3), 27–46.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2016). El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. In Madrid: Paraninfo (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 173–195). Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/332550532_El_razonamiento_geometrico_segun_el_modelo_de_Van_Hiele
- Knight, R. D. (1995). The vector knowledge of beginning physics students. *The Physics Teacher*, 33(2), 74–78.
- Las posiciones relativas de dos rectas. (2020). Retrieved from superprof website: <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/posiciones-relativas-de-dos-rectas.html>
- Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Matemáticas Académicas. Proyecto SomosLink*. Edelvives.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, EE.UU.: N.C.T.M.
- Ozkan, A., Ozkan, E. M., & Karapıçak, S. (2018). On the Misconceptions of 10th Grade Students about Analytical Geometry. *The Educational Review, USA*, 2(8), 417–426. <https://doi.org/10.26855/er.2018.08.002>
- Proyecto educativo del I.E.S. Miguel Sánchez López*. (2017). 1–189.
- Ramírez Palacios, M. C., Oktaç, A. y García, C. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 413–418.
- Recursossep. (2017). Rúbricas para la evaluación del alumnado. Retrieved from https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable/rubrica_para_la_evaluacion_de_pruebas_escritas-001/#google_vignette
- Relative position of two planes. (n.d.). Retrieved from Sangaku Maths website: <https://www.sangakoo.com/en/unit/relative-position-of-two-planes>
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. In Grupo Editorial Iberoamérica (Ed.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. (pp. 69–108). Retrieved from <http://funes.uniandes.edu.co/486/>

9. REFERENCIAS NORMATIVAS

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. BOJA, 28 de julio de 2016, núm. 144, pp. 190 a 195. Recuperado de:

<https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/BOJA16-144-00479.pdf>

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, pp. 395-397. Recuperado de:

<https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>

Junta de Andalucía, Consejería de Educación y Deporte. (2020). *Consulta selección de libros de texto por centro para el curso 2020/2021*. Retrieved 04 17, 2021, from <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto>

Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 28 de junio de 2016, núm. 122, pp. 27 a 25. Disponible en: <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/122/BOJA16-122-00223.pdf>

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986 a 7003. Disponible en:

<https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>

Orden 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 167, 22 de agosto de 2008, pp. 5 a 14. Disponible en: <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2008/167/boletin.167.pdf>

10. ANEXOS.

ANEXO I: Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave de los bloques primero y tercero de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de E.S.O.

Tabla 28. Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave del Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º ESO (RD 1105/2014, de 26 de diciembre; Orden de 14 de julio de 2016).

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.			
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y	1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.	CCL, CMCT
	1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.	CMCT, CAA
	1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.	CCL, CMCT, CAA

modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad	CMCT, CAA
	1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
	1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
	1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CMCT, CAA
	1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.	CMCT

		1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	
	1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CMCT, CAA, SIEP
	1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	1.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.	CMCT, CAA, SIEP
	1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	CMCT, CD, CAA
	1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 1.12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 1.12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 29. Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave del Bloque 3 “Geometría” de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º ESO (RD 1105/2014, de 26 de diciembre; Orden de 14 de julio de 2016).

Bloque 3. Geometría.			
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	3.1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.	CMCT, CAA
	3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	3.2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 3.2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 3.2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.	CMCT, CAA
	3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.	CCL, CMCT, CD, CAA

		3.3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.	
--	--	---	--

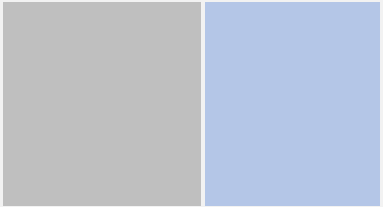
ANEXO II: Comparativa de los libros de texto de Anaya, SM y Edelvives.

Tabla 30. Contenidos comunes y no comunes en los libros de texto de SM y Anaya (Elaboración propia).

Contenidos comunes	Vectores en el plano	Coordenadas de un vector dado por dos puntos.
		Módulo, dirección y sentido de un vector. Distancia entre dos puntos.
	Operaciones con vectores	Producto de un vector por un número, suma de vectores, combinación lineal de vectores.
		Vectores que representan puntos (en el libro de SM se introduce el concepto de “vector de posición” para designar este tipo de vectores). Puntos alineados (en el libro de SM se explica mediante un ejemplo) y punto Medio de un segmento.
	Ecuaciones de la recta	Ecuación vectorial de la recta, ecuaciones paramétricas, ecuación continua, ecuación explícita, ecuación punto-pendiente. Rectas paralelas a los ejes coordenados: paralela al eje x (pendiente igual a 0) y paralela al eje y (pendiente infinita).
Contenidos no comunes	Posición relativa de dos rectas en el plano	Rectas paralelas, perpendiculares, secantes y coincidentes.
	SM	Vectores en el plano: concepto de vector fijo, vector de posición, vectores equipolentes, vector unitario y vectores libres del plano. Producto escalar de vectores y aplicaciones: producto escalar de dos vectores, ángulo entre dos vectores. Ecuación general de la recta: $Ax+By+C=0$
	Anaya	Resta de vectores. Ecuación de la circunferencia.

Tabla 31. Contenidos comunes y no comunes en los libros de texto de SM y Edelvives (Elaboración propia).

Contenidos comunes	Vectores en el plano	Concepto de vector fijo, de vector de posición, de vectores equipolentes, de vector unitario y de vectores libres del plano. Coordenadas de un vector dado por dos puntos. Módulo, dirección y sentido de un vector. Distancia entre dos puntos (en el libro de Edelvives aparece en apartado “Relaciones métricas”).
	Operaciones con vectores	Suma de vectores, Producto de un vector por un número, suma de vectores, combinación lineal de vectores. Producto escalar de vectores y aplicaciones: producto escalar de dos vectores, ángulo entre dos vectores. Puntos alineados: en el libro de SM se explica mediante un ejemplo y en el de Edelvives se introduce en el apartado 6 “Relaciones métricas”. Punto Medio de un segmento (en el libro de Edelvives se introduce en el apartado 6 “Relaciones métricas”). Combinación lineal de vectores: vectores linealmente dependientes (en el apartado 3 del libro de Edelvives).
	Ecuaciones de la recta	Ecuación vectorial de la recta, ecuaciones paramétricas, ecuación continua, ecuación general o implícita, ecuación explícita y ecuación punto-pendiente. Vector normal y vector director de una recta. Rectas paralelas a los ejes coordenados: paralela al eje x (pendiente igual a 0) y paralela al eje y (pendiente infinita).
	Posición relativa de dos rectas en el plano	Rectas paralelas, secantes y coincidentes.
Contenidos no comunes	SM	Rectas perpendiculares a una dada.
	Edelvives	Vectores en el plano: argumento de un vector, vectores ligados (vectores equipolentes que se encuentran en la misma recta). Vectores linealmente independientes, base del espacio vectorial, sistema de referencia.



Posiciones relativas de dos rectas según el tipo de sistema de ecuaciones: incompatible (paralelas), compatible (secantes) o incompatible determinado (coincidentes).

Relaciones métricas: haz de rectas, haz de rectas paralelas, distancia entre un punto y una recta, distancia entre dos rectas paralelas.

ANEXO III: Investigaciones sobre enseñanza-aprendizaje de Geometría.

Tabla 32. Niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 2016).

Nivel	Características
1. Reconocimiento.	Los alumnos perciben las figuras de forma global, solo observan su aspecto físico. Son incapaces de asociar características comunes entre las figuras, sólo las relacionan por su semejanza o diferencia física global.
2. Análisis.	Los estudiantes pueden reconocer las propiedades de una figura, distinguen en los objetos diferentes elementos y sus propiedades matemáticas, pero no pueden clasificar las figuras de manera lógica en función de sus propiedades.
3. Clasificación u ordenamiento.	Los estudiantes que llegan a este nivel comienzan a desarrollar el razonamiento formal. Pueden describir las figuras de manera formal, pero no son capaces de realizar razonamientos lógicos formales. Pueden comprender una demostración, pero no llevarla a cabo.
4. Deducción formal.	Razonamiento típico de los matemáticos profesionales. Quienes alcanzan este nivel pueden realizar un razonamiento deductivo formal, comprenden, ven el sentido y la utilidad a la estructura axiomática de las matemáticas. Realizan demostraciones de forma autónoma, aceptan la existencia de diferentes definiciones de un mismo concepto y de distintas demostraciones de la misma propiedad.
5. Rigor lógico.	Este es el nivel más avanzado y abstracto, y solo lo alcanzan matemáticos expertos. En este nivel se comprende la importancia de un razonamiento formal riguroso que base las demostraciones en un determinado conjunto de axiomas, se puede operar con sistemas axiomáticos diferentes y comparar geometrías basadas en distintos sistemas axiomáticos.

Tabla 33. Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 2016).

Fase	Descripción
1. Información	El docente obtiene información sobre los conocimientos previos y el nivel de razonamiento de sus estudiantes. Los estudiantes reciben información sobre el nuevo tema de estudio (materiales, problemas...).
2. Orientación dirigida	El docente guía a los estudiantes para que estos consigan descubrir, comprender y aprender los conceptos (propiedades, figuras...) más importantes del área de geometría que estén estudiando.
3. Explicitación	El docente motiva a los estudiantes para que expliquen los resultados que han obtenido, intercambien experiencias, discutan y comenten entre ellos, y con el profesor, sus resoluciones y conclusiones sobre el trabajo hecho con anterioridad. Deben utilizar y afianzar el vocabulario y de contenidos propios del nivel. Esta fase debe ser transversal y estar siempre presente, se debe llevar a cabo la verbalización y discusión de las actividades de las distintas fases de aprendizaje.
4. Orientación Libre	Con el objetivo de que los alumnos consoliden los aprendizajes conseguidos en el nivel, el docente diseñará y asignará actividades para aplicar los conocimientos y el lenguaje adquiridos, y que permitan utilizar y combinar los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento.
5. Integración	En esta fase el docente debe diseñar actividades para que los estudiantes relacionen y combinen sus nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente. De esta forma, pueden crear una nueva red de relaciones mentales, más compleja que la anterior, sin el aporte de conceptos o propiedades nuevas, simplemente organizando los ya estudiados.

Tabla 34. Habilidades esperadas en cada nivel de razonamiento geométrico (Hoffer, 1981).

Nivel Habilidad	Reconocimiento	Análisis	Ordenamiento	Deducción	Rigor
Visual	Reconoce diferentes figuras (idea geométrica, símbolos...) en un dibujo, e información relacionada con estas.	Reconoce las propiedades de una figura, y la identifica como parte de otra figura más grande.	Reconoce interrelaciones entre diferentes tipos de figuras y sus propiedades comunes.	Utiliza información de otra figura para deducir más información.	Reconoce suposiciones injustificadas hechas mediante el uso de figuras e imagina figuras relacionadas en varios sistemas deductivos.
Verbal	Asocia un nombre correcto a cada figura e interpreta frases que describen figuras.	Describe de forma precisa las propiedades de una figura.	Define conceptos de forma adecuada y precisa. Enuncia frases mostrando relaciones entre figuras.	Distingue entre definiciones, postulados y teoremas, y reconoce en un problema la información dada y qué se pide.	Describe varios sistemas deductivos.
De dibujo	Representa dibujos de figuras con precisión.	Utiliza las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla. Traslada información verbal dada a un dibujo.	Dadas ciertas figuras, puede construir otras figuras relacionadas con estas.	Sabe cómo dibujar una figura determinada a partir de información dada y cuándo debe usar elementos auxiliares.	Entiende las limitaciones y capacidades de las herramientas de dibujo. Representa conceptos no típicos en varios sistemas deductivos.
Lógica	Identifica diferencias y similitudes de las diferentes figuras. Entiende que las figuras conservan su forma al cambiar de posición.	Entiende que las figuras se clasifican en diferentes tipos y que las propiedades de las figuras ayudan a distinguir unas de otras.	Usa las propiedades de las figuras para determinar si una clase de figuras está contenido en otra clase.	Utiliza las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones y puede deducir consecuencias de una determinada información.	Entiende las limitaciones y capacidades de las hipótesis y los postulados. Sabe cuándo un sistema de postulados es

					independiente, consistente e inequívoco.
Aplicada	Identifica formas geométricas en objetos físicos.	Reconoce propiedades geométricas de objetos físicos.	Entiende el concepto de un modelo matemático que representa relaciones entre objetos.	Puede deducir propiedades de objetos geométricos a partir de información dada y resolver problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y objetos geométricos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstractos. Desarrolla modelos matemáticos para describir fenómenos físicos, sociales y naturales.

Tabla 35. Clasificación según Movshovitz et al. (1987) de los errores encontrados en el área de geometría plana (Franchi, L. & Hernández de Rincón, 2004).

Categoría	Nº	Error
Errores debidos a datos mal utilizados.	10	Toma mal un dato de una figura geométrica o lo ignora en la solución o demostración de un problema geométrico planteado.
	12	Añade hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración de un problema geométrico.
	13	Intenta demostrar o resolver un problema geométrico sin utilizar algún dato dado.
	25	Transcribe mal una cantidad o símbolo o sustituye mal un dato en una ecuación dada.
Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje.	3	Utiliza inadecuadamente las notaciones de las figuras y elementos geométricos.
	4	Demuestra o intenta demostrar una proposición geométrica que no se le pide.
	5	Da una respuesta distinta o adicional a la que se le pide en un problema geométrico.
	6	Plantea una ecuación o proposición en discordancia con el enunciado de un problema geométrico dado.

	7	Utiliza inadecuadamente la terminología geométrica o describe defectuosamente la construcción de figuras geométricas.
	8	Dibuja una figura geométrica que no se corresponde con el enunciado de un problema geométrico propuesto.
	9	No dibuja una figura a propósito de un problema propuesto.
Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.	16	Usa el recíproco de una implicación como verdadera.
	17	Construye y usa una implicación que no es verdadera.
	18	Transforma defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico.
	19	Aplica defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas o disciplinas en un problema geométrico planteado
	23	Usa un algoritmo inadecuado para resolver un problema geométrico
	24	Usa una estrategia inadecuada para realizar la demostración de un problema geométrico
Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.	14	Usa un teorema, corolario o axioma sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación o en un contexto que no le corresponde.
	15	Interpreta y usa inadecuadamente una definición geométrica.
	21	Enuncia proposiciones ciertas sin justificación o mal justificadas en la demostración de un problema geométrico
Errores debidos a la falta de verificación en la solución.	—	
Errores técnicos.	1	Realiza operaciones y usa notaciones del álgebra elemental en forma defectuosa.
	2	Utiliza inadecuadamente los instrumentos de dibujo.
	11	Traza defectuosamente figuras y lugares geométricos y/o sus elementos.

	20	Utiliza un algoritmo adecuado en la solución de un problema geométrico pero lo aplica en forma defectuosa
	22	Utiliza un algoritmo adecuado para la solución o demostración de un problema geométrico pero no llega a su solución
	26	Manipula inadecuadamente los signos algebraicos
	27	Ejecuta mal operaciones aritméticas

Tabla 36. Errores más comunes cometidos en cada pregunta del TUV (Barniol & Zavala, 2014).

Concepto vectorial	Nº	Errores más comunes	Fallos (%)
1. Dirección	5	Al elegir un vector con la misma dirección que uno dado, confunden dirección con sentido.	14
	17	Al calcular la dirección de un vector dado como combinación lineal de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, no son capaces de distinguir en qué cuadrante se encuentra el vector, calculan el ángulo y no saben si el resultado es coherente.	46
2. Módulo	20	Calcular el módulo de un vector dado como combinación lineal de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, aplican el teorema de Pitágoras o asumen que es igual a 2, ya que el vector tenía la forma: $A=2\hat{i} + 2\hat{j}$.	18
3. Componentes	4	Cuando se les pregunta por la componente y o x del vector, eligen una componente de igual longitud que el vector.	18
	9		12
	14	Cuando se les pregunta por la componente x de un vector, dado el ángulo que forma con el eje Y, aplican una fórmula trigonométrica incorrecta al calcular el valor de la componente.	27
4. Vector unitario	2	Si se les pide la representación gráfica del vector unitario con la misma dirección que un vector dado: · Seleccionan como vector unitario, con la misma dirección que un vector dado $(2\hat{i} + 2\hat{j})$, un vector con componentes x e y iguales a 1 $(\hat{i} + \hat{j})$. · Seleccionan el vector $0.5\hat{i} + 0.5\hat{j}$ · Seleccionan dos vectores, $2\hat{i}$ y $2\hat{j}$ · Seleccionan un vector igual al dado en el problema $(2\hat{i} + 2\hat{j})$.	57

5. Representación gráfica	10	Si se les pide la representación gráfica de un vector dado como combinación lineal de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, tienen confusiones a la hora de calcular el vector que une dos puntos, no distinguen que punto es el origen y cuál es el extremo.	8
6. Suma	1	Al sumar vectores en 2D, usan el método erróneo “de punta a punta”, eligen un vector situado en la bisectriz que forman los otros dos vectores o seleccionan un vector situado en la horizontal.	26
	7	Al sumar dos vectores perpendiculares de igual magnitud, aplican de forma incorrecta el teorema de Pitágoras o afirman que el módulo de la suma es el mismo que el de los otros dos vectores.	21
	16	Al sumar dos vectores de igual magnitud que forman un ángulo $>90^\circ$, aplican de forma incorrecta el teorema de Pitágoras, afirman que el módulo de la suma es el mismo que el de los otros dos vectores o suponen que el vector suma tiene que tener un módulo mayor a los otros dos vectores.	36
7. Resta	19	Al restar dos vectores $(A-B)$ en 1D, eligen como solución el vector suma $(A+B)$, el vector $-(A-B)$ o el vector $B-A$.	37
	13	Al restar de dos vectores en 2D, expresan mal el vector $-B$, ya que solo multiplican por (-1) la primera componente del vector, eligen como solución el vector suma $(A+B)$ o el vector $-(A-B)$. Otros errores se deben al método incorrecto “punta a punta” o a elegir un vector bisector.	44
8. Multiplicación de un vector por un escalar con signo negativo	11	Cuando se les pide la representación gráfica de un vector multiplicado por un número negativo: · Representan el vector multiplicado por el escalar ignorando su signo. · Representan un vector perpendicular al primero, aunque con módulo correcto. · Eligen un vector con la dirección correcta, pero con módulo incorrecto. Presentan dificultades en entender que al multiplicar el vector por un escalar, su módulo cambia. · Como el escalar era igual a -3, representan un vector que sufre una traslación de 3 unidades negativas en el eje y.	29
9. Producto escalar	3	Al interpretar geoméricamente el producto escalar de dos vectores: · Consideran que el producto escalar de dos vectores es el vector bisector. · Cómo el producto escalar da como resultado un escalar, eligen como resultado el módulo de un vector entre los dos vectores. · Relacionan el producto vectorial con la suma y eligen un vector en la dirección de uno de los vectores que se multiplican. · Representan un vector perpendicular a los dos vectores, confunden el producto escalar con el vectorial.	67
	6	Cuando se pide el producto escalar de dos vectores: · Aplican la ecuación $A \cdot B \cdot \sin \theta$, que es la ecuación para calcular el módulo del producto vectorial, en lugar de $A \cdot B \cdot \cos \theta$.	22

		· Multiplican de forma directa los módulos de A y B.	
	8	Al calcular el producto escalar de dos vectores dados como combinación lineal de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$: · Multiplican la primera componente de A por la primera de B, y la segunda de A por la segunda de B. · Confunden producto escalar con producto vectorial. · Realizan la suma vectorial.	58
10.Producto vectorial	12	Al interpretar geoméricamente el producto vectorial de dos vectores: · Eligen un vector perpendicular, pero con sentido contrario. · Eligen un vector entre los dos vectores que se multiplican. · Eligen el módulo del vector entre los dos vectores que se multiplican.	43
	18	Al calcular el módulo del producto vectorial de dos vectores: · Calculan el módulo del producto vectorial de dos vectores usando la ecuación del módulo del producto escalar $(A \cdot B \cdot \cos\theta)$, en vez de $A \cdot B \cdot \sin\theta$. · Calculan el módulo del producto vectorial de dos vectores usando una ecuación incorrecta: $A \cos\theta B \sin\theta$, calculan bien la componente x de A ($A \cdot \cos\theta$), pero mal la de B ($B \cdot \sin\theta$). · Calculan el módulo del producto vectorial de dos vectores usando una ecuación incorrecta: $A \cdot B \cdot \sin(90-\theta)$. · Multiplican de forma directa los módulos de A y B.	43
	15	Al calcular el producto vectorial de dos vectores, dados como combinación lineal de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$: · Eligen un vector perpendicular, pero con sentido contrario. · Multiplican la primera componente de A por la primera de B, y la segunda de A por la segunda de B.	23

ANEXO IV: Contenidos transversales.

Tabla 37. Contenidos transversales (Artículo 6 del Decreto 111/2016, de 14 de junio)

Contenidos transversales
a) Respeto al Estado de Derecho y a los derechos y libertades fundamentales, según la Constitución Española y el Estatuto de Autonomía para Andalucía. b) Desarrollo de habilidades sociales y educación en valores que sustentan la libertad, la justicia, la igualdad, el pluralismo político y la democracia. c) Educación para la convivencia y el respeto en las relaciones interpersonales, el autoconcepto, la imagen corporal y la autoestima. d) Educación en valores para impulsar la igualdad entre mujeres y hombres, el análisis las desigualdades por razón de sexo, el respeto a la orientación y a la identidad sexual, el rechazo del sexismo, la prevención de la violencia de género y el rechazo a la explotación y abuso sexual. e) Educación en valores acordes a los principios de igualdad de oportunidades, no discriminación y prevención de la violencia contra personas discapacitadas. f) Fomento de la tolerancia y el reconocimiento de la diversidad y la convivencia intercultural, la educación para la cultura de paz, el respeto a la libertad de conciencia, el rechazo y la prevención de cualquier tipo de violencia, racismo o xenofobia. g) Desarrollo de las habilidades para la comunicación interpersonal (capacidad de escucha activa, empatía, acuerdo a través del diálogo). h) Reconocimiento de las aportaciones a la enseñanza y el aprendizaje del alumnado de las tecnologías de la información y la comunicación y los medios audiovisuales, promover su uso controlado. i) Educación en valores y conductas relacionados con la convivencia vial, la prudencia, la prevención de los accidentes de tráfico y la protección ante emergencias y catástrofes. j) Fomento de la actividad física y dieta equilibrada y la alimentación saludable, para el bienestar individual y colectivo. k) Educación económica y empresarial, desde principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social, y fomento del emprendimiento, la ética empresarial y la igualdad de oportunidades. l) Educación sobre temas y problemas globales (salud, pobreza, emigración, desigualdad social, agotamiento de recursos naturales, superpoblación, contaminación, calentamiento global), para fomentar conductas que conserven y mejoren el entorno y la calidad de vida.

ANEXO V: Recomendaciones sobre la metodología didáctica a seguir.

En el artículo 7 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, y en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, se dan una serie de recomendaciones sobre la metodología didáctica a seguir en la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, para conseguir el desarrollo competencial del alumnado.

- Las metodologías empleadas deben fomentar el desarrollo competencial del alumnado: deben ajustarse a su nivel competencial inicial, considerar la atención a la diversidad y respetar los distintos ritmos y estilos de aprendizaje.
- Se debe promover que el alumnado participe en su propio aprendizaje y promover la colaboración y el trabajo en equipo.
- Se estimulará la reflexión, el pensamiento crítico y la construcción individual y colectiva del conocimiento, así como el descubrimiento, la investigación, el espíritu emprendedor y la iniciativa personal.
- Se desarrollarán actividades para mejorar las habilidades y métodos de recopilación, la presentación de la información, y para mejorar la expresión oral y escrita.
- Se fomentará la motivación por aprender y por adquirir los conocimientos, las destrezas y las actitudes y valores presentes en las competencias.
- Se emplearán metodologías activas que contextualicen el proceso educativo, que relacionen los contenidos y que faciliten la participación e implicación del alumnado y la adquisición y uso de conocimientos en situaciones reales. Estas metodologías se apoyarán en estructuras de aprendizaje cooperativo.
- Se adoptarán estrategias interactivas que permitan compartir y construir el conocimiento mediante el intercambio verbal y colectivo de ideas y diferentes formas de expresión.
- Se fomentará el enfoque interdisciplinar del aprendizaje por competencias con la realización de trabajos de investigación y actividades integradas.
- Se deben atender a la diversidad en el aula y personalizar los procesos de aprendizaje del alumnado, mediante diferentes tipos de materiales y recursos didácticos.
- Se debe integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje que permiten el acceso a recursos virtuales.

En la Orden de 14 de julio de 2016, aparecen las estrategias metodológicas recomendadas para los bloques 1 y 3 de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

En el bloque 1, Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, se recomienda:

- Introducir el conocimiento histórico, social y cultural de las Matemáticas mediante actividades de investigación, para comprender los conceptos a través de la perspectiva histórica y para contrastar las situaciones sociales de otros tiempos y culturas con las actuales.

- Usar, como herramientas habituales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, recursos TIC, calculadoras y software específico: aplicaciones multimedia de evaluación y autoevaluación, libros interactivos, cuestionarios de corrección, blogs, wikis, gestores de contenido CMS, plataformas de e-learning, repositorios multimedia, aplicaciones en línea...

En el bloque 3 (Geometría), se sugiere:

- Conjugar la metodología tradicional con la experimentación a través de la manipulación y con las posibilidades que ofrecen los recursos digitales interactivos para construir, investigar y deducir propiedades.
- Relacionar la geometría con otros ámbitos (naturaleza, arte, arquitectura, diseño) y destacar su importancia en la historia y cultura de Andalucía.
- Emplear metodologías como:
 - ABP (Aprendizaje Basado en Problemas)
 - Formular preguntas al alumnado a partir de las cuales desarrollará su aprendizaje
 - Técnicas de aprendizaje cooperativo
 - ABI (Aprendizaje Basado en la Investigación) a través de la resolución de problemas
- Usar programas y aplicaciones informáticas de geometría dinámica, para que la enseñanza de la Geometría sea más motivadora, consiguiendo un aprendizaje más efectivo en el alumnado.

ANEXO VI: Actividades y recursos.

A. Actividades iniciales o de diagnóstico.

1.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8., C.E.1.9., C.E.3.3.) **Ficha de evaluación de los conocimientos previos del alumnado y repaso del uso de las coordenadas cartesianas** (Colera, J. et al., 2017).

Qué son los vectores y para qué sirven

Un vector es, sencillamente, una flecha que va de un punto a otro. Veamos, mediante unos ejemplos, para qué pueden servir.



PRIMERA EXCURSIÓN

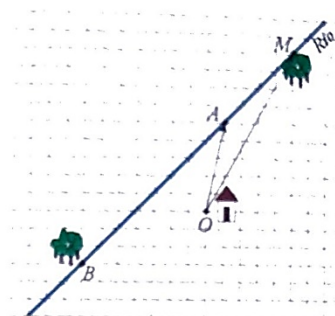
Un grupo de chicas y chicos están en el campo. Su residencia está en el punto O . No lejos de allí pasa un río al que suelen ir de excursión. En él encuentran un lugar maravilloso, M , al cual vuelven con frecuencia.

Por ejemplo, un día hacen el siguiente recorrido:

$$\overrightarrow{OA} \text{ andando} + \overrightarrow{AM} \text{ en barca} = \overrightarrow{OM}$$

Esto se expresa así usando coordenadas:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 5), \overrightarrow{AM} = (4, 4), \overrightarrow{OM} = (5, 9) \rightarrow (1, 5) + (4, 4) = (5, 9)$$



SEGUNDA EXCURSIÓN

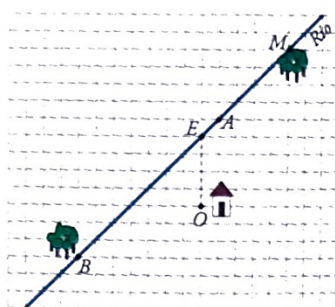
Varios meses después vuelven al mismo sitio, pero advierten un importante cambio: el río está vallado y solo se puede acceder a él desde un embarcadero, E . En consecuencia, deciden hacer excursiones a lo largo del río. Por ejemplo:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} \rightarrow (0, 4) + (1, 1)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EM} \rightarrow (0, 4) + (5, 5)$$

El viaje por el río $\overrightarrow{EM}$ es 5 veces el $\overrightarrow{EA}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + 5 \cdot \overrightarrow{EA} \rightarrow (0, 4) + 5 \cdot (1, 1)$$



El vector $\overrightarrow{OE}$ nos **posiciona** en el río. El vector $(1, 1)$ multiplicado por un número t , nos **desliza** a lo largo del río: $\overrightarrow{OX} = (0, 4) + t \cdot (1, 1)$

Resuelve

1. El día después de la PRIMERA EXCURSIÓN van andando al bosquecillo B , y de allí, en barca, a M .

Describe este último itinerario con vectores, $\overrightarrow{OB} + \dots$, y con coordenadas.

2. En la SEGUNDA EXCURSIÓN, los viajes por el río están descritos así: $\overrightarrow{OX} = (0, 4) + t(1, 1)$.

a) Señala a qué lugares se llega para $t = 4$, $t = -1$ y $t = 0$.

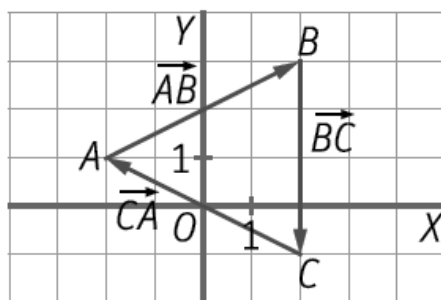
b) ¿Qué valor hay que dar a t para llegar al bosquecillo B ?

B. Actividades de aprendizaje, desarrollo y consolidación

Representación de vectores en el plano

1.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1,1)$, $B(-2,7)$, $C(6,0)$ y $D(3,6)$. Observa que son iguales o equipolentes (Colera, J. et al., 2017).

2.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$ (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).



3.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) Las coordenadas del vector $\vec{u}$ son $(-5,4)$ y las de su origen, el punto A $(4,-6)$. Calcula las coordenadas de su extremo, B (Colera, J. et al., 2017).

4.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) Calcula el módulo y el argumento del vector $\overrightarrow{AB}$ (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):

- a) Origen A $(-1,0)$ y extremo B $(3,5)$
- b) Origen A $(7,-4)$ y extremo B $(-2,3)$

5.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) Dado un vector $\vec{u}$, con origen en $A(-1,0)$ y extremo en $B(3,5)$, di (Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):

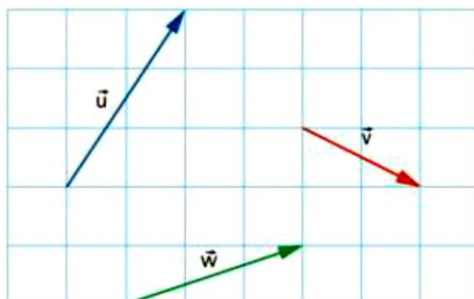
- a) Un vector equipolente al vector $\vec{u}$.
- b) Un vector opuesto a $\vec{u}$.
- c) Un vector con la misma dirección y sentido, pero diferente módulo.

6.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) Los vértices de un triángulo son A $(3,5)$, B $(10,0)$ y C $(4,-1)$ (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

- a) Sitúa en el sistema de coordenadas los vértices del triángulo y representa gráficamente los vectores que forman cada lado.
- b) Halla la longitud de cada lado.

Operaciones con vectores

7.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Realiza gráficamente las operaciones pedidas con los siguientes vectores** (Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):



- | | |
|------------------------|-----------------------------------|
| a) $\vec{u} + \vec{v}$ | d) $\vec{u} - \vec{w}$ |
| b) $\vec{u} - \vec{v}$ | e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ |
| c) $\vec{v} + \vec{w}$ | f) $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ |

8.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8., C.E.1.9., C.E.3.3.) **Si $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 3)$, realiza las siguientes operaciones** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| a) $\vec{u} + \vec{v}$ | b) $5\vec{u} + \vec{w}$ | c) $\vec{v} + \vec{w}$ | d) $2\vec{v} + 3\vec{w}$ |
|------------------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|

9.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8., C.E.1.9., C.E.3.3.) **Dados los vectores $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (-6, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0)$, indica si son linealmente dependientes** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ | b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ | c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$ |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Puntos alineados

10.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Comprueba si los puntos A(-2,3), B(-2,1) y C(-5,5) están alineados** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

11.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Averigua el valor de a para que los puntos R (2, 7), S (5, -1) y Q (a, -25) estén alineados** (Colera, J., et al., 2017).

12.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Averigua qué relación deben cumplir x e y para que A (0, 1), B (2, 5) y P (x, y) estén alineados** (Colera, J., et al., 2017).

Punto medio de un segmento

13.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Halla las coordenadas del punto medio de cada segmento** (Colera, J., et al., 2017):

a) A (-2, 5), B (4, 1)

c) E (1, 4), F (7, 2)

b) C (7, -3), D (-5, 1)

d) G (-3, 5), H (4, 0)

Simétrico de un punto respecto a otro

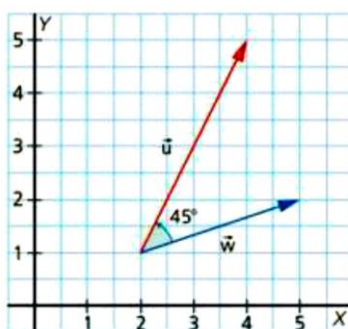
14.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos** (Colera, J., et al., 2017):

a) A (4, -1), P (-7, 2)

b) A (2, 4), P (5, -1)

Producto escalar de vectores y ángulo formado por dos vectores

15.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Considerando los vectores de la figura** (Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):



a) **Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ utilizando el ángulo que forman ambos vectores.**

b) **Que tu compañero calcule el mismo producto escalar utilizando las coordenadas de ambos vectores. Comprobad que el resultado coincide.**

16.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Considerando los vectores $\vec{u} = (10, 4)$, $\vec{v} = (-3, -1)$, $\vec{w} = (6, -2)$, $\vec{z} = (12, -6)$ y $\vec{t} = (2, -1)$ y efectúa las operaciones siguientes** (Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$

c) $\vec{w} \cdot \vec{v}$

d) $\vec{z} \cdot \vec{u}$

e) $\vec{z} \cdot \vec{t}$

17.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Halla el ángulo que forman los siguientes vectores** (Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):

a) $\vec{u} = (12, -15)$, $\vec{v} = (-10, 9)$

c) $\vec{u} = (-15, 30)$, $\vec{v} = (-8, -4)$

b) $\vec{u} = (-2, -3)$, $\vec{v} = (5, 9)$

d) $\vec{u} = (18, 30)$, $\vec{v} = (12, 2)$

18.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (m, 2m - 1)$ y $\vec{v} = (1 - m, m)$ (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):**

- a) Sean perpendiculares.
- b) Sean paralelos.
- c) Tengan un módulo de 1.

19.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.4., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Calcula los ángulos del triángulo A(-1, 0), B(2, -1) y C(4, 2). ¿Suman 180°?** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

Ecuaciones de la recta

20.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua, general, punto-pendiente y explícita de las rectas que pasan por** (Colera, J., et al., 2017):

a) M (-2, 1), N (4, 5)

c) R (2, 5), S (8, 5)

b) P (0, 0), Q (3, -2)

d) T (-2, 1), U (-2, -2)

21.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Calcula en todas sus formas posibles la ecuación de la recta que** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):

- a) **Pasa por el punto A(5, -2) y lleva dirección del vector $\vec{u} = (1, -3)$.**
- b) **Pasa por el punto A(-5, 4) y tiene pendiente $m = -2$.**
- c) **Pasa por los puntos A(-1, 3) y B(5, -2).**

Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.

Posición relativa de dos rectas en el plano

22.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.4., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Estudia la posición relativa de las rectas y señala el punto de corte, en el caso de que sean secantes** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

a) r: $2x + y - 5 = 0$ y s: $4x + 3y = 11$

b) r: $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4}z = 0$ y s: $2x - 3y - 5 = 0$

23.- (C.E.1.1., C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.4., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Estudia la posición relativa de las rectas y, en el caso de que sean secantes, halla el punto de intersección** (Colera, J., et al., 2017; Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016).

- a) $r: y - 5 = 2 \cdot (x - 9)$ y $s: y + 9 = -3 \cdot (x - 2)$
- b) $r: \frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2}$ y $s: \begin{cases} x = 3 + 4k \\ y = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$
- c) $r: \frac{x-3}{8} = \frac{y+5}{-6}$ y $s: 3x + 4y - 2 = 0$
- d) $r: 3x - 2y - 14 = 0$ y $s: \text{pasa por } (1, -2) \text{ y por } (10, 1).$
- e) $r: \text{pasa por } (2, -1) \text{ y } (8, 2)$ y $s: \text{su pendiente es } 1/2 \text{ y pasa por } (0, -2).$

24.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.4., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Halla** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017; Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):

- a) La ecuación de la recta que es paralela a la recta $t: 4x + y = 0$ y que pasa por el punto $P (-3, 5)$.
- b) La ecuación de la recta que es paralela a la recta $r: 3x - 4y = 12$ y que pasa por el punto $P (5, -5)$.
- c) La ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $u: 5x - 3y - 6 = 0$ y que pasa por el punto $Q (4, -2)$.
- d) La ecuación de la recta perpendicular a $r: -2x - 4y = 5$ y que pasa por el origen de coordenadas.

25.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Dada la recta de ecuaciones paramétricas:**

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad (\text{Alcaide, F., Hernández, J., \& Serrano, 2017}).$$

- a) Calcula su ecuación general.
- b) Halla la recta paralela a r que pasa por $A (-1, 4)$.
- c) ¿Cuál es la ecuación de la perpendicular a r que pasa por $(-2, 2)$?

26.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A (-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

27.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Comprueba si las rectas r y s son perpendiculares** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):

a) $r: \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = -6$ y $s: \frac{5}{6}x - \frac{3}{5}y = -8$

b) $r: \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 0$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - \frac{9}{8}t \end{cases}$

$$c) r: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$$

28.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.4., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Representa dos rectas que pasen por el punto $(-4, 2)$, una paralela al eje X y otra paralela al eje Y** (Colera, J., et al., 2017).

29.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.3.3.) **Halla la ecuación de la recta paralela al eje X que corte a la recta $2x - 3y = 5$ en el punto de abscisa $x = 1$** (Colera, J., et al., 2017).

Distancia punto-recta y distancia entre dos rectas paralelas

30.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Calcula la distancia existente entre los siguientes elementos** (Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M., & Romero Torralba, 2016):

- a) $P(-5, 1)$ y $r: 3x + 2y - 12 = 0$
- b) $P(-25, -30)$ y $r: 15x - 12y - 55 = 0$
- c) $P(50, 20)$ y $r: 8x + 9y - 18 = 0$
- d) $P(33, -17)$ y $r: -12x - 19y + 78 = 0$
- e) $r: 8x + 5y - 12 = 0$ y $s: 8x + 5y + 10 = 0$
- f) $r: -x - y + 9 = 0$ y $s: -x - y - 2 = 0$

Problemas de síntesis

31.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Calcula el punto simétrico de** (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017):

- a) $A(3, -4)$ respecto de la recta $r: 2x + y = 3$.
- b) $A(1/2, 1/3)$ respecto de la recta $r: \frac{1}{2}x + y$

32.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **Dados la recta $r: x - 2y + 1 = 0$ y el punto $A(-1, 5)$, halla el punto simétrico de A respecto de r** (Colera, J., et al., 2017).

33.- (C.E.1.1, C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) **En el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ y $C(4, 0)$, hallar** (Colera, J., et al., 2017):

- a) La ecuación de la altura h , que parte del vértice B .
- b) La ecuación de la mediatriz t , del lado AB .
- c) La ecuación de la mediana r , que parte de C .

34.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) En el triángulo de vértices A (1, 5), B (4, 0) y C (−2, −2), halla (Colera, J., et al., 2017):

- La ecuación de la altura que parte de A.
- La ecuación de la altura que parte de B.
- El punto de corte de las alturas (ortocentro).

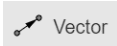
35.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.3.) En el triángulo de vértices A(−1, 1), B (3, 4) y C (3, 0), halla (Colera, J., et al., 2017):

- La ecuación de la mediatriz de BC.
- La ecuación de la mediatriz de AC.
- El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

C. Actividades y recursos para fomentar el uso de las TIC en el aula

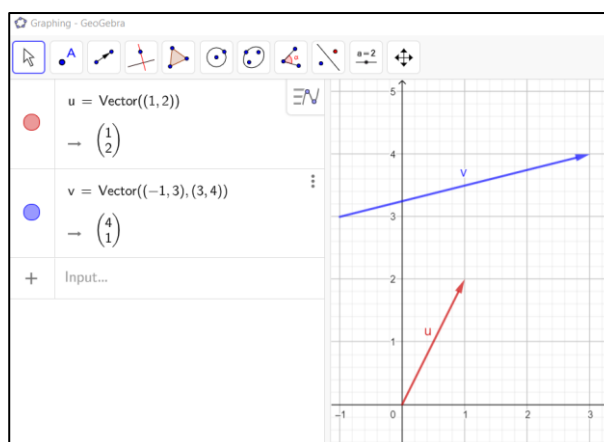
Tutorial: Geometría analítica con GeoGebra (GeoGebra, 2021; Mejía Sánchez-Bermejo, D., et al., 2016).

Representación de vectores

1º Procedimiento: abrir la **Vista Gráfica**, seleccionar el botón  para dibujar el vector, pinchar en un punto (origen) y luego en otro (extremo).

2º Procedimiento. Se pueden dibujar vectores introduciendo los siguientes comandos en la barra de **Entrada**:

- Vector(<punto>):** para dibujar un vector de posición, es decir, un vector con origen en (0,0) y extremo en el punto indicado. Por ejemplo: Vector((1,2))
- Vector(<punto inicial>,<punto final>):** para dibujar un vector con origen el punto inicial y extremo el punto final. Por ejemplo: Vector((-1,3),(3,4))

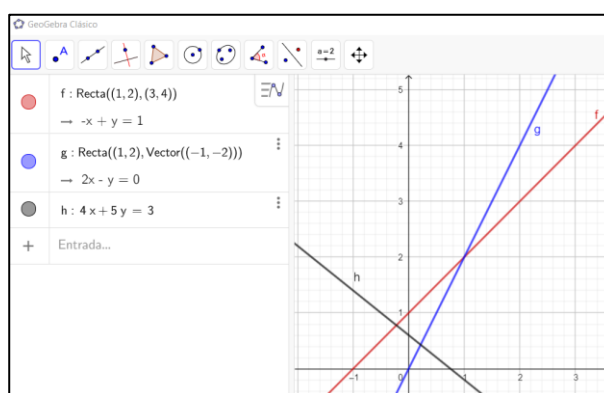


Representación de rectas

1º Procedimiento: abrir la **Vista Gráfica**, seleccionar el botón  para dibujar la recta hacer click en dos puntos.

2º Procedimiento. Se pueden dibujar rectas introduciendo los siguientes comandos en la barra de **Entrada**:

- **Recta(<punto>,< punto>):** dibuja la recta que pasa por los dos puntos indicados. Por ejemplo: Recta((1,2),(3,4)).
- **Recta(<punto>,<vector director>):** dibuja la recta que pasa por el punto indicado y su dirección es la del vector indicado. Por ejemplo: Recta((1,2),Vector((-1,-2))).
- **Escribiendo la ecuación de la recta.** Por ejemplo, c: $4x+5y=3$.



Relaciones métricas

- **EstánAlineados(<punto>,< punto>,< punto>):** devuelve *false* si no lo están y *true* si lo están.
- **Distancia(< punto>,< punto>):** calcula la distancia entre dos puntos.
- **Distancia(< punto>,< recta>):** calcula la distancia entre un punto y una recta.
- **Distancia(<recta>,< recta>):** calcula la distancia entre dos rectas paralelas.
- **Distancia entre dos elementos, mediante el botón**  **Distancia o Longitud**.
- **PuntoMedio(< punto>,< punto>):** da las coordenadas del punto medio entre dos puntos.  **Punto medio o Centro**.
- **Mediatriz(<Punto> ,<Punto>):** traza la mediatriz del segmento definido por los puntos indicados. También se obtiene con el botón  **Mediatriz**.
- **Mediatriz(<Punto> ,<Punto> ,<Dirección>):** traza la mediatriz del segmento definido por los puntos indicados que es perpendicular a la dirección dada. <Dirección> puede ser un vector, un eje, una recta o un segmento. También se puede utilizar el botón  **Mediatriz**.

- **Ángulo(<Recta>,<Recta>):** devuelve el ángulo que forman los vectores directores de las rectas.

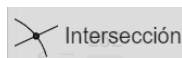
Producto escalar y ángulo entre dos vectores

- **Ángulo(<Vector>):** devuelve el ángulo entre el vector y el eje X. Por ejemplo, $\text{Ángulo}(\text{Vector}((1, 1)))$ devuelve 45° o el valor correspondiente en radianes.
- **Ángulo(<Vector>, <Vector>):** devuelve el ángulo que forman los dos vectores.
- **ProductoEscalar(<Vector>, <Vector>)**

Posición relativa de dos rectas en el plano

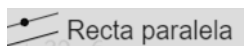
- **Interseca[<Recta>, <Recta>]:** establece la intersección entre dos rectas.

También se puede realizar con el botón



Paralelismo y perpendicularidad

- **Recta(<Punto>, <Recta(paralela)>):** crea la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a la recta dada. También con el botón

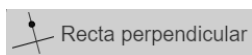


- **Perpendicular(<Punto>, <Recta>):** crea la recta perpendicular por el punto a la recta dada. Por ejemplo: $\text{Perpendicular}((-2, -3), -3x + 4y = -6)$ crea la recta d: $-4x - 3y = 17$, perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto $(-2,-3)$.

También se obtiene con el botón

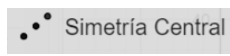


- **Perpendicular(<Punto>, <Vector>):** crea la recta por el punto perpendicular al vector dado. Por ejemplo: $\text{Perpendicular}((-2,0) , ((5,3),(1,1)))$. También se obtiene con el botón

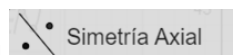


Simetría

- **Simétrico de un punto respecto a otro,** con el botón



- **Simétrico de un punto respecto a una recta,** con el botón



Relación de ejercicios con GeoGebra (CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.5., CE.1.8., CE.1.9., C.E.1.10. C.E.1.11., C.E.1.12. CE.3.3.)

Operaciones con vectores

1.- Realiza con el uso de GeoGebra las siguientes operaciones con vectores, siendo $\vec{u} = (-3,2)$, $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (0,3)$:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $2\vec{v} + 3\vec{w}$

- f) w: es perpendicular a la recta u: $5x - 3y - 6 = 0$ y pasa por el punto Q (4, -2).
 g) a: es perpendicular a r: $-2x - 4y = 5$ y pasa por el origen de coordenadas.

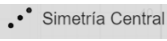
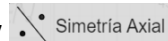
10.- Mediante GeoGebra, estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla su punto de corte, si lo hubiese.

- a) r: $2x - 5y + 7 = 0$ y s: $x - 2y - 2 = 0$
 b) r: $6x + 4y - 12 = 0$ y s: $3x + 2y - 6 = 0$
 c) r: $x - 5y + 3 = 0$ y s: $3x - 15y + 8 = 0$

Simetría

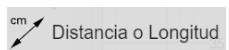
11. Mediante los botones de GeoGebra, halla el punto simétrico de:

- a) A(4, -1) respecto del punto P (-7, 2)
 b) B(2, 4) respecto del punto Q (5, -1)
 c) C(3, -4) respecto de la recta r: $2x + y = 3$
 d) D(1/2, 3/4) respecto de la recta s: $\frac{1}{2}x + y$

Nota: puedes ayudarte de los botones  Simetría Central y  Simetría Axial.

Distancias

12.- Determina la distancia entre los siguiente elementos, usando los comandos **Distancia(<punto>,<punto>)**, **Distancia(< punto>,< recta>)** y **Distancia(<recta>,< recta>)**. Después comprueba los resultados obteniendo la distancia con el botón



Actividades de síntesis (CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.4., C.E.1.5., CE.1.8., CE1.9., C.E.1.10., C.E.1.11., C.E.1.12. CE.3.3.)

13.- Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(0, 3) y por el punto de corte de r: $8x - 5y + 2 = 0$ y s: $2x + y - 4 = 0$ (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

14.- Calcula el triángulo simétrico del que tiene como vértices A(-2, 0), B(1, 4) y C(2, -2) respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

15.- Los lados de un triángulo de vienen dados por las rectas $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$ (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

- a) Halla las coordenadas de los vértices.
 b) Halla las ecuaciones de las medianas y su punto de corte (baricentro).
 c) Halla las ecuaciones de las alturas y su punto de corte (ortocentro).
 d) Halla las ecuaciones de las mediatrices y su punto de corte (circuncentro).
 e) ¿Están alineados los tres centros del triángulo? La recta que une estos tres centros se denomina recta de Euler. Investiga sobre esta línea.

D. Actividades de tipo ABP

Una de las sesiones de clase se dedica a realizar una actividad de tipo ABP (Aprendizaje Basado en Problemas).

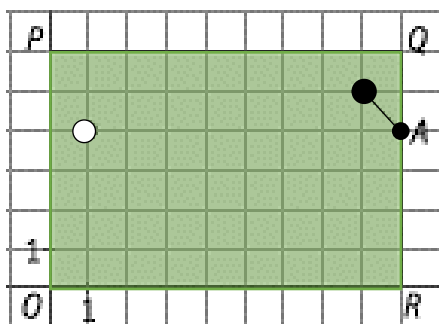
Actividad: El tiro adecuado (CE.1.1., CE.1.2., CE.1.3., C.E.1.4., C.E.1.5., C.E.1.6, C.E.1.7., CE.1.8., CE1.9., C.E.1.10., C.E.1.11., C.E.1.12. CE.3.3.)

❖ **Enunciado:**

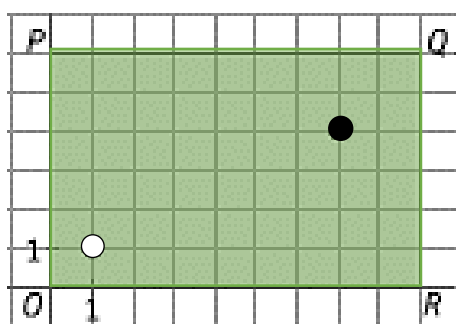
En el billar, cualquier jugador debe recordar que se cumple el principio de reflexión: cuando una bola golpea un lado de la mesa, el ángulo que forma su trayectoria con el lado al llegar es igual al ángulo que forma con él al rebotar (Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).

Observa estas dos situaciones:

a)



b)

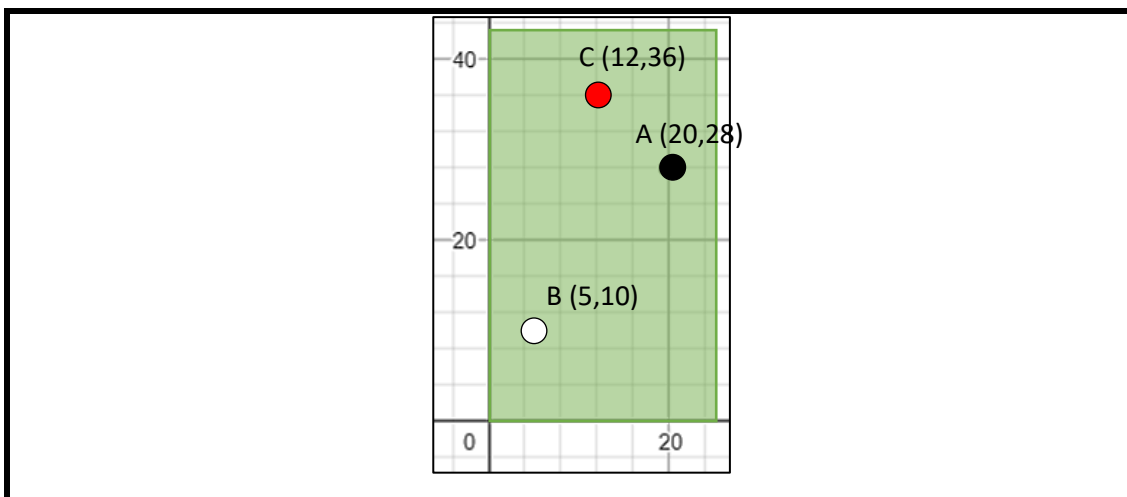


El objetivo es golpear la bola negra y lograr que choque con la bola blanca, pero rebotando previamente en los lados QR y RO de la mesa de billar. Por ejemplo, se ha marcado el punto A que es donde la bola negra debe rebotar en el lado QR.

1. Utiliza el sistema de referencia para calcular la trayectoria adecuada a cada situación.

2. Indica las coordenadas de los puntos de rebote y los ángulos correspondientes en cada caso.

3. Con un solo golpe sobre la bola A, se debe golpear primero a la bola B y después a la bola C. Si se consideran dos lados de la mesa como ejes de coordenadas, las coordenadas de las bolas son A(20, 28), B(5, 10) y C(12, 36). ¿Con qué ángulo, respecto de la trayectoria seguida por A cuando golpea a B, debe salir la bola para golpear a la bola C?(Alcaide, F., Hernández, J., & Serrano, 2017).



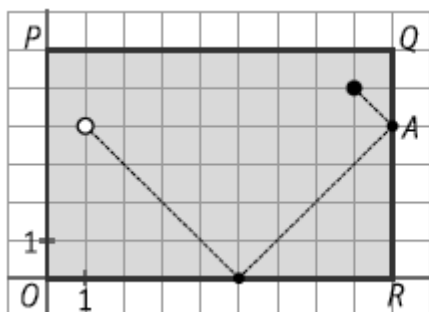
❖ **Materiales y recursos:**

- ❖ Papel, lápiz, reglas.
- ❖ Rotuladores.
- ❖ Calculadora.
- ❖ Ordenadores con el software GeoGebra.

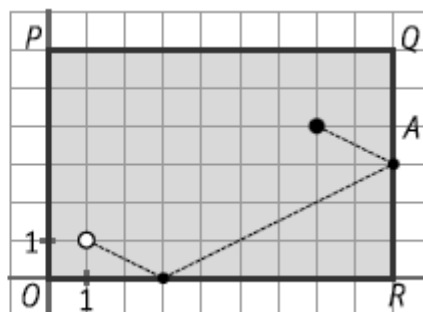
❖ **Posibles soluciones:**

Apartado 1:

a)



b)



Apartado 2:

- ❖ Situación a): A(9,4) y B(5,0)

$$\text{Ángulo en el lado QR: } \cos(\overline{AB}, \overline{AR}) = \frac{-4 \cdot 0 + 4 \cdot 4}{4\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ radianes} \rightarrow 45^\circ$$

$$\text{Ángulo en el lado OR: } \cos(\overline{BA}, \overline{BR}) = \frac{4 \cdot 4 + 4 \cdot 0}{4\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ radianes} \rightarrow 45^\circ$$

- ❖ Situación b): A(9,3) y B(3,0)

$$\text{Ángulo en el lado QR: } \cos(\overline{AB}, \overline{AR}) = \frac{-6 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3)}{3\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,4472 \text{ radianes}$$

$$\rightarrow \arcsin 0,4472 = 63^\circ 26'$$

$$\text{Ángulo en el lado QR: } \cos(\overline{BA}, \overline{BR}) = \frac{6 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{3\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,8944 \text{ radianes}$$

$$\rightarrow \arcsin 0,8944 = 26^\circ 34'$$

Apartado 3:

Opción A: resolución algebraica

Se calcula la recta f, que pasa por los puntos A(20,28) y B(5,10):

$$y - 28 = \frac{10 - 28}{5 - 20}(x - 20)$$

$$f: 5y - 6x = 20$$

Se halla el punto de corte de la recta f con el eje y, el punto D:

$$5y = 20 ; y = 4 \rightarrow D(0,4)$$

Se calcula el ángulo que forman los vectores $\overline{DC}=(12,32)$ y $\overline{DB}=(5,6)$:

$$\cos(\overline{DC}, \overline{DB}:) = \frac{12 \cdot 5 + 32 \cdot 6}{\sqrt{12^2 + 32^2} \cdot \sqrt{5^2 + 6^2}} = \frac{252}{266,95} = 0,94 \text{ radianes} \rightarrow$$

$$\arcsin 0,94 = 19,25^\circ$$

Opción B: resolución gráfica mediante GeoGebra

1º Se traza la recta f, que pasa por los puntos A y B y corta al eje Y en el punto D(0,4).

2º Se trazan los vectores $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ y se calcula el ángulo que forman mediante el comando $\text{Ángulo}(\langle \text{vector} \rangle, \langle \text{vector} \rangle)$.

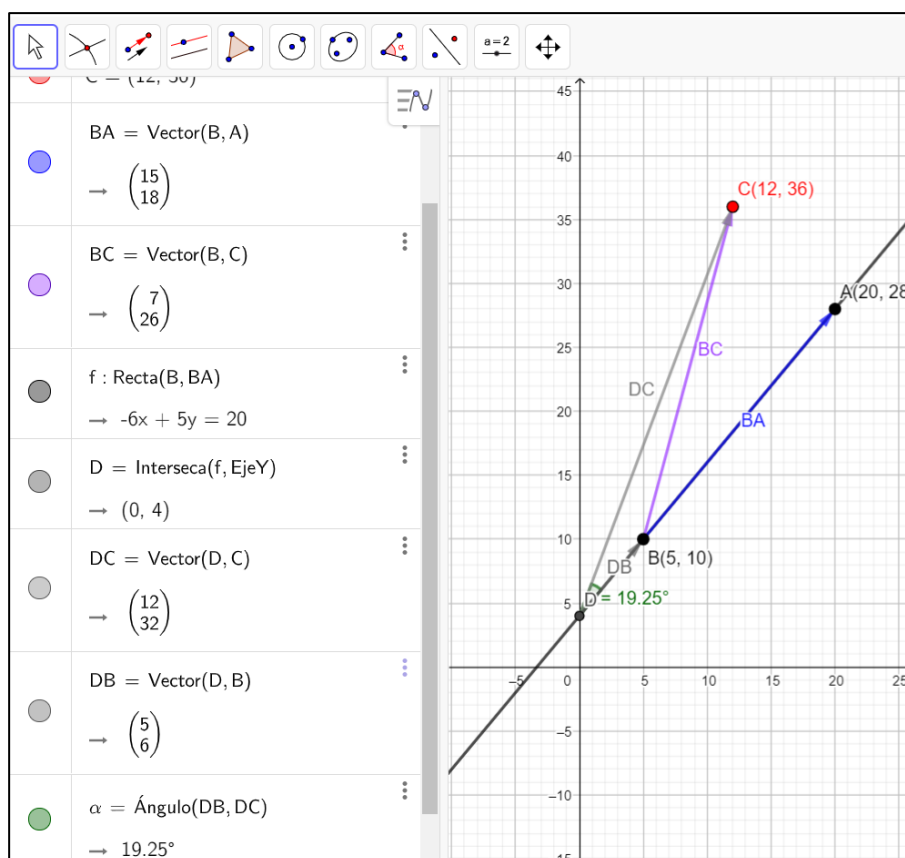


Figura 19. Resolución en GeoGebra del apartado 3 de la actividad ABP (Elaboración propia).

❖ Plan de clase

1. Fase de inicio e introducción de la tarea.

Se introduce la tarea en clase, se da una copia de la misma a cada estudiante y se proyecta en la pizarra digital. Se anuncia que la clase de hoy será diferente:

El objetivo de la sesión de hoy es que uséis todo lo que habéis aprendido en este tema para resolver un problema, al que podríais enfrentaros en la realidad, sobre todo aquellos a los que os guste jugar al billar. Resulta que estamos jugando una partida de billar, ya solo quedan la bola negra y la blanca en la mesa y tenemos que conseguir golpear con la bola negra choque contra un lado de la mesa y golpee la bola blanca.

Hay muchas formas de abordar el problema, y no hay una única solución correcta. Podéis dibujar en el papel o usar GeoGebra como creéis que tendría que ser la trayectoria de la bola negra.

Una vez que tengáis clara la trayectoria de la bola negra y la hayáis dibujado, tenéis que indicar los puntos en los que la bola rebota y con qué ángulo lo hace. Acordaos de que se tiene que cumplir el principio de reflexión, como dice el enunciado del problema.

Se da un tiempo a los alumnos para que lean, individualmente y en silencio, el primer apartado del problema y piensen cómo empezarían a trabajar en él:

Leed el problema y pensad unos minutos qué os piden, las condiciones que os dan, y cómo empezaríais a trabajar. Fijaos bien en el dibujo dado en el enunciado del problema, mirad las coordenadas de las bolas, os será de gran ayuda.

Se pide a los alumnos/as que pregunten sus dudas sobre este apartado y se les responde intentando no dar ninguna pista que pueda condicionarles. También hay que evitar que alguno de los alumnos manifieste una posible solución que afecte al resto de la clase.

Ya hemos terminado la primera partida, pero nuestro contrincante nos pide la revancha. Después de un rato, la partida queda como veis en el dibujo, solo quedan tres bolas, la bola negra y otras dos bolas. Con un solo golpe sobre la bola A, queremos golpear la bola B y que ésta choque con la bola C. ¿Con qué ángulo creéis que choca la bola B con la bola C, respecto a la trayectoria de la bola A?

De nuevo se da unos minutos a los alumnos/as para que lean y piensen el problema y puedan preguntar las dudas que les surjan.

2. Fase de exploración y desarrollo de la tarea en parejas

En esta fase se pide a los alumnos que se organicen en grupos y se les comenta los recursos que tienen disponibles para la resolución del problema. Se deja este material a un lado del aula para que los alumnos puedan decidir si lo usan o no.

Se concede tiempo a los alumnos para que trabajen los problemas.

Bien, ahora voy a daros veinte minutos para que trabajéis en los problemas por parejas. Luego os preguntaré sobre las estrategias que hayáis usado para abordar el problema.

Mientras los alumnos trabajan en grupo, se circula entre ellos, viendo cómo afrontan la tarea, y escuchando con atención sus argumentaciones. Hay que evitar intervenir muy pronto, para que los estudiantes tengan tiempo de organizar su trabajo y de empezar a llevarlo a cabo.

Al principio de esta fase, hay que darle sentido al trabajo en grupo y consejos estratégicos generales como:

- *Recurrid a vuestro compañero si tenéis algún tipo de duda sobre lo que se pide.*
- *Pensad despacio, no os precipitéis.*
- *¿Qué sabéis?*
- *¿Qué intentáis averiguar?*
- *No pidáis ayuda demasiado pronto; intentad resolverlo entre vosotros.*

Una vez que empiecen a trabajar, hay que prestar atención a cómo evoluciona cada grupo. Si se apartan de la tarea, están atascados o están cometiendo errores importantes, hay que intervenir, evitando introducir información o posibles soluciones.

Se deben formular cuestiones que ayuden a los alumnos/as a pensar sobre lo que están haciendo, como:

- *¿Qué estáis intentando hacer? Explicadlo con vuestras propias palabras.*
- *¿Qué habéis intentado hasta ahora?*
- *¿Dónde habéis visto algo igual?*
- *¿Qué hemos visto en este tema que os pueda ser de ayuda?*
- *Dibujad la trayectoria que penéis que tiene más sentido, recordad que el ángulo con el que incide debe ser igual al ángulo con el que rebota.*
- *¿Podéis explicar cómo este paso sigue a este paso?*

Si se atascan en el apartado 1, el profesor puede recomendar representar gráficamente diferentes trayectorias que podría seguir la bola negra, hasta encontrar la que parezca más coherente. También podrían utilizar GeoGebra para situar los puntos donde se ubican las bolas y donde rebota la bola negra (el punto A, fijo en la situación a, y un punto arbitrario en el eje x), dibujar los vectores que representan la trayectoria de la bola y mover los puntos de rebote hasta encontrar la solución.

Una vez que pasen al apartado 2, si tienen problemas se les puede aconsejar representar el sentido de los vectores y calcularlos. Si es necesario, se les puede recordar el concepto de argumento de un vector.

En el apartado 3, pueden cometer el error pensar que la bola B, tras recibir el impacto de la bola A, sigue una trayectoria directa hacia la bola C, sin chocar antes con la pared de la mesa.

3. Fase de debate y discusión en grupo: los alumnos comunican y transmiten sus distintos planteamientos.

Cuando la mayoría de los alumnos haya avanzado de forma significativa con la tarea, se pregunta a los distintos grupos sobre su planteamiento del problema y se apuntan sus ideas en la pizarra.

Ahora vamos a discutir los diversos planteamientos que habéis hecho, y a comentar cuáles os parecen más interesantes.

Se les pregunta a varios grupos:

- *¿Habéis conseguido acabar el problema? ¿Dónde os habéis quedado atascados? Explicad lo pensado hasta ese punto.*
- *¿Cómo habéis decidido abordar el problema? ¿Por qué?*
- *¿Qué habéis averiguado? ¿Cómo lo habéis hecho?*
- *¿Qué método habéis utilizado?*

Mientras los alumnos/as exponen sus ideas, se le pide al resto de la clase que comente las ventajas y desventajas de cada planteamiento, se les pregunta si entienden a sus compañeros y si podrían ayudarlos y cómo:

- *¿Alguien podría ayudarlos a salir del punto donde se han quedado?*
- *¿Está bien este planteamiento? ¿Por qué?*
- *¿Habéis comprendido la explicación de vuestros compañeros? ¿La podrías repetir con tus palabras?*
- *¿Creéis que habría otra forma de resolverlo?*
- *¿Creéis que hay más formas de resolución? ¿Por qué?*
- *¿Qué método os parece que es el mejor? ¿Por qué?*
- *¿Qué método parece más rápido?*

4. Fase de sistematización del aprendizaje matemático: cierre de la situación.

Por último, se hace una síntesis de la clase. Aprovechando las anotaciones de los planteamientos, se hace un mapa conceptual en el que se identifican los principales conocimientos matemáticos que aparecen al resolver la actividad, así como los procesos ejecutados por los alumnos/as.

Entre los conocimientos matemáticos más importantes que aparecen durante la resolución de la actividad, que destacar:

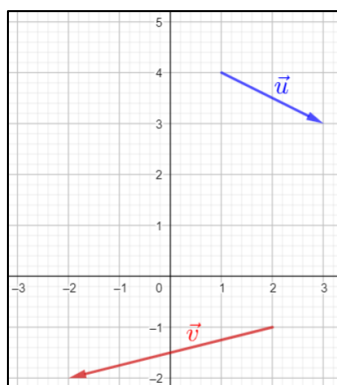
- Representación de vectores y rectas en el plano.
- Argumento de un vector.
- Posición relativa de dos rectas en el plano.
- Ángulo que forman dos vectores.

Entre los procesos, se identifican:

- Formulación de hipótesis o conjetura, sobre la trayectoria que debe seguir la bola negra.
- Justificación de hipótesis o conjetura, comprobar que se cumple el principio de reflexión y que choca con la bola blanca.
- Demostración, argumentación y prueba.
- Comunicación.

E. Examen de la unidad

1.- (CE.1.2., CE.1.5., C.E.3.3.) (1 punto) Dados los vectores de la figura, indica:



- a) (0,25 puntos) Sus componentes.
- b) (0,25 puntos) Su módulo y argumento.
- c) (0,25 puntos) Indica un vector equipolente a $\vec{u}$ y represéntalo.
- d) (0,25 puntos) Indica un vector opuesto a $\vec{v}$ y represéntalo.

2.- (C.E.1.2., C.E.1.5., C.E.3.3.) (1 punto) Dados los vectores: $\vec{u}(5,1)$, $\vec{v}(1,-2)$, $\vec{w}(4,-2)$, $\vec{z}(1,a)$

- a) (0,25 puntos) Calcula de forma gráfica y analítica $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ y $-3\vec{v}$.
- b) (0,25 puntos) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- c) (0,25 puntos) Calcula el valor de a para que $\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{z}$.
- d) (0,25 puntos) Realiza la siguiente operación: $2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w} - (3\vec{u} - \vec{v})$

3.- (C.E.1.2., C.E.1.5., C.E.3.3.) (1,5 puntos) Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos A $(-3,4)$ y B $(5,-1)$ en todas sus formas: vectorial, paramétricas, continua, general o implícita, explícita y punto-pendiente). Comprueba si el punto C $(-1,3)$ pertenece a la recta. Indica el vector director, el vector normal y la pendiente de la recta r .

4.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.5., C.E.3.3.) (1 punto) Calcula m para que los puntos R $(5, -2)$, S $(-1,1)$ y T $(2, m)$ estén alineados.

5.- (C.E.1.2., C.E.1.4., C.E.1.5., C.E.3.3.) (1 punto) Dadas dos rectas $r: mx + 3y - 1 = 0$ y $s: 2x + (m + 1)y + 2 = 0$, calcula el valor de m para que sean:

- a) (0,25 puntos) Paralelas.
- b) (0,25 puntos) Perpendiculares.
- c) (0,25 puntos) Secantes.
- d) (0,25 puntos) ¿Hay algún valor de m que las haga coincidentes?

6.- (C.E.1.2., C.E.1.3., C.E.1.5., C.E.3.3.) (2 puntos) Dada la recta de ecuación $r: 2x - y + 1 = 0$ y el punto A $(6, -2)$, calcula:

- a) (0,5 puntos) La ecuación de la recta s que pasa por el punto A $(6, -2)$ y es paralela a r .
- b) (0,5 puntos) La ecuación de la recta t que pasa por el punto A $(6, -2)$ y es perpendicular a r .

c) (0,5 puntos) El punto M de intersección entre r y t .

d) (0,5 puntos) El punto simétrico de A respecto de M.

7.- (C.E.1.2., CE.1.5., C.E.1.9., C.E.3.3) (2,5 puntos) Dado el triángulo de vértices A(1,3), B(3,-1) y C(-3,-2):

a) (0,5 puntos) Halla la ecuación de la altura h que parte del vértice B.

b) (0,5 puntos) Halla la longitud de la altura que parte del vértice B.

c) (1 punto) Halla la ecuación de la mediatriz t , del lado AB.

d) (0,5 puntos) La ecuación de la mediana r , que parte de C.

Solución

1.-

a) $\vec{u} = (3,3) - (1,4) = (2, -1)$

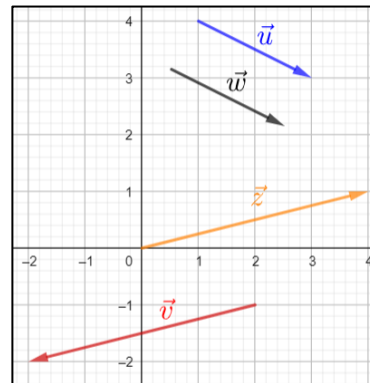
$\vec{v} = (-2, -2) - (2, -1) = (-4, -1)$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; $\alpha = \arctg \frac{u_2}{u_1} = \arctg \frac{-1}{2} \rightarrow \alpha = 26,57^\circ$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$; $\beta = \arctg \frac{v_2}{v_1} = \arctg \frac{-1}{-4} \rightarrow \beta = 14,04^\circ$

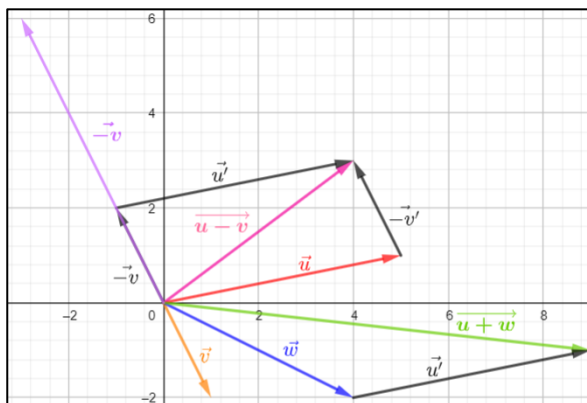
c) $\vec{w} = (2, -1)$

d) $\vec{z} = -\vec{v} = (4,1)$



2.-

a)



$$\vec{u} - \vec{v} = (5,1) - (1,-2) = (4,3)$$

$$\vec{u} + \vec{w} = (5,1) + (4,-2) = (9,-1)$$

$$-3\vec{v} = -3 \cdot (1,-2) = (-3,6)$$

b)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{(5,1) \cdot (1,-2)}{\sqrt{5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}}\right) \rightarrow \alpha = 74,74^\circ$$

c) Cuando dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es igual a cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{z} = (1, -2) \cdot (1, a) = 1 - 2a = 0 \rightarrow a = 0,5$$

d)

$$2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w} - (3\vec{u} - \vec{v})$$

$$= 2 \cdot (5,1) - 5 \cdot (1,-2) + 4 \cdot (4,-2) - (3 \cdot (5,1) - (1,-2))$$

$$x: 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - (3 \cdot 5 - 1) = 10 - 5 + 16 - 14 = 7$$

$$y: 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) - (3 \cdot 1 - (-2)) = 2 + 10 - 8 - 5 = -1$$

$$2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w} - (3\vec{u} - \vec{v}) = (7, -1)$$

3.-

- Vector director: $\overline{AB} = \vec{u} = (5, -1) - (-3, 4) = (8, -5) = (u_1, u_2)$
- Vector normal: $\vec{n} = (u_2, -u_1) = (-5, -8)$
- Pendiente: $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-5}{8} = -0,63$
- Ecuación vectorial: $(x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2) = (-3, 4) + t(8, -5)$, con $t \in \mathbb{R}$
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a_1 + t u_1 \\ y = a_2 + t u_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- Ecuación continua: $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}; \frac{x+3}{8} = \frac{y-4}{-5}$
- Ecuación general:

$$\frac{x+3}{8} = \frac{y-4}{-5}; -5(x+3) = 8(y-4); -5x-15 = 8y-32 \rightarrow 5x+8y-17=0$$

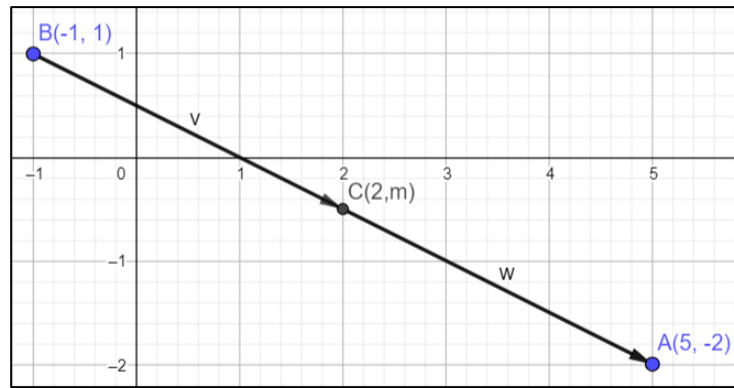
- Ecuación explícita: $5x+8y-17=0 \rightarrow y = -\frac{5}{8}x + \frac{17}{8}$
- Ecuación punto-pendiente: $y-a_2 = m(x-a_1) \rightarrow y-4 = \frac{-5}{8}(x+3)$

Para comprobar si el punto C (-1,3) pertenece a la recta, basta sustituir en una de las ecuaciones:

$$5x+8y-17=0 \rightarrow 5 \cdot (-1) + 8 \cdot 3 - 17 = 2 \neq 0 \rightarrow C(-1,3) \notin r$$

4.-

Para que los tres puntos estén alineados, la pendiente de los vectores $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ debe ser la misma.



$$m_1 = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = \frac{-2 - 1}{5 + 1} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$m_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} = \frac{m - 1}{2 + 1} = \frac{m - 1}{3}$$

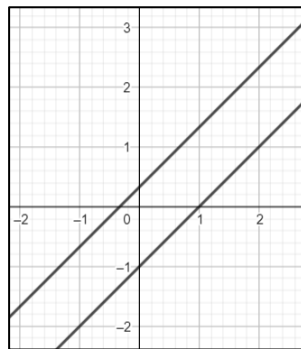
$$m_1 = m_2 ; \frac{-1}{2} = \frac{m - 1}{3} \rightarrow m = -0,5$$

5.-

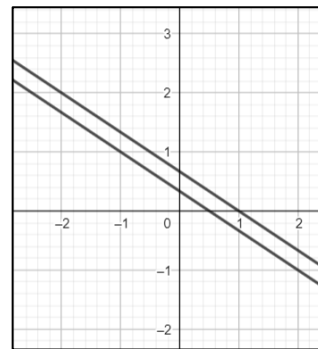
$$r: mx + 3y - 1 = 0 \text{ y } s: 2x + (m + 1)y + 2 = 0$$

a) Para que sean paralelas se debe cumplir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} ; \frac{m}{2} = \frac{3}{m + 1} \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$



$m = -3$



$m = 2$

b) Para que sean perpendiculares se debe cumplir que el producto escalar de sus vectores directores sea cero, o lo que es lo mismo, que el producto escalar de sus vectores normales sea cero:

$$\overline{n_r} = (m, 3) \text{ y } \overline{n_s} = (2, m + 1)$$

$$\overline{n_r} \cdot \overline{n_s} = 0 \Leftrightarrow (m, 3) \cdot (2, m + 1) = 2m + 3m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{-3}{5}$$

c) Para que sean secantes se debe cumplir que:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \Leftrightarrow \frac{m}{2} \neq \frac{3}{m + 1} \rightarrow m = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$$

d) Para que sean coincidentes se debe cumplir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \leftrightarrow \frac{m_1}{2} = \frac{-1}{2} \text{ y } \frac{3}{m_2 + 1} = \frac{-1}{2}$$

$$m_1 = -1 \text{ y } m_2 = -7 \rightarrow -1 \neq -7 \text{ NO pueden ser coincidentes}$$

6.-

a) La recta s es paralela a la recta r , con lo que su pendiente debe ser la misma. La pendiente de la recta r es: $r: 2x - y + 1 = 0$; $r: y = 2x + 1 \rightarrow m_r = 2 = m_s$

La recta s pasa por el punto $A(6, -2)$, entonces su ecuación punto-pendiente será:

$$y - a_2 = m(x - a_1) \rightarrow y - (-2) = 2(x - 6)$$

Operando queda que: $s: 2x - y - 14 = 0$

b) La recta t es perpendicular a r , entonces, si la recta r tiene la forma:

$$Ax + By + C = 0 ; 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 = 0$$

La recta t tendrá que ser igual a:

$$Bx - Ay + k = 0 ; (-1) \cdot x + (-2) \cdot y + k = 0$$

Y como pasa por el punto $A(6, -2)$:

$$(-1) \cdot 6 + (-2) \cdot (-2) + k = 0 ; -6 + 4 + k = 0 \rightarrow k = 2$$

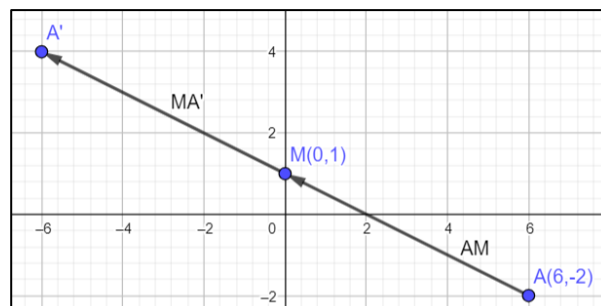
La recta t será igual a: $t: -x - 2y + 2 = 0$

c) Para hallar el punto de intersección de las rectas r y t , habrá que resolver el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E1+2E2} -5y + 5 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow 2x - 1 + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

El punto de intersección es $M(0,1)$.

d) El punto simétrico de $A(6, -2)$ respecto de $M(0,1)$.



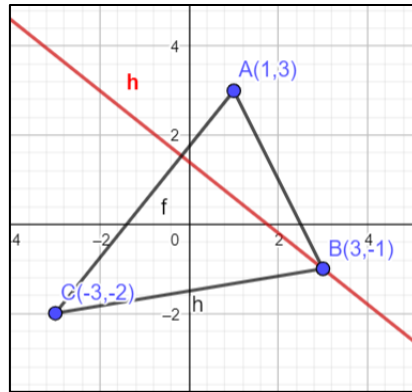
Los vectores $\overline{AM}$ y $\overline{MA'}$ deben ser equipolentes, es decir, $\overline{AM} = \overline{MA'}$.

$$\overline{AM} = (0,1) - (6,-2) = (-6,3)$$

$$\overline{MA'} = (a, b) - (0, 1) = (-6, 3) \rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 4 \end{cases} A'(-6, 4)$$

7.-

a) La recta h será aquella que pase por el punto B(3,-1) y cuyo vector director $\bar{u}$ sea perpendicular al vector $\overline{AC}$.

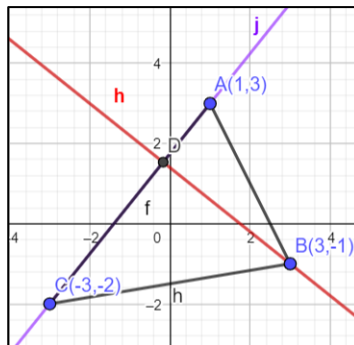


$$\overline{AC} = (-3, -2) - (1, 3) = (-4, -5) = (v_1, v_2) \rightarrow \bar{u} = (v_2, -v_1) = (-5, 4) \\ = (u_1, u_2)$$

La ecuación de la recta h será, entonces:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}; \frac{x - 3}{-5} = \frac{y + 1}{4}; -5(y + 1) = 4(x - 3) \rightarrow h: 4x + 5y - 7 = 0$$

b) Para hallar la longitud de la altura, habrá que calcular la intersección de la recta h con la recta del lado AC, j.



La ecuación de la recta del lado AC es:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}; \frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 3}{-5}; -5(x - 1) = -4(y - 3) \rightarrow j: 5x - 4y + 7 = 0$$

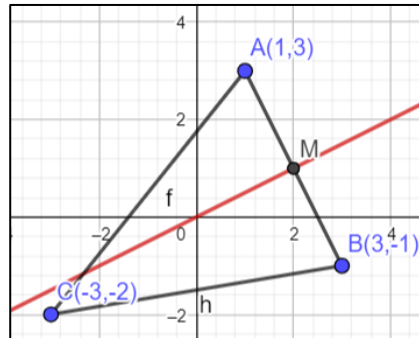
La intersección de j y h será:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 7 = 0 \\ 5x - 4y + 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{4E1+5E2} \begin{matrix} x = \frac{-7}{41} = -0.17 \\ y = 1.54 \end{matrix}$$

La distancia se calcula como:

$$|(-0.17, 1.54) - (3, -1)| = |-3.17, 2.54| = \sqrt{(-3.17)^2 + 2.54^2} = 4.04$$

c) La mediatriz del lado AB es la recta perpendicular a ese lado, que pasa por el punto medio de dicho lado.



El punto medio M se calcula como:

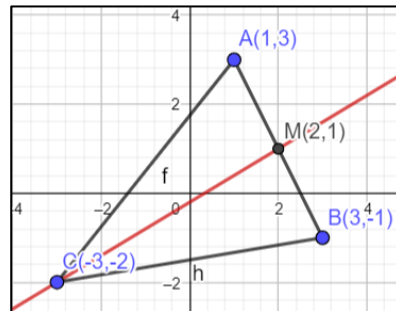
$$M = B + \frac{\overline{AB}}{2} = (1, 3) + \frac{(3, -1) - (1, 3)}{2} = (1, 3) + \frac{(2, -4)}{2} = (1, 3) + (1, -2) = (2, 1)$$

El vector perpendicular a $\overline{AB}(2, -4)$ es: $\bar{u}(-4, -2)$

Por tanto, la recta t tiene vector director $\bar{u}(-2, -1)$ y pasa por el punto M(2, 1):

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} ; \frac{x - 2}{-4} = \frac{y - 1}{-2} ; -2(x - 2) = -4(y - 1) \rightarrow t : 2x - 4y = 0$$

d) La mediana que parte de C es la recta que pasa por este punto y por el punto medio del lado AB, M (2, 1).



Su vector director es: $\overline{CM} = (2, 1) - (-3, -2) = (5, 3)$

Su ecuación será:

$$r: \frac{x - 2}{5} = \frac{y - 1}{3} ; 3(x - 2) = 5(y - 1) \rightarrow r : 3x - 5y - 1 = 0$$

ANEXO VII: Criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave de la Unidad Didáctica.

Tabla 38. Criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave de la Unidad Didáctica (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre; Orden de 14 de julio de 2016).

Unidad Didáctica. Geometría Analítica.		
Criterio de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.		
CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	EA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.	CCL, CMCT
CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). EA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. EA.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. EA.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.	CMCT, CAA
CE.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y	EA.1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. EA.1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.	CCL, CMCT, CAA

probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.		
CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	EA.1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.	CMCT, CAA
CE.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	EA.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	EA.1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. EA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. EA.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. EA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. EA.1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad	EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CMCT, CAA

cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.		
CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	CMCT
CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CMCT, CAA, SIEP
1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	EA.1.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.	CMCT, CAA, SIEP
CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas	EA.EA.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. EA.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. EA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.	CMCT, CD, CAA

mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	EA.1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	
CE.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. EA.1.12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. EA.1.12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora	CCL, CMCT, CD, CAA
Bloque 3. Geometría.		
CE.3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	EA.3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. EA.3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. EA.3.3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.	CCL, CMCT, CD, CAA

	EA.3.3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. EA.3.3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.	
--	---	--

ANEXO VIII: Rúbricas de evaluación.

Tabla 39. Rúbrica para la evaluación de pruebas escritas (Recursosep, 2017).

	Mejorable (2-4)	Adecuado (5-6)	Bueno (7-8)	Excelente (9-10)	Ponderación	Valoración
Presentación	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	15%	
Corrección ortográfica	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su edad.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto está escrito correctamente.	15%	
Vocabulario empleado	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque palabras específicas del tema.	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	10%	
Contenido	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa con algún error.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa de forma coherente.	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa de forma coherente.	60%	
Valoración final						

Tabla 40. Rúbrica para evaluar el trabajo en grupo (CEDEC, n.d.).

	Mejorable (2-4)	Adecuado (5-6)	Bueno (7-8)	Excelente (9-10)	Ponderación	Valoración
Trabajo	Apenas trabajan y no muestran interés.	Trabajan, pero sin organización.	Trabajan, pero se detectan fallos de organización.	Trabajan constantemente y con organización.	25%	
Participación	Solo una o dos personas del grupo participan activamente.	Al menos la mitad del grupo participa activamente.	Al menos el 75% del grupo participa activamente.	Todos participan con entusiasmo	10%	
Responsabilidad en la realización de las tareas	La responsabilidad en la tarea recae sobre una sola persona.	La responsabilidad en la tarea es compartida por la mitad del grupo.	Al menos el 75% del grupo comparte la responsabilidad en la tarea.	Todos comparten por igual la responsabilidad sobre la tarea.	10%	
Dinámica de trabajo	Muy poca interacción, conversaciones muy breves, algunos están distraídos o desinteresados.	Alguna habilidad de interacción, alguna evidencia de discusión o planteamiento de alternativas.	Escuchan los comentarios, sugerencias y opiniones de otros, pero no los usan para mejorar su trabajo.	Escuchan y aceptan los comentarios, sugerencias y opiniones de otros, y los usan para mejorar su trabajo.	10%	
Actitud del equipo	No trabajan de forma respetuosa.	Trabajan con respeto mutuo, pero no suelen animarse para mejorar el ambiente de trabajo.	Trabajan con respeto mutuo y se animan para mejorar el ambiente de trabajo.	Se respetan y animan entre todos para mejorar el ambiente de trabajo, haciendo propuestas para que el trabajo y los resultados mejoren.	5%	
Roles dentro del grupo	No se asignan roles a ningún integrante del grupo.	Hay roles asignados, pero no los desempeñan.	Cada integrante del grupo tiene un rol asignado, pero no está claramente definido.	Cada integrante del grupo tiene un rol y lo desempeña de forma efectiva.	5%	
Calidad del trabajo	El trabajo es de baja calidad.	El trabajo desarrollado necesita ser mejorado por algunos integrantes del grupo.	Desarrollan un trabajo de calidad.	Desarrollan un trabajo de alta calidad.	25%	

Resolución de problemas	Dejan a otros hacer el trabajo.	Solo asumen soluciones sugeridas por la profesora o por otros grupos.	Mejoran soluciones sugeridas por la profesora o por otros grupos.	Buscan y sugieren soluciones a los problemas.	10%	
Valoración final						

Tabla 41. Rúbrica para evaluar la participación y las intervenciones en (Educativos para opositores padres y maestros, 2019).

	Mejorable (2-4)	Adecuado (5-6)	Bueno (7-8)	Excelente (9-10)	Ponderación	Valoración
Participación	Nunca o casi nunca participa en los debates y las explicaciones en clase, ni aporta información relevante. No pregunta dudas sobre el tema.	A veces participa en los debates y las explicaciones en clase, aportando información relevante y formulando preguntas adecuadas	Participa con regularidad en los debates y las explicaciones en clase, aportando información relevante y formulando preguntas adecuadas sobre el tema.	Siempre participa con regularidad en los debates y las explicaciones en clase, aportando información relevante y formula preguntas adecuadas sobre el tema.	25%	
Realización de las actividades	No sigue las instrucciones y requiere de ayuda constante o repetición de las mismas. No se ofrece voluntario para corregir tareas en clase.	Escucha las instrucciones y explicaciones, pero demuestra dudas en los procedimientos. A veces se ofrece voluntario para corregir tareas en clase.	Generalmente sigue las instrucciones y realiza las actividades planteadas de forma eficaz. Normalmente se ofrece voluntario para corregir tareas en clase.	Siempre sigue las instrucciones y realiza las actividades planteadas de forma eficaz. Siempre se ofrece voluntario para corregir tareas en clase.	20%	
Interés y escucha activa	Nunca o casi nunca demuestra interés en los temas y explicaciones en el aula. Se distrae fácilmente y no sigue las indicaciones correctamente de la profesora ni de sus compañeros.	A veces muestra interés por las explicaciones y temas tratados en el aula. Escucha a veces las explicaciones y opiniones de la profesora y sus compañeros, pero puede requerir repetición.	Generalmente tiene interés por las explicaciones y temas tratados en el aula Escucha generalmente de forma respetuosa y atenta, las explicaciones y opiniones de la profesora y sus compañeros.	Siempre demuestra interés y/o entusiasmo por las explicaciones y temas tratados en el aula. Escucha de forma respetuosa y atenta las explicaciones y opiniones de la profesora y sus compañeros.	15%	
Pronunciación y entonación en las intervenciones orales	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	20%	

Contenido de las intervenciones.	No es capaz de responder a las preguntas sobre el tema que le hace el profesor o sus compañeros. No estudia ni se prepara las clases. Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	Suele ser capaz de responder a las preguntas sobre el tema que le hace el profesor o sus compañeros. A veces estudia y se prepara las clases. Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo.	Normalmente es capaz de responder a las preguntas sobre el tema que le hace el profesor o sus compañeros. Estudia con regularidad y se prepara las clases. Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo.	Siempre responde de forma adecuada a las preguntas sobre el tema que le hace el profesor o sus compañeros. Siempre estudia y se prepara las clases. Demuestra un completo dominio del tema utilizando un vocabulario específico, destacando los aspectos importantes, exponiendo claramente.	20%	
Valoración final						

Tabla 42. Rúbrica para la evaluación del cuaderno de clase (Recursosep, 2017).

	Mejorable (2-4)	Adecuado (5-6)	Bueno (7-8)	Excelente (9-10)	Ponderación	Valoración
Presentación	Cuaderno en pésimas condiciones, las tapas están dañadas, hay muchos tachones, no hay fechas.	Presenta algunos tachones, faltan fechas, no hay información ni del alumno ni de la asignatura.	Le faltan algunas fechas, tiene algún tachón, presenta la información del alumno y de la asignatura.	Tiene puestas las fechas, las tapas están intactas, no presenta tachones, el cuaderno tiene la información del alumno y de la asignatura.	20%	
Orden	El cuaderno no posee orden, tiene muchos huecos en blanco, no hay fechas, los ejercicios están desordenados. Presenta hojas con otros contenidos.	No respeta el orden de los contenidos dados en clase, presenta algunos huecos en blanco o con otros contenidos.	Presenta un orden diferente al de los contenidos entregados en clase. No tiene huecos en blanco ni hojas con otros contenidos.	Posee el orden correcto seguido en clase, no tiene huecos en blanco ni hojas con otros contenidos.	10%	
Ortografía	Presenta muchísimas faltas de ortografía.	Presenta algunas faltas de ortografía.	Apenas tiene faltas de ortografía.	No presenta faltas de ortografía.	20%	
Corrección	No se aprecia las correcciones de los ejercicios, muchos de ellos no están corregidos.	Solo se aprecia la corrección de algunos ejercicios.	Tiene casi todos los ejercicios corregidos, pero apenas se aprecia la corrección.	Tiene todos los ejercicios corregidos y dicha corrección se aprecia perfectamente.	20%	
Tareas y actividades	Faltan muchas actividades hechas en clase o en casa.	Le faltan algunas actividades y algunos	Tiene casi todas las actividades y tareas	Presenta todas las actividades y todos los apuntes.	30%	

	Los apuntes de clase están a medio copiar.	apuntes dados en clase.	hechas y tiene todos los apuntes bien copiados.			
Valoración final						

Tabla 43. Rubrica para la evaluación de la actitud y el trabajo individual (Colabora Educación 30, n.d.).

	Mejorable (2-4)	Adecuado (5-6)	Bueno (7-8)	Excelente (9-10)	Ponderación	Valoración
Autonomía y confianza	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades con alguna ayuda.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades de manera habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	10%	
Creatividad	Utiliza alguna estrategia de manera orientada y propone alguna iniciativa creativa con ayuda.	Utiliza alguna estrategia creativa en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	10%	
Gestión emocional	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones, no permitiéndole resolver sus situaciones y problemas.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	15%	
Actitud respetuosa y responsable	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	20%	

Corrección en la presentación	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	20%	
Conclusión del trabajo	Concluye alguna tarea si se realiza una	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	25%	
Valoración final						