



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

UNIDAD DIDÁCTICA TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: Ruiz Medina, Inmaculada

Tutor/a: Prof. D. Lorenzo Luque Cañada
Dpto: I.E.S. AZ-Zait

Junio, 2019

TRABAJO FIN DE MÁSTER:
UNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

0.	RESUMEN Y PALABRAS CLAVE	5
0.1.	RESUMEN	5
0.2.	ABSTRACT	5
0.3.	PALABRAS CLAVE.....	5
0.4.	KEYWORDS	5
1.	INTRODUCCIÓN	6
2.	OBJETIVOS	8
3.	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	10
4.	FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	21
4.1.	INTRODUCCIÓN	21
4.2.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	22
4.2.1.	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.....	22
4.2.2.	GENERALIZACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.....	25
4.2.3.	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONOMÉTRICA	26
4.3.	RAZONES DE LA COMPOSICIÓN DE ÁNGULOS.....	27
4.4.	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS	30
4.5.	APLICACIONES	32
4.5.1.	APLICACIONES GEOMÉTRICAS	33
4.5.2.	APLICACIONES TOPOGRÁFICAS	34
4.6.	CONCLUSIÓN	35
4.7.	BIBLIOGRAFÍA	35
5.	FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	35
5.1	LAS MATEMÁTICAS. PERCEPCION EN LOS ALUMNOS	35
5.2	DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	37
5.3	DIFICULTADES EN TRIGONOMETRÍA. MÉTODOS DE APLICACIÓN	39
5.4	MÉTODOS DE APRENDIZAJE.....	43
5.4.1	USO DE WEBQUEST.....	43
5.4.1.1.	VENTAJAS E INCONVENIENTES DE USO DE WEBQUEST	45
5.4.1.2.	VENTAJAS E INCONVENIENTES EN LA UTILIZACION DE TIC	45

5.5.	USO DE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)	49
6.	UNIDAD DIDÁCTICA	52
6.1.	TÍTULO	52
6.2.	JUSTIFICACIÓN	52
6.2.1.	PUNTO DE VISTA CURRICULAR	52
6.2.2.	PUNTO DE VISTA SOCIAL/PROFESIONAL	53
6.2.3.	PUNTO DE VISTA INTERNO	55
6.2.4.	PUNTO DE VISTA ESTÉTICO Y CULTURAL	56
6.3.	CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA	58
6.3.1.	ASPECTOS SOCIOECONÓMICOS DE LA LOCALIDAD, BARRIO, ETC.	59
6.4.	OBJETIVOS	59
6.4.1.	OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA	59
6.4.2.	OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS	61
6.4.3.	VÍNCULO ESTABLECIDO ENTRE LOS OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA Y OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS	63
6.4.4.	OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	63
6.5.	COMPETENCIAS CLAVE.....	64
6.6.	CONTENIDOS	67
6.7.	METODOLOGÍA.....	70
6.8.	ACTIVIDADES Y RECURSOS	71
6.8.1.	ACTIVIDADES.....	72
6.8.2.	RECURSOS	74
6.9.	ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	75
6.10.	TEMPORALIZACIÓN	77
6.11.	EVALUACIÓN.....	84
6.11.1.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	84
6.11.2.	CRITERIOS DE CALIFICACIÓN.....	90
7.	CONCLUSIONES.....	90
8.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 1; Fuente: Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración Propia	14
Tabla 2: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 3; Fuente: Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración Propia	14
Tabla 3: Competencias adquiridas Bloque 1 y Bloque 3; Fuente: Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración Propia	14
Tabla 4: Contenidos no identificados en la unidad, según editorial; Fuente: Elaboración Propia	19
Tabla 5: Diferencias en el uso del lenguaje, Fuente: (Carrillo Siles, 2009)	38
Tabla 6: Ventajas e Inconvenientes en el uso de las TIC, Fuente Palomar Sánchez, 2009	48
Tabla 7: Vínculo establecido entre los objetivos generales de la etapa y objetivos del área de matemáticas; Fuente: Elaboración Propia	63
Tabla 8: Contenidos y relación con la Unidad Didáctica: Bloque 1; Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración Propia	69
Tabla 9: Contenidos y relación con la Unidad Didáctica: Bloque 3; Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración Propia	69
Tabla 10: Tipología de actividades en la Unidad Didáctica; Fuente: Elaboración Propia	73
Tabla 11: Criterios de calificación de evaluación, Fuente elaboración propia	90

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Bloque 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º ESO; Fuente: R.D. 1102/2014, de 26 de Diciembre.....	11
Ilustración 2: Bloque 3: “Geometría”, Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º ESO; Fuente: R.D. 1102/2014, de 26 de Diciembre	12
Ilustración 3: Resultados de encuesta alumnos: Percepción de las matemáticas; Fuente de datos: Vidal S. y Fuertes, 2016. Elaboración Propia	36
Ilustración 4: Medición de ángulos y distancias en la antigüedad; Fuente: Rojas, 2015.	54
Ilustración 5: Uso de Trigonometría en la construcción de un túnel a través de las montañas para calcular la dirección exacta por la que el túnel debe de salir en el otro lado; Fuente: Rojas, 2015.	55
Ilustración 6: Función del seno representada en el Teatro Popular en Niterói, Brasil; Fuente: Elaboración Propia.....	56
Ilustración 7: Función del coseno representada en el Puente de la Paz, Georgia; Fuente: Elaboración Propia	56
Ilustración 8: Función del seno representada en la obra Zentrum Paul Klee, Berna (Suiza); Fuente: Elaboración Propia	57
Ilustración 9: Tablilla Babilónica 322. Fuente: https://www.ancient-origins.es/	57
Ilustración 10: Papiro de Rhind; Fuente: http://www.neoteo.com/el-papiro-de-rhind-matematica-antigua/	57
Ilustración 11: Trigonometría griega. Esquema Tierra, Luna y Sol según Aristarco de Samos Fuente, Elaboración Propia	58

0. RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

0.1. RESUMEN

El presente trabajo se elabora como requerimiento final para la obtención del título *“Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza en idiomas”*, para la especialidad de Matemáticas.

Previo al desarrollo de la Unidad Didáctica, objeto del presente trabajo, se ha realizado una investigación de las metodologías más afines a los tiempos que corren, cumpliendo en todo momento con el currículo establecido. Se diseña la Unidad Didáctica basada en el tema de trigonometría, con nuevos métodos enfocados a un aprendizaje más activo que aumente el interés del alumnado.

Para el desarrollo del presente trabajo, se ha hecho uso de la variedad de conocimientos adquiridos en las distintas asignaturas que componen el Máster de Secundaria, en el intento de plasmar las ideas principales transmitidas por el profesorado, con el objetivo de propiciar una mejora en la enseñanza-aprendizaje del alumnado.

0.2. ABSTRACT

The present paper has been elaborated for the purpose of fulfilling the final requirement so as to obtain the title of “Master’s Degree in Secondary Education and Baccalaureate Teaching, Vocational Training and Language Teaching”, specialised in Mathematics.

Prior to the Didactic Unit’s development, main objective of this paper, a research of the most suitable methodologies at the current time has been undertaken, complying at all times with the school curriculum that has been set. The Didactic Unit is based on the topic of “Trigonometry”, applying fresh methods aimed at increasing the students’ interest in the topic and enabling them to play a more active role.

For the development of the present paper, we have been made use of the great variety of knowledge acquired throughout the different courses that are part of the Master’s Degree, attempting to express the main ideas which have been passed on to us by the professors, in order to foster a better teaching-learning process for the students.

0.3. PALABRAS CLAVE

Matemáticas, Trigonometría, Unidad Didáctica, WebQuest, ABP, Criterios de Evaluación

0.4. KEYWORDS

Mathematics, Trigonometry, Didactic Unit, WebQuest, ABP, Evaluation Criteria.

1. INTRODUCCIÓN

Se elabora el presente Trabajo Fin de Máster, de aquí en adelante TFM, para el desarrollo de la competencia profesional del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza de idiomas, para poder abordar en un futuro próximo la actuación didáctica y planificación de cada una de las unidades con la adquisición de cada una de las competencias exigidas en el reglamento estatal y autonómico.

La especialidad en la que se desarrolla el presente documento, es la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. El tema elegido para la elaboración del presente trabajo es el de trigonometría enfocada al cuarto curso de la ESO.

La estructuración del trabajo se realiza principalmente en dos partes. La primera parte se basa en el desarrollo de diferentes fundamentos: Curricular, epistemológico y didáctico y una segunda parte que trata del diseño de una Unidad Didáctica. En esta primera parte se realiza un análisis exhaustivo del currículo escolar bajo las consultas pertinentes en documentos oficiales, analizando diversos libros de texto y viendo si cumplen o no aquellos objetivos matemáticos requeridos para la adquisición de las distintas competencias. Además se trabajará la formación hacia el pensamiento científico mediante el desarrollo de un tema matemático estrechamente relacionado con la Unidad Didáctica a proyectar (Trigonometría) y se analizarán algunas investigaciones centradas en diversos temas como son dificultades y errores en el alumnado a la hora de adquirir conocimientos trigonométricos y algunas estrategias y recursos utilizados en la actualidad para la obtención y logros de unos resultados de aprendizaje cimentados en el éxito. En la segunda parte del presente trabajo, se realiza el diseño de una Unidad Didáctica señalando aquellos objetivos para el desarrollo de las competencias clave que estipula el Real Decreto a través de unos contenidos proyectados. Estos contenidos serán coherentes y siempre guardarán relación con los objetivos. Además se tratarán diferentes metodologías para el desarrollo de los distintos contenidos, realizando la elección de la metodología más adecuada, favoreciendo la comprensión de los diferentes conceptos de aprendizaje por parte del alumnado.

La aplicación de metodologías diferentes a la metodología tradicional, fomenta que el alumnado desarrolle un pensamiento más crítico y pueda acceder más fácilmente a la resolución de problemas a través de diferentes caminos, no existiendo un único itinerario para la obtención del resultado. Esta manera de pensar y desarrollar la mente fomenta el aumento de contar con diversas opciones a la hora de tomar alguna determinación o decisión sobre el futuro, realizando juicios valorativos de la situación. Para la aplicación de estos nuevos modelos y técnicas el rol docente-alumno deberá

modificarse en parte, otorgando un mayor protagonismo a este último y transformando, que no aminorando, el papel del profesor.

Para la construcción de la Unidad, se ha escogido el tema de Trigonometría ya que considero que su campo de aplicación es dilatado y se extiende a diferentes profesiones relacionadas con las ciencias. La trigonometría es una rama de aplicación para diversas áreas. Ya se venía usando desde las más remotas antigüedades, sin ser formulado explícitamente y sin aplicar conceptos estrictamente matemáticos. Su aplicación es de gran utilidad y su empleo se encuentra extendido en distintos sectores como son industrias, navegación, geografía, astronomía y en los diversos campos de ingenierías.

En el desarrollo de la segunda parte del presente trabajo, se pretende elaborar una Unidad Didáctica donde el alumnado aprenda y reconozca cada uno de los elementos y características de los triángulos rectángulos, las razones trigonométricas existentes así como sus relaciones fundamentales, la circunferencia goniométrica y el uso de las calculadoras científicas para los distintos cálculos trigonométricos en la resolución de problemas.

La Unidad Didáctica se ha diseñado para que el aprendizaje del alumnado tenga lugar a través de la resolución de problemas comprensibles, útiles y expuestos en una situación y contextualización próxima y real para captar su atención. De esta manera se espera una mayor implicación por parte del alumnado en su aprendizaje al comprobar que la teoría explicada en clase tiene una aplicación auténtica y cercana a su entorno.

Tras muchos años de enseñanza basada en metodologías tradicionales, el presente trabajo mezcla esta metodología con metodologías cuyo objetivo principal es la obtención de un aprendizaje significativo. Este aprendizaje implica un estrecho vínculo entre lo ya aprendido y lo nuevo por aprender, de dónde emerge un nuevo concepto: Aprendizaje Cooperativo. Es difícil atribuir hoy en día la misma metodología aplicada durante el siglo pasado, ya que nos encontramos en una sociedad en continuo cambio, donde la innovación y el uso de nuevas tecnologías predominan en esta nueva era. Todos estos cambios implican añadir y poner en funcionamiento nuevas metodologías conformes a la demanda existente.

Analizando mi experiencia como docente, en la especialidad de matemáticas, durante la fase de prácticas del Máster de profesorado, podría mencionar una cadena de aciertos y equivocaciones en lo que se refiere al proceso de enseñanza-aprendizaje. El error más característico se enmarca en la metodología empleada durante las clases, ya que muchas de las veces el repetir y leer conceptos son actividades que pueden realizar los alumnos individualmente y por sí solos, sin ser guiados por ningún profesional docente. También pude observar, en las caras y actitudes por parte de los

estudiantes, que ocupar más tiempo de lo habitual con una misma tarea desmotiva a los estudiantes, haciéndose pesado la realización de la actividad y por consiguiente desconectando de la asignatura. Con lo cual, parece evidente la necesidad de cambiar de tarea con relativa frecuencia a lo largo de las sesiones. Uno de los aciertos a destacar era la motivación que desprendían los alumnos a la hora de realizar alguna actividad grupal o a la hora de desempeñar alguna tarea donde la tecnología tenía un papel fundamental, ya fuese la visualización de imágenes, la reproducción de vídeos o la realización de tareas a través de juegos en la Web. Otro de los éxitos fue la implantación de una metodología donde los alumnos fueran por sí mismos descubriendo conceptos matemáticos contenidos en ciertos problemas. Con este procedimiento fomentaron el crecimiento de muchas de sus competencias como el modelado, la argumentación y el desarrollo del pensamiento.

Todos estos aspectos mencionados han sido fuente de motivación para la estructuración y definición de algunos de los ejercicios desarrollados en la Unidad Didáctica. En relación a algunas de las actividades plasmadas en dicha Unidad, tras la experiencia y observaciones comentadas anteriormente y puntos de vista adquiridos como docente durante las prácticas, además de tener presente todos los conceptos aprendidos durante muchas de las clases presenciadas en el Máster, creo que es significativo y sustancial ser innovador y adoptar una inquietud persistente en la introducción de nuevos planteamientos, abriéndole nuevos caminos a la enseñanza. Todas las actividades propuestas se adecuan en su máximo nivel de concisión a todos los elementos detallados en el currículo.

El diseño de la Unidad tiene su contextualización en el I.E.S San Juan Bosco de Jaén, lugar donde durante un mes y medio he asistido y participado en la realización de las prácticas como docente en la especialidad de Matemáticas. Se coge como referencia el curso 4º de ESO, con la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

La normativa e instrucciones para el desarrollo de esta unidad didáctica se tomarán como referencia la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) así como el DECRETO 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

2. OBJETIVOS

Tras las distintas asignaturas cursadas durante el curso 2018-2019, el “Máster de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza de idiomas” llega a su cúspide con la redacción final del TFM.

Con la elaboración de este trabajo se pretende poner en práctica y desarrollar los diversos conocimientos y motivaciones adquiridas durante el presente curso.

A continuación se enuncia una serie de objetivos, los cuales guardan una estrecha relación con los hitos o logros parciales obtenidos durante el curso, todo ello reflejo de lo aprendido y de lo que se pondrá en práctica en la elaboración del presente TFM. A modo general los objetivos son (UJA JAEN):

- Complementar la formación disciplinar en la especialidad cursada: Matemáticas.
- Completar la formación orientada a la capacitación de ejercer el oficio con todas aquellas herramientas necesarias para un correcto desarrollo de la clase.
- Asumir la importancia de una adecuada innovación docente e impulsar la investigación educativa.
- Exponer todos aquellos conocimientos adquiridos aportando para ello una base de originalidad en su desarrollo.
- Obtener una buena comunicación en conocimientos y conclusiones.
- Implementar distintas estrategias para hacer atractiva la asignatura de matemáticas.
- Valorar el impacto ocasionado en la introducción de nuevas metodologías.
- Adquirir el conocimiento, las destrezas y actitudes necesarias para el uso y aprovechamiento de las TICs en la función docente.
- Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Utilizar estrategias y técnicas de evaluación entendiendo la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.
- Aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialidad de matemáticas.
- Revisar la propia experiencia y los conocimientos previos desde el punto de vista de las competencias adquiridas o desarrolladas durante la realización del practicum.
- Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de aprendizaje y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.
- Planificar el proceso de enseñanza en el área de matemáticas, diseñando materiales didácticos y tareas educativas.

- Conocer los contenidos curriculares de la materia de matemáticas, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de matemáticas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes.
- Promover la capacidad del alumno para un aprendizaje por sí mismo y mediante interacción con sus iguales, permitiendo de esta manera el desarrollo de habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.
- Realizar un análisis de la estrategia docente aplicada en la actualidad contextualizándola en la especialidad de matemáticas.
- Informar acerca de la metodología usada para el aprendizaje de los alumnos, de manera que suponga una mejora en el proceso educativo
- Conocer y manejar la normativa y organización institucional del sistema educativo tanto estatal como autonómico.

Alcanzando cada uno de los apartados descritos anteriormente, se puede afirmar, que el objeto principal de aprendizaje de este Máster, queda adquirido.

Cada objetivo será desarrollado a lo largo del presente trabajo, en el intento de dar una visión y percepción global y específica de los temas tratados durante la realización de este curso. Se intenta realizar el alcance de los distintos logros de la manera más objetiva posible, sin clasificar lo que estaría mejor o peor; se trata de aportar otras maneras de trabajo tras la realización de un análisis investigativo previo que cimente las metodologías escogidas.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

La Unidad que se pretende desarrollar, está orientada para alumnos de 4º de ESO en la asignatura de matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, concretamente se centra en el tema de estudio de trigonometría.

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato menciona en su “Anexo I” todos los contenidos que deben de ser explicados, así como los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para cada una de las materias tanto troncales como optativas que se desarrollan a lo largo de la etapa de la ESO y Bachiller.

Centraremos nuestra atención a lo que establece la normativa en cuanto a la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para los alumnos

de 4º de ESO. Las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas es una materia con un carácter más profundo en su enseñanza para el alumnado que tiene intención de cursar Bachillerato.

Según establece el Real Decreto, la materia queda dividida en 5 Bloques. Para el desarrollo de la presente unidad, se tendrá en cuenta el desarrollo de los Bloques 1 (transversal a los bloques restantes) “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” y el bloque 3 (con contenido directo acerca de la unidad didáctica a desarrollar: Trigonometría): “Geometría”

En este apartado, se muestra una tabla donde aparecen definidos los distintos contenidos que se deberán desarrollar; además, se especifican los criterios de evaluación de manera detallada, extraídos de los contenidos anteriores y por último una numeración de los estándares de evaluación mencionando de una forma muy específica todos aquellos parámetros y conocimientos que se han debido de adquirir para la superación de los elementos que componen este bloque.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruados. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero o interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantearse preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos,

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Ilustración 1: Bloque 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º ESO; Fuente: R.D. 1102/2014, de 26 de Diciembre

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Ilustración 2: Bloque 3: “Geometría”, Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas 4º ESO; Fuente: R.D. 1102/2014, de 26 de Diciembre

Además de la ley estatal, se ha consultado la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. En ella se definen los objetivos de la etapa, los contenidos y los criterios de evaluación con la adquisición de distintas competencias.

Los contenidos desarrollados en la Orden de 14 de julio de 2016 son exactamente iguales en su enunciado que los que aparecen en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. El complemento adicional se encuentra en los criterios de evaluación, donde además de quedar definidos, están asociados a una competencia a desarrollar:

BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
CRITERIO DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA
1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA
1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando	CMCT, CD, CAA

con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	
1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 1: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 1; Fuente: Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración Propia

BLOQUE 3: GEOMETRÍA	
CRITERIO DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA
3.1.Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales	CMCT, CAA
3.2.Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT, CAA
3.3.Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 2: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 3; Fuente: Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración Propia

En resumen, las competencias que deben de haberse alcanzado y desarrollado tras tratar el Bloque 1 y Bloque 3 son:

CMCT	COMPETENCIA MATEMÁTICA Y COMPET. BÁSICA EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA
CAA	COMPETENCIA DE APRENDER A APRENDER
CCL	COMPETENCIA EN COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA
CD	COMPETENCIA DIGITAL
SIEP	SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR
CSC	COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

Tabla 3: Competencias adquiridas Bloque 1 y Bloque 3; Fuente: Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración Propia

Los objetivos de la etapa definidos en la Orden de 14 de julio de 2016 contribuirán a desarrollar en los alumnos unas capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presente en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y valorar su belleza.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) para realizar cálculos, buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los

aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

En el desarrollo de la Unidad que se realizará en la segunda parte del trabajo, es complicado concebir que todos estos objetivos tengan cavidad en el desarrollo de un solo tema; pero se debe tener en cuenta, que una vez completado el curso, se podrá obtener una percepción general de todos ellos.

Para comprobar si los libros de texto que se desarrollan en secundaria para el curso que nos acomete este trabajo (4º ESO) se asemejan al contenido curricular vigente, se han escogido dos libros de editoriales diferentes y se ha comprobado hasta qué punto los autores guardan concordancia con las exigencias establecidas en la normativa. Las editoriales que se van a analizar son “**Santillana**” (Álvarez, y otros, 2004) y “**Guadiel**” (Monso Ferré, y otros, 2008)”.

En cuanto al análisis de la **primera editorial (Santillana)**, se ha de tener en cuenta que previamente al tema trigonométrico se han desarrollado todos los conceptos relativos en cuanto a semejanza de triángulos, Teorema de Tales y Teorema de Pitágoras así como el cálculo de escalas e interpretación de mapas. El tema comienza con una introducción histórica acerca del invento de los relojes de sol, dejando claro desde el primer momento la importancia de las relaciones existentes entre ángulos y distancias. El primer punto a tratar son “*Razones trigonométricas de un ángulo agudo*” dónde su única explicación es una representación gráfica de un triángulo, con el nombre de los ángulos y lados dados, y con la definición de las tres fórmulas básicas de la trigonometría: seno, coseno y tangente. Con esa información, se proponen los primeros ejercicios del tema para calcular razones trigonométricas.

El siguiente apartado del tema se denomina: “*Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo*”. Mediante demostraciones matemáticas se pone de manifiesto la fórmula: $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ y en un pequeño recuadro se hace un recordatorio del Teorema de Pitágoras desarrollado en la unidad anterior. Con estos conceptos, se proponen un par de ejercicios cuyo objetivo es calcular razones trigonométricas a partir de algún dato dado y comprobaciones de afirmaciones trigonométricas que requieren la aplicación de las mismas fórmulas.

El siguiente apartado a tratar es: “*Razones Trigonómicas de 30°, 45° y 60°*”. En este punto, se demuestran los diferentes resultados que arrojan el cálculo del seno, coseno y tangente para un triángulo isósceles, cuyos ángulos agudos miden 45° y para un triángulo equilátero donde al trazar la altura, el triángulo queda dividido en otros dos triángulos rectángulos cuyos ángulos son de 30° y 60°. Con solo la explicación de las demostraciones anteriores, se formulan tres ejercicios de cálculo simple cuyo contenido no pone de manifiesto el apartado tratado.

Por último el tema quedaría completado con la explicación de “*Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera*”, donde por medio de representaciones de la circunferencia gonométrica se sectorizan los cuadrantes y se pone de manifiesto los diferentes signos de las razones trigonométricas según el ángulo trazado. Además mediante varios ejemplos y gráficos se explica la reducción de ángulos al primer cuadrante. Otros conceptos tratados son: ángulos complementario, suplementario y opuesto con explicaciones teóricas bastantes dificultosas en su comprensión y con tablas simbólicas y numéricas donde a priori existen contenidos complicados de comprender por sí solos, con escasez de ejemplos para un mejor entendimiento.

El último apartado del tema es dedicado a “*Aplicaciones de la Trigonometría*” dónde se proponen algunos problemas que más que actividades de aplicación son simples tareas de cálculo sin contexto alguno; por ejemplo: *Calcula el área de un pentágono regular cuyo perímetro es 30cm*. Otras de ellas sí se encuentran contextualizadas en alguna localización real o hace referencia a un objeto concepto (aunque poco cotidiano).

En las últimas páginas del tema se proponen 58 actividades referentes a la unidad desarrollada, de las cuales sólo 7 cuentan con la representación de algún elemento, edificio o paisaje donde se pone de manifiesto la visualización de entornos reales para su aplicación.

Seguimos con el análisis de la **segunda editorial** escogida, (**Guadiel**). A diferencia de la editorial analizada anteriormente, en este libro no existe un tema previo con la explicación de semejanza de triángulos, Teorema de Tales; sino que los conceptos precedentes se centran en la semejanza y homotecia de figuras y cuerpos, así como el cálculo de escalas e interpretación de mapas. El comienzo al tema de trigonometría parte de un pequeño recordatorio de las definiciones de catetos e hipotenusa (sin hacer referencia al Teorema de Pitágoras) y de la definición de triángulos semejantes por medio de dos figuras de triángulos (sin mención alguna del Teorema de Tales).

El primer apartado se denomina: “*Medida de ángulos*”. Aquí se desarrollan las distintas unidades en las que se pueden medir los ángulos así como su conversión. Para la explicación de la conversión de unidades de ángulos, sólo se pone como referencia 2π junto a una aplicación de una regla de tres, sin la representación de una circunferencia donde aparezcan los cuadrantes y sus radianes para que puedan elegir cualquier

referencia de radian a la hora de la conversión de unidades. Se proponen tres ejercicios simples de cálculo relacionados con el apartado desarrollado.

A continuación se explican las “Razones trigonométricas de un ángulo agudo”, donde existen buenas representaciones gráficas muy visuales correspondientes a los lados que relacionan las fórmulas trigonométricas (error usual en los alumnos, tal y como se ha descrito en la fundamentación didáctica). Además en la explicación de las razones trigonométricas en ángulos de 30° , 45° y 60° , junto a la teoría, existen variedad de representaciones gráficas muy claras que ayudan al entendimiento del concepto. Un aspecto a resaltar es la variedad de ejercicios y casos resueltos, utilizando en ellos las diferentes incógnitas posibles que nos podemos encontrar a la hora de resolver un problema. Solo pone de ejemplo una aplicación “real” para el cálculo de alturas y distancias, todo lo demás son tareas de cálculo directo.

En el apartado siguiente: “Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera”, a diferencia del libro anterior, éste carece de demostraciones y aumenta las ilustraciones, tratando el concepto de una manera más limpia, clara y comprensible. Lo mismo ocurre con las explicaciones de reducción al primer cuadrante, aunque el contenido es el mismo, su estructuración parece más organizada y accesible.

Llama la atención que tras el desarrollo de los contenidos que conforman la unidad, existen dos actividades contextualizadas y resueltas en dónde se guía a los alumnos paso a paso en la resolución del ejercicio. Se organiza de la siguiente manera: un apartado de comprensión, donde se extrae y analiza cada concepto existente en el enunciado. Tras ésta, se planifica su desarrollo y se procede la resolución de la idea planteada. Por último se aconseja la revisión del resultado obtenido así como del proceso seguido. Tras conocer los pasos a seguir para una buena resolución de problemas, se proponen 45 tareas para practicar todos los conceptos aprendidos durante la unidad, en los que sólo 5 de ellos pertenecen a figuras extraídas de un entorno cercano o simplemente real.

La unidad finaliza con una crónica matemática acerca del nacimiento y primer desarrollo de la trigonometría y con un apartado llamado “Atrévete” donde se pregunta en varios contextos como te las ingeniarías para resolver una situación planteada.

Si hacemos una comparación entre ambas editoriales, se puede observar que el contenido tratado es básicamente el mismo, aunque difiere en su forma de plantearlo y estructurarlo.

La editorial Santillana desarrolla su unidad con una base más sólida en lo que a conceptos se refiere, disponiendo de más teoría y realizando una serie de demostraciones matemáticas de conocimientos que se deben ser adquiridos; sin

embargo la editorial Guadiel es mucho más ilustrativa y estructurada en la explicación de conceptos aunque su base teórica es más pobre.

Respecto a las tareas propuestas, ambas editoriales son bastante similares. Se plantean tareas para cada apartado desarrollado y se realiza una recolección importante de ejercicios tras la finalización del tema. Quizás cabe resaltar los ejercicios resueltos y ejemplos de la editorial Guadiel, ya que ayudan a entender de una manera más cómoda las ilustraciones y teoría correspondiente a la unidad. Sin embargo, ambos tienen algo en común, el breve desarrollo respecto a las aplicaciones que tiene la trigonometría. Se ponen escasos ejemplos y ejercicios de situaciones reales dónde la medición de un ángulo o distancia tenga un objetivo concreto o que genere inquietudes cercanas a lo cotidiano a la hora de resolverlo.

El contenido de la unidad es bastante similar pero no exactamente igual. En la siguiente tabla se detallan algunos de los conceptos no tratados en la unidad según editorial:

FALTA DE CONTENIDOS EN LA UNIDAD	
SANTILLANA	- Conversión de ángulos entre el sistema sexagesimal y el de radianes. - Relaciones trigonométricas inversas: cosecante, secante y cotangente.
GUADIEL	- Fórmula: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. - Teorema de Tales y Pitágoras sin identificación, simplemente se hace un recordatorio sin referenciar su procedencia.

Tabla 4: Contenidos no identificados en la unidad, según editorial; Fuente: Elaboración Propia

Los contenidos mencionados en la tabla superior son objeto de aprendizaje según el currículo vigente. Otros de los criterios de evaluación no identificados en ambas editoriales son el cálculo de magnitudes efectuando medidas directas a partir de situaciones reales, predominado en ambas cálculos indirectos de distancias.

El empleo de medios o herramientas tecnológicas propuestas para el desarrollo de actividades es nulo, según la tipología de ejercicio que se pide resolver. Está en la mano del docente acoplar y reelaborar los enunciados proporcionándole una orientación más tecnológica para poder resolverlos mediante alguna herramienta TIC.

Según lo desarrollado en el apartado de Fundamentación Didáctica, estas editoriales organizan su materia en un contexto bastante tradicional y algo alejado de las investigaciones sobre otras metodologías que se han mencionado. Las tareas

propuestas son bastante individualistas, sin propiciar un clima cooperativo y colaborativo entre iguales. Una participación conjunta en las actividades hace que los alumnos aprendan uno de otros, siempre que exista la figura de un mediador cognitivo que medie la situación y corrija algunos fallos conceptuales que puedan surgir en alguna situación. El aprendizaje entre iguales conduce a alcanzar buenos resultados de aprendizaje ya que la explicación se realiza desde un mismo o similar nivel cognitivo, lo que propicia un entendimiento más inmediato y eficaz.

También es de gran importancia, según los artículos en los que se ha basado la fundamentación didáctica, el orientar los problemas hacia situaciones y ámbitos cercanos, demostrando que las matemáticas tienen su aplicación en aspectos cotidianos de la vida, sin tratarse de simple formulas cuyo objetivo es el de su memorización. Sin embargo se ha podido tener una percepción general, tras el análisis de ambos libros, que la mayoría de ejercicios tienen el fin de adquirir una técnica o metodológica que se aplica directamente según los datos que nos proporcione el problema. Sin embargo, otras de las tareas (en su minoría), sí disponen de representaciones gráficas de lugares u objetos donde se simbolizan las distancias y ángulos en referencia a figuras reales. No es lo mismo que los alumnos resuelvan una gran cantidad de actividades por medio de la figura de un triángulo, a que ese mismo triángulo esté identificado en un elemento cotidiano donde los catetos e hipotenusa tienen una interpretación real y visual de distancias identificativas.

Tras los errores más usuales cometidos por los alumnos, identificados en el apartado de Fundamentación Didáctica, los ejercicios propuestos por ambas editoriales, ponen poco remedio para paliar la situación inducida al fallo. Como se comentaba anteriormente, si su aplicación no se exterioriza o se realizan ejercicios visuales donde se realicen mediciones directas, los alumnos seguirán cometiendo errores en cálculos de longitudes, con resultados incoherentes (soluciones de longitudes de catetos más grandes que la hipotenusa), centrando su pensamiento en la obtención de un simple resultado. Para aminorar los errores a la hora de nombrar lados y ángulos que no induzcan a confusión, no existen aclaraciones precisas para una nomenclatura en un orden concreto. Sin embargo para la dificultad en la confusión de cateto opuesto y adyacente, los libros presentan claras representaciones con figuras que evidencian una clara definición del concepto.

La organización de los contenidos está guiada para impartir la clase mediante una metodología tradicional. El escaso predominio de actividades cooperativas o el insuficiente empuje hacia el uso de las TIC es una cuestión por definir, en la que el docente presenta un papel fundamental a la hora de elaborar y adaptar los contenidos del libro orientándolos hacia una metodología más moderna para un aprendizaje más significativo.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Para tener un conocimiento más profundo sobre el fundamento del tema objeto del presente trabajo: Trigonometría, se desarrolla el tema de oposición “Número 38: TRIGONOMETRÍA PLANA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS”, según las especificaciones de temario recogidas en el BOE, num. 226, de 21 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el RD 850/1993, de 4 de junio.

El tema desarrollado tendrá la siguiente estructuración:

4.1. INTRODUCCIÓN

4.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

4.2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

4.2.2. GENERALIZACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

4.2.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONOMÉTRICA

4.3. RAZONES DE LA COMPOSICIÓN DE ÁNGULOS

4.4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

4.5. APLICACIONES

4.5.1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

4.5.2. APLICACIONES TOPOGRÁFICAS

4.6. CONCLUSIÓN

7. BIBLIOGRAFÍA

La intención en la elaboración de este apartado es clarificar la epistemología en los distintos entornos en donde la trigonometría forma parte de la comunidad matemática, haciendo un repaso histórico breve, destacando aquellas definiciones, teoremas y demostraciones que fundamentan el tema y finalizando su exposición con una breve conclusión.

4.1. INTRODUCCIÓN

Trigonometría, etimológicamente significa medida de triángulos. La *trigonometría plana* es la parte de las matemáticas encargada de la resolución analítica de triángulos planos. Se trata de obtener fórmulas que relacionen longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos de un triángulo.

Los orígenes de la trigonometría estuvieron motivados por poder construir una astronomía cuantitativa; predecir trayectorias y posiciones de cuerpos celestes, ayudar a medir el tiempo, el cálculo del calendario, la navegación y la geografía. Se considera a Hiparco (S. II a. C.) fundador de esta rama de las matemáticas, aunque sus trabajos estaban basados en triángulos esféricos y no planos. Hiparco divide la circunferencia en 360 grados, cada grado en 60 partes y cada parte en otras 60 (a lo que hoy llamamos minutos y segundos). Su trabajo fue continuado por Menelao y Ptolomeo.

Existen numerosos trabajos hindúes (aprox. 200-1200 dC) y árabes (aprox. 900-1400 dC) sobre trigonometría, basados fundamentalmente en los resultados de los antiguos griegos. Los hindúes introdujeron del seno tal y como hoy lo conocemos.

En el caso de los árabes, la trigonometría comienza a desvincularse de la astronomía, habiendo interesantes estudios. Los europeos no conocieron estos trabajos hasta aproximadamente mediados del S. XV.

Aunque sigue siendo usual emplear la medida de la amplitud de ángulos en grados sexagesimales, desde el punto de vista matemático, se considera unidad natural el radián, que por definición es el ángulo que teniendo su origen en el centro de una circunferencia cualquiera, abarca un arco de ésta de longitud igual a su radio. Al ser la longitud de la circunferencia 2π veces su radio, la amplitud total del plano es 2π radianes.

En este tema se partirá de los conceptos y propiedades asociados a las razones trigonométricas planas usuales, así como de sus inversas, para triángulos rectángulos, generalizando después su definición para cualquier amplitud dada por un número real cualquiera.

Abordaremos la resolución analítica de triángulos haciendo uso de proposiciones fundamentales como los teoremas del coseno y del seno, que relacionan razones trigonométricas de ángulos y longitudes de lados en un triángulo.

Por último, se tratará el uso de la trigonometría, centrándonos en aplicaciones geométricas y topográficas, aunque hay que hacer mención a su aplicación a la física, para tratar componentes vectoriales de diferentes magnitudes físicas o para establecer sistemas de referencia (entre otras).

4.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

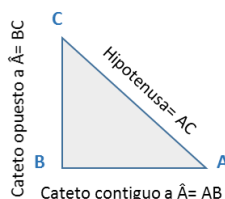
4.2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

La trigonometría está basada en propiedades relativas a las razones entre los lados de un triángulo rectángulo; razones trigonométricas.

Como sabemos, todos los triángulos rectángulos obtenidos al trazar perpendiculares a uno de los lados contiguo de un ángulo agudo, (triángulo en posición de Tales), son

semejantes (por el primer criterio de semejanza); por tanto, las razones trigonométricas sólo dependen del valor del ángulo y no del tamaño del triángulo.

La nomenclatura habitual de un triángulo es la que se indica en el siguiente dibujo:



DEFINICIONES:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, recto en B, se definen las siguientes razones trigonométricas:

- El seno del ángulo $\hat{A}$ es la razón del cateto opuesto a la hipotenusa. Se denota:
 $\text{sen } \hat{A} = \frac{BC}{AC}$
- De misma manera, el coseno del ángulo $\hat{A}$ es: $\text{cos } \hat{A} = \frac{AB}{AC}$
- La tangente del ángulo $\hat{A}$ es: $\text{tg } \hat{A} = \frac{BC}{AB}$

A partir de éstas, podemos definir las razones trigonométricas inversas:

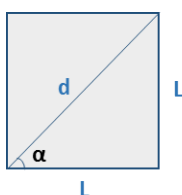
- La cosecante del ángulo $\hat{A}$ es: $\text{cosec } \hat{A} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\text{Sen } \hat{A}}$
- La secante del ángulo $\hat{A}$ es: $\text{sec } \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\text{Cos } \hat{A}}$
- La cotangente del ángulo $\hat{A}$ es: $\text{cotg } \hat{A} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\text{Tg } \hat{A}}$

Ejemplos:

Calculamos las razones trigonométricas de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\alpha = \frac{\pi}{3}$

- Para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Consideramos un cuadrado de lado "L". Trazamos la diagonal, "d" y aplicamos el Teorema de Pitágoras:



$$d^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \implies d = \sqrt{2} L$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{L}{d} = \frac{L}{\sqrt{2} L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{L}{d} = \frac{L}{\sqrt{2} L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{L}{L} = 1$$

Análogamente, para las razones inversas:

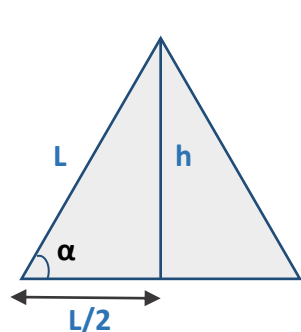
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1$$

- Para $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Consideramos un triángulo equilátero de lado “L”. Trazamos la altura y aplicamos el Teorema de Pitágoras:



$$L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4} ; \quad h^2 = \frac{3}{4} L^2 ; \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} L$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} L}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} L}{\frac{L}{2}} = \sqrt{3}$$

Análogamente para las razones inversas:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = 2$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Veamos algunas relaciones existentes entre las razones trigonométricas:

$$1) \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$

$$2) \cotg \hat{A} = \frac{\cos \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{A}}$$

$$3) \operatorname{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$4) 1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A} = \sec^2 \hat{A}$$

$$5) 1 + \cotg^2 \hat{A} = \operatorname{cosec}^2 \hat{A}$$

6) Ángulos Complementarios:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \cos \hat{C} \quad \operatorname{cosec} \hat{A} = \sec \hat{C}$$

$$\cos \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{C} \quad \cotg \hat{A} = \operatorname{tg} \hat{C}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \cotg \hat{C}$$

$$\sec \hat{A} = \operatorname{cosec} \hat{C}$$

Las demostraciones de todas ellas son triviales, sirva a modo de ejemplo:

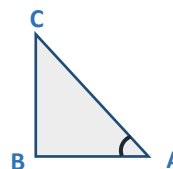
$$3) \operatorname{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

c.q.d.

$$4) 1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A} = \sec^2 \hat{A}$$

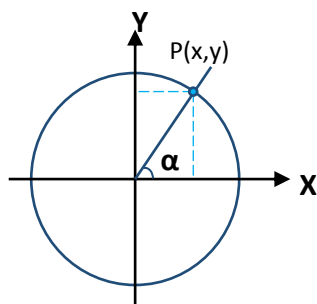
$$1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A} = 1 + \frac{\sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}} = \frac{\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}} = \left(\frac{1}{\cos \hat{A}} \right)^2 = \sec^2 \hat{A} \quad \text{c.q.d.}$$



4.2.2. GENERALIZACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas vistas para el ángulo agudo $\hat{A}$, se generalizan a todos los ángulos del plano. Para ello:

- Supongamos unos ejes coordenados cartesianos rectángulos con origen en "O".
- Con centro en "O" se traza una circunferencia goniométrica (de radio la unidad) y se toma como origen para medir los ángulos el eje OX



Las razones trigonométricas de un ángulo $\alpha = \widehat{XOA}$ vienen determinadas por las coordenadas (X, Y) del punto P, intersección de la semirrecta OA con la circunferencia

Así definimos:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = Y \\ \cos \alpha = X \end{array} \right\} \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} \quad \text{si } X \neq 0 \\ \sec \alpha = \frac{1}{X} \quad \text{si } X \neq 0 \\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{Y} \quad \text{si } Y \neq 0 \\ \cotg \alpha = \frac{X}{Y} \quad \text{si } Y \neq 0 \end{array}$$

De manera elemental se comprueba que se recuperan las definiciones dadas para ángulos agudos y que siguen verificándose las relaciones entre las razones trigonométricas.

De dichas relaciones y definiciones de las relaciones trigonométricas, se ve que es posible determinar todas las relaciones trigonométricas de un ángulo (θ), conociendo solo una de ellas y el cuadrante (los ejes coordenados cartesianos dividen a la circunferencia en cuatro cuadrantes, cada uno de los cuales abarca un ángulo recto) en que se encuentra, así se conoce el signo de la abscisa y de la ordenada.

Además de la propiedad [3) $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$] se infiere que:

$$|\operatorname{sen} \theta| \leq 1 \quad ; \quad |\cos \theta| \leq 1$$

Ejemplo:

Sup. $\operatorname{tg} \theta = 2$ y $\theta \in \text{I}$ (primer cuadrante)

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta \implies 1 + 4 = \sec^2 \theta, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{5} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sec \theta = \sqrt{5} \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

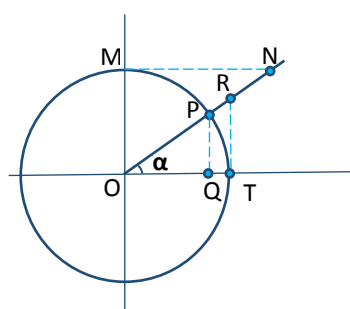
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \implies 2 = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1}{2} \quad \boxed{\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{2}}$$

Por otra parte, podemos ampliar el dominio de definición de las amplitudes de ángulos, haciendo que a cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ le corresponden las relaciones trigonométricas de $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $\theta = \alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

De este modo, bastará estudiar las relaciones trigonométricas de los valores comprendidos entre 0 y 2π .

4.2.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONOMÉTRICA



Los triángulos rectángulos $\widehat{OQP}$, $\widehat{OMN}$ y $\widehat{OTR}$ son semejantes.

Por tanto:

$$\widehat{OQP} \approx \widehat{OTR} \implies \frac{OQ}{OT} = \frac{QP}{TR} = \frac{OP}{OR};$$

donde $OP=1=OT$ y como $QP = \operatorname{sen} \alpha$ y $OQ = \operatorname{cos} \alpha$ se tiene:

$$\frac{\operatorname{cos} \alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{TR} = \frac{1}{OR}$$

$$OR = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \sec \alpha$$

$$TR = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\boxed{OR = \sec \alpha}$$

$$\boxed{TR = \operatorname{tg} \alpha}$$

Segmento tg a la circunferencia

$$\widehat{OMN} \approx \widehat{OQP}$$



$$\frac{MN}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \frac{OM}{QP}; \text{ donde } OP=1=OM \text{ y como } \left\{ \begin{array}{l} QP = \operatorname{sen} \alpha \\ OQ = \operatorname{cos} \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{se tiene: } \frac{MN}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{ON}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}; \quad MN = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\boxed{MN = \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\boxed{ON = \operatorname{cosec} \alpha}$$

Segmento tg a la circunferencia

Análogo al diseño que hemos realizado con el primer cuadrante, se puede realizar para los demás cuadrantes.

4.3. RAZONES DE LA COMPOSICIÓN DE ÁNGULOS

ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN DE ÁNGULOS

Sean dos ángulos planos α y β cualesquiera, se verifica:

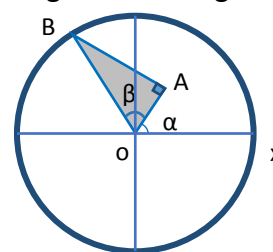
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$

❖ Demostración: Veamos la demostración para el 2º cuadrante. En el resto de cuadrantes la demostración es análoga respetando el signo de los segmentos.

Realizamos la siguiente

construcción:

1. Sea $OB=1$ y sean $\begin{cases} \widehat{XOA} = \alpha \\ \widehat{AOB} = \beta \\ \alpha + \beta = \widehat{XOB} \text{ con } \widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

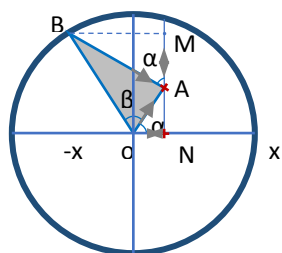


2. Sea MN el segmento paralelo al eje OY que contiene al punto A, con $N \in OX$ y BM paralelo al eje OX

Así pues $\widehat{MAB} = \alpha$, por ser MN perpendicular a OX y AB perpendicular a OA.

Dos ángulos convexos ($<\pi$) cuyos lados sean respectivamente perpendiculares o:

- Son iguales (los mismos lados son perpendiculares)
- Son complementarios (lados opuestos son perpendiculares)



Sean $(-x, y)$ las coordenadas del punto B:

- $\cos(\alpha + \beta) = -x = ON - BM = OA \cos\alpha - AB \sin\alpha = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha$
- $\sin(\alpha + \beta) = y = MN = NA + AM = OA \sin\alpha + AB \cos\alpha = \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha$

Al generaliza las relaciones trigonométricas para cualquier amplitud real, tenemos que:

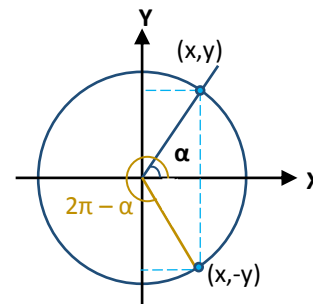
$$\cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha)$$

Donde si las coordenadas de un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ son (x, y) , entonces las coordenadas de $2\pi - \alpha$ son $(x, -y)$ de donde:

$$\cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$



Aplicando esto se obtiene:

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) =$
 $= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha =$
 $= \sin \alpha \cos \beta + (-\sin \beta) \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \quad \text{c.q.d.}$

De este Teorema, se obtienen como consecuencias inmediatas:

1. TANGENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE ÁNGULOS

Sean α y β dos ángulos planos tal que $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$, entonces;

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} ; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Demostración: La demostración es inmediata teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

*Nota: Dividimos numerador y denominador por $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$

Análogamente, se demuestra para la diferencia de ángulos:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO

DOBLE Y EL ÁNGULO MITAD

Sea α un ángulo plano cualquiera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \end{array} \right.$$

Demostración: La demostración de las relaciones trigonométricas del ángulo doble es inmediato hasta aplicar el teorema de adición de ángulos:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Veamos la del ángulo mitad, para ello sea $\beta = \left(\frac{\alpha}{2}\right)$, dónde:

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta; \quad 1 = \cos^2\beta - \sin^2\beta$$

$$\text{Sumamos: } 1 + \cos(2\beta) = 2\cos^2\beta; \quad \frac{1 + \cos(2\beta)}{2} = \cos^2\beta; \quad \cos\beta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2\beta)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\text{Por tanto: } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \quad \text{Restando, obtenemos de manera análoga:}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \text{ y trivialmente } \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \quad \text{si } \cos\alpha \neq -1$$

3. TRANSFORMACIONES DE SUMAS O DIFERENCIAS DE R.T. EN PRODUCTOS

Sean α y β dos ángulos planos cualesquiera, se verifica: $A = \alpha + \beta$; $B = \alpha - \beta$

$$1. \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad 3. \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$2. \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \quad 4. \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

Demostración: Del Teorema de adición y sustracción tenemos

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$$

Sumando y restando, obtenemos respectivamente:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\beta \cos\alpha$$

1

Análogamente:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Sumando y restando, obtenemos respectivamente:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta$$

2

$$\text{Como } A = \alpha + \beta \text{ y } B = \alpha - \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{A+B}{2} \\ \beta = \frac{A-B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = \frac{2A}{2} = A \\ \beta = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = \frac{2B}{2} = B \end{cases}$$

Y sustituyendo dichos valores 1 en y 2 en obtenemos los resultados que queríamos demostrar.

C.q.d.

4. Trivialmente se obtienen las razones de ángulos complementarios y suplementarios de las definiciones de R. T., pero también se deduce del Teorema de adición y sustracción

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha - \sin \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \pi = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = \frac{1}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\sec(\pi - \alpha) = \frac{1}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = -\sec \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha$$

4.4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Se dice que un triángulo está determinado cuando conocidos unos elementos del mismo, pueden determinarse de manera única los restantes. Resolver un triángulo es hallar estos elementos restantes.

Entre los datos disponibles debe de haber algún lado, ya que el conocimiento de los ángulos no determina un único triángulo, sino infinitos triángulos, cuyos lados respectivos son proporcionales.

Para la resolución de triángulos rectángulos, el problema se simplifica ya que se conoce el valor del ángulo recto, y en consecuencia, que sus ángulos agudos son complementarios. Además se tiene el Teorema de Pitágoras que nos da una relación entre la hipotenusa y los catetos.

Veamos algunos teoremas que relacionan los ángulos y los lados de un triángulo cualquiera.

TEOREMA DEL COSENO: El cuadrado del lado opuesto a un ángulo de un triángulo es la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto del coseno de dicho ángulo por los otros dos lados.

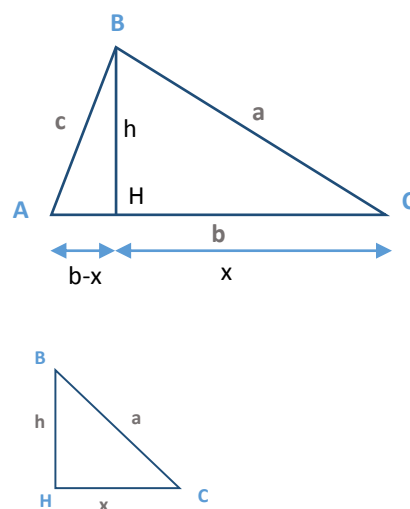
Demostración: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

En efecto, sea "h" la altura desde el vértice B.

Obtenemos dos triángulos rectángulos: AHB y CHB a los cuales aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos respectivamente:

$$\left. \begin{array}{l} c^2 = h^2 + (b-x)^2 \\ a^2 = h^2 + x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c^2 - (b-x)^2 = a^2 - x^2 \\ c^2 - b^2 - x^2 + 2bx = a^2 - x^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \end{array}$$

Donde:



Por tanto:

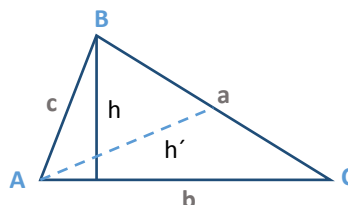
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \implies c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \quad \text{C.q.d.}$$

Análogamente se demostraría que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ y $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

TEOREMA DEL SENO: El cociente entre un lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es una constante propia del triángulo ($2R$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita). *Otra lectura:* Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Demostración: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

En efecto, sea "h" la altura desde el vértice B



Por definición de seno:

$$\sin \hat{A} = \frac{h}{c}; \quad \sin \hat{C} = \frac{h}{a} \quad \text{de donde} \quad c \sin \hat{A} = a \sin \hat{C} \iff \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{a}{\sin \hat{A}}$$

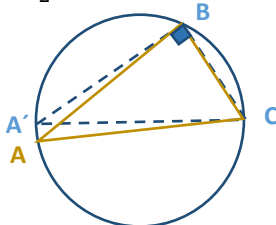
Procediendo de manera análoga desde el vértice A ó C:

$$\sin \hat{B} = \frac{h'}{c}; \quad \sin \hat{C} = \frac{h'}{b} \quad \text{de donde} \quad c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C} \iff \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Por tanto: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Veamos que además dicho cociente es una constante propia del triángulo. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita (pasa por sus 3 vértices).

$$\widehat{A'BC} = \frac{\pi}{2}$$



Sea A' un punto de dicha circunferencia alineado con O y C , entonces los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BA'C}$ son iguales (ángulos inscritos que abarcan el mismo arco BC , donde $A'C$ es un diámetro de la circunferencia).

$$\sin \hat{A} = \sin \hat{A'} = \frac{BC}{A'C} = \frac{BC}{2R} = \frac{a}{2R}; \quad \text{Luego: } \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \quad \text{C.q.d.}$$

A partir de estos teoremas se resuelven todos los casos solubles que pueden presentarse. Veamos ahora algunos resultados importantes, obtenidos a partir de los lados conocidos de un triángulo.

TEOREMA DE LA TANGENTE. TEOREMA DE NEPER

Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo cualquiera con $a \neq b$, entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{tg \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$

Demostración: En efecto por el Teorema del Seno: $\sin \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{B}}$ y puesto que

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}; \quad \text{se obtiene de ambos resultados:}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} + 1}{\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} - 1} = \frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{\sin \hat{A} - \sin \hat{B}} = \frac{2 \sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}{2 \sin \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)} \quad \text{C.q.d.}$$

FÓRMULAS DE BRIGGS

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y sea $p = \frac{a+b+c}{2}$ su semiperímetro, entonces:

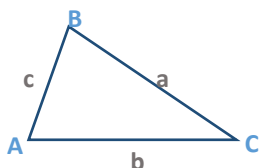
$$a) \quad \sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$c) \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$b) \quad \cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$d) \quad \sin \hat{A} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demostración:



En efecto por el Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\hat{A}}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \hat{A}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{2(p-c)2(p-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}} \quad \text{C.q.d} \end{aligned}$$

Para b) $\cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ la demostración es análoga:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\hat{A}}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \hat{A}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{2p \cdot 2(p-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \end{aligned}$$

Para c) $\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; la demostración es inmediata de las otras dos.

$$\text{Para d) } \sin \hat{A} = \sin \frac{2\hat{A}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2} = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(bc)^2}} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO. FÓRMULA DE HERÓN

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y sea “p” el semiperímetro del triángulo, entonces su área viene dada por: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. FÓRMULA DE HERÓN.

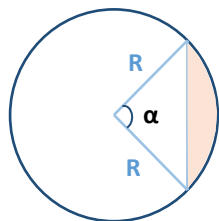
4.5. APLICACIONES

Dentro de las innumerables aplicaciones de la Trigonometría, nos centraremos en las geométricas y topográficas.

4.5.1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Dentro de estas (ya hemos visto la resolución de triángulos, a partir de la cual tendríamos la resolución de polígonos irregulares mediante la triangulación), veamos a modo ejemplo: área de un segmento circular y resolución de polígonos regulares.

ÁREA DE UN SEGMENTO CIRCULAR



Dado el radio R de una circunferencia y el ángulo central α de un segmento circular, podemos determinar su área del siguiente modo:

Área del segmento circular = Área del sector circular – Área triángulo isósceles

El área del sector circular es: $S' = \frac{1}{2} \alpha R^2$

El área del triángulo isósceles determinado por dos radios y la cuerda que los une:

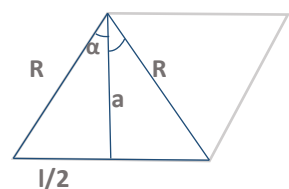
$$S'' = \frac{1}{2} R R \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} \alpha$$

Por tanto el área del segmento circular es:

$$S = S' - S'' = \frac{1}{2} \alpha R^2 - \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \longrightarrow S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$$

RESOLUCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

Sea un n -ágono regular. Sabemos que la apotema y los radios de la circunferencia circunscrita lo dividen en triángulos rectangulares congruentes, siendo el otro cateto la semilongitud del lado.



Conocer los elementos de cualquiera de estos triángulos nos dan los números del n -ágono regular; pero no pueden darse valores arbitrarios de dos elementos (" R " y " a ", " l " y " a ", " l " y " R "), pues el menor ángulo que abarca una apotema y un radio que contenga a un vértice es parte alícuota de π radianes.

El ángulo central de un n -ágono es $\frac{360^\circ}{n}$, de donde $\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi}$

$$\text{Entonces: } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{l}{2}}{R} \longrightarrow l = 2R \operatorname{sen} \alpha$$

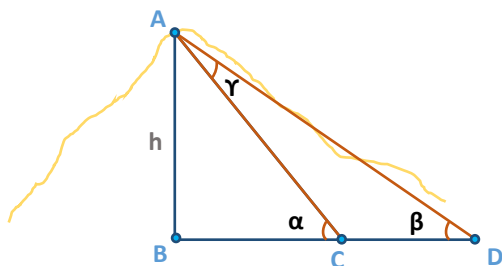
$$\cos \alpha = \frac{a}{R} \longrightarrow R = \frac{a}{\cos \alpha} \quad a = R \cos \alpha; \text{ De ambas: } l = 2 a \operatorname{tg} \alpha$$

Por tanto, si por ejemplo conocemos la apotema es inmediato calcular el lado y el radio.

4.5.2. APLICACIONES TOPOGRÁFICAS

El topógrafo mide con el teodolito los ángulos y por medio de la trigonometría se consigue obtener longitudes, áreas y volúmenes. Por ejemplo:

- Cálculo de la altura de un objeto inaccesible



Pongamos como ejemplo el cálculo de la altura de una montaña:

Para calcular "h" se toman los puntos C y D alineados con B sobre el llano en el que descansa la montaña. Con el teodolito se calculan los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{D}$ sean α y β dichas mediciones. Se mide directamente sobre el terreno la distancia CD.

En el triángulo ABC, se tiene: $h = AC \operatorname{sen} \alpha$

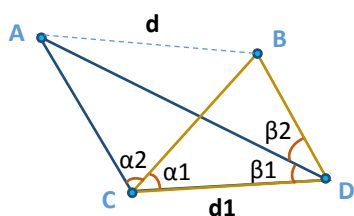
En el triángulo ACD, mediante el teorema del seno: $\frac{CD}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \beta}$

y como $\gamma = \pi - (\beta + (\pi - \alpha)) = \pi - \beta - \pi + \alpha = \alpha - \beta$; se tiene $\frac{CD}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \beta}$;

$AC = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} CD$; sustituyendo en la fórmula de la altura: $h = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} CD \operatorname{sen} \alpha$

- Cálculo de la distancia entre dos punto inaccesibles. Problema de Snellius

Pongamos como ejemplo el cálculo de la distancia entre los picos de dos montañas:



Se eligen dos puntos C y D situados en el llano donde descansan las dos montañas y se mide la distancia CD entre ellos (d_1). Con el teodolito se miden los ángulos α_1 , α_2 , β_1 y β_2 . Aplicamos el teorema del seno a los triángulos ACD y BCD.

Del triángulo ACD: $\frac{AD}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{d_1}{\operatorname{sen}(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1)}$

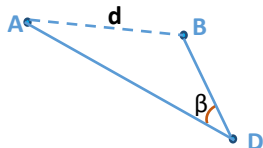
Del triángulo BCD: $\frac{BD}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{d_1}{\operatorname{sen}(\pi - (\beta_1 + \beta_2) - \alpha_1)}$

De dónde ya son conocidos:

$$AD = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{sen}(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1)} d_1 \quad BD = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen}(\pi - (\beta_1 + \beta_2) - \alpha_1)} d_1$$

Por

último al triángulo ADB le aplicamos el Teorema del Coseno:



$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 AD BD \cos\beta_2$$

4.6. CONCLUSIÓN

En este tema que concluimos, hemos partido de las relaciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo; por la semejanza de triángulos sabemos que dichas razones solo dependen del ángulo en cuestión.

Extendiendo estas definiciones las podemos utilizar para cualquier ángulo y mediante procedimientos geométricos hemos obtenido las razones del ángulo suma y a partir de estas se obtienen las demás (ángulo doble, etc.).

Una de las aplicaciones de la trigonometría es la resolución de triángulos (teorema del seno, coseno, etc.) y su uso para el cálculo de medidas inaccesibles. Todo esto tiene un paralelismo en la trigonometría esférica.

4.7. BIBLIOGRAFÍA

Palmer Schacht, N. (1971). *Geometría Moderna*. Compañía Editorial Continental, S.A.

Puig Adam, P. (1947). *Geometría Métrica*.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universitaria.

Barnett Rich, P. (1987). *Teoría y Problemas de Geometría Plana*. (McGraw-Hill, Ed.)

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

Para la posterior elaboración de la Unidad Didáctica (objetivo clave en el desarrollo del presente documento), se ha realizado una serie de búsquedas y contrastes de información de distintas investigaciones en el intento de argumentar las acciones y metodologías elegidas en la segunda parte del trabajo.

5.1 LAS MATEMÁTICAS. PERCEPCION EN LOS ALUMNOS

Las matemáticas siempre han sido un gran reto para los estudiantes. Se trata de una asignatura compleja y a veces inaccesible (a priori) debido a la dificultad de entendimiento de muchos de los conceptos y a la multitud de fórmulas aplicadas para la resolución de los distintos problemas.

Esta fundamentación didáctica, comienza en la obtención de datos acerca de lo que supone para los alumnos la asignatura de Matemáticas. Para ello, se ha consultado en la revista de Ciencias Humanas y Sociales “Percepciones de los alumnos hacia las matemáticas” (Vidal S. y Fuertes, 2016), tratando de obtener una valoración a groso modo del significado que tiene la asignatura en sí.

La metodología usada para la obtención de los resultados ha sido a través de un estudio de encuesta realizado a 158 estudiantes, ofreciéndonos conclusiones próximas

a la realidad y que posteriormente pueden ser utilizadas en el diseño de intervenciones de mejora.

En la recogida de resultados, para alumnos de la E.S.O., se obtienen los siguientes porcentajes:

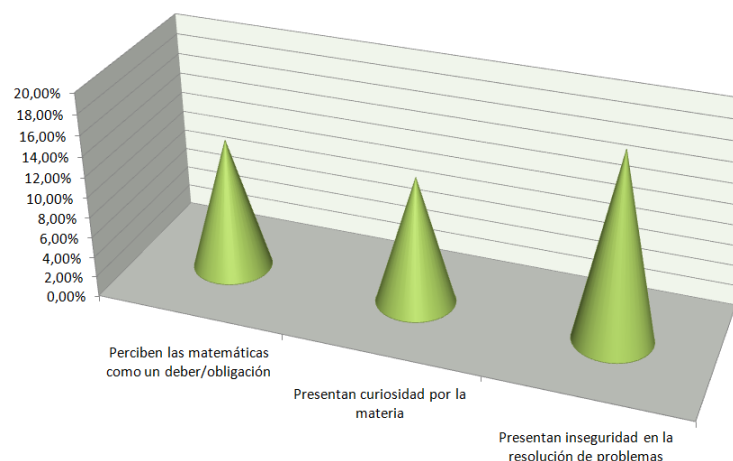


Ilustración 3: Resultados de encuesta alumnos: Percepción de las matemáticas; Fuente de datos: Vidal S. y Fuertes, 2016. Elaboración Propia

De estos resultados se puede deducir que el porcentaje entre los alumnos que perciben la asignatura como un deber y los alumnos que presentan un interés por ella, está bastante compensado. La inseguridad reflejada por los alumnos en la resolución de problemas es algo más notable, pero sin presentar resultados alarmantes en cuanto inestabilidad o desequilibrio de respuestas matemáticas. Se ha de tener en cuenta que de cada elemento estudiado, en ninguno de los casos se sobrepasa del 20%. Además de las percepciones anteriores, se baremó una serie de ITEMS adicionales, proporcionando distintos adjetivos a la asignatura. Las respuestas más frecuentes fueron: útiles, repelentes, dificultosas, impuestas, factibles y con un grado medio de acercamiento a la vida diaria. Entre estas definiciones, existen adjetivos orientados más bien a sensaciones y que presentan dificultad para el cambio de percepción por parte del alumnado. Sin embargo otras cualidades, como son el acercamiento de las matemáticas a la vida diaria, puede estar más cercana a la disciplina impuesta por el docente, pudiendo tomar parte en el cambio de pensamiento del alumnado.

Aunque los alumnos van definiendo las Matemáticas como más complicadas y complejas cada curso consecutivo, también se obtiene una respuesta positiva frente a la utilidad de las mismas. Con este resultado se puede concluir que los conocimientos aportados por parte del docente al alumnado, se van asentando de forma paulatina durante su desarrollo cognitivo.

Tras esta exposición, en el desarrollo de la Unidad y en su aplicación real durante las clases, se deberán tener en cuenta estas percepciones respecto a la asignatura. Una

buena comunicación positiva y basada en fundamentos aplicables a la realidad, puede mejorar los resultados obtenidos en la encuesta del artículo de referencia.

5.2 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Son muchos los rechazos que la asignatura de matemáticas provoca sobre el alumnado. Las matemáticas son percibidas (para la mayoría) como una materia compleja, cuyo significado es difícil de interiorizar y adaptar a la vida cotidiana.

(Carrillo Siles, 2009) realiza un estudio de aquellas dificultades que aparecen durante el proceso de aprendizaje. Estas dificultades las clasifica en tres campos de naturaleza diferente:

- *Dificultad debida a la naturaleza de las matemáticas*

Un miedo presente en la resolución de ejercicios es llegar a un resultado correcto, ya que el resultado final está exento de ambigüedades, o es correcto o es erróneo. El desarrollo matemático trae consigo conceptos que para los alumnos cada vez parecen más abstractos y desapegados de representaciones apreciativamente más ricas y relacionadas con lo cotidiano.

Una idea común presente en los alumnos, es la complejidad que requiere la asimilación de conceptos matemáticos. El profesor debe analizar cada idea o concepto que crea que puede ser objeto de dificultad para la comprensión del alumnado. Algunas de las estrategias usadas por los profesores para la superación de estas dificultades son:

- Usos de analogías. Se intenta enseñar el concepto de una manera más cercana y familiar de manera que su aprendizaje resulte más fácil.
- La abstracción como vía alternativa. Debido a que una misma idea puede llegar a mostrar distintos aspectos si son aprendidos en contextos diferentes, la mejor solución es presentar las definiciones, teoremas y técnicas de una manera lo más abstracta posible, evitando que se puedan crear reflexiones o percepciones distintas de aquello que se pretende enseñar.
- La autoridad como argumento. El docente como máxima autoridad de la clase, muchas veces usa su dominio con el argumento: "Hazlo como te digo". Esta consideración está exenta de explicaciones, considerando que con veces reiteradas de practicar los ejercicios se consigue llegar al objetivo de aprendizaje. Este hecho, solo conduce a repetir una y otra vez una serie de reglas o métodos sin aplicación o entendimiento lógico, por lo que finalmente serán olvidadas o mal utilizadas.

Todos los conocimientos matemáticos adquiridos van guardando una correlación entre sí, es decir se va formando una estructura jerárquica de conocimientos en el que cada

conocimiento tiene una fuerte conexión con los anteriores, en un orden lógico. El orden de dificultad del concepto no solo va ligado a contenido matemático, sino que está asociado directamente a las características psicológicas y cognitivas que los alumnos desarrollan en cada etapa. Para evitar la introducción de conceptos no propios de asimilación a esas edades, se debe realizar una buena selección y organización de los contenidos con una presentación de los mismos clara y con apariencia conexa. Aunque el contenido se presente muy estructurado, se debe trasladar como útil y servible, sino su disposición y atracción disminuirá de una manera considerable.

Otras de las principales dificultades es la definición de los conceptos matemáticos, ya que no se definen de manera inductiva, sino deductiva. Se tiene constancia que el problema no radica en su manera de definición sino que también existe la falta de atención sobre el pensamiento y razonamiento lógico.

El lenguaje utilizado en las matemáticas se aleja considerablemente del lenguaje utilizado de manera natural en la vida cotidiana. Este aspecto produce que el lenguaje sea una dificultad más a la hora de asimilar conceptos y teorías matemáticas, produciendo conflictos en su interpretación. En la siguiente tabla comparativa se puede observar las diferencias más significativas en cuanto a los usos de lenguaje:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE MATEMÁTICO
Se repite y todo el mundo lo habla constantemente aunque a veces su significado puede resultar ambiguo.	Es específico, determinado, riguroso, siguiendo en todo momento unas reglas exactas.
Puede definir su contenido o significado a pesar de que existan carencias sintácticas.	Su interpretación se realiza dándole una correcta interpretación a una simbología estricta.
Además de llegar a ser entendido mediante su descripción más exacta, puede ser ayudado a entenderse mediante gestos, asociación o alusiones. Facilita la comunicación	Carece de intenciones, valores, emociones y afectos. Facilita la inferencia.

Tabla 5: Diferencias en el uso del lenguaje, Fuente: (Carrillo Siles, 2009)

Haciendo alusión al lenguaje matemático, podría resumirse que sus principales dificultades son: su complejidad sintáctica, el vocabulario técnico utilizado, la notación y simbología utilizada para la definición de conceptos y posterior resolución de problemas y su incapacidad en relacionar esta materia con el contexto.

- *Dificultad debida a la organización, enseñanza inadecuada y a la metodología seguida*

Uno de los problemas es la posibilidad de la organización de grupos de capacidad heterogénea en matemáticas. Tal y como señala Pineda, citado por (Carrillo Siles, 2009) en su artículo, a medida que aumenta la dificultad de los contenidos matemáticos que han de ser aprendidos, la labor del docente se facilita si éstos están distribuidos en grupos con una disposición y aptitud semejante. No obstante, el tener una organización diseñada para tal fin, no asegura por sí sola alcanzar el éxito.

Cada tipo de organización tiene sus pros y sus contras en lo referente a aminorar las dificultades de aprendizaje; pero no depende solo de eso, sino que si la metodología empleada, los recursos que se utilizan y estilo de enseñanza no son los adecuados ni están ajustados a las necesidades de los alumnos, la clase no podrá solventar el problema de dificultad de aprendizaje.

En cuanto al currículo que se debe seguir para el alcance de los diversos objetivos, los aprendizajes deben de estar asociados al entorno, costumbres y experiencias para proporcionarle un sentido lógico carente de sucesos ajenos, indiferentes y extraños de asumir e interpretar por los alumnos. El docente es quien tiene el papel fundamental para adaptar los contenidos de enseñanza a los alumnos atendiendo a la diversidad y a las circunstancias personales de cada estudiante. Es en este punto donde el docente debe de proporcionar tareas apropiadas ofreciendo ejemplos sencillos y comprensibles donde las explicaciones realizadas hayan quedado suficientemente claras. En su destreza por dar el contenido, el docente, debe evitar una metodología rutinaria donde se realicen normalmente actividades rutinarias y mecánicas.

Un uso excesivo de matemáticas formalistas hace que el alumnado crea que la aplicación de las matemáticas se basa en la repetición de un método reglado para la consecución de la obtención de un resultado, sin concebir que la solución puede ser obtenida por diferentes caminos. Esto a veces puede provocar insuficiencia de confianza por parte del alumno, ya que si no ve una aplicación directa de una regla, su seguridad ante la materia puede desaparecer.

Las matemáticas deben ser trabajadas adaptándolas en todo momento al alumno y sus necesidades, planteándole los diferentes contenidos como conocimientos necesarios de adquirir para el desarrollo de la vida, en los cuales puedan observar una aplicación directa de la materia.

5.3 DIFICULTADES EN TRIGONOMETRÍA. MÉTODOS DE APLICACIÓN.

Tras una breve introducción de la sensación que produce el estudio general de las Matemáticas, ¿Cómo se sienten los alumnos en la asimilación de conceptos trigonométricos?, ¿Cuáles son sus principales errores?, ¿Existen metodologías que

certifiquen una mejor adaptación y captación de conceptos en las relaciones trigonométricas?. Para poder contestar a todas esas preguntas, esenciales a la hora de abordar el diseño de la Unidad Didáctica, se ha consultado distintas fuentes de investigación con el objeto de encontrar la mejor opción adaptada a la actualidad y que satisfaga la necesidad del medio en el que nos encontramos.

Son pocas las fuentes de información e investigaciones sobre el tema de dificultades de aprendizaje y errores de trigonometría en la asignatura de matemáticas, sin embargo los autores (Naranjo Triana & Triana Tobar, 2015) realizan un artículo de investigación donde se exponen diferentes reflexiones tras indagar la problemática en el aula.

El artículo refiere que la forma más común de introducir la trigonometría a los alumnos es mediante explicación de fórmulas y algoritmos, de manera que los alumnos practiquen y las utilicen repetidamente en distintas actividades de clase. Esto es motivo de numerosas dificultades de aprendizaje generando poca (e incluso nula) comprensión de los conceptos trigonométricos. Para evitar que esto suceda, se sugiere una enseñanza donde el alumno tome un papel más activo a través del trabajo experimental.

Según, los autores (Sicre & Munguía, 2007) el núcleo disciplinar donde se encuentra el tema en cuestión, son las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente de ángulos agudos, ya que un buen tratamiento de estas razones resulta servir para la concepción de todos los demás casos incluyendo aquellos que tengan una estructuración más compleja. Así mismo, otra base fundamental resulta un buen entendimiento de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, ya que si se carece de una clara comprensión de conceptos, en el futuro producirá grandes dificultades el resolución de problemas más complicados. Con estos motivos expuestos, la investigación tiene en cuenta un proceso de aprendizaje a través de la indagación en el aula con el fin de entender todas aquellas necesidades en la resolución de triángulos rectángulos mediante razones trigonométricas.

(Arenas, Becerra, Morales, Urrutia , & Gómez, 2014) Realizaron un estudio de clasificación de obstáculos que estudiantes comprendidos en la edad de 15 y 17 años presentan en el área de trigonometría:

1. Dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados a problemas, en los que se involucran las razones trigonométricas.
2. Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.

3. Dificultad para construir transformaciones sintácticas de las razones trigonométricas en una misma representación, a partir de los datos dados en el problema.

La manera de producir y hacer matemáticas según (Vasco, 1978) parte de actividades, manipulaciones y movimientos. Trata con importancia el darle significado a la simbología así como a la realización de distintas representaciones materiales. Las matemáticas deben concebir y producir a través de la realización de tareas y no a través de la reiteración de algoritmos. Algunas de las maneras de trabajo que propone son: formulación de hipótesis y conjeturas, manipulación y experimentación con los objetos matemáticos, justificación, demostración, entre otras.

Para poder aplicar en el aula las distintas formas de trabajo mencionadas, es necesario un rol distinto al que habitualmente se viene realizando entre el docente-discente. El rol del estudiante tiene un papel más activo mediante la investigación y conjeturación de los elementos matemáticos. El papel del profesor ocupa una posición importante en cuanto al diseño de tareas, guiando a los alumnos al desarrollo de la actividad mediante la formulación de preguntas, sin proporcionarle indicaciones pautadas para llegar a la solución.

Durante estas dos últimas décadas, se ha venido implementando una mayor importancia a las líneas de investigación de la didáctica en referencia a su enseñanza y aprendizaje. Para realizar una metodología más constructivista, (Ortiz & Arias, 2012) apoyan el uso de herramientas TIC durante las clases, lo que concuerda con el enfoque experimental que se está intentando abordar en los últimos tiempos en la intención de crear ambientes más exploratorios. Existen otros autores, como (Gomez, 1997), que incide en el uso de herramientas TIC ya que permite una manipulación dinámica de los elementos matemáticos en distintos sistemas de representación, facilitando la asimilación de conceptos que a priori resultan más complejos si estos son resueltos mediante una metodología tradicional.

Como recomendación de recursos para el aprendizaje trigonométrico, el artículo señala el software educativo GeoGebra. Se trata de un software gratuito y accesible para todos dónde se dibuja y se definen elementos matemáticos favoreciendo un mayor entendimiento de la definición conceptual, que a veces resulta tan indescifrable. Se pueden construir conceptos a través de prueba y error, explorando distintas posibilidades y comprobando conjeturas que son complicadas de materializar con papel y lápiz. También resulta útil para la familiarización con símbolos y nuevas nomenclaturas como puede ser seno, coseno y tangente.

La característica más notable de GeoGebra es la doble apreciación de los objetos, una en la vista gráfica (Geometría) y otra en la vista algebraica (Álgebra). De esta forma,

podemos apreciar continuamente la conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas.

Para materializar la indagación en las clases, el artículo menciona el trabajo bajo el enfoque de investigación-acción (IA) aumentando la calidad y el juicio profesional del profesor en sus clases.

Este enfoque (IA), se opone a la metodología tradicional en cuanto a investigación educativa, ya que señalan a estos investigadores como grandes expertos pero que desconocen el entorno real del aula.

(Martinez, 2000) define este proceso como esencial para que el docente pueda identificar todos aquellos problemas que los alumnos tienen en la captación de conceptos, evaluándose el docente a sí mismo y valorando la creación de un nuevo plan de acción para paliar la ineficacia de otros métodos aplicados.

Adentrándonos en la investigación de este artículo, para poder sacar conclusiones de todas aquellas dificultades que los alumnos tienen cuando se enfrentan a la unidad de trigonometría, se realiza una clase inicial donde se explican los conceptos básicos trigonométricos así como sus relaciones. Los alumnos ya contaban con algunas nociones como son la aplicación del Teorema de Pitágoras y el cambio de conversión de distintas medidas angulares. Tras la entrega a los alumnos de una serie de ejercicios relacionados con el tema, después de que los resolvieran, se pudieron detectar diversos errores y dificultades en el entendimiento de conceptos:

- No se aplica una lógica respecto a la obtención de los resultados. Calculan longitudes de los lados del triángulo con resultados donde la hipotenusa es menor que la longitud de los catetos. Son resultados incoherentes, pero su pensamiento está más centrado en la obtención de un resultado a darle un sentido racional al mismo. Los resultados obtenidos, no implican un obstáculo para continuar con la resolución de los siguientes parámetros de cálculo requeridos para el problema del triángulo propuesto.
- La manera de despejar la incógnita no es correcta. Los alumnos tienden a multiplicar los valores que conocen dejando al otro lado la incógnita, llegando así a una solución más rápida.
- La interpretación de la simbología no es correcta. Por ejemplo, entienden la notación de $\cos(45^\circ)$ como una multiplicación entre el "cos" y el número que lo acompaña (45).
- Tienen dificultades a la hora de nombrar lados y ángulos, por lo que al usar las fórmulas de relaciones trigonométricas los resultados están mal.

- Los conceptos de cateto opuesto y contiguo/adyacente les resultan bastante confusos, tienden a equivocarse en su identificación.

Analizando estos errores cometidos, puede señalarse que la metodología usada carecía de más aplicaciones o fundamentos entendibles para los alumnos. Aquí juega un papel fundamental la investigación-acción (IA), identificando que la manera de explicación escogida, no ha llegado a buen puerto.

La investigación tiene un papel fundamental en la comprobación de resultados una vez aplicado un método fundamentado. Cuando se investiga, no se certifica que los resultados adquiridos vayan a resultar exitosos, la investigación nos sirve como elemento de prueba-error en distintos campos de aplicación. Si algo no funciona, hay que cambiarlo y de nuevo someterlo a una prueba de funcionamiento, repitiendo el proceso tantas veces como sea necesario.

Tras el éxito obtenido en la adquisición de conceptos por parte del alumnado con la metodología anterior (explicación de fórmulas y algoritmos para posterior realización de ejercicios), se realiza esta vez una enseñanza basada en el trabajo experimental. En este modo de aprendizaje, el profesor se convierte en motivador para que los alumnos indaguen e investiguen relaciones entre elementos, no basando el aprendizaje en la definición de teoremas para posteriormente realizar un taller de actividades.

El uso de GeoGebra en esta temática de ejercicios, permite experimentar virtualmente y observar varias soluciones de una manera rápida y exacta, identificando regularidades y aproximaciones en los elementos de trabajo (triángulos). Es una puerta abierta para la formulación de hipótesis y supuestas conjeturas. A diferencia de la metodología tradicional, los alumnos poseen el control del conocimiento matemático, dejando a un lado el miedo, la incertidumbre, las inseguridades y a veces la desmotivación en el aprendizaje de la materia de matemáticas.

5.4 MÉTODOS DE APRENDIZAJE

Tras todos los errores usuales cometidos por los alumnos, las diversas investigaciones que se han consultado para la redacción del presente apartado, animan al docente a realizar actividades llamativas y que resulten motivadoras para el alumnado. Para su motivación y curiosidad por la asignatura de matemáticas se encuentran diversos recursos aplicables a la unidad didáctica de Trigonometría, casi todos ellos propiciando un papel activo por parte del discente, descubriendo por sí mismo nuevos conceptos e indagando en información que a priori desconocen relacionada con la materia a abordar.

5.4.1 USO DE WEBQUEST

En la revista científica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, se ha encontrado los beneficios que aportan el uso de WebQuest en matemáticas,

concretamente para el área de trigonometría. El artículo se titula: “Uso de las WebQuest como recurso educativo potencializador del aprendizaje De la Trigonometría” y tiene el objetivo de aplicar una estrategia enfocada a la investigación. La fuente de información principal para su elaboración es Internet y su aprendizaje se realiza a través de un descubrimiento guiado. Este método trata fortalecer el trabajo autónomo y grupal, así como potenciar las habilidades hacia la investigación y toma de decisiones propias. (Morales Munera & Acevedo Agudelo, 2013).

Debido a crecimiento que está experimentando la tecnología en esta nueva era, la educación debe adaptarse a los nuevos cambios, favoreciendo el uso de herramientas TIC. Los alumnos están desarrollándose dentro de una civilización donde el uso de móviles, ordenadores, tablets y otros elementos tecnológicos están a la orden del día. No solo los usan por necesidad, sino como medio de diversión e interacción con juegos y personas. Esto es un aliciente más para la incorporación de estas herramientas como metodologías de enseñanza y aprendizaje hacia el alumnado, siendo un elemento motivador y potenciador de nuevos estímulos positivos ante el enfrentamiento de adquirir conocimientos desconocidos y que resultan abstractos. La interacción con diferentes elementos relacionados con el tema de trigonométrico permiten fortalecer el cuestionamiento ante conceptos no dominados y la autonomía de trabajo.

El desarrollo de las primeras WebQuest tienen como línea principal el uso de tareas dirigidas que tienen contenidos filtrados y escogidos directamente por el docente, basados en la búsqueda continua de orientar y guiar al alumnado en la indagación de información a través de internet. Su origen surge a mediados de los años noventa y fue formulada por (Dodge, 1995) y desarrollada por (March, 1998). Su uso permite el manejo directo de la situación, generando en el estudiante la capacidad de análisis, síntesis y evaluación donde él mismo es consciente y consecuente de su propio proceso de aprendizaje ya que toma el papel de protagonista en la búsqueda de información.

Tras haber realizado el experimento con la WebQuest, a 170 estudiantes en el ámbito trigonométrico, se ha obtenido como resultado un aumento de trabajo colaborativo en clase, lo cual ha resultado potenciar el pensamiento crítico de los estudiantes. La motivación individual crece, por lo que el desarrollo cognitivo a la hora de resolver distintos problemas es sustancialmente mayor ya que sus respuestas no son buscadas si no construidas por ellos mismos.

Para verificar todos los aspectos positivos acerca de la WebQuest que se definen en el artículo anterior, se ha realizado una búsqueda de información más extensa en diferentes bases de datos rescatando diversa información acerca de los aspectos negativos en el uso de este recurso.

5.4.1.1. VENTAJAS E INCONVENIENTES DE USO DE WEBQUEST

(Sosa Díaz) Además de ser autora de 14 artículos de revista, 3 libros y una tesis (todos ellos publicados en Dialnet), es redactora de un trabajo donde realiza un estudio de las ventajas e inconvenientes que tienen las WebQuest como recurso educativo.

En su trabajo, resalta tanto aquellos aspectos positivos (ventajas) como los negativos (inconvenientes) a la hora de utilizar este recurso. Como anteriormente se han expuesto muchas de las ventajas que nos proporcionaría este tipo de método de trabajo, ahora nos centraremos en aquellos aspectos que resultan más adversos en el uso de este recurso.

A continuación se citan aquellos inconvenientes destacados por Sosa Díaz:

- Todo no se encuentra subido a la red, internet tiene sus límites, encontrando algunas dificultades para concretas búsquedas de información.
- Todo lo que circula por la red no certifica que sea información verdadera y correcta. Muchas veces esta búsqueda puede inducir a errores, ya que se trata de información no contrastada.
- Internet no lo es todo. Es imposible encontrar toda la información requerida mediante este recurso. Los alumnos deben conocer y saber buscar en otros lugares de interés, identificando cuando tiene más utilidad y es más adecuado la utilización de otro recurso (visita a museos, archivos, bibliotecas, etc.).
- Una WebQuest no es válida en absoluto, sino que habrá que pensar siempre en el público al que va dirigido y analizarla a la luz de ese condicionante.
- Para el diseño de una WebQuest se requiere bastante tiempo, determinante que limita a muchos docentes a su creación debido a la insuficiencia de tiempo libre.
- A veces la elaboración de este tipo de recursos presentan dificultades desde el punto de vista técnico ya que es necesario saber utilizar un editor Web, usar con fluidez el lenguaje, programas de edición de documentos Web así como editores de imágenes, y otros programas.
- Existe un peligro en la evaluación con rúbricas cuando éstas no están relacionadas de forma directa con la capacidad o con la habilidad concreta que se quiere medir, teniendo en cuenta los aspectos más visibles y por consecuencia más fácilmente valorables del producto final.

5.4.1.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES EN LA UTILIZACION DE TIC

El uso de WebQuest no es el único recuso dentro de las TIC. Existen muchos más medios de aplicación de la tecnología para que los alumnos alcancen los objetivos y competencias definidas en el Reglamento. Llegado a este punto, nos preguntamos de una manera más global, sin especificar ningún recurso en concreto: ¿Existen inconvenientes generales en el uso de las TIC?

(Palomar Sánchez, 2009) en su artículo, nos da una detallada descripción de las influencias de las TIC en el aprendizaje destacando las ventajas y los inconvenientes que ello conlleva.

Algunos de los inconvenientes más relevantes son:

- Distracciones por parte del alumno, ya que desfocaliza su atención de la tarea y se dedica a jugar en vez de trabajar.
- Dispersión. Debido a la amplia y diversa navegación atractiva existente en Internet, los alumnos se desvían de su objetivo primordial y focalizan hacia otro tipo de búsquedas. Además los alumnos suelen invertir mucho tiempo interactuando con los aspectos accesorios de los distintos programas informáticos.
- A veces existe demasía de información disponible en internet lo que provoca en los alumnos una tardanza adicional en la resolución de actividades. Otras pérdidas de tiempo se producen debido a la dispersión y falta de una metodología de búsqueda.
- La libre interacción de los estudiantes con esta tipología de recursos no siempre es de calidad. Puede provocar aprendizajes incompletos y/o erróneos, dando lugar a una visión de realidad simplista y poco profunda. Debido a la rapidez de respuesta cuando se realiza la búsqueda de información, los alumnos aplican el mismo proceso: rapidez en la captación de información, resistiéndose al empleo del tiempo necesario y convirtiéndose simplemente en una acumulación de datos.
- Diálogos muy rígidos. Los diálogos que se ofrecen a través de la Web, no siempre son entendibles para todos los públicos, requiriendo a veces una formalización previa de respuestas por parte del docente.
- Los programas presentan una visión particular de la realidad, no la realidad tal y como es.

Además de realizar un análisis global de los inconvenientes de las TIC en la docencia, (Palomar Sánchez, 2009) analiza también los inconvenientes que supone desde la perspectiva tanto del alumnado como del profesor.

INCONVENIENTES DE LAS TIC EN EL APRENDIZAJE	
PERSPECTIVA ALUMNADO	PERSPECTIVA DOCENTE
Adictivo. El elemento en sí es motivador, pero un exceso en el uso del mismo puede llegar a crear adicción.	La falta de conocimiento y formación a la hora de manejar sistemas informáticos produce estrés en el trabajo.
Hermetismo. El aprendizaje por internet permite el trabajo autónomo por parte del alumno. Esto a veces puede ocasionar aislamiento y problemas de sociabilidad con el resto de la clase.	Con la actividad que se haya propuesto, el alumno puede no buscar estrategias de resolución, resolviendo la tarea de una manera simple aplicando la ley del mínimo esfuerzo, ignorando aquellas facilidades que le ofrece el programa.
Cansancio en la visión y malas posturas pueden ocasionar problemas en la salud de los alumnos.	A veces el alumno puede conseguir aciertos resolviendo problemas que van más allá de su comprensión, utilizando estrategias no relacionadas con el problema, pero que sirven para lograr el objetivo.
Se realiza una inversión de tiempo a veces excesiva entre búsquedas que no son útiles.	El uso de programas puede llegar a desfazar las demás actividades que se realizan en el aula de trabajo, destacando el abordaje de aspectos parciales de una materia que difieren en la forma de presentación y profundidad de los contenidos.
A veces disponer de una información excesiva, dificulta poder abordar más cómodamente la situación.	Involuntariamente, a veces el alumnado desconfigura el ordenador, lo bloquean por introducción de algún virus generando problemas de mantenimiento en los ordenadores.
En el uso de chats, emails u otras vías de comunicación da lugar a que no haya un buen comportamiento en internet.	Los docentes deber esta reciclándose y formándose continuamente, ya que los programas y la informática se encuentran en un continuo proceso

	evolutivo. A veces el mismo alumnado tiene que enseñar al profesor, perdiendo éste último su autoridad.
A veces el lenguaje en el que se presentan algunos programas o herramientas informáticas no es conocido por los alumnos, dificultando la comprensión.	Un uso correcto de las TIC implica una gran dedicación de tiempo para los docentes si se usan correctamente. Ello conlleva a realizar cursos de formación, tutorías virtuales, etc.
Existen numerosos recursos en la Web, pero todos ellos no cuentan con la misma utilidad. Algunos contenidos son muy simplistas, no logrando potenciar un aprendizaje profundo.	Cualquier incidencia imprevista que le surja a cualquier ordenador es causa de paralización de la clase incluso impedimento del desarrollo de la misma. Si se produce este hecho y el docente no tiene preparado algún recuso sustitutivo, puede llegar a perder el control del aula.

Tabla 6: Ventajas e Inconvenientes en el uso de las TIC, Fuente Palomar Sánchez, 2009

Si comparamos de manera global las ventajas frente a los inconvenientes que ofrece el uso de la TIC, las ventajas son bastante mayores. De esta manera los alumnos pueden utilizar este recurso con varios fines: aprendizaje por descubrimiento, investigaciones, resolución de ejercicios, juegos online, etc. Además permite tanto el trabajo individual como el trabajo en grupo creando un compromiso entre la gente que lo forma. Son métodos poco costosos, aunque el centro debe disponer de ordenadores en clase o aulas de informática para poder hacer uso de ello.

El punto quizás más negativo para el uso de las TIC, viene de la mano del docente a causa de la dedicación de tiempo para su elaboración y la formación complementaria que deben tener para el diseño de los mismos. Este aspecto negativo no radica en que las herramientas TIC sean beneficiosas y motivadoras para el alumnado, contribuyendo a un aumento en su implicación y obtención de un aprendizaje más prolongado en el tiempo.

(Barriuso Pérez, 2007) elabora un artículo en base a un proyecto real de innovación aplicado en un IES durante un curso completo. Antes de comenzar con este nuevo proyecto realizan una formación previa a todo el profesorado del departamento para un buen uso en el manejo de los distintos recursos tecnológicos para poder incorporarlo posteriormente a las aulas con éxito.

El proyecto se basa en constatar los resultados de aprendizaje de los alumnos tras una serie de aplicaciones de recursos interactivos, todos ellos trabajados a través de la web, a la vez que se combinada una serie de actividades cotidianas en el aula.

Ante esta metodología aplicada, en la respuesta del alumnado, se ha notado un aumento en el interés y motivación por la asignatura. La forma de trabajo se ha realizado mediante la aplicación de tareas en formato digital acompañado de exámenes on-line. En su comprobación con los resultados obtenidos se ha cotejado que el efecto provocado supera los resultados obtenidos mediante metodología tradicional.

Tras un análisis de los resultados obtenidos de encuestas de alumnos y profesorado, que ha formado parte de este experimento, la valoración ha sido muy positiva, apostando cada uno de ellos por darle continuidad a esta nueva metodología de trabajo basada en la utilización de nuevas tecnologías y distintos recursos interactivos.

(Barriuso Pérez, 2007) recomienda introducir e implantar la metodología poco a poco, para que los profesores y alumnos vayan familiarizándose con esta nueva forma de trabajo y se pueda así conseguir una mayor autonomía de trabajo en el aula por parte del alumnado.

Aunque se le da mucha importancia al uso de herramientas TIC, no se debe dejar de lado la metodología tradicional. Un uso combinado de los dos métodos favorece una mejora en la enseñanza y en la formación de los alumnos.

Los ejercicios interactivos recomendados en el artículo son aquellos que traen consigo muchas tareas que contengan distintos niveles de dificultad, favoreciendo así los diferentes niveles de conocimiento existentes en clase mediante un aprendizaje mas individualizado según las necesidades y la capacidad de cada alumno. Además se invita a usar otros recursos como la pizarra digital interactiva y proyector, facilitando al alumno el seguimiento de las clases.

Además si en la metodología existen cambios significativos, en la evaluación también deberá de haberlos. No solo se puede valorar los conceptos que hayan aprendido durante las distintas sesiones, sino que hay que valorar otros aspectos como puede ser la correcta utilización de los medios necesarios para la aplicación de este recurso.

Las tareas podrán realizarse individualmente y en grupo, potenciando de esta manera el aprendizaje individualizado y la socialización entre iguales. Al no estar atado al temario regular de un libro, la interdependencia que se crea entre los componentes del grupo, contribuyen a aumentar la implicación así como el aumento de conocimientos persistentes y duraderos.

5.5. USO DE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es uno de tantos métodos que surge para aumentar el efecto de los métodos tradicionales sobre la eficacia en la resolución de problemas más complejos.

Se trata de una metodología que trata incluir los contenidos curriculares de una manera más real y práctica sobre el mundo y el entorno donde vivimos.

El ABP está presente tanto en el desarrollo de una base sólida de conocimientos como en conseguir y alcanzar destrezas y cualidades necesarias para poder hacer uso de los conceptos aprendidos en otros contextos.

Según (Escribano, 2008) se identifican tres elementos fundamentales del ABP: el papel que asume el docente como mediador en el entendimiento del problema, el papel del alumno como el protagonista del proceso que se quiere llevar a cabo y el aprendizaje cooperativo y autorregulado.

Esta metodología requiere una cadena didáctica, que no debe de ser un esquema acotado, pero sí que las actividades propuestas tengan una lógica consecución y estructuración práctica en el aula. Su planificación es fundamental para la obtención de unos buenos resultados, sabiendo hacer uso de ellos en el largo plazo.

(Steinberg, 1997) define seis preámbulos fundamentales para que un ABP tenga un buen funcionamiento en el aula:

- Autenticidad. Debe de existir una relación estrecha entre el entorno donde se contextualiza la actividad con el mundo real, intentando que tenga valor social.
- Rigor académico. Las competencias deben de estar claramente identificadas en relación con los contenidos que se van a abordar siguiendo en todo momento lo establecido en la normativa vigente.
- Aprendizaje aplicado. Integra las habilidades propias del siglo XXI relacionadas con la competencia de aprender a aprender, la competencia social y ciudadana, la competencia digital y el tratamiento de la información o la autonomía y la iniciativa personal.
- Exploración activa. Debe de existir investigación y realización de actividades prácticas con el problema, siendo la experimentación la clave principal del proceso.
- Relación con el mundo adulto.
- Evaluación. La manera de evaluar debe haber sido concretada y fijada antes del inicio de la actividad, mostrándole a los alumnos el valor que tiene cada parámetro alcanzado de la tarea que se va a desarrollar.

(Del Río Sanchez, 1991) en su libro “Aprendizaje de las Matemáticas por Descubrimiento” realiza la comparativa entre dos metodologías tras la aplicación de un proceso instructivo durante 7 meses de actividades basadas en el aprendizaje por descubrimiento. Tras los resultados obtenidos, defiende que el aprendizaje por descubrimiento ayuda entre el alumnado a la adquisición de confianza y admiración, de tal modo que surgirá un diálogo rico entre alumnos. En este diálogo, el docente no debe facilitar la resolución del problema ni debe de dar información de más, sino que son los discentes los que deben pensar por sí mismos en el intento de una búsqueda continua de éxitos, de manera parcial al comienzo y de manera más general al final de las sesiones. Este tipo de aprendizaje es beneficioso para la retención de conocimiento, ya que mediante un test, se evaluaron contenidos vistos con dos meses de anterioridad y éstos eran recordados exitosamente por los alumnos.

6. UNIDAD DIDÁCTICA

6.1. TÍTULO

El título que define a la Unidad Didáctica objeto de desarrollo de esta segunda parte del trabajo se denomina: *“Unidad Didáctica: Trigonometría”*.

6.2. JUSTIFICACIÓN

6.2.1. PUNTO DE VISTA CURRICULAR

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato reconoce a la competencia matemática como clave para el desarrollo y la aplicación del razonamiento matemático, teniendo como fin la resolución de problemas en distintas situaciones con cierta habitualidad. Incluye algunos elementos como son: el pensamiento, el modelado y el razonamiento, el planteamiento y resolución de problemas, uso de distintas representaciones, uso de la simbología matemática, comunicación con las Matemáticas y sobre las Matemáticas y la aplicación de ayudas y herramientas tecnológicas.

Mediante el pensamiento matemático se desarrolla la obtención de otras competencias ayudando a la formación intelectual del alumnado y posibilitando un aumento de desenvolvimiento en el ámbito social y personal.

La actividad matemática permite el desarrollo de actividades como las de exponer, proponer, crear, descifrar y solucionar problemas empleando los procesos cognitivos, útiles para resolver situaciones interdisciplinares en situaciones reales y concretas.

En el desarrollo de actividades matemáticas, además de la competencia matemática, se encuentran implicadas otras competencias que ayudan a los alumnos a desarrollarse en su entorno más cotidiano. Estas competencias implicadas son:

- Competencia Lingüística: Se adquiere con la lectura y comprensión de los enunciados y a través de la comunicación de los resultados obtenidos.
- Competencia Digital: Adquirida al manejar información de manera correcta.
- Competencia Social y Cívica: Se adquiere al contener una disposición abierta ante diferentes soluciones.

- Competencia a Aprender a Aprender: Aumenta la iniciativa y el emprendimiento al establecer un plan de trabajo en continua revisión y modificación hasta la obtención de un resultado final.

Según lo dispuesto en la Orden de 14 de julio de 2016, debido a la sociedad en la que nos encontramos actualmente, donde el crecimiento tecnológico se encuentra en auge, se requiere un aumento en el dominio de conocimientos, ideas y estrategias matemáticas para su uso tanto en la perspectiva profesional como en el desarrollo de la vida cotidiana. Es por ello que la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, otorga a los estudiantes un marco de habilidades, herramientas y aptitudes de gran utilidad para su posterior uso en cualquier acontecimiento surgido. De esta manera, la materia de matemáticas proporciona un doble papel: formativo e instrumental, contribuyendo a la aportación de estrategias y recursos básicos para otras asignaturas. Dotan a otras disciplinas que quieren alcanzar un alto nivel de exactitud en sus predicciones de métodos cuantitativos incuestionables.

6.2.2. PUNTO DE VISTA SOCIAL/PROFESIONAL

Para diagnosticar la importancia que tiene la temática abordada en el presente trabajo (trigonometría), nos debemos preguntar en qué aspectos de nuestra vida cotidiana nos acompaña, incluso conocer sus aplicaciones y usos en los diferentes campos profesionales.

En el universo que nos encontramos se puede decir que todo lo que nos rodea es matemática. Muchas veces puede percibirse y otras muchas permanecer oculta, pero basta con mirar hacia un lado para visualizar un objeto relacionado con cualquier figura geométrica, ver elementos que forman distintos ángulos, tomar referencias en nuestra vida cotidiana interpretando o consultando distancias a lugares (en caso de desplazamiento) o distancias a objetos (en caso de ser requeridos). Su uso se remonta aproximadamente al año 4000 a. C., donde los egipcios y babilonios hicieron un gran uso de ellas realizando los cálculos que cimentan sus espectaculares construcciones. Históricamente se medían las distancias de diversas maneras: uniendo los puntos con cadenas cuya longitud era conocida (como la cadena de Gunter) o cintas de acero. Los ángulos horizontales eran medidos mediante brújulas, las cuales proporcionaban una inclinación magnética medible.

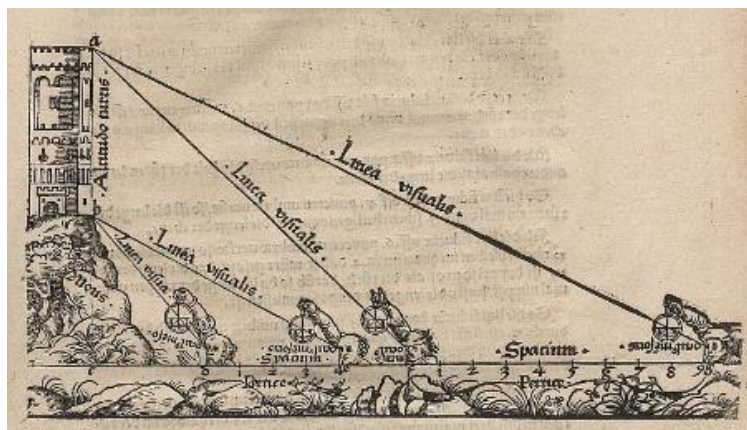


Ilustración 4: Medición de ángulos y distancias en la antigüedad; Fuente: Rojas, 2015.

La trigonometría participa directa o indirectamente en ramas asociadas y no asociadas a las matemáticas, usándose principalmente en la obtención de medidas de precisión.

Las funciones trigonométricas son una gran base de apoyo para muchos ámbitos profesionales. Su aplicación es de gran utilidad y se encuentra extendida en distintas áreas como son industrias, navegación, geografía, astronomía, en los diversos campos de ingenierías y en cualquier ámbito social donde se establezcan relaciones entre diversas variables.

Su uso en algunos de los campos de aplicación mencionados anteriormente se remonta en la más antigua historia. Los babilonios ya usaban razones trigonométricas para realizar medidas de campo relacionadas con la agricultura, además de realizar distintas mediciones de áreas de cuadrados o lados de triángulos rectángulos. Aunque en aquel entonces carecían de formulación general, se centraban en sucesos prácticos, definiendo de esta manera unas matemáticas de aplicación directa al caso.

Lo mismo ocurrió con la astronomía griega en su continua curiosidad por el descubrimiento del conocimiento acerca del universo, usaron técnicas de triangulación para medir la distancia existente entre estrellas.

Su uso en geografía es vital para el cálculo de distancias y sistemas de navegación.

La trigonometría tiene una gran utilidad en todos los campos ingenieriles, destacando su uso en carreras como Topografía (uso en levantamientos y modelaje del terreno), Electrónica (Uso para la identificación de series y señales), Mecánica (Uso para el diseño de distintas piezas), Arquitectura (construcción de edificios) e Ingeniería Civil (Construcción de carreteras, urbanizaciones y cualquier obra civil).



Ilustración 5: Uso de Trigonometría en la construcción de un túnel a través de las montañas para calcular la dirección exacta por la que el túnel debe de salir en el otro lado; Fuente: Rojas, 2015.

Otros de los usos más recientes son los relacionados con videojuegos donde la trigonometría tiene un papel fundamental en la programación; en el desarrollo científico; en la industria de la música y en las imágenes digitales, más conocidas como fotogrametría digital, donde la cámara deduce proyecciones cónicas de la imagen.

Como se puede observar su campo de aplicación es bastante extenso debido a la gran utilidad en el desarrollo del conocimiento tecnológico y matemático.

6.2.3. PUNTO DE VISTA INTERNO

La trigonometría es fundamental para abordar diferentes temáticas tanto en la vida cotidiana, tal y como se ha expuesto anteriormente, como en los distintos sectores profesionales. Es elemental un buen conocimiento de las razones trigonométricas principales para los alumnos de secundaria, estableciendo unos conocimientos base para la posterior comprensión del Teorema del seno, Teorema del coseno, Teorema de Tales y Teorema de Pitágoras; temas que quedan recogidos en el Bloque 3 de Geometría, definido en el Real Decreto estatal.

Si aumentamos el nivel de conocimiento, podemos encontrar otra serie de fórmulas que mantienen un estrecho vínculo con las aplicaciones trigonométricas. Unas de las aplicaciones directas que emergen del teorema del seno y coseno es la función de Fourier, la cual es aplicada en una gran variedad de fenómenos físicos, en temas relacionados con el calor y la transferencia del sonido (entre otros). Otras de las fórmulas donde la trigonometría forma parte de su composición es la fórmula de Euler, la cual permite deducir las funciones seno y coseno como variaciones de la función exponencial.

Podemos encontrar diversas fórmulas, deducidas y desarrolladas a lo largo de la historia para ser aplicadas en varios sectores del entorno que nos rodea, constatando

que la trigonometría se vuelve imprescindible en la determinación de medición de ángulos y distancias con gran precisión y exactitud.

6.2.4. PUNTO DE VISTA ESTÉTICO Y CULTURAL

La geometría de cualquier objeto que nos rodea, nos puede hacer sentir/transmitir pureza, relajación o bienestar según su composición y estética. La parte más afín la trigonometría desde el punto de vista estético podemos encontrarlo en la Arquitectura. A través de las funciones trigonométricas básicas, se han podido encontrar valores opuestos y adyacentes relacionados con un ángulo o con la hipotenusa. Existen edificios que simplemente con contemplarlos se puede destacar el uso de la trigonometría debido a sus formas triangulares. Además, existen diseños (normalmente dispuestos en las cubiertas), que representan con su silueta las funciones del seno y coseno.

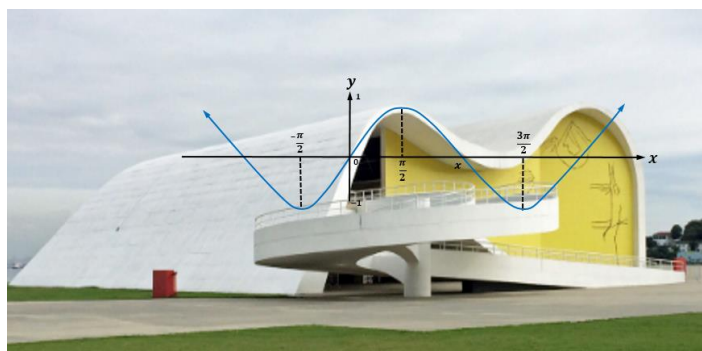


Ilustración 6: Función del seno representada en el Teatro Popular en Niterói, Brasil; Fuente: Elaboración Propia

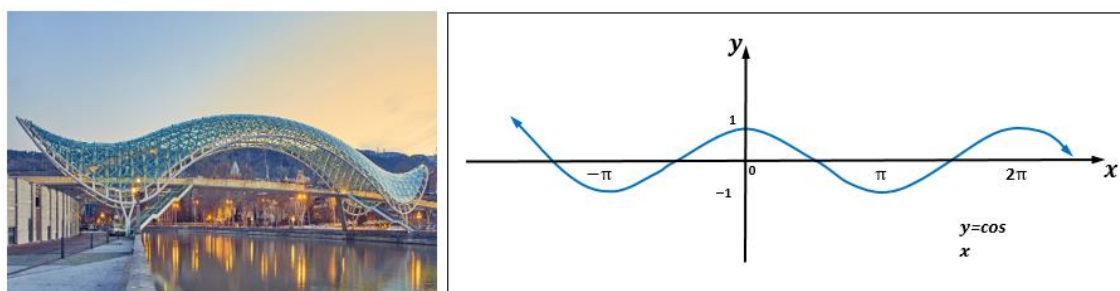


Ilustración 7: Función del coseno representada en el Puente de la Paz, Georgia; Fuente: Elaboración Propia

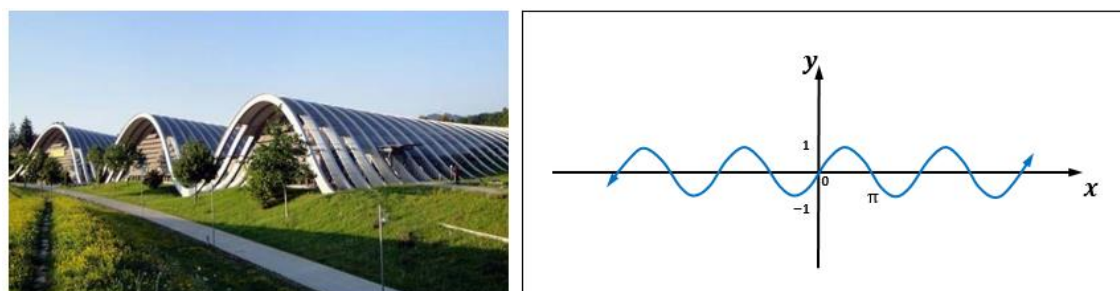


Ilustración 8: Función del seno representada en la obra Zentrum Paul Klee, Berna (Suiza); Fuente: Elaboración Propia

La trigonometría ha formado parte de nuestra cultura desde hace miles de años. Su origen se remonta a Egipto (2000-1800 a.C) donde acorde a las necesidades de la vida cotidiana del hombre, surge la aparición de este nuevo término. De esta época cabe destacar el Papiro de Rhind, considerándose una guía para la medición y el cálculo de la época.

Más adelante, de la antigua Babilonia se han descubierto las tablillas de “Plimtom”, encontradas en Mesopotamia, en donde se ilustran ternas de números que originan triángulos rectángulos (conocidas como ternas pitagóricas). Según (González, 2008), las tablillas de arcilla han desvelado que los antiguos babilonios ya eran conocedores de algún aspecto sobre el Teorema de Pitágoras, mucho antes que el mismo creador del Teorema, el cual lleva su nombre.

Posteriormente, la cultura griega, desarrolla muchos conceptos trigonométricos debido al fuerte vínculo con la astronomía de la época, en su continuo descubrimiento del conocimiento acerca del universo. Estas son las motivaciones principales para que la trigonometría se perfeccionara, normalizando todos aquellos descubrimientos anteriores y dándole carácter de ciencia.

A la vez que se desarrollaba la trigonometría en la civilización griega, los indios también elaboraban un sistema de trigonometría realizando diversas aportaciones. Construyeron diversas tablas, las cuales estaban formadas por numerosos valores de la función seno. (Flores Gil, 2008).

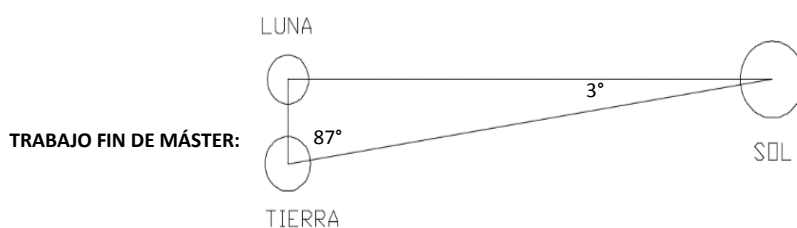
A continuación se muestran una serie de ilustraciones con objeto de representar el breve recorrido histórico trigonométrico realizado de las antiguas culturas mencionadas:



Ilustración 10: Papiro de Rhind; Fuente: <http://www.neoteo.com/el-papiro-de-rhind-matematica-antigua/>



Ilustración 9: Tablilla Babilónica 322. Fuente: <https://www.ancient-origins.es/>



Todas las culturas mencionadas tuvieron un papel fundamental en cuanto al desarrollo de la trigonometría se refiere. Tras éstas, se realizaron diversas aportaciones por parte de los árabes, existiendo desde entonces hasta hoy en día un largo reconocimiento de autores matemáticos y astrónomos que han sido esenciales en el desarrollo de la trigonometría hasta nuestros tiempos.

6.3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA

Su ubicación geográfica le dota de buena comunicación al encontrarse su acceso principal en una de las vías por las que se accede al centro de la capital.



TRABAJO FIN DE MÁSTER: UNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA

La zona destinada al docente está ligeramente elevada respecto a la cota del alumnado. El aula cuenta con una pizarra tradicional y otra digital. Esta pizarra digital tiene un doble mando tanto desde la propia pizarra como desde la mesa del profesor. El aula también posee equipos de sonido conectados al equipo informático, lo cual permite interactuar con videos complementarios a la teoría que afiancen los conceptos.

Además el aula cuenta con un ordenador por cada dos alumnos posibilitando su uso como herramienta de investigación, manipulación y expresión.

Todos estos recursos disponibles en el aula serán tenidos en cuenta en la elaboración de la unidad didáctica, usando los medios necesarios y oportunos para el desarrollo de los contenidos programados.

6.3.1. ASPECTOS SOCIOECONÓMICOS DE LA LOCALIDAD, BARRIO, ETC.

El entorno socioeconómico del instituto se caracteriza por estar constituido por diferentes entornos sociales, con recursos y culturas dispares. El alumnado proviene de barrios con problemáticas sociales asociadas a pocos recursos económicos, desempleo, drogas, etc. que favorecen la exclusión social. La realidad cultural del entorno en el que se ubica el centro así como la propia cultura del centro va de la mano del contexto socioeconómico.

Se detecta que el entorno de las familias de las que forman parte nuestros alumnos y alumnas, especialmente de la ESO, forman parte de la vida cultural habitual de las ciudades andaluzas tales como la semana santa o las navidades, sin embargo no existen hábitos culturales como la asistencia a teatros, centros culturales, etc. Sin embargo en el barrio existen algunos centros educativos y una extensión de la Universidad Popular. Los centros de adultos atienden a un número de personas importantes que se encuentran matriculadas en última instancia en el IES San Juan Bosco.

Dentro del entorno del barrio se encuentra el Teatro Infanta Leonor que ha dinamizado en muchos aspectos la vida cultural de la zona. Además frente al Teatro se encuentra el Albergue Juvenil en el que también se realizan actividades.

Todos estos son recursos al alcance muy interesantes, y de hecho ya se ha hecho uso en alguna ocasión del Teatro Infanta Leonor tanto para actividades culturales como para el acto de fin de curso de producción propia.

6.4. OBJETIVOS

6.4.1. OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA

Los objetivos generales de etapa son las capacidades que se espera que los alumnos/as hayan desarrollado al final del periodo. Se establecen conforme a lo dispuesto en el **artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre**, la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y en las alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apremiar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Además, el **Decreto 111/2016** establece que la educación Secundaria obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

- a) Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
- b) Conocer y apreciar los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad, para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

6.4.2. OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS

La **Orden de 14 de julio de 2016**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía establece que los objetivos de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria serán:

- 1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
- 2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- 3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida,

realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. VÍNCULO ESTABLECIDO ENTRE LOS OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA Y OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Objetivos de área de Matem. (Orden de 14 de julio de 2016)	Objetivos Generales de Etapa (Real Decreto 1105/2014)											
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

Tabla 7: Vínculo establecido entre los objetivos generales de la etapa y objetivos del área de matemáticas; Fuente: Elaboración Propia.

6.4.4. OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Los objetivos didácticos que se pretenden alcanzar como resultado de la experiencia enseñanza-aprendizaje durante el desarrollo de la unidad didáctica son los siguientes:

1. Saber aplicar adecuadamente las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo en la resolución de distintos problemas.
2. Entender racionalmente los resultados de los problemas, respecto a la variación de datos, aplicando la lógica e identificando las soluciones incoherentes.
3. Utilizar correctamente los comandos trigonométricos de las calculadoras en la obtención de resultados.

4. Representación y comprensión de las distintas funciones trigonométricas con ayuda de programas informáticos.
5. Desarrollar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
6. Obtener razones trigonométricas mediante la circunferencia goniométrica.
7. Utilizar estrategias para la resolución de los problemas y comprensión de los mismos.
8. Practicar la modelización matemática como recurso de enseñanza mediante la aplicación de procesos reales.
9. Resolución de problemas relacionados con el entorno cotidiano del alumno, mediante contextualización de los mismos.
10. Reflexionar sobre la opción de resolución elegida, analizando si existe más de un camino para llegar al mismo resultado.
11. Usar herramientas TIC en la mejora del aprendizaje del alumnado mediante elaboración de materiales propios que documenten el aprendizaje adquirido.
12. Aumentar la seguridad en la resolución de ejercicios en situaciones que sobrepasen la zona de confort.

6.5. COMPETENCIAS CLAVE

En línea con la Recomendación 2006/962/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, el Real Decreto 1105/2014 se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares.

Según lo dispuesto en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, Se identifican siete competencias clave esenciales para el bienestar de las sociedades europeas, el crecimiento económico y la innovación, y se describen los conocimientos, las capacidades y las actitudes esenciales vinculadas a cada una de ellas.

- a) Comunicación lingüística (CCL).
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Competencia para aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

El desarrollo de la unidad didáctica de trigonometría aportará la adquisición de distintas competencias con el objetivo de un aprendizaje permanente, así como para un desarrollo personal y activo el alumnado.

 Competencia de Comunicación lingüística (CCL)

- Comprende los textos, tanto orales como escritos, que se han mostrado durante el desarrollo de la unidad, extrayendo de ellos información necesaria y concluyente.
- Durante las explicaciones del profesor y la intervención de diferentes compañeros, permanece una escucha activa y atenta, sin interrupciones.

 Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

- Experimenta distintas estrategias con una actitud continua en de búsqueda de soluciones de manera efectiva.
- Resuelve los problemas aplicando los conocimientos adquiridos de manera correcta, usando el lenguaje algebraico de forma rigurosa y facilitando de esta manera una mejor comprensión de la realidad.
- Es capaz de contrastar resultados, justificando y validado conjeturas realizadas a priori.
- Puede reconocer en su entorno más cercano aspectos relacionados con la trigonometría: figuras, formas, ángulos, distancias; entendiendo la importancia de ésta en nuestra cultura.
- Comprende información en distintos formatos de las funciones trigonométricas elementales: base teórica, demostraciones, representaciones gráficas; todas ellas con una interpretación adecuada para la posterior solución del problema
- Expresa ideas matemáticas con claridad, conocimiento y precisión, comprendiendo las de los demás.
- Adquiere y pone en práctica actitudes de progreso y dominio, superando situaciones de saturación o bloqueo propias del trabajo matemático.

 Competencia digital (CD)

- Utiliza la herramienta GeoGebra para representar elementos geométricos y funciones trigonométricas vistas en clase.
- Utiliza la calculadora y herramientas de cálculo propiciando un uso adecuado para la resolución de problemas trigonométricos.

- Utiliza los recursos de almacenamiento, transferencia de archivos y comunicación a través del portal Web del profesor.
- Utiliza la Web para la búsqueda de información de algunos de los contenidos teóricos de la unidad, realizando una selección crítica y lógica de la información.

Competencia para aprender a aprender (CAA)

- Organiza y estructura la información adquirida, de las razones y relaciones trigonométricas, en tablas/cuadros para un mejor aprendizaje y asimilación del concepto.
- Utiliza estrategias, como es la elaboración de mapas conceptuales, para una comprensión rigurosa de las relaciones entre ángulos y distancias.
- Usa técnicas de aprendizaje cooperativo, a partir de actividades propuestas por el profesor.

Competencias sociales y cívicas (CSC)

- Escucha, reconoce y respeta la variedad de opiniones e ideas fundamentadas por sus compañeros.
- En las actividades de modelización y que requieran trabajo en grupo, participa activamente propiciando diálogo y una buena convivencia y ambiente de trabajo.
- Ayuda a los compañeros que requieran de explicaciones adicionales por presentar alguna dificultad en su aprendizaje de manera espontánea.
- Aumento de comunicación, transmisión y participación en actividades externas al aula donde se realizan tareas grupales basadas en la temática trigonométrica.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)

- Aumento de iniciativa en aquellas tareas menos guiadas, donde los alumnos son los protagonistas de elaborar y obtener sus propios resultados a partir de sus propias mediciones.
- La planificación individual/grupal es motivo de interés por conocer e indagar en aspectos relacionados con la materia.
- Se identifica con el entorno y la materia al poder aplicar contenidos trabajados durante el desarrollo de la clase en aspectos cercanos a su vida cotidiana.
- Hace uso del aprendizaje adquirido para aplicarlo en situaciones nuevas y complejas.

 Conciencia y expresiones culturales (CEC)

- Visión satisfactoria de la aplicación de la trigonometría en entornos reales (alturas de edificios, inclinaciones de estructuras, distancias imposibles de ser alcanzadas para su medición, etc.).
- Reconoce la evolución histórica que ha tenido la trigonometría, identificando aquellos matemáticos más representativos de la época.

6.6. CONTENIDOS

Contenidos según Real Decreto 1105/2014	Relación con la Unidad Didáctica
BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.	Determinación mediante cálculo de problemas, tareas de desarrollo, afianzamiento y arraigo del concepto.
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	Determinación mediante cálculo de problemas, tareas de desarrollo, afianzamiento y arraigo del concepto.
1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	Determinación mediante cálculo de problemas, tareas de desarrollo, afianzamiento y arraigo del concepto.

Contenidos según Real Decreto 1105/2014	Relación con la Unidad Didáctica
BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	Determinación mediante cálculo de problemas, tareas de desarrollo, afianzamiento y arraigo del concepto. Webquest: Inicio a la Trigonometría Actividad en el exterior.
1.6. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	Determinación mediante cálculo de problemas, tareas de desarrollo, afianzamiento y arraigo del concepto. Webquest: Identificación de triángulos en la arquitectura y su relación con la trigonometría
1.7. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	Funciones Trigonométricas: Uso de Geogebra Actividad en el exterior. Búsqueda de información WebQuest

Tabla 8: Contenidos y relación con la Unidad Didáctica: Bloque 1; Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración Propia

Contenidos según Real Decreto 1105/2014	Relación con la Unidad Didáctica
BLOQUE 3: GEOMETRÍA	
3.1. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.	Circunferencia goniométrica. Grado sexagesimal, definición y usos. El Radián, definición y usos. Actividades de transformaciones de unidades angulares
3.2. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	Razones trigonométricas en ángulos agudos Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Reducción de ángulos al primer cuadrante. Resolución de triángulos.
3.3. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes	Cálculo de áreas de polígonos mediante la trigonometría Aplicaciones de la trigonometría. Actividad exterior
3.6. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	Funciones Trigonómicas. Razones trigonométricas en ángulos agudos Representaciones gráficas en herramientas Web: GeoGebra

Tabla 9: Contenidos y relación con la Unidad Didáctica: Bloque 3; Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración Propia

6.7. METODOLOGÍA

El desarrollo de la Unidad no se basa en la aplicación de una única metodología, sino que se han escogido varias opciones metodológicas con el objeto de favorecer el aprendizaje del alumnado.

Con la finalidad de dinamizar las sesiones y que éstas aporten los objetivos y estrategias marcadas en el reglamento, se usan diversas metodologías, todas ellas basadas en la descripción realizada en el apartado “3. *Fundamentación Didáctica*”.

Se aplica una metodología **transmisiva** para la introducción y explicación de todos aquellos conceptos trigonométricos que los alumnos de 4º de ESO desconocen hasta el momento. Esta metodología se aplica proporcionándole énfasis a todos aquellos elementos conceptuales, secuenciados según los contenidos establecidos durante las distintas sesiones programadas, mediante el apoyo de libros de texto o apuntes realizados por el docente.

Se procurará que las clases donde prevalezca este tipo de metodología no decaiga en lo que a interés se refiere, dialogando y dejando debates abiertos sobre situaciones actuales, del entorno, incluso abordando temas sobre su relación con la cotidianidad del alumnado. Además para mantener la clase activa, se propondrán preguntas o se realizarán actividades relacionadas con la teoría explicada, comprobando de esta manera el grado de atención y comprensión del alumnado.

Las técnicas de aprendizaje por parte del alumnado serán aquellas que resulten lo más fieles y completas posibles respecto a la exposición realizada por el docente, a través de la recogida de información mediante apuntes, el subrayado del libro de texto, el copiado de anotaciones realizadas por el profesor, etc. Se realizarán varios ejercicios con propiedades semejantes para que los alumnos adquieran desenvoltura suficiente en la aplicación y resolución de las distintas fórmulas trigonométricas, para poder realizar posteriormente la resolución de otro formato de tareas donde los alumnos tengan que investigar y aplicar lo aprendido.

Otras de las herramientas didácticas usadas para lograr la obtención de los objetivos de la etapa y poder alcanzar las competencias definidas en el currículo, será la de **modelización**. Con esta herramienta didáctica se creará un aprendizaje a partir de la vivencia de situaciones donde los alumnos puedan conectar los conceptos aprendidos (en las clases más tradicionales) con la creación de un modelo relacionado con situaciones de la vida cotidiana, reforzando el conocimiento y aumentando su creatividad. Se puede decir que los alumnos construirían y asentarían nuevos significados (esta vez con una conexión directa con la realidad) desde la concreción de los esquemas teóricos previamente aplicados.

Se realizará una actividad desarrollada en el exterior del aula, concretamente en el patio del recreo, donde los alumnos serán los protagonistas de crear su propio modelo de patio a través de unos recursos que el docente proporcionará para la ejecución con éxito de la actividad. En el apartado de actividades se podrá ver con más detalle todos los apartados que conforman la tarea así como los utensilios utilizados en la misma. Esta actividad no se realizará de manera individual, sino que será trabajada por grupos para que los alumnos puedan interaccionar entre ellos a través de técnicas de aprendizaje cooperativo.

Se propiciará en la mayor parte de tiempo posible, una **metodología activa** adentrando a los alumnos a seguir una dinámica general de clase, haciendo que reflexionen de manera crítica sobre su propio aprendizaje, sus logros, dificultades y método de trabajo. Los alumnos podrán participar libremente en el intercambio de opiniones, aportaciones de ideas, búsqueda adicional de información siempre que el profesor haga de mediador y oriente a los alumnos en la búsqueda de respuestas coherentes, fundamentadas y significativas. Esta metodología trata de motivar a los alumnos a partir de sus intereses y necesidades facilitando su aprendizaje.

Además de las metodologías ya mencionadas, se usarán **herramientas TIC**, aplicando un procedimiento más lúdico y ameno para una mayor motivación en clase por parte del alumnado. Para abordar el *“Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas”*, bloque transversal al bloque de Geometría, se propone la realización de una WebQuest en alguna de las sesiones programadas, donde se realizará una breve introducción histórica del desarrollo matemático trigonométrico sirviendo de motivación para comenzar la unidad que nos acomete, así como la realización de una anticipación de tareas que puedan ser comparables con las actividades realizadas tras la finalización de la unidad abordada. También se usará la WebQuest para que realicen una investigación de todos aquellos edificios y figuras de distintas ciudades, donde la trigonometría está presente, identificando geometrías y representaciones gráficas de relaciones trigonométricas vistas en clase. También se realizará de manera viceversa, se les mostrará una serie de elementos donde tendrán que justificar los conceptos trigonométricos que representan las figuras.

Además a través de la Web, se jugarán a diversas aplicaciones matemáticas mencionadas en el apartado de actividades. Trabajar a través de internet hace que los alumnos aumenten su interés por la materia cooperando a desterrar la típica imagen de asignatura aburrida y de poca aplicación.

6.8. ACTIVIDADES Y RECURSOS

En este apartado se incluyen las actividades y recursos didácticos más idóneos para satisfacer el cumplimiento de todos los objetivos marcados en el reglamento estatal y autonómico.

6.8.1. ACTIVIDADES

En la selección y diseño de actividades se han tenido en cuenta los contenidos que se van a impartir para así lograr el alcance de objetivos y competencias, superando aquellas dificultades encontradas en el entendimiento de conceptos.

En el **Anexo I** viene recogidas todas las actividades propuestas para la unidad de trigonometría correspondiente a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas del curso 4º ESO. Se han seleccionado y elaborado diversas actividades con varios objetivos. Uno de ellos es paliar las dificultades analizadas en el apartado 5. Fundamentación Didáctica, consiguiendo subsanar los errores más comunes que los alumnos suelen tener según la investigación referenciada. Otro de los objetivos es que exista un menú variado de “actividades ricas” donde los alumnos se vean motivados en la resolución de cuestiones, por medio de las distintas metodologías planteadas y el uso de distintos recursos.

Las tareas propuestas estarán propuestas a groso modo por las siguientes actividades:

- Actividades de refuerzo de conocimiento. Estas actividades no son otras que las típicas tareas que vienen definidas en los libros de texto tras la finalización de cada apartado. En este caso, se definirán tareas relacionadas con la “*tabla 8. del capítulo 6.6. Contenidos*”, donde se concretan los apartados que tendrán cavidad en el desarrollo de la Unidad de Trigonometría, según las indicaciones del Real Decreto 1105/2014.

Estas actividades han sido elaboradas realizando una recogida de información de los libros de Guadiel y Santillana del curso 4º de ESO y amoldando el formato de la actividad a los contenidos que se tratarán en la presente unidad didáctica. Las ilustraciones de todos los problemas han sido de elaboración propia, en el intento de que los alumnos resuelvan problemas con imágenes y contextos cercanos a la vida cotidiana.

- Una actividad realizada en el exterior de la clase (dentro del IES), donde los alumnos tendrán que modelizar el centro a partir de la toma de mediciones de distancias y medida de ángulos con los recursos definidos en el siguiente apartado. Esta actividad está totalmente ligada a la realidad, donde podrán aplicar todos los conocimientos adquiridos en el aula en su entorno más próximo. Esta visión más cercana donde aplican de manera directa los contenidos abordados en la unidad, ayudará en la lógica de los conceptos aprendidos evitando un simple aprendizaje memorístico carente de aplicación.
- Se trabajará en la realización de dos pequeñas WebQuest; una al inicio de la unidad y la otra restante según la programación y secuenciación de actividades descritas en el apartado “6.10. Temporización”. Se pondrá a prueba de una

manera indirecta los conocimientos previos que se tienen antes del comienzo de la unidad, realizarán una búsqueda de información de la importancia de la trigonometría a lo largo de la historia y se identificará su uso en la vida cotidiana, reconociendo distintos elementos vinculados a la relaciones trigonométricas que se encuentran presentes en la arquitectura.

- Se realizará un juego llamado “SUDOMATES DE TRIGONOMETRÍA” en el intento de rutinizar conceptos y procedimientos de forma más lúdica y amena. Con la realización de este pasatiempos se busca:
 - Aumentar la agilidad en el cambio de las unidades de ángulos.
 - Reforzar la utilización de las razones de los ángulos notables, expresados en grados o en radianes, así como paliar los errores cometidos por la interpretación en la simbología. Como se comentaba en el apartado 5. FUNDAMENTACION DIDÁCTICA, uno de los errores más usuales de los alumnos es no entender correctamente la notación. Ejemplo: entienden la notación de $\cos(45^\circ)$ como una multiplicación entre el “cos” y el número que lo acompaña (45).
- Mediante las TIC se harán actividades usando la herramienta Geogebra, experimentando virtualmente e identificando regularidades y aproximaciones en los elementos de trabajo. Es la manera más rápida y eficaz de visualizar la conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas.

También se proponen actividades realizadas a través de páginas Web (referenciadas en Anexo I) donde se resolverán ejercicios trigonométricos, en la aplicación de un procedimiento más lúdico y ameno para una mayor motivación en clase por parte del alumnado.

Toda esta diversidad de actividades, definidas y ampliadas en el Anexo I, quedan recogidas y organizadas atendiendo a su tipología. A continuación se muestran los distintos tipos de actividades así como las iniciales empleadas para su designación:

TIPO DE ACTIVIDAD	FINALIDAD DE LA ACTIVIDAD
Actividad de diagnóstico (DIAG)	Realizar un tanteo del nivel de alumnado
Actividad de Introducción (INT)	Adaptarse al posterior ritmo de trabajo
Actividad de motivación (MOT)	Buscan la implicación y “motivación” del alumno
Actividad de aprendizaje (AP)	Adquirir destrezas procedimentales y conceptuales
Actividad de desarrollo (DES)	Desarrollar y fijar los contenidos propuestos
Actividad consolidación (CON)	Reforzar los aprendizajes
Actividad creativas (CRE)	Posibilitan a partir de una idea desarrollar la creatividad
Actividad resumen (RESU)	Permiten al alumno observar los procesos obtenidos
Actividad de evaluación (EV)	Determinan el grado de consecución de los objetivos

Tabla 10: Tipología de actividades en la Unidad Didáctica; Fuente: Elaboración Propia

6.8.2. RECURSOS

Para el desarrollo de los contenidos descritos y la resolución de las actividades, se contará con la ayuda personal, técnica o material disponible, facilitando el logro de la consecución de los distintos objetivos.

Los principales recursos para abordar la Unidad Didáctica: Trigonometría, serán:

❖ ESPECÍFICO

- Libro de texto: Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. Editorial: Anaya. Autores: José Colera Jiménez; Ignacio Gaztelu Alberio; María José Oliveira González; Ramón Colera Cañas. Año: 2016.
- Apuntes/actividades externas al libro de texto. Se proporcionarán impresos a los alumnos o podrán visualizarlos a través de la carpeta creada en la nube de la asignatura.
- Mediante Geogebra: Razones Trigonométrica Ángulos Agudos. (ANEXO 1)
- Animación de las funciones Trigonométricas. (ANEXO 1)
- Materiales de dibujo: escuadra, cartabón, regla con unidad de medida, transportador de ángulos.

❖ MATERIAL ESPECÍFICO PARA ACTIVIDAD

- El centro San Juan Bosco cuenta con un ciclo de construcción civil impartido en horario de tarde. Debido a que se imparten asignaturas como topografía, el departamento cuenta con una serie de teodolitos almacenados en un aula.

Debido a mi titulación (Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos), he realizado uso de este elemento en varias ocasiones para realizar mediciones en lugares inaccesibles. Aprovechando mi conocimiento y el recurso con el que cuenta el centro (muy difícil de encontrar en otros IES), se pondrán a disposición de los alumnos los teodolitos existentes, no interfiriendo en ningún momento con los alumnos de formación profesional, ya que el uso por parte de los alumnos de 4º de ESO estará restringido a horario matinal.

❖ AUDIOVISUAL

- Proyector y equipos de sonido de clase.

❖ INFORMÁTICO

- Ordenadores con acceso a Internet
- Herramienta: software Geogebra, Paquete Office (Word, Excel, etc.), navegador Web

❖ TECNOLÓGICO

- Pizarra digital
- Calculadora científica

❖ AMBIENTAL

- Aula
- Patio/otras instalaciones del IES

❖ PERSONAL/HUMANO

- Profesor de matemáticas: Mediador cognitivo que presenta y coordina el trabajo en clase así como el desarrollo de las distintas sesiones
- Discentes: Principales protagonistas en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje
- Profesores del departamento de matemáticas: Ayudan en caso de ausencia del docente.
- Equipo directivo: Ayuda y colabora en la organización de actividades Complementarias.
- Departamento de Orientación: Colabora con los profesores y alumnos.
- Familias y personal del entorno

❖ RECURSOS WEB

Recursos web	• Blog de la Asignatura. • Carpeta en la nube con los recursos a disposición del alumnado • La trigonometría. Aplicaciones https://prezi.com/acm2pu0yoiik/la-trigonometria-en-la-vida-diaria/ • Circunferencia gonométrica (Antonio Omatos Soria). https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc • Razones trigonométricas de ángulos agudos (Ignacio Larrosa Cañestro): https://www.geogebra.org/m/hvjz6wsv#material/FVMgHfDN • Funciones seno y coseno (María Encarnación Lorenzo): https://www.geogebra.org/m/VynZaCx8 - El Teodolito (Juan David Uñates y Juan Sebastián Ardila) https://prezi.com/f-nginky1az0/el-teodolito/ • Web del alumnado Anaya: http://www.anayaeducacion.es/index_alumnado.php • WebQuest (adjunta en Anexo I)
---------------------	---

6.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Se consideran medidas generales de atención a la diversidad las diferentes actuaciones de carácter ordinario que se orientan a la promoción del aprendizaje y del

éxito escolar de todo el alumnado mediante la aplicación de medidas generales a través de recursos personales y materiales generales, destinadas a todo el alumnado.

Entre las medidas de generales de atención a la diversidad para el alumnado podemos destacar las siguientes actuaciones:

- Adaptaciones del currículo.
- El uso de metodologías basadas en el trabajo cooperativo en grupos heterogéneos, por ejemplo la tutoría entre iguales, el aprendizaje por proyectos y otras que promuevan el principio de inclusión.
- Medidas organizativas.
- Apoyos y refuerzos.

En este caso, el instituto IES San Juan Bosco, centro donde se contextualiza el desarrollo de esta unidad didáctica que nos acomete, cuenta con su Plan de Atención a la Diversidad integrando su Plan de Centro.

En el Plan de centro se cuenta con **medidas ordinarias**, de las cuales emanan ocho programas de transición e integración del alumnado o inmigrante. También dispone de **medidas específicas**, las cuales están dirigidas para dar respuesta a las necesidades educativas al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (alumnado que presenta necesidades educativas especiales, dificultades del aprendizaje, altas capacidades, así como alumnado que requiera acciones de carácter compensatorio). Además de incluir programas de apoyo para la enseñanza-aprendizaje del idioma del castellano para alumnado inmigrante que no posea fluidez con el idioma. También resaltar el programa de integración de alumnos con necesidades educativas especiales y de necesidades educativas específicas asociadas a altas capacidades y sobredotación intelectual.

Para el desarrollo del contenido de esta unidad, el docente en la primera sesión tendrá una primera percepción y visión de las circunstancias de los alumnos, lo cual le servirá para fijar el nivel correspondiente a cada uno de ellos. Una vez observado el nivel, se establecerá la tipología de actividades que van a realizarse durante la unidad, adaptando aquellas tareas que sean necesarias según el perfil correspondiente. Se realizará una selección de tareas dentro de las propuestas en el Anexo I del presente TFM:

Además de lo percibido en clase, se realizará un seguimiento individualizado del alumnado mediante un control continuo en las tareas mandadas para casa, las cuales serán modificadas (en el caso que sea necesario) para adaptarlas a su diversidad.

Existen dos actividades definidas en el Anexo I, las cuales serán realizadas por grupos de 2-3 personas:

- ACTIVIDAD 1: “SUDOMATES DE TRIGONOMETRÍA

- ACTIVIDAD 2: ACTIVIDAD DESARROLLADA EN EL EXTERIOR DEL AULA.
MODELIZACIÓN DE RECINTO INTERIOR DEL IES SAN JUAN BOSCO

Para la realización de estas actividades los grupos no se formarán de manera casual o aleatoria sino que se formarán en base a la diversidad existente en el aula, creando grupos heterogéneos. Para la elección de grupos se comentará con el resto del profesorado del centro, en el intento de recibir consejos en base a sus conocimientos propios de las distintas debilidades y fortalezas de los componentes que forman los grupos.

6.10. TEMPORALIZACIÓN

La distribución temporal inicialmente prevista para el desarrollo de la unidad, de acuerdo a los materiales didácticos utilizados y a la carga lectiva asignada (4 horas semanales), es la siguiente:

Para el desarrollo de la unidad necesitaremos 12 sesiones lectivas. Las clases comenzarán el 15 de Abril y terminarán el día el 3 de Junio, siendo 12h totales las dedicadas a la unidad didáctica que nos acomete la presente actividad.

SEMANA 1					
	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
	Sesión 1				
			Sesión 3		
		Sesión 2			
RECREEO					
					Sesión 4
SEMANA 2					
	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
	Sesión 5				
			Sesión 7		
		Sesión 6			
RECREEO					
					Sesión 8
SEMANA 3					
	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
	Sesión 9				
			Sesión 11		
		Sesión 10			

RECREE					
					Sesión 12

En las distintas sesiones, se tratarán los siguientes contenidos:

- SESIÓN 1: INTRODUCCION A LA TRIGONOMETRÍA. WEBQUEST (PRIMERA PARTE)
- SESIÓN 2: CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA. MEDIDAS ANGULARES
- SESIÓN 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO
- SESION 4: SUDOMATES DE TRIGONOMETRÍA
- SESION 5: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS 30°,45° Y 60°. RESOLUCION DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.
- SESION 6: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA. REPRESENTACION DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
- SESION 7: IDENTIFICACIÓN DE TRIGONOMETRÍA EN EL MUNDO REAL. WEBQUEST (2ªPARTE)
- SESION 8: CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA
- SESION 9: APLICACIONES A LA TRIGONOMETRÍA
- SESION 10-11: ACTIVIDAD EXTERIOR. MODELIZACION DEL PATIO DEL IES
- SESION 12: EVALUACION

Las actividades nombradas en la siguiente tabla de temporización, están referenciadas (en nombre y número) con las tareas definidas en el Anexo I.

SESIÓN 1: INTRODUCCION A LA TRIGONOMETRÍA. WEBQUEST (PRIMERA PARTE)	
Desarrollo La introducción al tema comenzará con la realización de la primera sesión 2. Actividades: WebQuest. La WebQuest dará comienzo al tema con unos ejercicios de repaso de contenidos vistos en temas anteriores (Teorema de Tales y Teorema de Pitágoras) junto a unas preguntas previas acerca de qué es la trigonometría y qué conocen de ella. Los alumnos realizarán una búsqueda ampliada de información a través de la Web acerca de su origen, los principales autores y sus diversas aplicaciones. Desde la misma WebQuest, elaborarán un mural con toda la información recogida para posteriormente comentar y resaltar los aspectos más notables entre todo el grupo de clase. (50 minutos) Esta tarea inicial se complementará con una breve conversación en forma de preguntas a los alumnos focalizando los conceptos más importantes (5 minutos).	
Tipo Actividades: DIAG, INT, MOT, CRE y RESU.	Objetivos Didácticos: 11
Organización: individual	Contenidos: 1.5, 1.6, 1.7

SESIÓN 1: INTRODUCCION A LA TRIGONOMETRÍA. WEBQUEST (PRIMERA PARTE)

Competencias: CCL,CMCT,CD,CAA,CEC

Metodología: Uso de herramientas TIC

Recursos: Equipo informático, Proyector y conexión a internet

SESIÓN 2: CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA. MEDIDAS ANGULARES

Desarrollo

Para concluir con la actividad realizada en la primera sesión, se complementará con el **Recurso 6.1: Presentación Prezi: La trigonometría. Aplicaciones.** (10 minutos)

El inicio a la trigonometría comenzará con la enseñanza de las distintas medidas de ángulos, explicando cómo pasar de grados a radianes. Para afianzar los conceptos se realizarán los ejercicios propuestos en: **1. Actividades de desarrollo**, correspondientes al cambio de unidades y se irán corrigiendo oralmente conforme se vayan resolviendo los ejercicios. (25 minutos)

La segunda parte de la clase se dedicará al uso de la herramienta Geogebra para seguir profundizando y practicando el cambio de medidas angulares así como el cálculo de longitud de arco. Enlace a **Actividad 4.1.:**

<https://www.geogebra.org/m/APvXXgfp#material/ajnHnFPN> (20 minutos).

Se trata de contestar a 10 cuestiones, las cuales finalizadas las respuestas, el alumno podrá saber el número de respuestas acertadas y erróneas para ponerle más énfasis en aquellos aspectos que resulten más dificultosos para ellos.

Tipo Actividades: INT, MOT, AP, CON y RESU.

Objetivos Didácticos: 2,11

Organización: individual

Contenidos: 1.7, 3.1, 3.6

Competencias: CMCT,CD

Metodología: Transmisiva, activa, uso de herramientas TIC

Recursos: Libro de texto, calculadora científica, pizarra digital, recurso 6.1: Presentación Prezi, equipo informático, proyector y conexión a internet

SESIÓN 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Desarrollo

Inicialmente se procederá a la explicación teórica de las definiciones de las distintas razones trigonométricas de los ángulos agudos: Seno, Coseno y Tangente. Además se explicará cómo utilizar los comandos correspondientes en la calculadora científica. (30 minutos)

Se tomará el recurso **6.3. Razones Razones Trigonométrica Ángulos Agudos.ggb** para que los alumnos a través del proyector puedan visualizar el comportamiento de un triángulo, cambiando el valor del ángulo α . Enlace:

<https://www.geogebra.org/m/hvz6wsv#material/FVMgHfDN> (5 minutos)

Seguidamente se proporcionará a los alumnos la plantilla de la **Actividad 4.2** para que realicen actividades mediante la herramienta informática GeoGebra a través de la siguiente plantilla:

<https://www.geogebra.org/m/APvXXgfp#material/Zgh3ceMw> (20 minutos)

Se trata de contestar a 5 cuestiones, las cuales finalizadas las respuestas, el alumno podrá saber el número de respuestas acertadas y erróneas para ponerle más énfasis en aquellos aspectos que resulten más dificultosos para ellos.

Se mandarán actividades para hacer en casa relacionadas con el tema tratado en clase.

Tipo Actividades: INT, MOT, AP, CON y RESU.

Objetivos Didácticos: 1,3,10, 11

Organización: individual

Contenidos: 1.3, 1.7, 3.2, 3.6

Competencias: CMCT,CD, CAA

SESIÓN 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Metodología: Transmisiva, uso de herramientas TIC

Recursos: Libro de texto, calculadora científica, recurso 6.3. Razones Trigonométrica Ángulos Agudos.ggb, pizarra digital, equipo informático, proyector y conexión a internet

SESIÓN 4: SUDOMATES DE TRIGONOMETRÍA

Desarrollo

Corrección de actividades propuestas para casa en sesión anterior (10 minutos)

En esta sesión no se explicarán conceptos nuevos, sino que se pondrán en práctica algunos de los contenidos vistos en sesiones anteriores. Esta actividad tiene como objeto reforzar la utilización de las razones de los ángulos notables, expresados en grados o en radianes, así como paliar los errores cometidos por la interpretación en la simbología. Esta actividad viene definida en el Anexo I como: **5. Actividad de grupo 2-3 personas.** (5 minutos para la explicación de la tarea)

Su enlace para la descarga de material es el siguiente:

<https://anagarciaazcarate.files.wordpress.com/2014/10/sudomatestrigonometriaalumnado.pdf>.

El docente llevará impresa la actividad y será repartida a los grupos formados. Se resolverá de manera cooperativa, formando un ranking con las personas que puedan terminarlo en el tiempo establecido y cuyos resultados sean correctos. (40 minutos)

Se mandarán actividades para hacer en casa para reforzar los conocimientos adquiridos en sesiones anteriores.

Tipo Actividades: MOT, AP y CON

Objetivos Didácticos: 3,12

Organización: Resolución de problemas:
Cooperativo

Contenidos: 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2

Competencias: CMCT, CCL, CSC

Metodología: Activa

Recursos: calculadora científica, actividad externa al libro repartida por el docente

SESIÓN 5: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS 30°, 45° Y 60°. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Desarrollo

Corrección de actividades propuestas para casa en sesión anterior (10 minutos)

Se explicarán teóricamente y con la ayuda de la pizarra digital toda la parte de teoría relacionada con las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° y resolución de triángulos rectángulos (30 minutos).

Se resolverán algunas de las **Actividades de Desarrollo** propuestas, las cuales apliquen los contenidos explicados y otras actividades serán mandadas para realizarlas en casa.

Estas actividades ya van adquiriendo un enfoque más realista, relacionado con alguna situación que hayan podido encontrarse en su vida cotidiana. Los alumnos comentarán con los compañeros su manera de resolución propiciando el aprendizaje entre iguales (15 minutos).

Tipo Actividades: INT, AP, DES, y CON

Objetivos Didácticos: 1,2,3,7,9,10

Organización: individual. Resolución de problemas: Cooperativo

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 3.2.

Competencias: CMCT, CCL

Metodología: Transmisiva, activa

Recursos: Libro de texto, calculadora científica, pizarra digital

SESIÓN 6: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Desarrollo

Corrección de actividades propuestas para casa en sesión anterior (10 minutos)

Se desarrollará con el uso de pizarra digital la base teórica del tema correspondiente. Tras explicar la representación gráfica de las funciones trigonométricas, se utilizará el **Recurso: 6.4** <https://www.geogebra.org/m/VynZaCx8>, mostrándoles a los alumnos el comportamiento de la gráfica según la variación del Angulo α . Además se verá algún ejemplo de cómo aplicar la trigonometría en el cálculo de áreas (25 minutos)

Para afianzar los conceptos del cálculo de distancias por observación simple y por observación doble, se proponen 3 plantillas (1actividad/plantilla) a través de la herramienta GeoGebra (**actividad 4.3. y actividad 4.4.**):

<https://www.geogebra.org/m/bqKB0oFk#material/HwXbNFDf>
<https://www.geogebra.org/m/bqKB0oFk#material/UBD8EFFF>
<https://www.geogebra.org/m/bqKB0oFk#material/dsNEW28x>

Las actividades serán realizadas cada dos personas, aportándose entre pares conocimientos y estrategias de resolución. (15 minutos)

Tras su resolución, se utilizaran los últimos minutos de clase para realizar comentarios y resolver dudas acerca de los ejercicios realizados. (5 minutos)

Se mandarán a casa tareas relacionadas con los contenidos vistos en clase

Tipo Actividades: INT, MOT, AP, DES, CON y RESU	Objetivos Didácticos: 1,2,3,4,7,9,10,11
Organización: Grupal para resolución de problemas: Cooperativo	Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.2, 3.6
Competencias: CMCT, CCL, CD	
Metodología: Transmisiva, uso de herramientas TIC	
Recursos: Libro de texto, calculadora científica, Recurso: 6.4: Comportamiento de las gráficas de las funciones seno y coseno según varía el ángulo pizarra digital, equipo informático, proyector y conexión a internet	

SESIÓN 7: IDENTIFICACIÓN DE TRIGONOMETRÍA EN EL MUNDO REAL. WEBQUEST (2ª PARTE)

Desarrollo

Corrección de actividades propuestas para casa en sesión anterior (10 minutos)

Una vez desarrolladas y explicadas las funciones trigonométricas y sus representaciones, se propone la segunda parte de la actividad WebQuest, referenciada en el Anexo I como: **2. Actividades. WebQuest.**

El docente, realizará una breve introducción acerca de la actividad a desarrollar (5 minutos)

Esta actividad está pensada para que los alumnos puedan asociar de una manera más directa la aplicación de la trigonometría en construcciones de edificios de la vida real, motivando a que cuando paseen por la calle o realicen algún viaje, puedan realizar asociaciones de elementos constructivos con conceptos matemáticos.

La realización de la tarea será individual. (35 minutos)

Se dialogará sobre las percepciones de los alumnos respecto a la trigonometría y la facilidad de encontrarla en un entorno real. (5 minutos).

Tipo Actividades: MOT, CON y CRE	Objetivos Didácticos: 4,5,8,11
Organización: Individual	Contenidos: 1.5, 1.6, 1.7, 3.2, 3.6
Competencias: CMCT, CD, CAA, CEC	
Metodología: uso de herramientas TIC	
Recursos: equipo informático, proyector y conexión a internet	

SESIÓN 8: CIRCUNFERENCIA GONOMÉTRICA.

Desarrollo

Tras ver el valor de las razones trigonométricas de un ángulo α , se explicará como la circunferencia goniométrica nos permite obtener gráficamente las razones trigonométricas de cualquier ángulo. La explicación se realizará combinado libro de texto con pizarra digital. Además se explicará el procedimiento de reducción de ángulos al primer cuadrante (30 minutos)

Para aclarar la definición de circunferencia goniométrica nos apoyaremos en el: **Recurso 6.2.** <https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc>. Se trata de una plantilla realizada en Geogebra que nos permite ver la variación de las distancias seno coseno y tangente según la variación del ángulo α (5 minutos)

La segunda parte de la clase, se dedicará a la realización de distintas **Actividades de Desarrollo**. Las tareas se irán corrigiendo acorde se vayan realizando. (20 minutos)

Se mandarán a casa tareas relacionadas con los contenidos vistos en clase

Tipo Actividades: INT, AP, DES y CON	Objetivos Didácticos: 1,2,3,6,7,9,10
Organización: Individual	Contenidos: 1.3, 1.7, 3.1, 3.6
Competencias: CMCT, CD	
Metodología: Transmisiva, uso de herramientas TIC	
Recursos: Libro de texto, calculadora científica, Recurso 6.2. Circunferencia goniométrica, pizarra digital, equipo informático, proyector y conexión a internet	

SESIÓN 9: APLICACIONES A LA TRIGONOMETRÍA

Desarrollo

Para afianzar los conceptos vistos hasta el momento y para poner a prueba que han sido comprendidos, esta sesión será dedicada completamente a la resolución de problemas. Se propondrán tareas recogidas en **1. Actividades de Desarrollo**. (40 minutos)

Los alumnos realizarán grupos 2-3 personas para

- realizar puestas en común sobre cómo abordar los ejercicios
- planteamiento de estrategias para su resolución
- identificar distintas maneras de llegar a la solución mediante otro procedimiento, todos iguales de válidos.

Las actividades se irán corrigiendo en pizarra por grupos. La elección el grupo se realizará al azar, uno escribirá la resolución en la pizarra mientras que la otra/otras persona/s del grupo ira/irán comentando el fundamento de su resolución. Aquí serán identificados los elementos más comunes que inducen a error, los cuales el docente intentará paliar apoyándose en la base teórica con recursos de aplicaciones web, poniendo todos los ejemplos que sean necesarios.

Se mandarán a casa tareas relacionadas con aplicaciones trigonométricas.

Tipo Actividades: DIAG, DES y CON	Objetivos Didácticos: 1,2,3,7,8, 9,10, 12
Organización: Grupal (2-3 personas)	Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 3.2
Competencias: CCL, CMCT, SIEP	
Metodología: activa	
Recursos: Libro de texto, calculadora científica y pizarra digital	

SESIÓN 10-11: ACTIVIDAD EXTERIOR. MODELIZACIÓN DEL PATIO DEL IES

SESIÓN 10-11: ACTIVIDAD EXTERIOR. MODELIZACIÓN DEL PATIO DEL IES

Desarrollo

Esta actividad está totalmente ligada a la realidad (**3. Actividad IBL**), donde podrán aplicar todos los conocimientos adquiridos en el aula en su entorno más próximo.

Esta visión más cercana donde aplican de manera directa los contenidos abordados en la unidad, ayudará en la lógica de los conceptos aprendidos evitando un simple aprendizaje memorístico carente de aplicación.

La tarea se desarrollará fuera del aula, concretamente en el patio del centro. La actividad se organizará en grupos de 2-3 alumnos, los cuales elaborarán el trabajo conjuntamente a partir de las premisas oportunas proporcionadas por el docente. Los temas tratados en la actividad y con los que se pretenden obtener una mejor concepción de los mismos a través de la práctica son:

- Modelización del patio del centro
- Mediciones de distintas distancias
- Mediciones de ángulos
- Proporcionalidad entre distancias

El Plan de Clase a realizar durante estas dos sesiones, está totalmente definido y estructurado en el **Anexo I**, donde se detalla en cada espacio temporal con bastante concreción, lo que se irá llevando a cabo a lo largo de estas dos sesiones. A modo resumen se adjunta la siguiente tabla de temporización:

Tiempo (minutos)	Actividad: 1ª CLASE
5	Presentación de la actividad:
5	Explicación de la tarea
10	Uso del Teodolito:
35	Trabajo grupal de campo (2-3 alumnos).

Tiempo (minutos)	Actividad: 2ª CLASE
35	Cálculo de distancias y medidas
20	Exposición y corrección de trabajos

Tipo Actividades: MOT, AP, CON	Objetivos Didácticos: 1,2,3,5,7,8,9,10,12
Organización: Grupal 2-3 personas	Contenidos: 1.1, 1.2,1.3, 1.5, 1.6, 3.2, 3.3
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEP	
Metodología: Modelización, activa	
Recursos: Actividad externa al libro repartida por el docente, A-3, teodolito y calculadora científica	

SESIÓN 12: EVALUACIÓN

Desarrollo

Realización de una prueba escrita durante los 55 minutos de duración de clase

Tipo Actividades: EV	Objetivos Didácticos: 1,2,3,4,6,7,8, 9, 12
Organización: Individual	Contenidos: 1.1, 1.2,1.3,1.6, 3.1, 3.2, 3.3
Competencias: CCL, CMCT, SIEP	

SESIÓN 12: EVALUACIÓN

Metodología: -

Recursos: Reglas, transportador de ángulos y calculadora científica

6.11. EVALUACIÓN

Según el decreto 144/2016, de 14 de junio, los criterios de evaluación se presentan como el referente más completo para la valoración no sólo de los aprendizajes adquiridos en cada materia sino también del nivel competencial alcanzado por el alumnado, al integrar en sí mismos conocimientos, procesos, actitudes y contextos.

Los distintos criterios de evaluación, a su vez, se relacionan con los estándares de aprendizaje evaluables establecidos en Real Decreto 1105/2014 para la comprobación del grado de adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa.

6.11.1. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Haciendo referencia a lo establecido en el decreto 144/2016, de 14 de junio, en la siguiente tabla, se establece el peso de cada criterio de calificación. Se puede observar la relación de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje así como la contribución a las competencias clave de cada uno de ellos.

La Unidad se centra en el desarrollo de los Bloques 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” y Bloque 3: “Geometría”.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CC *	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas.	CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.	CCL CMCT	EA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema aplicando el uso del lenguaje matemático acorde a su etapa educativa.
1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación de problemas, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT CAA	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas, identificando los datos, relacionándolos entre ellos y entendiendo el contexto donde se desarrolla el problema. EA.1.2.2. Entiende lo que se requiere en el enunciado del problema y es capaz de detectar las soluciones que éste puede tener. EA.1.2.3. Realiza una valoración del problema y es capaz de utilizar estrategias inductivas o deductivas realizando una validación de los resultados obtenidos
1.3 Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT CAA	EA.1.4.1. Es capaz de indagar en el resultado del problema ya resuelto, formulando otras maneras de resolución y razonando el significado del resultado obtenido, analizando su coherencia. EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas a partir de los resueltos, con nuevas aportaciones y proponiendo nuevos casos de planteamientos.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CC *	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
1.5 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT CAA CSC SIEP	EA.1.6.1. Identifica elementos o situaciones en la realidad que tienen posible relación con problemas matemáticos. Realiza su modelización. EA.1.6.2. Establece vínculos entre problemas de su vida cotidiana y el mundo matemático, interpretándolo y aportando los conocimientos matemáticos necesarios.
	CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	CMCT CAA	EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados
1.6 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT	EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, planificación del proceso y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos con la precisión de su nivel educativo y a la dificultad de la situación. EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, plantea y se encuentra en una búsqueda de respuestas adecuadas, tanto para el aprendizaje de conceptos como para la obtención de resultados en problemas.
	CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT CAA SIEP	EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización acorde a sus consecuencias y conveniencias de sencillez y utilidad.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CC *	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
	CE.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT CAA SIEP	EA.1.10.1. Reflexiona sobre la solución de los problemas abordados y su proceso de resolución, recopilando las ideas claves para su aplicación en situaciones futuras similares
1.7 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:			
b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos;	CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT	EA. 1.11.1. Utiliza los medios tecnológicos adecuados para interpretar los conceptos trigonométricos, aumentando la facilidad de su comprensión.
c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;		CD CAA	EA.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para identificar y asociar elementos del entorno real con las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas, extrayendo información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. EA.1.11.3. Mediante la utilización de medios tecnológicos, elabora la representación gráfica del problema para identificar los datos que se requieren
a) la recogida ordenada y la organización de datos;	CE.1.12.Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones	CCL CMCT CD	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios, tras un proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante.
e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos;		CAA	EA.1.12.2. Utiliza los recursos creados para cimentar la base de su aprendizaje y poder utilizarla durante las distintas sesiones de clase.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CC *	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
f) comunicar y compartir , en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.		EA.1.12.3. Mediante los medios tecnológicos estructura adecuadamente sus conocimientos, mejorando su proceso de aprendizaje. Con los resultados obtenidos, es capaz de analizar sus puntos fuertes y débiles, focalizando y autoevaluándose para establecer pautas de mejora.
3.1 Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. 3.2 Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	CE.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT CAA	EA.3.1.1. Relaciona los ángulos y lados de un triángulo rectángulo. Calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo EA.3.1.2. Conoce y obtiene las razones trigonométricas así como las relaciones en la circunferencia goniométrica. Aplica el concepto de radián. EA.3.1.3. Utiliza la trigonometría para la resolución de áreas de polígonos. EA.3.1.4. Utiliza medios tecnológicos para la resolución de problemas trigonométricos. EA.3.1.5. Identifica, reconoce y resuelve problemas cotidianos mediante la aplicación de razones trigonométricas.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CC *	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
3.2 Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. 3.3. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medidas de longitudes, áreas y volúmenes. 3.6 Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas	CE.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT CAA	EA.3.2.1. Obtiene valores geométricos mediante la medición directa de datos y la resolución de triángulos aplicando las razones y relaciones trigonométricas. EA.3.2.2. Resuelve problemas mediante aplicaciones informáticas y recursos Web, fortaleciendo los conceptos teóricos y prácticos desarrollados en clase.

6.11.2. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

Los criterios de calificación de cada uno de los estándares de aprendizaje se evaluarán y tendrán un peso según el escenario en el que se haya desarrollado la actividad. Se tendrá en cuenta si el trabajo ha sido realizado grupal o individualmente, realizando distintos instrumentos de valoración para su puntuación. En el Anexo I, queda ampliada la forma de evaluación mediante rúbricas relacionadas con el logro de los objetivos de aprendizaje.

La ponderación para cada una de las partes que compone la Unidad, será:

RÚBRICA	CRITERIO DE CALIFICACIÓN	PONDERACIÓN
1	Prueba Escrita	60 %
2	Intervenciones en Clase	10 %
3	Trabajo Autónomo y Resolución de Problemas	15 %
4	Trabajos en Grupo	15 %

Tabla 11: Criterios de calificación de evaluación, Fuente elaboración propia

Según lo establecido en el artículo 18 de la Orden de 14 de julio de 2016, los resultados de la evaluación de cada materia se aplicarán en la correspondiente acta de evaluación, en el expediente académico del alumnado y en el historial académico.

Se expresará en valores numéricos de 1 a 10, sin decimales. Se considerarán positivas las iguales o superiores a 5, aplicándose los siguientes términos: Suficiente (SU): 5. Bien (BI): 6. Notable (NT): 7 u 8. Sobresaliente (SB): 9 o 10 y negativas las inferiores a 5, correspondiendo a insuficiente (IN).

Teniendo en cuenta la Orden de evaluación y en el marco de la autonomía pedagógica, los Departamentos de coordinación didáctica establecerán acuerdos consensuados y compartidos respecto a los criterios de calificación de las materias.

7. CONCLUSIONES

Tras la elaboración del TFM, he podido poner en práctica todos los conocimientos adquiridos en las distintas clases del Máster cursado. He podido agrupar todos aquellos conocimientos que a priori no tenían un nexo común, pero que en la elaboración del presente TFM ha supuesto un nexo de unión entre todas las partes que componen la presente memoria.

Para tener conocimiento de las unidades existentes de trigonometría impartidas en los centros, se ha analizado dos editoriales, realizando una comparación de sus contenidos así como de las actividades que proponen. Se puede decir, que cada editorial mostraba sus destrezas y puntos fuertes dependiendo el apartado a desarrollar, pero si algo tenían en común eran las escasas actividades relacionadas con la vida cotidiana o el uso de herramientas Web para la resolución de las actividades.

Se ha indagado y consultado en diversas revistas científicas buscando respuestas a la percepción que tienen los alumnos acerca de las matemáticas. Como respuesta se ha encontrado la inseguridad que presentan en la resolución de problemas y como advertencia se dice que podría paliarse mediante una buena comunicación positiva y basada en fundamentos aplicables a la realidad.

Se ha querido recopilar también cuales son las dificultades mas presentes para los alumnos en la unidad de trigonometría, pero tras las escasas fuentes de información e investigaciones, el TFM se apoya en un artículo de investigación donde se indaga acerca de esta problemática. Tras los análisis pertinentes, el artículo concluye sugiriendo una enseñanza donde el alumno tome un papel más activo a través del trabajo experimental.

Las distintas investigaciones consultadas, promueven que para que los alumnos aumenten su motivación y curiosidad por la asignatura de matemáticas, se apliquen distintos recursos que llamen y capten la atención del alumnado. Además se apuesta por un aprendizaje en donde los alumnos descubran por sí mismos nuevos conceptos mediante la indagación de información.

Tras considerar y examinar los típicos errores que los alumnos muestran a la hora de resolver problemas trigonométricos y analizar aquellas metodologías más recomendadas para un aprendizaje más efectivo y funcional, se ha elaborado una unidad teniendo en cuenta metodologías distintas a lo que se viene realizando en estas últimas décadas, sin olvidar ni dejar de aplicar la metodología tradicional.

Estas nuevas metodologías aportan enormemente un aliciente en la motivación del alumnado, ya que aumenta su entusiasmo por la resolución de problemas y aumenta la indagación en la búsqueda de problemas relacionados con su vida cotidiana.

Respecto a las actividades propuestas en esta unidad, se ha intentado en la mayor parte de la unidad relacionar las actividades con aplicaciones reales y cercanas, donde los alumnos puedan sentirse cómodos y motivados al ver una aplicación próxima. Esta realidad ha sido trabajada a través de actividades cuyos enunciados e ilustraciones correspondían a un estado totalmente realista, donde la cultura y la geografía han estado muy presentes. Además los alumnos han protagonizado de manera directa la aplicación de la trigonometría a través de la proposición de modelizar en grupos el patio del IES. Se propone usar aparatos de medición, inusuales pero a la vez atractivos para el aprendizaje del alumno, cambiando la rutina del estudiante en su clase de matemáticas, durante las dos sesiones dedicadas a esta actividad.

Se ha optado también por otras actividades donde ha primado el aprendizaje cooperativo, fruto de la lectura de diversas investigaciones donde se confirma que el

aprendizaje entre iguales es un aprendizaje que se adquiere sin apenas esfuerzo y con un vocabulario fácil, a nivel de usuario (entre iguales).

La manera de evaluar cada proceso, se realiza mediante una rúbrica, donde quedan desglosados claramente los objetivos de aprendizaje que se quieren alcanzar.

Mi periodo en el centro de prácticas, ha tenido un papel importante en desmontar mi creencia generalizada de una sociedad adolescente con gran falta de motivación e interés por aprender. Tras dialogar y conocer más a fondo a algunos de los alumnos a los que les he impartido clase, he podido apreciar la variedad de inquietudes y curiosidades que tienen, no dejando atrás los cambios hormonales propios de la etapa adolescente. Tuve el placer de dialogar con varios profesores del área de matemáticas, con los que llegué a comprender la utilidad, los avances y descubrimientos que la Didáctica de las Matemáticas ha experimentado en los últimos años. Creo que es muy importante la aplicación práctica de sus avances y metodologías. De este modo se podrá aumentar el interés y motivación de los alumnos por el campo de las ciencias para despertarles inquietudes por la investigación y abrirles puertas dónde la aplicación y el manejo de distintas herramientas es la demanda que el país necesita en estos tiempos que corren.

Con este diseño de unidad fundamentado en la normativa estatal y autonómica y en las distintas investigaciones y artículos publicados, se ha intentado plasmar un concepto de enseñanza que motive a los alumnos y que rompa de alguna manera la concepción de que las matemáticas son fórmulas cuya aplicación está muy lejos de la realidad. Se espera que los alumnos se entusiasmen por la asignatura y que puedan aplicar de manera directa muchos de los contenidos desarrollados en clase en su día a día, identificando situaciones reales y problemas cotidianos donde puedan aplicar su capacidad de resolución.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, M. D., Miranda, A. Y., Parra, S., Redondo, R., Santos, T., & Santos, D. (2004). *Matemáticas Opción A para 4º ESO*. Santillana.
- Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L., & Gómez, P. (2014). *Razones trigonométricas. Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1*. Ediciones Uniandes.
- Barriuso Pérez, M. P. (2007). Matemáticas Interactivas. *Revista Sigma*, ISSN 1131-7787(31), 85-92.
- Carrillo Siles, B. (Marzo de 2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. ISSN 1988-6047. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*(16).
- Del Río Sanchez, J. (1991). *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento*. (C. y. Ministerio de Educación, Ed.)
- Dodge, B. (1995). *WebQuests: a technique for Internet-based learning*. Distance Educator.
- Escribano, A. (2008). *El aprendizaje Basado en Problemas. Una propuesta metodológica en Educación Superior*. Narcea.
- Flores Gil, F. L. (2008). *Historia y didáctica de la Trigonometría*. Obtenido de http://uaqedvirtual.uaq.mx/campusvirtual/bachilleres/pluginfile.php/80068/mod_resource/content/0/Historia%20y%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Trigonometr%C3%ADa.pdf
- Gomez, P. (1997). Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD. 342-414. Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, U. P. (2008). El Teorema llamado Pitágoras una Historia Geométrica de 4000 años. *Revista Sigma No 32*.
- March, T. (1998). *Why WebQuests?, An introduction*. Obtenido de <http://tommarch.com/writings/why-webquests/>
- Martinez, M. (2000). La Investigación-Acción en el Aula. *Agenda Académica*. 7(1), 27. Agenda Académica.
- Monso Ferré, F., Barberá Fábregas, P., Estela Herrero, J., Lorente Pla, N., Prósper Gisbert, C., & Suarez Garcia, M. (2008). *Matemáticas 4ºESO*. Guadiel.
- Morales Munera, S., & Acevedo Agudelo, Y. (Octubre de 2013). Uso de las WebQuest como recurso educativo Potencializador del aprendizaje De la Trigonometría. *Revista científica*. ISSN0124 2253. doi: <https://doi.org/10.14483/23448350.7759>
- Naranjo Triana, W. E., & Triana Tobar, M. A. (2015). Las razones Trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas: reflexiones de una indagación

en el aula. *Revista Ejes*, 67-73. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/9816/>

Ortiz, A., & Arias, R. (2012). GeoGebra como herramienta para la enseñanza de la Matemática: resultados de un curso de capacitación.

Palomar Sánchez, M. J. (Diciembre de 2009). Ventajas e Inconvenientes de las TIC en la docencia. ISSN 1988-6047. *Revista Digital Innovación y Experiencias*.

Sicre, O., & Munguía, J. (2007). Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con calibre. *XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. Universidad de Sonora. México.

Sosa Díaz, M. J. (s.f.). *La WebQuest: Ventajas e inconvenientes como recurso educativo*. Departamento de Ciencias de la Educación. Recuperado de http://www.web.upsa.es/spdece08/contribuciones/146_poster_WEBQUESTdefinitiva.pdf.

Steinberg, A. (1997). *Real learning, real work*. Boston.

UJA JAEN. (s.f.). Obtenido de <https://www.ujaen.es/estudios/oferta-academica/masteres/master-universitario-en-profesorado-de-educacion-secundaria-obligatoria-y-bachillerato#informacion-academica>

Vasco, C. (1978). Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y Valores*, 27(53-54), 99-112.

Vidal S. y Fuertes, M. (2016). Percepciones de los alumnos hacia las Matemáticas, ISSN 1012-1587. *Revista de Ciencias Humanas y Sociales*(12), 964-986. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5852339>

Real Decreto 1146/2011, de 29 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Real Decreto 1105/2014 (TEXTO CONSOLIDADO), de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, Texto consolidado de 30/07/2016.

DECRETO 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, BOJA núm. 122 (2016)

ORDEN de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA núm. 144 (2016).

ANEXO I

ÍNDICE

1.	ACTIVIDADES DE DESARROLLO	2
2.	ACTIVIDADES: WEBQUEST	12
3.	PLAN DE CLASE PARA DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD IBL	18
4.	ACTIVIDADES TIC	22
5.	ACTIVIDAD DE GRUPO 2-3 PERSONAS	23
6.	RECURSOS UTILIZADOS	24
7.	EVALUACIÓN	26
7.1.	EVALUACIÓN INDIVIDUALIZADA POR ALUMNO:	26
7.2.	RÚBRICA PARA PRUEBA ESCRITA	27
7.4.	RÚBRICA PARA VALORACION DE TRABAJO AUTÓNOMO	29
7.5.	RÚBRICA PARA VALORACION DE TRABAJO EN GRUPO.....	33

1. ACTIVIDADES DE DESARROLLO

01. Convierte las siguientes medidas de ángulos de grados a radianes:

- a) 65° b) 136° c) -75° d) 210°

02. A continuación, convierte la medida de los siguientes ángulos de radianes a grados:

- a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{2\pi}{4}$ rad c) $2,5\pi$ rad d) $\frac{5\pi}{2}$ rad

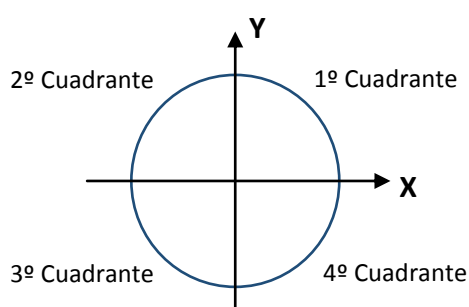
03. Mediante un transportador de ángulos dibuja en la circunferencia gonométrica las siguientes medidas angulares:

- a) 117° b) π rad c) 295° d) $\frac{7\pi}{2}$ rad

04. Indica dibujando una circunferencia gonométrica los segmentos significativos que representan el seno, coseno y tangente del ángulo 120° .

05. Representa e indica a qué cuadrante pertenece los siguientes ángulos. En caso necesario, reducirlos al primer giro.

¿Qué significado tiene el signo de un ángulo?



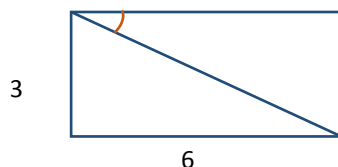
- a) 235°
b) 347°
c) -640°
d) 1225°
e) 886°

06. Sin la utilización de la calculadora y con la ayuda de la circunferencia gonométrica, calcula las siguientes relaciones trigonométricas correspondientes a los ángulos que sectorizan los cuadrantes.

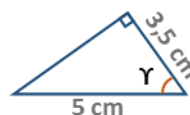
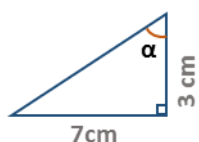
	0°	90°	180°	270°	360°
SENO					
SECANTE					
COSENO					
COSECANTE					
TANGENTE					
COTANGENTE					

¿Qué puedes observar en los resultados obtenidos? ¿Se podría decir que se cumple para cualquier ángulo?

07. Un electricista tiene que cambiar la bombilla de un museo. Si el operario tiene una escalera cuya longitud es de 10 m., ¿a qué distancia debemos de colocarla de la pared para que ésta consiga una altura de 6 m. para poder acceder a la bombilla?
08. ¿Qué ángulo formará la escalera la actividad anterior con el suelo?
¿Y con la pared?
09. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 y 6 cm respectivamente. Representalo y calcula las razones trigonométricas de sus dos ángulos agudos.
10. Las coordenadas de un punto P (-5,-7) corresponden al lado extremo de un ángulo. Hallar las razones trigonométricas del ángulo resultante.
11. Cuál es el valor de las razones trigonométricas si tenemos un ángulo agudo ($\hat{C}$) cuyo $\cos(\hat{C}) = 0.6$
12. Calcula las razones trigonométricas del ángulo marcado en el siguiente rectángulo dado. ¿Qué puedes decir de sus ángulos a primera vista?



13. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos pertenecientes a triángulos rectángulos.



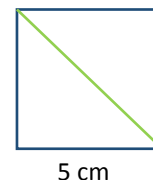
14. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ABC, estando el ángulo recto en A, para los siguientes datos:
- a) $a = 25$ cm ; $b = 21$ cm c) $b = 7$ cm; $\hat{C} = 30^\circ$
- b) $c = 9$ cm ; $b = 6$ cm d) $c = 8$ cm; $\hat{C} = 60^\circ$
15. Conociendo que la tangente de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de $\frac{\pi}{3}$, construye el triángulo.
16. Conociendo el dato que se da, obtener las razones trigonométricas restantes:
- a) $\sin \alpha = 0,75$ b) $\cos \beta = 1,2$ c) $\sin \gamma = 0$ d) $\tan \delta = 0,63$

17. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Justifícalas.

- Si el $\sin \alpha = 0,4$ entonces el $\cos \alpha = 0,8$
- Si la $\operatorname{tg} \alpha = 2$, el seno es el doble que el coseno

18. Haciendo uso de las razones trigonométricas, calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 5 cm.

Comprueba mediante el Teorema de Pitágoras que el resultado anterior es válido.



19. Conociendo las razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° , hallar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

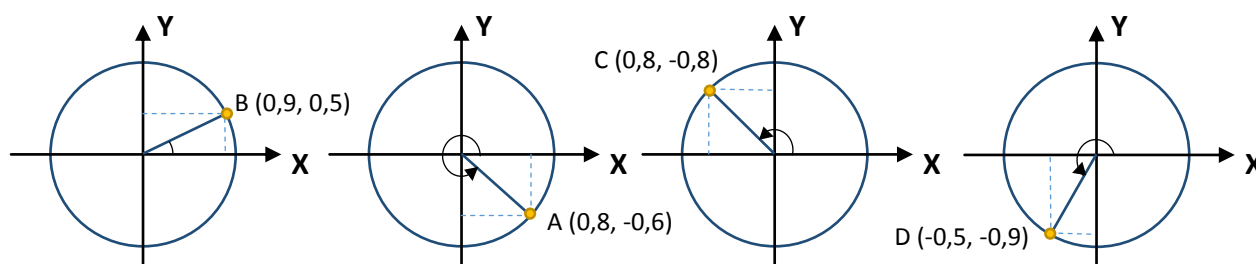
- a) 150° b) 225° c) 240° d) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) $\frac{7\pi}{6}$ rad

20. ¿Es posible que el seno de un ángulo agudo sea mayor que 1? Razona la respuesta.

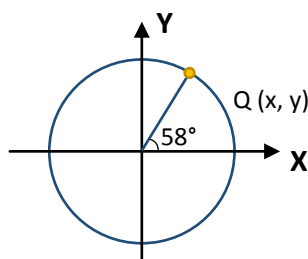
21. ¿Qué altura tendrá un edificio si nos encontramos situados a 20m del mismo y podemos observar su extremo superior bajo un ángulo de elevación de 65° ? Representa la situación mediante un croquis.

22. Nos encontramos subidos en un faro desde donde se observa el paso de un barco bajo un ángulo de depresión de 40° . El barco se acerca hacia el faro 500 m y el ángulo pasa a ser de 32° . ¿Cuál es la distancia que separa al barco del faro en la segunda observación?

23. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos que se muestran en las siguientes gráficas:

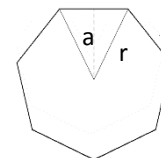


24. Determina las coordenadas del punto Q de una circunferencia cuyo radio es igual a 4 cm.

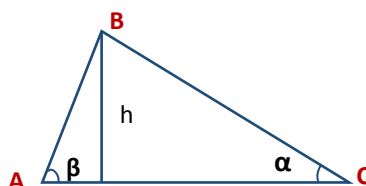


25. Calcular el resultado exacto de la fórmula $3 \operatorname{sen} \alpha + 5 \operatorname{cos} \alpha - 4 \operatorname{tg} \alpha$ si " α " es un ángulo que se encuentra en el 2º cuadrante y su coseno tiene valor de -0,5.

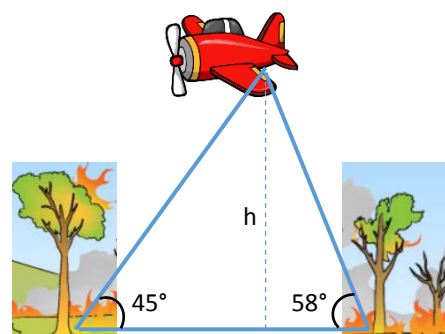
26. Halla el área de un heptágono regular el cual tiene un perímetro de 140 cm.



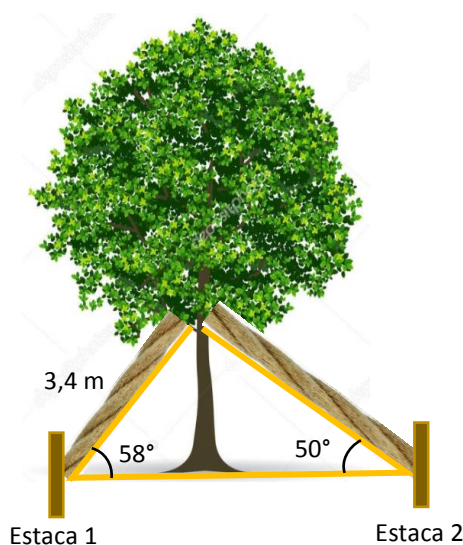
27. Halla de manera aproximada, mediante el uso de una regla graduada, el valor de las razones trigonométricas de los ángulos señalados.



28. Existen dos incendios simultáneos en zonas que se encuentran a una distancia de 20 km. Debido a que el sitio es inaccesible, un avión está cooperando para apagar ambos fuegos. El avión se encuentra en el mismo plano vertical bajo los ángulos de 45° y 58° . ¿A qué altura deberá volar el avión para que no sea alcanzado por el fuego? ¿Cuál es el punto de fuego más cercano? Calcula la distancia para justificarlo.



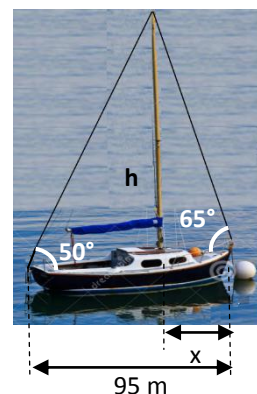
29. Un árbol se encuentra tambaleándose de un lado a otro. Para evitar que se parta el tronco, se decide atarlo desde la parte superior del tronco hasta el suelo mediante dos cuerdas apuntaladas. Si los ángulos que forman las cuerdas son los que se muestran en el dibujo, ¿a qué altura se ha atado el árbol? ¿Cuál es la distancia entre los puntales del suelo (estacas)?



30. En una excursión a Río de Janeiro, a lo lejos se puede observar la gran estatua del Cristo Redentor. El ángulo con el que observamos su cabeza es de 30° , y la altura de la estatua es de 36 m. Si el punto en donde parte la excursión es el señalado en la imagen, ¿A qué distancia se encuentra el Cristo Redentor?



31. El mástil de un velero se encuentra unido a la popa y a la proa de la nave por dos cables tensados de acero. El ángulo que forma con la cubierta es de 50° y 65° grados respectivamente. Si la eslora del barco es de 95 m., ¿Cuál será la altura del mástil?



32. Si trabajamos con ángulos agudos, justifica si son ciertas las siguientes afirmaciones y represéntalo gráficamente:

- Cuanto mayor es el ángulo mayor será el valor del seno
- Cuanto mayor es el ángulo mayor será el valor del coseno

33. ¿Qué altura media tendrá una montaña si el ángulo de elevación es de 37° y la inclinación es de 360 metros?



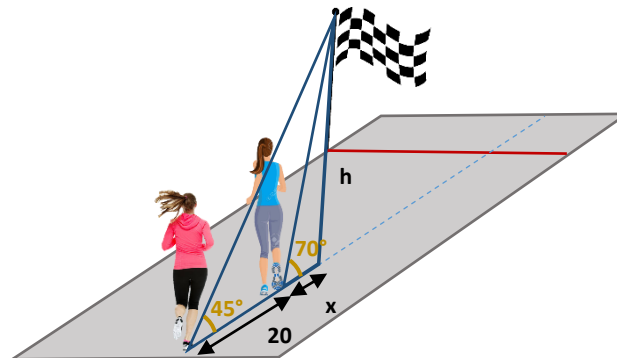
34. Calcula la altura de la cima de la montaña, si estamos a una distancia de 2500 m del pie de su vertical y mediante un aparato topográfico de 1,50 m de altura medimos un ángulo de inclinación de 61°
35. Paula está volando su cometa en un parque. Ha soltado ya 51 m de hilo y el ángulo que forma la cuerda de la cometa con la horizontal es de 63° . ¿A qué altura, h , se encuentra la cometa?

36. Pedro ha ido como turista a París para ver su monumento favorito: la Torre Eiffel. Desde un parque, a 410 metros de la torre pudo observar con admiración su belleza. Si puede visualizar su punto más alto desde un ángulo 40° , ¿Qué altura tiene la Torre Eiffel?

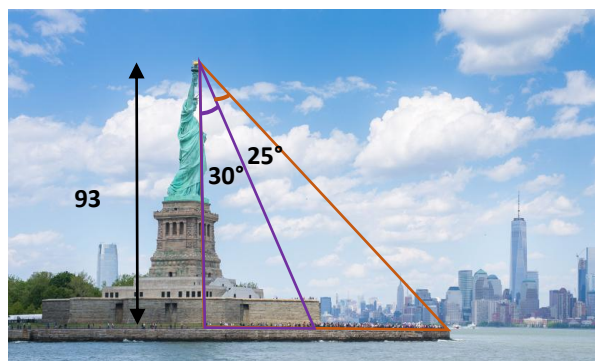
Si se va acercando cada vez más a la torre, el ángulo de visión hacia el punto más alto ¿crecerá o disminuirá?



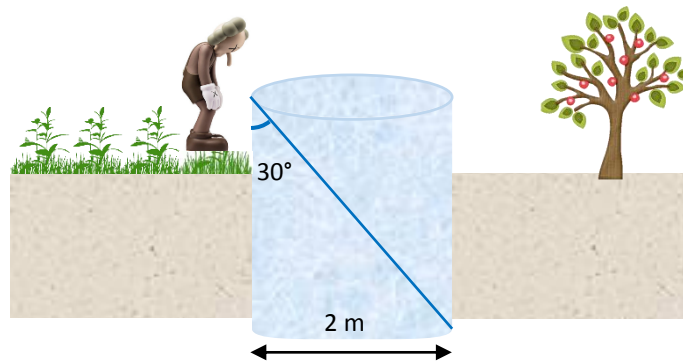
37. ¿Qué ángulo de inclinación deben tener los rayos solares en el momento en que un bloque de pisos de 32 m de altura proyecta una sombra de 13 m de longitud?
38. En una maratón se ven aparecer a las primeras corredoras que van a llegar a la meta. En el instante donde está tomada la imagen, ambas forman distintos grados respecto al punto más alto del mástil de la bandera. La corredora que ocupa la segunda posición se encuentra a 20 metros respecto a la primera, ¿Qué distancia hace que la primera corredora tenga una visualización de 70° con el punto alto del mástil?



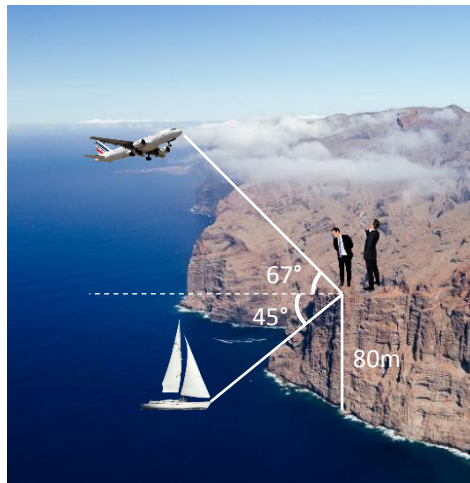
39. De noche, la antorcha de la estatua de la Libertad, situada en Nueva York, proyecta dos haces de luces muy intensos en dos puntos distintos de la explanada. Si su altura es de 93 m, ¿Cuál es la distancia del haz de luz para los dos puntos si forman un ángulo de 30° y 25° respectivamente?



40. Un triángulo isósceles tiene una base que mide 62 cm. y los lados iguales 28 cm. Hallar el valor de todos sus ángulos.
41. ¿Cuál será la profundidad de un pozo con una anchura de 2m si podemos ver el borde opuesto del fondo con un ángulo de 30° ?



42. Dos amigos han quedado para salir a ver el atardecer desde el acantilado situado a 80 metros sobre el nivel del mar. Uno de ellos mira el velero que está navegando en las proximidades en ese instante con un ángulo de depresión de 45° , mientras que al otro le llama la atención un avión que sobre vuela la zona y lo visualiza con un ángulo de elevación de 67° .



- ¿A qué distancia se sitúa el velero de la costa?
- ¿A qué altura vuela el avión?
- ¿Qué se sitúa a mayor distancia de estos dos amigos: el avión o el velero? Justifica tu respuesta

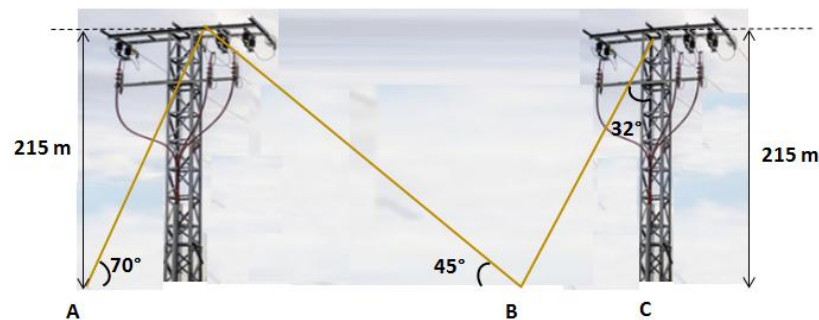
43. ¿A qué distancia estoy situada de un edificio si éste tiene 35 m de altura si miro su parte más alta con un ángulo de 87° ?
- ¿Qué ocurre con la distancia si disminuyo el ángulo de observación?
44. Busca un ángulo que coincida con su complementario y calcula sus razones trigonométricas.
45. ¿Hay algún ángulo que sea igual a su suplementario? De ser así, calcula las razones trigonométricas.
46. Si se cumple que $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$, halla las razones trigonométricas del ángulo.

47. ¿Existe algún ángulo α que cumpla las siguientes igualdades?:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{5} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

48. Si sabemos que las diagonales de un rombo tienen una longitud de 11 y 15 cm respectivamente, ¿Cuánto mide el lado del rombo y sus ángulos?

49. Se desea realizar una conexión que salga desde el punto A y pase por los dos transformadores representados en la imagen. Si queremos realizar la instalación, ¿Qué longitud de cable total debemos comprar?



50. Tarea de reflexión (uso de la circunferencia gonométrica):

- En qué cuadrante está situado el ángulo α si:

- $\operatorname{sen} \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$ $\cotg \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$
- Si los ángulos α y β verifican que $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ y $\begin{cases} 180^\circ < \alpha < 270^\circ \\ 180^\circ < \beta < 270^\circ \end{cases}$

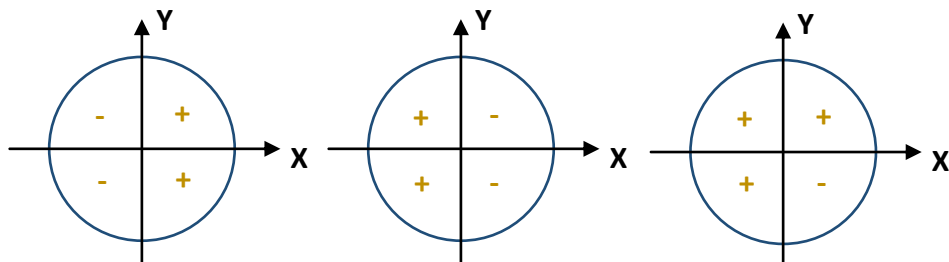
Indica si las siguientes afirmaciones son correctas.

Justifica tu respuesta.

* $\alpha < \beta$

* $\operatorname{sen} \alpha < \operatorname{sen} \beta$

51. A continuación se muestra cada cuadrante de la circunferencia con un signo, ¿Podrías decir a qué razón trigonométrica pertenece? Si no perteneciese a ninguna, justifica tu respuesta.

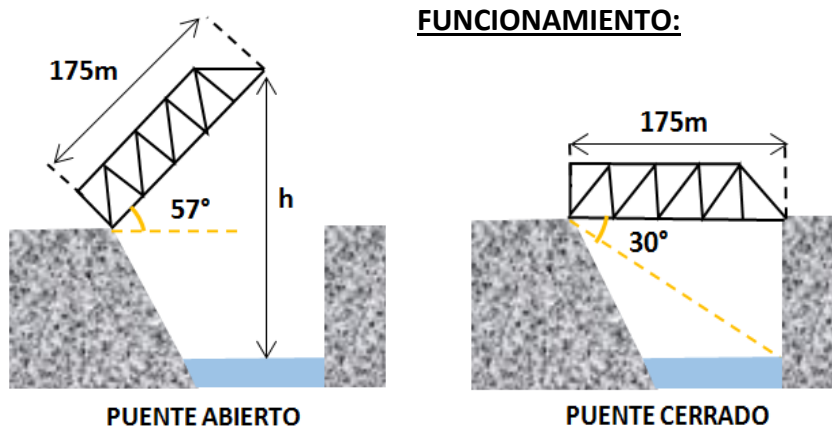


52. Representa mediante el uso de una regla graduada los ángulos a partir de las siguientes razones trigonométricas.

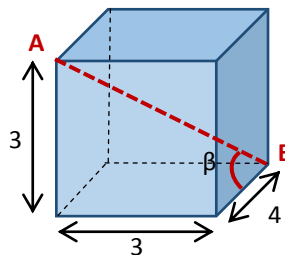
Tras su representación angular, comprobar con la calculadora si el ángulo obtenido concuerda con el dibujo realizado.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \qquad \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

53. El puente de la Trinidad, situado en San Petersburgo, es un puente elevadizo el cual abre uno de sus vanos para permitir el paso de las embarcaciones. La distancia del vano (de orilla a orilla) es de 175 m. y cuando se abre por completo forma un ángulo de 57° con la horizontal. Cuando el puente se cierra, el ángulo de depresión de la orilla a un punto de la superficie del agua en el extremo opuesto es de 30° . ¿Cuál es la altura h del puente cuando éste se encuentra abierto?



54. A continuación se muestra una caja con las dimensiones de sus caras definidas. Que longitud tiene la diagonal que va desde A a B? ¿Qué ángulo forma dicha diagonal con la base inferior de la caja?

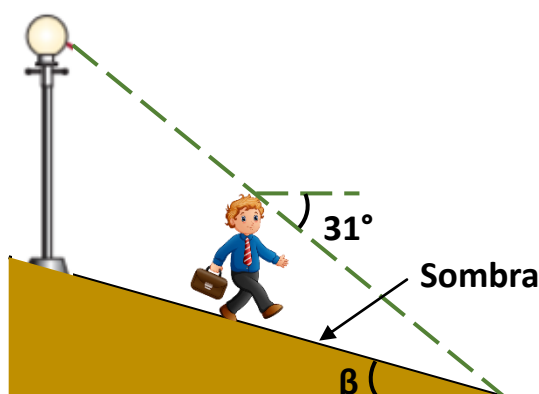


55. La altura de un gnomon (reloj de sol) es de 10,16 cm. Cuando su sombra mide 14,24 cm, ¿Qué ángulo de elevación tendrá el sol?

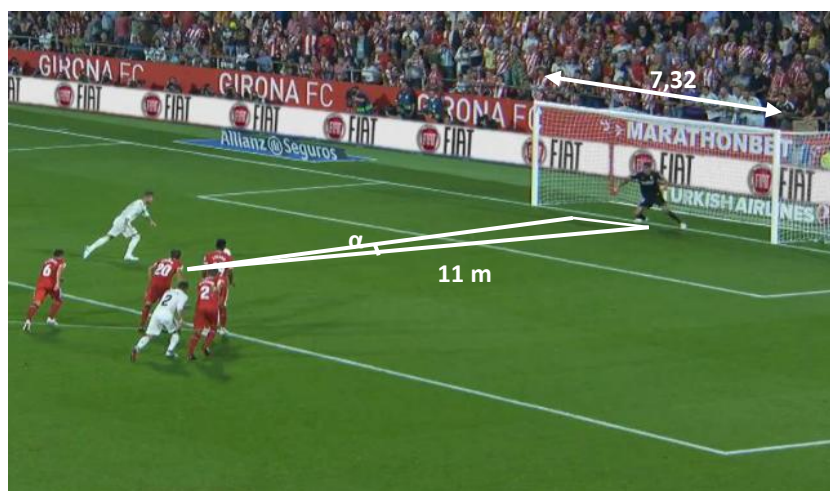


56. Un hombre que mide 1,75 m se encuentra parado en una acera cuesta abajo con un ángulo constante. Una farola que ilumina la calle, se sitúa justo tras de él,

formando una sombra de 31 cm. de longitud. El ángulo de depresión desde la parte superior del hombre hasta la inclinación de su sombra es de 31° . ¿Cuál es el ángulo β que forma la acera con la horizontal?



57. Se juega la final de la Champion: Real Madrid-Liverpool. El partido arroja un empate como resultado y se encuentra en el minuto 88. En estos últimos minutos de juego el árbitro pita penalti a favor del Real Madrid. Sergio Ramos se anima a tirarlo pero con la premisa que en sus entrenamientos sólo mete gol seguro cuando tira hacia el lado izquierdo del portero a una distancia de 1m desde la situación de éste. ¿Qué ángulo será el que hará marcar el tiro a puerta? ¿Qué distancia recorrerá el balón hasta la línea de gol? ¿Qué ángulo tendría que formar para que la pelota golpeará al palo?



2. ACTIVIDADES: WEBQUEST

Se trabajará mediante WebQuest en dos de las sesiones programadas para el desarrollo de la unidad de trigonometría.

La primera sesión de WebQuest tendrá lugar el primer día de comienzo de la unidad. En ella se realizará un recordatorio mediante actividades propuestas acerca de la resolución de triángulos para refrescar los conceptos acerca de semejanza de triángulos y el Teorema de Pitágoras, ambos imprescindibles para abordar los nuevos conceptos trigonométricos que se desarrollarán a lo largo de la unidad.

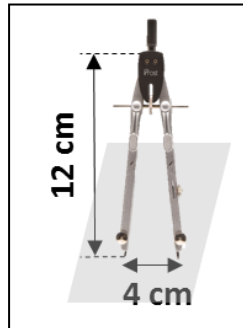
Para comprender mejor qué es la trigonometría así como su importancia y su utilidad, los alumnos buscarán información de los hechos y descubrimientos más relevantes que se han encontrado a lo largo de la historia, así como las distintas aplicaciones y usos que se le ha dado hasta la actualidad. Todo ello quedará referenciado mediante fuentes bibliográficas que arrojen una información verídica y contrastada, no copiando información de la primera página Web que encuentren en el buscador.

La siguiente sesión de WebQuest se realizará una vez tratados los contenidos de funciones trigonométricas. Mediante distintas imágenes, todas ellas relacionadas con la arquitectura, tendrán que poner a prueba sus conocimientos en base a la trigonometría vista en clase. Mediante estructuras reales identificarán y comprobarán de manera directa en qué sitios aparece la trigonometría y con qué forma. Luego, de manera inversa, ellos serán los encargados de buscar elementos o construcciones que tengan relación directa con el tema abordado, en donde además de la materia objeto: las matemáticas, la geografía e historia también ocuparán un papel fundamental.

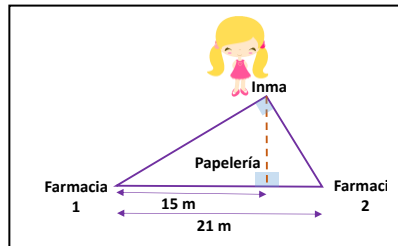
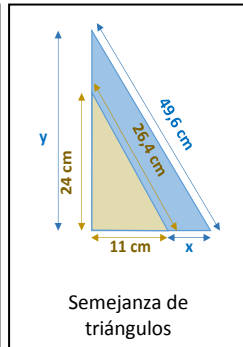
SESIÓN 1: WEBQUEST

PON A PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

Un compás de bigotera tiene separadas sus patas 4 cm. La vertical desde el eje hasta la superficie del folio tiene una altura de 12 cm. ¿Cuántos milímetros mide cada una de sus patas?



Las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo son 24 y 11 cm respectivamente. ¿Cuánto medirán los catetos del triángulo semejante mayor al primero la cual tiene una hipotenusa de 49,6 cm?



¿Cuál de las dos farmacias se sitúa más cerca de Inma?
¿A cuántos m. está la papelería?

Para avanzar en la resolución de este tipo de problemas y poder extraer más información debemos de estudiar:

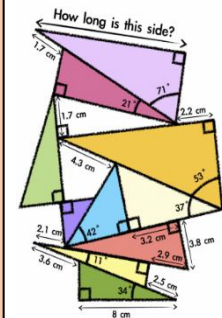
TRIGONOMETRÍA

Seguramente más de una vez has escuchado esta palabra...

- ¿Qué se te viene a la mente cuando la oyes?
- ¿Sabrías decir que es y que estudia la trigonometría?
- ¿En qué sitios o en qué situaciones podría aplicarse?
- ¿Conoces algún personaje histórico que haya usado la trigonometría como base de alguna aplicación importante?
- ¿Tienes alguna intuición en su manera de aplicarse?

MEDIANTE LA REALIZACIÓN DE ESTA WEBQUEST, PODRÁS IR DÁNDOLE RESPUESTA A TODAS ESTAS PREGUNTAS.

APRENDERÁS ACERCA DE LA HISTORIA TRIGONOMÉTRICA Y LA UTILIZARÁS COMO CIMIENTO PARA LA POSTERIOR COMPRESIÓN DE LOS CONTENIDOS DE ESTA UNIDAD



SESIÓN 1: WEBQUEST



BÚSQUEDA DE INFORMACIÓN

A continuación deberás usar la Web como recurso para encontrar información acerca de las siguientes preguntas.

Cuando recopiles toda la información necesaria, deberás de plasmar todas aquellas ideas más importantes y que te han llamado la atención en la última página de esta Webquest. Podrá ir acompañado de dibujos o figuras que escenifiquen o aporten conocimiento acerca de la información descrita.

1. DEFINICIÓN DE TRIGONOMETRÍA
2. DONDE SE ORIGINÓ LA TRIGONOMETRÍA
3. EVOLUCIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA
4. PRINCIPALES AUTORES (CON BREVE RESEÑA HISTÓRICA DE CADA UNO DE ELLOS)
5. RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA
6. APLICACIONES TRIGONOMETRICAS



RECURSOS WEB

ENLACES DE INTERÉS:

<https://www.youtube.com/watch?v=RDsp2QSQLnA>

<https://www.youtube.com/watch?v=I2G4PeIGkvkhttps://www.cecyl3.ipn.mx/ibiblioteca/mundodelasmaticas/unidad1historia.html>

<http://perso.wanadoo.es/amiris/trigonometria/documentos/lecturatrigo.html>

https://www.academia.edu/14306537/Historia_de_la_trigonometr%C3%ADa

https://issuu.com/uno23456789/docs/historia_de_la_trigonometria

<http://cursodetrigonometria01.blogspot.com/2014/03/aplicaciones-de-la-trigonometria-en-la.html#more>

https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_2.pdf

https://issuu.com/pedrocamacaro/docs/revista_mundo_trigonometria_profesores

SESIÓN 1: WEBQUEST. ELABORACIÓN DE POSTER



SESIÓN 7: WEBQUEST

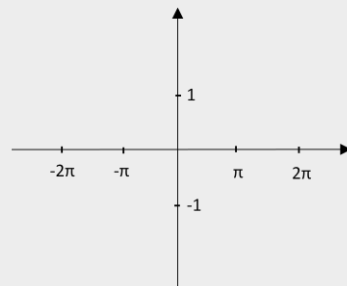
Tras estudiar las relaciones trigonométricas y haber aprendido las distintas aplicaciones que tiene la trigonometría, esta sesión de WebQuest va orientada al reconocimiento de las funciones trigonométricas en edificios construidos en distintas ciudades del mundo.

Identifica y representa gráficamente en el lado derecho de la imagen la función trigonométrica correspondiente, justificando la posición del origen de coordenadas.

Puente de la Paz, Georgia (USA),
diseñado por el arquitecto Máchele
de Lucchi en el año del 2010



Función correspondiente:

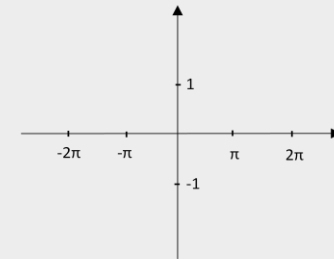


**LA
TRIGONOMETRÍA
EN LA ARQUITECTURA**

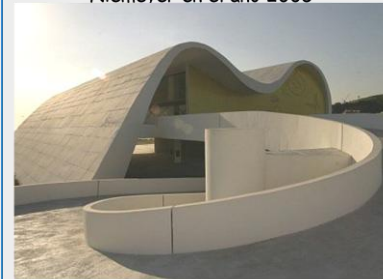
Zentrum Paul Klee, Berna (Suiza),
diseñado por el arquitecto
italiano Renzo Piano en el año 1998



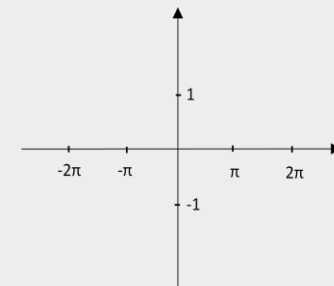
Función correspondiente:



Teatro Popular en Niterói, Brasil
diseñado por el arquitecto Oscar
Niemeyer en el año 2005



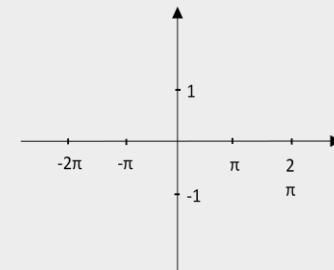
Función correspondiente:



Capilla Bosjes, Witzenber
(Sudáfrica), 2016



Función correspondiente:



SESIÓN 7 WEBQUEST

De la misma manera, busca imágenes de construcciones que te llamen la atención y en donde la trigonometría tenga un papel importante. Además de gráficas de funciones, se pueden plasmar edificios característicos, como por ejemplo la torre de Pisa, trazando sobre la imagen los ángulos y distancias que caracteriza su patología.

IMAGEN 1

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDENTIFICADAS

IMAGEN 2

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDENTIFICADAS

IMAGEN 3

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDENTIFICADAS

IMAGEN 4

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDENTIFICADAS

IMAGEN 5

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDENTIFICADAS

3. PLAN DE CLASE PARA DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD IBL

El objetivo de esta actividad será que los alumnos conozcan una aplicación práctica y directa de la geometría y la trigonometría de tal manera que pueda percibirse su utilidad.

La tarea se desarrollará fuera del aula, concretamente en el patio del centro. La actividad se organizará en grupos de 2-3 alumnos, los cuales elaborarán el trabajo conjuntamente a partir de las premisas oportunas proporcionadas por el docente. Los temas tratados en la actividad y con los que se pretenden obtener una mejor concepción de los mismos a través de la práctica son:

- Modelización del patio del centro
- Mediciones de distintas distancias
- Mediciones de ángulos
- Proporcionalidad entre distancias

El ejercicio sería el siguiente:



Cada grupo deberá poner en práctica los conocimientos obtenidos durante la unidad.

El objetivo de la presente actividad es tener una concepción de la medición de longitudes y ángulos de todos los elementos que os rodean en vuestro entorno más cercano, concretamente el patio del IES.

Con la ayuda de un teodolito (aparato de medición topográfica), se obtendrán aquellos datos que se deseen tomar para la obtención de magnitudes y ángulos.

El objetivo es tener una medición general de todos los elementos que conforman el patio, para posteriormente realizar un croquis que refleje el trabajo de campo realizado.

Se proporcionan unas tablas para anotar de una manera más cómoda y ordenada la toma de datos.

Nº	OBJETO MEDIDO	ALTURA TEODOLITO	DIST. HORIZONTAL	ÁNGULO	ALTURA
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

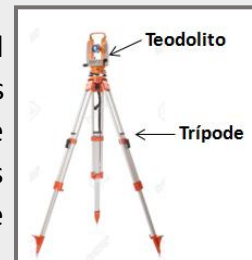
Como se ha comentado en el TFM, el centro donde se desarrolla la actividad propuesta; IES San Juan Bosco, cuenta con un ciclo de construcción civil impartido en horario de tarde. Debido a que se imparten asignaturas como topografía, el departamento cuenta con una serie de teodolitos almacenados en un aula. Dado mi conocimiento en esta área debido a mi profesión (Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos) y al fácil manejo que resulta la toma de medidas con este aparato, previamente a su uso, se les repartirá a los alumnos un folio donde se explicará unas nociones básicas del funcionamiento del teodolito antes de su puesta en marcha.

EL TEODOLITO

¿QUÉ ES EL TEODOLITO? ¿PARA QUE PUEDE UTILIZARSE?

Los teodolitos son un artificio que sirve para medir. Lo hacen de forma óptico-mecánica, de manera que se obtienen los ángulos verticales y horizontales con una grandísima precisión.

El instrumento de medición está compuesto por un trípode, el cual tiene acoplado un telescopio (teodolito) con dos círculos graduados, uno colocado en vertical mientras que el otro se encuentra colocado en horizontal. Estos círculos junto a las lentes son los elementos que hacen posible la medición de ángulos.



NOCIONES BÁSICAS PARA SU USO:

- El lugar de estacionamiento del teodolito será un punto estratégico donde se pueda visualizar más de un objeto para su toma de medición.
- Se regulará la altura del teodolito mediante el trípode para tener una visión clara y cómoda a través de la lente.
- Ver que la plomada del teodolito está céntrica, esto querrá decir que el teodolito está nivelado y es apto para la toma de mediciones.
- Una vez que todo está nivelado, se observará a través del visor una línea roja, la cual indica el objeto que se está midiendo. Esta línea de enfoque podremos cambiarla, moviéndola de arriba abajo hasta dar con el punto exacto donde se quiere realizar la medición.

Toda esta información será ampliada en el momento de realizar las mediciones en el patio, cuando todos dispongamos de nuestro aparato de medida.

Los distintos grupos formados, se repartirán en distintas zonas del patio, con el objetivo de tomar mediciones de todos los elementos posibles para su posterior representación en un mural. Dos de los grupos tendrán que realizar las mismas mediciones para así poder contrastar posteriormente los resultados obtenidos.

La clase, tiene una duración efectiva de 55 minutos. Por ello el Plan de clase se organizará en base a esta duración temporal con la siguiente secuenciación de actividades y duración:

Tiempo (minutos)	Actividad: 1º CLASE
5	<u>Presentación de la actividad:</u> Introducción a los alumnos de la actividad como una tarea distinta a lo que se viene realizando cotidianamente en la clase de matemáticas. Se aprovechará esta introducción para organizar y estructurar a los alumnos en grupos.
5	<u>Explicación de la tarea:</u> Se explicará en qué consiste el trabajo que tienen que realizar, dándoles unas pautas de organización. Tras esta exposición, cada alumno leerá de manera individual la tarea, comprendiendo e identificando los distintos parámetros que se les piden para obtener el resultado final así como un análisis previo de la herramienta de medición que van a utilizar. Mientras los alumnos realizan la lectura, se procederá al reparto de material de apoyo necesario para realizar la actividad. Se les proporcionará un A-3 para la realización del poster (plano con mediciones de los elementos medidos). Una vez quede claro todo lo que se llevará a cabo, de manera organizada los alumnos se dirigirán hacia el patio del instituto, al punto de encuentro que el docente haya indicado.
10	<u>Uso del Teodolito:</u> En esta parte el docente con su teodolito, irá explicando paso a paso como graduar el aparato para su posterior utilización, dando las pautas necesarias para su correcto funcionamiento.

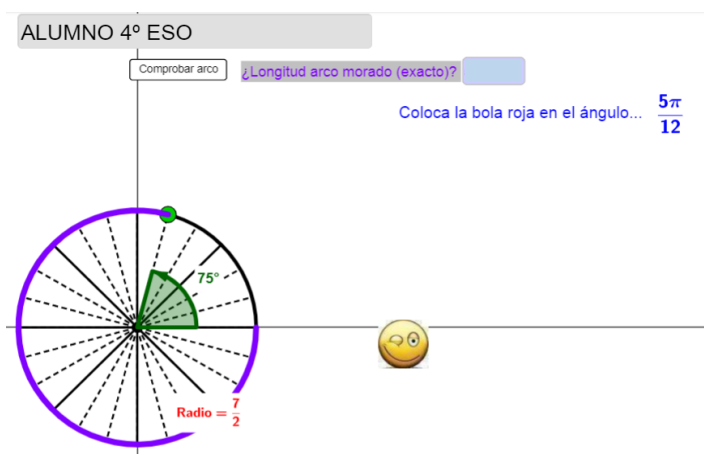
Tiempo (minutos)	Actividad: 1º CLASE
35	<u>Trabajo grupal de campo (2-3 alumnos)</u> En esta fase será donde cada grupo hará la toma de mediciones, como máximo de 10 objetos representativos de la zona de actuación donde le ha tocado realizar la medición. Se realizará una puesta en común de información con el grupo paralelo para ver si los resultados recogidos arrojan muestras de alta disparidad entre resultados. Con los resultados angulares obtenidos, los alumnos calcularán las distancias necesarias para la construcción del modelo. El docente irá paseándose entre los diferentes grupos formados revisando y en caso necesario guiándolos sin dar demasiadas pistas. Sobre todo la ayuda irá relacionada si surgen dudas acerca de lecturas de ángulos o manejo del teodolito.
Tiempo (minutos)	Actividad: 2º CLASE
35	<u>Cálculo de distancias y medidas</u> Tras haber realizado todas las mediciones necesarias a través del teodolito en la clase pasada, la primera parte de esta clase será utilizada para el cálculo de todas las distancias y medidas necesarias (alturas). Una vez obtenidas se representarán en el A3, indicando la parte del patio donde se ha realizado el trabajo así como el croquis de cada uno de los elementos elegidos con sus correspondientes medidas.
20	<u>Exposición y corrección de trabajos:</u> Para finalizar la actividad, irán saliendo por pares, los grupos que hayan tomado medidas de la misma zona y enseñarán su mural. Se dialogará los pros y contras respecto a la disposición del aparato de medición y se comentará el resultado obtenido, comparándolo con el resultado del grupo opuesto. Como conclusión el profesor dará las justificaciones necesarias para el entendimiento del por qué algunas opciones son mejores que otras. Además, el profesor intervendrá en los momentos que vea oportunos dirigiendo a la búsqueda de respuestas correctas. Si éstas no son claras, éste expondrá apoyado de teoría vista en clase argumentos suficientes para su comprensión.

4. ACTIVIDADES TIC

Mediante la herramienta GeoGebra se pondrá en práctica los conceptos visto en clase.

- 4.1. Se trabajará el cambio de unidades de medidas angulares: radianes y grados así como el cálculo de longitud de arco.

<https://www.geogebra.org/m/APvXXgfp#material/ajnHnFPN>



- 4.2. Ejercicios para calcular la tangente sabiendo el seno o coseno

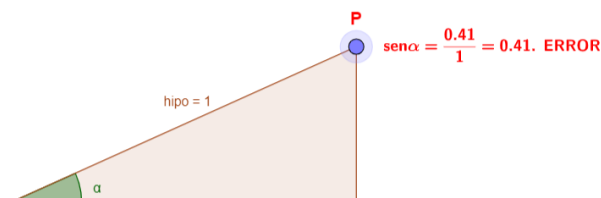
<https://www.geogebra.org/m/APvXXgfp#material/Zgh3ceMw>

Sabemos que $\text{sen} \alpha = 0.545$. Halla $\text{tan} \alpha$

?

Ajusta el punto P a los datos.

Ejercicio 1 de 5.
Nota = 0.



- 4.3. Cálculo de distancias por observación simple

<https://www.geogebra.org/m/bqKB0oFk#material/HwXbNFDf>

Corregir Otro Ejercicio

Solución: y... metros.

Tu respuesta: 0 y 0 metros.

El lobo feroz ve a Caperucita, con un ángulo 36.31° respecto la casita.
La Abuelita está a 50m del lobo, en dirección perpendicular a la casita
¿A qué distancia está el lobo de Caperucita? ¿Y Caperucita de la Abuelita?

Modo Aprendizaje

4.4. Cálculo de distancias por observación simple doble observación

ÁNGULO DE DEPRESIÓN <https://www.geogebra.org/m/bqKB0oFk#material/UBD8EFEE>

☒ Considerar Alturas

Otro Ejercicio

« Pista

Un helicóptero de la policía vuela a 43m. Desde allí, con un ángulo de depresión de 32.78° ve a un ladrón, y a un policía con un ángulo de 72.3° . Si ambos están al mismo lado del helicóptero, calcula la distancia entre el policía y el ladrón, y la distancia de cada uno al lugar que sobrevuela el helicóptero. El ladrón mide 1.61, y el policía, 1.54.



ÁNGULO DE ELEVACIÓN <https://www.geogebra.org/m/bqKB0oFk#material/dsNEW28x>

☒ Datos aleatorios

☐ Ver Solución

☒ Considerar Alturas

Otro Ejercicio

« Pista

José y Eml están en Chichén Itzá (México) observando la Pirámide de Kukulkán. José mide 1.62, y Eml 1.7. La distancia entre ellos es de 13.54 metros y ambos están al mismo lado de la pirámide. Si José observa la catedral bajo un ángulo de 30.52° , y Eml bajo un ángulo de 42.46° . ¿Cuál es su altura? ¿A qué distancia está cada uno de ellos de la pirámide?



5. ACTIVIDAD DE GRUPO 2-3 PERSONAS

SUDOMATES DE TRIGONOMETRÍA:

<https://anargarciaazcarate.files.wordpress.com/2014/10/sudomatestrigonometriaalumnado.pdf>

1º FASE DEL JUEGO: Rellenar las casillas que se indican en la tabla resolviendo las distintas cuestiones

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B									
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

A3 : $\frac{\pi}{30}$ radianes en grados	D3 : $\frac{\pi}{90}$ radianes en grados	G3 : $2 \cos(4\pi) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
B1 : $5 + \sin(\pi)$	D4 : $7 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	G4 : $2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
B6 : $\frac{2\pi}{45}$ radianes en grados	D7 : $4 + 2 \cos(0)$	G5 : $7 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$
B8 : $\frac{1080}{\pi}$ grados en radianes	E1 : $\frac{1620}{\pi}$ grados en radianes	G8 : $\frac{900}{\pi}$ grados en radianes
B9 : $\frac{\pi}{45}$ radianes en grados	E4 : $4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$	H1 : El inverso de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
C4 : $12 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	E6 : $7 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	H2 : $14 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
C5 : $5 \cos(8\pi)$	E8 : $\frac{1440}{\pi}$ grados en radianes	H5 : $12 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
C6 : $\frac{\pi}{180}$ radianes en grados	E9 : $\frac{\pi}{36}$ radianes en grados	H6 : $\frac{\pi}{60}$ radianes en grados
C7 : El inverso del cuadrado de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	F3 : $\frac{1260}{\pi}$ grados en radianes	H9 : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$
C9 : $2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	F6 : $\frac{7\pi}{180}$ radianes en grados	I3 : $\frac{\pi}{20}$ radianes en grados
D2 : $\frac{720}{\pi}$ grados en radianes	F9 : $\frac{360}{\pi}$ grados en radianes	I4 : $8 \left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$

2º FASE DEL JUEGO: Las casillas restantes se completarán como un Sudoku normal, completando los huecos restantes con números del 1 al 9 de acuerdo con las siguientes instrucciones:

- El número (del 1 al 9) sólo puede aparecer una vez en cada fila

Correcto	<table><tr><td></td><td><u>2</u></td><td>8</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr></table>		<u>2</u>	8		1				9	✓
	<u>2</u>	8		1				9			
Incorrecto	<table><tr><td></td><td><u>1</u></td><td>8</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr></table>		<u>1</u>	8		1				9	✗
	<u>1</u>	8		1				9			

- El número (del 1 al 9) sólo puede aparecer una vez en cada columna:

Correcto	Incorrecto																		
<table><tr><td>9</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>5</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td></td></tr></table>	9		5		3			6		<table><tr><td>9</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>5</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>5</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td></td></tr></table>	9		5		5			6	
9																			
5																			
3																			
6																			
9																			
5																			
5																			
6																			
																			

- El número (del 1 al 9) sólo puede aparecer una vez en cada región:

Correcto

		9
3	2	
<u>6</u>		5

✓

Incorrecto

		9
3	2	
<u>9</u>		5

✗

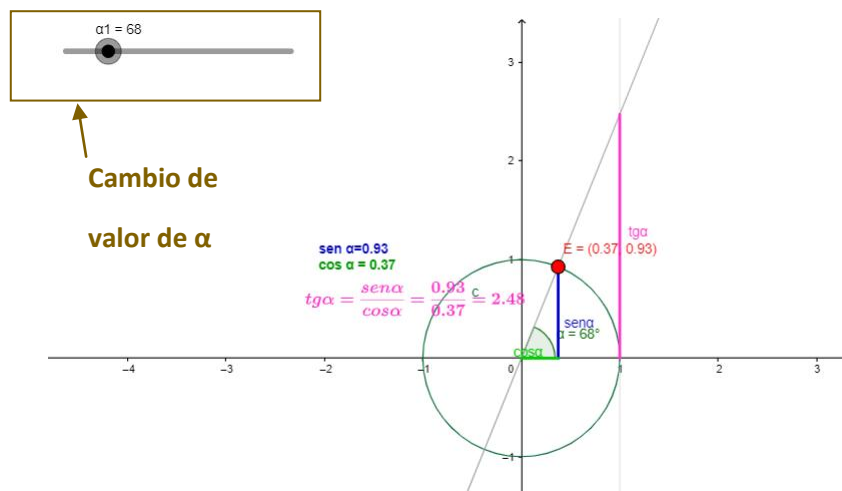
6. RECURSOS UTILIZADOS

- **Recurso 6.1: Presentación Prezi: La trigonometría. Aplicaciones**

<https://prezi.com/acm2pu0yoiik/la-trigonometria-en-la-vida-diaria/>

- **Recurso 6.2: Circunferencia gonométrica**

<https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVC>

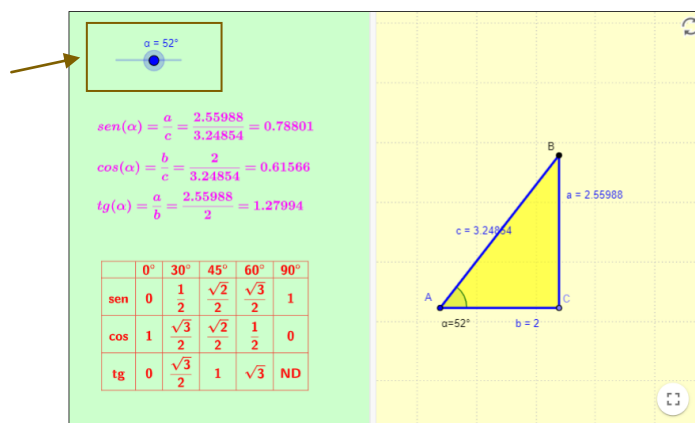


➤ **Recurso 6.3: Razones Trigonométrica Ángulos Agudos.ggb**

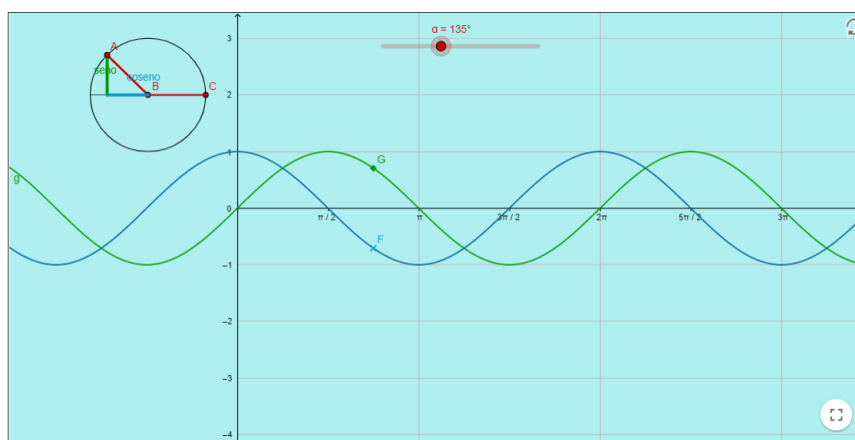
<https://www.geogebra.org/m/hviz6wsv#material/FVMgHfDN>

Con este archivo los alumnos podrán visualizar el comportamiento de un triángulo, ya que se puede cambiar el valor del ángulo α . De esta manera se verá de una manera más clara como cambia el ángulo y por consiguiente el valor de las razones trigonométricas así como la longitud de sus lados.

**Cambio de
valor de α**



➤ **Recurso 6.4: Comportamiento de las gráficas de las funciones seno y coseno según varía el ángulo** <https://www.geogebra.org/m/VynZaCx8>



7. EVALUACIÓN

7.1. EVALUACIÓN INDIVIDUALIZADA POR ALUMNO:

ALUMNO/A: UNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA.														
Criterios Evaluación	Competencias	Estándares de aprendizaje evaluables	Valoración del Criterio				Evaluación de las competencias							
			1 60%	2 10%	3 15%	4 15%	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEP	CEC	
CE.1.1.	CCL CMCT	EA.1.1.1.												
CE.1.2.	CMCT CAA	EA.1.2.1.												
		EA.1.2.2.												
		EA.1.2.3.												
CE.1.4.	CMCT CAA	EA.1.4.1.												
		EA.1.4.2.												
CE.1.6.	CMCT CAA CSC SIEP	EA.1.6.1.												
		EA.1.6.2.												
CE.1.7.	CMCT CAA	EA.1.7.1.												
CE.1.8.	CMCT	EA.1.8.1.												
		EA.1.8.2.												
		EA.1.8.3.												
		EA.1.8.4.												
CE.1.9.	CMCT CAA SIEP	EA.1.9.1.												
CE.1.10.	CMCT CAA SIEP	EA.1.10.1.												
CE.1.11.	CMCT CD CAA	EA. 1.11.1												
		EA.1.11.2.												
		EA.1.11.3.												
CE.1.12.	CCL CMCT CD CAA	EA.1.12.1.												
		EA.1.12.2.												
		EA.1.12.3.												
CE.3.1.	CMCT CAA	EA.3.1.1.												
		EA.3.1.2.												
		EA.3.1.3.												
		EA.3.1.4.												
		EA.3.1.5.												
CE.3.2.	CMCT CAA	EA.3.2.1.												
		EA.3.2.2.												
CALIFICACIÓN MEDIA														
CALIFICACIÓN DE LA UNIDAD														

7.2. RÚBRICA PARA PRUEBA ESCRITA

RÚBRICA 1: Evaluación de Pruebas Escritas	Alumno:
Prueba:	

	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	VALORACIÓN
PRESENTACIÓN	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	
CORRECCIÓN ORTOGRÁFICA	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su edad.	
VOCABULARIO EMPLEADO	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque con palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	
CONTENIDO	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito con algún error.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito) con diversos errores.	

https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable/rubrica_para_la_evaluacion_de_pruebas_escritas-2/

7.3. RÚBRICA PARA INTERVENCIONES DE CLASE

RÚBRICA 2: Intervenciones en Clase	
Prueba:	Alumno:

	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	VALORACIÓN
PRONUNCIACIÓN Y ENTONACIÓN	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	
VOLUMEN Y CONTACTO VISUAL	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes y algunas oyentes del grupo.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	
RECURSOS Y APOYOS	Utiliza diversos apoyos visuales y referencias al trabajo realizado a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	Utiliza algunos apoyos visuales a lo largo de su exposición y referencias al trabajo realizado que refuerzan el contenido.	Utiliza pocos apoyos visuales a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	No utiliza apoyos visuales en su exposición o apenas lo hace.	
CONTENIDO	Demuestra un completo dominio del tema tratado, destacando claramente los aspectos importantes, exponiéndolo de manera clara y correcta, y utilizando un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo, no siendo certero en las respuestas a las preguntas del grupo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	

CUESTIONES FORMALES Y SECUENCIA	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo adecuado.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo aproximado.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo establecido.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse al tiempo y manifestar interés y control emocional.	
---------------------------------	---	--	---	--	--

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/R%C3%BAbricas+de+evaluaci%C3%B3n/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

7.4. RÚBRICA PARA VALORACION DE TRABAJO AUTÓNOMO

RÚBRICA: 3. Valoración WebQuest	Alumno:
Unidad: TRIGONOMETRÍA	

	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	VALORACIÓN
BÚSQUEDA DE LA INFORMACIÓN	Utiliza correctamente los recursos y/o medios a su alcance para buscar toda la información.	Utiliza algún recurso y/o medio a su alcance para buscar toda la información.	Utiliza algún recurso y/o medio a su alcance para buscar parte de la información.	Utiliza algún recurso y/o medio para buscar la información con la ayuda del docente o de otro alumno/a.	
OBTENCIÓN DE LA INFORMACIÓN	Obtiene todos los datos necesarios para dar respuesta a la actividad, ajustándose a los tiempos establecidos.	Obtiene bastantes datos para dar respuesta a la actividad, ajustándose a los tiempos establecidos.	Obtiene algunos datos para dar respuesta a la actividad, con dificultades para ajustarse a los tiempos establecidos.	Obtiene algunos datos con la ayuda del docente o de otro alumno/a sin ajustarse a los tiempos establecidos.	

TRATAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	Analiza la información obtenida de las fuentes consultadas, extrayéndola de manera rigurosa y ordenándola sistemáticamente.	Analiza la información obtenida de las fuentes consultadas, extrayéndola y ordenándola correctamente.	Analiza parte de la información obtenida de las fuentes consultadas, ordenándola de manera adecuada.	Realiza con apoyo alguno de las tareas correspondientes al tratamiento y análisis de la información.	
INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS	Realiza valoraciones y/o emite juicios sobre la información obtenida de un modo riguroso.	Realiza valoraciones y/o emite juicios sobre la información obtenida.	Realiza alguna interpretación sobre la información obtenida.	Realiza alguna interpretación con la ayuda del docente o de otro alumno/a.	
EXPOSICIÓN DE CONCLUSIONES	Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado de manera clara, rigurosa y coherente respecto a los datos obtenidos.	Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado.	Expone/presenta algunos hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado.	Expone con mucha dificultad alguna de las informaciones obtenidas.	

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/R%C3%BAbricas+de+evaluaci%C3%B3n/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

RÚBRICA: 3 Valoración resolución de ejercicios cuaderno	Alumno:
Unidad: TRIGONOMETRÍA.	

	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	VALORACIÓN
LECTURA Y COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA	Lee el enunciado adecuadamente identificando e interpretando los datos necesarios que se dan en él, ya sea de forma narrativa, por medio de gráficos, tablas, diagramas, etc., además, localiza los elementos a resolver, así como los posibles elementos intermedios necesarios para llegar a estos.	Lee el enunciado adecuadamente identificando e interpretando los datos necesarios que se dan en él, ya sea de forma narrativa, por medio de gráficos, tablas, diagramas, etc., además, localiza los elementos a resolver, pero le cuesta ver los posibles elementos intermedios necesarios para llegar a estos.	Lee el enunciado e identifica los datos que se dan en él, aunque le cuesta los que no son dados de forma narrativa. Presenta dificultades para entender cuáles son los elementos a resolver.	Tiene muchas dificultades para extraer los datos, incluso con ayuda. La verbalización sobre la situación problemática planteada es inexistente o incorrecta.	
SELECCIÓN Y APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra la total comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, ya que, de todas las estrategias trabajadas en clase, elige de forma individual la más eficiente y efectiva sin necesidad de ayuda. Además, relaciona en todo momento los datos con las cantidades desconocidas y deja rastro de lo que va a hacer.	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, ya que elige de forma individual la más efectiva, pero no relaciona los datos con las cantidades desconocidas o no deja rastro de lo que va a hacer.	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra comprensión parcial de los conceptos matemáticos involucrados, ya que la estrategia elegida no es la más adecuada en esta ocasión.	No es capaz de generar posibles estrategias para la resolución del problema o el desarrollo de la estrategia elegida es incorrecto y no repara en ello.	

SOLUCIÓN	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y/o a su interpretación.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos y ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y/o a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos y ayudándose, si es necesario de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta.	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula que utiliza no es correcta.	
ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN	Comprueba si la solución es coherente, sustituyendo el valor obtenido en el razonamiento inicial y viendo que es válida, tanto matemáticamente como en la realidad a la que el enunciado se refiere, dando una frase que responde a la pregunta planteada.	Da la solución, comprobando previamente si es coherente, sustituyendo el valor obtenido en el razonamiento inicial y viendo que es válida matemáticamente, pero no comprueba si tiene sentido en la realidad a la que el enunciado se refiere.	Da la solución del problema, pero no comprueba si es coherente en ningún caso.	No explicita la solución ni la contrasta.	

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/R%C3%BAbricas+de+evaluaci%C3%B3n/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

7.5. RÚBRICA PARA VALORACION DE TRABAJO EN GRUPO

RÚBRICA: 4 Valoración de trabajo en grupo	Alumno:
Unidad: TRIGONOMETRÍA.	

	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	VALORACIÓN
PLANIFICACIÓN DEL TRABAJO	Realiza un uso adecuado de los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con cierta dificultad para ajustarse al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con dificultad y sin ajustarse al plazo previsto.	
RESPONSABILIDAD	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, valorando especialmente el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades, con alguna dificultad para valorar el esfuerzo individual y colectivo.	Elude sus responsabilidades y tiene dificultades para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	
PARTICIPACIÓN	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	
HABILIDADES SOCIALES	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen a la cohesión.	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona con dificultades, necesitando ayuda para mantener actitudes respetuosas.	

GENERACIÓN Y PRESENTACIÓN DEL PRODUCTO	Contribuye de manera activa a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con alguna dificultad para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye algo a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con dificultades para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	
--	---	--	---	---	--

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/R%C3%BAbricas+de+evaluaci%C3%B3n/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>