



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO EN 3º E.S.O. USO DE HERRAMIENTAS COMO MÉTODO DE APRENDIZAJE

Alumno/a: Díaz Merino, Antonio

Tutor/a: Doña Rosa María Fernández Alcalá

Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Índice

1. Resumen.....	6
2. Abstract	7
3. Introducción	8
4. Objetivos	10
5. Fundamentación curricular	11
5.1. Análisis del currículo normativo.....	11
5.2. Análisis de libros de texto	19
6. Fundamentación epistemológica	32
6.1. Introducción	32
6.2. Evolución histórica	33
6.3. Conceptos fundamentales	35
6.4. Teorema de Euler	39
6.4.1. Aplicación del Teorema de Euler en sólidos platónicos	41
6.5. Familias de poliedros.....	43
6.6. Sólidos platónicos.....	45
6.7. Dualidad entre los sólidos platónicos	47
6.8. Sólidos arquimedianos	49
7. Fundamentación didáctica	52
7.1. Informe PISA.....	52
7.2. Artículos y reseñas	54
7.3. Metodologías y previsión de obstáculos.....	55
8. Proyección didáctica: Elaboración de una Unidad Didáctica	57
8.1. Título	57
8.2. Justificación	57
8.2.1. Justificación curricular.....	57
8.2.2. Justificación social y/o profesional.....	57
8.2.3. Justificación interna	57
8.2.4. Justificación cultural.....	58
8.3. Contextualización del centro y del aula	60
8.4. Objetivos	62
8.4.1. Objetivos generales de etapa.....	62
8.4.2. Objetivos del área de matemáticas.....	63
8.4.3. Relación entre los objetivos generales de etapa y los objetivos generales del área de matemáticas.....	64
8.4.4. Objetivos concretos de la unidad.....	65

8.5.	Competencias clave.....	66
8.6.	Contenidos	66
8.7.	Metodología	67
8.8.	Actividades y recursos.....	68
8.8.1.	Actividades y problemas de desarrollo	68
8.8.2.	Actividades para fomentar el uso de las TIC	68
8.8.3.	Actividades IBL	69
8.8.4.	Recursos	70
8.9.	Atención a la diversidad	71
8.10.	Temporalización	71
8.11.	Criterios de evaluación	80
9.	Conclusiones.....	84
10.	Referencias bibliográficas	85
11.	Anexos.....	87
11.1.	Anexo I. Desarrollo de sólidos platónicos.	87
11.2.	Anexo II. Ejercicios propuestos para las sesiones	88
11.3.	Anexo III. Prueba escrita propuesta.	91
11.4.	Anexo IV. Ficha inicial. Poliedros.....	93
11.5.	Anexo V. Ficha Ejemplo.	94
11.6.	Anexo VI. Juego Cuerpos geométricos – 30 piezas. Dalmau Carles Pla S.A.	94
11.7.	Anexo VII. Ejercicios de desarrollos geométricos.....	95
11.7.1.	Anexo VII. B) Atención a la diversidad.....	97

Ilustraciones

Ilustración 1.	Portada Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. SM	19
Ilustración 2.	Portada Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. ANAYA	19
Ilustración 3.	Portada Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. OXFORD	19
Ilustración 4.	Poliedros. Elementos y convexidad. Editorial SM.	21
Ilustración 5.	Prismas. Editorial SM.....	22
Ilustración 6.	Cálculo de áreas y volúmenes. Prismas. Editorial SM.	22
Ilustración 7.	Pirámides. Editorial SM.	23
Ilustración 8.	Cálculo de áreas y volúmenes. Pirámides. Editorial SM.....	23
Ilustración 9.	Poliedro ejemplo. Elaboración propia.....	37
Ilustración 10.	Poliedro ejemplo. Elaboración propia.....	37
Ilustración 11.	Dualidad entre tetraedro-tetraedro. Elaboración propia.	48
Ilustración 12.	Dualidad hexaedro-octaedro. Fuente Wikipedia.	48

Ilustración 13. Dualidad dodecaedro-icosaedro. Fuente (jmora7, 2022). Creado en GeoGebra.	48
Ilustración 14. Guernica. Pablo Picasso. Fuente: Google.	58
Ilustración 15. Peine del viento. Eduardo Chillida. Fuente: Wikipedia.	59
Ilustración 16. Pirámide de Keops. Fuente Wikipedia.	59
Ilustración 17. Puerta de Europa. Fuente: Google.	60
Ilustración 18. Localización I.E.S. Az-Zait. Fuente: Google Maps	60
Ilustración 19. Localización mapa I.E.S. Az-Zait: Fuente Google Maps.	60
Ilustración 20. Fachada I.E.S. Az-Zait. Elaboración propia.	61
Ilustración 21. Estudio de esferas en GeoGebra. Fuente: (Mentrard, s.f.)	69
Ilustración 22. Desarrollo de sólidos platónicos	87
Ilustración 23. Ejercicio prisma oblicuo. Elaboración propia.	88
Ilustración 24. Ejercicio prisma recto. Elaboración propia.	88
Ilustración 25. Trabajo autónomo de la sesión 5.	89
Ilustración 26. Ejercicio pirámide oblicua. Elaboración propia.	89
Ilustración 27. Ejercicio pirámide recta. Vista de la planta. Elaboración propia.	89
Ilustración 28. Ejercicio pirámide recta. Vista completa. Elaboración propia.	89
Ilustración 29. Ejercicio tronco de pirámide cuadrangular. Elaboración propia.	90
Ilustración 30. Ejercicio cilindros. Elaboración propia.	90
Ilustración 31. Cuerpos geométricos - 30 piezas DALMAU CARLES PLA S.A. Fuente: Elaboración propia.	94
Ilustración 32. Interior: Cuerpos geométricos - 30 piezas DALMAU CARLES PLA S.A. Fuente: https://www.todocoleccion.net	94
Ilustración 33. Cubo Rubik. Fuente Google.	95

Tablas

Tabla 1. Bloques de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	12
Tabla 2. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas, 1º y 2º E.S.O. Contenidos. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	13
Tabla 3. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Contenidos. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	13
Tabla 4. Comparación de contenidos en la geometría espacial en 1º, 2º y 3º de ESO. Elaboración propia.	14
Tabla 5. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Criterios de evaluación. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	15
Tabla 6. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Estándares de aprendizaje evaluables. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	16
Tabla 7. Bloque Geometría: Criterios de evaluación - Competencias claves. Elaboración propia.	18
Tabla 8. Índices de los libros de texto utilizados.	20
Tabla 9. Definiciones de los conceptos. Fuente SM, ANAYA Y OXFORD.	30
Tabla 10. Relación sólidos platónicos y los cuatro elementos. Fuente: (Alsina, Las mil caras de la belleza geométrica)	34
Tabla 11. Teorema de Euler para Sólidos Platónicos. (1). Elaboración propia.	41
Tabla 12. Teorema de Euler para Sólidos Platónicos. (2). Elaboración propia.	42
Tabla 13. Familias de poliedros. Elaboración propia.	44
Tabla 14. Otros poliedros. Fuente: Junta de Andalucía.	45

Tabla 15. Tetraedro. Elaboración propia.....	46
Tabla 16. Hexaedro. Elaboración propia.	46
Tabla 17. Octaedro. Elaboración propia.....	46
Tabla 18. Dodecaedro. Elaboración propia.	47
Tabla 19. Icosaedro. Elaboración propia.	47
Tabla 20. Sólidos platónicos. Elaboración propia.....	47
Tabla 21. Sólidos arquimedianos. Fuente Wikipedia.	51
Tabla 22. Fuente: OCDE (2013), Marco y pruebas de evaluación de PISA 2012, http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en (Mathematics Framework).....	54
Tabla 23. Objetivos del área de matemáticas frente a los Objetivos de etapa. Elaboración propia.	65
Tabla 24. Competencias clave. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	66
Tabla 25. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Contenidos. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	66
Tabla 26. Contenidos presentes en la Unidad Didáctica.....	67
Tabla 27. Recursos.....	71
Tabla 28. Sesión 1. Elaboración propia.	72
Tabla 29. Sesión 2. Elaboración propia.	73
Tabla 30. Sesión 3. Elaboración propia.	74
Tabla 31. Sesión 4. Elaboración propia.	74
Tabla 32. Sesión 5. Elaboración propia.	75
Tabla 33. Sesión 6. Elaboración propia.	76
Tabla 34. Sesión 7. Elaboración propia.	76
Tabla 35. Sesión 8. Elaboración propia.	77
Tabla 36. Sesión 9. Elaboración propia.	77
Tabla 37. Sesión 10. Elaboración propia.	78
Tabla 38. Sesión 11. Elaboración propia.	78
Tabla 39. Sesión 12. Elaboración propia.	79
Tabla 40. Bloque 3. Geometría. Criterios de evaluación. Fuente: Real Decreto 1105/2014.	80
Tabla 41. Bloque 3. Geometría. Estándares de Aprendizaje Evaluables. Fuente: Real Decreto 1105/2014.	81
Tabla 42. Evaluación del bloque de geometría.	83
Tabla 43. Anexo V. Ficha inicial. Poliedros.	93
Tabla 44. Ficha Ejemplo.....	94
Tabla 45. Anexo VII. Ejercicio 1a de desarrollos geométricos.....	95
Tabla 46. Anexo VII. Ejercicio 2 de desarrollos geométricos.	96
Tabla 47. Anexo VII. Ejercicio 1b de desarrollos geométricos.	97

1. Resumen

En el presente Trabajo Fin de Máster, se ha diseñado una Unidad Didáctica de Geometría en el espacio para estudiantes de 3º de E.S.O. de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

En los cursos previos, se introduce al alumnado en la geometría espacial, estudiando elementos característicos de poliedros y cuerpos de revolución. Esta introducción consiste en una preparación para los cursos posteriores.

Para el curso de 3º de E.S.O., la Unidad Didáctica tratará la geometría espacial analizando los cuerpos de revolución, poliedros (en especial los poliedros regulares) y la aplicación de la fórmula de Euler. En las diferentes sesiones se buscará continuar desarrollando los conocimientos de los poliedros analizando las características de prismas, pirámides y cuerpos redondos y de sus posibles desarrollos.

En las sesiones, se les mostrará a los discentes poliedros físicos que puedan ver y manejar como ayuda para su visión espacial. También, con ayuda de diferentes aplicaciones informáticas y páginas web, podrán visualizar los poliedros.

Cabe destacar que, en el trabajo, se podrá observar la fundamentación curricular analizando y comparando libros de texto utilizados en diferentes institutos de educación secundaria, la fundamentación epistemológica desarrollando el tema "*Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos.*" del temario de oposiciones para el acceso al cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en la especialidad de Matemáticas, y fundamentación didáctica que utilizará como base tanto el Informe PISA como diferentes artículos relacionados con el objetivo del propio trabajo.

El otro bloque del Trabajo Fin de Máster, consistirá en trabajar la Unidad Didáctica sobre poliedros, con diferentes puntos desarrollados como la metodología establecida, la temporalización o la propia justificación de la unidad.

Para ello, se ha elaborado el Trabajo Fin de Máster teniendo en cuenta la legislación tanto autonómica (Ley de Educación de Andalucía) como nacional (Real Decreto 1105/2014) vigente.

Palabras claves: Poliedros, Matemáticas, Unidad Didáctica, Educación Secundaria Obligatoria, Geometría.

2. Abstract

This MA dissertation presents a Didactic Unit based on Spatial Geometry. This proposal has been designed for students in 3rd year of the Compulsory Secondary Education, in the subject of Mathematics focused on academic teaching.

Previously, students are introduced in the Spatial Geometry, characteristic elements of polyhedrons and solid of revolution will be studied for them. This introduction will consist of a preparation for future courses.

During 3rd year of the Compulsory Secondary, the Didactic Unit will work to spatial geometry by analysing solid of revolution, polyhedrons (focusing on the main regular polyhedrons) and the application the Euler formula. Across the different sessions, polyhedrons will be studied in detail, analyzing the characteristics of prisms, pyramids and solid of revolution, and their possible nets.

In the sessions, physical polyhedron will be shown to the learners to improve their spatial vision through the observation and manipulation. Also, by means of different computer applications and web pages, they will be able to visualize the polyhedron.

This dissertation includes the curricular basis, obtained from the analysis and comparison of the textbooks used in several secondary schools, the epistemological fundamentals, where the topic “Polyhedron. The Euler Formula. Platonic and Archimedean solids.”, related to the public examination syllabus to access to the Compulsory Secondary Education teaching staff, in the Mathematical specialty, finally, didactic approach based on the PISA report and different articles about the main objective of the dissertation itself.

The final block of contents of this MA Dissertation will consist of working with this Didactic Unit about Polyhedron, some points such as Methodology, Timing, or Justification of the Didactic Unit.

This MA dissertation has been prepared by considering both the regional legislation (Andalusian Education Law) and national legislation (Royal Decree 1105/2014) in force.

Key words: Polyhedron, Mathematics, Didactic Unit, Compulsory Secondary Education, Geometry

3. Introducción

La realización del presente Trabajo Fin de Máster (TFM) tiene como primer objetivo la realización de una Unidad Didáctica donde los/las alumnos/as puedan desarrollar diferentes competencias del Informe Pisa en las sesiones correspondientes al tema *geometría en el espacio*, donde se presentarán las diferentes actividades en un nivel creciente para un óptimo desarrollo en los conocimientos y que el alumnado pueda adquirir una mayor capacidad para interpretar, crear y solucionar problemas.

Los discentes en 3º de la E.S.O. abordan la geometría espacial, donde aplican conceptos de la geometría en el plano estudiados en cursos anteriores. Al tratarlo, el alumnado intentará relacionar el contenido con lo aprendido en temas similares.

Para evitar posibles obstáculos y que los estudiantes obtengan un aprendizaje óptimo, se estudiarán diferentes metodologías, así como artículos pedagógicos publicados en revistas científicas. Estas metodologías estarán basadas en el uso de diferentes herramientas como la papiroflexia, la manipulación física y la utilización de aplicaciones informáticas para la investigación como método de aprendizaje.

La parte práctica se ha realizado en el I.E.S. Az-Zait, durante el curso académico 2021-2022, al curso de 3º de la E.S.O de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Para la elaboración del TFM, se han estudiado diferentes fundamentaciones que servirán como base para la creación de la Unidad Didáctica, siendo estas fundamentaciones las siguientes:

- Fundamentación didáctica: Para su realización se han buscado, en primer lugar, artículos relacionados que permitan conocer los diferentes estudios previos y así analizar diferentes metodologías ya empleadas y su eficacia. Además, en este Trabajo Fin de Máster, también se ha utilizado el Informe PISA para sustentarlo.
- Fundamentación epistemológica: Para este estudio se han utilizado como base el tema: *Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos*, presente en el temario de las oposiciones de matemáticas. La capacidad para entender y desarrollar contenido en el ámbito matemático clave para poder explicar y apoyar al alumnado con seguridad.
- Fundamentación curricular: El currículo existente en cada libro presenta similitudes y diferencias con respecto a los demás, ya que la presentación de los conocimientos se puede realizar de diferentes maneras y por ello, se utilizarán diferentes libros de texto para exponer estas similitudes y diferencias.

Tras el estudio de las fundamentaciones vistas previamente, se buscará realizar una Unidad Didáctica al tema de *Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos* para los estudiantes de 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Esta Unidad Didáctica busca ayudar y apoyar al alumnado con sus capacidades para reconocer poliedros y conocer y comprender todos sus parámetros característicos, así como desarrollar su capacidad para calcular volúmenes o áreas mediante las dimensiones de los polígonos que los forman y viceversa.

4. Objetivos

Este Trabajo Fin de Máster se focaliza en el bloque de geometría, en concreto en la geometría espacial, proponiendo para el alumnado una introducción y su correspondiente desarrollo en base a las directrices marcadas en el Real Decreto 1105/2014.

Los discentes tendrán una ligera base adquirida durante el primer ciclo de E.S.O., por lo que, durante el curso 3º E.S.O. trabajarán para reforzar dichos conocimientos y se ampliarán añadiendo la posibilidad de calcular longitudes, superficies y volúmenes.

Los/Las alumnos/as, siendo guiados por el docente, podrán analizar diferentes cuerpos geométricos en el espacio, denominados poliedros. Este análisis consistirá en primer lugar, en conocer las propiedades de dicho cuerpo y posteriormente, se encontrarán en disposición de calcular áreas o volúmenes.

El alumnado también verá la posibilidad de que los objetos presentes en la vida cotidiana pueden descomponerse en poliedros simples.

Por estos motivos, en el presente Trabajo Fin de Máster se ha buscado, como objetivo principal, aplicar todos los conocimientos adquiridos en el Doble Máster en matemáticas y profesorado en la Unidad Didáctica. También, se han considerado como objetivos específicos los que se mostrarán a continuación:

- a) Completar mi formación docente, investigando en ámbitos como pedagogía, geometría y las diferentes herramientas y aplicaciones existentes para posibilitar el aprendizaje a los alumnos y alumnas.
- b) Comprender las necesidades estudiantiles para adaptarme a mí mismo y las sesiones y así facilitarles una óptima instrucción.
- c) Conocer y aprender a utilizar diferentes herramientas TIC para proporcionar una rápida visualización de los posibles problemas y, además, que los/las estudiantes puedan trabajar, manipular y plantearse cuestiones.
- d) Realizar una planificación completa de las sesiones teniendo en cuenta aspectos como la diversidad, conocimientos previos, contexto de la clase y del centro, por ejemplo.
- e) Buscar ideas innovadoras para motivar al alumnado y que, gracias a ello, el estudio de la geometría resulte ameno y el trabajo autónomo produzca un rendimiento aún mejor.
- f) Ayudar al alumnado a conocer las principales características de los cuerpos geométricos, tales como prismas, pirámides, conos, cilindros y esferas, así como algunas de sus variantes.
- g) Motivar a los estudiantes con problemas de la vida cotidiana para que vean la utilidad de las matemáticas y principalmente en el ámbito de la geometría.
- h) Comprender y conocer la normativa del sistema educativo estatal y autonómico en cada momento para seguir la legislación.

5. Fundamentación curricular

La fundamentación curricular tiene como objetivo, analizar el currículo escolar presente en los libros de texto y la respectiva comparación entre ellos, señalando las diferencias entre ellos y los puntos en común que presentan.

Para este Trabajo Fin de Máster, se procederá a realizar la comparación entre los principales libros de texto del curso 3º de E.S.O. de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, donde el foco se encuentra en los temas de geometría.

El análisis se va a realizar tomando como principal referencia el libro de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial *SM*, debido a que el orden mostrado se considera pedagógicamente más recomendable para los objetivos de la Unidad.

5.1. Análisis del currículo normativo

Actualmente, sigue vigente la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), aprobada en 2013. Esta Ley indicó como principales objetivos reducir la tasa de abandono temprano de la educación, mejorar los resultados educativos de acuerdo con criterios internacionales, mejorar la empleabilidad y estimular el espíritu emprendedor de los estudiantes (Ley Orgánica 8/2013, 2013).

La Ley Orgánica 8/2013 introdujo cambios en el sistema educativo, los cuales actualmente están presentes en la educación y para este estudio, en concreto, los principales son:

- Pruebas de evaluación final para obtener el título de Graduado en ESO y el título de Bachiller.
- Dos opciones en tercer curso de ESO, dividiendo los grupos de matemáticas en orientadas a las enseñanzas académicas y matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Posteriormente, los alumnos en 4º de la E.S.O. tendrán la opción de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato o la opción de las enseñanzas aplicadas para la iniciación a la formación profesional.
- Programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento en la ESO.
- Mayor importancia de las asignaturas troncales.

Para la realización del análisis del currículo actual respecto al contenido de la asignatura de matemáticas mencionada previamente, se ha procedido a utilizar el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre como base, ya que instituye el currículo de la E.S.O. y del Bachillerato. El Anexo I del Real Decreto muestra los contenidos, estándares

de aprendizaje y criterios de evaluación para cada materia presente tanto en la E.S.O. como en Bachillerato.

Según la definición presente en el Real Decreto 1105/2014, el Currículo es *la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas y etapas educativas*. Además, en la Sección I Número 3 de la Página 391, se puede encontrar el bloque centrado en las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. donde a su vez, lo divide en 3 elementos claramente diferenciados como los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

La asignatura presenta 5 grandes bloques:

Bloque 1	Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
Bloque 2	Números y álgebra
Bloque 3	Geometría
Bloque 4	Funciones
Bloque 5	Estadística y probabilidad

Tabla 1. Bloques de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

En la tabla 1, se ha señalado el bloque 3, debido a que es el bloque al que pertenece la Unidad Didáctica desarrollada y, por lo tanto, se examinarán los contenidos de cursos anteriores y, posteriormente, se va a profundizar y dividir en contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

	Bloque 3. Geometría
	Contenidos
Matemáticas. 1º y 2º ESO	Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.

	Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
--	--

Tabla 2. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas, 1º y 2º E.S.O. Contenidos. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

En la tabla 2, se indican los contenidos presentes en la asignatura de matemáticas de 1º y 2º E.S.O. en el bloque de geometría, donde se han marcado los contenidos relativos a la geometría espacial.

En el primer ciclo de la E.S.O. se presentan como contenidos una ligera introducción en volúmenes, poliedros y cuerpos de revolución principalmente, siendo todos estos conceptos la iniciación para los discentes al mundo de la geometría y en especial a la geometría espacial.

El contenido presente en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre en el curso de 3º E.S.O. muestra contenidos iguales o similares como se verá en la tabla 3:

Bloque 3. Geometría
Contenidos
1. Geometría del plano. 2. Lugar geométrico. 3. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. 4. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. 5. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. 6. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. 7. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. 8. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 3. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Contenidos. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Tras obtener los contenidos presentes en el bloque de geometría espacial, se pueden comparar, tal y como se realiza en la tabla 4, y así apreciar las diferencias y similitudes:

Bloque 3. Geometría	
Contenidos (Geometría espacial)	
Matemáticas. 1º y 2º ESO	3º E.S.O.
Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.
Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes.	La esfera. Intersecciones de planos y esferas.
Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.	El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios.
Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	Longitud y latitud de un punto.
	Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 4. Comparación de contenidos en la geometría espacial en 1º, 2º y 3º de ESO. Elaboración propia.

En la comparación, ambos contenidos se encuentran a la sección posterior a la geometría plana y dentro de la geometría espacial tratan los elementos iniciales como introducción al tema.

A partir de ahí, en el primer ciclo de la E.S.O. se busca que los alumnos conozcan y comprendan que son los poliedros y los elementos que los componen, y de igual manera con los cuerpos de revolución. Aquí encontramos las principales diferencias, ya que en 3º de la E.S.O. se hace un mayor hincapié en las figuras geométricas y en los cuerpos redondos, existiendo un punto exclusivo de la esfera en los contenidos.

Ambos contenidos muestran el uso de la tecnología como herramienta clave para el aprendizaje y la manipulación de los cuerpos geométricos y ayudar a la visión espacial de los alumnos y alumnas. Por otro lado, los criterios de evaluación marcarán los conceptos y aprendizaje relativos al curso y bloque que trata. El Real Decreto presenta, entre otras, su definición la cual es la siguiente:

Criterios de evaluación: “*son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura* (Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, 2014)”.

Bloque 3. Geometría
Criterios de evaluación
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

Tabla 5. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Criterios de evaluación. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Los estándares de aprendizaje evaluables también están concretados en el Real Decreto con la siguiente definición:

Estándares de aprendizaje evaluables: *“especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el alumno debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables”*.

Bloque 3. Geometría
Estándares de aprendizaje evaluables
1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo Ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

Tabla 6. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Estándares de aprendizaje evaluables. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Como se puede ver (tablas 2-6), tanto los contenidos, los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables están íntimamente ligados, debido a que marcan el camino y la meta para los estudiantes durante su etapa en la E.S.O.

Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, las competencias claves del currículo, -que también estarán presentes en la Orden ECD/65/2015 de 21 de enero-, serán las siguientes:

Comunicación lingüística (CCL): Es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas y permite al individuo superar las dificultades y resolver los obstáculos.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología (CMCT): Implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas.

Competencia digital (CD): En la era informática en la que nos encontramos el uso creativo, crítico y de manera segura nos muestra un camino para alcanzar los objetivos y el aprendizaje.

Aprender a aprender (CPAA): Se basa en la gestión del aprendizaje, el hecho de aprender requiere entender los procesos y ajustarlos al problema y a las actividades que se nos muestran.

Competencias sociales y cívicas (CSC): Está relacionado con el bienestar tanto del colectivo como del individuo, donde esta competencia trata la salud tanto física como mental. Esto implica conocer, comprender y analizar de manera crítica los códigos de conducta y como son aceptados socialmente.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIE): Esta competencia requiere destrezas como capacidad de análisis, capacidad de planificación y de gestión o toma de decisiones entre otras. Por ello, se puede determinar que está relacionada con la capacidad de cumplir con los objetivos.

Conciencia y expresiones culturales (CEC): Implica comprender con espíritu crítico con una actitud abierta y respetuosa de las diferentes manifestaciones culturales y artísticas y utilizarlas como enriquecimiento personal.

Con estas definiciones, se pueden relacionar dichas competencias claves con los criterios de evaluación definidos previamente:

Bloque 3. Geometría	
Criterios de evaluación	Competencias
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	CMCT.
2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	CMCT, CAA, CSC, CEC.
3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	CMCT, CAA.
4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	CMCT, CAA, CSC, CEC.
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	CMCT.
6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	CMCT.

Tabla 7. Bloque Geometría: Criterios de evaluación - Competencias claves. Elaboración propia.

Hasta este punto se ha presentado la normativa nacional que se debe de seguir exponiendo el contenido, competencias que se busca que los/las alumnos/as desarrollen y los estándares de evaluación que se utilizan para unificar criterios. Sin embargo, en España, cada Comunidad Autónoma presenta unas características parecidas, pero no idénticas y, por lo tanto, cada comunidad presentará una Ley autonómica que marcará las pautas a seguir adaptándose a las exigencias y condiciones.

La normativa andaluza es la L.E.A. (Ley de Educación de Andalucía), ley 17/2007, de 10 de diciembre, Decreto 110/2016, de 14 de junio establece la ordenación del currículo de Bachillerato.

5.2. Análisis de libros de texto

El uso de los libros de texto está implantado en un porcentaje altísimo debido a su utilidad y que cuentan como base con el Real Decreto tratado en el punto previo. Los libros pueden proporcionar una guía al profesor para seguir un orden, los temas desarrollados para que el alumnado pueda estudiar o simplemente, una fuente de ejercicios para que los alumnos puedan trabajar mientras el profesor despliega por sí mismo los temas.

Sin embargo, y aún con esta base similar, los libros muestran diferencias entre ellos. Para mostrar dichas diferencias se han elegido los principales libros utilizados en Jaén para la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O.

Estos libros han sido los siguientes:

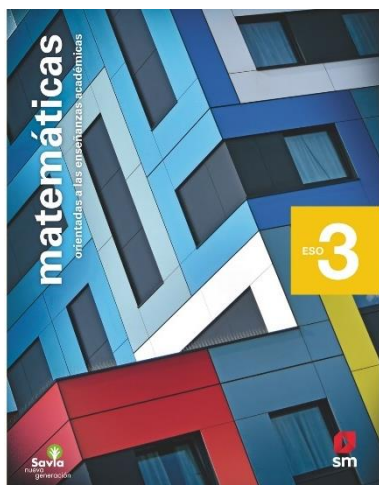


Ilustración 1. Portada Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. SM

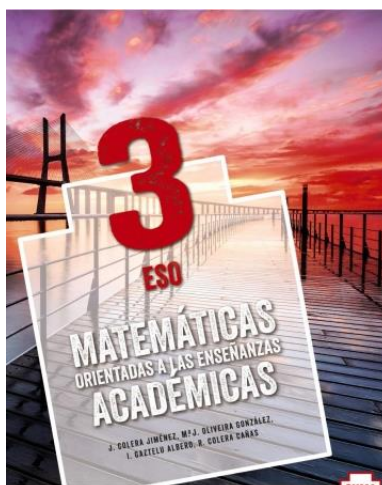


Ilustración 2. Portada Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. ANAYA



Ilustración 3. Portada Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. OXFORD

Para comparar los textos, se ha comenzado analizando los índices que muestran cada uno de ellos, en relación a los temas de Geometría:

SM	ANAYA	OXFORD
Geometría del espacio. Cuerpos geométricos.	Cuerpos geométricos.	Geometría del espacio. Poliedros
1. Elementos de la geometría del espacio. 2. Poliedros. 3. Cuerpos redondos. 4. Simetrías en cuerpos geométricos. 5. Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros y conos. 6. La esfera. 7. Problemas de áreas y volúmenes. 8. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas.	1. Poliedros regulares y semirregulares. 2. Truncando poliedros regulares. 3. Planos de simetría de una figura. 4. Ejes de giro de una figura. 5. Superficie de los cuerpos geométricos. 6. Volumen de los cuerpos geométricos. 7. Coordenadas geográficas.	1. Elementos de la geometría del espacio. 2. Poliedros. 3. Prismas. 4. Área y volumen de prismas. 5. Pirámides. 6. Área y volumen de pirámides. 7. Composición de poliedros.
		Cuerpos de revolución
		1. Cilindros y conos. 2. Área de cilindros y conos. 3. Volumen de cilindros y conos. 4. Esferas. 5. Área y volumen de esferas. 6. Composición de cuerpos de revolución. 7. La esfera terrestre. 8. Coordenadas geográficas.

Tabla 8. Índices de los libros de texto utilizados.

Visualizando únicamente los índices (Tabla 8), se puede intuir a primera vista que presentan diferencias y similitudes. La editorial Oxford divide la geometría espacial en 2 temas, sin embargo, la editorial SM y Anaya lo agrupa en un solo tema.

Se informa, además, que el libro de la editorial SM es el utilizado para la Unidad Didáctica y por lo tanto será el principal texto de referencia. Esta elección se ha realizado debido a su cronología, el cual se ha considerado óptimo para el trabajo de los estudiantes.

Se ha realizado la comparación entre los tres libros de texto vistos previamente (editoriales SM, Anaya y Oxford) para el curso y bloque correspondientes a la geometría de 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Para ello, se han utilizado ilustraciones obtenidas del libro de la editorial SM.

Elementos de la geometría en el espacio.

La editorial SM comienza tratando los elementos de la geometría en el espacio como son los puntos, rectas, planos y las posiciones relativas para proveer a los/las

alumnos/as de una ligera introducción. Dichos elementos también se exponen en el primer tema de la editorial Oxford. En cambio, en la editorial Anaya no aparecen.

El ángulo diedro y las perpendiculares en el plano que se muestran en el libro de SM, no se muestran o apenas le dan importancia el resto de editoriales con las que se ha trabajado.

Poliedros.

A partir de ahí, SM trabaja con los poliedros donde se explican sus elementos, la convexidad de un poliedro, la fórmula de Euler y de manera superficial los sólidos platónicos (ilustración 4).

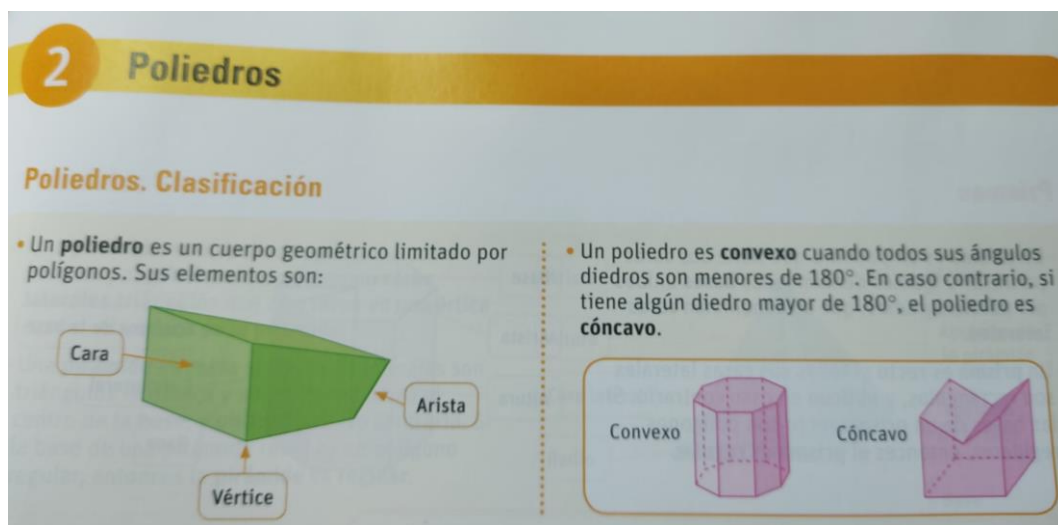


Ilustración 4. Poliedros. Elementos y convexidad. Editorial SM.

Este contenido también aparece en la editorial Oxford, aunque no en Anaya.

En Anaya comienzan directamente con los sólidos platónicos y poliedros semirregulares. Además, muestra el truncamiento de los poliedros regulares.

Prismas.

En SM lo divide en 2 secciones. En la primera de ellas, introduce una definición completa del prisma (ilustración 5) y en la segunda sección, SM trabaja el cálculo de áreas y volúmenes de estos poliedros junto con sus desarrollos (ilustración 6).

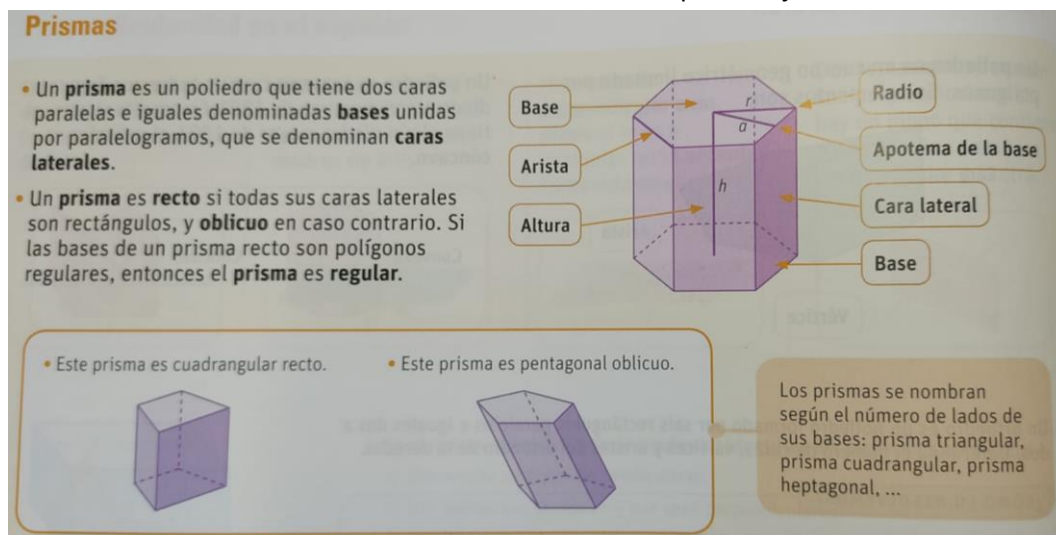


Ilustración 5. Prismas. Editorial SM.

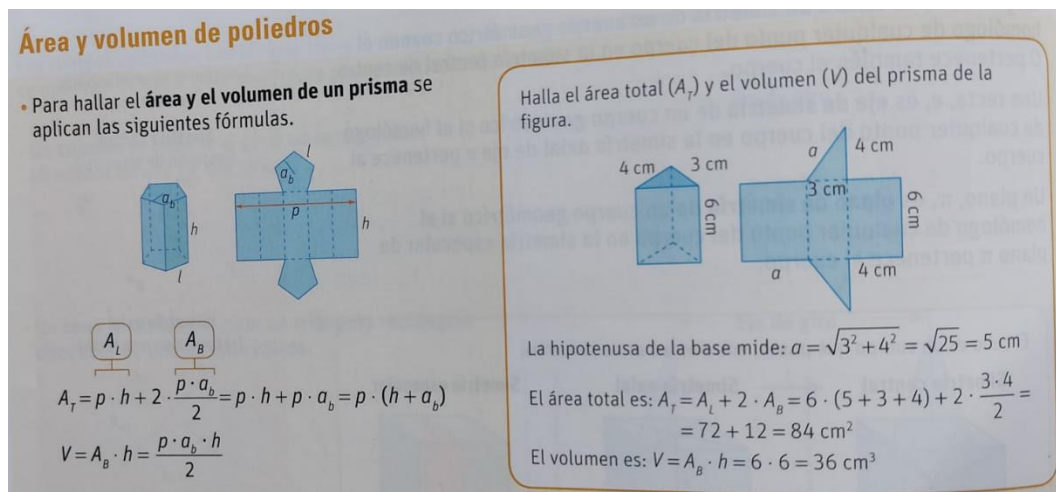


Ilustración 6. Cálculo de áreas y volúmenes. Prismas. Editorial SM.

El libro de Oxford muestra un contenido muy similar dividiéndolo en 2 secciones prácticamente idénticas, en cambio, Anaya da por sabida esta información indicando de manera muy resumida el cálculo de áreas y volúmenes comparándolo con un cilindro.

Pirámides.

De igual manera, SM repite el proceso desarrollando en una primera sección cómo formar una pirámide y sus parámetros, y una segunda sección con el cálculo de áreas, volúmenes y desarrollo (ilustración 7-8).

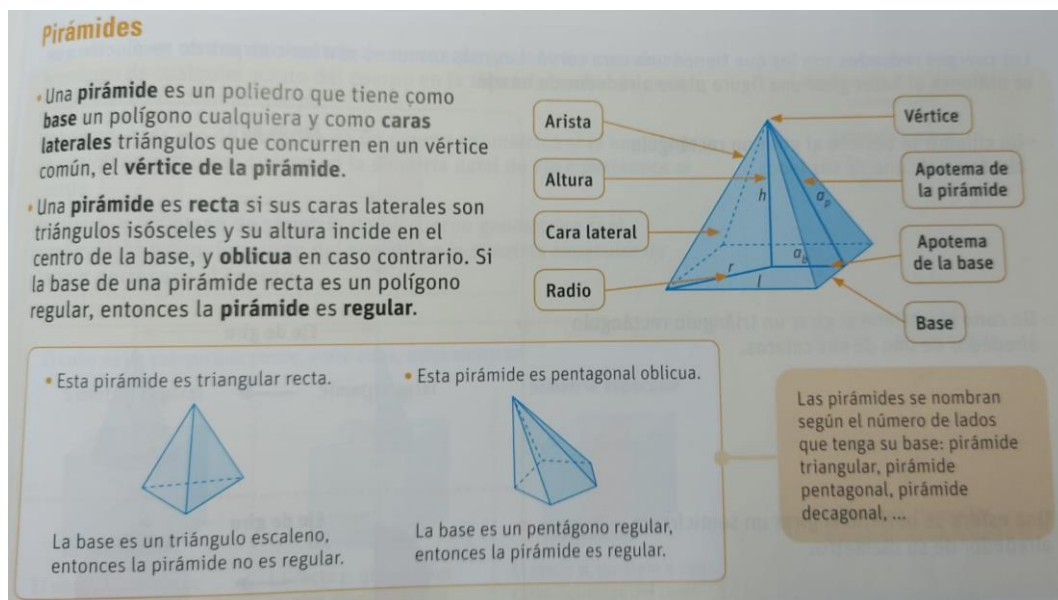


Ilustración 7. Pirámides. Editorial SM.

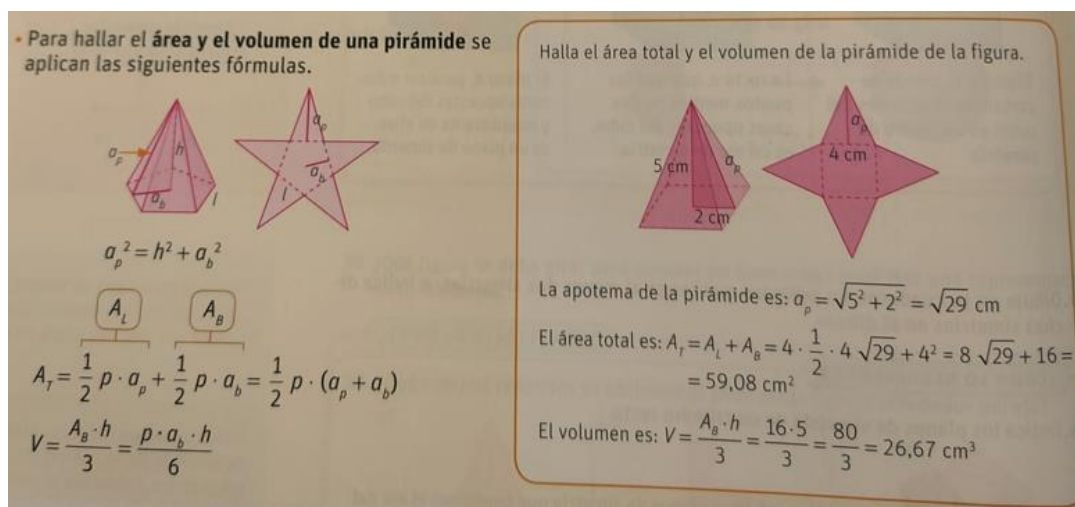


Ilustración 8. Cálculo de áreas y volúmenes. Pirámides. Editorial SM.

En este apartado, la comparación es similar a la mostrada con los prismas debido a que la metodología de los tres libros no ha variado. La principal diferencia se muestra en el libro de Anaya donde la comparación de la pirámide la realiza con un cono, sustituyendo al cilindro anterior.

Cuerpos redondos debido al eje de giro

En este punto, se tratan las esferas, cilindros, conos y troncos de cono. Cada libro muestra una metodología diferente. SM busca desarrollar los cuerpos geométricos a

partir de sus ejes de giro y de los polígonos y superficies desde las que, con dicho giro, crea estos cuerpos redondos.

Tras ello, en otra sección posterior, obtiene el área y volumen de cada uno de los cuerpos, junto con el desarrollo, cuando lo tienen. Para Anaya, el procedimiento es similar y en el caso de la editorial Oxford, dedican prácticamente un tema para desarrollar este apartado.

En las tres editoriales, separan cada cuerpo geométrico para tratarlo individualmente.

Simetría en cuerpos geométricos.

Las tres editoriales tienen en común este punto y trabajan los diferentes planos que permiten dividir al poliedro en dos mitades similares. Sin embargo, no buscan profundizar en exceso en este tema ya que es una unidad introductoria en muchos aspectos.

Composición de cuerpos geométricos.

La composición de cuerpos geométricos aparece en los tres libros, aunque con una presencia distinta en ellos.

El texto de Anaya no enseña un punto concreto sobre este tema, aunque sí muestra multitud de ejercicios. El siguiente es el de SM, que sí expone un punto concreto, y por último está el libro de Oxford, el cual presenta un apartado en cada uno de los dos temas.

Globo terráqueo. Coordenadas geográficas.

Este punto, está recogido en los contenidos por el Real Decreto 1105/2014 y es mostrado en dichos textos. Los libros de Anaya y SM tratan los principales aspectos de

una manera esquematizada para el aprendizaje, la editorial Oxford lo hace de una manera similar, aunque algo más completo.

Diagrama de repaso y actividades

El libro de SM muestra al final del tema un diagrama para repasar el tema. Algo que los otros dos libros no tienen. Sin embargo, las actividades finales en los tres libros son abundantes para que los alumnos puedan practicar y afianzar conocimientos.

Además de los contenidos, los libros difieren en las definiciones que utilizan para explicar la información relativa a dichos contenidos. Estas definiciones se mostrarán a continuación (tabla 9):

	SM	Anaya	Oxford
Ángulo diedro	Ángulo diedro: queda determinado por dos semiplanos que comparten una recta. La recta se denomina arista del diedro y cada semiplano, cara del diedro.	X	X
Medida de un ángulo diedro	Medida de un ángulo diedro es la del ángulo formado por dos semirrectas contenidas en las caras perpendiculares a la arista.	X	X
Poliedro	Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.	Un poliedro se llama regular cuando cumple las dos condiciones siguientes: Sus caras son polígonos regulares idénticos. En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.	Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos, no necesariamente iguales.
Fórmula de Euler	En cualquier poliedro convexo, se cumple la siguiente relación entre el número de caras C, aristas A y vértices V: $C+V=A+2$	Si en un poliedro simple (que no tiene orificios) se cuentan el número de caras (c), de vértices (v) y de aristas (a), se cumple lo siguiente: $C+V=A+2$	Si un poliedro es convexo, se verifica que el número de caras, C y el número de vértices V, coinciden con el número de aristas, A, más 2 unidades. $C+V=A+2$
Poliedro Semirregular	X	Se llama poliedro semirregular a aquel cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos y tal que en todos los vértices concurren los mismos polígonos.	X

Convexidad en poliedros	Un poliedro es convexo cuando sus ángulos diedros son menores de 180° . En caso contrario, si tiene algún diedro mayor de 180° , el poliedro es cóncavo.	X	Convexo: si cualquier segmento que une dos de sus puntos está contenido en él. Cóncavo: si se puede trazar un segmento que une dos de sus puntos y no está contenido en él.
Prisma	Un prisma es un poliedro que tiene dos caras paralelas e iguales denominadas bases unidas por paralelogramos, que se denominan caras laterales.	X	Un prisma es un poliedro que tiene dos caras paralelas llamadas bases que son polígonos iguales y otras caras que son paralelogramos y que reciben el nombre de caras laterales.
Prisma recto	Un prisma es recto si todas sus caras laterales son rectángulos, y oblicuo en caso contrario. Si las bases de un prisma recto son polígonos regulares, entonces el prisma es regular.	X	Si las caras laterales (de un prisma) son rectángulos, el prisma es recto.
Pirámide	Una pirámide es un poliedro que tiene como base un polígono cualquiera y como caras laterales triángulos que concurren en un vértice común, el vértice de la pirámide.	X	Una pirámide es un poliedro cuyas caras laterales son triángulos que comparten un único vértice y cuya base es un polígono.

Pirámide recta	Una pirámide es recta si sus caras laterales son triángulos isósceles y su altura incide en el centro de la base, y oblicua en caso contrario. Si la base de una pirámide recta es un polígono regular, entonces la pirámide es regular.	X	X
Cuerpos redondos	Los cuerpos redondos son los que tienen una cara curva. Los más comunes son los cuerpos de revolución que se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un eje.	X	X
Eje de giro	X	Una recta e es eje de giro de orden n de una figura si, al girar en torno a e la figura, ocupa la misma posición n veces (incluida la posición inicial).	X
Cilindro	Un cilindro se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados	X	X
Cilindro recto	X	X	Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene cuando se hace girar un rectángulo sobre un eje paralelo a uno de sus lados.
Cono	Un cono se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.	X	X

Cono recto	X	X	Un cono recto es un cuerpo de revolución que se obtiene cuando se hace girar un triángulo rectángulo sobre un eje que contiene uno de sus catetos. Uno de sus extremos es el vértice del cono
Tronco de cono recto	X	X	Un tronco de cono recto es un cuerpo de revolución que se obtiene cuando se hace girar un trapecio rectángulo sobre un eje que contiene el lado perpendicular a sus bases.
Esfera	Una esfera se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.	X	Una esfera es un cuerpo de revolución que se obtiene cuando se hace girar un semicírculo alrededor de un eje que contiene su diámetro.
Centro de simetría	Un punto, O , es centro de simetría de un cuerpo geométrico cuando el homólogo de cualquier punto del cuerpo en la simetría central de centro O pertenece también al cuerpo.	X	X
Eje de simetría	Una recta, e , es eje de simetría de un cuerpo geométrico si el homólogo de cualquier punto del cuerpo en la simetría axial de eje e pertenece al cuerpo.	X	X

Plano de simetría	Un plano, π , es plano de simetría de un cuerpo geométrico si el homólogo de cualquier punto del cuerpo en la simetría especular de plano π pertenece al cuerpo.	X	X
Esfera terrestre	X	X	La esfera terrestre es una maqueta tridimensional en la que aparecen representadas las zonas de tierra, mares y los accidentes geográficos del planeta tierra.
Longitud geográfica	Longitud geográfica de un punto A es la medida angular del arco determinado en el ecuador por el meridiano de Greenwich y el meridiano del lugar. La longitud se mide en 0° a 180° en dirección este y de 0° a 180° en dirección oeste.	La longitud de un punto de la Tierra es el ángulo que forma el plano que determina el meridiano del lugar con el plano que determina el meridiano de Greenwich. Se debe indicar si está al este (E) o al Oeste (O).	Denominados meridianos: Los meridianos son semicircunferencias máximas, cuyos extremos están situados en los polos.
Latitud geográfica	La latitud geográfica de un punto A es la medida angular del arco determinado en el meridiano del lugar por el punto y el ecuador. La latitud se mide en 0° a 90° en dirección norte y de 0° a 90° en dirección sur.	La latitud de un punto de la Tierra es la medida angular del arco de meridiano que va de dicho punto al ecuador. Hay que añadir si está al norte (N) o al sur. Auckland está en el paralelo 37° S.	Denominados paralelos: Los paralelos son circunferencias determinadas por los planos perpendiculares al eje terrestre
Definiciones	18/24	6/24	13/24

Tabla 9. Definiciones de los conceptos. Fuente SM, ANAYA Y OXFORD.

Tras analizar las definiciones y el número de ellas que se incluyen en cada libro, se han seleccionado las que aparecen en al menos uno de los tres libros. Además, se aprecia que la editorial SM presenta un mayor número de definiciones, al otro lado se presenta la editorial Anaya, que presenta pocas definiciones y da por sabida parte de la información.

Como conclusiones, tomando como referencias estos libros, se pueden extraer las siguientes:

- La editorial SM presenta los puntos a tratar y posteriormente se enfoca en calcular tanto el área y volumen del cuerpo geométrico, así como de obtener el desarrollo cuando es posible.
- La editorial Anaya da por sabidos pasos iniciales para centrarse en aspectos que considera de más enjundia como los cuerpos redondos.
- El libro de la editorial Oxford utiliza dos temas claramente diferenciados para tratar la geometría de los poliedros y los cuerpos redondos.
- En general, la geometría espacial en 3º de E.S.O. es un tema importante y extenso, y con la característica de ser además la introducción a las figuras en 3 dimensiones para los discentes de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.
- El alumnado estudiará en el primer ciclo de E.S.O. el bloque de geometría, el cual será la introducción en este sector, trabajando en el cálculo de áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos redondos simples. En 3º de E.S.O. entran de lleno en la geometría espacial tras la introducción vivida en los dos cursos previos.

6. Fundamentación epistemológica

La parte epistemológica en cualquier estudio pedagógico es clave ya que conocer, entender y tener la capacidad de desarrollar los diferentes temas presentes en las oposiciones al cuerpo de profesorado de secundaria proporciona al docente una mayor capacidad para poder explicar y apoyar al alumnado con el contenido con seguridad y fluidez.

En este punto se desarrollará un tema del temario de oposiciones establecido por la Orden de 21 de septiembre de 1993 por el BOE, en concreto, el Tema 45: “*Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos.*”

Para el desarrollo de la fundamentación epistemológica se han utilizado principalmente:

Alsina, C. (2010). *Las mil caras de la belleza geométrica*. RBA, coleccionables, S.A.

Alsina, C. (2009). Geometría y realidad. Colección Digital Eudoxus, 1

B. Leighton, W. (1989). Geometría descriptiva.

Lehmann, C. H. (1989). Geometría Analítica, Noriega Editores, Editorial Limusa

Radmila, B. M., y José Antonio, G. O. (2002). Geometría.

Soler, G. G. (1991). Poliedros. Síntesis.

6.1. Introducción

En primer lugar, se debe definir qué es la geometría y para ello se ha utilizado la Real Academia Española (R.A.E.), que contiene las siguientes definiciones. (Real Academia Española. (s.f.). Geometría. En Diccionario de la lengua española. Recuperado el 07 de abril de 2022, de <https://dle.rae.es/geometría>)

Geometría: Estudio de las propiedades y de las magnitudes de las figuras en el plano o en el espacio.

Además, la Real Academia Española, muestra más definiciones en cada uno de los ámbitos que está presente, donde nos podemos enfocar en la siguiente:

Geometría del espacio: Parte de la geometría que considera las figuras tridimensionales.

La geometría espacial, por tanto, estudiará las figuras y cuerpos geométricos, además de sus dimensiones.

En su aplicación, es una herramienta de representación e interpretación de otras ramas matemáticas y, su dimensión teórica, que estudia las diferentes teorías desde la abstracción y rigurosidad.

La geometría ha comenzado a percibirse como una actividad humana, y no solo como una disciplina formal. En la vida cotidiana, nos encontramos en un mundo tridimensional, por lo que el estudio de los diferentes volúmenes, superficies y longitudes siempre estará relacionado directamente con los cuerpos geométricos.

Si se enfoca en el ámbito laboral, en mayor o menor medida, el cálculo de las magnitudes o, como mínimo, la posibilidad de realizar una estimación es siempre útil.

6.2. Evolución histórica

Las formas geométricas han formado parte de la historia del mundo. Existiendo diferentes etapas creativas en la humanidad gracias a sus descubrimientos, así como las grandes contribuciones de los matemáticos en la historia.

En Escocia, los trabajos arqueológicos han descubierto numerosas esferas de piedra esculpida a las que se les atribuye una antigüedad de 4000 años, desconociéndose su utilidad. Las formas poliédricas en joyas u otros objetos milenarios se encuentran en África, Mesopotamia y Egipto al igual que las admiradas pirámides de Egipto.

El estudio de la geometría no muestra un claro origen, ya que no se puede determinar en un único punto debido a que cada civilización ha desarrollado su conocimiento matemático y geométrico. Sin embargo, los griegos, aunque preservaron conocimientos de los egipcios y los babilonios, dieron un gran empujón a los conocimientos y su respectiva difusión.

Volviendo a Grecia, del pitagorismo nació la visión mística de identificar los poliedros con los cuatro elementos de la naturaleza. Tetraedro con el fuego, el cubo con la tierra, el octaedro con el aire, el icosaedro con el agua y el dodecaedro con la esfera celeste. Esto se debe al gran interés de la escuela pitagórica por las relaciones matemáticas que estos poliedros presentaban.

La primera teoría de los cinco sólidos regulares se debe al matemático griego Teeteto (415 a.C.-380 a.C.), siendo sus principales contribuciones en el campo de los números irracionales recogidas en los *Elementos* de Euclides en relación a los cinco poliedros regulares. Sin embargo, la popularización de estos poliedros vino por Platón (427 a.C.-347 a.C.), al tratarlos en *Timeo* y al hacer de su academia un lugar de culto geométrico, relacionando directamente los poliedros con el concepto de belleza y con

lo supremo. En Timeo, Platón relacionó los poliedros regulares con los cuatro elementos (fuego, aire, agua y tierra) y con el universo, como se verá en la tabla 10. Posteriormente, surgieron los trece poliedros semirregulares o poliedros arquimedianos.

Tetraedro	Fuego
Hexaedro	Tierra
Octaedro	Aire
Dodecaedro	Universo
Icosaedro	Agua

Tabla 10. Relación sólidos platónicos y los cuatro elementos. Fuente: (Alsina, *Las mil caras de la belleza geométrica*)

Dando un salto histórico hasta el siglo XIV, nació una visión renacentista de los poliedros. La principal diferencia geométrica entre el arte medieval y el arte del Renacimiento es la introducción de la tercera dimensión en la pintura. Estas representaciones no solo se encuentran en la pintura, sino que además aparece en construcciones como la cúpula de Santa Maria de Fiore en Florencia.

En el estudio de los poliedros, Luca Pacioli (1495-1514) analizó la representación de poliedros, cuboctaedros (truncados) y poliedros estrellados y lo plasmó en algunas de sus obras.

El multidisciplinar artista, Leonardo da Vinci (1452-1519) fue uno de los primeros en la representación de poliedros con aristas, cuyas representaciones permitían ver las aristas traseras. Daniele Barbaro (1513-1570) contribuyó enormemente al conocimiento geométrico-artístico de las nuevas técnicas de representación gracias a su obra *La práctica de la perspectiva*, aunque no consiguió superar en claridad a Leonardo.

Wenzel Jamnitzer (1508-1585) en su *Perspectiva Corporum Regularium* mostro formas poliédricas, siendo un artista y un descubridor de nuevas formas poliédricas.

Otro gran matemático como el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) descubrió dos poliedros estrellados, los Antiprismas y redescubriendo los poliedros de Arquímedes y todo ello debido a su interés por las leyes físicas relativas al movimiento de los planetas.

A través de los siglos, cabe destacar que el interés en las formas geométricas ha ido variando según las etapas, empezando desde la divinidad o belleza en la época

griega, pasando por la ilustración renacentista hasta el estudio matemático iniciado en torno al año 1700.

Para iniciar esta etapa hay que hacer mención a René Descartes (1596-1650), quien demostró que la suma de los defectos angulares en vértices para todos los poliedros convexos vale siempre 720° .

Leonhard Euler (1707-1783) investigó y plasmó su famosa fórmula $C + V = A + 2$, válida para los poliedros convexos. A partir de este punto, existen numerosas investigaciones sobre diferentes poliedros y conjuntos de poliedros.

Louis Poinot (1777-1859) descubrió los otros dos poliedros estrellados que ya se encontraban descritos por Kepler, completando así la colección de poliedros regulares no convexos. Pero Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue quien demostró que estos cuatro poliedros de Kepler-Poinot eran los únicos posibles en el ámbito regular.

Eugène C. Catalan (1814-1895) analizó poliedros duales de los arquimedianos y descubrió con ellos los que se han nombrado como poliedros de Catalan.

La clasificación de los poliedros convexos no uniformes con caras regulares fue debida gracias a Norman W. Johnson en 1966, indicando que son 92.

La evolución histórica ha sido obtenida de los libros previamente mostrados al introducir la fundamentación epistemológica, sin embargo, el principal libro utilizado en esta sección ha sido *Las mil caras de la belleza geométrica*, de Claudi Alsina.

6.3. Conceptos fundamentales

En esta sección, se introducen los conceptos preliminares asociados a la geometría que constituirán la base epistemológica. Para plasmar las definiciones y propiedades necesarias, se han utilizado los textos mostrados al inicio del punto 6. *Fundamentación epistemológica* y entre ellos, como principal referencia el de “Geometría Descriptiva” de B. Leighton, W. (1989).

Definición 1. (B. Leighton, 1989)

Supongamos que se dispone de dos semiplanos en el espacio, denominados α y β con una recta común r , que se encuentran situados en planos distintos, se denominará diedro convexo al conjunto de puntos comunes a los semiespacios delimitados por los planos de α y β , que contienen a β y α respectivamente. La recta r es la arista del diedro y α y β forman las caras del diedro.

Definición 2. (B. Leighton, 1989)

Dos diedros son adyacentes si tienen una cara inmediatamente común y las otras son opuestas.

Definición 3. (B. Leighton, 1989)

Un diedro cóncavo es el formado por un diedro convexo y sus dos adyacentes.

Definición 4. (B. Leighton, 1989)

Si las caras de un diedro son semiplanos opuestos, a cada semiespacio que tiene por borde el plano que los contiene se designa diedro llano.

Por lo tanto, como resultados se pueden obtener los siguientes:

Propiedades

1. Dos planos secantes dividen al espacio en cuatro diedros convexos.
2. El semiplano determinado por la arista del diedro y un punto interior tiene todos sus puntos pertenecientes al diedro.
3. El segmento que une dos puntos situados cada uno en una cara del diedro, corta todo semiplano interior al mismo.
4. Cada semiplano interior a un diedro convexo lo divide en dos diedros situados en dos semiespacios distintos respecto de dicho semiplano.

Definición 5. (B. Leighton, 1989)

Si se dispone de n semirrectas $r_1, r_2, \dots, r_n$ no coplanarias y con origen común en un punto, el cual se nombrará O , verificando que el plano determinado por cada dos rectas consecutivas deja a las demás en un mismo semiespacio. Se llamará ángulo poliedro convexo al conjunto de puntos comunes a todos los semiespacios. Las semirrectas reciben el nombre de aristas del ángulo poliedro, los ángulos convexos determinan las caras y los diedros convexos definidos por cada dos caras consecutivas se denominan diedros del ángulo poliedro.

Definición 6. (B. Leighton, 1989)

Se denominará superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos llamados caras, que verifican:

- Cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra. Ambas caras se dirán que son contiguas y tienen una arista en común.
- Dos caras están en distinto plano.

La superficie poliédrica es convexa si además verifica que:

- El plano de cada cara provoca que demás caras se encuentren en el mismo semiespacio.

Definición 7. (B. Leighton, 1989)

Un poliedro convexo es aquel conjunto de puntos comunes a todos los semiespacios que determinados por los planos de las caras contienen a todos los demás.

El conjunto de los ángulos poliedros de las caras forma la superficie del poliedro. Los puntos de éste, no situados en la superficie reciben el nombre de ángulos interiores, al resto de puntos del espacio se designaras como exteriores.

Demostración. Existencia de poliedros (B. Leighton, 1989)

Para la demostración de la existencia de poliedros, en primer lugar, se tomará un punto O origen de tres semirrectas r , s y t . Las tres semirrectas cortarán a un plano π en los puntos P , Q y R . Las tres semirrectas junto con el punto O determinarán un triedro como el que se muestra en la ilustración 9. Por lo tanto, los puntos comunes al triedro y al semiespacio determinado por el plano π y el punto O constituyen un poliedro de cuatro caras, donde las caras son triángulo. Este poliedro es llamado tetraedro.

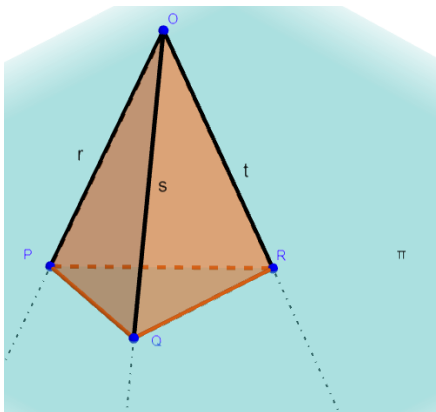


Ilustración 9. Poliedro ejemplo. Elaboración propia.

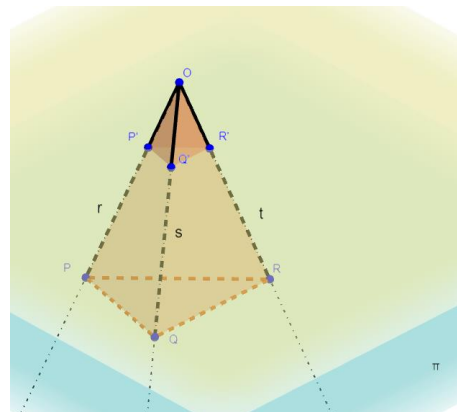


Ilustración 10. Poliedro ejemplo. Elaboración propia.

En la ilustración 10, el plano π' corta a las rectas r , s y t en los puntos marcados P' , Q' y R' respectivamente limitando dos poliedros convexos. El poliedro formado por los puntos $OP'Q'R'$ tiene cuatro caras, mientras que el poliedro restringido por los plano π , el plano π' y las rectas r , s y t posee cinco caras.

Si se aplican secciones análogas al plano π' pero por los vértices P , Q o R se puede probar la existencia de poliedros convexos con un número mayor de caras.

El plano secante únicamente puede tener en común con la superficie del poliedro cortado los lados del triángulo en que corta al triedro elegido previamente. Si existiese otro punto común, se podría trazar una secante al triángulo, sería recta que tendría al menos tres puntos comunes con la superficie del poliedro, por lo cual, el plano de la cara por uno de ellos separaría los otros dos, contradiciendo así la definición de convexidad.

Como el plano no puede tener ningún punto común con las restantes aristas del poliedro, entonces todos los vértices de éste, excepto el del triedro cortado, están a un mismo lado del plano. Esto demuestra que el plano secante restringe, junto con las caras del poliedro inicial, un nuevo poliedro convexo, con una cara más, y nuevos vértices triedros para poder repetir este proceso.

Propiedad

El número mínimo de caras de un poliedro es cuatro y que existen poliedros con un número de caras, igual o superior a cuatro.

Definición 8. (B. Leighton, 1989)

Se denomina sección plana de un poliedro a cada uno de los polígonos cuyos lados son rectas donde concurren las caras de los poliedros con el plano secante.

Definición 9. (B. Leighton, 1989)

La diagonal de un poliedro será una recta que une dos vértices del mismo no situados en la misma cara.

Definición 10. (B. Leighton, 1989)

Un plano diagonal en un poliedro será todo aquel plano que pasa por tres vértices de dicho poliedro no situados en la misma cara.

A partir de este punto, y salvo que se indique lo contrario, se considerarán todos los poliedros convexos.

Propiedad.

Los semiplanos de dos caras contiguas definidas por una arista común designan un diedro convexo, encontrándose en el interior el poliedro.

Propiedad.

Cada vértice del poliedro es vértice de un ángulo poliedro convexo, siendo éste como mínimo un triedro.

Demostración.

En cada arista concurren dos caras del poliedro, por lo que en cada vértice coinciden al menos tres aristas.

Propiedad.

Cada poliedro convexo divide al espacio en dos regiones, siendo una de ellas convexa y la otra no.

Demostración.

Cualquier semirrecta con origen en un punto interior del poliedro corta a la superficie del poliedro en únicamente un punto, por lo que se demuestra:

Si se dispone de una semirrecta que se designa como r , cuyo origen es un punto P perteneciente al interior del poliedro. Si se corta el poliedro por el plano perteneciente a la semirrecta r y un punto de una arista que pase por ella. La intersección forma un polígono convexo que tiene en su interior al punto P . Dicha semirrecta r secciona al contorno en un punto Q perteneciente a la superficie del poliedro.

Debido a esto, no existe otro punto Q' de intersección ya que, en caso contrario, uno de los dos puntos separaría al otro de P , contradiciendo el hecho de que el poliedro sea convexo.

Propiedad.

La superficie poliédrica es aquella que separa el espacio en dos regiones convexas (la interior y la exterior). Por tanto, se puede unir dos puntos cualesquiera por medio de poligonales que no cortan a la superficie.

Observación.

Si se parte de un ortoedro, se puede construir un poliedro no convexo, tomando como referencia un punto P interior al ortoedro y eliminando el poliedro formado por dicho punto P y cualquier cara del ortoedro.

6.4. Teorema de Euler

Para todo poliedro convexo, la fórmula de Leonhard Euler relaciona el número de caras, vértices y aristas con la siguiente ecuación:

$$\textit{Caras (C)} + \textit{Vértices (V)} = \textit{Aristas (A)} + 2$$

La demostración, se va a plantear a continuación.

Demostración.

En primer lugar, se va a utilizar un poliedro básico para desarrollar dicha demostración, el cuál es el tetraedro. Este poliedro presenta 4 caras, 4 vértices y 6 aristas, por lo que la fórmula de Euler quedaría de la siguiente manera:

$$\textit{Caras} + \textit{Vértices} = \textit{Aristas} + 2 \quad \rightarrow \quad 4 + 4 = 6 + 2$$

Ahora se elimina una cara, su red plana verifica que:

$$\textit{Caras} + \textit{Vértices} - \textit{Aristas} = \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad 3 + 4 - 6 = \mathbf{1}$$

La expresión $V - A + C = 1$ será cierta para $A = n - 1$

Si de la red plana, mencionada previamente, se elimina una arista que sea frontera, la nueva red tendrá $A - 1$ aristas, V vértices y $C - 1$ caras.

Por tanto, se tendrá: $V - (A - 1) + (C - 1) = 1$

Y de aquí se obtiene que: $V - A + C = 1$

Así se verifica para el poliedro que: $C + V = A + 2$

Consecuencias al Teorema de Euler

- a. Cada cara contiene tres o más aristas y cada arista está en dos caras por lo que se obtiene:

$$A \geq 3 \cdot \frac{C}{2} \rightarrow 3C \leq 2A$$

- b. En cada vértice concurren tres o más aristas, y cada una de ellas tiene dos vértices:

$$A \geq 3 \cdot \frac{V}{2} \rightarrow 3V \leq 2A$$

Corolario:

No existe un poliedro convexo con menos de seis aristas, cuatro caras y cuatro vértices.

Demostración.

Como se ha visto previamente, se puede llegar a:

$$A \geq 3 \cdot \frac{C}{2} \rightarrow 3C \leq 2A \quad (1)$$

$$A \geq 3 \cdot \frac{V}{2} \rightarrow 3V \leq 2A \quad (2)$$

Sumando los términos de la ecuación 1 y ecuación 2 se obtendrá:

$$\begin{aligned} 3C + 3V &\leq 2A + 2A = 4A \\ 3C + 3V &= 4A \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando el Teorema de Euler:

$$\begin{aligned} 3(C + V) &= 3(A + 2) \rightarrow 3C + 3V = 3A + 6 \\ 3C + 3V &= 3A + 6 \end{aligned} \quad (4)$$

Restando las ecuaciones 3 y 4 se obtiene:

$$0 \geq 6$$

Comparando ahora la ecuación 1 y 4 se llega a:

$$\left. \begin{aligned} 3C &= 3A + 6 - 3V \\ 3C &\leq 2A \end{aligned} \right\}$$

$$3C = 3A + 6 - 3V \leq 2A$$

$$A + 6 - 3V \leq 0$$

$$A + 6 \leq 3V \quad (5)$$

De igual manera, se ha actuado con las ecuaciones 2 y 4:

$$\left. \begin{array}{l} 3C = 3A + 6 - 3V \\ 3V \leq 2A \end{array} \right\}$$

$$3V = 3A + 6 - 3C \leq 2A$$

$$A + 6 - 3C \leq 0$$

$$A + 6 \leq 3C \quad (6)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (5) se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} 3V \leq 2A \\ A + 6 \leq 3V \end{array} \right\} V \geq 4$$

Y comparando las ecuaciones (1) y (6):

$$\left. \begin{array}{l} 3C \leq 2A \\ A + 6 \leq 3C \end{array} \right\} C \geq 4$$

Observación.

No existe ningún poliedro euleriano con siete aristas, pues debería verificarse que:

$$13 \leq 3C \leq 14 \quad \text{y} \quad 13 \leq 3V \leq 14$$

6.4.1. Aplicación del Teorema de Euler en sólidos platónicos

$$C + V = A + 2$$

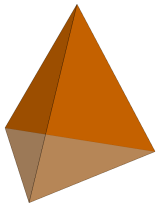
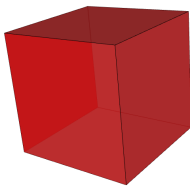
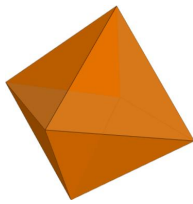
	Tetraedro	Hexaedro	Octaedro
Imagen			
Caras (C)	4	6	8
Vértices (V)	4	8	6
Aristas (A)	6	8	12
C+V-A	2	2	2

Tabla 11. Teorema de Euler para Sólidos Platónicos. (1). Elaboración propia.

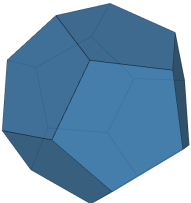
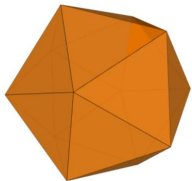
	Dodecaedro	Icosaedro
Imagen		
Caras (C)	12	20
Vértices (V)	20	12
Aristas (A)	30	30
$C+V-A$	2	2

Tabla 12. Teorema de Euler para Sólidos Platónicos. (2). Elaboración propia.

6.5. Familias de poliedros

Dentro de los poliedros, podemos encontrarnos las siguientes familias:

Familia	N.º de poliedros que forman la familia	Características principales
Poliedros regulares o Sólidos Platónicos	5	Todas las caras son polígonos regulares e iguales. En cada uno de sus vértices concurren el mismo número de caras y aristas. Todas las aristas tienen la misma longitud.
Pirámides y variantes. (troncos de pirámide, oblicuas, bipyramides, elongadas...)	Infinitos	Se componen de un polígono como base y sus caras laterales son triángulos que unen dicha base con un vértice llamado cúspide.
Prismas y variantes. (Antiprismas, truncados, compuestos...)	Infinitos	Se componen por dos polígonos que actúan como bases y se encuentran unidas por las caras laterales, que son cuadriláteros (a excepción del antiprisma, que están formadas por triángulos).
Sólidos de Johnson	92	No tienen bases diferenciadas. Son convexos Sus caras pueden ser cualquier polígono regular y pueden ser distintas entre sí. Solamente pueden ser: triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos o decágonos. En cada vértice concurren como mínimo 3 caras, y como máximo 5 caras. A este grupo (o familia) pertenecen varias pirámides y bipyramides. (Junta de Andalucía, 2022)

Sólidos Arquimedianos (Poliedros semirregulares)	13	Son poliedros convexos formados por polígonos regulares de dos o más tipos. En concreto los tipos de polígonos que los forman son: decágonos, octógonos, hexágonos, pentágonos, cuadrados y triángulos. En sus vértices confluyen el mismo número de polígonos y los mismos polígonos en todos ellos. La mayoría de ellos se obtienen truncando los poliedros regulares. Todos sus vértices se circunscriben en una esfera y que los ángulos diedros que forman sus polígonos no son iguales salvo en los casos del cuboctaedro y del icosidodecaedro que sí que tienen el mismo ángulo diedro. (Geometra, 2022)
Sólidos de Catalán	13	Son los poliedros duales de los sólidos de Arquímedes. Son convexos. Sus caras son iguales, aunque no son polígonos regulares. Sus vértices no son uniformes. Sus ángulos diédricos son iguales en todo el poliedro. Dos de ellos son de aristas uniformes (el rombododecaedro y el triacontaedro rómbico) y otros dos tienen figura isomórfica (el icositetraedro pentagonal y el hexecontaedro pentagonal). (Junta de Andalucía, 2022)
Sólidos de Kepler-Poinsont	4	Todos son cóncavos. Sus caras son iguales, regulares y uniformes. Todas ellas son polígonos regulares. También sus aristas son iguales. Sus vértices son uniformes: en ellos concurren el mismo número de caras. Las caras están única y parcialmente en la superficie del sólido, y las partes expuestas están sólo conectadas en puntos (en el supuesto de que estén conectadas de algún modo). (Junta de Andalucía, 2022)

Tabla 13. Familias de poliedros. Elaboración propia.

Existen otros poliedros que no se consideran familias o grupos, pero que presentan características interesantes a estudiar, estos son:

Otros Poliedros	
Poliedros Quirales	Tienen dos formas distintas isomórficas, una es la imagen especular de la otra, es decir, tiene dos formas con estructura exactamente igual: caras (tipo y número), aristas, vértices, convexidad..., pero su construcción puede presentarse de dos formas distintas. (Junta de Andalucía, 2022)

Deltaedros	Un deltaedro es cualquier poliedro cuyas caras sean triángulos equiláteros e iguales. Existen 8 deltaedros convexos (3 sólidos platónicos y 5 sólidos de Johnson). Existen infinitos deltaedros cóncavos. Sus caras son triángulos equiláteros. Sus aristas son iguales. Sus vértices no son siempre uniformes. Sus ángulos diedros no son siempre iguales. (Junta de Andalucía, 2022)
Poliedros duales	Es un poliedro que se obtiene de otro de la siguiente manera: se establece un punto en el centro de cada cara del poliedro original. Esos puntos serán los vértices del nuevo poliedro. Se unen los vértices continuos unos con otros, con aristas, y obtenemos un poliedro nuevo, que es dual del original. (Junta de Andalucía, 2022)
Trapezoedros	Son poliedros que están formados solo por trapezoides deltoides. (Junta de Andalucía, 2022)
Poliedros estrellados	Son poliedros cóncavos autointersecados (sus aristas se “cortan”). Solo existen 4 poliedros estrellados regulares. Existen infinitos poliedros estrellados no uniformes. (Junta de Andalucía, 2022)
Esferas y cúpulas geodésicas	Es un poliedro que tiene numerosas caras y tiene forma similar a una esfera. Se considera que una esfera geodésica se genera a partir de un poliedro principalmente del icosaedro e incluso del dodecaedro regular. Una semiesfera geodésica se puede denominar como cúpula o domo. Las esferas geodésicas se forman con triángulos equiláteros, que se pueden agrupar formando pentágonos y hexágonos regulares. También se podrían aceptar esferas geodésicas constituidas con otros polígonos. (Junta de Andalucía, 2022)

Tabla 14. Otros poliedros. Fuente: Junta de Andalucía.

6.6. Sólidos platónicos

Como se ha mencionado previamente, existen 5 sólidos platónicos, este nombre se debe a que la primera persona que los mencionó, el filósofo griego Platón.

Recopilando, las principales características que presentan son:

- Todas las caras son polígonos regulares e iguales.
- En cada uno de sus vértices concurren el mismo número de caras y aristas.
- Todas las aristas tienen la misma longitud.

Estos cuerpos geométricos son el tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Tetraedro

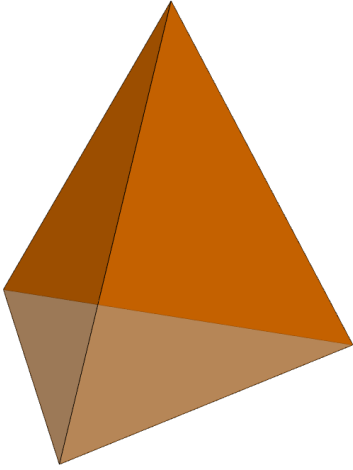
Número de caras	4	
Polígono que forman las caras	Triángulos equiláteros	
Número de aristas	3	
Número de vértices	4	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	3	

Tabla 15. Tetraedro. Elaboración propia.

Hexaedro

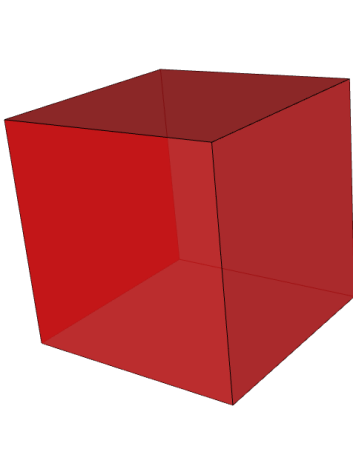
Número de caras	6	
Polígono que forman las caras	Cuadrados	
Número de aristas	12	
Número de vértices	8	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	4	

Tabla 16. Hexaedro. Elaboración propia.

Octaedro

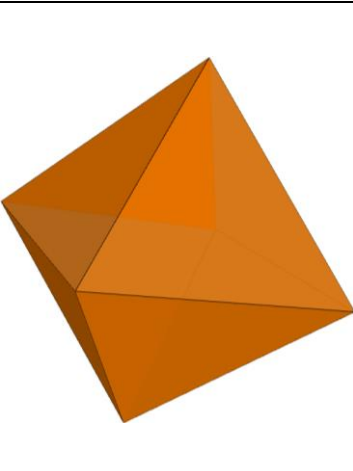
Número de caras	8	
Polígono que forman las caras	Triángulos equiláteros	
Número de aristas	12	
Número de vértices	6	
Caras concurrentes en cada vértice	4	
Vértices contenidos en cada cara	3	

Tabla 17. Octaedro. Elaboración propia.

Dodecaedro

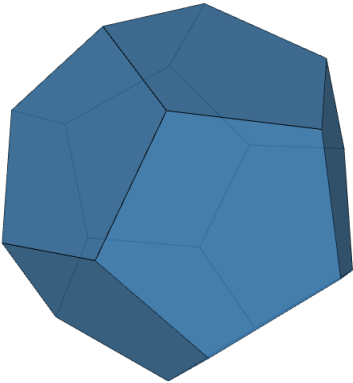
Número de caras	12	
Polígono que forman las caras	Pentágonos regulares	
Número de aristas	30	
Número de vértices	20	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	5	

Tabla 18. Dodecaedro. Elaboración propia.

Icosaedro

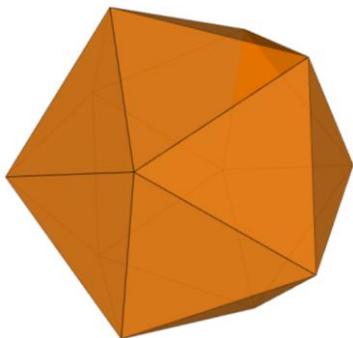
Número de caras	20	
Polígono que forman las caras	Triángulos equiláteros	
Número de aristas	30	
Número de vértices	20	
Caras concurrentes en cada vértice	5	
Vértices contenidos en cada cara	3	

Tabla 19. Icosaedro. Elaboración propia.

6.7. Dualidad entre los sólidos platónicos

Leonhard Euler, en la visión histórica sobre poliedros, investigó y produjo un cambio fundamental en este campo. Existe una dualidad entre algunos de los sólidos platónicos, estableciendo parejas de sólidos duales que intercambian el número de caras y vértices y poseen el número de aristas.

	Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras	4	6	8	12	20
Vértices	4	8	6	20	12
Aristas	6	12	12	30	30

Tabla 20. Sólidos platónicos. Elaboración propia.

Dualidad tetraedro-tetraedro

El sólido dual de un tetraedro es el propio tetraedro, ya que es el número de vértices se le puede hacer coincidir con el número de caras y que con estas características no modifique su forma, aunque si su tamaño (ilustración 11).

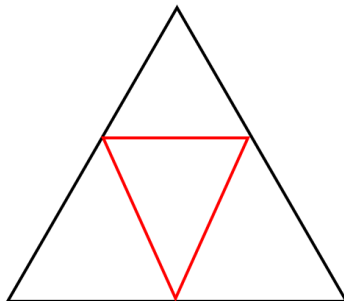


Ilustración 11. Dualidad entre tetraedro-tetraedro. Elaboración propia.

Dualidad hexaedro-octaedro

Como se puede observar en la tabla anterior, las caras del hexaedro coinciden con los vértices del octaedro y viceversa, además el número de aristas coincide. Con ello, se determina esta dualidad (ilustración 12).

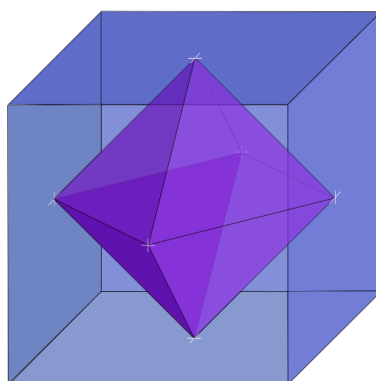


Ilustración 12. Dualidad hexaedro-octaedro. Fuente Wikipedia.

Dualidad dodecaedro-icosaedro

De igual manera se puede examinar la dualidad entre dodecaedro e icosaedro, obteniendo la siguiente correspondencia (ilustración 13):

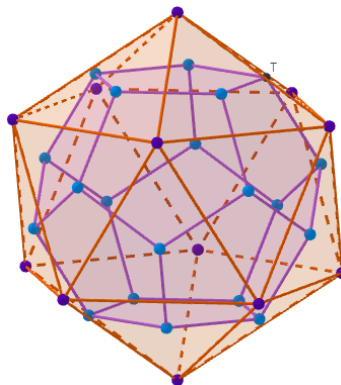


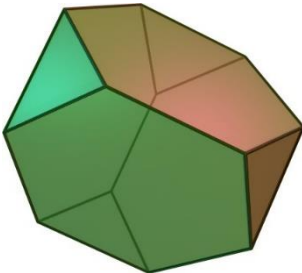
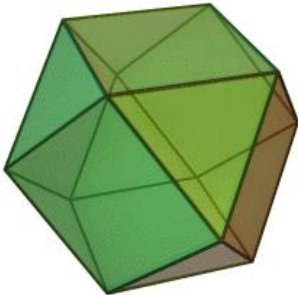
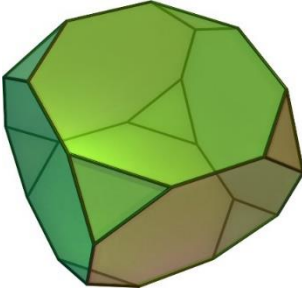
Ilustración 13. Dualidad dodecaedro-icosaedro. Fuente (jmora7, 2022). Creado en GeoGebra.

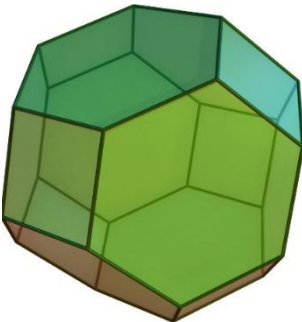
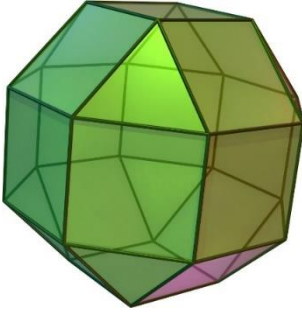
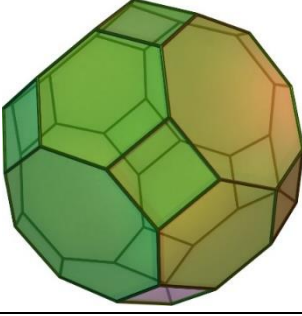
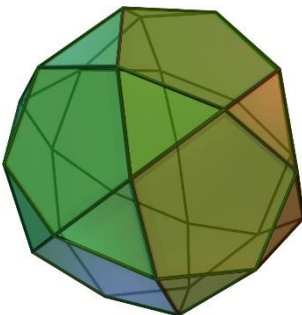
6.8. Sólidos arquimedianos

Como se ha visto anteriormente, los sólidos arquimedianos o poliedros semirregulares presentan las siguientes características:

- Son poliedros convexos formados por polígonos regulares de dos o más tipos.
- En concreto los tipos de polígonos que los forman son: decágonos, octógonos, hexágonos, pentágonos, cuadrados y triángulos.
- En sus vértices confluyen el mismo número de polígonos y los mismos polígonos en todos ellos.
- La mayoría de ellos se obtienen truncando los poliedros regulares.
- Todos sus vértices se circunscriben en una esfera y que los ángulos diedros que forman sus polígonos no son iguales salvo en los casos del cuboctaedro y del icosidodecaedro que sí que tienen el mismo ángulo diedro.

Con estas características es posible obtener 15 poliedros, sin embargo, existen 2 parejas entre ellos que pueden considerarse similares, por tanto, quedarían 13 posibilidades. De tal manera, los 13 sólidos arquimedianos son:

Nombre	Ilustración	Características
Tetraedro truncado		Se obtiene truncando cada vértice de un tetraedro con lo que resultan 8 caras: 4 del tetraedro original que se convierten de triangulares a hexagonales y 4 nuevas que resultan de los vértices, en este caso triangulares.
Cuboctaedro		Se obtiene truncando cada vértice de un cubo con lo que resultan 14 caras: 6 del cubo, que continúan cuadradas y 8 nuevas en forma de triángulos equiláteros; el cuboctaedro es un cubo que se trunca hasta el punto medio de la arista.
Cubo truncado o hexaedro truncado.		Se obtiene truncando un cubo, tiene el mismo número de caras que un Cuboctaedro: 14 caras, 8 de ellas son triángulos equiláteros y 6 de ellas octágonos; tiene 24 vértices; 36 aristas.

Octaedro truncado, tetracaidecaedro o poliedro de Kelvin		Se obtiene truncando cada vértice de un octaedro. Se denominó poliedro de Kelvin, por ser este el que demostró la singularidad de que es el único poliedro semirregular que puede llenar el espacio por repetición de sí mismo.
Rombicubotaedro o rombicuboctaedro menor		Se obtiene truncando cada vértice de un cuboctaedro con lo que resultan 8 caras: 4 del tetraedro original que se convierten de triangulares a hexagonales y 4 nuevas que resultan de los vértices, en este caso triangulares.
Cuboctaedro truncado o rombicuboctaedro mayor		El Cuboctaedro truncado es un Sólido de Arquímedes, que tiene doce caras cuadradas, ocho caras hexagonales y seis octagonales, todas ellas regulares, tiene 48 vértices y 72 aristas. Es un Zonoedro.
Cubo romo o cuboctaedro romo (presenta 2 formas)		El cubo romo es un sólido de Arquímedes que tiene 38 caras, 60 aristas y 24 vértices. Perteneciente a la familia de los sólidos de Catalan. Es, además, un poliedro quiral, lo que implica que tiene dos formas distintas enantiomorfas, espejos una de la otra. Solo otro sólido arquimediano posee esta misma propiedad.
		
Icosidodecaedro		Es un poliedro cuasirregular. Es un poliedro con doce caras pentagonales y veinte triangulares. Cuenta con 30 vértices idénticos, en los que se unen dos triángulos y dos pentágonos en cada uno de ellos. 60 aristas idénticas separan a cada triángulo de un pentágono.

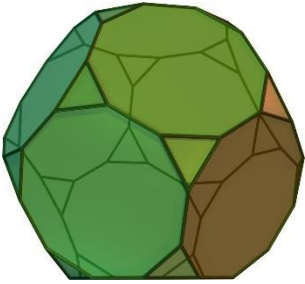
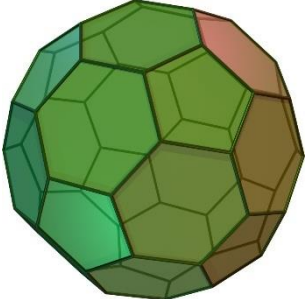
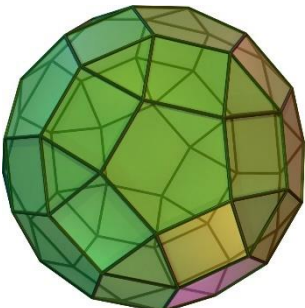
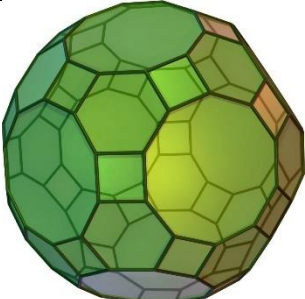
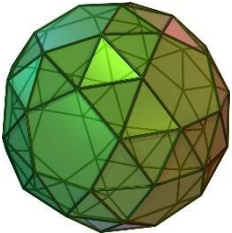
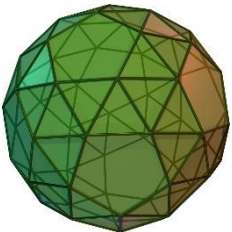
Dodecaedro truncado		El dodecaedro truncado es un sólido de Arquímedes que se obtiene truncando cada vértice de un dodecaedro.
Icosaedro truncado		El icosaedro truncado es un sólido de Arquímedes que se obtiene truncando cada vértice de un icosaedro.
Rombicosidodecaedro o rombicosidodecaedro menor		Tiene 62 caras (12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos), 120 aristas, y 60 vértices. Este sólido se obtiene como dual del hexecontaedro deltoidal, por expansión del dodecaedro.
Icosidodecaedro truncado o rombicosidodecaedro mayor		Tiene 62 caras, 180 aristas y 120 vértices.
Dodecaedro romo o icosidodecaedro romo (presenta 2 formas)	 	Que tiene 92 caras, 80 de ellas triangulares y 12 pentagonales, tiene 150 aristas y 60 vértices. También fue llamado dodecaedro snub o dodecaedro simum por Kepler.

Tabla 21. Sólidos arquimedianos. Fuente Wikipedia.

7. Fundamentación didáctica

Para realizar una Unidad Didáctica completa, se debe indagar y conocer la información actual relativa a los programas internacionales presentes, o los diferentes artículos de investigación relacionados con la pedagogía o el tema en cuestión, en este caso, el tema es la geometría espacial.

7.1. Informe PISA

Este estudio, en parte, se ha sustentado en el informe del programa internacional para la evaluación de estudiantes o Informe PISA (*Programme for International Student Assessment*).

Este informe PISA, se ha llevado a cabo por la OCDE (*Organisation for Economic Co-operation and Development*) nivel mundial para medir el nivel académico de los alumnos en diversas disciplinas.

El objetivo del Informe PISA es proporcionar datos e información para ayudar a los países que forman la OCDE en sus políticas de educación, ya que la evaluación se realiza al sistema educativo y no al alumnado del país.

El Informe PISA se realiza en países pertenecientes al OCDE o no y se suele realizar cada 3 años, aunque los gobiernos pueden encargárselos.

En el ámbito matemático, cabe destacar que las personas disponen de capacidades cognitivas a su disposición, o en su defecto, pueden aprenderlas para comprender y entenderse con el mundo matemático o resolver problemas.

El crecimiento de la activación de las capacidades matemáticas fundamentales está relacionado al aumento de la dificultad de estas preguntas. Esta observación se ha utilizado como base de las descripciones de los distintos niveles de competencia matemática presentados en anteriores estudios PISA.

Las siete capacidades matemáticas fundamentales utilizadas en este marco son las siguientes:

Comunicación: El alumno percibe la existencia de un desafío y se encuentra motivado para entender la situación-problema. Para ello, lee, comprende e interpreta tanto el enunciado como las preguntas y forma un modelo mental de la situación para clarificar y formular el problema. Este proceso lo puede indicar mediante los pasos intermedios que ha necesitado junto al resultado final exponiendo el proceso final y justificándolo si lo creyese necesario.

Matematización: La competencia matemática trata la transformación e interpretación de un problema en el mundo real a un problema matemático junto con su interpretación o valoración de un resultado o modelo matemático utilizado para dicho problema.

Representación: La representación de objetos o situaciones matemáticas implica la selección, interpretación y utilización de dichas representaciones para poder interactuar con el problema en cuestión. Estas representaciones pueden ser gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones o fórmulas.

Razonamiento y argumentación: Esta capacidad analiza la capacidad del alumno en comprender los procesos de problemas de pensamientos arraigados utilizando herramientas lógicas.

Diseño de estrategias para resolver problema: Esta competencia implica el conjunto de procesos de control que marcan el camino que el alumno formule y resuelva los problemas eficazmente. La destreza se determina por la elección o el diseño de un plan que utilizar en un problema presentado. Siendo esta capacidad requerida en cualquier punto en la resolución del problema.

Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico: Otra competencia matemática fundamental es la correspondiente al lenguaje matemático. Esto implica tanto la comprensión e interpretación como la utilización de las expresiones simbólicas en el contexto matemático.

Utilización de herramientas matemáticas: Al igual que el uso del lenguaje matemático es fundamental, el uso de las herramientas tanto físicas como informáticas lo son, además de que cada vez son más comunes. Por ello, el alumnado debe de saber utilizarlas y conocer sus límites.

Todas estas competencias están íntimamente relacionadas como se muestra en el diagrama siguiente:

Un modelo de competencia matemática en práctica

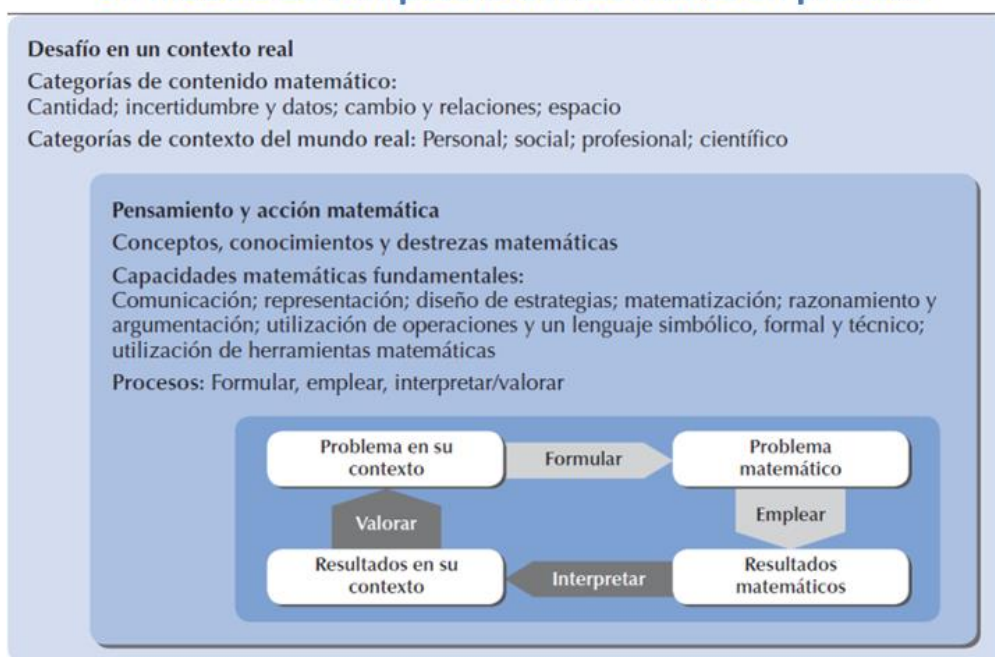


Diagrama 1. Fuente: OCDE (2013), Marco y pruebas de evaluación de PISA 2012,
<http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en> (Mathematics Framework).

Descripción del nivel de competencia de las tareas

Nivel	Lo que el alumnado puede hacer normalmente
6	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
5	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Tabla 22. Fuente: OCDE (2013), Marco y pruebas de evaluación de PISA 2012,
<http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en> (Mathematics Framework).

7.2 Artículos y reseñas

La geometría en el espacio en la Enseñanza Secundaria ha sido y es estudiada debido a su importancia y sus diferentes formas de enseñarla y aprenderla. Ambos puntos de vista son muy interesantes y es la razón por la que se investiga en cada uno de ellos.

El campo de la educación en la geometría, y en especial, la geometría espacial se avanza debido a las herramientas que se desarrollan día a día y a sus características que lo hacen atractivo visualmente para el alumnado. Otro aspecto a tener en cuenta, es la facilidad para que el alumnado trabaje manualmente con piezas y figuras para estudiar sus características, además de las numerosas aplicaciones que ayudan con la visión espacial.

A continuación, se mostrarán artículos que ayudarán a crear la Unidad Didáctica, ya que dicha Unidad tendrá en cuenta la información relativa a los artículos y así facilitar al alumnado con su desarrollo con respecto al tema.

Existe multitud de artículos que tratan la posibilidad de que los alumnos trabajen con materiales constructores o contruidos como el papel para realizar poliedros o piezas ya construidas, de tal manera, esta metodología ayudará en el aprendizaje de los conceptos geométricos.

El uso de la papiroflexia como combinación entre investigación-acción es una de las estrategias metodológicas más trabajadas por la contribución al desarrollo de las habilidades de los discentes de una manera atractiva y amena para ellos **Fonseca-Castro (2019)**.

La manipulación por parte del alumnado es necesaria siempre que sea basada en la exploración e investigación como así nos indica **Barrantes-López y Balletbo-Fernández (2012)**. Además, el mismo artículo habla de la posibilidad de aprender por parte del alumnado mediante el uso de las tecnologías presentes y con diferentes actividades y experiencias para enriquecer los contenidos de la unidad.

Esta posibilidad, también se ve reflejada en la manipulación mediante el uso de tecnologías y de softwares, en concreto también se encuentra en artículos de investigación debido a su importancia, como así lo muestra **Sousa, Azevedo y Alves (2021)**, en concreto trata el uso de GeoGebra para facilitar la transposición didáctica del tema de sólidos de revolución para estudiantes de un rango de 15 a 17 años. El apoyo visual permite una mejor percepción geométrica tanto en los sólidos de revolución como en prismas o pirámides.

7.3. Metodologías y previsión de obstáculos

Tras analizar la información obtenida en los puntos previos del Informe Pisa y los Artículos y Reseñas, se ha planteado una metodología con unos puntos iniciales que se mostrarán plasmados en la Unidad Didáctica:

- Evaluación inicial: Es importante conocer el nivel y los conocimientos previos del alumnado antes de empezar con el tema de Geometría en el Espacio para adaptar la Unidad Didáctica si es necesario.
- Utilización de las TIC para apoyar el aprendizaje de los discentes.
- Utilización de recursos físicos manipulables
 - En papel para realizar ejercicios de papiroflexia.
 - En madera como muestras de diferentes cuerpos geométricos.
 - Cuerpos geométricos, simples o compuestos, presentes en la vida cotidiana.

Estos puntos estarán sujetos a posibles adaptaciones, dependiendo del desarrollo de los alumnos y de su aprendizaje, con ello una clase general puede ser la siguiente:

- I) Presentación del punto a tratar en dicha clase.
- II) Análisis interactivo con los alumnos del cuerpo geométrico presentado. Este análisis se realizaría con los recursos que el profesor considere óptimos.
- III) Realización de ejercicios para afianzar los conocimientos.
- IV) Resolución de posibles dudas.
- V) Para finalizar la clase, el profesor dará unas posibles pautas para que los alumnos tengan materia para trabajar autónomamente.

El desarrollo de estos puntos previos en la clase, permitirán al alumnado un mayor aprendizaje, de una manera completa. Sin embargo, existe la posibilidad de encontrar obstáculos en las sesiones que hay que tener en cuenta.

En primer lugar, la diversidad presente en la clase puede determinar el ritmo de cualquier Unidad Didáctica.

En el caso de enfocarse en la Unidad Didáctica descrita en este estudio, la geometría, y en especial la presente en cuerpos con las tres dimensiones, tiene un obstáculo principal, como es la falta de visión espacial por parte del alumnado. Este problema puede paliarse con el uso de material educativo (como cuerpos geométricos creados con dicha finalidad), el uso de la papiroflexia y diversos softwares como GeoGebra.

Otro obstáculo, es la heterogeneidad del grupo estudiantil. Cada alumno presenta unas características individuales distintas y un ritmo de aprendizaje diferente. Relacionando estas diferencias entre alumnos y la necesidad de desarrollar cierta visión espacial, puede provocar en los/as alumnos/as con esta cualidad no encuentren motivantes las sesiones previstas y, en cambio, otros alumnos, al no ser capaces de crear una imagen mental de la teoría o los ejercicios, necesiten más tiempo para trabajar los contenidos. Una posible solución será ajustar las sesiones y el ritmo buscando evitar ambas situaciones.

Por último, la atención a la diversidad puede provocar que algunas o todas las sesiones deban sufrir modificaciones adaptándolas a las necesidades individuales.

8. Proyección didáctica: Elaboración de una Unidad Didáctica

8.1. Título

La Unidad Didáctica que se va a desarrollar se ha nombrado como “Geometría en el espacio, manipulación como método de aprendizaje”, incluida en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso de 3º de E.S.O.

8.2. Justificación

Existen diferentes puntos que permiten analizar el contexto y la justificación para entender la importancia de la Unidad Didáctica presentada previamente. Para ello se van a numerar y desarrollar a continuación:

8.2.1. Justificación curricular

Tras analizar el currículo presente en los libros de texto más importantes de la asignatura y los contenidos del Real Decreto, se puede ver claramente como la geometría ocupa un amplio sector en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O.

En concreto, la geometría espacial se muestra como una sección gruesa en los libros, llegando a ocupar un par de temas debido a su importancia. Este tema, se presenta enlazado con la geometría en el plano porque, además de su propio objetivo de aprendizaje en este campo de la geometría, sirve como base para la Unidad Didáctica presente.

8.2.2. Justificación social y/o profesional

Los poliedros y cuerpos geométricos están continuamente presentes en la vida cotidiana en cualquier ámbito ya sean de manera individual o compuesta.

Los diseños realizados en las industrias buscan cumplir con, al menos su función original, y para ello, dichos diseños están basados en los principales poliedros debido a sus conocidas características, y permitiendo tener una primera idea de los cuerpos geométricos provenientes de los principales poliedros modificados.

Al ser humano le atraen las formas geométricas sencillas debido a la armonía que producen. Por ello, se utilizan para utensilios típicos, que no necesitan un diseño específico, formas geométricas simples, tales como cilindros o prismas principalmente.

8.2.3. Justificación interna

El conocimiento y aprendizaje en el ámbito de la geometría para los estudiantes es clave debido a su constante utilidad en la vida diaria.

Durante la etapa académica, los discentes deben comprender los conceptos básicos presentes en la geometría, ya que estos conocimientos están presentes a partir de 2º E.S.O. y en algunos casos desde 1º E.S.O. y continúan hasta bachillerato.

Además de la asignatura de matemáticas, la geometría se puede encontrar en otras materias como física o tecnología, por lo que su importancia es aún mayor.

Como conclusión, se puede determinar que la geometría es vital tanto para la etapa estudiantil como para la propia vida diaria.

8.2.4. Justificación cultural

En el ámbito cultural se puede apreciar claramente la influencia de la geometría en el arte, tanto en dos dimensiones como con figuras geométricas.

Pintura:

En el campo de la pintura, por su propio significado, muestra la geometría con un mayor o menor grado de complejidad y aun siendo, en su inmensa mayoría en lienzos en dos dimensiones se aprecian figuras tanto en dos como en tres dimensiones.

Cabe destacar, que existen corrientes como el cubismo, que se enfocan en las figuras geométricas y en España tenemos un gran referente como Pablo Picasso (Ilustración 14).



Ilustración 14. Guernica. Pablo Picasso. Fuente: Google.

Escultura:

Lógicamente, las esculturas están completamente relacionadas con la geometría debido a que esta rama cultural está basada en las formas geométricas (Ilustración 15).



Ilustración 15. Peine del viento. Eduardo Chillida. Fuente: Wikipedia.

Arquitectura:

Este campo cultural, en primer lugar, es atemporal debido a las manifestaciones existentes (como por ejemplo la pirámide de Keops) (Ilustración 16) y, además, es el que más representaciones muestra debido a que tanto los elementos que forman las estructuras internas como las propias construcciones actuales tienen propiedades geométricas (Ilustración 17).



Ilustración 16. Pirámide de Keops. Fuente Wikipedia.

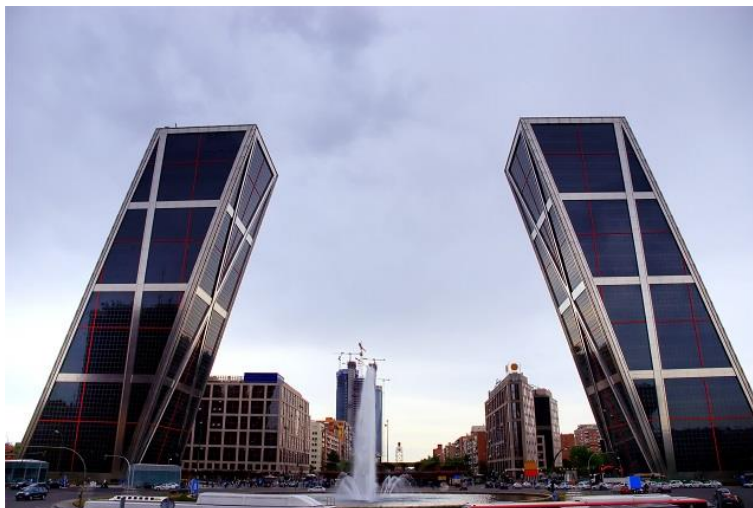


Ilustración 17. Puerta de Europa. Fuente: Google.

Estos puntos muestran un resumen de los aspectos culturales que se muestran relacionados con la geometría y como trascienden a través de los siglos.

8.3. Contextualización del centro y del aula

El centro donde se ha realizado el estudio ha sido el I.E.S. Az-Zait en Jaén y un gran porcentaje de la información se ha obtenido de la página web del instituto, la cual se indica a continuación (<https://www.iesaz-zait.es>), el borrador del proyecto educativo del centro y de la propia experiencia en las instalaciones.

El I.E.S. Az-Zait se sitúa en Jaén, en la Avenida Arjona número 3, en la zona oeste de Jaén. Para ofrecer una vista situacional, se muestran a continuación imágenes que permiten apreciar de una manera óptima la localización y estructura (ilustraciones 18-20):



Ilustración 18. Localización I.E.S. Az-Zait. Fuente: Google Maps

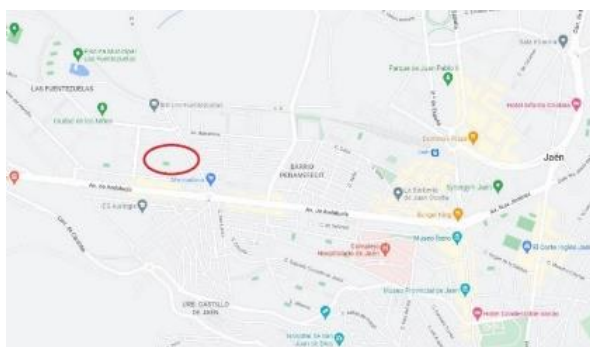


Ilustración 19. Localización mapa I.E.S. Az-Zait: Fuente Google Maps.



Ilustración 20. Fachada I.E.S. Az-Zait. Elaboración propia.

En el centro se imparten los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), con la correspondiente aula para cada clase. Además, el centro presenta para los alumnos un patio, aula de tecnológica, el “aula del futuro” que presenta diferentes espacios para trabajar con material informático, un invernadero donde los alumnos desarrollan diferentes proyectos, un laboratorio de ciencias, un aula específica de TIC-música, sala de usos múltiples y diferentes espacios donde pueden desarrollar sus capacidades.

En el instituto, el número de alumnos por aula se encuentra entre 20 y 30 personas por lo general y, en concreto la clase de 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, a la cual ha ido dirigida la Unidad Didáctica cuenta con 23 discentes, de los cuales 10 son chicas.

El grupo es heterogéneo en el ritmo de aprendizaje debido a la diversidad que muestra y las circunstancias de los discentes, como por ejemplo la pandemia provocada por el virus Covid-19, siendo este ritmo medio-bajo por lo general.

Dentro del grupo, existe un subgrupo que destaca en el nivel cognitivo mostrando su capacidad para entender y comprender las explicaciones y, a su vez, desarrollar los contenidos que se presentan en cada bloque. Sin embargo, presentan un trabajo autónomo muy bajo.

Existe un porcentaje elevado de alumnos/as que usan clases de apoyo externas al centro (8 de 23 alumnos/as) para la asignatura de matemáticas. Este dato muestra que un sector de los estudiantes busca ayuda para reforzar su trabajo autónomo.

Por último, pero con una importancia clave, el grupo de clase no han dado geometría en el espacio en 1º o 2º de E.S.O. como consecuencia de la pandemia de la COVID-19, al mismo tiempo que muestran dificultades en la geometría en dos dimensiones estudiada en el presente curso.

Siguiendo el Proyecto Educativo del I.E.S. Az-Zait, nos informa que en el centro se encuentran 24 docentes, 4 de ellos son profesores de la especialidad de matemáticas.

8.4. Objetivos

8.4.1. Objetivos generales de etapa

Con base del artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, durante la etapa de la ESO, se busca que el alumnado pueda desarrollar unas capacidades y un compromiso:

1.- Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

2.- Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

3.- Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

4.- Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

5.- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

6.- Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

7.- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

8.- Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

9.- Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

10.- Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

11.- Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

12.- Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

8.4.2. Objetivos del área de matemáticas

En Andalucía (<https://www.juntadeandalucia.es>), en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º de E.S.O. según la Orden del 14 de julio de 2016, en el currículo correspondiente a la E.S.O. se desarrollan como objetivos principales los siguientes:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

8.4.3. Relación entre los objetivos generales de etapa y los objetivos generales del área de matemáticas

Los objetivos mostrados en los 2 puntos previos, corresponden a los de la etapa completa de la Enseñanza Secundaria Obligatoria según el Real Decreto 1105/2014 y para el curso elegido según la Junta de Andalucía, respectivamente.

Ambos se asemejan, y comparten ciertos elementos clave debido al carácter enfocado en el aprendizaje y desarrollo del alumnado, sin embargo, no son idénticos ya que, los objetivos generales de etapa son más amplios tanto en el propio periodo como en las asignaturas.

En la tabla 23 se puede observar la comparación entre objetivos, indicando los que coinciden:

		Objetivos generales del área de matemáticas										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Objetivos generales de etapa	1											X
	2									X		
	3											X
	4											X
	5				X		X		X			
	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	7	X	X					X	X		X	
	8	X										
	9											
	10											X
	11											
	12					X						X

Tabla 23. Objetivos del área de matemáticas frente a los Objetivos de etapa. Elaboración propia.

8.4.4. Objetivos concretos de la unidad

La unidad sobre geometría espacial, tiene sus propios objetivos que el alumnado deberá alcanzar con el docente trabajando como guía para ello. Estos objetivos tendrán que desarrollarse en las clases y finalmente en una prueba escrita final. Estos objetivos son los siguientes:

1. Identificar los elementos básicos presentes en la geometría del espacio.
2. Comprender las diferencias entre los poliedros y los cuerpos redondos.
3. Calcular el área y el volumen de poliedros y cuerpos redondos, deduciendo la manera óptima para obtener dichos cálculos.
4. Resolver problemas de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.
5. Identificar simetrías en el espacio.
6. Identificar ejes de giro y las figuras geométricas formadas por diferentes formas geométricas en el plano a partir del giro alrededor del eje.
7. Entender el globo terráqueo y las coordenadas geográficas, además de los diferentes parámetros pertinentes como la latitud o longitud, por ejemplo.
8. Saber utilizar los conocimientos adquiridos en los problemas de la vida cotidiana y saber darles solución.
9. Fomentar el uso de las TIC, para investigar y proporcionar al alumnado un mayor número de herramientas, tanto para la asignatura como para la vida fuera de los centros educativos.

10. Reflexionar y entender sobre la posible solución de un problema y si presenta coherencia con una actitud crítica.

8.5. Competencias clave

Las competencias claves ya han sido definidas en el punto 5.1. *Análisis del currículo normativo*, siendo estas las siguiente:

Comunicación lingüística	CCL
Competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología	CMCT
Competencia digital	CD
Aprender a aprender	CPAA
Competencias sociales y cívicas	CSC
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor	SIE
Conciencia y expresiones culturales	CEC

Tabla 24. Competencias clave. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Para ayudar al alumnado a adquirir las competencias previamente mostradas, se pueden diseñar actividades integradas enfocadas en el desarrollo de dichas competencias.

8.6. Contenidos

Como se vio previamente, los contenidos están determinados por el Real Decreto 1105/2014, siendo los siguientes:

Bloque 3. Geometría
Contenidos
Geometría del plano. Lugar geométrico. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 25. Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º E.S.O. Contenidos.

Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Sin embargo, en la Unidad Didáctica que se está describiendo solo se tratarán los cuerpos geométricos y por lo tanto sus contenidos se enfocarán en este tema. Los contenidos que tratará dicha Unidad Didáctica serán los siguientes:

Bloque 3. Geometría Cuerpos geométricos y poliedros.
Contenidos presentes en la Unidad Didáctica
Identificación de elementos básicos. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. Cálculo de áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos redondos. Identificación de simetrías y ejes de giro. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. Aplicación a la resolución de problemas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 26. Contenidos presentes en la Unidad Didáctica.

Cabe destacar, que estos contenidos están íntimamente relacionados tanto con los objetivos de la etapa, objetivos de la unidad y los contenidos del Real Decreto, siempre teniendo en cuenta, además, el Informe PISA y los artículos estudiados.

8.7. Metodología

Para empezar, es clave determinar que es la metodología y en que consiste, y se puede definir como la ciencia que investiga el método y el conjunto de herramientas utilizadas para trabajar con los/las alumnos/as.

Uno de los puntos principales en cualquier Unidad Didáctica es la metodología debido a que el método de enseñanza por parte del docente es un pilar básico para el aprendizaje del alumnado.

La metodología consiste tanto en las explicaciones propias del profesor, el desarrollo de la clase como en el material (físico o informático) y la manera de darlo para que los alumnos puedan realizar un trabajo autónomo que satisfaga sus necesidades estudiantiles.

Por todo ello, siempre es necesario buscar la metodología óptima para cada Unidad Didáctica, utilizando los recursos disponibles y adaptándose a cada clase.

Las principales características que se buscan en la metodología son:

- Uso de las tecnologías como herramienta o ayuda para la visualización y la investigación.
- La manipulación de objetos es fundamental con objetos presentes en la vida cotidiana para así los discentes puedan apreciar la geometría también fuera del centro educativo.
- Las sesiones estarán enfocadas en plantear y desarrollar un apartado del tema, realizando un breve repaso anterior para así entrar al apartado con la mente centrada y promoviendo una enseñanza continua.

- Las clases tendrán una duración de 1 hora cada una y, como mínimo, todas tendrán una primera parte de repaso y resolución de actividades (a excepción de la primera clase), una parte central, en la cual se desarrollarán los contenidos principalmente y una parte final para resolver dudas y guiar el trabajo autónomo a realizar por los alumnos.
- Mediante plataformas informáticas, los alumnos tendrán material adicional como ejercicios con la solución final, ideas para que puedan investigar y material para ampliar conocimientos si así lo desean.

8.8. Actividades y recursos

Las actividades y recursos presentes en una Unidad Didáctica buscan, como mínimo, un aprendizaje correcto por parte del alumnado, proporcionando ejercicios y material de estudio acorde al nivel del tema.

En los libros de texto podemos encontrar actividades para el nivel mostrado en la teoría del propio libro, siendo estas muy útiles, sin embargo, un aporte específico a la clase por parte del profesor, puede proporcionar un extra al alumnado ya que son actividades enfocadas al grupo estudiantil.

Las actividades pueden diferenciarse según el objetivo, y estas pueden ser las siguientes:

8.8.1. Actividades y problemas de desarrollo

Estas actividades dan al alumnado la posibilidad de realizar ejercicios adicionales y practicar libremente, teniendo la solución del problema marcada, y si fuese necesario el desarrollo para llegar a dicha solución.

Estos ejercicios no tienen por qué ser valorables, pero darán la oportunidad a los discentes que lo deseen de practicar y afianzar conocimientos. Serán mostrados en el Anexo I.

8.8.2. Actividades para fomentar el uso de las TIC

Las actividades del ámbito TIC se diseñan principalmente como investigación para el alumnado y como herramienta para plantearse sus propias dificultades y así tener otro camino para resolverlas.

Existe multitud de páginas web que permiten investigar y visualizar diferentes poliedros. Para las sesiones se utilizarán principalmente *Polyhedra Viewer* (<https://polyhedra.tessera.li>) y *Mathigon* (<https://mathigon.org/polypad>).

Además, se propondrá al alumnado el uso de la aplicación GeoGebra para experimentar con los poliedros y cuerpos redondos, como por ejemplo con la lección de *Daniel Mentrard* para esferas:

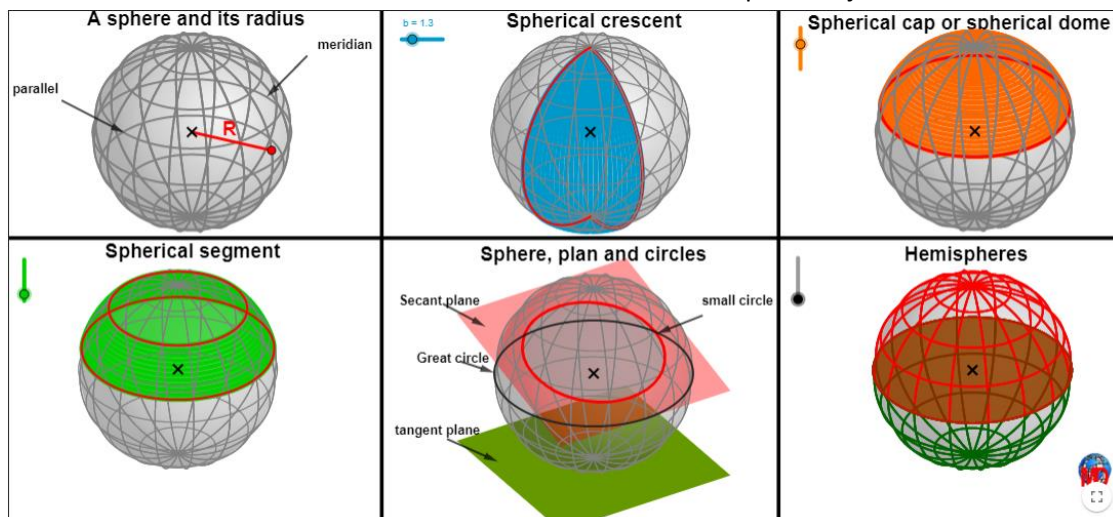


Ilustración 21. Estudio de esferas en GeoGebra. Fuente: (Mentrard, s.f.)

8.8.3. Actividades IBL

Las actividades IBL (*Inquiry Based Learning*) buscan mediante el trabajo e investigación de los estudiantes, impulsar su aprendizaje. Existen 4 cuestiones claves para los docentes en este modelo de aprendizaje que son los siguientes:

1. Exploración: Algunas de las situaciones para el aprendizaje está enfocado a la investigación y resolución de problemas.
2. Reflexión: Analizar el potencial de cada situación puede determinar el nivel de la competencia matemática.
3. Cuestionar: Las prácticas docentes deben ser cuestionadas y enriquecerlas con otro tipo de situaciones.
4. Profundización: El cambio de rol profesional y en las competencias docentes necesarias.

Para esta Unidad Didáctica se ha preparado una actividad que se presentará en la sesión 2. Esta actividad se ha creado con el fin de que los alumnos y alumnas investiguen como resolver un pequeño juego con cubos de Rubik o dados con una representación numérica. De tal manera, trabajarán el desarrollo de los poliedros en 3 puntos principalmente:

- a) No existe un único desarrollo para cada poliedro.
- b) Las caras concurrentes en el poliedro, deberán serlo también en el desarrollo.
- c) La posición de las caras en el desarrollo determina la posibilidad de crear o no el poliedro buscado.

Se presentará como una actividad donde solamente tendrán como herramientas los cubos mencionados previamente, sin embargo, con su capacidad de investigación y

de intuición podrán realizar dicha tarea y trabajar el desarrollo de poliedros, en concreto de hexaedros.

La actividad se encuentra descrita en el Anexo VII. En la primera parte, se estudiará la concordancia entre las caras concurrentes y en la segunda, la posición entre las caras determina si es posible o no la construcción del poliedro.

Durante la realización del juego, el docente no informará sobre los posibles hallazgos que faciliten el trabajo, siendo los propios discentes los que vayan realizando dichos descubrimientos y debatiendo entre sí sobre ellos como, por ejemplo, que existen parejas de colores o números (dependiendo de la actividad) que no pueden estar próximas.

Esta actividad presenta la ventaja de ser adaptable a otras situaciones que requieran atención a la diversidad, como por ejemplo alumnos/as de lengua materna extranjera, ya que busca una menor explicación y una mayor manipulación de los poliedros por parte de los estudiantes.

8.8.4. Recursos

Los diferentes recursos que se puede utilizar en las aulas, tienen como objetivo facilitar, apoyar y motivar el desarrollo y aprendizaje del alumnado de una forma óptima para su crecimiento. Se busca que las clases sean amenas, pero donde los alumnos tengan la capacidad de trabajar las competencias claves.

Los alumnos y alumnas, en las clases de matemáticas contarán con los recursos mostrados en la siguiente tabla, en la que se incluyen los propios del centro I.E.S. Az-Zait, los que puede aportar el profesor y con los que cuentan los alumnos:

Tipo de Recurso	Recurso
Específico	- Libro de texto: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º E.S.O. SM. ISBN 978-84-1318-508-8 - Pizarra
Impreso	- Libreta del propio estudiante - Desarrollos de los poliedros regulares (Anexo I)
Audiovisual	- Proyector. La visualización de poliedros mediante el proyector facilita la visión espacial de los elementos. - Monitor Interactivo <i>SMART Board MX165 de 65"</i>
Informático	- Ordenadores - Softwares - o Geogebra - o polyhedra tessera - o Mathigon (Sección Sólidos 3D)
Tecnológico	Calculadora científica
Ambiental	Aula

	• Aula del futuro
Humano/Personal	• Personal docente, encargado de dirigir y guiar las sesiones. • Alumnos/as • Personal del centro

Tabla 27. Recursos.

8.9. Atención a la diversidad

La atención a la diversidad es un aspecto con una gran importancia debido a las diferentes características que presenta el alumnado, por ello, se deben de tomar medidas para adaptar cualquier Unidad Didáctica para que llegue óptimamente a los discentes a pesar de esta diversidad.

Otro punto clave es el nivel inicial que pueden presentar los alumnos, este nivel puede ser superior o inferior al esperado debido a las circunstancias que se presentan en cada curso o clase.

Por estos motivos, se recomienda empezar con una primera sesión donde se pueda examinar el nivel de los discentes a la vez que se presenta e introduce el tema a tratar. Tras ver el nivel inicial o las posibles dificultades que se vayan a presentar, hay que adaptar las sesiones y metodología para que los alumnos puedan desarrollar el contenido de la mejor manera posible.

Tomando la clase de referencia de 3º de E.S.O. del I.E.S. Az-Zait para la cual ha sido desarrollada la Unidad Didáctica, se pueden apreciar diferentes características en el alumnado, siendo una clase de 23 alumnos. En dicha clase se encuentran dificultades como:

- Dislexia.
- Daltonismo.
- Síndrome de Asperger y adicción a nuevas tecnologías.
- 2 alumnos con la asignatura de matemáticas suspensa de 2º E.S.O.
- 1 alumno de incorporación tardía
- 1 alumno repetidor procedente de las matemáticas aplicadas.

8.10. Temporalización

La Unidad Didáctica descrita en este Trabajo Fin de Máster, plantea una temporalización de 12 sesiones de 1 hora cada una y se describirán posteriormente cada una de ellas. Además, se indica que la última sesión tendrá lugar un examen.

Cabe destacar, que todas las sesiones tendrán como sustentación el Informe PISA, los artículos de investigación estudiados, la metodología descrita y se atenderá a los posibles cambios debido a la diversidad en el aula.

A lo largo de las sesiones se trabajará y se dispondrá de una serie de ejercicios para afianzar conocimientos siempre que sea necesario y así lo estime el docente, dependiendo del progreso de la Unidad Didáctica (Anexo II).

Para desarrollar los contenidos, criterios de evaluación y objetivos, se utilizará la numeración mostrada en las tablas del punto 5.1. *Análisis del currículo normativo.*

Sesión 1: Introducción
Contenidos: CO.1, CO.5.
Criterios de evaluación: CE.1.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.4, Ob.5, Ob.6.
Competencias claves: CCL, CD, CPAA.
Desarrollo: ○ La clase comenzará relacionando la geometría en 2 dimensiones vista en temas anteriores con la introducción a la geometría en 3 dimensiones. Para ello, se expondrá en la pizarra un cuadrado y se les preguntará a los alumnos con que cuerpo geométrico en 3 dimensiones podemos asemejarlo, siendo guiados por el profesor si es necesario, se llegará al hexaedro. (10 minutos). ○ Se le mostrará al alumnado las aristas, caras y vértices del hexaedro, explicando sus características, posteriormente se realizará de manera similar para un tetraedro. (10 minutos). ○ Explicación de la clasificación de convexidad y regularidad en poliedros y realización de ejemplos. (15 minutos). ○ Como actividad para trabajar con los poliedros, a los discentes se les entregará una ficha (Anexo IV), la cual incluye poliedros numerados. El estudio consistirá en la creación de fichas con la imagen recortada del poliedro y a su lado escribirán el número de caras, vértices y aristas, además del nombre de los polígonos que lo forman y la clasificación dependiendo de su regularidad y convexidad, lo realizarán guiados por el profesor, obteniendo como resultado fichas como la mostrada de ejemplo en el (Anexo V). Se buscará realizar en clase los 4 primeros apartados. (20 minutos). ○ En esta sesión se solicitará como trabajo autónomo realizar la ficha del apartado E y F, se preguntará si existen dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 28. Sesión 1. Elaboración propia.

Sesión 2: Poliedros y sólidos platónicos.
Contenidos: CO.1, CO.5, CO.8.
Criterios de evaluación: CE.1.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.4, Ob.5, Ob.6.
Competencias claves: CCL, CD, CPAA.

Desarrollo:

- La clase comenzará corrigiendo los ejercicios y preguntando si tienen dudas, posteriormente se continuará realizando la tarea. Para el caso del icosaedro truncado, el docente mostrará un balón de fútbol cuyas caras exteriores estará formado por pentágonos y hexágonos para que manipulen y vean la utilidad de la geometría.
Se buscará hacer reflexionar a los/las alumnos/as con cuestiones relativas a las fichas realizadas por ellos mismos. Una de las preguntas claves será por el número de poliedros regulares que han obtenido y se les indicará la existencia de únicamente 5, denominados sólidos platónicos. (20 minutos).
- A continuación, se hará un breve inciso para explicar el significado de las palabras “poliedro”, “tetraedro”, “hexaedro”, “octaedro”, “dodecaedro” e “icosaedro”. (5 minutos).
- En este momento, utilizando los ordenadores del centro, se comenzará la actividad IBL (Anexo VII) de desarrollos geométricos y su variante por temas de diversidad (Anexo VII-b). Para ello, el docente les dará una breve introducción y comenzará realizando los 2 primeros apartados para que vean el mecanismo. A partir de ahí, utilizando la intuición y su propia investigación podrán realizar las actividades. El/La profesor/a guiará la actividad y resolverá las posibles dudas que tengan los estudiantes (30 minutos).
- Indicación del trabajo autónomo a realizar (finalizar las 2 actividades de la sesión), dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 29. Sesión 2. Elaboración propia.

Sesión 3: Prismas (Volúmenes)
Contenidos: CO.1, CO.5.
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8.
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.

Desarrollo:

- La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos).
- En primer lugar, se definirá que es un prisma y se repasarán los elementos de esta figura geométrica y como muestra se utilizarían prismas rectos y oblicuos provenientes del juego físico mostrado en el (Anexo VI). (15 minutos).
- En este momento se introducirá el concepto de volumen de un prisma y se les indicaría que: $V_{prisma} = A_{base} \cdot h$, indicando el significado de cada término. (5 minutos).
- La segunda mitad de la clase consistiría en la realización de ejercicios de cálculo de volúmenes. El primer ejercicio lo haría el profesor detallando el proceso y a partir de ahí se mandarían ejercicios con un nivel creciente de dificultad, pero comenzando desde un nivel básico e inicial. En el caso de no terminar los ejercicios en clase, se solicitarán como trabajo autónomo. (30 minutos).
- Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 30. Sesión 3. Elaboración propia.

Sesión 4: Prismas (Áreas)	
Contenidos: CO.1, CO.5, CO.8.	
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4.	
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8	
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.	
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ Esta sesión será la introducción en el estudio de áreas de figuras geométricas. Para ello, el docente explicará cómo se obtiene el área de un prisma. (10 minutos). ○ También se explicará cómo obtener las diagonales de un ortoedro, buscando y animando a los/as alumnos/as a que lleguen a la solución con sus conocimientos actuales. (10 minutos) ○ La segunda mitad de la clase consistiría en la realización de ejercicios de cálculo de áreas. El primer ejercicio lo haría el profesor detallando el proceso y a partir de ahí se mandarían ejercicios con un nivel creciente de dificultad, pero comenzando desde un nivel básico e inicial. En el caso de no terminar los ejercicios en clase, se solicitarán como trabajo autónomo. (20 minutos). ○ Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).	

Tabla 31. Sesión 4. Elaboración propia.

Sesión 5: Pirámides (Volúmenes)	
Contenidos: CO.1, CO.5.	
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4.	
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8	
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.	
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ Se utilizará la pizarra táctil para mostrar pirámides y se repartirán entre el alumnado pirámides del juego de piezas del (Anexo VI). Se explicarán cada uno de los elementos que componen una pirámide, así como el concepto de regularidad y las diferencias entre una pirámide recta y una pirámide oblicua, relacionando los conceptos con los vistos de los prismas. Se solicitará al alumnado que dejen un hueco de unos 10 centímetros en el cuaderno para una actividad posterior. (15 minutos). ○ A partir de aquí, se indicará que $V_{Pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$. El profesor o profesora, realizaría un ejemplo en la pizarra simple para los estudiantes. (10 minutos). ○ Para practicar, se propondrán ejercicios a los/as alumnos/as, pudiendo preguntar al docente si encuentran dudas al realizarlos. El nivel de dificultad de los ejercicios será creciente. (25 minutos). ○ Indicación del trabajo autónomo a realizar: En el hueco creado en la primera mitad de la sesión, se deberá dibujar una pirámide con los elementos presentes en el libro de texto (Anexo II). (2 minutos). ○ Dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (3 minutos).	

Tabla 32. Sesión 5. Elaboración propia.

Sesión 6: Pirámides (Áreas)	
Contenidos: CO.1, CO.5, CO.8.	
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4.	
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8	
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.	

Desarrollo:

- La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos).
- A continuación, se buscará que el alumnado entienda como obtener el área de cada una de las caras y el área total de la pirámide y para ello, se realizaría con la guía del profesor o profesora. Este proceso se realizaría con la ayuda de la pizarra táctil y una pirámide de la aplicación www.mathigon.org. (15 minutos).
- El docente realizaría paso a paso un ejemplo para ayudar a estudiantes y lo tengan presente. (10 minutos)
- A continuación, se procedería a la realización por parte de los alumnos de ejercicios de un nivel creciente en el cálculo de áreas de pirámides. (25 minutos).
- Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 33. Sesión 6. Elaboración propia.

Sesión 7: Troncos de pirámide
Contenidos: CO.1, CO.5.
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ Con un juego físico de piezas geométricas, se mostrará al alumnado una pirámide a la que se secciona la parte superior, creando así un tronco de pirámide. A continuación, se presentaría el cuerpo geométrico y se trabajaría únicamente con troncos de pirámides rectas. En este punto, los alumnos deberían determinar el número de aristas, vértices y caras de la figura. (20 minutos). ○ Aquí, sin hacer cálculos excesivamente profundos, los alumnos deberán entender y deducir como se obtendrían las áreas de cada una de las caras y el área total y el volumen de dicha figura. (30 minutos). ○ Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 34. Sesión 7. Elaboración propia.

Sesión 8: Conos
Contenidos: CO.1, CO.4, CO.5.
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4, CE.5.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8

Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ En primer lugar, se definirá un punto y un eje de giro para introducir los cuerpos redondos. De esta manera obtendríamos una circunferencia, a partir de ahí se utilizarían segmentos para formar cilindros, conos y esferas. (15 minutos). ○ En este punto se seleccionaría el cono y se estudiarían sus propiedades, características y desarrollo. (15 minutos). ○ A continuación, se dará al alumnado las fórmulas siguientes: $V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A_{base} \quad \text{y} \quad A_{total} = \pi \cdot r \cdot (g + r).$ Para terminar, se enunciarán problemas de áreas y volúmenes para que los estudiantes puedan practicar con la ayuda del profesor o profesora. ○ Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 35. Sesión 8. Elaboración propia.

Sesión 9: Troncos de cono
Contenidos: CO.1, CO.3, CO.4, CO.5.
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.3, CE.4, CE.5.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ Con un juego físico de piezas geométricas, se mostrará al alumnado un cono a la que se secciona la parte superior, creando así un tronco de cono. A continuación, se presentaría el cuerpo geométrico y se trabajaría únicamente con troncos de cono. (20 minutos). ○ Los alumnos, en este punto, trabajarán para deducir las caras e identificar el área total y sabiendo calcular el volumen del cono, que determinen la mejor manera de obtener el volumen del tronco del cono. (20 minutos). ○ Realización de un ejercicio a modo de ejemplo. (10 minutos) ○ Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 36. Sesión 9. Elaboración propia.

Sesión 10: Cilindros y esferas
Contenidos: CO.1, CO.4, CO.5.
Criterios de evaluación: CE.1, CE.2, CE.4, CE.5.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8

Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ El desarrollo de la sesión comenzará presentando y repartiendo prismas y cilindros al alumnado para que vean las diferencias y similitudes entre las figuras. (5 minutos). ○ Tras este proceso, se mostraría a los/las alumnos/as el desarrollo del cilindro. (5 minutos). ○ A continuación, con el estudio de esferas en GeoGebra. Fuente: (<i>Mentrard, s.f.</i>), se enseñaría diferentes características de las esferas. (10 minutos). ○ La segunda mitad de la clase, se daría a los discentes el volumen del cilindro y de la esfera, así como su área. Para ello, se identificarían los parámetros del cilindro y de la esfera. (15 minutos). ○ Para terminar, se realizarían ejercicios para afianzar el aprendizaje. (15 minutos). ○ Para terminar la clase, se propondría al alumnado un ejercicio de una esfera y un cilindro inscritos en un cubo, donde el único valor disponible es el de la diagonal del hexaedro. (15 minutos). ○ Indicación del trabajo autónomo a realizar, dudas y realización de parte del trabajo si corresponde. (5 minutos).

Tabla 37. Sesión 10. Elaboración propia.

Sesión 11: El globo terráqueo. Coordenadas geográficas.
Contenidos: CO.4, CO.7, CO.8, CO.9
Criterios de evaluación: CE.3, CE.6.
Objetivos del área de matemáticas: Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8
Competencias claves: CCL, CMCT, CD, CPAA.
Desarrollo: ○ La clase comenzará solucionando dudas existentes de los alumnos y corrigiendo el trabajo autónomo. (5 minutos). ○ Para comenzar con la sesión enfocada en el globo terráqueo, se les preguntará a los discentes sobre términos como latitud y longitud, el ecuador y el meridiano de Greenwich para ver que recuerdan y que así empiecen a relacionar términos. (10 minutos). ○ A partir de ahí, se explicarán los elementos geométricos de la esfera terrestre y se pondrá un ejercicio simple como ejemplo. (15 minutos). ○ En este punto se le preguntaría a las alumnas y alumnos si tienen dudas de la sesión (5 minutos). ○ La segunda mitad de la clase se enfocaría en un rápido repaso de lo estudiado en este tema, realizando un esquema en la pizarra los puntos tratados e invitando a los discentes a preguntar ya que sería la última clase antes del examen. (25 minutos).

Tabla 38. Sesión 11. Elaboración propia.

Sesión 12: Examen	
Contenidos:	CO.1, CO.3, CO.4, CO.5, CO.6.
Criterios de evaluación:	CE.1, CE.2, CE.4, CE.5.
Objetivos del área de matemáticas:	Ob.2, Ob.4, Ob.5, Ob.6, Ob.8
Competencias claves:	CCL, CMCT, CD, CPAA.
Desarrollo:	○ La sesión consistiría en la realización de una prueba escrita (mostrada en el Anexo IV). (60 minutos).

Tabla 39. Sesión 12. Elaboración propia.

8.11. Criterios de evaluación

La evaluación de los contenidos del Bloque 3 de Geometría y en concreto de la Unidad Didáctica de geometría espacial se regirá mediante los Criterios de Evaluación y los Estándares de aprendizaje evaluables del Real Decreto. Para ello, en las tablas 40-41, se van a mostrar, señalando en negrita los puntos clave donde se debe hacer hincapié en esta Unidad.

Bloque 3. Geometría
Criterios de evaluación
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

Tabla 40. Bloque 3. Geometría. Criterios de evaluación. Fuente: Real Decreto 1105/2014.

Bloque 3. Geometría
Estándares de aprendizaje evaluables
1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo Ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

Tabla 41. Bloque 3. Geometría. Estándares de Aprendizaje Evaluables. Fuente: Real Decreto 1105/2014.

Como se vio en apartados previos, las sesiones se basarán en los contenidos del Real Decreto de 1105/2014, siendo un punto clave en la evaluación durante dichas clases ya que, el alumnado trabajará el contenido y mediante la participación podrá comprobar su aprendizaje y su trabajo propio.

Como criterio de evaluación, se tendrá en cuenta la participación y el trabajo autónomo realizado por el alumno.

Para finalizar la Unidad Didáctica, se someterá a los discentes a una prueba escrita (Anexo III) en la última sesión, en el ejercicio aparecerán cuestiones donde se valorarán los criterios de evaluación mostrados anteriormente en la tabla 40.

Cabe decir que el resto de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque de geometría, se examinarán en el resto de temas del mismo bloque.

La participación y estudio diarios serán valorados positivamente y, además, se examinará el trabajo autónomo del alumno analizando su cuaderno para así ver su capacidad para sintetizar y comprender explicaciones.

La asignatura de 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas está dividida en 5 bloques, siendo la geometría el tercer bloque. La ponderación dependerá de los contenidos presentes en el Real Decreto y la geometría representaría el 20%. En la tabla 42 se presentarán los criterios de evaluación con su ponderación correspondiente.

Bloque 3. Geometría.					
Ponderación (20%)	Criterios de evaluación	Competencias claves	Objetivos de la unidad	Contenidos	Instrumentos
4%	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	CMCT.	Ob.1.	CO.1.	Prueba sobre contenidos. Producciones del alumno. Observación diaria
4%	2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	CMCT, CAA, CSC, CEC.	Ob.1, Ob.3, Ob.4, Ob.8 Ob.10	CO.1, CO.3, CO.5.	
3%	3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	CMCT, CAA.	Ob.6, Ob.7 Ob.8, Ob.9.	CO.1, CO.7, CO.8.	
3%	4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	CMCT, CAA, CSC, CEC.	Ob.1, Ob.8, Ob.9 Ob.10.	CO.4, CO.7.	
3%	5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	CMCT.	Ob.1, Ob.5, Ob.6.	CO.2, CO.4, CO.5.	
3%	6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	CMCT.	Ob.5, Ob.6, Ob.7.	CO.2, CO.4, CO.5.	

Tabla 42. Evaluación del bloque de geometría.

9. Conclusiones

Para la realización de este Trabajo Fin de Máster, se han estudiado y analizado todos los conocimientos relativos al Doble Máster Universitario en Matemáticas y Máster en Profesorado, teniendo siempre presente la legislación tanto andaluza como española.

Además, como objetivos se busca guiar a los discentes de una manera óptima y presentar una Unidad Didáctica acorde al nivel de 3º de E.S.O., atendiendo a las posibles dificultades relativas tanto a la atención a la diversidad necesaria del aula como a las condiciones externas que puedan aparecer.

Para ello, se construyó la fundamentación dividida en 3 partes, como son la curricular, epistemológica y didáctica que ha sido la base en cada punto de la Unidad Didáctica con el fin de conseguir los objetivos marcados previamente.

Durante la elaboración del TFM se llegaron las siguientes conclusiones:

- Para la elaboración de cualquier estudio pedagógico, es necesario realizar un análisis exhaustivo de la normativa curricular. Conocer y entender la normativa permitirá saber el marco legislativo y educativo actual.
- La historia presenta continuos avances en el ámbito de la geometría, desde diversos trabajos arqueológicos que han descubierto antigüedades milenarias hasta los actuales progresos, mostrando la posibilidad de una continua investigación y progreso en el campo de la geometría.
- La heterogeneidad del grupo de clase y sus posibles necesidades tanto dentro como fuera del aula, refuerza la idea y muestra la importancia de la atención a la diversidad.
- La geometría es un bloque importante en las matemáticas, presente en todos los cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Durante el 3º curso, las bases de la geometría espacial son mínimas y requieren clases iniciales que sean teóricas y prácticas desde un nivel básico para afianzar los conocimientos.
- El proceso educativo posee una importancia similar al contenido presente en la Unidad Didáctica, por este motivo es imprescindible buscar el método óptimo para motivar al alumnado y favorecer su aprendizaje.
- Por último, se ha buscado que los alumnos y las alumnas del centro desarrollen un punto de vista crítico, analizando las posibles soluciones de las cuestiones y problemas a tratar.

10. Referencias bibliográficas

10.1 Referencias normativas

Ministerio de Educación Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto de 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Publicado en Boletín Oficial del Estado nº 3, del 3 de enero de 2015. España*

Consejería de Educación. (2016) *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Publicado en Boletín oficial de la Junta de Andalucía nº 114, del 28 de julio de 2016. España.*

Ministerio de Educación Cultura y Deporte (2013). *Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa. Publicado en Boletín Oficial Del Estado nº 295, del 10 de diciembre de 2013. España*

Ministerio de Educación Cultura y Deporte (2015). *Orden ECD/65/2015 de 21 de enero por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Publicado en Boletín Oficial del Estado nº 25, del 29 de enero de 2015. España.*

Consejería de Educación. (2007). *Ley 17/2007 de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. Publicado en Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, nº 252, del 16 de diciembre de 2007. España.*

10.2 Referencias bibliográficas

Adam, P. P. (1969). *Curso de Geometría métrica - Tomo I - Fundamentos*. Madrid: Ediciones Gomez Puig.

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Pérez, A., y Serrano, E. (s.f.). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º E.S.O.* SM.

Alison, N. (2022). *polyhedra.tessera*. Obtenido de <https://polyhedra.tessera.li>

Alsina, C. (2010). *Las mil caras de la belleza geométrica*. RBA, coleccionables, S.A.

Alsina, C. (s.f.). *Las mil caras de la belleza geométrica*. 2010: RBA Coleccionables, S.A.

B. Leighton, W. (1989). *Geometría descriptiva*.

Barrantes-López y Balletbo-Fernández, M. (Julio de 2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Interna de Investigación en las Ciencias Sociales*, 25-42.

Benedicto, M. d., Rodríguez, M. B., y Fedriani, M. J. (s.f.). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º E.S.O.* OXFORD EDUCATION.

Comino, A., y Díaz, G. (2022). *GeoGebra*. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/XrcfnFaT>

Courant, R., y Robbins, H. (1955). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Fonseca-Castro, J. (2019). La papiroflexia como recurso didáctico en la enseñanza y. *Memorias del VII Encuentro Provincial de Educación en Matemáticas. Costa Rica*, 1-3.

- Geometra. (2022). *Geometra*. Obtenido de <https://geometra.es/solidos-arquimedianos/>
- I.E.S. Az-Zait. (2022). Obtenido de <https://www.iesaz-zait.es>
- Informe PISA. (2022). Obtenido de Programme for International Student Assessment: <https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa.html>
- Jiménez, J. C., González, M. J., Albero, I. G., y Cañas, R. C. (s.f.). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º E.S.O.* ANAYA.
- jmora7. (2022). *jmora7*. Obtenido de http://jmora7.com/applets_2019/eso-2/11-1-2-c/actividad.html
- Junta de Andalucía. (2022). *Junta de Andalucía*. Obtenido de <https://www.juntadeandalucia.es>
- Ley Orgánica 8/2013. (2013). Obtenido de www.boe.es
- Mentrard, D. (s.f.). *Spherical elements around the sphere*. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/jjs2vztx>
- OCDE. (2022). Obtenido de Organisation for Economic Co-operation and Development: <https://www.oecd.org/>
- Radmila, B. M., y José Antonio, G. O. (2002). *Geometría*.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. (2022). Obtenido de Diccionario de la lengua española, 23ª ed: <https://dle.rae.es/metodología>
- (2014). *Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre*.
- Soler, G. G. (1991). *Poliedros*. Síntesis.
- Sousa, R. T., Azevedo, I. F., y Alves, F. R. (2021). EL SOFTWARE GEOGEBRACOMO RECURSO PARA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓNEN GEOMETRÍA ESPACIAL. *Tecnología Educativa - Socializando tus experiencias*, 6(1).
- Wikipedia. (2022). *Wikipedia*. Obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/Poliedro>
- WordPress. (2022). *Geometría del espacio, superficies poliédricas*. Obtenido de <https://universogeometrico.wordpress.com/2020/09/02/conceptos-sobre-superficies-poliédricas/>

11. Anexos

11.1. Anexo I. Desarrollo de sólidos platónicos.

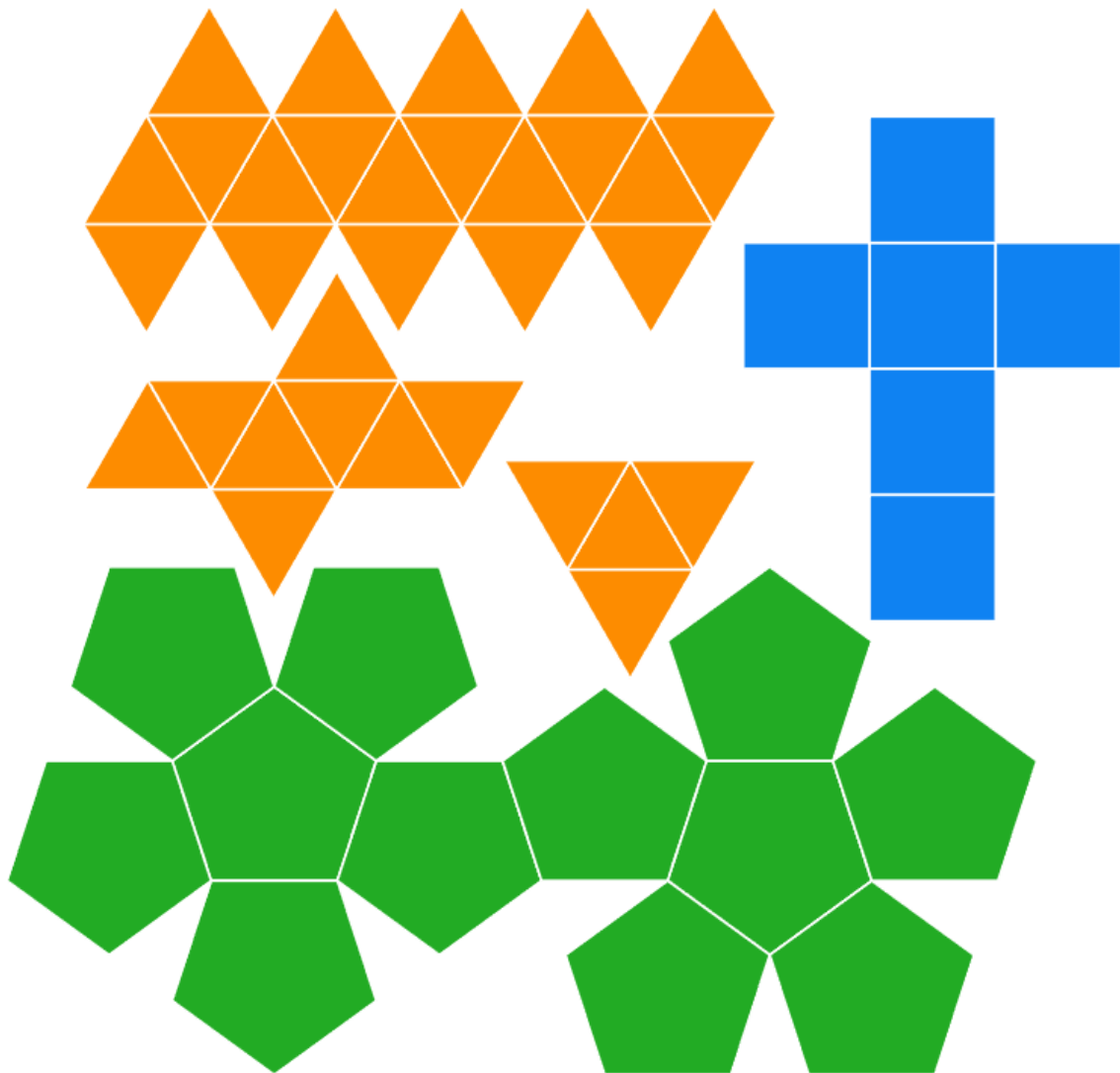
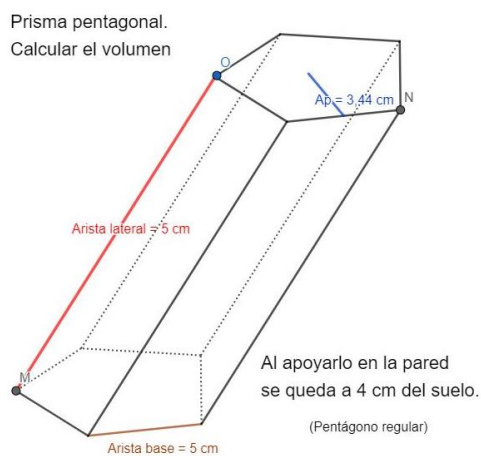
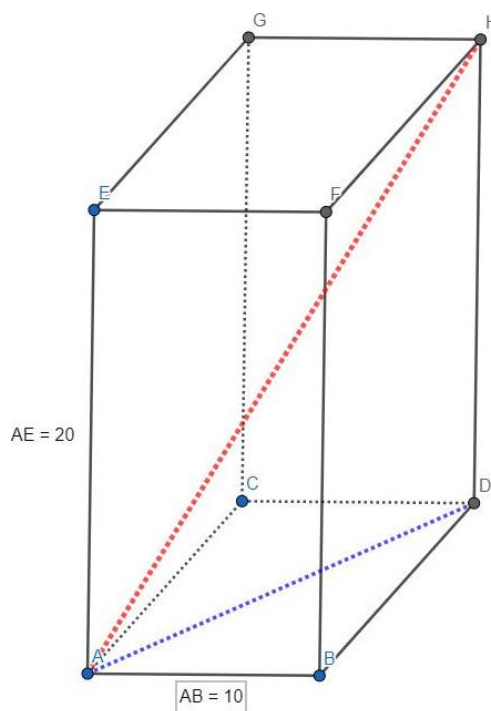


Ilustración 22. Desarrollo de sólidos platónicos

11.2. Anexo II. Ejercicios propuestos para las sesiones**Sesión 3: Prismas (Volúmenes)***Ilustración 23. Ejercicio prisma oblicuo. Elaboración propia.***Sesión 4: Prismas (Áreas)**

Calcula del siguiente prisma cuadrangular:

- Área del prisma.
- Diagonal del prisma.

*Ilustración 24. Ejercicio prisma recto. Elaboración propia.*

Sesión 5: Pirámides (Volúmenes)

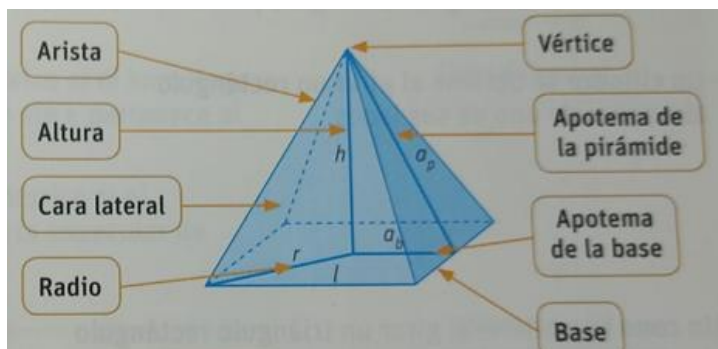


Ilustración 25. Trabajo autónomo de la sesión 5.

Fuente: Libro editorial SM

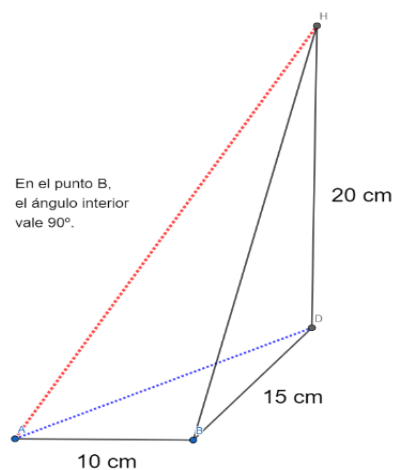


Ilustración 26. Ejercicio pirámide oblicua.
Elaboración propia.

Sesión 6: Pirámides (Áreas)

Datos:

Arista de la base = 3 cm

Apotema de la base = 3,6 cm

Altura de la pirámide = 8 cm

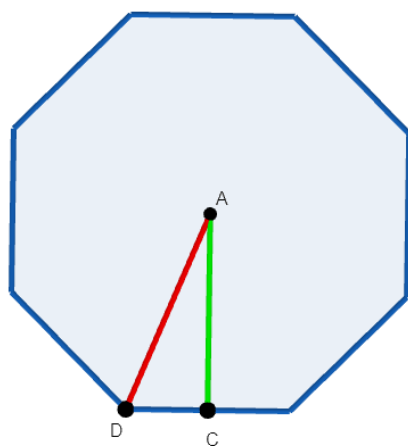


Ilustración 27. Ejercicio pirámide recta. Vista de la planta. Elaboración propia.

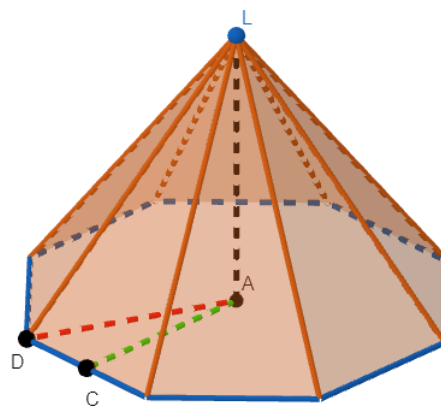


Ilustración 28. Ejercicio pirámide recta. Vista completa. Elaboración propia.

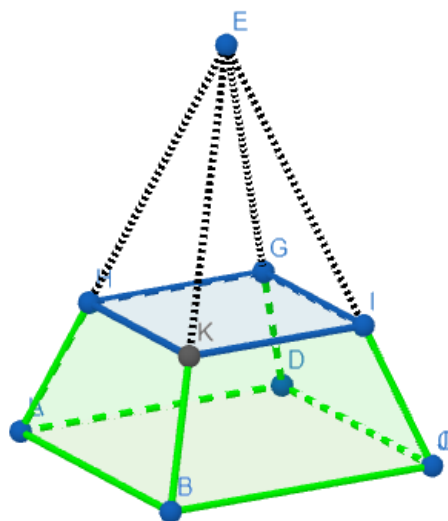
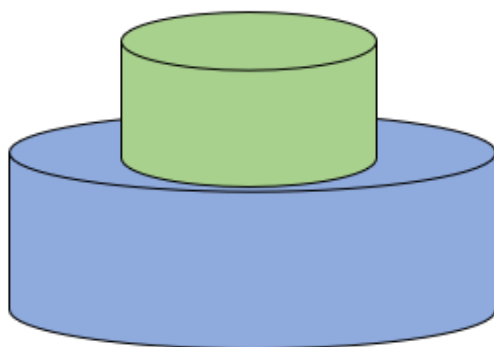
Sesión 7: Tronco de pirámide

Ilustración 29. Ejercicio tronco de pirámide cuadrangular. Elaboración propia.

Sesión 10: Cilindros y esferas

1.-



Diámetro menor 4 cm	/	$h = 3$ cm
Diámetro mayor 7 cm	/	$h = 5$ cm
Calcular Superficie y Volumen		

Ilustración 30. Ejercicio cilindros. Elaboración propia.

2.- Una canica tiene una superficie de $18,10 \text{ mm}^2$. Calcula el volumen de dicha canica.

11.3. Anexo III. Prueba escrita propuesta.

1.- Una persona dispone de una caja de zapatos y tiene como objetivo meter la esfera más grande posible dentro de dicha caja. Se pide:

- Volumen de la esfera (0,8 puntos)
- Superficie de la esfera (0,8 puntos)
- Calcular la longitud de la recta que une los dos puntos más alejados de la caja (La diagonal) (0,8 punto)



Dimensiones de la caja:
Alto: 18 cm
Ancho: 15 cm
Largo: 24 cm

2.- Tenemos una pirámide recta de base cuadrada con altura de 25 centímetros de altura y una de las aristas de la base mide 15 centímetros. Calcula:

- Área de una cara lateral y área lateral total. (0,6 puntos)
- El área total de la pirámide (base incluida). (0,6 puntos)
- El volumen de la pirámide. (0,7 puntos)
- Dibuja un posible desarrollo plano de la figura mencionada. (0,6 puntos)
- ¿Cumple la fórmula de Euler? Demuéstralo. (0,6 puntos)

3.- En una famosa serie de dibujos animados, aparece una caja de galletas similar a la mostrada en el dibujo. Esta caja es un prisma regular y muestra 6 caras laterales. También se sabe que las aristas de la base miden 5 centímetros y las aristas que unen las caras laterales miden 10 centímetros.

- ¿Cuál es la superficie de cartón necesaria para hacer la caja? (1,5 puntos)
- ¿Cuál es el volumen de agua que cabe en la caja? (1 punto)



Otros datos de interés:

$$\text{Apotema} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 4,33 \text{ cm}$$

Radio = 5 cm

4.- Un arquitecto quiere innovar en la construcción de columnas, su última obra es una columna de 2 metros de altura y un radio de 30 cm. Con un taladro de punta cónica, se le realiza un agujero con una profundidad de 10 cm.

- a. El arquitecto quiere pintar la columna ANTES de realizar el agujero. Calcula el área de la columna que debe ser pintada. (1 punto)
- b. Calcular el volumen del agujero realizado. (1 punto)



5.- Dos puntos de la esfera terrestre están situados en el mismo meridiano y sus latitudes son de 52° N y 25° S. Calcula la distancia que los separa suponiendo que la Tierra es una esfera de radio 6371. (1 punto)

11.4. Anexo IV. Ficha inicial. Poliedros.

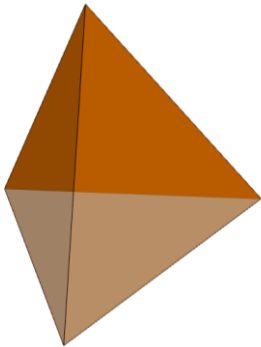
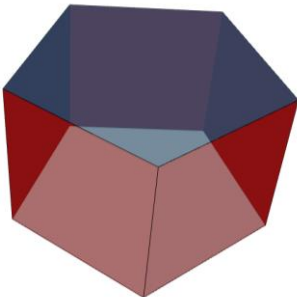
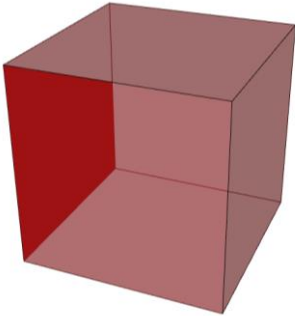
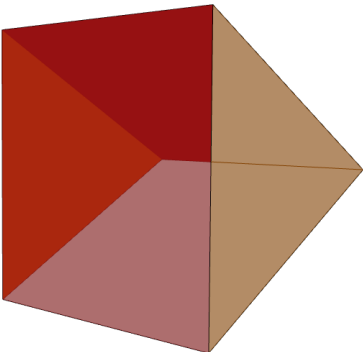
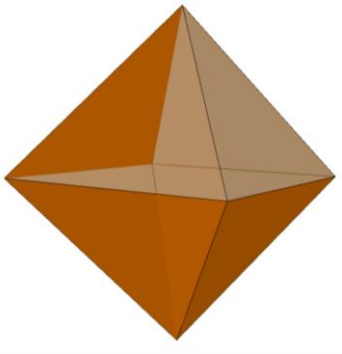
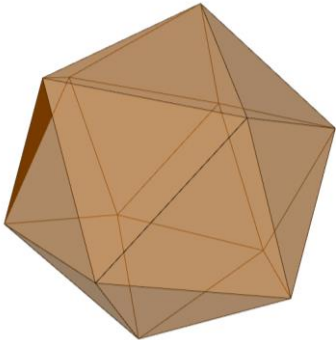
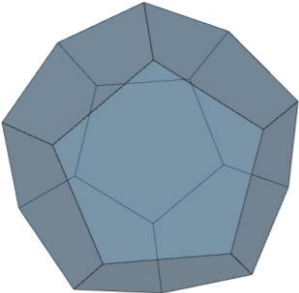
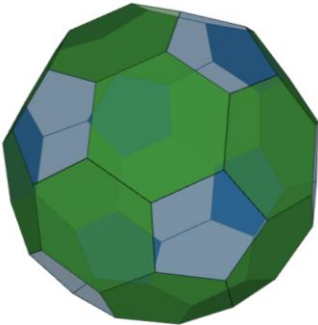
A	B
	
C	D
	
E	F
	
G	H
	

Tabla 43. Anexo V. Ficha inicial. Poliedros.

11.5. Anexo V. Ficha Ejemplo.

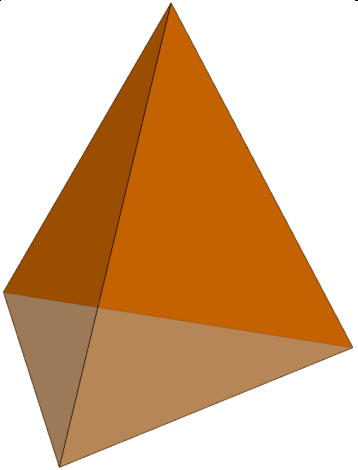
Número de caras	4	
Polígono que forman las caras	Triángulos	
Número de aristas	3	
Número de vértices	4	
Regular o irregular	Regular	
Cóncavo o convexo	Convexo	

Tabla 44. Ficha Ejemplo

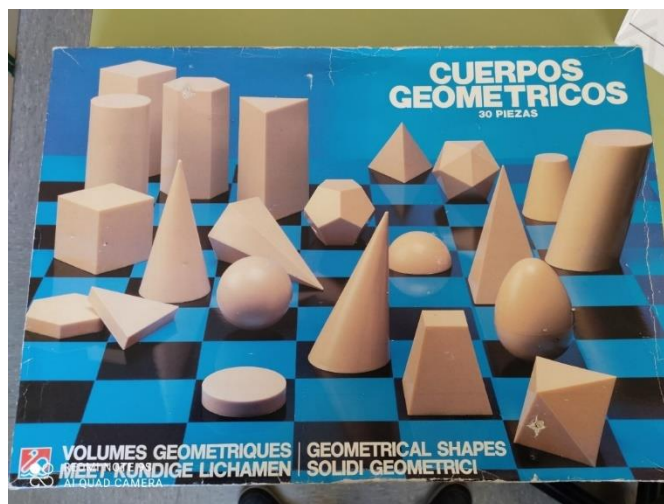
11.6. Anexo VI. Juego Cuerpos geométricos – 30 piezas. Dalmau Carles Pla S.A.

Ilustración 31. Cuerpos geométricos - 30 piezas DALMAU CARLES PLA S.A. Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 32. Interior: Cuerpos geométricos - 30 piezas DALMAU CARLES PLA S.A. Fuente: <https://www.todocoleccion.net>

11.7. Anexo VII. Ejercicios de desarrollos geométricos.

1.- La siguiente actividad consistirá en comprobar si los desarrollos que se muestran en la tabla pueden corresponder con un cubo de Rubik.

Para ello, podréis utilizar la siguiente página y así ver el color de las caras de nuestro querido hexaedro.

<https://rubiks-cube-solver.com/es/>

Se pide indicar si el desarrollo mostrado en cada opción es **Válido** o **No Válido**, para ello podéis borrar la opción incorrecta.

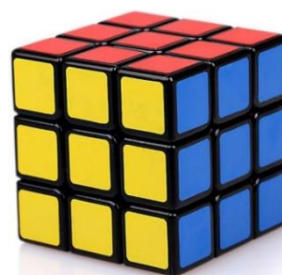


Ilustración 33. Cubo Rubik.
Fuente Google.

a		d	
	Válido No válido		Válido No válido
b		e	
	Válido No válido		Válido No válido
c		f	
	Válido No válido		Válido No válido

Tabla 45. Anexo VII. Ejercicio 1a de desarrollos geométricos.

2.- Y si las caras de nuestro maravilloso poliedro no nos dan pistas.... ¿Podríamos decir cuales son desarrollos válidos y cuáles no?

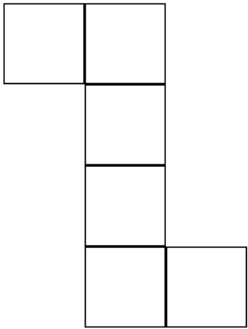
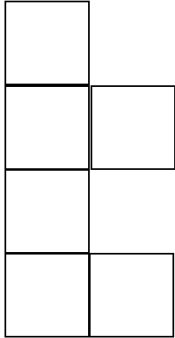
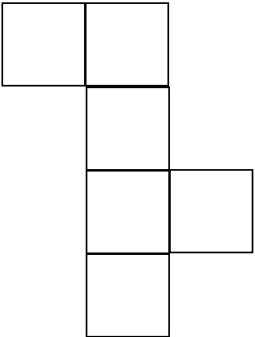
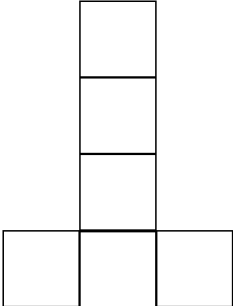
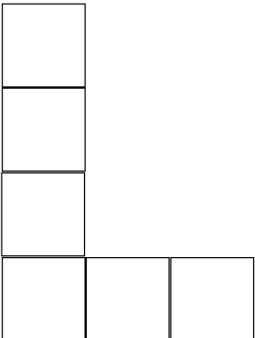
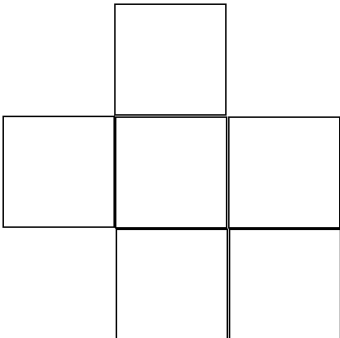
G		H	
	Válido		Válido
	No válido		No válido
I		J	
	Válido		Válido
	No válido		No válido
K		L	
	Válido		Válido
	No válido		No válido

Tabla 46. Anexo VII. Ejercicio 2 de desarrollos geométricos.

11.7.1. Anexo VII. B) Atención a la diversidad

Actividad 1b - La siguiente actividad consistirá en comprobar si los desarrollos que se muestran en la tabla pueden corresponder con un dado común.

Se pide indicar si el desarrollo mostrado en cada opción es **Válido** o **No Válido**, para ello podéis borrar la opción incorrecta.

Para la realización de esta actividad, se utilizará un dado físico

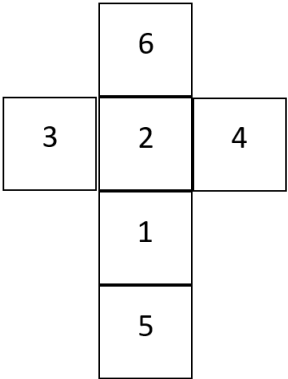
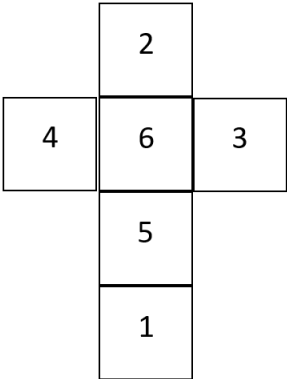
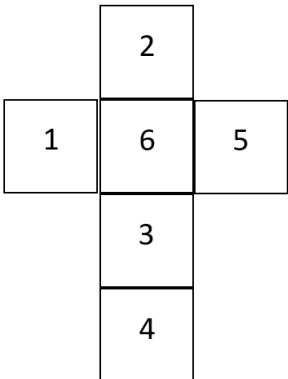
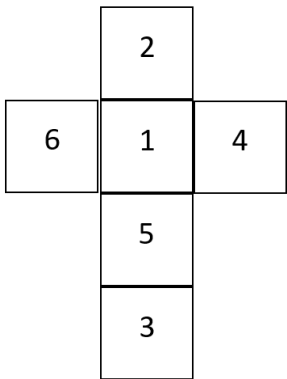
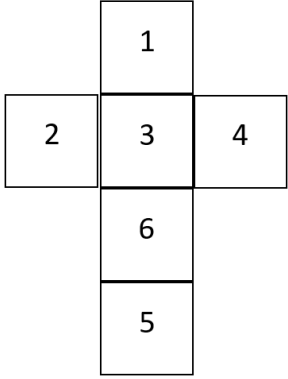
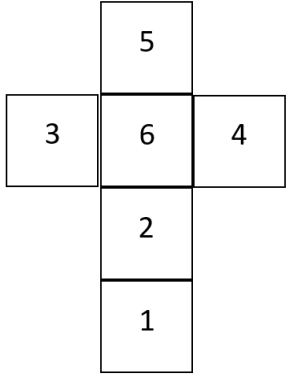
a		d	
	Válido No válido		Válido No válido
b		e	
	Válido No válido		Válido No válido
c		f	
	Válido No válido		Válido No válido

Tabla 47. Anexo VII. Ejercicio 1b de desarrollos geométricos.