



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Alumno: Peña Jaenes, Juan Enrique

Tutor: Prof. D. Antonio Damas Serrano
Dpto.: Matemáticas

Junio, 2019

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	5
2. OBJETIVOS.....	5
3. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA.....	6
3.1. ANTECEDENTES Y ESTADO DE LA CUESTIÓN	6
3.1.1. <i>Concepto de función</i>	6
3.1.2. <i>Antecedentes</i>	7
3.2. FUNCIONES. PLANTEAMIENTO GENERAL Y OBJETIVO DE ESTUDIO.....	11
3.2.1. <i>Planteamiento general y objetivo de estudio</i>	11
3.2.2. <i>Conocimientos necesarios para enseñar Matemáticas</i>	12
3.2.3. <i>Funciones, ¿para qué? Una relectura del currículo de la E.S.O.</i>	13
3.2.4. <i>Dificultades en el aprendizaje de las funciones</i>	14
3.2.5. <i>Futuro de la enseñanza de las Matemáticas</i>	15
3.2.6. <i>Interdisciplinaridad</i>	16
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	18
4.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.....	18
4.2. NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA	19
4.3. OPERACIONES CON FUNCIONES. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	24
4.3.1. <i>Suma y resta de funciones</i>	24
4.3.2. <i>Producto y cociente de funciones</i>	27
4.3.3. <i>Producto de un número real por una función</i>	29
4.3.4. <i>Composición de funciones</i>	30
4.4. FUNCIONES ELEMENTALES. SITUACIONES REALES DONDE APARECEN	31
4.4.1. <i>Funciones Polinómicas</i>	31
4.4.2. <i>Funciones Exponenciales</i>	36
4.4.3. <i>Funciones Racionales</i>	38
4.4.4. <i>Funciones Logarítmicas</i>	39
4.4.5. <i>Funciones Definidas a Trozos</i>	41
4.4.6. <i>Funciones Trigonométricas</i>	42
5. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	48
5.1. AJUSTE DE CONTENIDOS	48
5.2. ESTRUCTURA Y DESARROLLO DE CONTENIDOS	50
5.3. ACTIVIDADES PROPUESTAS	52
5.4. CONCLUSIÓN	56
6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA	56
6.1. TÍTULO	56
6.2. JUSTIFICACIÓN	56
6.3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA	57
6.3.1. <i>Descripción del centro</i>	57
6.3.2. <i>Oferta educativa</i>	57
6.3.3. <i>Instalaciones y materiales</i>	58
6.3.4. <i>Descripción del aula</i>	59
6.3.5. <i>Valoración</i>	59
6.4. OBJETIVOS	59
6.4.1. <i>Objetivos de etapa</i>	60
6.4.2. <i>Objetivos específicos de área</i>	61
6.4.3. <i>Objetivos de la Unidad Didáctica</i>	62
6.5. COMPETENCIAS CLAVE.....	63
6.6. CONTENIDOS.....	65
6.7. METODOLOGÍA	66

6.8. ACTIVIDADES Y RECURSOS	67
6.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	68
6.10. TEMPORALIZACIÓN	69
6.11. EVALUACIÓN	80
6.11.1. <i>Criterios de evaluación</i>	80
6.11.2. <i>Estándares de aprendizaje</i>	82
6.11.3. <i>Instrumentos de evaluación</i>	83
7. CONCLUSIONES	86
8. BIBLIOGRAFÍA.....	88
ANEXO I.....	91
ANEXO II	112



Resumen

Este Trabajo Fin de Máster forma parte del Plan de Estudios del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de Jaén. En este trabajo, correspondiente a la especialidad de Matemáticas, se pretenden desarrollar las competencias adquiridas durante las asignaturas cursadas a lo largo del Máster y aplicarlas en la elaboración de una Unidad Didáctica que contendrá los apartados de Fundamentación Epistemológica, Fundamentación Didáctica, Fundamentación Curricular y Proyección Didáctica. La Unidad Didáctica tendrá como título “Funciones reales de variable real” y estará relacionada con los contenidos del Bloque IV de Funciones del currículo de 4º de la E.S.O. establecidos por el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre.

Palabras Clave: Unidad Didáctica, Matemáticas, Funciones, Representación Gráfica, Contextualización, Interdisciplinaridad.

Abstract

This Master thesis is part of the curriculum of Master en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas in University of Jaén. The main aim of this thesis, related to the especiality of Mathematics, is to develop the competences obtained during the ended subjets of this Master and to implement in the compilation of the Teaching Unit and its parts which are Teaching Basis, Teaching Proyection, Episthemological Basis. The title of this Teaching Unit is “Funciones reales de variable real” and it is related to the contents of Part IV Functions of the curriculum of 4º de la E.S.O. established by Real Decreto 1105/2014 26th December.

Keywords: Teaching Unit, Mathematics, Functions, graphic representacions, contextualizations, interdisciplinary nature.



1. INTRODUCCIÓN

Mediante la realización de este Trabajo Fin de Máster se aplicarán todas las competencias adquiridas en las diferentes asignaturas del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de Jaén. Se desarrollará una Unidad Didáctica correspondiente a la especialidad de Matemáticas que deberá constar de los apartados de Fundamentación Didáctica, Fundamentación Epistemológica, Fundamentación Curricular y Proyección Didáctica. Esta Unidad Didáctica tendrá como título “Funciones reales de variable real” y estará relacionada con los contenidos del Bloque IV de Funciones del currículo de 4º de la E.S.O. establecidos por el Real Decreto 1105/2014

La realización de este Trabajo Fin de Máster permitirá planificar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje además de aplicar diferentes metodologías y diseñar propuestas didácticas que mejoren la adquisición de las competencias clave y los conocimientos matemáticos necesarios. Asimismo, en este trabajo se presentarán algunas de las metodologías, actividades y contenidos utilizados durante mi experiencia docente en el Prácticum de este Máster.

2. OBJETIVOS

La finalidad de este Trabajo Fin de Máster se basa en la elaboración de una Unidad Didáctica y la fundamentación adecuada para la futura labor del docente. Para ello se establecen unos objetivos que se deben lograr con el desarrollo de los diferentes apartados del TFM. A continuación se enumeran los objetivos:

1. Investigar y analizar la actualidad de la enseñanza de las Matemáticas para extraer conclusiones sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje y revisar las posibles estrategias que proponen diversos autores expertos en el tema.
2. Desarrollar una tema del temario oficial de oposiciones a profesorado de E.S.O. y Bachillerato que sirva como base al docente en su labor y pueda profundizar en los contenidos con suficiente rigor y con la terminología adecuada.
3. Realizar un análisis comparativo entre los contenidos, actividades y propuestas didácticas de dos libros de texto y evaluar si cumplen con la normativa vigente.
4. Planificar los objetivos, contenidos, metodología, programación y la evaluación de una la Unidad Didáctica con el fin de conseguir que el aprendizaje del alumnado sea lo más significativo en el aula.



3. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

La Fundamentación Didáctica se dividirá en dos apartados: “Antecedentes y Estado de la Cuestión” y “Desarrollo del Tema” . En “Antecedentes y Estado de la Cuestión” se abordarán aspectos relativos a las últimas investigaciones sobre la didáctica en las Matemáticas, concretamente en el bloque de funciones. En el apartado de “Desarrollo del Tema” se profundizará en los conceptos con el rigor científico y la madurez necesaria, abarcando los tipos, aplicaciones y conocimientos relacionados con las funciones reales de variable real.

3.1. Antecedentes y estado de la cuestión

3.1.1. Concepto de función

Numerosas investigaciones de educación matemática en los últimos años han señalado la dificultad que muchos estudiantes presentan al intentar asimilar el concepto de función matemática (Kaput, 1999; National Council of Teachers of Mathematics, 2001; Kieran, 2006) y relacionarlo con otras ideas como variaciones, expresiones algebraicas o modelización. Además, se han detectado evidencias de la dificultad que le supone a los estudiantes de todos los niveles conectar el concepto de función con las representaciones gráficas o tabla numéricas (Duval, 1996). Esto puede deberse al uso de metodologías cuya herramienta principal es la realización de actividades que no facilitan el dominio conceptual que implica una función. Por el contrario, la matematización de situaciones cotidianas y la aplicación de las Matemáticas para resolver problemas reales se identifica como un método que facilita la comprensión del proceso, ya que los estudiantes adquieren las herramientas adecuadas para describir, predecir e interpretar el comportamiento de sucesos que conllevan una variación o un cambio (Lesh y Doerr, 2003).

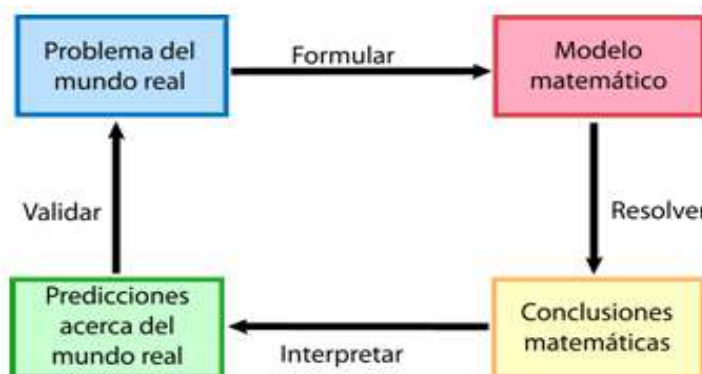


Fig. 3.1 Proceso de modelado. (Elaboración propia.)



Desde el punto de vista de Modelos y Modelización (Lesh, 2010), aprender Matemáticas conlleva un proceso de desarrollo de modelos y conceptos, que evolucionan continuamente durante la etapa de aprendizaje del alumno o alumna. Los modelos pueden ser definidos como las herramientas conceptuales para construir, modificar o manejar sistemas matemáticamente relevantes. El aprendizaje de las Matemáticas conlleva la construcción de ciclos progresivos de comprensión, alteración y perfeccionamiento de maneras de pensar. En estos ciclos, los individuos consiguen conectar los datos, objetivos y posibles caminos que se encuentran al enfrentarse a la resolución de problemas. El producto del aprendizaje no es el modelo en sí, sino los procesos mediante los cuales se crea. Estos modelos son personales y únicos y reflejan la experiencia del sujeto en determinadas situaciones. Dicho esto, la comprensión de los conceptos se facilita cuando el individuo comparte sus modelos con otros y considera los conceptos en diversas dimensiones (Vargas, 2016).

Pensar matemáticamente va más allá de calcular. También implica la descripción de situaciones mediante modelos (Lesh y Doerr, 2003), analizar información y controlar dimensiones espaciales. Es por esto que los estudiantes necesitan aprender a utilizar representaciones con fluidez en diversas situaciones, así como adquirir la habilidad de operar mediante símbolos (Duval 1996; Lesh, 2010). Entre estas mencionadas representaciones se encuentra el concepto de función. “La idea de función tiene sus raíces conceptuales en nuestro sentido de causalidad, crecimiento, y variación conjunta, donde una de las cantidades cambia en conjunto con el cambio en otra cantidad” (Kaput, 1999:146).

Entender la idea de función implica que los estudiantes asimilen todos los tipos de representación y ser capaces de reconocer lo que tienen en común.

3.1.2. Antecedentes

El concepto de función ha evolucionado a lo largo de la historia y, por lo tanto, ha presentado diferentes obstáculos en cada período (Ruiz, 1998).

El objetivo de este apartado será estudiar cómo se fue desarrollando el concepto de función durante los distintos periodos hasta que se llegó a la definición actual de función.

Matemáticas en Babilonia

El origen del estudio de las Matemáticas en esta civilización está ligado a la Astronomía y aspectos fenomenológicos mediante un sistema sexagesimal, según Ruiz (1998, p.150). Los babilonios utilizaban ya un sistema de tablas de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas, además de potencias sucesivas de un número parecido a

nuestras actuales logaritmos. De hecho, estas tablas se presentaban de forma análoga a las tablas de valores para una función real discreta $y = f(x)$ que se trabajan a los niveles preliminares de la enseñanza actual.



Fig. 3.2 *Tabla babilónica Plimpton 322 (Fuente: Universidad Columbia, www.pinterest.es)*

Matemática griega

Según Ruiz (1994), los griegos ya poseían una idea del concepto de función como relaciones entre magnitudes variables. Sin embargo, lo plantearon de un modo en el que las variables se convertían en incógnitas y por tanto desarrollaron las ecuaciones y las proporciones en lugar de funciones. En el pensamiento griego las magnitudes y los números eran conceptos diferentes mientras que hoy en día somos capaces de relacionar sencillamente medidas numéricas con las magnitudes.

Por otro lado, Pitágoras y su escuela tenían una gran influencia del pensamiento babilónico, que afirmaba que un número podía ser asociado a cualquier magnitud. Encontraron problemas muy importantes a la hora de intentar relacionar magnitudes diferentes y sobre todo en los casos donde era imposible expresar la razón entre dos magnitudes por medio de un número. Asimismo, en el pensamiento griego los números se presentaban de forma discreta mientras que las magnitudes eran



continuas lo cual figuraban como un obstáculo infranqueable para el concepto de función. (Ruiz, 1998)

Edad Media

En el periodo medieval, el concepto de función se desarrolló para explicar los fenómenos de cambio y movimiento que aparecían en la naturaleza, unificando así las dos disciplinas implicadas que eran la Física y las Matemáticas.

Ruiz (1998) diferencia dos métodos para expresar las relaciones funcionales: el Álgebra y la Geometría. Mediante el Álgebra se introduce cantidades variable utilizando letras del alfabeto. Con la Geometría se introducen representaciones gráficas que implicaron muchos progresos al relacionarlos con el Álgebra, ya que era un primer paso para la representación gráfica de funciones. Oresme (1320-1382) utiliza la continuidad de los segmentos para representar los cambios en magnitudes cualitativas, facilitando su descripción, comparación y dependencia.

Siglo XVI

Es en este periodo cuando Leibniz (1675) introduce el término “función”. Utilizaba el concepto de dependencia funcional para designar cantidades cuyas variaciones estaban relacionadas por una ley. Aunque el concepto matemático de función estaba implícito en la Trigonometría y las tablas logarítmicas, las cuales ya existían en sus tiempos, Leibniz fue el primero, en 1692 y 1694, en utilizarlas explícitamente para denotar alguno de los varios conceptos geométricos derivados de una curva.

También Descartes tuvo su aportación propia al concepto de función al estudiar ecuaciones algebraicas a través de su curva, dando lugar a la Geometría analítica y a la noción de dependencia entre cantidades variables. La idea de que un punto cualquiera del plano geométrico puede ser representado a través de un par ordenado x, y , llamado coordenadas cartesianas, conectó el Álgebra con el lenguaje geométrico permitiendo relacionar ecuaciones con curvas.

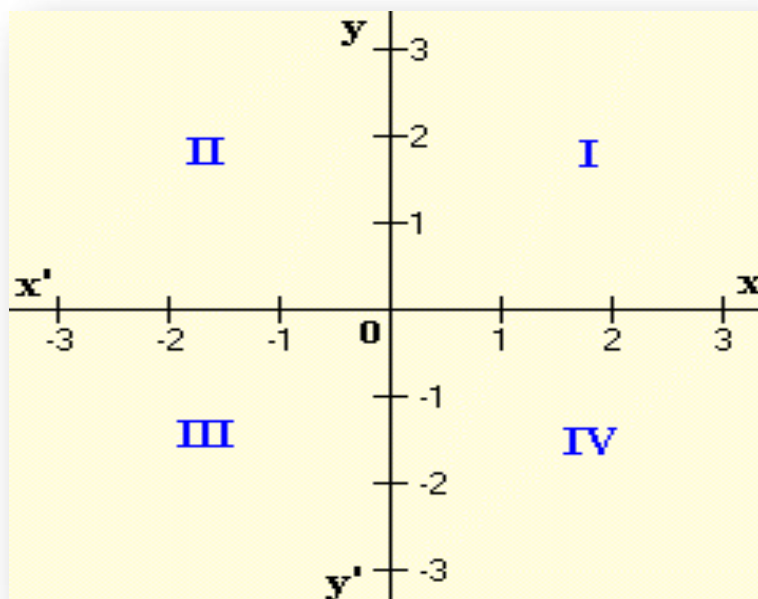


Fig. 3.3 Ejemplo de ejes cartesianos (Elaboración propia.)

Siglos XVII y XVIII

En 1718 comienza a utilizarse el símbolo f para identificar la característica de función como forma analítica. Todos los expertos están de acuerdo en que el concepto de función fue introducido en la cultura matemática por Euler mediante la siguiente definición:



Fig. 3.4 Retrato de Leonhard Euler en 1753.

“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes” (Euler, citado. Por Ruiz, 1998, p. 126).

El concepto de función y el de curva estaban íntimamente conectados en este periodo. Euler diferenciaba dos tipos de curvas: continuas o discontinuas, de manera que la discontinuidad de la función implicase un cambio en la ley analítica.

Por otro lado, se instala la definición de función como una cantidad variable que se expresa analíticamente de algún modo a través de esa cantidad variable y números o valores constantes que muestran una



dependencia entre función y expresión analítica. Esto implica un obstáculo para la relación entre la Física y las Matemáticas. No mucho después, Newton desarrolla las funciones como series infinitas de potencias, facilitando la representación analítica de las funciones y eliminando las restricciones que impedían esta visión.

Siglo XIX

Los aportes matemáticos de Lagrange, Euler y Fourier fundamentaron el significado del concepto de función. Fue posteriormente, en el siglo XIX, cuando gracias a los trabajos de Cauchy, Riemann y Dirichlet, se estableció la definición de función con la que actualmente se trabaja.

“Si una variable y está relacionada con otra variable x , de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x , hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y .”

Es en esta etapa cuando se generaliza el concepto y comienza el estudio de la continuidad.

3.2. Funciones. Planteamiento general y objetivo de estudio

3.2.1. Planteamiento general y objetivo de estudio

Es difícil para los alumnos interpretar las posibles aplicaciones y utilidades de las funciones. Sin embargo, las funciones tienen un gran valor para solucionar problemas de la vida diaria, ya sea en Finanzas, Economía, Ingeniería, Física, Química, etc.

Es importante mostrarle al alumnado todas estas utilidades, proponiendo problemas reales y aplicando las funciones para resolverlos. De esta manera, se pueden entender y analizar muchas situaciones cotidianas como, por ejemplo, leer una factura de agua y de luz o interpretar datos pero también se puede mostrar su aplicación directa en otras materias.

El concepto de función es muy amplio. Se encuentra en una gran número de situaciones en la naturaleza, lo que nos permite simular, predecir y analizar la mayoría de los fenómenos que acontecen. También cabe resaltar que un reducido número de funciones representan muchos fenómenos, a pesar de que estos puedan ser totalmente diferentes. Estos fenómenos son interdependientes y suelen estar relacionados unos con otros. La humanidad, desde hace varios siglos, consiguió interpretar las relaciones más sencillas y formuló las principales leyes físicas, las cuales enuncian que las magnitudes ligadas a estos fenómenos naturales son tan



dependientes unas de otras que sus valores pueden ser determinados por los valores de las demás. Así fue como surgió el concepto de función. El estudio de las propiedades de las funciones reside en todo tipo de fenómenos que ocurren diariamente, teniendo un gran uso y aplicación para entenderlos y controlarlos. Así se pueden interpretar fenómenos sociales con respecto a la demografía y su evolución, o financieros como el mercado de valores y, sin ir más lejos, cualquier fenómeno físico como las temperaturas, movimiento, gravedad, ondas o incluso partículas a escala cuántica gobernadas por funciones estadísticas.

3.2.2. Conocimientos necesarios para enseñar Matemáticas

En los últimos años, las investigaciones en Educación Matemática se han centrado en averiguar cuáles son los conocimientos más apropiados que debe tener un profesor a la hora de enseñar Matemáticas. Algunos de los estudios más destacados son debidos a Shulman (1986,1987,2005), Ball, Thames y Phelps (2008), y Godino (2009), que obtuvieron como resultado algunos modelos que han hecho aportes significativos para la caracterización de estos conocimientos. Entre ellos se destaca el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).

En sus inicios, el CDM fue propuesto como un sistema de categorías de análisis de conocimientos del profesorado, utilizando el enfoque Onto-semiótico para clasificarlos. El CDM Propone tres dimensiones: Dimensión matemática, Dimensión didáctica y Dimensión meta didáctico-matemática.

La Dimensión matemática está ligada al conocimiento que el profesor utiliza para plantear problemas a sus alumnos y para comprobar que las soluciones a la que ellos llegan sean las adecuadas. Concretamente, se podría decir que parte del conocimiento ampliado del contenido que posee el profesor lo utiliza para conectar los conceptos que forman la base de lo que se trabaja en un determinado nivel con los que se necesitan posteriormente. Además, este conocimiento ampliado le permite seleccionar y utilizar diferentes herramientas y decidir cuál es la más adecuada. La Dimensión matemática es integral, integrada e integradora. Por una parte, el conocimiento común es esencial para poder transmitir correctamente el contenido y cuando sea necesario modificarlo o ampliarlo a la hora de proponer situaciones problema. Por otra parte, el conocimiento ampliado permite establecer conexiones entre los conceptos que se quieren trabajar y que son necesarios para la resolución de los problemas.

La Dimensión didáctica facilita el conocimiento del material y de los alumnos pero requiere de una estrecha conexión con la Dimensión matemática. El



conocimiento de los estudiantes es integrado a los demás conocimientos del profesor y forma parte integral de la Dimensión didáctica (Amaya, Medina y Pino-Fan, 2016).

La Dimensión meta didáctico-matemática exige que el profesor esté en continua formación y actualización y también que reflexione sobre su propia práctica (Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

El establecimiento de relaciones entre las dimensiones y su efecto formativo representa la potencialidad del CDM y su posible contribución a la formación de seres humanos mejores.

Un estudio reciente llevado a cabo por Amaya et al (2016) evaluó la Dimensión Matemática de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores trabajando con funciones. Es decir, en este estudio se analiza los conocimientos que tienen estos profesores y su capacidad para transmitirlos. La muestra fueron 90 profesores. La conclusión extraída de este estudio es que se encontraron serias dificultades en la comprensión de la noción de función en los mismos profesores, especialmente con la identificación y el uso de los elementos de las funciones involucradas.

Uno de los problemas epistémicos más destacados en la relación con el concepto de función (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005) es el distanciamiento entre el reconocimiento del concepto a nivel escolar y su utilidad en la sociedad. Esto se manifestó en el estudio a través de la no aceptación de representaciones como la gráfica, la tabular, la del lenguaje coloquial y la calidad en las representaciones de una función.

3.2.3. Funciones, ¿para qué?, una relectura del currículo de la E.S.O.

Hace 30 años que se publicaron los nuevos currículos de la E.S.O. (MEC, 1989). Por tanto, ya se puede hacer un análisis sobre su implantación y su evolución. Se dedica un tema a las relaciones funcionales dentro del bloque 4. Esto resulta una novedad respecto al currículo anterior. Este bloque contiene también aspectos estadísticos aunque realmente no se han tenido en cuenta en los libros de texto y materiales didácticos publicados para la E.S.O. Esto es debido a que ciertamente tanto la estadística como las funciones presentan modelos matemáticos en los que aparecen relaciones entre magnitudes y lenguajes de representación comunes como tablas y gráficas. Por otra parte, hay que asumir que los conceptos matemáticos subyacentes son de naturaleza totalmente distinta, que dan lugar a ramas de las Matemáticas diferentes. Es por esto que se ha considerado dedicar un bloque exclusivamente a aspectos funcionales, separado claramente del bloque estadístico. Deulofeu J. (1993) defiende que el problema didáctico no radica en la estructura del currículo, sino en la



finalidad que se tiene como objetivo al abordar el tema de funciones. Se deben compenetrar unos objetivos válidos para la mayoría de la población con una preparación para los alumnos que seguirán sus estudios matemáticos en Bachillerato.

El análisis de los objetivos del tema funciones en la E.S.O. puede ser muy compleja. Sin embargo, resulta esencial analizarlos con rigor. La dificultad principal aparece al tratar de compatibilizar la adquisición de unos procedimientos básicos relativos como el lenguaje numérico y gráfico con una introducción del concepto de función y de conceptos matemáticos relacionados, a la vez que el alumnado adquiere las habilidades necesarias para utilizar las funciones en la resolución de situaciones y problemas contextualizados. En este proceso los estudiantes encuentran dificultades muy diversas cuya superación va a depender de las herramientas didácticas y capacidad de gestión del aula por parte del docente.

3.2.4. Dificultades en el aprendizaje de las funciones

A pesar de las numerosas investigaciones que se han llevado a cabo, a día de hoy no se conoce con certeza cómo se aprenden y adquieren los conceptos matemáticos (ver Tall, 1991, Ch.9). Es por esto que las investigaciones se siguen centrando en los errores repetitivos que cometen los estudiantes y las dificultades en la comprensión de conceptos.

En el proceso de exposición de conocimientos por parte del docente, el alumno pueden construir conceptos erróneos o alejados de la finalidad de la docencia (Sierpinska, 1990). Para que los alumnos entiendan lo que se les está enseñando tienen que enfrentarse ellos mismos a las dificultades del concepto.

Otra de las dificultades relevantes es la comprensión del concepto de función por complejidad y generalidad. También hay que añadir la dificultad añadida debido la multitud de conceptos que llevan asociados incluso las funciones más elementales (pendiente, tangente, tasa de variación media e instantánea, límite, infinito, derivada, etc.)

Una de las definiciones más generalizada del concepto de función es “como conjunto de pares ordenados tal que no hay dos pares con la misma primera componente”. Desde el punto de vista pedagógico, esta definición es muy poco intuitiva y apropiada (ver Tall, 1991, Ch.9).

Es necesario evitar tanta complejidad, proponiendo otras definiciones más asequibles como por ejemplo: “relación entre dos conjuntos numéricos, tal que a cada valor del primero (variable independiente, x) le corresponde un único valor segundo



(variable dependiente, y)". Las definiciones no deben perder rigor matemático pero deben de ser asimilables por los estudiantes.

También cabe destacar la dificultad que supone partir de una representación gráfica, ya que, según Giorgino T. Bagni de Vinner (1983 y 1987), complica la interpretación completa del concepto de función y el registro tabular sólo se ve como un paso intermedio y no como una representación por sí misma. Además de esto, en los alumnos predomina el pensamiento algebraico generando dificultades para establecer el nexo entre las expresiones algebraicas y su visualización por medio de su gráfico cartesiano. Asimismo, resultará difícil determinar si una relación es función o no (Bagni, 2004).

Según Fernando Hitt pueden aparecer muchos obstáculos en el aprendizaje por la equivalencia de notaciones. Frecuentemente se cambia de una notación a otra sin explicar adecuadamente la relación entre ellas, apenas mencionando que son equivalentes. Un ejemplo sería la equivalencia que se establece en un sistema algebraico entre las representaciones y y $f(x)$ [$y = f(x)$] para las expresiones que unen las variables (x e y). Añadido a esto, los estudiantes tienden a tener confusiones diferenciando la variable dependiente e independiente, lo que provoca errores al realizar la gráfica de la función (Sierpinski, 1990).

3.2.5. Futuro de la enseñanza de las Matemáticas

Tal y como menciona Qualling. D. A. (1982), " las Matemáticas de la vida cotidiana son importantes pero la enseñanza de las Matemáticas tradicionales contribuye poco a su desarrollo". Un escaso número de alumnos utilizará las Matemáticas en su trayectoria profesional. A pesar del talento que pueda desarrollar un profesor a la hora de transmitir Matemáticas, muchos de los alumnos y alumnas permanecerán insensibles a ellas. Esto da lugar a una reflexión sobre el rol de las Matemáticas dentro del currículo escolar y si es tan fundamental en la educación de todos los niños y niñas como se piensa.

Estamos en un mundo donde cada vez menos jóvenes se interesan por las Matemáticas. Sin embargo, la sociedad reclama un conocimiento más profundo sobre ellas. Ya no es esencial el cálculo mental para resolver problemas cotidianos, puesto que disponemos de herramientas tecnológicas que nos solucionan esos problemas cómodamente, como calculadoras, mapas digitales, contadores, etc. En contraposición, es indispensable conocer la fundamentación de estas herramientas para poder usarlas con garantías.

Es por esto que Qualling (1982) hace hincapié en que no debemos imponer a los niños tantos ejercicios fastidiosos y repetitivos, sino que debemos centrarnos en los



fenómenos que gobiernan la sociedad en los que las Matemáticas estén plenamente implicadas. Un ejemplo evidente es la Economía, claramente condicionada por las Matemáticas, la Informática, ciencias sociales y otras disciplinas que reúnen la problemática principal de nuestra sociedad.

El verdadero reto es cómo llevar estos conceptos y aplicaciones tan relevantes de las Matemáticas al currículo escolar. En otros países han recurrido al profesorado como protagonista de este objetivo. Mediante el uso de tareas prácticas, plantean problemas que estén dentro de la experiencia de los alumnos y que pueden ser abordados de una manera racional. De esta forma, Qualling (1982) enuncia que no tiene sentido escoger un tema matemático y después buscar las aplicaciones en la vida real, sino que primero se debería plantear el problema y más tarde se escogerán los instrumentos matemáticos que sean necesarios para su resolución. Si los alumnos carecen de los conocimientos requeridos para solventar el problema, tendrán que investigar para adquirirlos.

En todos los proyectos llevados a cabo por profesores británicos es necesaria la aplicación de las Matemáticas. Sin embargo, estos proyectos incluyen numerosos conceptos de otras disciplinas. Es posible que en los comienzos de la enseñanza escolar sea conveniente separar en disciplinas autónomas. Por otro lado, en la enseñanza secundaria resulta mucho más rico e interesante combinarlas para resolver problemas del mundo real.

3.2.6. Interdisciplinaridad

El concepto de interdisciplinaridad en Matemáticas que propone Álvarez (2001) se entiende como una cualidad del método que permite dirigir el proceso de resolución de problemas complejos muy relacionados con la vida real a partir de maneras de pensar y actitudes asociadas a la necesidad de comunicación, evaluación, integración de datos, resaltar lo necesario y sintetizar conclusiones.

A partir de esto, la visión interdisciplinaria se vuelve fundamental en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que lo enriquece con formación en el saber, hacer y ser del alumnado.

Se podría decir que la enseñanza y la investigación interdisciplinar conllevan un proceso de identificación, resolución, construcción y creación. Identificar el problema que se plantea, resolución de dificultades de conexión entre disciplinas, crear un campo teórico-práctico común, construir un modelo y ponerlo en práctica para comprobar que el problema puede resolverse (Newell, 2001).



La interdisciplinariedad eleva el aprendizaje significativo de los alumnos y las alumnas, pues aborda los conocimientos científicos de manera más general, facilitando su comprensión amplia y completa. Algunas de los beneficios del enfoque interdisciplinario en el aula son: considerar y valorar puntos de vista distintos de un mismo contenido, ser consciente de los límites conceptuales y epistemológicos de las diferentes áreas, minimizar la reiteración de contenidos y comprender el rol científico en la solución de problemas fundamentales de la sociedad (Grisolía, 2008).

Martínez, Perera y Álvarez (2011, p.17) defienden que “Existe un consenso en destacar un conjunto de problemas que a nuestro juicio requieren tener como respuesta la interdisciplinariedad”. Algunos ejemplos de este tipo de problemática pueden ser: la presentación de contenidos de forma aislada y descontextualizada o la dificultad del alumnado para transmitir lo aprendido de un contexto a otro.

La resolución de problemas se presenta como una oportunidad para transferir conocimiento científico, ampliando la simple aplicación de fórmulas matemáticas (Concari y Giorgi, 2000). Tanto es así, que la resolución de problemas se concibe como una estrategia de enseñanza-aprendizaje que facilita el aprendizaje conceptual y procedimental de los alumnos y alumnas, además de que establece una conexión entre lo cotidiano y lo impartido en clase. Hay que añadir, que también figura como una estrategia globalizadora en sí misma porque puede ser trabajada en todas las áreas. (Pérez y Ramírez, 2011).

Al aplicar problemas que contemplen funciones, los docentes deben planificar los ejercicios logrando una adecuada acción didáctica en el tratamiento de las mismas. Hoy en día no se puede imaginar un proceso de enseñanza-aprendizaje sin tener en cuenta las TIC y las comunicaciones. El uso de software matemático no solo añade atractivo al problema planteado, sino que logra motivar a los estudiante que suelen sentirse atraídos por las tecnologías y contribuye a obtener resultados fiables y fácilmente manipulables.



4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En este apartado se desarrollarán los contenidos correspondientes al bloque de funciones con un rigor matemático adecuado, lo que nos permitirá establecer una base sólida para la posterior elaboración de la Unidad Didáctica.

4.1. Concepto de función real de variable real

Para llegar al concepto de función real de variable real vemos en primer lugar las definiciones de correspondencia y de aplicación entre dos conjuntos.

Una **correspondencia** entre dos conjuntos A y B es una relación entre los elementos de A y los elementos de B .

Ejemplo 1. Sean $A = \{\text{alumnos}\}$ y $B = \{\text{asignaturas}\}$, y definamos la relación “matriculado en”. Esta relación es una correspondencia en la que un alumno puede estar matriculado en varias asignaturas y de una asignatura pueden estar matriculados varios alumnos. Por tanto, un elemento de A puede estar relacionado con varios del B y uno del B con varios del A .

Una **aplicación** entre dos conjuntos A y B es una correspondencia entre ambos conjuntos de manera que cada elemento de A (primer conjunto) está relacionado con un único elemento de B (segundo conjunto).

Ejemplo 2. Sean $A = \{\text{alumnos}\}$ y $B = \{\text{sillas}\}$, y definamos la relación “sentado en”. Es inmediato comprobar que esta relación es una aplicación, ya que un alumno solo puede estar sentado en una silla (no puede estar sentado en dos sillas a la vez).

Como caso particular de aplicación entre dos conjuntos, definimos ya a continuación el concepto de función real de variable real.

Definición 1. Sea D un subconjunto no vacío del conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Se define una **función real de variable real** f como una aplicación que a cada elemento $x \in D$ le hace corresponder un elemento $y \in \mathbb{R}$. En tal caso denotaremos:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

y diremos que x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente**.



4.2. Notación y terminología

Definición 2. Dada una función real de variable real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que el conjunto D , en el que está definida la función f , es el **Dominio** de f , y lo representaremos por $Dom(f)$. Es decir:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$$

Se dirá que $y_0 \in \mathbb{R}$ es imagen de f si existe $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) = y_0$.

El **Recorrido** de una función real de variable real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son imágenes de f . Se representa por $Rec(f)$. Es decir:

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D \text{ con } f(x) = y\}.$$

Definición 3. Dada una función real de variable real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos **grafo o gráfica** de f al conjunto de puntos

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Notar que conociendo G tenemos completamente determinada la función f . Por otra parte, Si dado $x \in \mathbb{R}$ disponemos de una fórmula que permita calcular $f(x)$, entonces se definirá la función f como $y = f(x)$.

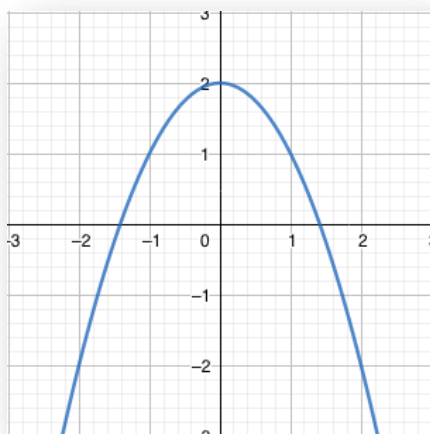
Si lo que tenemos es $y = f(x)$, entenderemos que el dominio de f será el subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ para el que es posible efectuar las operaciones indicadas en la fórmula $f(x)$. En este caso el conjunto A se denominará Campo de Existencia o Dominio de Definición de f .

La fórmula que expresa $f(x)$ puede no tener una expresión analítica. Por ejemplo:

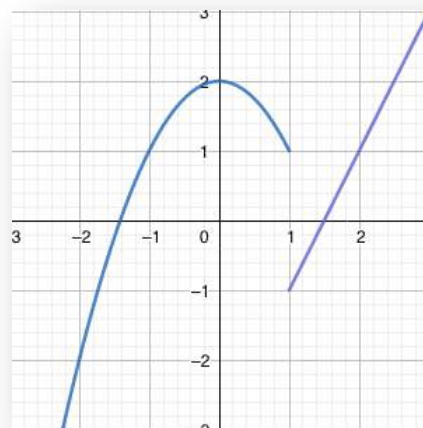
$$f(x) = \text{"Mayor número primo menor que } x\text{"}.$$

Resumiendo, el conocimiento de G define la función, y como G puede representarse en un diagrama cartesiano, la función puede venir dada por una gráfica o por una tabla de valores, además de por una fórmula.

Algunos ejemplos de gráficas de funciones reales de variable real se pueden observar en la siguiente Figura 4.1.



a)



b)

Fig. 4.1. Ejemplos de representaciones gráficas de funciones a) $f(x) = -x^2 + 2$
b) ejemplo de función definida a trozos. (Elaboración propia. Geogebra)

Por otra parte, en la siguiente figura se muestran algunos ejemplos de representaciones gráficas que no corresponden a una función puesto que un mismo valor de x tiene dos valores como imagen.

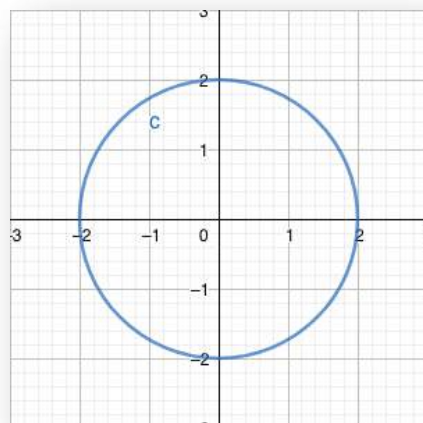
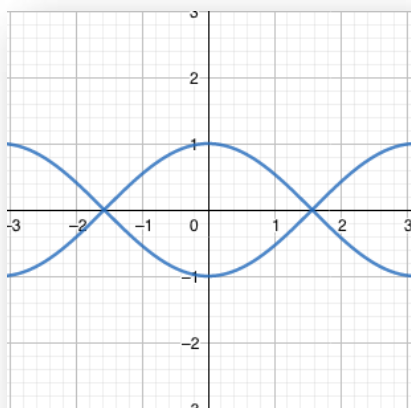


Fig. 4.2. Ejemplos de representaciones gráficas que no corresponden a funciones. (Elaboración propia. Geogebra)

Consideremos una función real de variable real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que:

- f es **sobreyectiva** si $\mathbb{R} = \text{Rec}(f)$; es decir, si todo número real es la imagen de



al menos un elemento $x \in D$. Utilizando notación matemática diríamos que f es sobreyectiva si

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in D / f(x) = y.$$

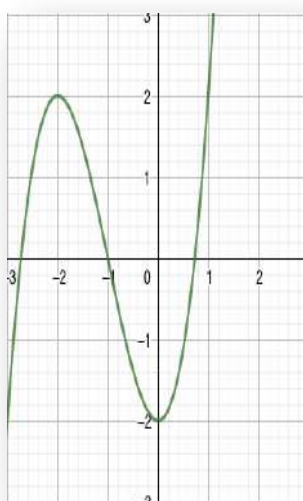
- f es **inyectiva** si son distintas las imágenes $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de cualesquiera dos números reales distintos $x_1, x_2 \in D$. Es decir:

$$\text{Si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D,$$

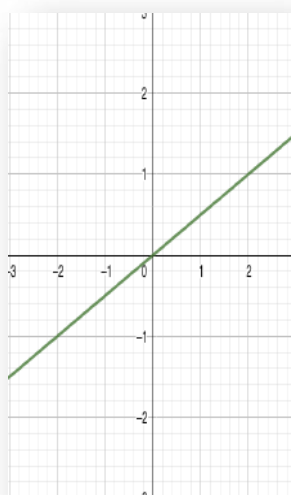
o, lo que es lo mismo:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

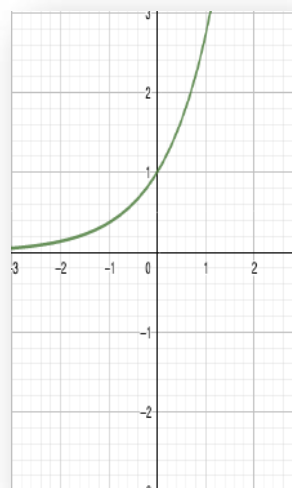
- f es **biyectiva** si es sobreyectiva e inyectiva al mismo tiempo.



a)



b)



c)

Fig. 4.3 Función a) sobreyectiva, b) biyectiva y c) inyectiva. (Elaboración propia. Geogebra).

- f tiene un **máximo local o relativo** en $x = a$ si para todos los valores de x en un intervalo centrado en a se verifica que $f(x) \leq f(a)$. Si $f(a)$ es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, entonces se dice que en $x = a$ la función tiene un **máximo absoluto**.
- f tiene un **mínimo local o relativo** en $x = a$ si para todos los valores x en un intervalo centrado en a se verifica que $f(x) \geq f(a)$. Si $f(a)$ es el menor valor que toma la función en todo su dominio, entonces se dice que en $x = a$ la



función tiene un **mínimo absoluto**.

Consideremos ahora una función real de variable real f definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Diremos que:

- f es **creciente** en un intervalo I cuando dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, siendo $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

Se dirá que f es **estrictamente creciente** cuando se da la desigualdad estricta, es decir:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Un ejemplo de una función estrictamente creciente se muestra en la siguiente Figura 4.4.

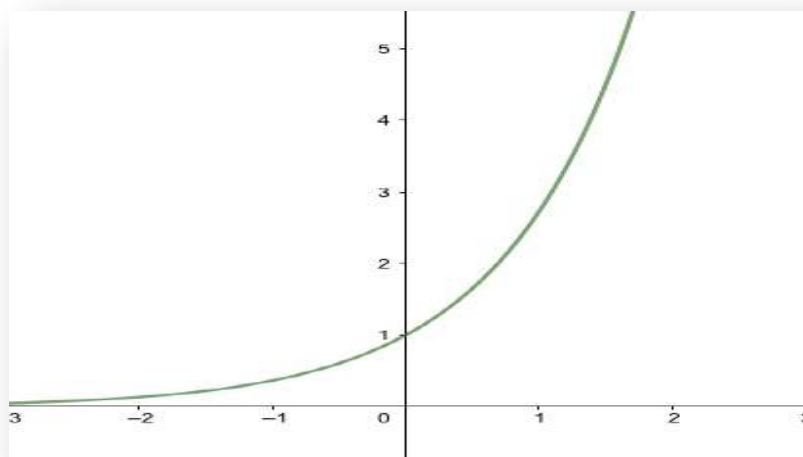


Fig. 4.4 Función estrictamente creciente.(Elaboración propia. Geogebra).

- f es **decreciente** en un intervalo I cuando dados dos puntos $x_1, x_2 \in I$, siendo $x_1 > x_2$, se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

Se dirá que f es **estrictamente decreciente** cuando se da la desigualdad estricta, es decir:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

Un ejemplo de función estrictamente decreciente se muestra en la siguiente Figura 4.5.

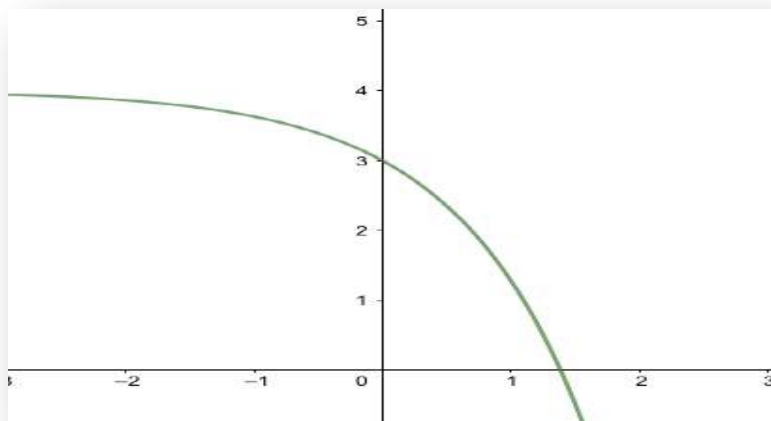


Fig. 4.5 Función estrictamente decreciente. (Elaboración propia. Geogebra)

- f es **convexa** en un intervalo I cuando para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, y para todo número real α con $0 < \alpha < 1$, se verifica que:

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

Así, cuando α recorre el intervalo $(0,1)$, el punto $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ recorre el intervalo (x_1, x_2) .

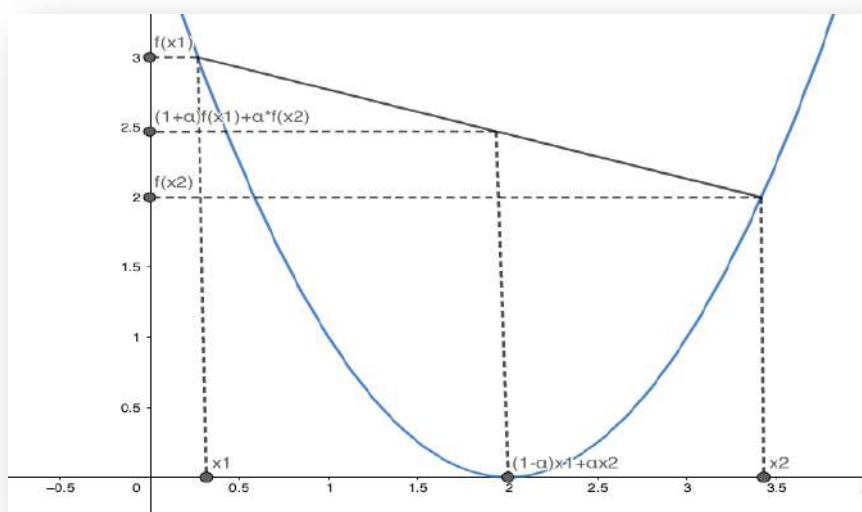


Fig. 4.6 Definición gráfica de convexidad. (Elaboración propia. Geogebra).



- f es **cóncava** en un intervalo I cuando para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, y para todo número real α con $0 < \alpha < 1$, se verifica que:

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \geq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

- Diremos que la función f tiene un punto **de inflexión** en x_0 si f es convexa en (x_1, x_0) y cóncava en (x_0, x_2) , o viceversa.

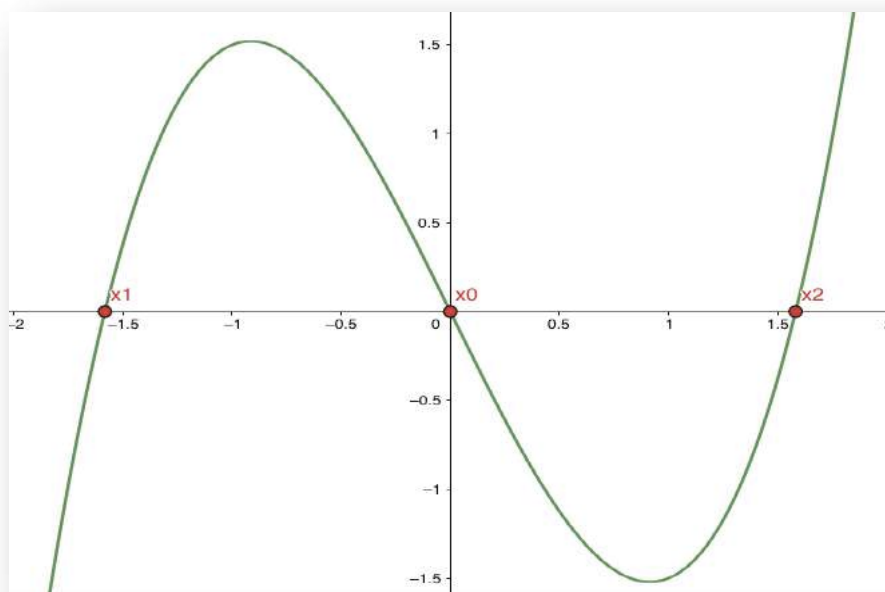


Fig. 4.7 Punto de inflexión de una función (Elaboración propia. Geogebra).

4.3. Operaciones con funciones. Estructuras algebraicas

4.3.1. Suma y resta de funciones

Definición 4. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en $A \subset \mathbb{R}$, se define la **función suma**, que denotaremos por $f + g$, como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A.$$

Veamos a continuación que el conjunto

$$F(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ función real de variable real con } \text{Dom}(f) = A\}$$

con la operación suma de funciones tiene estructura de **grupo abeliano** o **grupo conmutativo**; es decir, que satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento opuesto.



Proposición 1. El par $(F(A), +)$ es un grupo abeliano o grupo conmutativo.

Demostración

En efecto. Veamos que la operación suma de funciones verifica las siguientes propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento opuesto.

1) Propiedad conmutativa.

Sean $f, g \in F(A)$. Se trata de probar que

$$f + g = g + f.$$

De acuerdo con la definición dada para la suma de funciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A.$$

Análogamente,

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) \quad \forall x \in A.$$

Ahora bien, como $f(x)$ y $g(x)$ son números reales, sabemos que

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x).$$

Por tanto, se concluye que

$$f + g = g + f,$$

y así queda probada la propiedad conmutativa.

2) Propiedad asociativa.

Sean $f, g, h \in F(A)$. Se trata ahora de probar que

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

Por la definición de suma de funciones se tiene que

$$((f + g) + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \quad \forall x \in A$$

y

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \quad \forall x \in A.$$

Pero, como $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son números reales, es obvio que

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

Por tanto, se concluye que

$$(f + g) + h = f + (g + h),$$

y así queda probada la propiedad asociativa.

3) Elemento neutro.



Definimos la función **0**: $A \rightarrow \mathbb{R}$ como **0**(x) = 0 $\forall x \in A$.

Veamos que se verifica que

$$f + \mathbf{0} = f = \mathbf{0} + f.$$

En efecto

$$(f + \mathbf{0})(x) = f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in A,$$

por lo que

$$f + \mathbf{0} = f.$$

Análogamente se probaría que

$$\mathbf{0} + f = f,$$

y así queda probada la propiedad elemento neutro.

4) Elemento opuesto.

Dada una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, se llama **función opuesta** de f , y se denota por $-f$, a la función:

$$(-f): A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{tal que } (-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in A.$$

Veamos que:

$$f + (-f) = \mathbf{0} = (-f) + f.$$

En efecto. Por la definición de suma de funciones y la propia definición de función opuesta se tiene que

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in A.$$

En consecuencia,

$$f + (-f) = \mathbf{0}$$

Análogamente se probaría que

$$(-f) + f = \mathbf{0}.$$

Por tanto, queda probada la Proposición. 

Definición 5. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en $A \subset \mathbb{R}$, se define la **función resta** $f - g$ en la forma:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in A.$$



Así, es fácil ver que la resta de funciones $f - g$ se puede considerar como la suma de la función f con la función opuesta de g ; es decir:

$$f - g = f + (-g).$$

4.3.2. Producto y cociente de funciones

Definición 6. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en $A \subset \mathbb{R}$, se define la **función producto**, que se denota por $f \bullet g$, como:

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in A.$$

Proposición 2. El producto de funciones reales de variable real definidas en $A \subset \mathbb{R}$ satisface las propiedades conmutativa, asociativa y elemento neutro.

Demostración

1) Propiedad conmutativa.

Sean $f, g \in F(A)$. Se trata de probar que

$$f \bullet g = g \bullet f.$$

De acuerdo con la definición dada para el producto de funciones

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in A.$$

Análogamente, se tiene que

$$(g \bullet f)(x) = g(x) \cdot f(x) \quad \forall x \in A.$$

Ahora bien, como $f(x)$ y $g(x)$ son números reales, sabemos que

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x).$$

Por tanto, se concluye que

$$f \bullet g = g \bullet f.$$

2) Propiedad asociativa

Sean $f, g, h \in F(A)$. Se trata ahora de probar que

$$(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$$

Por la definición de producto de funciones se tiene que

$$((f \bullet g) \bullet h)(x) = (f \bullet g)(x) \cdot h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) \quad \forall x \in A.$$

y

$$(f \bullet (g \bullet h))(x) = f(x) \cdot (g \bullet h)(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) \quad \forall x \in A.$$

Ahora bien, como $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son números reales, es obvio que



$$(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))$$

Por tanto, se concluye que

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h).$$

3) Elemento neutro

Definimos $\mathbf{1}: A \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathbf{1}(x) = 1 \quad \forall x \in A$.

Veamos que se verifica que

$$f \cdot \mathbf{1} = f = \mathbf{1} \cdot f.$$

En efecto

$$(f \cdot \mathbf{1})(x) = f(x) \cdot \mathbf{1}(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Por lo que

$$f \cdot \mathbf{1} = f.$$

Análogamente se probaría que

$$\mathbf{1} \cdot f = f,$$

y así queda probada la Proposición. 

Proposición 3. El producto de funciones reales de variable real definidas en $A \subset \mathbb{R}$ es distributivo respecto de la suma de funciones.

Demostración

Sean $f, g, h \in F(A)$. Se trata ahora de probar que

$$(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$$

Por las definiciones de producto y de suma de funciones se tiene que

$$((f + g) \cdot h)(x) = (f + g)(x) \cdot h(x) = (f(x) + g(x)) \cdot h(x) \quad \forall x \in A$$

y

$$\begin{aligned} (f \cdot h + g \cdot h)(x) &= (f \cdot h)(x) + (g \cdot h)(x) = \\ &= f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x) \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Pero como $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son números reales, es obvio que

$$(f(x) + g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)$$

Por tanto, se concluye que

$$(f + g) \cdot h = f \cdot (g + h). \quad \text{■}$$



Definición 7. Dada una función real de variable real f definida en $A \subset \mathbb{R}$, se llama **función recíproca de f** , y se expresa por $1/f$, (o $\frac{1}{f}$), a la función definida $\forall x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$ en la forma:

$$\frac{1}{f}: A \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow (1/f)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Es fácil ver que la función recíproca es el **elemento opuesto o inverso** para el producto de funciones. Notar además que

$$\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = \{x \in A / f(x) \neq 0\}.$$

Definición 8. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en $A \subset \mathbb{R}$, se define la **función cociente f/g** , (o $\frac{f}{g}$), en la forma:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A.$$

El cociente de funciones $\frac{f}{g}$ se puede considerar como el producto de la función f por la función recíproca de g ; es decir:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right).$$

4.3.3. Producto de un número real por una función

Definición 9. Sea f una función real de variable real definida en $A \subset \mathbb{R}$ y consideremos un número real a . Se define el **producto de a por f** como la función $a \cdot f$ dada por:

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x), \quad \forall x \in A.$$

De manera similar a como se ha hecho antes para la suma y para el producto de funciones es fácil probar la siguiente Proposición.

Proposición 4. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en $A \subset \mathbb{R}$, y siendo a y b números reales, el producto de números reales por funciones satisface las siguientes propiedades:

- 1) Distributiva respecto de la suma de funciones: $a \cdot (f + g) = a \cdot f + a \cdot g$.
- 2) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(a + b) \cdot f = a \cdot f + b \cdot f$.
- 3) Pseudoativa: $a \cdot (f \cdot g) = (a \cdot f) \cdot g$,



- 4) Existencia del elemento identidad, que es el número real 1, ya que $1 \cdot f = f$.

Así, la Proposición 1 junto con esta Proposición 4 nos proporciona el siguiente Corolario.

Corolario 1. El conjunto de las funciones reales de variable real definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ con las operaciones suma de funciones y producto de un número real por una función tiene estructura de **espacio vectorial**.

4.3.4. Composición de funciones

Definición 10. Dadas las funciones reales de variable real $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: T \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $Rec(f) \subseteq Dom(g)$, se define la **composición de funciones** $g \circ f$ en la forma:

$$g \circ f: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Veamos si son ciertas las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro o identidad y elemento inverso respecto de la composición de funciones.

- Sean las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = x^3$. Ambas funciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ y $Rec(g) \subseteq Dom(f)$. De esta forma tienen sentido las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$. Ahora bien, de acuerdo con la definición dada para la composición de funciones se tiene que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = \cos^3 x$$

y

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \cos(x^3).$$

Por tanto, la **composición de funciones no es conmutativa**, es decir, puede ocurrir que

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

- Si $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ y $Rec(g) \subseteq Dom(h)$, entonces se verifica la **propiedad asociativa**:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

En efecto, $\forall x \in Dom(f)$, por la definición de composición de funciones se tiene que:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

y



$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

- Se define la **función identidad** I en la forma: $I(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Así, la función identidad es el elemento neutro para la composición de funciones; es decir:

$$f \circ I = I \circ f = f.$$

En efecto, $\forall x \in \text{Dom}(f)$ se tiene que:

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$$

e

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x).$$

- Si f es una función real de variable real inyectiva, la **función inversa** f^{-1} se define como:

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{si } f(x) = y.$$

Así, es fácil ver que es cierta la propiedad

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I.$$

4.4. Funciones elementales. situaciones reales donde aparecen

4.4.1. Funciones Polinómicas

Una **función polinómica de grado n** es una función real de variable real definida por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales. Así el dominio de una función polinómica es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

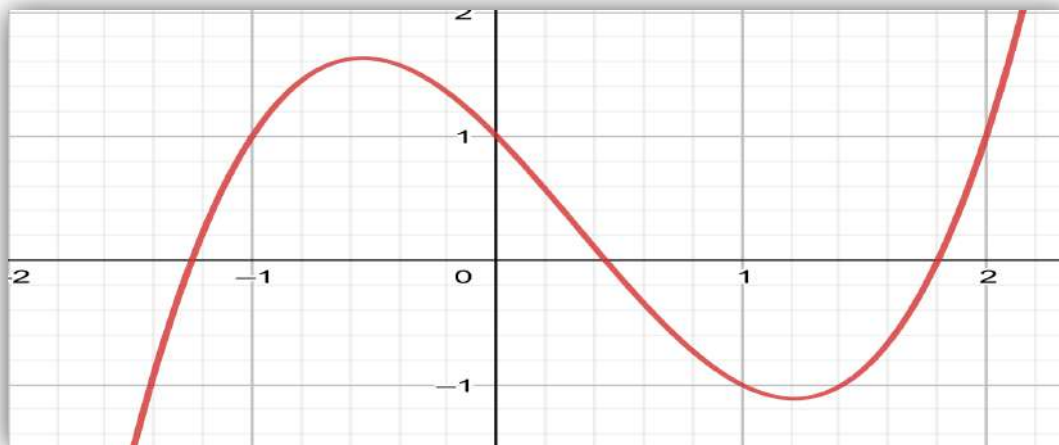


Fig. 4.8 Función polinómica de tercer grado $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. (Elaboración propia. Geogebra).

- **Funciones Polinómicas de grado cero.**

La funciones polinómicas de grado 0 vienen dadas por

$$f(x) = c \text{ siendo } c \in \mathbb{R}$$

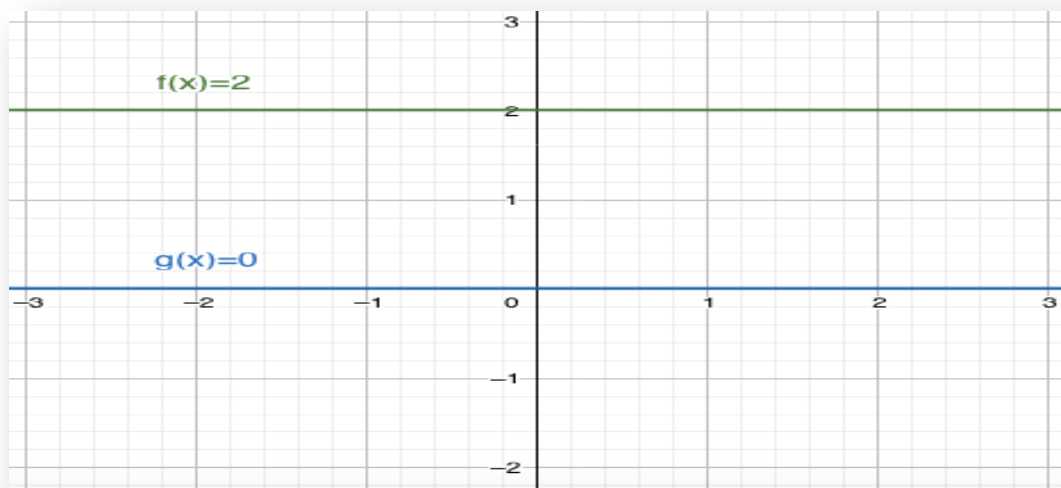


Fig. 4.9 Ejemplo funciones de grado 0, $f(x) = 2$, $g(x) = 0$. (Elaboración propia. Geogebra).



- **Funciones Polinómicas de 1^{er} grado.**

Las funciones polinómicas de primer grado vienen dadas por

$$f(x) = ax + b \text{ siendo } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Propiedades

1. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su recorrido también.
2. Su representación gráfica es una recta de pendiente a y ordenada en el origen b .
3. Según los valores de a y b podemos distinguir varios casos:
 - 3.1 Si $b = 0$, entonces se llama función lineal y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
 - 3.2 Si $b \neq 0$, entonces se llama función afín y su gráfica no pasa por el origen de coordenadas. Cortan al eje OY en el punto $(0, b)$
 - 3.3 Si $a > 0$, entonces son funciones estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$.
 - 3.4 Si $a < 0$, entonces son funciones estrictamente decrecientes en $\mathbb{R}$.

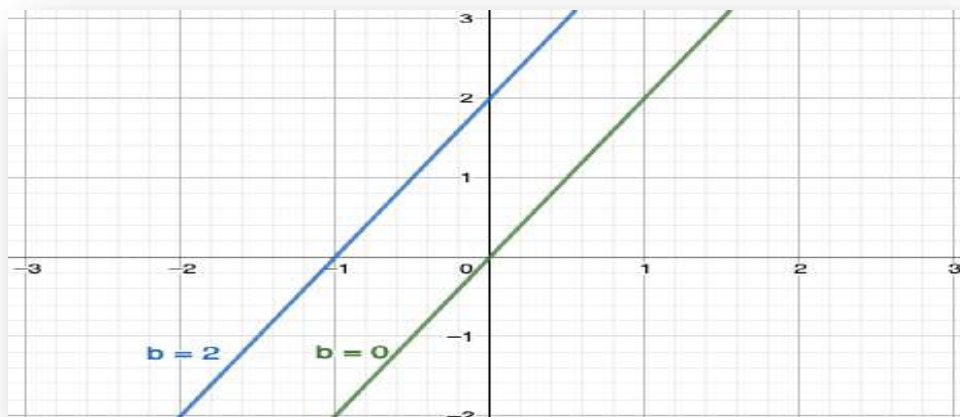


Fig. 4.10 Ejemplo de funciones polinómicas de 1^{er} grado con $b = 0$ y $b \neq 0$
(Elaboración propia. Geogebra)

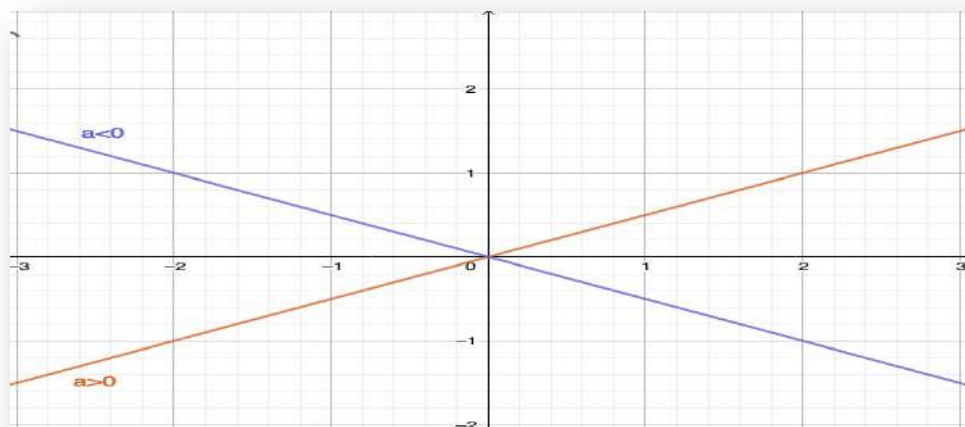


Fig. 4.11 Ejemplo funciones lineales con $a < 0$ y $a > 0$. (Elaboración propia. Geogebra).

Ejemplos de funciones polinómicas de primer grado.

- La distancia recorrida por un móvil en un movimiento rectilíneo uniforme viene dada por la función

$$e(t) = e_0 + v_0 \cdot t$$

- El coste de una determinada cantidad de un producto vendido al peso viene dado por la función lineal

$$c(p) = a \cdot p$$

• Funciones polinómicas de 2º grado

Una función polinómica de segundo grado o cuadrática tiene como expresión general

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Propiedades

1. El dominio y el recorrido de las funciones polinómicas de segundo grado es $\mathbb{R}$.
2. Su representación gráfica es una parábola.
3. Los puntos de corte con el eje OX, si existen, son



$$P_1 \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right) \text{ y } P_2 \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right).$$

4. El punto de corte con el eje OY es $P_3 (0, c)$.
5. El vértice de la parábola se sitúa en el punto

$$V \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \right).$$

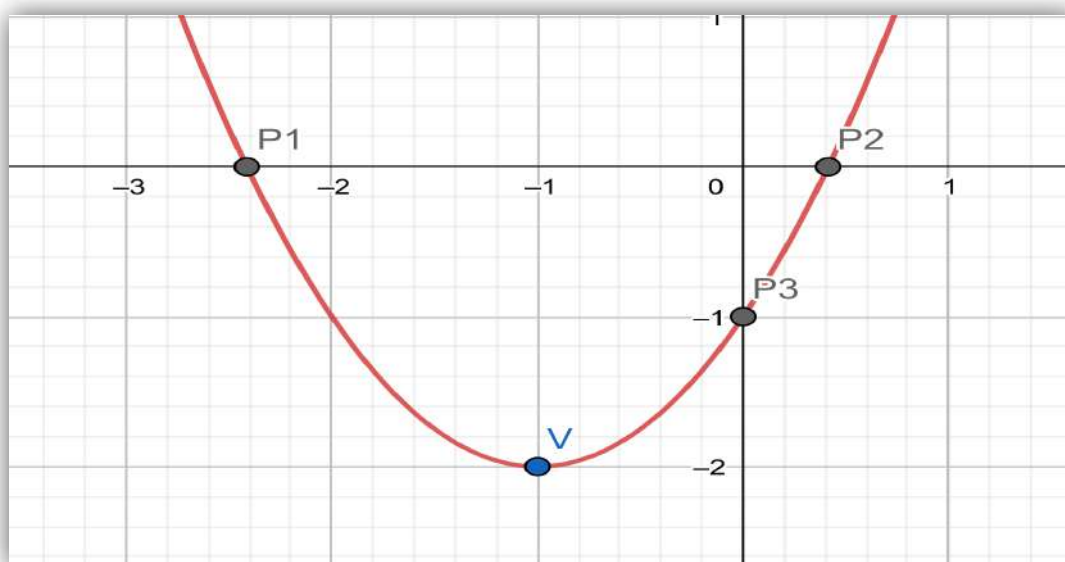


Fig. 4.12 Función polinómica de segundo grado $x^2 + 2x - 1$ con sus puntos característicos. (Elaboración propia. Geogebra).

6. Si $a > 0$, entonces el vértice es el mínimo absoluto de la función y si $a < 0$ el vértice es el máximo absoluto de la función.
7. Tiene un eje de simetría en la recta de ecuación:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

8. Si $a > 0$, entonces la parábola es convexa y si $a < 0$ la parábola es cóncava.



Ejemplos de funciones polinómicas de segundo grado.

- La distancia recorrida por un móvil en un movimiento uniformemente acelerado donde la posición del punto en el momento t viene dado por

$$e(t) = e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a_0t^2$$

siendo e_0 la posición cuando $t = 0$, y v_0 la velocidad inicial del móvil, también en $t = 0$.

- El área de un círculo de radio r viene dada por la función polinómica de segundo grado

$$A(r) = \pi \cdot r^2$$

4.4.2. Funciones Exponenciales

Se define la **función exponencial** con base $a > 0$, $a \neq 1$, como una función real de variable real tal que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hacemos corresponder otro número real dado por a^x , es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \in \mathbb{R} &\rightarrow y = a^x.\end{aligned}$$

Propiedades

1. El dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $(0, +\infty)$.
2. Se verifica que $f(0) = 1$ y $f(1) = a$ para cualquier $a > 0$.
3. Si $a > 1$, entonces f es estrictamente creciente.
4. Si $a < 1$, entonces f es estrictamente decreciente.
5. De las propiedades 3 y 4 se deduce que la función exponencial es inyectiva cualquiera que sea la base.

En la siguiente Figura 4.13 se muestran funciones exponenciales con diferentes valores de a .

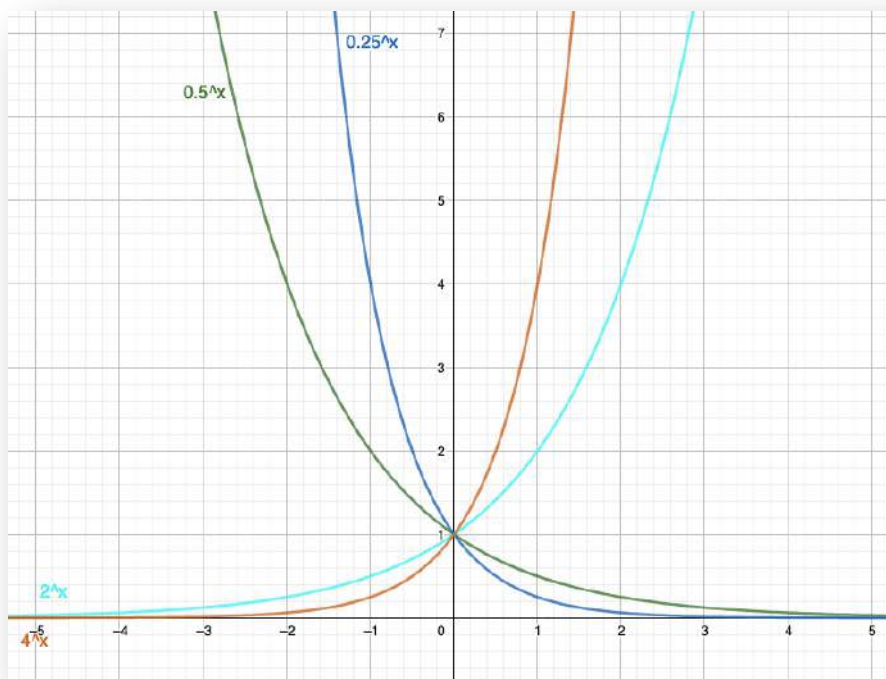


Fig. 4.13 Ejemplos de funciones exponenciales. (Elaboración propia. Geogebra).

Ejemplos de funciones exponenciales

- La desintegración radiactiva se comporta como una ley de decaimiento exponencial

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

donde $N(t)$ es el número de núcleos existentes en un instante de tiempo t , N_0 es el número de núcleos existentes en el instante inicial y λ es la constante de desintegración radiactiva.

- La constante de velocidad de reacción k de una reacción química tiene una dependencia exponencial con el inverso de la temperatura T .

$$k = A \cdot e^{E_a/RT}$$

donde A es el factor de Arrhenius, E_a la energía de activación de la reacción y R la constante de los gases.



4.4.3. Funciones Racionales.

Las **funciones racionales** tienen como expresión

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. El dominio de una función racional es todo $\mathbb{R}$ excepto los puntos que hacen el denominador 0.

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

Las funciones de **proporcionalidad inversa** son casos particulares de las funciones racionales con la siguiente forma:

$$y = f(x) = \frac{k}{x}$$

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ menos el 0, que es el único punto en el que se anula el denominador.

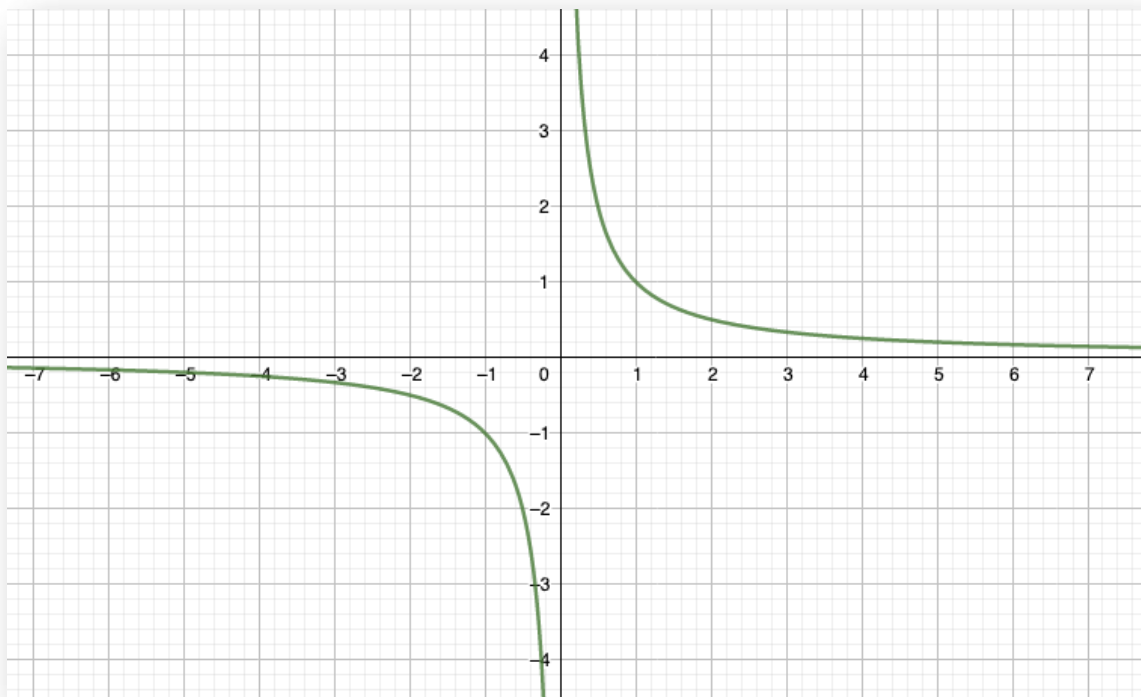


Fig. 4.14 Función de proporcionalidad inversa $f(x) = 1/x$. (Elaboración propia. Geogebra).



Ejemplos de funciones de proporcionalidad inversa

- La aceleración de un cuerpo a vendrá dada por la expresión

$$a = \frac{F}{m}$$

Donde F es la fuerza aplicada al objeto y m su masa. Por lo tanto, la aceleración y la masa tendrán una relación inversamente proporcional para una fuerza constante.

- La frecuencia ν de una onda y su longitud de onda λ tienen una relación inversamente proporcional dada por

$$\nu(\lambda) = c/\lambda$$

donde c es la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

4.4.4. Funciones Logarítmicas

Se denomina **función logarítmica** con base a ($a > 0$ y $a \neq 1$) a la función inversa de la función exponencial en base a , es decir:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R} \quad (a > 0 \text{ y } a \neq 1).$$

La expresión $\log_a x$ se lee “logaritmo en base a de x ” y se verifica que:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Observaciones

- Si la base es el número “ e ”, se escribe $\ln x$ o $\text{Ln}(x)$, en lugar de $\log_e x$ y se lee “logaritmo neperiano o logaritmo natural de x ”. Se verifica que:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

- Si la base es 10 se escribe $\log x$, sin indicar la base, y se lee “logaritmo decimal de x ” o simplemente “logaritmo de x ”. En este caso se tiene que:

$$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x.$$

Propiedades:

1. Los números negativos no tienen logaritmo, ya que a^x nunca adquiere valores negativos, de ahí que el dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$.
2. El logaritmo de la unidad es 0: $\log_a 1 = 0$, puesto que $a^0 = 1$.
3. El logaritmo de la base es uno: $\log_a a = 1$, puesto que $a^1 = a$.
4. Si $a > 1$, la función $\log_a x$ es estrictamente creciente.
5. Si a es tal que $0 < a < 1$, entonces la función $\log_a x$ es estrictamente



decreciente.

6. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de cada factor, esto es:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

7. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es decir:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

8. El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base, es decir:

$$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Como caso particular de la propiedad 8 se tiene que el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz

$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Un ejemplo de función logarítmica se muestra en la siguiente Figura 4.15.

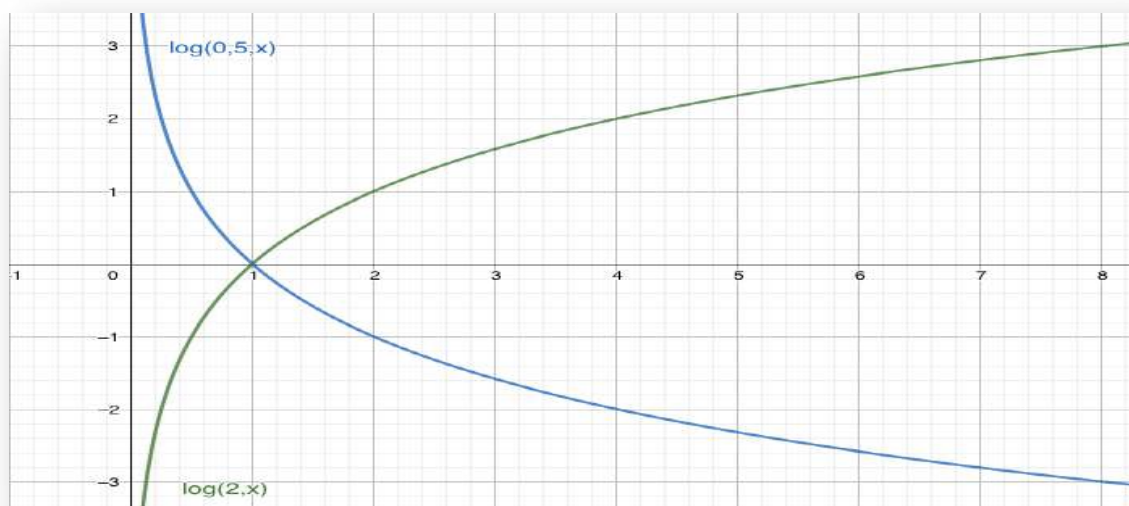


Fig. 4.15 Función logarítmica $\log_2(x)$ y $\log_{1/2}(x)$. (Elaboración propia. Geogebra).

Como **ejemplos** de funciones logarítmicas tenemos las mismas que para las exponenciales, al ser unas inversas de otras. Además tenemos la escala de Richter que mide la intensidad de los terremotos es logarítmica.

4.4.5. Funciones Definidas a Trozos

Se dice que una función está **definida a trozos** si se define por intervalos y en cada intervalo se tiene una función distinta. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0 \\ -e^x & x \geq 0. \end{cases}$$

En la Figura 4.16 se representa esta función $f(x)$.

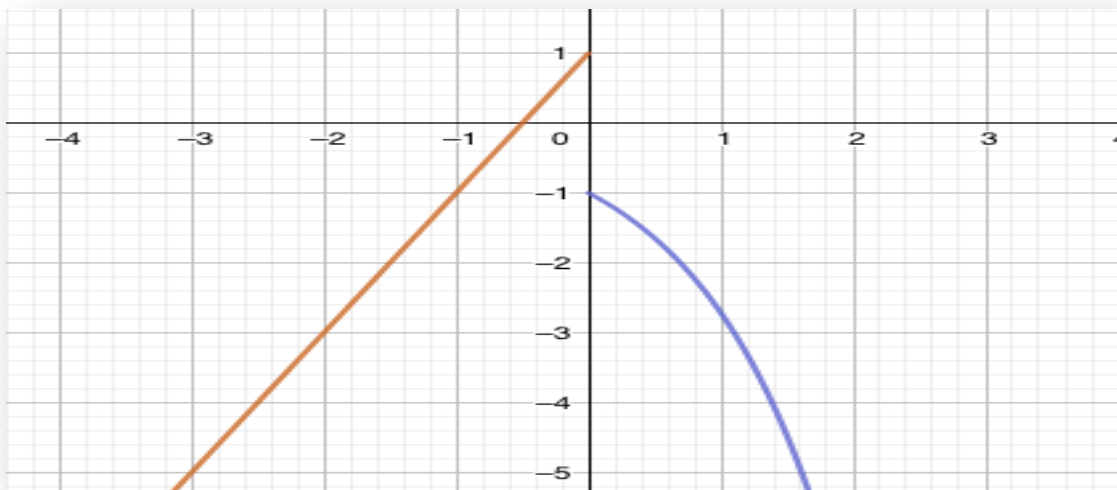


Fig. 4.16 Ejemplo de función definida a trozos (Elaboración propia. Geogebra).

- **Funciones escalonadas**

La más conocida es la función parte entera de x , que se denota por $E(x)$, y que a cada número real x le hace corresponder el mayor número entero menor o igual que x .

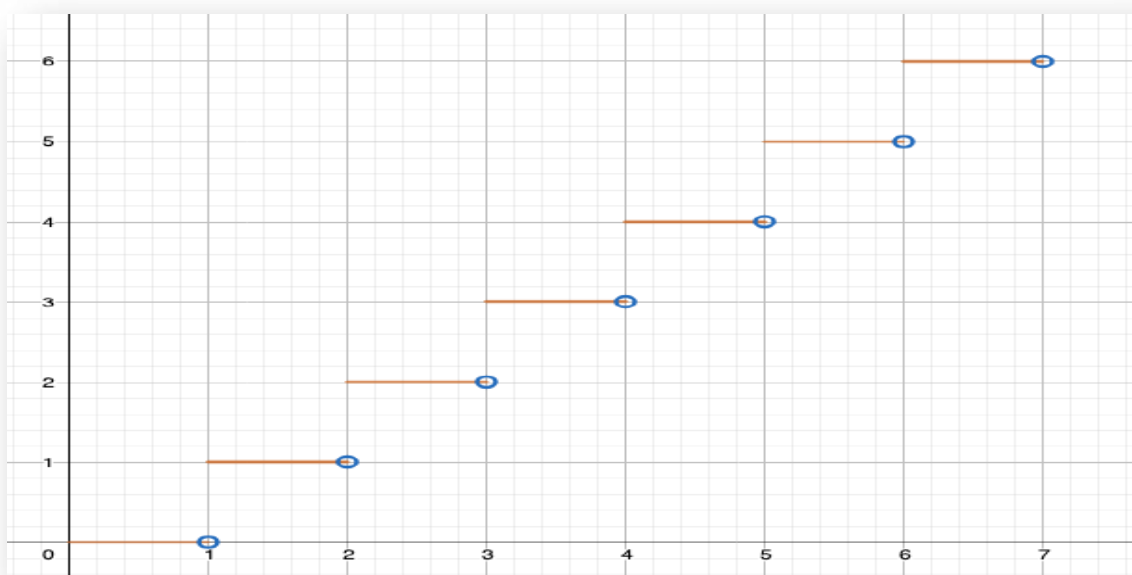


Fig. 4.16 Función parte entera de x (Elaboración propia. Geogebra).

4.4.6. Funciones Trigonómicas

Las **funciones trigonométricas** son aquellas que proporcionan el valor de una razón trigonométrica en relación a un ángulo.

- **Función seno**

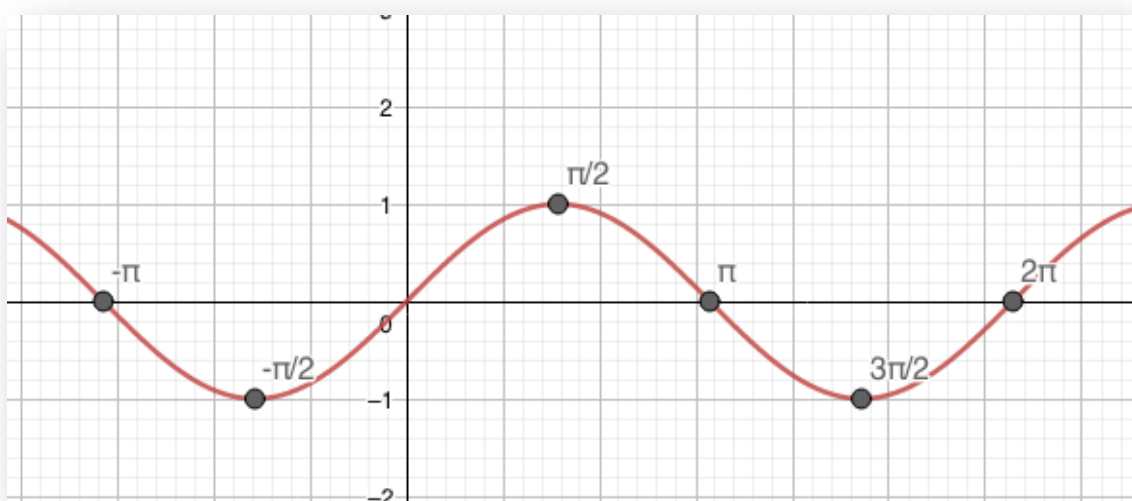


Fig. 4.17 Función seno (Elaboración propia. Geogebra).



Propiedades

1. Su dominio es $\mathbb{R}$.
2. Su recorrido es $[-1,1]$, ya que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
3. Es estrictamente creciente en los intervalos (a, b) tales que
$$a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ y } b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}.$$
4. Es estrictamente decreciente en los intervalos (a, b) tales que
$$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ y } b = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}.$$
5. Tiene máximos en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
6. Tiene mínimos en los puntos $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Función coseno

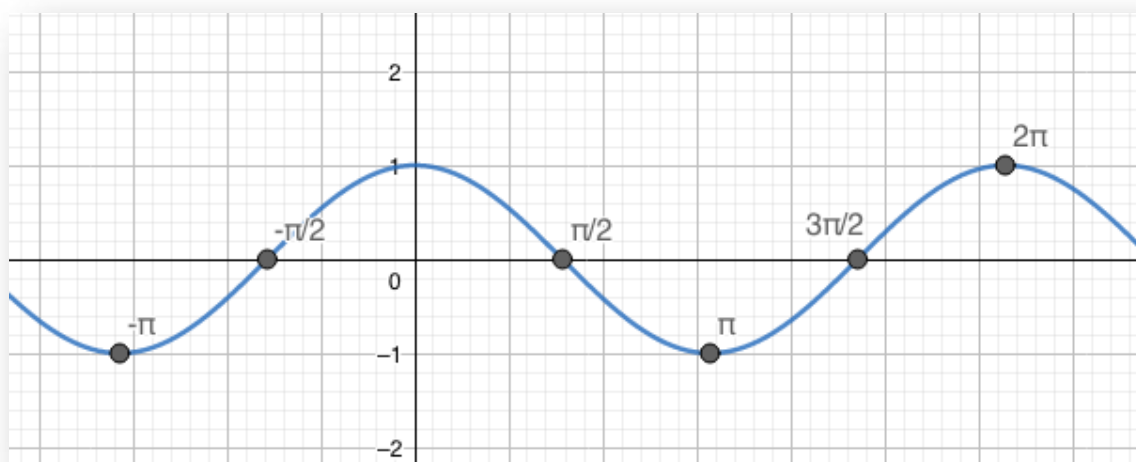


Fig. 4.18 Función coseno (Elaboración propia. Geogebra).

Propiedades

1. Su dominio es $\mathbb{R}$.
2. Su recorrido es $[-1,1]$, ya que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
3. Es estrictamente creciente en los intervalos (a, b) donde $a = -\pi + 2k\pi$ y $b = 2k\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
4. Es estrictamente decreciente en los intervalos (a, b) donde $a = 2k\pi$ y

$$b = \pi + 2k\pi \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Tiene máximos en los puntos $x = 2k\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
6. Tiene mínimos en los puntos $x = \pi + 2k\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Función tangente

La **función tangente**, que se denota por $tg(x)$, se define como

$$tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

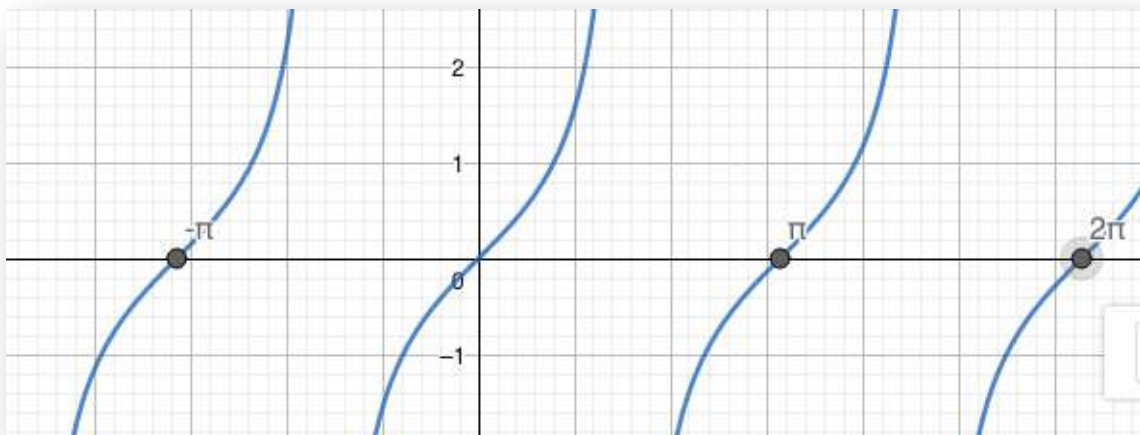


Fig. 4.19 Función tangente. (Elaboración propia. Geogebra).

Propiedades

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Corta al eje OX en los puntos $x = k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Función cotangente

La **función cotangente**, que se denota por $\cot(x)$, se define como

$$\cot(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}.$$

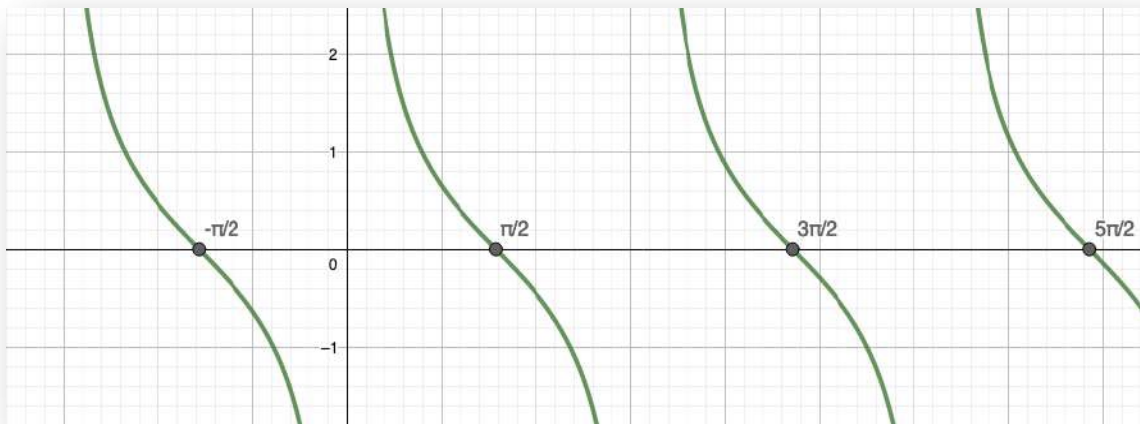


Fig. 4.20 Función cotangente. (Elaboración propia. Geogebra).

Propiedades

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es estrictamente decreciente en todo su dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Corta al eje OX en los puntos $x = k\pi/2$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Función secante

La **función secante**, que se denota por $\sec(x)$, se define como

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

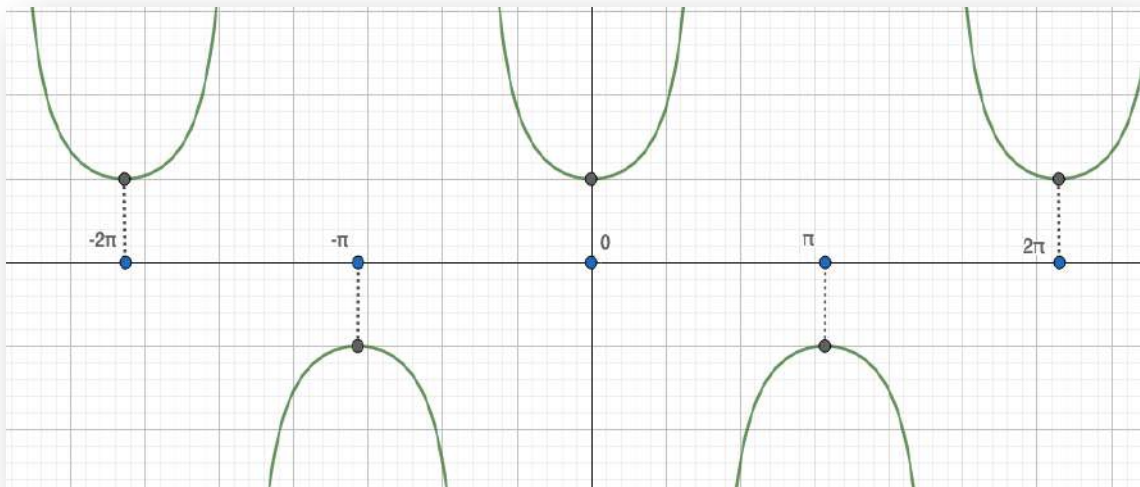


Fig. 4.21 Función secante. (Elaboración propia. Geogebra).

Propiedades

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es estrictamente creciente en los intervalos (a, b) donde $a = 2k\pi$ y $b = (2k + 1)\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- Es estrictamente decreciente en los intervalos (a, b) donde $a = (2k + 1)\pi$ y $b = (2k + 2)\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- Tiene máximos en los puntos $x = \pi + 2\pi k$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- Tiene mínimos en los puntos $x = 2\pi k$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Función cosecante

La **función cosecante**, que se denota por $\operatorname{cosec}(x)$, se define como

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

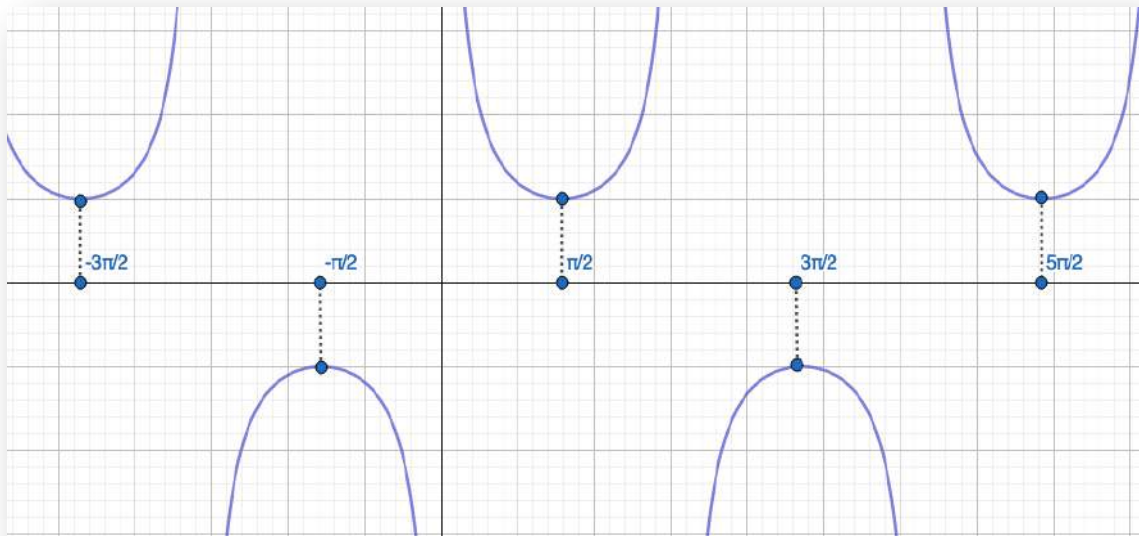


Fig. 4.22 Función cosecante. (Elaboración propia. Geogebra).

Propiedades

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{2k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es estrictamente creciente en los intervalos (a, b) , donde $a = k\pi/2$ y $b = \frac{k+1}{2}\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- Es estrictamente decreciente en los intervalos (a, b) donde $a = \frac{k+1}{2}\pi$ y $b = \frac{k+2}{2}\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- Tiene máximos en los puntos $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.
- Tiene mínimos en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.



5. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En este apartado se va a llevar a cabo un análisis del currículo de 4º de la E.S.O. en la asignatura de *Matemáticas orientadas a la enseñanzas académicas*, concretamente, del bloque de funciones. El estudio se realizará mediante una comparativa entre los contenidos desarrollados en dos libros de texto de diferentes editoriales. Se revisará que dichos libros de texto cumplen con lo estipulado en la normativa vigente y si hay relación entre los contenidos y actividades que desarrollan cada uno, teniendo como referencia la fundamentación epistemológica anteriormente realizada en este trabajo. A continuación, se especifica la normativa vigente que concreta el currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

- RD 1105/2014 del 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la E.S.O y Bachillerato.
- Orden del 14 de julio del 2016 por la que se establece el currículo básico de la E.S.O. y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Con respecto a los libros de texto utilizados para este apartado, se han seleccionado las editoriales Santillana de Jose A. Almodóvar et al. (2018) y Anaya de José Cólera et al (2018).

5.1. Ajuste de contenidos

Según el RD 1105/2014 los contenidos a impartir en la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* de 4º de la E.S.O. en el bloque de funciones son:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Estos son los contenidos mínimos que un libro de texto de este curso debe contener dentro del bloque de funciones. No obstante, es frecuente que las editoriales añadan otros contenidos que permitan un aprendizaje más completo y deseable. En la siguiente Tabla 5.1 se recogen los contenidos de ambos libros de texto en la unidad de funciones.



CONTENIDOS	
Editorial Anaya	Editorial Santillana
Unidad 8 Funciones elementales	Unidad 9 Funciones
• Presentación de funciones mediante tablas gráficas o fórmula analítica. • Definición de función, variable dependiente e independiente. • Dominio de una función. • Continuidad y discontinuidad. • Funciones lineales y tipos. Pendiente de una recta. Ecuación punto-pendiente. • Funciones cuadráticas y representación gráfica de parábolas. • Funciones radicales. • Funciones de proporcionalidad inversa.	• Definición función real de variable real, reconociendo dominio, recorrido, variable independiente, variable dependiente y gráfica. • Representación de gráficas de funciones sencillas y hallar sus dominios. • Hallar los puntos de discontinuidad. • Definir y reconocer función creciente, función decreciente, máximos y mínimos. • Determinar la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. • Determinar puntos de corte con los ejes de coordenadas. • Definir y calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.

Tabla 5.1 Comparativa contenidos desarrollados.

Se observan diferencias muy apreciables entre ambas editoriales. Debido a que el bloque de funciones da lugar a varias posibles organizaciones de los contenidos, se pueden encontrar diferentes propuestas en los libros de texto.

Revisando los contenidos de ambas editoriales se puede apreciar una primera diferenciación entre ellas. En el texto de la editorial Santillana no se hace referencia a los distintos tipos de funciones en el tema analizado, sin embargo, en la editorial Anaya combina los conceptos básicos de función matemática con algunos tipos de



funciones como cuadráticas, radicales y de proporcionalidad inversa. La editorial Santillana, posteriormente, dedica 2 temas completos (tema 10 y tema 11) al desarrollo los tipos de funciones mencionadas y, además, añade otros tipos relevantes como exponenciales, logarítmicas, racionales, radicales, etc. Por otro lado, la editorial Anaya los termina de desarrollar en el tema 9 que viene a continuación del tema 8. En resumen, la editorial Santillana dedica 3 temas al bloque de funciones, dejando uno completo para los conceptos de función de variable real y dedicando dos temas completos al desarrollo de todos los tipos de funciones, mientras que la editorial Anaya dedica solo 2 e introduce algunos tipos de funciones en el tema inicial.

Otra apreciación relevante está relacionada con el concepto de tasa de variación media. Mientras que la editorial Santillana dedica un apartado completo del tema 9 para desarrollar este concepto, en la editorial Anaya no se encuentra referencia a este concepto en el tema 8 ni en los posteriores.

Tomando como criterio la ausencia de algunos de los contenidos exigidos en la editorial Anaya y el mayor desarrollo general de los conceptos en la editorial Santillana, se puede deducir que esta última está mejor adaptada a la normativa vigente y, por lo tanto, al currículo básico de esta asignatura.

5.2. Estructura y desarrollo de contenidos

En este apartado se dejará a un lado la normativa vigente y solo se realizará una comparativa entre los dos libros de texto. Se valorarán la diferente estructuración de los contenidos y se compararán el desarrollo de algunos conceptos importantes.

En el inicio del tema se encuentran las primeras diferencias. En Anaya se comienza con una parte introductoria sobre diferentes formas de interpretar las funciones. En contraposición, Santillana comienza el tema directamente con rigurosas definiciones sobre función, imagen, dominio, recorrido, variable dependiente e independiente. Es notable una mayor densidad de texto, definiciones y ejemplos algebraicos en la editorial Santillana mientras que en Anaya se apuesta más por la visualización, dando gran protagonismo a gráficas, figuras y tablas. Además, en Anaya se separan los conceptos de dominio y recorrido en otro apartado posterior. En la siguiente Tabla 5.2 se muestra un esquema sobre la organización de los conceptos introductorios de la Unidad Didáctica.



Santillana	Anaya
1. Idea de función	1. Definiciones básicas
1.1 Definición de función	- Definición de función - Variable dependiente - Variable independiente - Eje de abscisas - Eje de ordenadas - Ejemplos de gráficas.
- Concepto de imagen - Definición de función - Recorrido - Dominio - Nomenclatura $f(x) = y$ - Variable independiente x - Variable independiente y.	

Tabla 5.2 Desarrollo del concepto de función, izquierda editorial Santillana, derecha editorial Anaya.

Cabe destacar la ausencia del concepto de recorrido a lo largo de la unidad en la editorial Anaya.

A continuación se presentan las definiciones que cada editorial propone al concepto de función:

Editorial Anaya

“Una función es una relación o correspondencia entre dos magnitudes o variables x e y , de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y .”

Editorial Santillana

“Una función liga a dos variables numéricas a las que habitualmente se les llama x e y .

*x es la **variable dependiente** y es la **variable independiente***

La función, que se suele denotar por $y = f(x)$, asocia a cada valor de x con un único valor de y .”



De la comparación de ambas definiciones se puede deducir que el libro de texto de Anaya no utiliza notación algebraica. Sin embargo, el libro de texto de Santillana introduce $y = f(x)$ para definir el concepto de función y utiliza los conceptos de variable dependiente e independiente en la misma definición.

A continuación, en ambos libros de texto se procede a desarrollar el concepto de continuidad, en la cual se aprecian diferencias significativas ya que la editorial Santillana introduce lenguaje algebraico mientras que la editorial Anaya se limita a texto sencillo con negrita en las palabras clave.

Posteriormente se detecta otra carencia en el libro de texto de Anaya, puesto que suprime el concepto de crecimiento-decrecimiento y máximo-mínimo. Por otro lado, el libro de Santillana define dichos conceptos con precisión y con ayuda de figuras ilustrativas.

En los últimos apartados, los libros de texto se alejan completamente en cuanto a similitud de contenidos. El libro de Anaya directamente introduce las funciones lineales, añadiendo el concepto de ecuación-punto pendiente y a continuación presenta las funciones cuadráticas, parábolas, funciones inversas y radicales. El libro de texto de Santillana sigue con los conceptos de función de variable real, añadiendo puntos de cortes con los ejes, intervalos, pendiente y tasa de variación media.

5.3. Actividades propuestas

La estructura de propuesta de actividades es muy similar en ambos libros. Primero hay una explicación del concepto, en algunos casos un ejemplo numérico ya resuelto, y luego una proposición para resolver ejercicios al final de la página. La dificultad de las actividades es muy similar como se puede observar a continuación.

Actividades propuestas por la editorial Anaya

4.- Representa:

a) $y = 2x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

5.- Representa:

a) $y = 3$

b) $y = -2$

c) $y = 0$

6.- Representa:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4x} + 5$

d) $y = -3x - 1$



7.- Un móvil, en el instante inicial, está a 3 m. del origen y se aleja de éste con una velocidad de 2 m/s. Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

8.- Un móvil que inicialmente llevaba una velocidad de 8 m/s. frena con una aceleración -1 m/s^2 . Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.

Actividades propuestas por la editorial Santillana

1.- Para cada una de las siguientes funciones, haz una tabla de valores, represéntala gráficamente y halla el dominio.

a) $y = -\sqrt{x}$

b) $y = -x^3$

c) $y = 2x + 3$

d) $y = 4x$

2.- Observa la gráfica de la función $y = 1/x$.

a) ¿Tiene imagen del valor $x = 0$?

b) ¿Entra 0 en el dominio de esta función?

c) ¿Cómo son los valores de y a medida que la variable x toma valores positivos próximos a 0? ¿Y cuando los valores de x son negativos?

La principal diferencia es la gran cantidad de ejercicios resueltos que desarrolla la editorial Anaya, tanto al final del tema como durante el desarrollo de los apartados. Además, la descripción de estos ejercicios es exhaustiva y precisa, facilitando mucho el aprendizaje del alumnado. Sin embargo, en la editorial Santillana el número de ejercicios resueltos es muy reducido y en su mayoría figuran al final de tema. A continuación se muestra un ejemplo de ejercicio resuelto de la editorial Santillana.

Ejemplo de problema resuelto editorial Santillana

2.- Representar $y = x^2 - 3x - 4$.

1.º Obtención de la abscisa del vértice:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3. \text{ Abscisa del vértice} = 3/2.$$

2.º Obtención de los puntos próximos:

$$\text{Vértice: } f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{4} = -6.25. \text{ El vértice es } (1.5; -6.25).$$

Puntos próximos



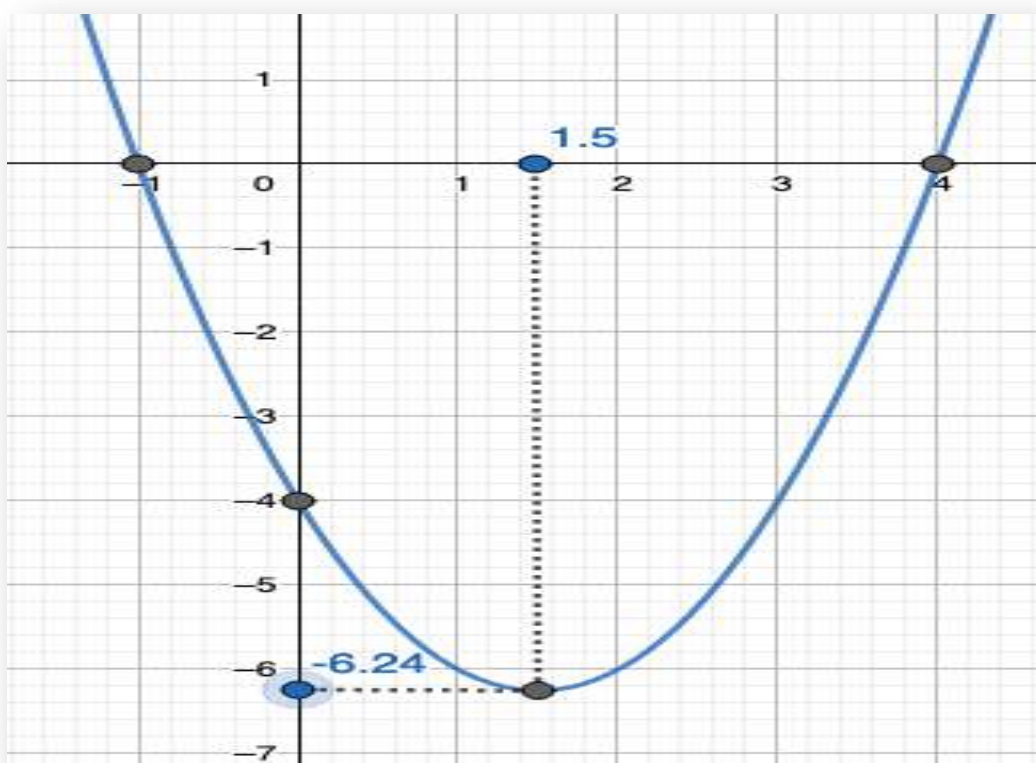
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

3.º Puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje X:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4.$$

Corte con el eje Y: (0,4).





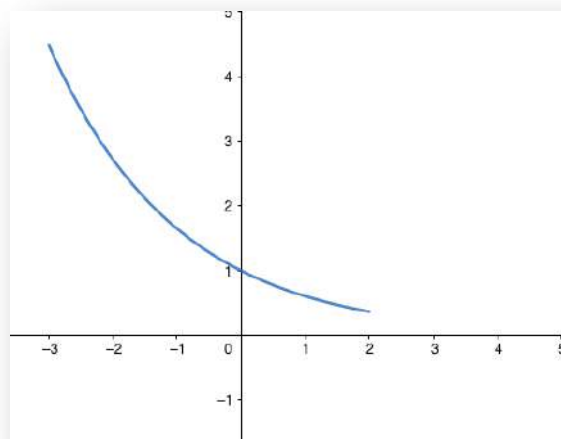
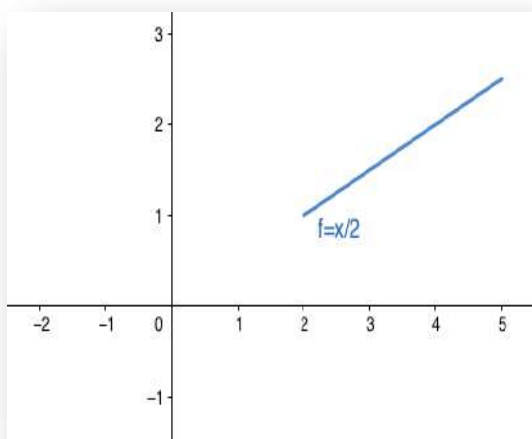
Ejemplo de problema resuelto editorial Anaya

7. Problema resuelto.

Dibuja una gráfica continua correspondiente a una función $y = f(x)$ en los siguientes casos.

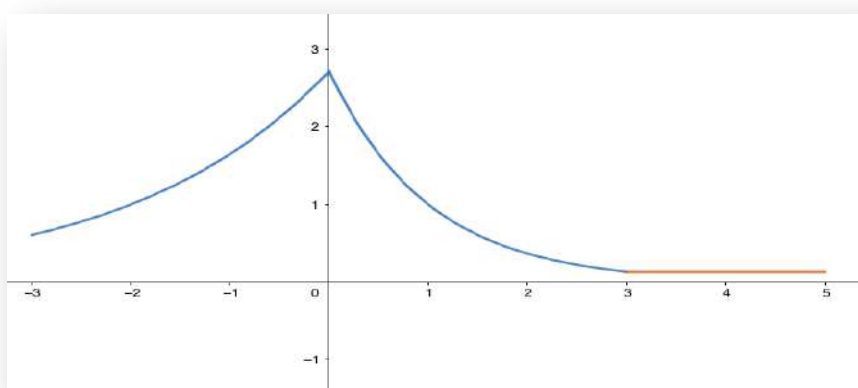
- a) Creciente en $[2,5]$.
- b) Decreciente en $[-3,2]$ y corte con el eje OX en $x = 1$.
- c) Creciente en $[-3,0]$, decreciente en $[0,3]$ y constante en $[3,5]$.

SOLUCIÓN



a)

b)



c)



5.4. Conclusión

En términos generales, la editorial Santillana se extiende mucho más en los contenidos, utiliza un lenguaje más académico, contiene todos los conceptos básicos necesarios y tiene una estructuración más adecuada y organizada. Por otro lado, Anaya plantea un tema mucho más visual y atractivo para el alumno, reduciendo el texto y ampliando figuras e imágenes. No obstante, la carencia de numerosos conceptos omitidos hace que no sea una opción muy recomendable. Sí que cabe resaltar que en la parte de actividades propuestas Anaya plantea un modelo mucho más adecuado, con varios ejercicios resueltos, bien explicados e ilustrados que pueden aligerar el trabajo al docente y mejorar el aprendizaje del alumnado. En este apartado, Santillana plantea un modelo mucho más formal sin tantos ejercicios resueltos y actividades al final de cada página.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA

6.1. Título

El título de la Unidad Didáctica que se ha escogido para este Trabajo Fin de Máster es “Funciones reales de variable real” y corresponde al Bloque IV del currículo de la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* de 4º de la E.S.O.

6.2. Justificación

Esta Unidad Didáctica va dirigida al alumnado de 4º de la E.S.O. que cursa la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*. El tema “Funciones reales de variable real” es el nº 8, precedido del bloque de Geometría y continuado por el tema 9 “Funciones elementales”. Con esta unidad se reforzarán conceptos ya conocidos en cursos anteriores y se introducirán otros nuevos como las operaciones con funciones, composición de funciones y puntos de corte con los ejes, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento.

Desde los primeros cursos de la E.S.O. se trabaja con los ejes de coordenadas, representación gráfica de puntos y tablas de datos. En este curso, el alumnado deberá profundizar mucho más sobre la representación gráfica de funciones, analizando conceptos importantes como dominio, recorrido, tendencias, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. Dominar con fluidez todos estos conceptos



les proporcionará las bases para el siguiente tema donde estudiarán los distintos tipos de funciones más significativas y sus características más relevantes.

Los contenidos aparecen especificados en los bloques 1 y 4 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, en el que se establece el currículo básico de la E.S.O. junto con las aportaciones de la Orden de 14 de julio de 2016 por la que se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

6.3. Contextualización del centro y del aula

6.3.1. Descripción del centro

El centro educativo que se utilizará como referencia en la elaboración de la Unidad Didáctica es el I.E.S. El Valle. Está enclavado en un barrio de Jaén que se puede considerar como de especial dificultad debido a sus carencias de infraestructuras urbanas y tipos de vivienda, su población, el nivel socio-económico y cultural de sus vecinos y, sobre todo, por su escala de conflictividad social.

El alumnado del primer ciclo de E.S.O. procede esencialmente del barrio y de unas cercanas viviendas sociales. A partir del segundo ciclo se incorpora alumnado procedente de La Guardia (Jaén). En los P.C.P.I., Bachillerato y, sobre todo, en los Ciclos Formativos, el alumnado proviene de otras zonas urbanas de la capital y estudiantes de la localidad de Pegalajar (Jaén) ingresan para cursar Bachillerato.

6.3.2. Oferta educativa

Se resume en la siguiente Tabla 6.1.

Educación Especial: Audición y Lenguaje (Unidad específica)		
E.S.O.: Primer y Segundo Ciclo		
BACHILLERATO		
Humanidades y CC.SS.	Ciencias y Tecnología	Artes
P.C.P.I.		
Ayudante de Cocina	Operario de Soldadura y Construcciones Metálicas	Ayudante de Mantenimiento de Vehículos
FORMACIÓN PROFESIONAL INICIAL DE GRADO MEDIO		
Cocina y Gastronomía	Servicios en Restauración	Aceite de Oliva y Vinos
Electromecánica de Vehículos	Carrocería	Soldadura y Calderería
Mecanizado	Montaje y mantenimiento de instalaciones de frío, climatización y calor	
FORMACIÓN PROFESIONAL INICIAL DE GRADO SUPERIOR		
Restauración	Automoción	Programación de la Producción en Fabricación Mecánica

Tabla 6.1. Resumen de la oferta educativa del I.E.S. El Valle.



6.3.3. Instalaciones y materiales

El Centro cuenta con un total de seis edificios en los que alberga las distintas dependencias:

- Edificio E-1. Entrada Principal, Conserjería I (Servicio de reprografía), Sala de Tutorías, Despachos de Administración, Secretaría, Salón de Actos y Usos Múltiples, Orientación, Biblioteca, Sala del Profesorado I (Servicio de reprografía), Departamentos (8), Dependencias de Hostelería (Departamento, Taller-Comedor, Taller-Cafetería, Vestuarios del Profesorado, tres Cocinas-Talleres, Lavandería, Economato, Vestuarios del Alumnado y 3 Aulas)
- Edificio E-2. Conserjería II, Aulario de Bachillerato-Ciclos Formativos (9 Aulas Ordinarias y Sala de Calderas)
- Edificio E-3. Dependencias de Mantenimiento de Vehículos (Departamento, Almacén, 4 Talleres, Aula) Aula de Artes I y II, Cafetería, Dependencias de Física y Química (Laboratorio, Departamento, Aula), Dependencias de Ciencias de la Naturaleza (Laboratorio, Departamento, Aula) Aula de P.C.P.I., Aula de Tecnología (2), Dependencias de Fabricación Mecánica (Taller del P.C.P.I., Aula Ordinaria)
- Edificio E-4. Dependencias de Fabricación Mecánica (Departamento, Aula General, Laboratorio de Ensayos, Aula de Control Numérico, Taller, Vestuarios del Alumnado, Almacén)
- Edificio E-5. Aulario de la E.S.O. (Conserjería III (Servicio de reprografía), Sala del Profesorado II, 12 Aulas Ordinarias, 2 Aulas de Educación Especial, Almacén, Sala de Calderas).
- Edificio E-6. Gimnasio, Almacén, Dependencias de Fabricación Mecánica (Taller de Soldadura, Aula Ordinaria), Dependencias de Mantenimiento y Servicios a la Producción (Departamento, 2 Talleres, 2 Aulas Ordinarias), Dependencias de Mantenimiento de Vehículos (Taller de Carrocería, Aula Ordinaria), Dependencias de Industrias Alimentarias (Departamento, Sala de Catas, Laboratorio de Análisis, Taller, 2 Aulas Ordinarias). Asimismo se cuenta con una pista polideportiva descubierta y una gran extensión de patios y zonas ajardinadas.



6.3.4. Descripción del aula

El aula utilizada para la docencia de la asignatura de *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* de 4º de la E.S.O. B es el aula a-25 del edificio E-5. El aula tiene un diseño rectangular, con ventanas que dan al exterior del recinto por el lado que limita con la carretera de Madrid. Las dimensiones son pequeñas, no siendo adecuada para grupos de más de 20 alumnos. En la actualidad el aula cuenta con 20 pupitres y 20 sillas, un proyector, una pizarra estándar y una mesa para el profesor con su correspondiente ordenador.

En el presente grupo académico el grupo de 4º de la E.S.O. B lo conforman 10 alumnos y 3 alumnas, casi todos procedentes de La Guardia (Jaén). En general, el nivel académico es medio-bajo. Los alumnos son muy participativos en clase y suelen traer las tareas realizadas. Sin embargo, los resultados de las pruebas escritas no suelen ser buenos. En su mayoría pretenden cursar Bachillerato, aunque hay algunos que tienen intención de realizar Formación Profesional de Grado Medio.

6.3.5. Valoración

El centro cuenta con los recursos necesarios en todas las aulas donde se imparte Secundaria. Además, al disponer de un ordenador y un proyector en cada clase, se fomenta el uso de las nuevas tecnologías y se facilita llevar a cabo otro tipo de actividades más interactivas y visuales.

La metodología de enseñanza tradicional de clases expositivas durante una sesión completa puede ser renovada o solo utilizada en momentos puntuales que requieran explicaciones teóricas.

Disponer de conexión directa a internet y un proyector facilita la utilización de software interactivos como Geogebra, que es ideal para el tema de funciones por su aplicación en la representación gráfica. Además, ofrece la posibilidad de visitar páginas webs donde se propongan actividades, vídeos que complementen las explicaciones del profesorado, facilitando así el aprendizaje del alumnado.

6.4. Objetivos

Los objetivos pueden definirse como los logros que los alumnos y alumnas deben haber alcanzado al final de la etapa como consecuencia de las experiencias de enseñanza-aprendizaje planificadas. Se distinguirán tres tipos de objetivos: objetivos de etapas, objetivos de la asignatura y objetivos de la Unidad Didáctica.



6.4.1. Objetivos de etapa

Los objetivos de etapa vienen regulados por el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre, mediante el cual se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
5. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
7. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.



6.4.2. Objetivos específicos de área

Los objetivos específicos de área están regulados por la orden del 14 de Julio de 2016 para la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 4º de la E.S.O.*

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e



instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las Matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las Matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento

6.4.3. Objetivos de la Unidad Didáctica

Los objetivos específicos de la Unidad Didáctica están basados en los estándares de aprendizaje del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre en la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* de 4º de E.S.O., bloque funciones. Los objetivos están definidos por la letra **O** y un sufijo numérico.

- O1.** Identificar y explicar las relaciones entre magnitudes que corresponden a una función.
- O2.** Analizar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función y calcular de la tasa de variación media.
- O3.** Representar datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
- O4.** Hallar el dominio y recorrido de un función.
- O5.** Representación gráfica y análisis de funciones elementales.
- O6.** Hallar puntos de corte con los ejes.
- O7.** Operar con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.



6.5. Competencias clave

Según el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre y la Orden ECD/65/2015 de 21 de enero, se denominan competencias clave a aquellas capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos. El aprendizaje basado en competencias se caracteriza por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral. Son siete las competencias del currículo identificadas como esenciales:

- a) Comunicación lingüística (CL).
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE).
- g) Conciencia y expresiones culturales (CC).

La Unidad Didáctica que se desarrolla en este TFM abarca varias de las competencias clave enumeradas anteriormente. Debido a que es una Unidad Didáctica de la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* de 4º de la ESO y que engloba los contenidos del bloque de funciones del currículo, la Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT) jugarán un papel destacado frente a las otras. Por tanto, es conveniente señalar sus descriptores y sus desempeños que concretan aspectos y facetas relacionadas con estas competencia.

Descriptores:

- Comprender e interpretar la información presentada en diferentes formatos (fórmula, tabla de valores y gráfica).
- Manejar los conocimientos sobre ciencia y tecnología para solucionar problemas, comprender lo que ocurre a nuestro alrededor y responder preguntas.
- Expresarse con propiedad en el lenguaje matemático.



Desempeños:

- Asocia a las diferentes funciones trabajadas en la unidad sus distintas representaciones y viceversa
- Utiliza sus conocimientos previos sobre Matemáticas para comprender algunos conceptos y aspectos de las funciones como el dominio, la composición, el crecimiento, los puntos de corte, etc, que se encuentran ligados a situaciones del mundo real.
- Utiliza la notación adecuada cuando realiza las actividades, siendo los procedimientos claros y eficaces.

Por otro lado, muchos de los objetivos marcados en esta Unidad Didáctica abarcan las demás competencias. Según la Orden del 14 de julio de 2016, se establece una relación entre las competencias clave y los criterios de evaluación que se desarrollarán en el apartado de evaluación de este trabajo. Utilizando esta relación como base, cada uno de los objetivos de esta Unidad Didáctica estará a su vez ligado a competencias clave. En la siguiente Tabla 6.2 se muestra esta correspondencia.

OBJETIVOS UNIDAD DIDÁCTICA	COMPETENCIA
01. Identificar y explicar las relaciones entre magnitudes que corresponden a una función.	CMCT,CAA
02. Analizar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función y calcular de la tasa de variación media.	CMCT, CAA
03. Representar datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.	CMCT,CD
04. Hallar el dominio y recorrido de un función.	CMCT
05. Representación y análisis de funciones elementales.	CMCT,CAA
06. Hallar puntos de corte con los ejes.	CMCT,CAA
07. Operar con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.	CMCT

Tabla 6.2 Relación entre objetivos de la UD y competencias clave (Elaboración propia)



6.6. Contenidos

Los contenidos son el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos a impartir en esta Unidad Didáctica se han extraído de la Orden 14 julio de 2016 donde se especifican los contenidos de cada bloque. Asimismo, se seleccionarán los contenidos de los Bloque I y IV de la asignatura de *Matemáticas orientadas a la enseñanza académicas* del curso 4º de la E.S.O.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas

- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos, b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos, c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Bloque 4. Funciones

B1. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

B2. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

B3. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Por otro lado, se describirán contenidos más específicos de la **Unidad Didáctica**:

U1. Magnitudes y funciones.



U2. Representación gráfica de funciones.

U3. Operaciones con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.

U4. Puntos de corte con los ejes.

U5. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media

U6. Funciones elementales. Situaciones reales donde aparecen..

6.7. Metodología

En el apartado 3 de este trabajo, Fundamentación Didáctica, se hace referencia a varios estudios realizados por expertos matemáticos y didactas. Se hace alusión en varios de sus artículos a la necesidad de implantar nuevas metodologías para mejorar el aprendizaje del alumnado. En este Trabajo Fin de Máster se hará hincapié en dos conceptos que numerosos autores reclaman en la enseñanza de las Matemáticas: la **contextualización** y la **interdisciplinaridad**. Los principios metodológicos que se deben utilizar para asegurar estos aspectos son:

- Facilitar el aprendizaje significativo mediante la planificación y el diseño de actividades que permitan relacionar experiencias previas con los conocimientos que se quieren obtener, abordando conceptos científicos de forma más general y conectando diferentes disciplinas.
- Garantizar la funcionalidad de los aprendizajes para que puedan ser usados en situaciones de la vida real cuando así sea necesario. Es importante para el alumno que los contenidos a aprender sean útiles para futuros aprendizajes.
- Aplicar los contenidos relacionados con el entorno del alumno para conseguir su rápida comprensión.

Esta Unidad Didáctica ayudará a aportar los conocimientos necesarios que el alumnado necesita conocer para otras áreas como la Física, la Economía y las Ciencias Sociales, tanto en el curso actual, como en curso posteriores, siendo imprescindible dominar la interpretación de gráficas de funciones.

Este aprendizaje significativo se combinará con explicaciones tradicionales de tipo expositivo aunque con un estilo de enseñanza que permita al alumnado una participación dinámica e interactiva. Cuando se expliquen nuevos conceptos necesarios para la resolución de problemas se presentarán ejemplos de la vida cotidiana, generando curiosidad y fomentando que den su opinión y propongan posibles formas de resolución. Es esencial que estas explicaciones teóricas no duren



más de 20 o 25 minutos. De esta forma se podrá garantizar la atención del alumnado para que después puedan asimilar el nuevo concepto con otras metodologías donde aprendan haciendo.

Se procurará además que al menos una sesión desarrolle una metodología de trabajo cooperativo para fomentar el trabajo entre iguales y despertar la motivación.

Por último, se aplicarán metodologías de “aula invertida” donde se propondrán actividades en las cuales el alumno o alumna tenga que realizar una explicación de algún concepto al resto de compañeros para trabajar la expresión oral y fomentar un clima de debate e intercambio de ideas. En esta sesión el docente figurará tan solo como moderador y se encargará de que la comunicación sea adecuada.

6.8. Actividades y recursos

Para este apartado se tomará como referencia la Orden de 14 de julio de 2016 donde se muestran algunas ideas generales sobre la utilización de recursos y actividades para desarrollar los diferentes bloques de contenidos. Se tendrán en cuenta actividades y recursos tanto para el bloque IV “Funciones” como para el bloque I “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas”, que se debe desarrollar de forma transversal y simultáneamente al resto de bloques. En este bloque la normativa vigente sugiere que se propongan actividades de investigación y el uso de las TIC. En el bloque de funciones se indica el uso de programas y aplicaciones informáticas de Geometría para facilitar las representaciones y el análisis de modelos funcionales. El uso de Geogebra es crucial en el bloque de funciones, ya que agiliza la resolución de problemas y permite estudiar con detalle los distintos tipos de funciones y sus propiedades más relevantes. Como ya se dijo en el apartado 3 de Fundamentación Didáctica de este trabajo, el alumnado encuentra grandes dificultades al relacionar magnitudes, representar funciones a partir de su fórmula, comprender el concepto de dominio, etc. Con la ayuda de Geogebra estos conceptos se hacen mucho más accesibles y más visuales, facilitando el aprendizaje.

En la Tabla 6.3 se presentan los distintos tipos de actividades que van a ser utilizadas a lo largo de esta Unidad Didáctica.



Tipo de actividad	Finalidad de la actividad
Diagnóstico	Permiten medir el nivel de los alumnos
Introducción	Permiten adaptarse al posterior ritmo de trabajo
Motivación	Buscan la implicación del alumnado
Aprendizaje	Adquirir destrezas procedimentales y conceptuales
Desarrollo	Desarrollar y fijar los contenidos propuestos.
Consolidación	Refuerzan aprendizajes.
Investigación	Desarrollar el aprendizaje adquirido a partir de una idea.
Evaluación	Determinar el grado de logro de los objetivos

Tabla 6.3 *Tipos de actividad que se plantean durante la Unidad Didáctica y su finalidad (según Luque, 2018).*

Las actividades propuestas en esta Unidad Didáctica se adjuntan en el Anexo I con su descripción completa.

6.9. Atención a la diversidad

Con la finalidad de tener en cuenta al alumnado con necesidades específicas educativas, se seguirá lo establecido en el Capítulo IV del Decreto 111/2016, de 14 de junio. Asimismo, se desarrollarán estrategias y actividades específicas para alumnos que presenten dificultades en el aprendizaje, Trastorno de Déficit de Atención, Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad, Necesidades Específicas de Apoyo Educativo, ser de incorporación tardía o tener altas capacidades.

Se pueden modificar algunas actividades para adecuarlas a las necesidades específicas de aquellos estudiantes que tengan alguna de estas dificultades. Es importante que se realicen en el grupo ordinario pero con una adaptación individual. El objetivo será presentar los mismos conocimientos pero en contextos diferentes y con distintos niveles de dificultad. Otra medida a considerar será la ampliación del horario lectivo siempre y cuando se cuente con el consentimiento de los familiares. En el Anexo II se proponen algunos tipos de actividades de refuerzo que pueden ayudar a cubrir las necesidades de este tipo de alumnado.



6.10. Temporalización

En este apartado se realizará una rigurosa planificación de los contenidos, actividades y objetivos que se van a desarrollar en cada sesión. De acuerdo con la programación de la asignatura, esta Unidad Didáctica constará de 10 sesiones. Teniendo en cuenta que cada semana consta de 4 horas de la asignatura *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*, se dedicará aproximadamente dos semanas y media a finalizar la unidad. A continuación se presentan esquematizadas cada sesión a desarrollar, indicando qué actividades se van a desarrollar, los recursos necesarios, contenidos a trabajar y los objetivos a cumplir. Finalmente se hará una descripción detallada de la planificación de la sesión.

Sesión 1 Evaluación inicial e introducción

Actividades

Actividad 1.1 de diagnóstico y actividad 1.2 de motivación e introducción.

Recursos

Fichas de las actividades 1.1 y 1.2., pizarra, libro de texto y cuaderno de trabajo.

Contenidos

B1. - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

U1. - Magnitudes y funciones.

Objetivos

O1. Identificar y explicar las relaciones entre magnitudes que corresponden a una función.

Descripción

En el comienzo de la sesión se entregará la ficha de la actividad 1.1 del Anexo I de este trabajo. Esta actividad servirá como método de evaluación inicial, de manera que, los alumnos y alumnas tendrán que realizarla de forma individual y en silencio (15 min). Posteriormente, la ficha trabajada será entregada al profesor o profesora que las recogerá para, acto seguido, evaluarla y determinar el nivel medio de conocimientos del grupo. Para complementar la evaluación inicial, el profesor o profesora refrescará conceptos más teóricos como la definición de función, variable dependiente, variable independiente, ejes de coordenadas, dominio y recorrido (10 min).



Una vez recordados estos conceptos básicos, que ya se trabajaron en cursos anteriores, se plantea una actividad grupal en las que los estudiantes deben formar grupos de tres personas que deberán colaborar para resolver la serie de ejercicios de la actividad 1.2. La actividad se muestra en el Anexo I de este trabajo. Con esta actividad se reforzará la **interpretación de gráficas, relación entre magnitudes y concepto de función**. Se dejará a los grupos un tiempo de 20 minutos para realizarla y en los últimos 10 minutos se resolverá conjuntamente la actividad.

Sesión 2. Representación gráfica de funciones

Actividades

Actividad 2.1 de consolidación, actividad 2.2 y actividad 2.3 de aprendizaje y desarrollo.

Recursos

Papel milimetrado, cuaderno de trabajo, instrumentos de dibujo, libro de texto y fichas de las actividades 2.1, 2.2 y 2.3.

Contenidos

U2. Representación gráfica de funciones.

U6. Funciones elementales.

Objetivos

O5. Representación y análisis de funciones elementales.

Descripción

Al comienzo de la sesión dos se repartirá la ficha de trabajo correspondiente a la actividad 2.1, en la que se repasarán conceptos de otros años como función cuadrática y lineal. Sin entrar en mucha profundidad en estos conceptos, nos centraremos en la **representación gráfica de funciones** y en la **interpretación de gráficas**. La actividad se realizará por parejas, sin necesidad de agrupamientos (15 min). Una vez finalizada esta actividad comenzará el tramo expositivo de la sesión, donde el docente utilizará el libro de texto y la pizarra para explicar los contenidos relativos a las **funciones elementales**. Se hará uso de la pizarra digital o proyector para realizar ejemplos de dichas funciones en el software interactivo Geogebra. De esta manera, los estudiantes podrán apreciar un gran número de ejemplos de ambos tipos



de funciones y visualizar sus propiedades más relevantes (30 min). En los últimos 15 minutos de clase se propondrá la resolución conjunta de la actividad 2.2 en la que se pondrá en práctica la asimilación de los conceptos previamente trabajados. Por último, se mandará la actividad 2.3 como trabajo para casa y actividad de consolidación.

Sesión 3. Crecimiento y decrecimiento

Actividades

Actividad 3.1 de aprendizaje, actividad 3.2. de motivación y consolidación y actividad 3.3 de desarrollo e investigación.

Recursos

Papel milimetrado, cuaderno de trabajo, instrumentos de dibujo, libro de texto y ficha de la actividad 3.1, 15 ordenadores portátiles y proyector o pizarra digital.

Contenidos

B2. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

B3. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

U5. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media.

U2. Representación gráfica de funciones.

Objetivos

O2. Analizar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función y calcular de la tasa de variación media.

O1. Identificar y explicar las relaciones entre magnitudes que corresponden a una función.

Descripción

El comienzo de la sesión vendrá dado por la corrección de la actividad de trabajo de casa que había pendiente de la sesión anterior (Actividad 2.3). La corrección se hará mediante exposición de un voluntario o voluntaria y las aportaciones del resto de la clase de manera conjunta. De esta forma, se practicará la metodología de **aula invertida** en la que el docente actuará tan solo como mediador en el aprendizaje del alumnado (20 min). Una vez finalizado y corregido se repartirá la ficha de la actividad



3.1. Se les dará unos 5 minutos de tiempo para que el alumnado pueda leer y analizar la actividad propuesta para posteriormente proceder a la resolución conjunta (15 min). Esta actividad 3.1 fijará conceptos como **crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos** y reforzará el aprendizaje ya trabajado sobre magnitudes e interpretación de fenómenos mediante funciones y gráficas.

Acto seguido se propondrá una actividad interactiva en la que cada alumno y alumna debe tener un ordenador portátil. Una vez todos estén suficientemente equipados se procederá a realizar la actividad en la cual se desarrollarán una serie de preguntas de baja dificultad pero que deben de ser contestadas rápidamente mediante un **Kahoot** (actividad 3.2). Esta actividad resultará motivadora y romperá la dinámica de clases despertando el interés del alumnado y fomentando el uso de las TIC. Además, se mejorará la competencia digital mediante el manejo de sistemas operativos, navegadores y el uso de herramientas web. Se valorará la participación, el razonamiento y la competencia matemática al final de la actividad (15 min). En los últimos minutos de la clase se propondrá la actividad 3.3 para realizar en casa y reforzar contenidos como **U2, U5 y B2**, e introducir, mediante aprendizaje por investigación, el concepto de tasa de variación media con ayuda del libro de texto.

Sesión 4. Geogebra

Actividades

Actividad 4.1 de motivación, aprendizaje y consolidación.

Recursos

Ordenadores portátiles individuales, proyector o pizarra digital, guion de trabajo de la actividad 4.1.

Contenidos

U4. Puntos de corte con los ejes.

U5. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media

Objetivos

O6. Hallar puntos de corte con los ejes.

O2. Analizar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función y calcular de la tasa de variación media.



Descripción

Se integra una sesión para que los alumnos y alumnas conozcan la herramienta Geogebra por primera vez. Dado que el bloque de funciones comprende en gran medida a las **representaciones gráficas**, se propone utilizar Geogebra para resolver ciertos ejercicios planteados en el libro de texto y en clase. Además, Geogebra permitirá dar otro punto de vista a la representación gráfica de funciones y agilizar las explicaciones del docente.

Una hora antes de la sesión se pedirán 15 ordenadores portátiles para que aprendan haciendo y se relacionen con Geogebra con mayor profundidad.

Al comienzo de la sesión se reparte el guion de la actividad 4.1 del Anexo I y se deja unos minutos para que los alumnos y alumnas los visualicen. Posteriormente se hará una breve introducción siguiendo el guion sobre qué es Geogebra y qué posibilidades proporciona este software interactivo. Se resolverán las dudas pertinentes y se repartirán los ordenadores portátiles individuales. En caso de que no haya suficientes, se procederá a trabajar por parejas cuando sea necesario.

Mediante esta actividad, los alumnos y alumnas aprenderán ciertas nociones básicas del funcionamiento de Geogebra, como por ejemplo:

1. Introducir mediante una expresión algebraica una función matemática para representarla en el eje de coordenadas.
2. Configurar el eje de coordenadas, (quitar y poner cuadrículas, escalas, etc.)
3. Desplazarse a lo largo del eje de coordenadas.
4. Crear deslizadores para una variable.
5. Configurar los deslizadores (valores máximos y mínimos, color, etc.)
6. Configuración del trazado de la función. (color, grosor y forma).
7. Crear tabla de valores.
8. Señalización de puntos de interés (corte con los ejes, vértices, máximos y mínimos)

Una vez introducidas estas nociones básicas de Geogebra se comienza el estudio de los distintos tipos de funciones que la actividad propone. En este estudio, deberá trabajarse y reforzarse los conceptos de máximos, mínimos, dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento y corte con los ejes, así como una breve introducción del tema siguiente sobre los tipos de funciones lineales, cuadráticas, afines, etc.



En cada tipo de función, el alumnado podrá **experimentar** cómo cambian las funciones al modificar los coeficientes clave de la función por medio de deslizadores. También podrán visualizar las posibles formas y posiciones en el eje de coordenadas que implican las relaciones entre estos coeficientes.

Dado que la clase ya ha trabajado todos estos conceptos previamente, la sesión transcurrirá de forma muy fluida y provechosa, captando totalmente la atención de los alumnos y alumnas. Se invertirán los 50 minutos de duración de la sesión en realizar la actividad completa, resolviendo dudas, fomentando que el alumnado investigue otros tipos de funciones, experimenten las variaciones y modifiquen parámetros. El docente mediante observación será capaz de evaluar la participación de los alumnos y alumnas y los aprendizajes adquiridos durante la sesión. Esta actividad 4.1 es importante porque nuevamente se refuerza la **competencia digital** con un software que se presenta como una herramienta muy útil no solo para este bloque, sino para otros como Geometría, Álgebra e incluso otras asignaturas como Física y Química, Ciencias Sociales, etc.

Sesión 5. Operaciones con funciones

Actividades

Actividad 5.1 de aprendizaje y desarrollo, actividad 5.2 de aprendizaje y desarrollo.

Recursos

Pizarra, cuaderno de trabajo y libro de texto.

Contenidos

U3. Operaciones con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.

Objetivos

O7. Operar con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.

Descripción

La sesión comenzará con la resolución de la actividad 3.3 de la sesión 3, que se había requerido como trabajo de casa. Nuevamente se propondrá un voluntario que deberá resolverla exponiendo su ejercicio en la pizarra.



El resto de la sesión 5 conllevará la metodología más **tradicional** del conjunto de sesiones de esta Unidad Didáctica. Se introducirán nuevos conceptos como la **composición de funciones**, se ampliarán otros como el concepto de **dominio** y se profundizará en las **operaciones con funciones** básicas como la suma, resta, cociente y multiplicación.

Una vez corregida la actividad 3.3 (15 min), se seguirá con una parte expositiva en la que el docente desarrollará el concepto de dominio y se resolverán algunos de los ejercicios propuestos en el libro de texto. Para ayudar a la asimilación del concepto de dominio de una función se podrá hacer uso de herramientas como la pizarra o incluso el software Geogebra para indicar de manera visual los dominios de algunas funciones como ejemplo.

Posteriormente, se trabajarán las operaciones con funciones. Se realizarán numerosos ejemplos por parte del docente donde se muestren la suma, resta, multiplicación y cociente de diferentes tipos de funciones (polinómicas de grado 1, polinómicas de grado 2 y racionales). Se dejarán el resto de tipos de funciones para la Unidad Didáctica siguiente. Los alumnos y alumnas deberán copiar los ejemplos propuestos en la pizarra para tenerlos como referencia a la hora de resolver actividades. Por último, se hará una breve introducción sobre el concepto de **composición de funciones** con ayuda del libro de texto pero sin profundizar en ejemplos. Una vez finalizada esta fase expositiva (25 min), y para conseguir mantener la atención del alumnado, se procede a la resolución de forma conjunta de las actividades 5.1 y 5.2 del Anexo I de este trabajo donde se condensará el aprendizaje y la puesta en práctica de los conceptos de dominio y operaciones con funciones expuestos previamente.

Sesión 6. Composición de funciones

Actividades

Actividades 6.1 y actividad 6.2 de desarrollo y aprendizaje.

Recursos

Pizarra, cuaderno de trabajo, libro de texto.

Contenidos

U3. Operaciones con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.



Objetivos

07. Operar con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.

Descripción

En la sesión 6 se continuará con una metodología tradicional con una fase extensa expositiva y una segunda parte de resolución de ejemplos prácticos de los conceptos desarrollados.

Previo a la breve introducción que se realizó en la sesión 5 del concepto de **composición de funciones** se procederá a profundizar los mecanismos para resolución de ejercicios. También se introducirá una nueva operación, **la función inversa**, que se desarrollará con detenimiento y asegurándose de que la clase sigue la explicación correctamente. La función inversa suele presentar más dificultad en su comprensión por parte del alumnado, razón por la cual, se le dedicará mayor tiempo mostrando mecanismos para despejar la “ x ” y se destacará la propiedad de la función inversa $f \circ f^{-1} = I$ y $f^{-1} \circ f = I$ (25 min).

Una vez finalizada la fase teórica, se proponen las actividades 6.1 y 6.2 del Anexo I para resolver en clase de manera conjunta con voluntarios que saldrán a la pizarra (uno por cada apartado). Con la ayuda del docente y del resto de compañeros y compañeras se irán resolviendo dudas, errores frecuentes y aclarando procedimientos y mecanismos para la resolución de este tipo de ejercicios. El docente podrá evaluar la participación en clase y los conocimientos adquiridos en esta sesión. En caso de que se detecten carencias importantes en el aprendizaje, se barajará la posibilidad de dedicar una sesión más a estos contenidos y eliminar la sesión 9 que está programada como clase de repaso antes de la prueba escrita.

Sesión 7. Contextualización

Actividades

Actividad 7. Motivación y consolidación.

Recursos

Pizarra, cuaderno de trabajo y libro de texto.

Contenidos

B3. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y



situaciones reales.

U1. Magnitudes y funciones.

U2. Representación gráfica de funciones.

Objetivos

O1. Identificar y explicar las relaciones entre magnitudes que corresponden a una función.

O3. Representar datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.

Descripción

En la sesión 7 se abandonará la metodología tradicional llevada a cabo en las dos sesiones anteriores. Se propondrá una sesión de **trabajo cooperativo** en la que el alumnado tendrá que trabajar en equipo, investigar, debatir y hacer uso de los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores para resolver la actividad 7 indicada en el Anexo I.

La clase deberá dividirse en cinco grupos y agruparse en “mesas redondas” para favorecer el diálogo y el intercambio de ideas. Se repartirá la ficha de trabajo que contiene la actividad 7. Esta ficha tiene una batería de cinco problemas relacionados con los contenidos desarrollados en esta Unidad Didáctica. Cada grupo deberá resolver los cinco problemas en los 50 minutos de duración que tiene la sesión, informándoles de que, en la siguiente sesión, a cada grupo le tocará aleatoriamente exponer el problema resuelto. Los integrantes del grupo deberán establecer la estrategia para hacerlo de la forma más eficiente, repartíendose el trabajo o resolviendo cada problema de manera conjunta. El profesor actuará como observador y ayudará a los grupos si cree que es necesario. Los problemas presentan una dificultad media-alta para el nivel de 4º de la E.S.O. pero sin alejarse de los estándares de aprendizajes definidos para este bloque. La dificultad de la actividad radica en la comprensión lectora y la **capacidad de relacionar magnitudes e interpretar fenómenos**.



Sesión 8. Exposiciones

Actividades

Actividades 7. Motivación y consolidación.

Recursos

Pizarra, cuaderno de trabajo y libro de texto.

Contenidos

B3. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

U1. Magnitudes y funciones.

U2. Representación gráfica de funciones.

Objetivos

O1. Identificar y explicar las relaciones entre magnitudes que corresponden a una función.

Descripción

La sesión 8 será complementaria a la sesión 7, donde se terminará de realizar la actividad 7. Durante la sesión 7 el alumnado trabajó en clase de manera cooperativa para resolver una ficha de trabajo que consta de cinco problemas de funciones. En la sesión 8, cada grupo deberá resolver en la pizarra uno de los ejercicios que serán asignados aleatoriamente y explicarlo de forma oral al resto de la clase. Cada grupo dispondrá de 10 minutos para resolver el problema. Se valorará la **expresión oral**, participación de todos los miembros del grupo, resolución correcta y otros aspectos que serán explicados en la rúbrica del apartado 9.11 de Evaluación de este trabajo. Esta actividad reforzará los contenidos ya adquiridos en las primeras sesiones, U1 y U2 y **contextualizará** el bloque de funciones en situaciones reales que puede resolverse con las Matemáticas.

Sesión 9. Repaso

Actividades

Actividad 9 de consolidación.

Recursos



Pizarra, cuaderno de trabajo y libro de texto.

Contenidos

U2. Representación gráfica de funciones.

U3. Operaciones con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.

U4. Puntos de corte con los ejes.

U5. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media

U6. Funciones elementales.

Objetivos

O2. Analizar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función y calcular de la tasa de variación media.

O3. Representar datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.

O4. Hallar el dominio y recorrido de un función.

O5. Representación y análisis de funciones elementales.

O6. Hallar puntos de corte con los ejes.

O9. Operar con funciones: suma, resta, cociente y multiplicación. Composición de funciones. Función inversa.

Descripción

La sesión 9 está diseñada como una sesión de **repaso** y fijación de conceptos. El docente realizará un análisis de las ocho sesiones anteriores en las que valorará los objetivos logrados y, mediante observación y evaluación de las actividades realizadas, sacará conclusiones sobre si es necesario reforzar algunos contenidos de la Unidad Didáctica. Es posible que conceptos como la composición de funciones, dominio, recorrido y funciones definidas a trozos presenten dificultad en el aprendizaje del alumnado, por lo tanto, si es necesario, se retomarán estos apartados con el fin de resolver dudas y asentar mecanismos y procedimientos. Esto se podrá llevar a cabo por medio de explicaciones orales por parte del docente y resolución de la actividad 9, dando protagonismo y dedicando más tiempo a aquellas que más dificultad presenten por parte del alumnado. También se insistirá en cuáles son los **objetivos a lograr** en esta Unidad Didáctica y los aspectos que serán más relevantes a la hora de enfrentarse a la **prueba escrita** de la sesión 10.



Sesión 10. Prueba escrita

Actividades

Actividades 10 de evaluación.

Recursos

Papel milimetrado, herramientas de dibujo, calculadora y ficha de trabajo de la actividad 10.

Descripción

En la última sesión de la Unidad Didáctica, el alumnado tendrá que realizar la ficha de trabajo de la actividad 10, de forma individual durante los 50 minutos de duración de la sesión. En ella se propondrán ejercicios relativos a los objetivos de logro de la Unidad Didáctica que posteriormente serán evaluados por el docente. Los alumnos y alumnas deberán hacer uso de herramientas de dibujo como regla, escuadra, cartabón si lo creen necesario, calculadora y bolígrafo.

6.11. Evaluación

La evaluación es una parte integral de la educación matemática que contribuye significativamente a la enseñanza y aprendizaje de todos los estudiantes. Supone un recurso metodológico imprescindible como elemento motivador para el alumnado y para el profesorado, siendo un proceso continuo y diferenciado que no sólo debe hacerse a los alumnos, sino también para los alumnos, para guiar y mejorar su aprendizaje.

6.11.1. Criterios de evaluación

El profesorado evaluará al alumnado teniendo en cuenta los diferentes elementos del currículo. Los criterios de evaluación de esta materia son el referente fundamental para valorar tanto el grado de adquisición de las competencias básicas como el de consecución de los objetivos. Dichos criterios están establecidos en el Decreto 1105/2014 y están indicado en la siguiente Tabla 6.4, que presenta tanto los correspondientes al Bloque IV, de funciones, como al Bloque I que es transversal y debe ser tenido en cuenta en todas las Unidades Didácticas del curso.



BLOQUE IV. Funciones

1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su compartimiento, evolución y posibles resultados finales.

Tabla 6.4 Criterios de evaluación correspondientes al Bloque IV.

BLOQUE I. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas.

1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
4. Profundizar en problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando



cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Tabla 6.5 Criterios de evaluación correspondientes al Bloque I.

6.11.2. Estándares de aprendizaje

Todas las actividades y procesos de aprendizaje estarán diseñados para cumplir con los criterios de evaluación al finalizar la Unidad Didáctica. Cada actividad realizada estará directamente relacionada con un estándar de aprendizaje evaluable. Los estándares de aprendizaje que se trabajarán en esta Unidad Didáctica son, al igual que en los criterios, los estándares correspondientes a los Bloque I y IV indicados en el Real Decreto 1105/2015. En la siguiente Tabla 6.6 se muestran aquellos que se han seleccionado para esta Unidad Didáctica.

Bloque IV. Funciones. [Decreto 1105/2014]

1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.

1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.

1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.

2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.

2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.

2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan



utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.

2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

Tabla 6.6 Estándares de aprendizaje seleccionado correspondientes al Bloque IV.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas [Decreto 1105/2014]

1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.

2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos y contexto del problema).

6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las Matemáticas.

11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

Tabla 6.7 Estándares de aprendizaje seleccionado correspondientes al Bloque 1.

El resto de estándares del Bloque 4 de funciones que exige el Decreto 1105/2014 y que no figuran en las tablas anteriores se evaluarán en la siguiente Unidad Didáctica. Por otra parte, el resto de estándares del Bloque I de Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas se considerarán a lo largo de la programación del curso al ser un bloque transversal.

6.11.3. Instrumentos de evaluación

La evaluación se produce durante todo el proceso de enseñanza, aunque podemos señalar tres momentos claves:

1. Evaluación inicial o diagnóstica. Se hace al comienzo de curso y de cada unidad con el fin de comprobar los conocimientos previos de los alumnos para orientar el punto de partida de los nuevos aprendizajes.
2. Evaluación continua o formativa. Se realiza a través del análisis del trabajo diario del alumno y permite valorar sus progresos. Esto nos orientará sobre la necesidad de adoptar medidas de refuerzo o de ampliación.



3. Evaluación sumativa o final. Se realizará al final de una Unidad Didáctica, de un bloque de contenidos o de una evaluación. Tiene por objeto comprobar el grado de consecución de los objetivos propuestos.

Para evaluar el aprendizaje de los alumnos se recogerá información mediante procedimientos e instrumentos adecuados.

- Observación: Es tarea del profesor considerar todos aquellos instrumentos usados en las sesiones o fuera de ellas, para la evaluación. Estos serán analizados mediante observación directa o registrada en los cuadernos, etc.
- Examen oral o escrito: El profesor evalúa los conocimientos del alumno a la vez que éste lo hace a sí mismo demostrándolo en cada prueba objetiva. (Actividad 10 del Anexo I).
- Cuaderno de clase: En las revisiones periódicas del cuaderno se comprueba el seguimiento de la materia.
- Actividades voluntarias: Es una forma de valorar la motivación creada por el docente y la iniciativa personal del alumnado. (Actividades 2.3, 3.3, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 9 del Anexo I).
- Trabajos cooperativos: Es la perfecta situación para evaluar el compañerismo, el trabajo en grupo y la comunicación. En todo momento el conocimiento de cada alumno está siendo evaluado por sus iguales y a la vez el compromiso de superación del grupo. (Actividad 7 del Anexo I).

Dados estos instrumentos de evaluación, se les dará un porcentaje de participación a cada uno con el fin de poder adjudicar una calificación final de la asignatura.

Instrumento de evaluación	Porcentaje calificación final
Observación	5 %
Prueba escrita	50 %
Cuaderno de clase	5 %
Actividades voluntarias	20 %
Trabajo cooperativo	20 %

Tabla 6.8 *Instrumentos de evaluación y su porcentaje en la calificación final.*
(Elaboración propia).



Para facilitar la asignación de una calificación numérica a las actividades voluntarias y al trabajo cooperativo de la actividad 7 del Anexo I se utilizará la siguiente rúbrica. Con esta herramienta se valorarán diferentes aspectos de la exposición y resolución de problemas matemáticos, ejercicios conceptuales y de cálculo.

Categorías	Excelente	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Total
Conceptos matemáticos	La explicación muestra un completo entendimiento del concepto matemático usado para resolver el problema	La explicación muestra un entendimiento sustancial del concepto matemático.	La explicación muestra algún entendimiento del concepto matemático.	La explicación muestra un entendimiento muy limitado del concepto matemático	
Diagramas y dibujos	Los diagramas o dibujos son claros y ayudan al entendimiento del procedimiento.	Los diagramas y dibujos son claros.	Los diagramas o dibujos son algo difíciles de entender.	Los diagramas o dibujos son difíciles de entender o no se usan.	
Estrategia y procedimientos	Por lo general utiliza una estrategia eficiente y efectiva para resolver el problema	Por lo general utiliza una estrategia efectiva para resolver el problema	A veces utiliza una estrategia efectiva para resolver el problema pero no lo hace consistentemente	Raramente utiliza una estrategia efectiva para resolver el problema.	
Orden y organización	El trabajo es presentado de una manera clara y ordenada	El trabajo se presenta por lo general de una manera fácil de leer	El trabajo es presentado de una manera organizada pero es difícil de entender.	El trabajo se ve descuidado y desorganizado.	

Tabla 6.9 Rúbrica de exposición y resolución de problemas, ejercicios conceptuales y de cálculo. (Elaboración Propia).



7. CONCLUSIONES

Una vez finalizado el apartado de Proyección Didáctica de este Trabajo Fin de Máster se puede proceder a realizar una revisión final y comprobar que se han logrado los objetivos que se propusieron al inicio de este trabajo.

Uno de los objetivos planteados era la realización de un apartado de Fundamentación Didáctica. La finalidad de esta sección era la de abordar temas sobre la actualidad de la Educación Secundaria Obligatoria, hacer un pequeño análisis del futuro de la enseñanza de las Matemáticas y extraer algunas conclusiones sobre los aspectos a mejorar por parte del equipo docente. Asimismo y de manera general, este apartado ha servido de base para poder construir los siguientes. En la elaboración de la Unidad Didáctica es imprescindible tener en cuenta los problemas que hoy en día competen a la enseñanza de las Matemáticas y en la medida de lo posible intentar adaptarse o corregirlos para lograr una buena labor docente. Para poder lograr este objetivo ha sido necesario consultar los trabajos de algunos autores expertos en estos temas pero también ha sido esencial hacer una revisión de los antecedentes históricos más relevantes. La conclusión extraída en la finalización de este apartado es que hay una gran necesidad de contextualizar las Matemáticas para mejorar su aprendizaje en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Los estudiantes necesitan ver la utilidad que esta disciplina ofrece para despertar su interés y, por lo tanto, motivar su aprendizaje.

Por otra parte, otro de los objetivos de este Trabajo Fin de Máster era el de elaborar un tema de oposiciones como Fundamentación Epistemológica de la Unidad Didáctica. El tema del temario de oposiciones elegido ha sido el tema 21 *“Funciones de variable real, funciones elementales y situaciones reales en las que aparecen. Composición de funciones.”* Se ha considerado la elección de este tema por ser el que mejor se adapta a los contenidos que se van a desarrollar en la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* de 4º de la E.S.O. En el desarrollo del tema se ha profundizado en los conceptos relativos al bloque de funciones con una terminología adecuada y un rigor matemático suficiente para servir de guía al docente en su futura labor. No obstante, hay conceptos que se trabajarán durante el bloque de funciones que no puede ser abarcados porque pertenecen a otros temas de las oposiciones como la tasa de variación media, continuidad, etc. Estos contenidos son exigidos en el currículo y figuran en los criterios de evaluación, de manera que habría que tener en cuenta más de un tema de oposiciones para lograr cubrir todos los contenidos.

El tercero de los objetivos de este TFM es el de elaborar una Fundamentación Curricular en la que se analizaran la normativa vigente respecto al currículo y



posteriormente realizar una comparativa entre dos libros de texto de diferentes editorial y comprobar si cumplen con la normativa. La conclusión extraída es que ninguna de las dos editoriales se ajusta plenamente al currículo exigido en la normativa. También se aprecian grandes diferencias a la hora de presentar los contenidos (definiciones, ilustraciones y actividades). Cada editorial presenta ciertas fortalezas y ciertas debilidades a la hora de facilitar el aprendizaje, de manera que, como conclusión, se extrae que los libros de texto son buenas herramientas en la docencia pero deben ser siempre complementados por el docente y actualizados con frecuencia.

El último objetivo planteaba la Proyección Didáctica en donde se ha elaborado la planificación de la Unidad Didáctica. Se han propuesto los objetivos, contenidos, metodología y evaluación que se va a llevar a cabo a lo largo de la Unidad. Mediante la realización de este apartado se ha logrado temporalizar la Unidad Didáctica en 10 sesiones en las que se abarcarán parte de los contenidos del currículo del bloque de Funciones. Se han diseñado diversas actividades acordes a los criterios de evaluación y se ha fomentado el trabajo en equipo, uso de las TIC y, en definitiva, el trabajo de las competencias clave.

La elaboración de este Trabajo Fin de Máster ha tenido como referencia el periodo de prácticas realizado en el centro I.E.S El Valle. Durante este periodo he tenido la oportunidad de conocer el funcionamiento de un centro público de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, relacionarme con estudiantes de diferentes cursos y conocer la labor de un docente que imparte las asignaturas de *Matemáticas orientadas a la enseñanzas académicas*, *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas* y *Matemáticas* de 2º y 3º de la E.S.O. Escogí el curso de 4º de la E.S.O. para realizar la Unidad Didáctica porque ha sido en este curso donde tuve la oportunidad de integrarme por completo en el bloque de Funciones, el cual abarcó todo mi periodo de prácticas. Durante mi estancia como profesor en prácticas he podido comprobar la realidad de la enseñanza de las Matemáticas, las dificultades que se presentan en el aprendizaje y lo importante que es la planificación de una Unidad Didáctica para que la labor del docente sea efectiva. También tuve la oportunidad de poner en práctica la metodología desarrollada en este TFM y algunas de las actividades incluidas en el Anexo I. Una de las actividades más relevante y que más me ha aportado ha sido la sesión con Geogebra (actividad 4 del Anexo I). En esta sesión pude mostrar otra perspectiva de las Matemáticas que logró entusiasmar al alumnado y reforzar conceptos que pueden resultar un poco abstractos sin la ayuda de este software interactivo. Esta idea surgió de las indicaciones de varias asignaturas del Máster, en las cuales se sugiere que en la enseñanza hay que renovarse y probar



técnicas innovadoras que rompan con la metodología tradicional y la dinámica cotidiana de las clases. Como conclusión de esta experiencia práctica puedo decir que una buena planificación conlleva una adecuada temporalización, preparación de materiales y asimilación profunda de los contenidos por parte de docente. La correcta planificación junto con entusiasmo y pasión por la enseñanza da resultados muy productivos en la labor del docente y en el aprendizaje del alumnado. Un docente tiene la obligación y responsabilidad de preocuparse y adaptarse a los posibles contextos que puedan surgir en un aula y no acomodarse en una enseñanza tradicional que acaba desmotivando y abandonando a aquellos alumnos o alumnas que presentan más dificultades.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Alvarez, M. (Coord.) (2001). *Diseño y evaluación de programas de educación emocional*. Barcelona: CISPRAxis.
- Amaya, T., Medina, A. & Pino-Fan, L (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de Matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática*, 28(3), 111-143.
- Bagni, G.T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Departamento de Matemáticas, Universidad de Roma "La Sapienza"(Italia)*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 1.
- Ball, D. Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Concari, S & Giorgi, S. (2019). Los problemas resueltos en textos universitarios de física. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 18(3), 381-390.
- Deulofeu, J. (1993): *Els grafics cartesianes de funcions: Un estudi de les concepcions del alumnes centrat en el significat del gràfic*, Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, México. Título original "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.
- Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, C. (2005). Conflictos epistémicos en un proceso de estudio de la noción de función. Implicaciones para la formación de profesores.



- En: J. Lesama (ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, núm. 18, 348-355. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20), 13-31.
- Grisolía, M. (2008). La interdisciplinariedad en la enseñanza de las ciencias. *Ciencia y Educación*. 1-5.
- Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. En E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding Mahwah*, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp 133-155.
- Kieran, C.(2006). "Research on the learning and teaching of algebra". En A.Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 11-49.
- Lesh, R, & Doerr, H.M.(2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R.Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problema solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 3-34.
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16-48.
- MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Área de Matemáticas* MEC, Madrid.
- National Council of Teachers of Mathematics (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations and functions*. Reston, VA: NCTM.
- Newell, William. (2001). A Theory of Interdisciplinary Studies. *Issues in Integrative Studies*, 19, 1-26.
- Pérez, Y. & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, 35 (3). 169-194.
- Pino-Fan, L ., Godino, J. D. & Font, V. (2016). Assessing Key Epistemic Features of Didactic- Mathematical Knowledge of Prospective Teachers: The Case of the Derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Advance online



publication. DOI: 10.1007/ s10857-016-9349-8.

Qualding, D.A., *La importancia de las Matemáticas en la enseñanza*, 1982. Recuperado el 05/04/2019: <http://unesdoc.unesco.org/images/0005/000524/052474so.pdf>

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Ruiz, L. (1998). Análisis de los temarios de las asignaturas troncales y obligatorias de didáctica de la matemática en la formación de maestros de educación infantil y primaria. En Abraira, C. y Francisco, A. (Eds.), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las Matemáticas*, León, Universidad de León.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de Currículo y Formación del Profesorado*, 9(2), 1-30.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10, 24-36

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: David Tall.



Anexo I

Actividad 1.1 Evaluación inicial

Tipo: Diagnóstico

Objetivo: O1

Contenidos: U1, B1

Estándares: (1.1 B4), (2.1 B1)

1. Para representar en el plano puntos y funciones se utilizan sistemas coordenados cartesianos.
 - a) ¿En qué cuadrante se encuentra situado el punto $(-3,1)$?
 - b) ¿Cuál es la pendiente de la recta $y = 3x - 2$?
 - c) ¿Cuál es la ordenada en el origen de la recta $2x + y - 3 = 0$?

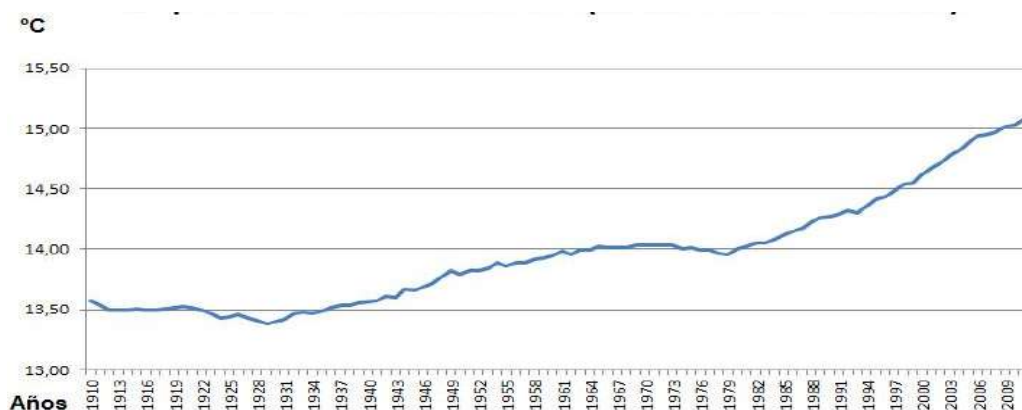
2. Observa el siguiente gráfico.



Tasa de desempleo desde 2006 a 2018 (Fuente INE).

- a) ¿Cuál era la tasa de desempleo aproximadamente en tercer trimestre de 2010?
- b) ¿En qué años aumentó más la tasa de desempleo?
- c) ¿Desde que año comenzó a reducirse la tasa de desempleo?

1. Observa el siguiente gráfico.



Media de temperatura en Madrid desde principios de siglo (Fuente, INE)

- a) ¿En qué año se mantuvo la temperatura media más estable?
- b) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?
- c) ¿Qué temperatura media crees que habrá para 2020?

Actividad 1.2 Magnitudes y funciones

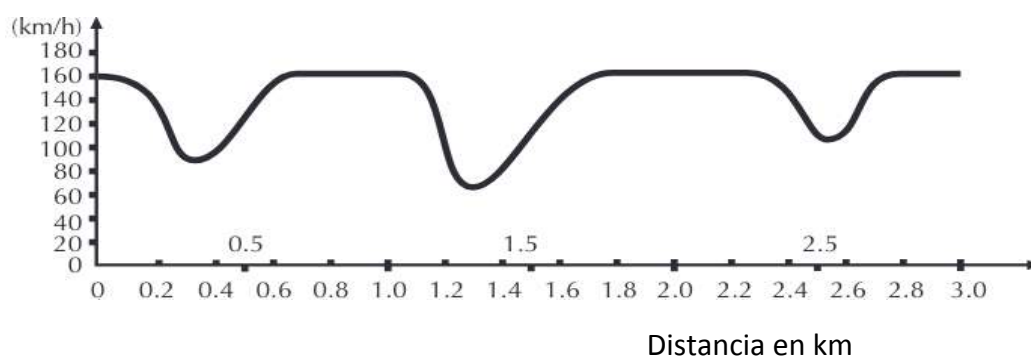
Tipo: Introducción y motivación Objetivo: O1

Contenidos: U1, B1

Estándares: (1.4, 2.3 B4)

Velocidad de un coche en un circuito de 3 km en la segunda vuelta

Velocidad





1.- ¿Cuál es la distancia entre el comienzo del circuito y la recta más larga?

- a) 0,5 km.
- b) 1,5 km.
- c) 2,3 km.
- d) 2,6 km.

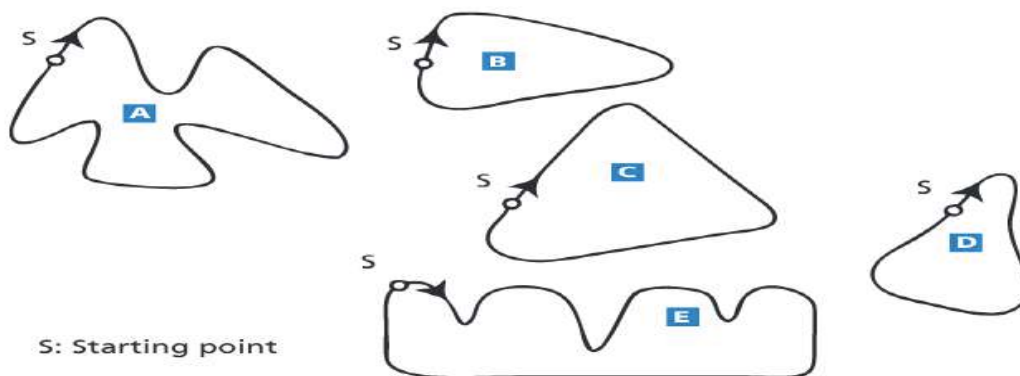
2.- ¿Dónde alcanza el coche la velocidad más baja en la segunda vuelta?

- a) Al comienzo.
- b) A los 0,8 km.
- c) A los 1,3 km.
- d) A mitad del circuito.

3.- ¿Qué puedes decir de la velocidad del coche entre el km 2.6 y 2.8?

- a) La velocidad se mantiene constante.
- b) La velocidad está incrementando.
- c) La velocidad está disminuyendo.
- d) No puede determinarse a través del gráfico.

4.- ¿Cuál de estos dibujos podría representar la forma del circuito?





Actividad 2.1 Representación gráfica de funciones

Tipo: Consolidación

Objetivo: O2

Contenidos: U2

Estándares: (2.2, 2.3 B4)

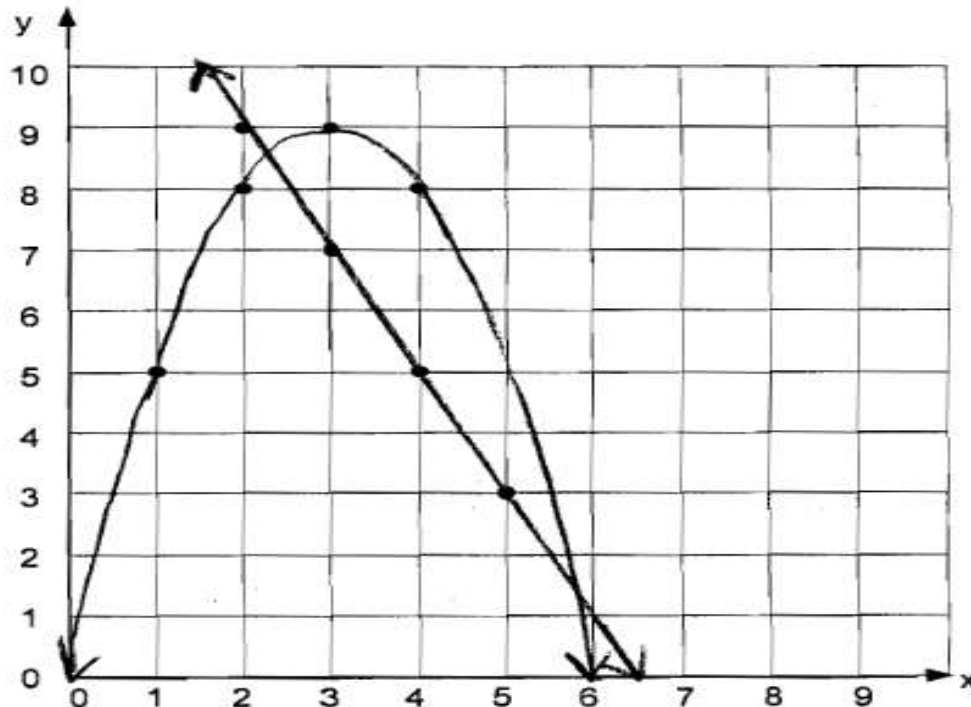
1.- Representa en un eje de coordenadas los siguientes puntos:

$(1,5)$, $(2,8)$, $(2,9)$, $(3,9)$, $(4,8)$, $(3,7)$, $(4,5)$, $(5,3)$.

2.- Utiliza 4 de estos puntos para representar gráficamente una función lineal. Utiliza 4 de estos puntos para representar gráficamente una función cuadrática.

3.- Describe algún fenómeno cuyas variables se aproximen a cada una de estas funciones.

Solución



Fuente <https://www.map.mathshell.org/index.php>



Actividad 2.2 Representación gráfica de funciones

Tipo: Desarrollo

Objetivo: O1

Contenidos: U2, U6, U7

Estándares: (2.3, 2.4 B4)

1.- Representa gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -4 < x < 0 \\ -x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$

b) $g(x) = |4 - 2x|$ en el intervalo $[-3, 3]$.

c) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 9}$

Actividad 2.3 Representación gráfica de funciones

Tipo: Aprendizaje

Objetivo: O1

Contenidos: B1, B3 y U1

Estándares: (1.1 B4), (6.3 B1)

1.- Un coche inicialmente en reposo comienza a moverse con una aceleración sobre la trayectoria de 3 m/s^2 . Suponiendo que mantenga constante dicha aceleración durante 5 s, se pide:

a) Construye e interpreta las gráficas $v = v(t)$ y $e = e(t)$.

b) Construye un posible esquema y señala, por medio de puntos sobre la trayectoria, las posiciones sucesivas del coche en intervalos de un segundo.



Actividad 3.1 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media.

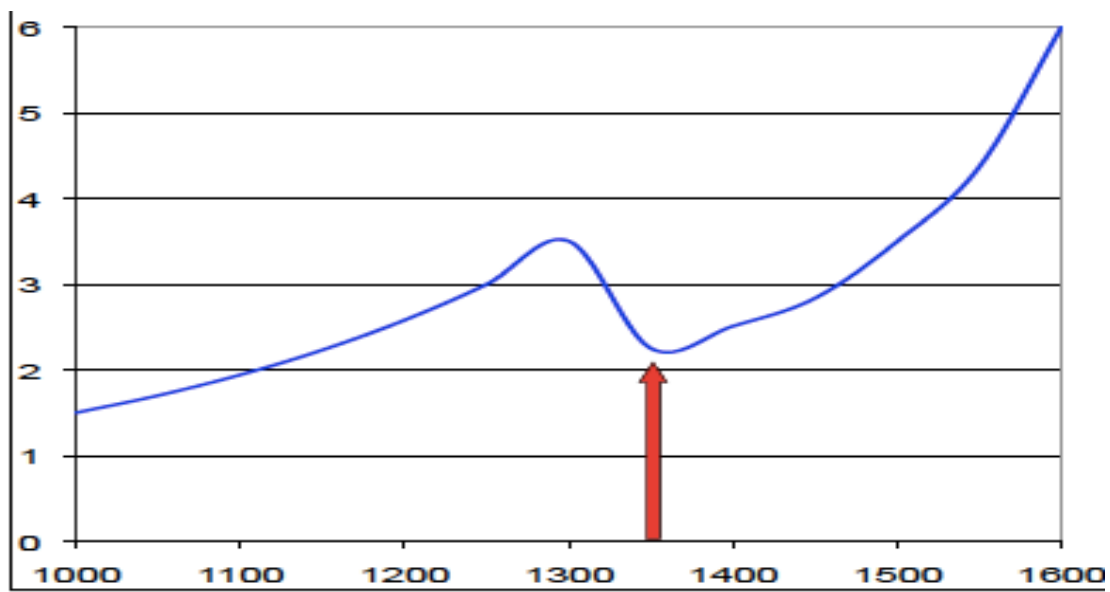
Tipo: Desarrollo

Objetivo: O2

Contenidos: B3, U5

Estándares: (1.5, 2.1 B4) (2.1 B1)

Población de Gran Bretaña en millones de habitantes



Año

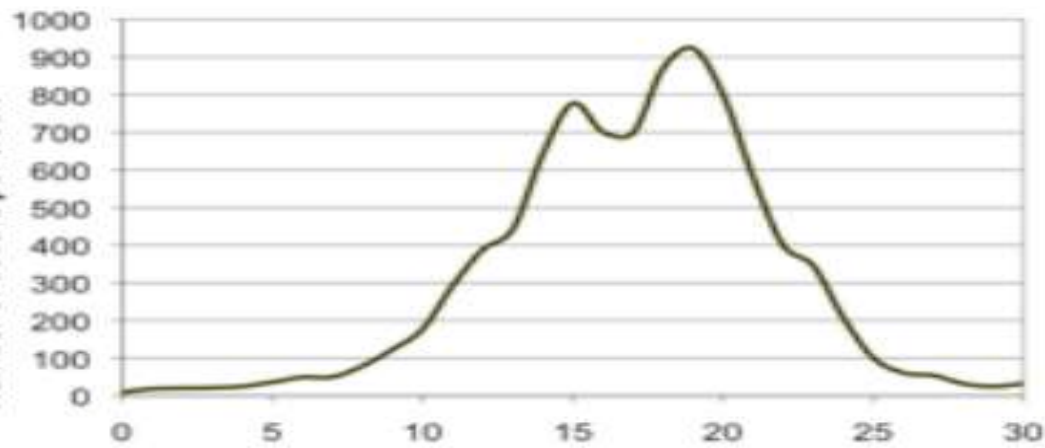
1.- Contesta.

- Si la población de Gran Bretaña antes de la "Black Death" era de 3,5 millones de personas, ¿cuál fue su decrecimiento aproximado?. Expresarlo en millones de personas y en porcentaje respecto a la población antes de la epidemia.
- La población de Gran Bretaña en 2010 era de 61 millones de personas. ¿Qué implicaría un decrecimiento similar al anterior en 2010?



Epidemia en Bombay en 1906

(nº de muertes por semana)



nº de semana

- a) ¿En qué momento la epidemia estaba más extendida?
- b) ¿Cuántos muertos hubo esa semana?
- c) ¿Cuánto tiempo transcurrió para que el número de muertes pasase de 100 a más de 700?
- d) ¿Cuánto tiempo pasó para que el número de muertes cayera por debajo de 100?



Actividad 3.2 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media.

Tipo: Motivación

Objetivo: O1, O2

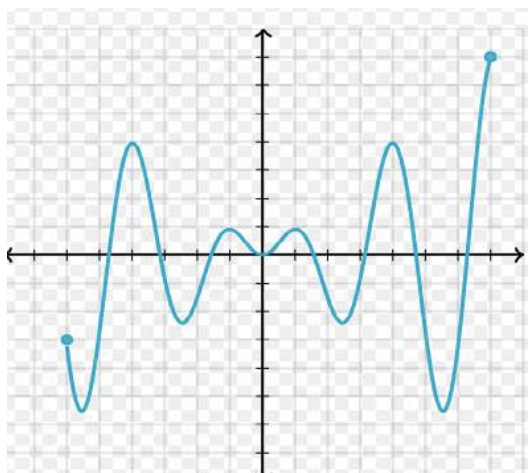
Contenidos: U1, B1

Estándares: (1.1 B4), (2.1 B1)

Actividad kahoot

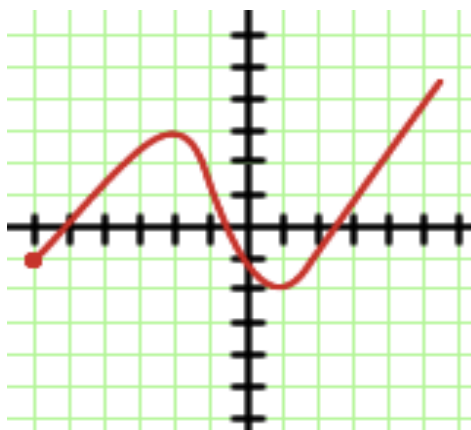
Responde a las siguientes cuestiones lo más rápido posible

1.- ¿Cuántos máximos tiene la siguiente función en el intervalo representado?



- a) 8 b) 1 c) 4 d) ninguno

2.- ¿Qué intervalo de decrecimiento tiene esta función?



<https://www.superprof.es>

- a) $[-2,1]$ b) $[-6,-2]$ c) $[1,3]$ d) $[-6,1]$



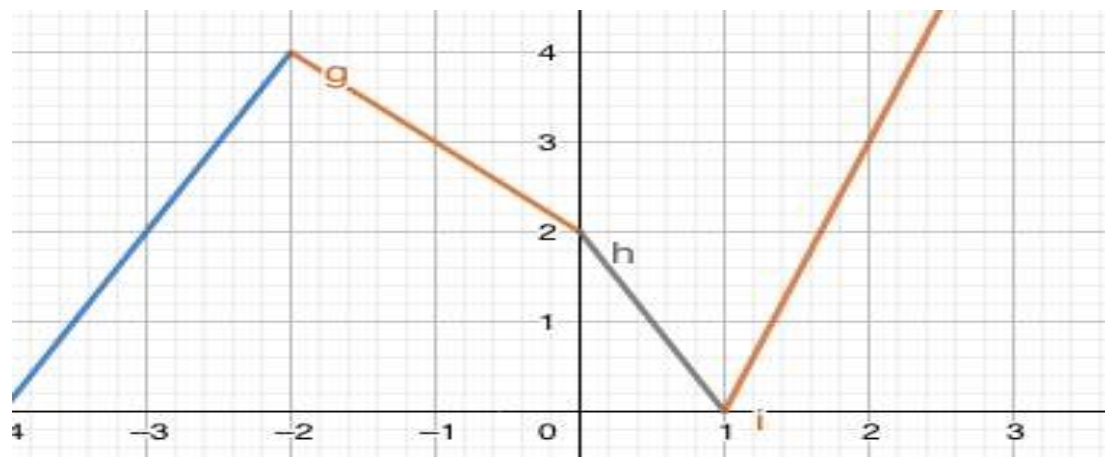
3.- La función $f(x) = x^2 + 1$ es creciente en el intervalo.....

- a) $(-\infty, 0]$ b) Todo su dominio c) No es creciente d) $[0, +\infty)$

4.- ¿Cuántos máximos tiene la función $f(x) = 2$?

- a) 2 b) 1 c) Ninguno d) Más de dos

5.-¿En qué intervalo tiene la función mayor decrecimiento?



Elaboración propia (Geogebra)

- a) $[-4, 2]$ b) $[-2, 1]$ c) $[-2, 0]$ d) $[0, 1]$



Actividad 3.3 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tasa de variación media.

Tipo: Desarrollo

Objetivo: O2

Contenidos: U2, U5, B2

Estándares: (1.5 B4)

1.- Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < -1, \\ 4 & -1 \leq x \leq 3, \\ 2x - 5, & x > 3. \end{cases}$$

- a) Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- b) Calcula la tasa de variación media en sus distintos intervalos.



Actividad 4.1 Puntos de corte con los ejes de coordenadas

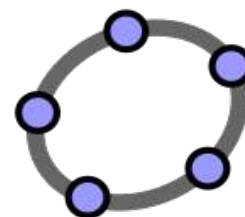
Tipo: Motivación

Objetivo: O5, O2

Contenidos: U4, U5

Estándares: (1.5, 2.3 B4), (11.1, 11.2 B1)

Sesión Geogebra



Asignatura: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas

Curso: 4º de la E.S.O.

Centro:

INTRODUCCIÓN

- **¿Qué es Geogebra?**
 - GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades.
- **¿Qué se puede hacer con Geogebra?**
 - GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

OBJETIVOS Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

- Familiarizarse con Geogebra y explorar algunas de sus posibilidades.
- Explicar y representar gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes

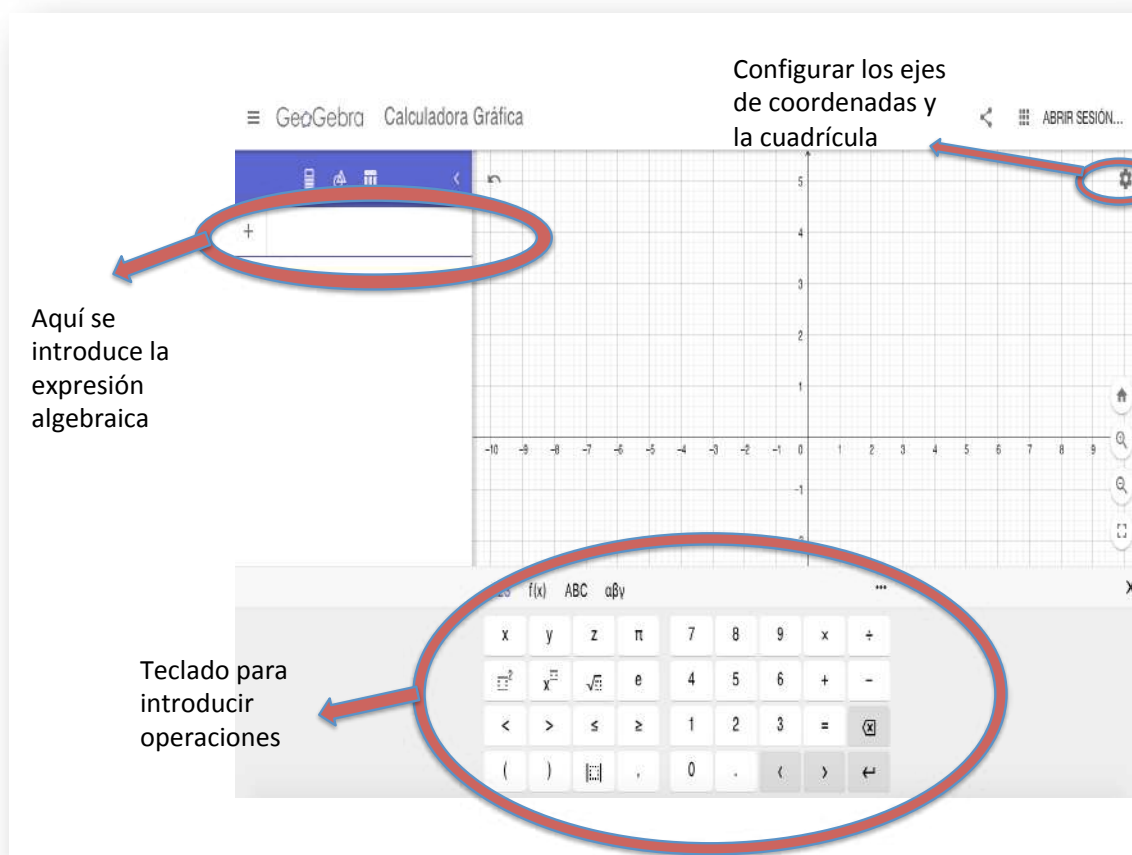
Comenzamos la sesión

1. Introducimos la dirección en el navegador
<https://www.geogebra.org/>

2. Seleccionamos la opción **COMIENZA EL TRAZADO GRÁFICO**.



3. Exploramos las distintas herramientas.



4. Introducir la expresión algebraica. Ej. $f(x) = a \cdot x + b$. Hacer click en **CREAR DESLIZADOR**.

Si activamos este círculo aparecerá un deslizador en la gráfica

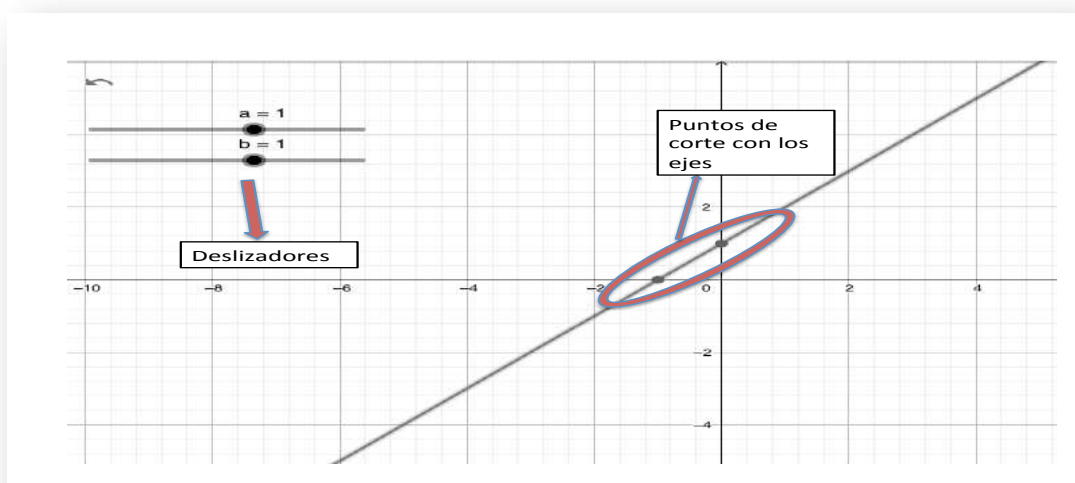
Esta barra representa los límites de los valores de "a" que crea el deslizador. Si movemos el punto a lo largo de la barra modificaremos la pendiente de la función.

Aquí podremos configurar el deslizador

Si clickamos en el círculo ocultaremos la representación

Iniciaremos una animación que modifica el valor de "a".

5. Pulsamos sobre la función representada para obtener los puntos de corte con los ejes.





6.- Introducir las siguientes expresiones algebraicas y hallar sus puntos de corte con los ejes e intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = 3x - 1$

c) $f(x) = -4x + 3$

d) $f(x) = x^2 - 1$

e) $f(x) = x^3$

Actividad 5.1 Operaciones con funciones y dominio de un función.

Tipo: Aprendizaje

Objetivo: O7

Contenidos: U3

Estándares: (2.3 B4)

1.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - x^2$

b) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 16}$

c) $h(x) = \sqrt{2x - 4}$

d) $i(x) = \sqrt{(x + 1)}$



Actividad 5.2 Operaciones con funciones y dominio de un función.

Tipo: Desarrollo

Objetivo: O7

Contenidos: U3

Estándares: (2.3 B4)

1.- Completar la siguiente tabla.

	Función	Dominio
$f(x)$	$x - 4$	
$g(x)$	$\frac{x + 3}{x - 2}$	
$(f + g)(x)$		
$(f - g)(x)$		
$(f \cdot g)(x)$		
$(f \div g)(x)$		

Actividad 6.1 Composición de funciones y función inversa

Tipo: Desarrollo

Objetivo: O7

Contenido: U3

Estándares: (2.3 B4)

1.- Sabiendo que $f(x) = 2x + 3$ y que $g(x) = x^2 - 1$, calcula las siguientes funciones:

a) $f + g$

b) $f \cdot g$

c) $f \circ g$

d) f^{-1}



Actividad 6.2 Composición de funciones y función inversa

Tipo: Desarrollo

Objetivo: O7

Contenido: U3

Estándares: (2.3 B4)

1.- Calcula las inversas de las funciones siguientes, comprobando que la composición de cada una de ellas con su inversa es la identidad y que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante:

a) $f(x) = (3x + 5)/3$

b) $g(x) = (-x + 5)/2$

c) $h(x) = (2x + 2)/3$

d) $i(x) = (x - 7)/5$

Actividad 7

Tipo: Aprendizaje

Objetivo: O1, O3

Contenido: U1, U2, B3

Estándares: (1.1, 1.4 B4), (6.3 B1)

1.- En un aparcamiento se debe abonar 1 euro por cada hora o fracción hasta un máximo de 15 euros al día. Haz un gráfica que represente las cantidades a abonar por un vehículo que está aparcado entre 0 y 48 horas.

2.-Una compañía telefónica cobra a 0.12€ el minuto, sin establecimiento de llamada, y otra compañía cobra a 0.09 € el minuto más 0.57 de establecimiento de llamada.

a) Define dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que nos den el precio siendo x de la duración de la llamada. Indica el tipo de función obtenida en cada caso.

b) Representalas gráficamente en los mismos ejes coordenadas y compáralas.

c) ¿Cuándo deberemos usar cada compañía para que la llamada sea lo más barata posible?



3.- Una cafetería abre a las 10 de la mañana. El número de clientes en función de las horas que lleva abierta viene dado $C(h) = 200h - 20h^2$. Representa gráficamente esta función y coméntala.

- a) ¿A qué hora tiene el mayor número de clientes?
- b) Si queremos encontrar más de 180 personas y menos de 320, ¿a qué hora tenemos que ir? Si además queremos que durante nuestra estancia disminuya el número de clientes, ¿entre qué horas debemos ir?
- c) ¿A qué hora cierra?

4.- Para una fiesta en un pueblo se decidió proyectar una película. El alquiler de la misma era de 150 euros, que se debe pagar entre todos los asistentes a la proyección.

- a) Si llamamos x al número de asistentes e y al precio por persona rellena la tabla siguiente:

x	1	2	3	4	10
y					

- b) Representa gráficamente la función.
- c) Encuentra una fórmula que nos permita relacionar x e y .
- d) ¿Cuántas personas asistieron si la entrada costó 1.25 euros?

5.- Una persona compra un coche por 18.000 euros y sabe que cada año que pase su valor disminuye en un 9%:

- a) Completa la siguiente tabla, donde x representa la antigüedad del automóvil, en años e y su precio en euros.

	1	2	3	4	10
y					

- b) Representa gráficamente la función.
- c) Determina cuánto tiempo tiene que pasar para que su precio se reduzca a la mitad.



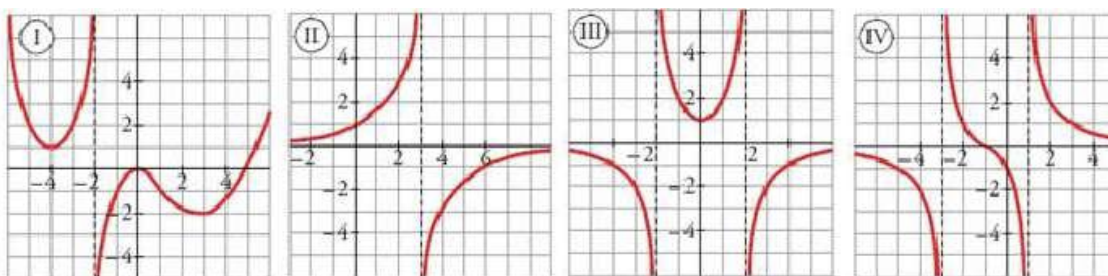
Actividad 8

Tipo: Consolidación

Objetivo: O9 Contenido: U2, U3, U4, U5, U6, U7

Estándares: (1.1, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2, 2.4 B4) (1.1, 2.1 6.3 B1)

1.- Observa las siguientes funciones:



- Determina el dominio y el recorrido de cada una de ellas
- ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En cuáles decreciente?
- Halla los máximos y mínimos, si existen
- Calcula la imagen de los puntos -3, -2, -1.5, 0, 1 y 2.
- ¿Qué valor o valores de x tienen como imagen 2?
- ¿En qué puntos corta la gráfica al eje de abscisas? ¿y al eje de ordenadas?

2.- Estudia el crecimiento y los máximos y mínimos de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

3.- Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones, en el intervalo [1,4].

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x - 2$

4.- Representa la función $f(x) = |x| + |x - 1|$ y exprésala como función a trozos.



5.- Dadas las funciones:

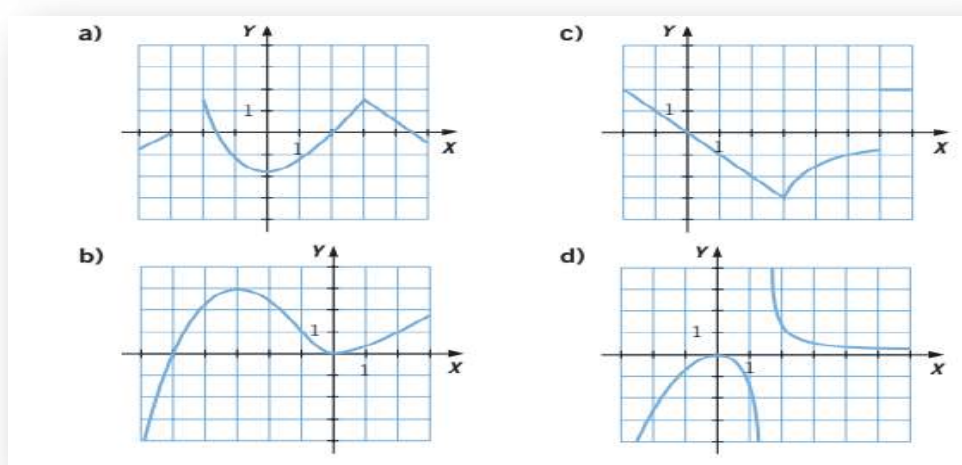
$$f(x) = 2x^2 + 3x \quad y \quad g(x) = \frac{x-1}{2}$$

- a) $(f \circ g)(x)$
- b) $(g \circ f)(x)$
- c) $g^{-1}(x)$
- d) $(g \circ g^{-1})(x) \quad y \quad (g^{-1} \circ g)(x).$

Actividad 9. Prueba escrita.

1. Observa las siguientes funciones y responde a los siguientes apartados

Estándar de aprendizaje. (Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.)



Determina el dominio y recorrido de cada una de las funciones.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Hallar los máximos y mínimos.



2. Representa gráficamente las siguientes funciones

Estándar de aprendizaje. (Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.)

a) $f(x) \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ 2 & x = 1 \\ x + 1 & x > 3 \end{cases}$

b) $g(x) = |x| + |x - 1|$.

3. Dadas las funciones

Estándar de aprendizaje. (Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las Matemáticas.)

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1} \quad y \quad g(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1}$$

Calcula:

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

c) f^{-1}

4. Queremos hacer un viaje al extranjero y preguntamos en dos agencias.

Estándar de aprendizaje. (Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.)



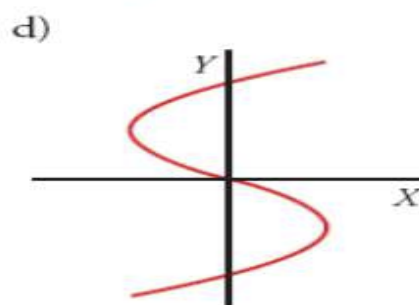
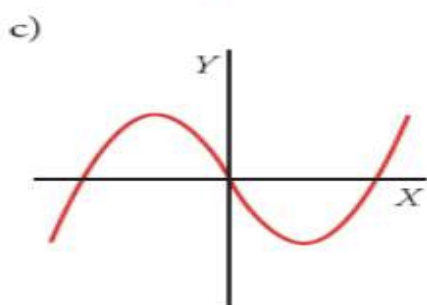
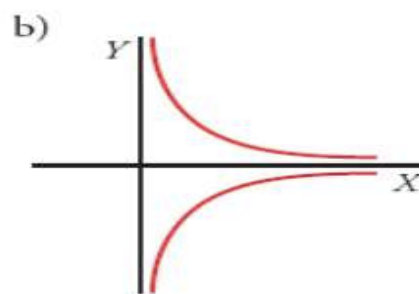
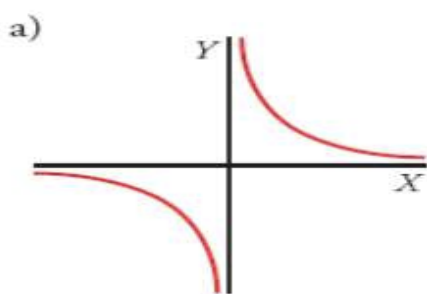
- a) Representan gráficamente las funciones que relacionan los kilómetros recorridos y el precio.
- b) ¿Con qué agencia interesa contratar el viaje?



Anexo II

Actividad 1. Actividad de refuerzo

1.- ¿Cuales de estas gráficas corresponden a una función?



2.- Representa gráficamente las siguientes rectas

a) $y = 4x$

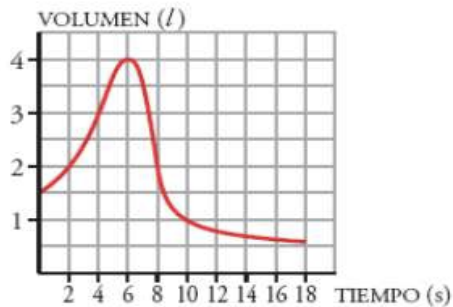
b) $y = -3x$

c) $y = -x/2$

d) $y = -4$



3.- Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.



Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.

- a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?
- b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?
- c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?
- d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuando termina?

Actividad 2. Actividad de ampliación

1.- Representa gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

determinando el dominio, máximos, mínimos e intervalo de crecimiento y decrecimiento.

2.- Calcula los puntos de corte con los ejes de las funciones:

a) $y = \frac{x + 4}{2x + 2}$

b) $y = \log(x + 100)$

c) $y = \sqrt{x^2} + 9$

d) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$



$$e) y = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$f) y = \ln \frac{x + e}{x + 2}$$

3.- En la perforación de un pozo el coste de la extracción del metro cuadrado de tierra a una profundidad de x metros es proporcional a x^n , para un cierto número $a > 1$. Llamaremos $C(x)$ al coste de la extracción de tierra del pozo, desde la superficie hasta la profundidad de x metros. Sabiendo que $C(2) = 8\sqrt{2} C_1$, se pide:

a) Halla a

b) Halla la profundidad h para la que $C(h) = 128(C_1)$