



UNIVERSIDAD DE JAÉN

FACULTAD DE CIENCIAS
EXPERIMENTALES

Grado en Biología

Trabajo Fin de Grado

Matemáticas, vacunación y epidemias.

Celia Ruiz García

Junio 2019



UNIVERSIDAD DE JAÉN

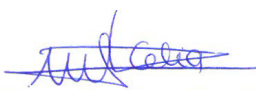
FACULTAD DE CIENCIAS
EXPERIMENTALES

Grado en Biología

Trabajo Fin de Grado

Matemáticas, vacunación y epidemias.

Celia Ruiz García


Celia Ruiz García.

Junio 2019

Índice

1. Resumen / Abstract	2
2. Introducción.....	3
3. Antecedentes.....	4
3.1 Situación actual.....	5
4. Objetivo.....	11
5. Material y métodos.....	12
5.1 Modelos matemáticos.....	12
5.2 Funciones	12
5.3 Derivadas.....	13
5.4 Ecuaciones diferenciales.....	14
5.5 Tipos de funciones y sus derivadas	14
6. Resultados.....	22
7. Discusión de resultados.....	31
8. Conclusiones.....	35
9. Bibliografía.....	36
Anexo I.....	39

1. Resumen.

Ya que en la actualidad hay una gran cantidad de movimientos en contra de las vacunas (ya sea por un motivo u otro) que están provocando conflictos sociales y médico, tratamos de poner en claro el efecto que tiene la vacunación sobre la propagación de una epidemia, explicamos inicialmente los conceptos básicos matemáticos necesarios para entender el contenido.

A continuación, se exponen los modelos matemáticos que describen el comportamiento y propagación de la epidemia, incluyendo variables y cómo van cambiando a lo largo del tiempo. Por último, incluimos en dichos modelos los cambios que provocamos en las variables por el uso de las vacunas, observando de esta manera que, si un número suficiente de individuos están vacunados, no llega a producirse una epidemia, y todos los problemas que ello conlleva.

Abstract.

Since there are currently a large number of movements against vaccines (either for one reason or another) that are causing social and medical conflicts, we try to make clear the effect that vaccination has on the spread of an epidemic, we explain initially the basic mathematical concepts necessary to understand the content.

Next, the mathematical models that describe the behavior and spread of the epidemic are exposed, including variables and how they change over time. Finally, we include in these models the changes that we cause in the variables by the use of vaccines, observing in this way that, if a sufficient number of individuals are vaccinated, an epidemic does not occur, and all the problems that this entails.

2. Introducción.

Durante la historia de la humanidad, siempre se ha intentado buscar una manera de prevenir el contagio de las enfermedades que diezmaban a la población mediante la exposición en menor medida del agente en el organismo para que este aprenda a reaccionar. Ya, en el siglo VII, budistas indios trataban de hacerse inmunes al efecto del veneno de serpiente mediante su ingesta.

En el siglo X en china, se inoculaba virus de las pústulas de una persona enferma en una sana, habiéndolo sometido a un proceso de ahumado con el fin de disminuir la capacidad infecciosa de este.

Aunque la historia está llena de personas que intentaron crear dicha prevención, fue Eduardo Jenner el considerado como padre de la vacunación. Mientras estudiaba medicina, llegó a sus oídos que una campesina de Berkeley, Escocia, planteaba que era incapaz de contagiarse de viruela, ya que había sufrido con anterioridad la viruela del ganado vacuno. Una vez graduado, comenzó con el estudio de las vacunas, y el 14 de mayo de 1796, Jenner inoculó a un niño linfa de una pústula de viruela, obtenida de una enferma. A continuación, para comprobar si había sido eficaz, inoculó al niño el virus del que se había contagiado dicha enferma y, efectivamente, el niño nunca enfermó.

Sus resultados fueron publicados en 1798 en *Variolae Vaccinae*, y tan solo 10 años después, el mundo entero conocía su existencia.

En el siglo XIX, el biólogo y químico francés Louis Pasteur descubre la vacuna antirrábica humana, el bacteriólogo español Jaime Ferrán descubre la vacuna anticolérica y una gran cantidad de vacunas más fueron descubiertas hasta llegar a la actualidad.

A la par de la creación de las vacunas, se han desarrollado a lo largo de la historia movimientos antivacunas, es decir, personas que no creen en la necesidad de vacunar o que no creen en su eficacia.

3. Antecedentes.

Los movimientos antivacunas no son homogéneos, es decir, no todos piensan lo mismo acerca de las vacunas: hay algunas personas que están en contra de todas las vacunas, personas que están en contra de alguna vacuna en concreto o incluso personas que están en desacuerdo con su 'obligatoriedad' o con los adyuvantes que incluye las vacunas.

Algunos de los motivos más populares para la negativa a vacunar son:

- Filósofo-religiosos. Hay una gran cantidad de personas que cree que la vacunación cambia el equilibrio de la naturaleza y que son innecesarias. Este tipo de pensamientos fueron los que provocaron un brote de poliomielitis en Holanda en el año 1992 y un brote de rubéola en EEUU en 1990.
Otros grupos consideran que, establecer la vacunación de forma obligatoria para todo el mundo, es una violación de sus derechos.
- Poca eficiencia. Algunos grupos sostienen que la mejora del contagio de las enfermedades no tiene que ver con las vacunas, si no que el nivel socio-económico ha aumentado mucho, por lo que las condiciones de higiene y sanitarias son mucho mejores, y son estas las causas de que no haya tanta transmisión de enfermedades.
- Riesgos y consecuencias. En general, este tipo de rechazos duda sobre la seguridad de las vacunas, es decir, las rechazan debido a los efectos secundarios, asociación temporal (es decir, el tiempo que pasa desde que se inyecta la vacuna hasta que hace efecto, y cuánto tiempo es efectiva), etc.
- Otros argumentos, como puede ser el dolor del pinchazo, 'riesgos' si se produce mala praxis (afección ciática, abscesos, hematomas...)

Aunque dichos movimientos están bastante extendidos, se puede considerar que, en nuestro país, el porcentaje de vacunación es bastante alto. En España, el porcentaje medio de personas vacunadas ronda el 96%, aumentando cada año, tal y como muestran los datos obtenidos por el ministerio de Sanidad, Consumo y Bienestar.

<https://www.mscbs.gob.es/profesionales/saludPublica/prevPromocion/vacunaciones/coberturas.htm>)

TABLA 1A. COBERTURAS DE PRIMOVACUNACIÓN. ESPAÑA 2008-2016.									
VACUNAS	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Poliomielitis	96,7	95,9	96,6	97,1	96,3	95,6	96,6	96,6	97,2
DTPa	96,7	95,9	96,6	97,1	96,3	95,6	96,6	96,6	97,2
Hib	96,7	95,9	96,6	97,1	96,3	95,6	96,5	96,6	97,2
Hepatitis B	96,5	95,5	96,5	96,6	95,8	95,2	96,2	96,6	97,2
Meningococo C	97,2	97,4	97,8	98	96,6	95,8	96,9	97,0	98,0

Figura 3.1 Datos de primovacunación en España.

<https://www.mscbs.gob.es/profesionales/saludPublica/prevPromocion/vacunacion/es/coberturas.htm> (16/05/2019)

Gracias a las vacunas y a todo el sistema de vacunación que se ha establecido en la Unión Europea, se consiguió que enfermedades como es el sarampión o la tosferina se controlaran, hasta el punto que, desde los años ochenta hasta el 2015 no hubo registro de ningún caso de contagio de difteria, pero en dicho año se produjo la trágica muerte de un niño, por no ser vacunado. Es cierto que solo se trata de un caso aislado, pero el movimiento antivacunas cada vez está más extendido y es más común encontrar a personas que no se quieren vacunar o no quieren vacunar a sus hijos (Luis Urbiztondo y Eva Borrás, (2019))

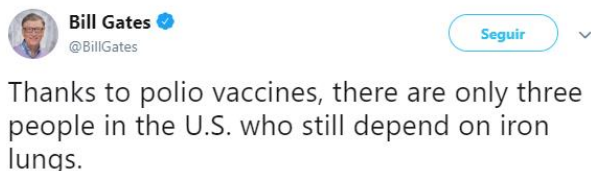
Jorge Bello (2017), proponía en esa misma revista (Enfermedades emergentes) que esta actitud en contra de la vacunación fuera considerada como una enfermedad social emergente. Aunque no se ha considerado así, en la actualidad poseemos muchas estrategias para poder estudiar dicha situación y distintas formas de abordarlo.

Uno de los propósitos del grupo de trabajo del SAGE (Strategic Advisory Group of Experts on immunization) sobre reticencia ante la vacunación (SAGE Working Group on Vaccine Hesitancy) de la OMS fue la creación de distintas herramientas capaces de determinar dónde se situaban los núcleos de los movimientos antivacunas, como habían dado comienzo dichos movimientos, su magnitud y distintas formas de conseguir que dichos núcleos volvieran a confiar en las vacunas.

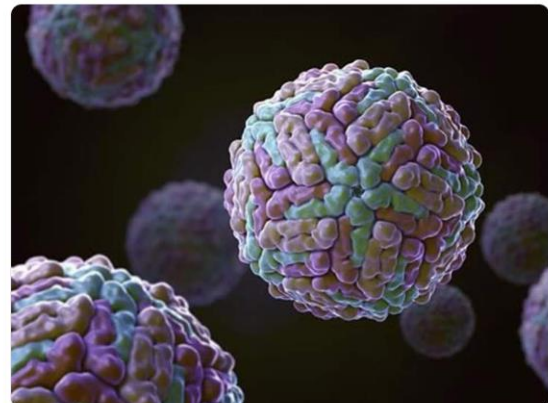
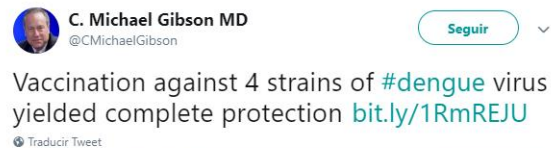
3.1 Situación actual

Twitter es una red social que amplifica mensajes en la red, los cuales pueden tener una gran influencia sobre todo el mundo. En el contexto antivacunas, hay muchas opiniones influyentes a favor de la vacunación, como son tuits de famosos como Bill

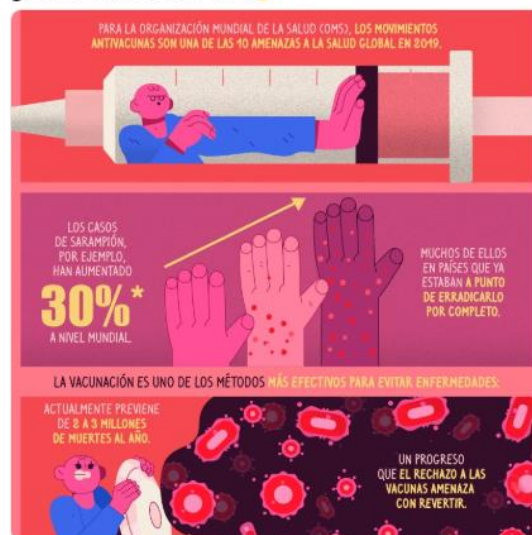
Gates y Shakira, poderosos medios de comunicación como son “The Washington Post”, CNN (Vaccines Fast Fact, 10 de junio 2019); organizaciones internacionales como la OMS y UNICEF; y referentes en salud como el doctor Michael Gibson, profesor de la Escuela de Salud Pública de Harvard y fundador de WikiDoc.org, o la Academia Estadounidense de Pediatría.



The Last of the Iron Lungs
Martha Lillard spends half of every day with her body encapsulated in a half-century old machine that forces her to breathe. Only her head sticks out of the end of the a...
gizmodo.com



Para la OMS, los movimientos antivacunas son uno de los 10 peligros para la salud global en este 2019 🙄



11:23 - 17 ene. 2019

Por el contrario, también puede convertirse en un altavoz de opiniones negativas, pudiendo promover movimientos negacionistas, los cuales crean temores en miles de padres, pudiendo dar lugar a brotes de sarampión, difteria o poliomielitis, enfermedades muy contagiosas consideradas controladas gracias a la profilaxis de las vacunas.

En el Anexo I, se analizan muchas herramientas webs que nos permiten la búsqueda de hashtag, conocer su alcance, personas que lo publican, las que lo comparten, etc. En un estudio realizado por el grupo de Inteligencia Aplicada y Análisis de Datos de la Universidad Autónoma de Madrid, los investigadores David Camacho y Gema Bello-Orgaz en colaboración con Julio Hernández-Castro, profesor de Seguridad Informática en la Universidad de Kent (Reino Unido), han llegado a la conclusión de que hay 5 países en los que más se tuitea acerca del tema antivacunas, y donde se han producido más cambios en la tasa de inmunización en los últimos 10 años: Estados Unidos, Reino Unido, Australia, Canadá e Irlanda.

‘El detonante de este estudio fue una epidemia de sarampión que tuvo lugar en Londres. “Mi tesis doctoral se centra en los algoritmos de detección de comunidades y estábamos buscando un dominio de aplicación real’ –recuerda Bello-Orgaz–. Al irme de estancia a la Universidad de Kent, el profesor Hernández-Castro, coautor de este artículo, nos contó que se estaban produciendo brotes de sarampión en el Reino Unido debido a que había niños sin vacunar. Empezamos a recoger datos y a hacer los primeros análisis del trabajo” (https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2017-03-15/vacunas-antivacunas-pseudociencias-twitter-redes-sociales_1348721/)

Dicha epidemia se produjo debido a la publicación de un falso estudio que vinculaba la vacuna triple vírica (sarampión, paperas y rubeola) con problemas intestinales, autismo y otros trastornos. No fue hasta 2011 cuando el British Medical Journal (Flaherty, D. K, 11 de septiembre) declara como fraudulento dicho estudio, pero sin poder evitar ya la influencia que había tenido éste sobre las opiniones a favor de este movimiento, haciendo disminuir la tasa de vacunación de un 92 a un 80%

En 2015 (<https://vacunasaep.org/profesionales/noticias/fallece-el-nino-enfermo-de-difteria>) aparece un caso en España de un niño que fallece por difteria (una enfermedad prácticamente extinta) debido a la decisión de sus padres de saltarse el calendario de vacunación.

Tras dichos acontecimientos, se llega a la conclusión de que las nuevas tecnologías pueden servir de puente para la divulgación de ideales. Para la localización de los

núcleos que se encargan de dicha divulgación la clave está en generar algoritmos de minería de datos que nos permitan indagar en el Big Data, encontrando las comunidades más influyentes y sus creadores.

“Para medir la influencia social de Twitter en las tasas de vacunación hemos utilizado como partida los mensajes que mencionaban las vacunas en Twitter entre el 15 de mayo y el 8 de noviembre de 2014 y, por otro lado, las tasas de vacunación de los últimos diez años publicadas por la web de la Organización Mundial de la Salud (OMS)”, detalla Bello-Orgaz. (https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2017-03-15/vacunas-antivacunas-pseudociencias-twitter-redes-sociales_1348721/)

Su hipótesis se basaba en la creencia de que, cuanto mayor fuera el número de tuits y su relevancia sobre este tema, mayor será el cambio en la tasa de vacunación. Mediante la tasa de vacunación y la relevancia de los tuits, se calcularon dos factores. “Analizamos si los dos factores estaban correlacionados para identificar la posible influencia de los mensajes en redes sociales sobre las decisiones de los usuarios a la hora de inmunizar a sus hijos”, explica Bello-Orgaz.

Se estudiaron los tuiteros más destacados, así como sus tuits y su relación entre ellos. “Con métricas que miden la conectividad de los usuarios, se puede saber cuáles son los más relevantes: los que hacen o reciben más retuits; o los más influyentes: los que conectan a más tuiteros y, por lo tanto, dejan fluir más información”, aclara Camacho. Por suerte, el estudio determinó que los apoyos a movimientos antivacunas eran pocos y mal conectados, mientras que los más influyentes estaban a favor de la vacunación.

Los casos que encontramos sobre enfermedades ya prácticamente extintas dejan ver el riesgo que se corre al estar a favor de un movimiento que no está filtrado mediante conocimientos científicos. A partir de este trabajo, ¿se podría desarrollar un detector de tendencias peligrosas para la salud global? “Este es un primer trabajo, pero sí que se podría desarrollar un sistema que recogiese constantemente información de las redes sociales, y con algoritmos de minería de datos detectara nuevos grupos antivacunación o cambios en los ya existentes. Esta información sería muy útil para prevenir sus efectos”, defiende Bello-Orgaz. Sugiere que “una primera acción para contrarrestar estos movimientos sería emplear a otros usuarios influencers que hicieran comentarios a favor. Y, además, se podrían localizar zonas donde mayoritariamente se originan y utilizar la información para adaptar las campañas de

vacunación y que fueran más intensivas en esos puntos. Adelantarnos a problemas futuros”.

De acuerdo con *‘El sarampión se dispara en Europa: más de 21.000 casos y un aumento del 400% en un año’* (<https://buenavibra.es>) observamos los datos obtenidos en el 2017: mientras que en 2016 se registraron 5273 casos de sarampión en Europa, en 2017 se registraron más de 21300, incluyendo 35 muertes. Esto supone una elevación de un 400% en la tasa de contagio de dicha enfermedad.

15 de los 53 países que forman la región Europea de la OMS son los que salieron peor parados, ya que suman un alto porcentaje del total de infectados. Los países más afectados fueron Rumanía con 5.562 personas contagiadas, Italia con 5.006 y Ucrania con 4.767. Todos estos países han visto disminuir la tasa de vacunación debido a movimientos antivacunas, descenso de la cobertura de inmunización o interrupción de suministros. En España solo se han registrado 152 casos de infectados. El problema es que todos ellos son personas capaces de infectar a más personas sanas que por un motivo u otro no están vacunados.

En la actualidad en nuestro país, también se han desarrollado conflictos sociales debido a la posición antivacuna que están adoptando algunos padres. El pasado día 18 de febrero del 2019, se publicaba en www.publico.es una noticia en la que se hablaba de un reportaje publicado en TVE. Dicho reportaje trataba sobre el ámbito antivacunas, y de cómo muchos de los profesionales de este campo están a favor de dicho movimiento. Personalidades como Enrique Cosa Vercher, un licenciado en Medicina y Cirugía, el cual afirmaba que no había vacunado nunca a sus hijos y aun así estaban sanos. También apareció en dicho programa Miguel Jara, escritor del libro *Vacunas las justas*, el cual afirmaba que entendía por qué algunos padres no querían vacunar a sus hijos.

La audiencia no estuvo de acuerdo con dicho programa, ya que ayudaba a dar voz a un colectivo de personas que intentan dejar a las vacunas en un mal lugar.

En contraposición a los ideales antivacunas, en marzo de 2019, el presidente de la Xunta, Núñez Feijóo, pone en conocimiento popular su intención de hacer obligatorio el seguimiento del calendario de vacunación para todos aquellos niños que vayan a ser matriculados en un centro infantil (0 a 3 años). Se ha elegido esta etapa escolar, ya que en las etapas más avanzadas hay vacunas que no son obligatorias.

Con esta medida el presidente pretende proteger a los niños y a la sociedad en general de "corrientes muy peligrosas, como las antivacunas que, lamentablemente, en el siglo 21 se están dando; y en Galicia, con intensidad", ha señalado.

Feijóo advierte a los padres de los niños que, si sus hijos no tienen las vacunas obligatorias, hay una alta posibilidad de que no puedan llevarlos a ningún centro infantil, y de que todavía tienen tiempo de poner al día dicha cartilla y evitar problemas futuros.

Al contrario que en Galicia, el director general de Salud Pública del Gobierno aragonés, Francisco Javier Falo, ha descartado establecer la medida tomada en Galicia, ya que considera que el movimiento antivacuna es muy escaso tanto en España en general como en Aragón. No ven conveniente endurecer las medidas, sino que es preferible que los ciudadanos tomen responsabilidad sobre este tema.

4. Objetivo.

Hacer ver que las matemáticas estudian los modelos epidemiológicos y son capaces de demostrar en ellos la eficacia de la vacunación, así como los errores de la no vacunación, generando una posible previa situación de falsa seguridad, explicable con el modelo. Dicho de otra manera, demostrar la eficacia de las vacunas ante la prevención de epidemias.

5. Materiales y métodos.

En este caso, al tratarse de un trabajo bibliográfico y basado en la explicación matemática de nuestra teoría, nuestros materiales y métodos son los conocimientos y modelos matemáticos aplicados a la medicina, en concreto a la vacunación/epidemias.

5.1 Modelos matemáticos.

Para comenzar vamos a hablar de los modelos matemáticos más comunes, y los estados en los que se encuentran dichos individuos:

- Individuos susceptibles (S) son aquellos individuos que pueden ser contagiados por la enfermedad.
- Individuos infectados (I) son aquellos que están contagiados, sufren la enfermedad y tienen la capacidad de transmitirla a otros individuos.
- Individuos recuperados (R) son aquellos que se han recuperado de la enfermedad y pierden la capacidad de volver a ser infectados.

Los modelos más utilizados son:

- SI: existen individuos que son susceptibles a la infección, e individuos infectados, es decir, que ya sufren la enfermedad.
- SIS: existen individuos susceptibles a la infección e individuos ya infectados que, una vez superada la enfermedad, recuperan la capacidad de ser infectados.
- SIR: existen individuos susceptibles, individuos ya infectados, y una vez pasada la infección pasan a ser recuperados, los cuales son incapaces de volver a contagiarse.

(Grima, C.,Fernandez Borja, E.,(2017) *Las matemáticas vigilan tu salud. Modelos sobre epidemias y vacunas*. Next Door Publishers.)

5.2 Funciones.

Según la web '<https://definicion.de/funcion-matematica/>' : 'una función matemática es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno.

Al conjunto inicial o conjunto de partida también se lo llama dominio; al conjunto final o conjunto de llegada, en tanto, se lo puede denominar codominio’.

Dicho de otro modo, una función es una ‘máquina’ matemática, en la que insertando un número y siguiendo sus reglas, obtienes otro.

Podemos denominar ‘variable’ al número que nosotros introducimos en dicha función. Para cada función, la cantidad de variables que podemos utilizar es ilimitado, y todas ellas pueden ser mostradas en una gráfica.

$$f(x) = 2x$$
$$\text{pendiente} = 2$$

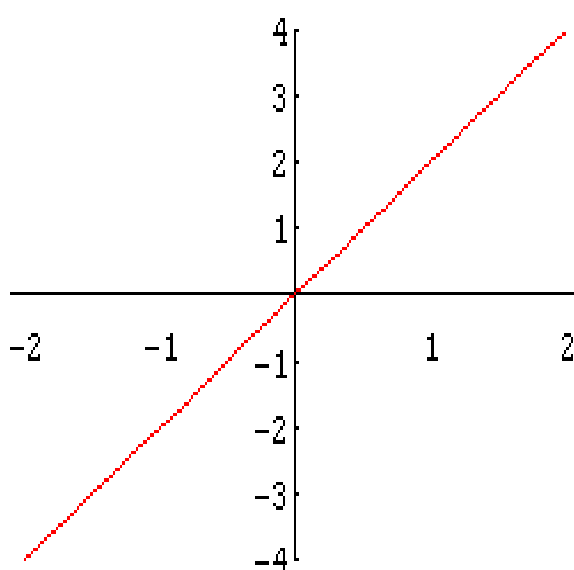


Figura 5.2.1 Gráfica de una función lineal.

http://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/funcion/func_ejem.html (2/06/2019)

5.3 Derivadas.

La web <https://www.hiru.eus/es/matematicas/derivada-de-una-funcion> define a la derivada como ‘la variación que experimenta la función de forma instantánea, es decir, entre cada dos puntos de su dominio suficientemente próximos entre sí.’

Dicho con otras palabras, la derivada nos informa de cómo va cambiando la función conforme vamos cambiando las variables de las que depende.

El signo de la derivada nos informa del estado en la que se encuentra la función (crece, decrece o se mantiene estable). Podemos encontrar la derivada en tres estados diferentes:

- Cuando la derivada de una función respecto de su variable es positiva (es decir, $dP(x)/dx > 0$) se dice que la función en ese punto está en crecimiento.
- Si por el contrario, la derivada es negativa ($dP(x)/dx < 0$), podemos determinar que la función en ese punto decrece.
- Si la derivada es igual a cero ($dP(x)/dx = 0$), la función se mantiene constante en ese punto.

5.4 Ecuaciones diferenciales.

La web <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap1-geo/node3.html> define una ecuación diferencial como *‘una ecuación que relaciona de manera no trivial a una función desconocida y una o más derivadas de esta función desconocida con respecto a una o más variables independientes’*.

5.5 Tipos de funciones y sus derivadas.

- Funciones constantes.

Este tipo de funciones toman el mismo valor para todas las variables.

Podríamos usar de ejemplo las camisetas que nos quedan pequeñas que tenemos guardadas en una caja en el armario: tengo 6 camisetas guardadas. No las voy a desgastar ni a romper porque no me las puedo poner, ni tampoco las voy a tirar porque les tengo cariño, por lo que el número no va a descender. No voy a comprarme más camisetas que no me estén bien para guardarlas en una caja, ya que no las voy a usar, así que el número tampoco va a aumentar. Dadas estas condiciones, el número de camisetas guardadas en la caja se mantendrá estable pase el tiempo que pase.

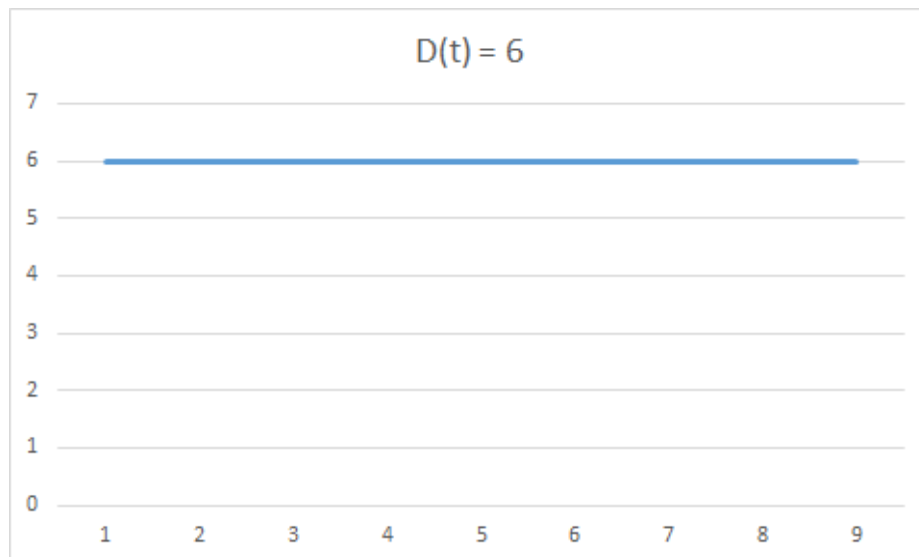


Figura 5.5.1. Gráfica de una función lineal. Gráfica propia.

En este tipo de funciones, su derivada va a ser nula, ya que en todos sus puntos es constante.

$$D(t) = 6$$

$$D'(t)/dt = 0$$

*Aclaración: Escribimos $D(t)$ ya que en nuestro ejemplo, la función va a estar determinada por la variable 't', que en este caso es el tiempo (para simplificar, a partir de ahora vamos a considerar siempre que es nuestra variable, a no ser que se diga lo contrario)

- Función de crecimiento constante.

En este caso, nuestra variable va a ir creciendo o decreciendo de forma constante conforme va pasando el tiempo.

Esta vez como ejemplo vamos a poner la hucha que teníamos de pequeños: tus padres deciden que es el momento de enseñarte a ahorrar, por lo que deciden regalarte la típica hucha en forma de cerdito. Te la regalan con una condición: de cada 2€ que ellos te dan cada fin de semana, tu tienes meter en el cerdito 1. De esta manera, la cantidad de dinero que tendrás irá en aumento conforme pasen las semanas, como se muestra en este gráfico:

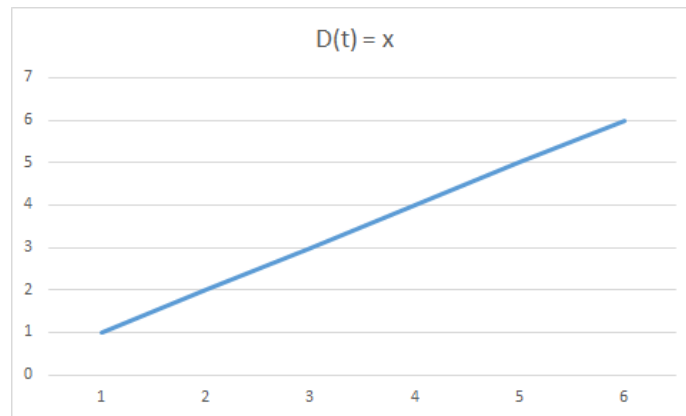


Figura 5.5.2. Gráfica de una función con crecimiento constante. Gráfica propia

En este caso, para nuestra función $D(t) = x$, su derivada también va a ser una constante, en este caso $D'(t) = 1$, es decir, la función siempre se va a mantener en un crecimiento constante de 1 en cada unidad de tiempo (es decir, que, con nuestro ejemplo, cada semana que pase, el saldo que tenemos dentro de nuestro credito aumenta un euro).

De forma paralela, a tu hermano pequeño también le ofrecen tus padres el mismo trato, comprarle una hucha a cambio de que meta dinero. La única diferencia contigo es que, hace una semana, fue su cumpleaños, y vuestra abuela le regaló 10€, y como no los ha gastado, decide meterlos también en la hucha. En su caso, la gráfica que le corresponde es esta:

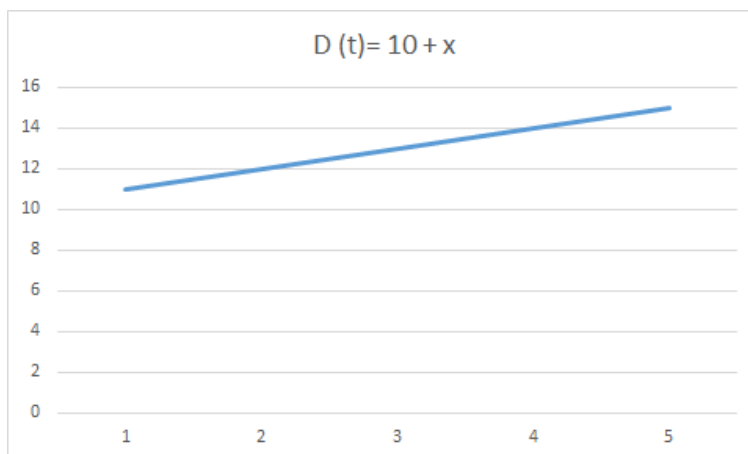


Figura 5.5.3. Gráfica de una función con crecimiento constante con un valor inicial distinto a 0. Gráfica propia.

Aunque en este caso nuestra derivada sea diferente, ya que contábamos con saldo inicial, la derivada sigue siendo la misma: $D'(t) = 1$, es decir, la velocidad a la que va a aumentar la variable conforme va variando el tiempo (pendiente) va a ser la misma. Los padres de tu amigo, que conocen a los tuyos, deciden hacer lo mismo, pero con una diferencia: ellos, en vez de darle a su hijo 2€ a la semana, le van a dar 3, pero tu amigo va a tener que meter en la hucha 2€ a la semana. En su caso la función sería:

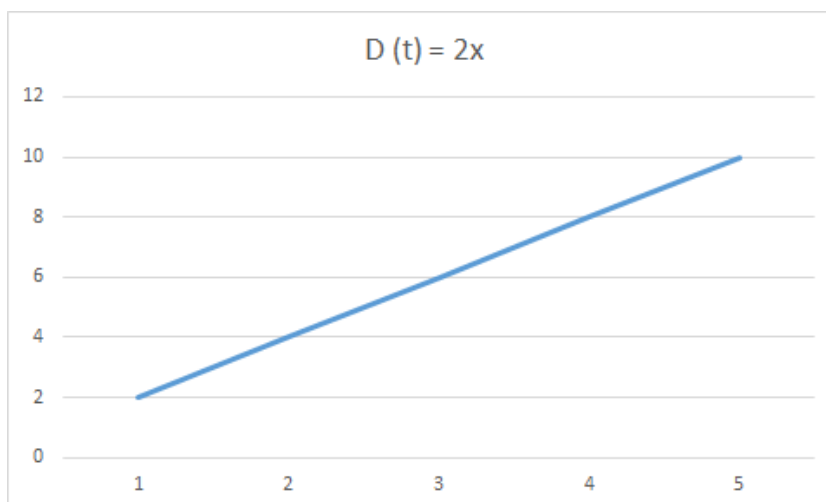


Figura 5.5.4. Gráfica de una función con crecimiento constante $D(t) = 2x$. Gráfica propia.

En este caso función y derivada serán:

$$D(t) = 2x$$

$$D'(t) = 2$$

Como podemos observar, la derivada sigue siendo una constante, pero hay algo que ha cambiado; el valor de dicha constante ha pasado de ser 1 a 2, es decir, ha aumentado la pendiente. ¿Qué quiere decir eso? Que por cada unidad de tiempo que pase (en este caso una semana) en vez de aumentar el saldo en 1, va a aumentar en 2. Vamos a verlo mejor con un gráfico:

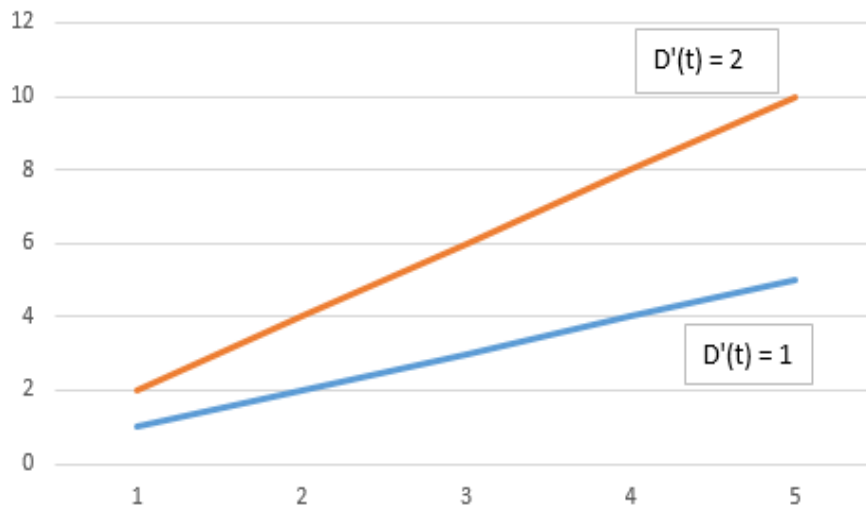


Figura 5.5.4. Gráfica de dos funciones con crecimiento constante. En una, su derivada tiene valor de 1, y en otra 2. Gráfica propia.

Como podemos observar, aunque en ambas el crecimiento sea constante, en una la pendiente es mayor que la otra.

De igual modo, podríamos encontrar un decrecimiento: Si tenemos 20€ y todos los viernes con compramos un refresco que nos cueste 2, sin que tengamos ningún tipo de ingreso, nuestro avance será el siguiente:

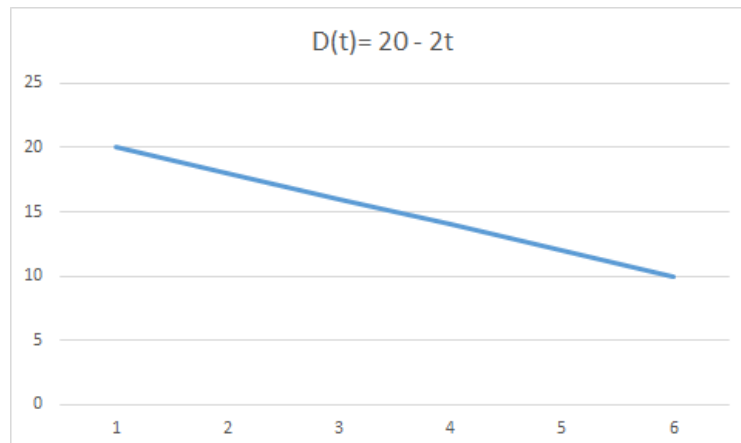


Figura 5.5.5. Gráfica de una función con decrecimiento. Gráfica propia.

En este caso, tendríamos:

$$D(t) = 20 - 2t$$

$$D'(t) = -2$$

Esta derivada quiere decir que nuestra función va a ir decreciendo de forma constante con una pendiente de 2.

- Funciones exponenciales.

Las células pueden considerarse en este caso uno de los ejemplos más fáciles para explicar estas ecuaciones: Una bacteria, pasado un tiempo, se divide en 2, que a su vez, vuelven a dividirse en 2, y así sucesivamente. La función que describe este comportamiento sería

$$D(t) = 2^t$$

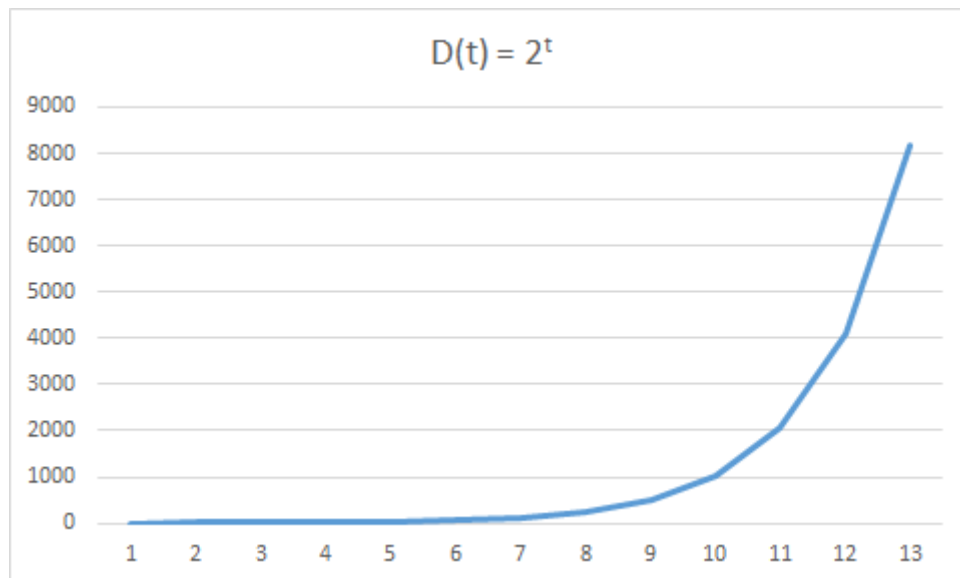


Figura 5.5.6. Gráfica de una función con crecimiento exponencial. Gráfica propia.

Como podemos observar, comienza con un crecimiento muy tenue y va aumentando dicho crecimiento conforme va pasando el tiempo.

El crecimiento más rápido demostrado es el descrito con el número de Euler, o denominado número e, no puede ser expresado como fracción y tiene infinitos decimales.

En este caso, la derivada de una función coincide con la misma función:

$$D(t) = 2^t$$

$$D'(t) = D(t) = 2^t$$

La velocidad a la que este tipo de funciones llega a la zona de crecimiento exponencial puede modificarse si se modifica la constante que multiplica a la variable:

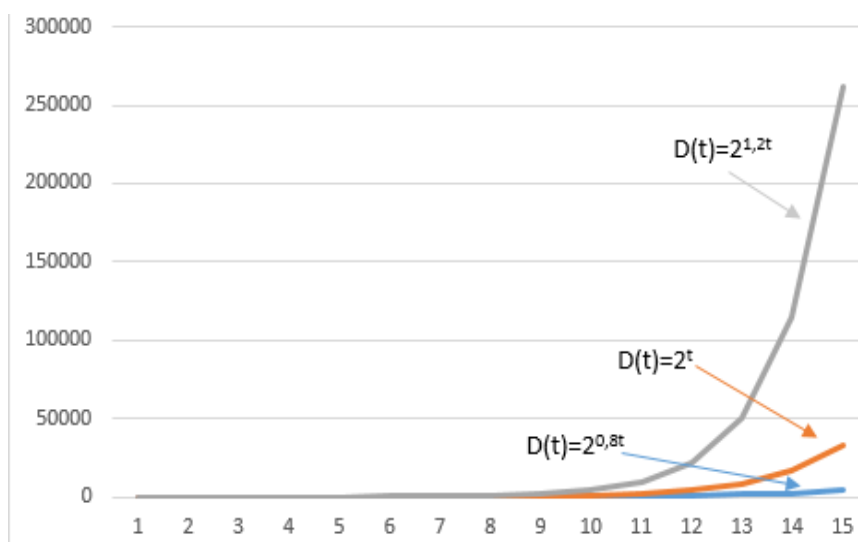


Figura 5.5.7. Gráfica de funciones exponenciales diferente constante multiplicando la variable. Gráfica propia.

- Funciones logísticas.

Son aquellas cuya gráfica tienes forma sigmoidea o forma de S. Comienzan con un comportamiento similar a una función exponencial pero se van estabilizando en el tiempo y pareciéndose cada vez más a una función constante:

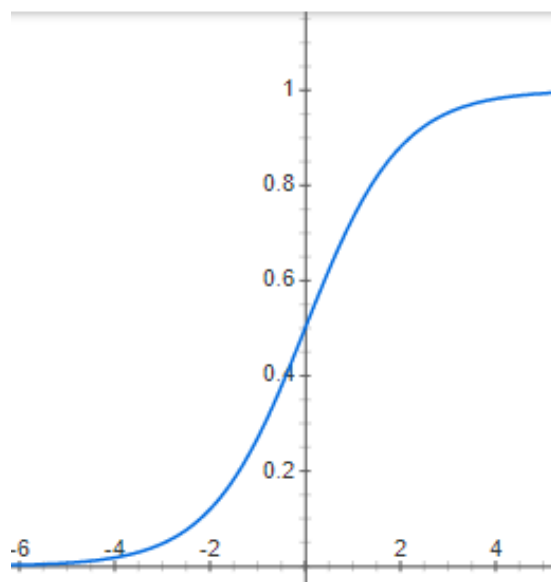


Figura 5.5.8. Gráfica de una función logística. Gráfica propia.

Dichas funciones son las utilizadas para representar el crecimiento de gran cantidad de poblaciones y, por ejemplo, epidemias.

En este caso su derivada es:

$$D'(t) = D(t) \cdot (N - D(t))$$

*N = constante.

Esta derivada también puede aparecer como:

$$D'(t) = K \cdot D(t) \cdot (N - D(t))$$

*K=constante real.

Una forma de saber si se trata de una función logística es determinar si su derivada corresponde con las fórmulas descritas.

6. Resultados.

Una vez que tenemos claros los conceptos matemáticos anteriormente explicados, vamos a relacionar cada uno de los modelos epidemiológicos con sus funciones y derivadas.

Cada uno de los individuos estudiados van a ir relacionados con una función:

- Susceptibles: al número de individuos de la población que pueden contraer la enfermedad les atribuiremos la función $S(t)$.
- Infectados: al número de individuos que están contagiados con la enfermedad y que pueden infectar a otros los representados con la función $I(t)$.
- Recuperados: aquellos que ya han sufrido la enfermedad y ya no la pueden transmitir atienden a la función $R(t)$.

El objetivo básico de nuestros modelos matemáticos es ver cómo, con el paso del tiempo, nuestros individuos pasan de formar parte de un grupo a formar parte de otro. Para ello, necesitamos saber cómo van a evolucionar las funciones de cada uno de los grupos, datos que ponemos conseguir a partir de sus derivadas.

- Modelo SI.

Se trata del modelo más sencillo. Para simplificar, determinaremos que tenemos una población de N individuos, de la cual no hay entrada ni salida, se mantiene constante. Como ya sabemos en él solo hay individuos susceptibles e infectados, y la suma de ambos será la totalidad de individuos, es decir, que los individuos que pierde un grupo, los gana el otro. Matemáticamente hablando sería:

$$N = S(t) + I(t)$$

Para simplificar cuanto sea posible, vamos a determinar que cada vez que haya contacto entre un individuo sano y susceptible se va a producir el contagio. De la misma manera, vaya a concluir que la mezcla en la población es homogénea, es decir que hay probabilidad de que un susceptible pase a ser infectado es la misma para todos.



Figura 6.1
Figura propia.

Los posibles contactos que podemos observar entre susceptibles e infectados vienen determinados por el producto: $S(t) I(t)$; es decir, multiplicar el número de individuos que hay en cada uno de los grupos.

Ahora, vamos a analizar cómo varía el número de cada uno de los grupos:

- Susceptibles: cada vez que hay un contacto S-I, el susceptible pasa a ser infectado, es decir, que el número decrece. LA velocidad de este decrecimiento depende del número de contactos que haya entre S y I, es decir, del producto $S(t) I(t)$. Por lo tanto, la derivada resultante será:

$$S'(t) = -S(t) I(t)$$

- Infectados: por el contrario, el número de I variará positivamente, pero con la misma relación que los susceptibles:

$$I'(t) = S(t) I(t)$$

Como estamos hablando de enfermedades, tenemos que determinar que no todas se contagian con la misma facilidad. Para ello vamos a hacer usos de un parámetro: β . Este determina a cuántos susceptibles es capaz de contagiar un infectado; por ejemplo, si su valor es 2 quiere decir que cada infectado es capaz de infectar a dos susceptibles. Cuanto mayor sea dicho parámetro, más peligrosa es la enfermedad que estemos tratando. Una vez introducido, los parámetros quedarían así:

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t) I(t)$$

Dicho modelo matemático encaja perfectamente con uno de los explicados anteriormente: modelo logístico. Vamos a deducirlo mediante el estudio de las tres ecuaciones de las que partimos:

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t) I(t)$$

$$N = S(t) + I(t)$$

Como ninguna de ellas encaja en la fórmula de la derivada, que recordemos que es $D'(t) = K \cdot D(t) \cdot (N - D(t))$, tenemos que ir desgranándolo hasta conseguir lo que buscamos.

Partimos del hecho de que N siempre es constante por lo que:

$$\text{si } N = S(t) + I(t);$$

$$S(t) = N - I(t)$$

A continuación, utilizamos la ecuación de los infectados y sustituimos la ecuación despejada con anterioridad.

$$I'(t) = \beta S(t) I(t)$$

$$I'(t) = \beta [N - I(t)] I(t)$$

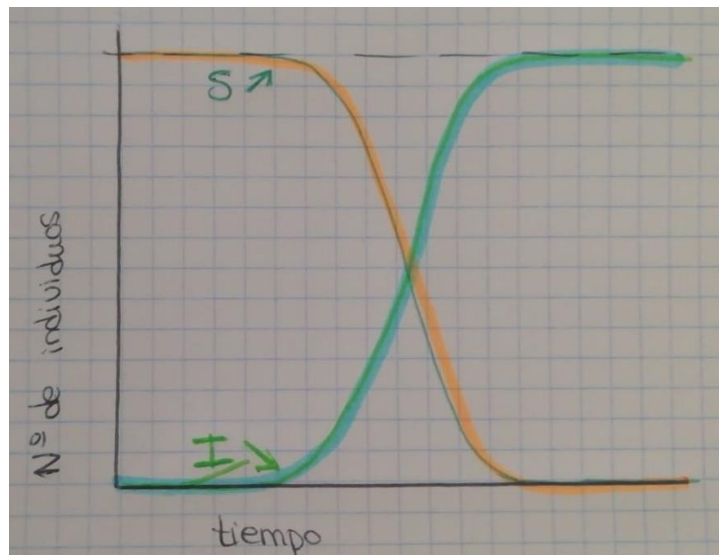
Si observamos con detenimiento, ya sí que es posible llegar a la conclusión de que se trata de una función logística.

$$D'(t) = K D(t) [N - D(t)]$$

$$I'(t) = \beta [N - I(t)] I(t)$$

Diagram showing the mapping of terms between the two equations:
 - An orange arrow points from the orange K in the first equation to the orange β in the second equation.
 - A blue arrow points from the blue $D(t)$ in the first equation to the blue $I(t)$ in the second equation.
 - A yellow arrow points from the yellow $[N - D(t)]$ in the first equation to the yellow $[N - I(t)]$ in the second equation.

Figura 6.2 y 6.3
Figuras propias.



El factor que va a determinar la velocidad a la que los individuos susceptibles van a pasar a ser individuos infectados está determinado por el parámetro β : cuanto mayor sea su valor, a mayor velocidad aumentará el número de infectados, y por lo tanto, a mayor velocidad disminuirá el valor de susceptibles.

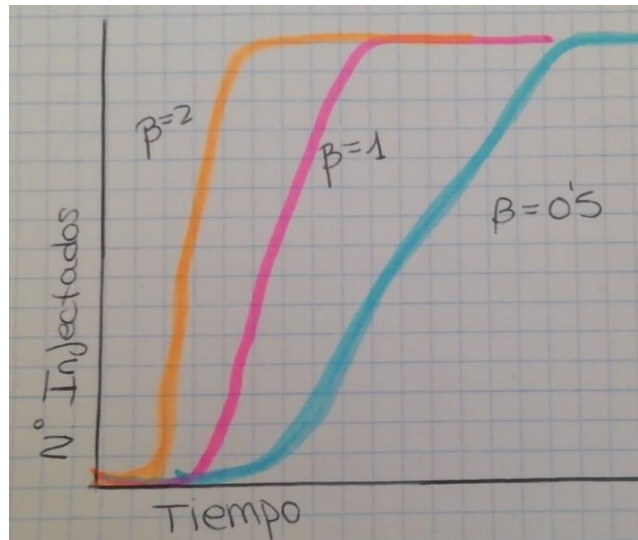


Figura 6.4. Gráfica propia.

- Modelo SIR.

En este modelo aparece un nuevo grupo de individuos: los recuperados, que son aquellos que se recuperan de la infección o mueren, por lo que suponemos que no son capaces de transmitir la enfermedad para simplificar al máximo el problema.

Las condiciones bajo las que desarrollamos nuestro modelo son muy simples

- El número de individuos es constante (N).
- Mantenemos el parámetro β (capacidad de un infectado para contagiar).
- Consideramos con $S(t)$ el número de individuos susceptibles entre el total de individuos.
- Consideramos $I(t)$ como el número de individuos infectados entre el total de individuos.
- Utilizamos $R(t)$ para determinar a la fracción de individuos recuperados del total.
- Añadimos un nuevo parámetro: γ , el cual determina el número de recuperados.

A continuación, vamos a obtener las ecuaciones diferenciales de este modelo, es decir, vamos a relacionar cada función con su derivada.

Vamos a empezar con los individuos recuperados, es decir, $R(t)$. El número de individuos de este grupo, obviamente va a depender del número de infectados, ya que solo los individuos que estén infectados pueden pasar a ser recuperados. Además, $R(t)$ también va a depender del parámetro γ , que es el que determina cuántos

infectados pasan a ser recuperados. Resumiendo, nuestra ecuación matemática sería:

$$R'(t) = \gamma I(t)$$

Proseguimos con los individuos susceptibles. En este caso se repite la situación del modelo anterior: nuestra variación va a depender del número de individuos que pasen de susceptibles a infectados, por lo que nuestro valor va a ir decreciendo. Esta variación depende del número de contactos que haya entre ellos. Como ya sabemos, dichos contactos vienen determinados por el parámetro β . Matemáticamente quedaría lo siguiente:

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$

Por último, los individuos infectados. Su número va a ir aumentando conforme los susceptibles pasan a ser infectados, pero a la vez va a ir disminuyendo conforme los individuos infectados pasan a ser recuperados. Es decir, nuestra ecuación va a ser una combinación de las dos anteriores, quedando así:

$$I'(t) = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

A todas estas ecuaciones podemos añadirle otra más, ya que la suma de todas las fracciones de individuos siempre tiene que ser igual a 1:

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

Resumiendo, podemos determinar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$R'(t) = \gamma I(t)$$

$$S'(t) = -\beta S(t) I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

Desgraciadamente no podemos obtener una solución analítica para este sistema de ecuaciones, pero con ayuda, pero mediante aproximación podemos obtener una gráfica.

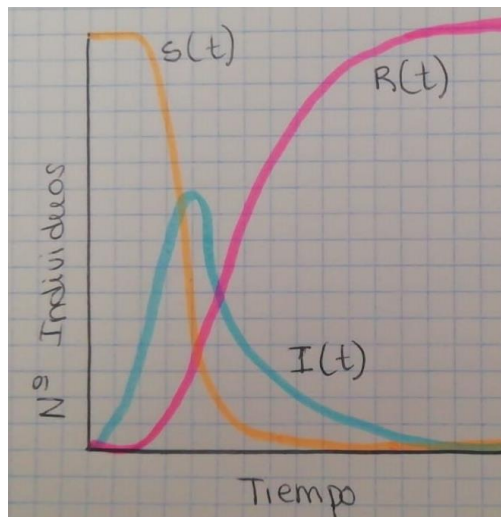


Figura 6.5. Gráfica propia.

A continuación, vamos a desglosar los resultados observados en la gráfica:

- En el primer momento (en el que el tiempo (t) corresponde a 0) podemos observar que $S(t) \approx 1$. Esto quiere decir que prácticamente todos nuestros individuos son integrantes de este grupo. De la misma manera $R(t)$ en este primer momento corresponde a 0, y $I(t)$ también es muy próximo a 0.
- En $t = 0$ aparece algún infectado (aunque su fracción sigue siendo prácticamente 0). Dicho individuo comienza a propagar la enfermedad, provocando que $S(t)$ disminuya y aumente $I(t)$. Del mismo modo, $R(t)$ comienza a crecer junto con $I(t)$, aunque a menor velocidad.
- En los primeros estadios de la enfermedad, el número de infectados aumenta exponencialmente, es decir, muy rápido. Por consecuencia, el número de susceptibles disminuye con la misma rapidez y el número de recuperados también aumenta, pero no con la misma rapidez con la que lo hace $I(t)$.
- Pasado un tiempo, el comportamiento de $I(t)$ cambia, ya que el número de susceptibles se aproxima a 0, provocando que ningún individuo pase a formar parte de $I(t)$. Paralelamente el número de individuos que se recuperan sigue subiendo, por lo que podemos observar una disminución de individuos infectados. Este cambio en el progreso de individuos infectados nos permite observar un pico en la función $I(t)$ que en este caso coincide con el máximo número de individuos infectados que vamos a tener, decayendo a partir de este punto.
- A largo plazo, $R(t)$ va a ser muy próximo a 1, mientras que $S(t)$ y $I(t)$ van a estar muy cercanos a 0.

Generalmente estas son las circunstancias que vamos a encontrar en este modelo, pero si se producen cambios en los parámetros podría suceder que $S(t)$ nunca tienda a 0, provocando que $R(t)$ no alcance el total de la población. Los individuos susceptibles que queden raramente se contagiarán, ya que será muy poco probable que los pocos infectados que queden sean capaces de transmitirles la enfermedad. Según determina la Real Academia Española, una epidemia es ‘Enfermedad que se propaga durante algún tiempo por un país, acometiendo simultáneamente a gran número de personas’. Para nosotros, matemáticamente hablando, que considera que se está produciendo una epidemia cuando $I(t)$ tiene un crecimiento muy fuerte y supera un alto porcentaje de la población de nuestro modelo. Como ya sabemos, cuando una función está creciendo, su derivada es positiva, por lo que en este caso:

$$I'(t) > 0$$

que sería lo mismo que decir que:

$$\beta S(t) I(t) - \gamma I(t) > 0$$

Principalmente nos interesaría saber si en el comienzo ($t \approx 0$) el crecimiento va a ser muy rápido, así que utilizaremos $S(t \approx 0)$ y $I(t \approx 0)$

$$\beta S(0) I(0) - \gamma I(0) > 0$$

Consideramos que, en el inicio, el número de susceptibles va a corresponder con el número total de individuos ($S(t \approx 0) = N$) y que el número de infectados es casi 0 ($I(t \approx 0) = 1$) (tiene que haber al menos un infectado para que pueda propagarse la infección). Si sustituimos los valores obtenemos que:

$$\beta S(0) - \gamma > 0$$

A continuación, despejamos el número de susceptibles:

$$S(0) > \gamma / \beta$$

De esta manera acabamos de obtener una relación entre los parámetros del modelo SIR con el número inicial de susceptibles, confirmando que, si esta relación se cumple, va a tener lugar una epidemia. Si observamos esta relación podemos llegar a la conclusión de que el desarrollo o no de una epidemia depende más del número de susceptibles que del número de infectados de una población, ya que se dará siempre que $S(t)$ tenga un valor elevado.

A continuación vamos a explicar el número básico de reproducción o R_0 . Este valor determina a cuántos individuos es capaz de infectar un solo infectado en el transcurso de la enfermedad, por lo que, cuanto mayor sea su valor, mayor poder infectivo tiene

dicha enfermedad. Dicho valor siempre va a estar comprendido entre 0 y 1. Se relaciona con el cociente γ/β de manera inversa:

$$R_0 = \beta/\gamma$$

Si sustituimos esta relación en la que obtuvimos anteriormente:

$$S(0) > \gamma/\beta$$

$$S(0) > 1/R_0$$

Si volvemos a considerar $S(t)$ como fracción del total de individuos, podríamos deducir que $S(0) \approx 1$:

$$1 > 1/R_0$$

Es decir:

$$R_0 > 1$$

Dicho con otras palabras, para que se produzca una epidemia el número básico de reproducción tiene que ser mayor a 1.

Para poder visualizar que dicha relación es verídica, vamos a representar dos modelos, uno en el que R_0 sea mayor que 1, y otra en la que R_0 sea menor a 1.

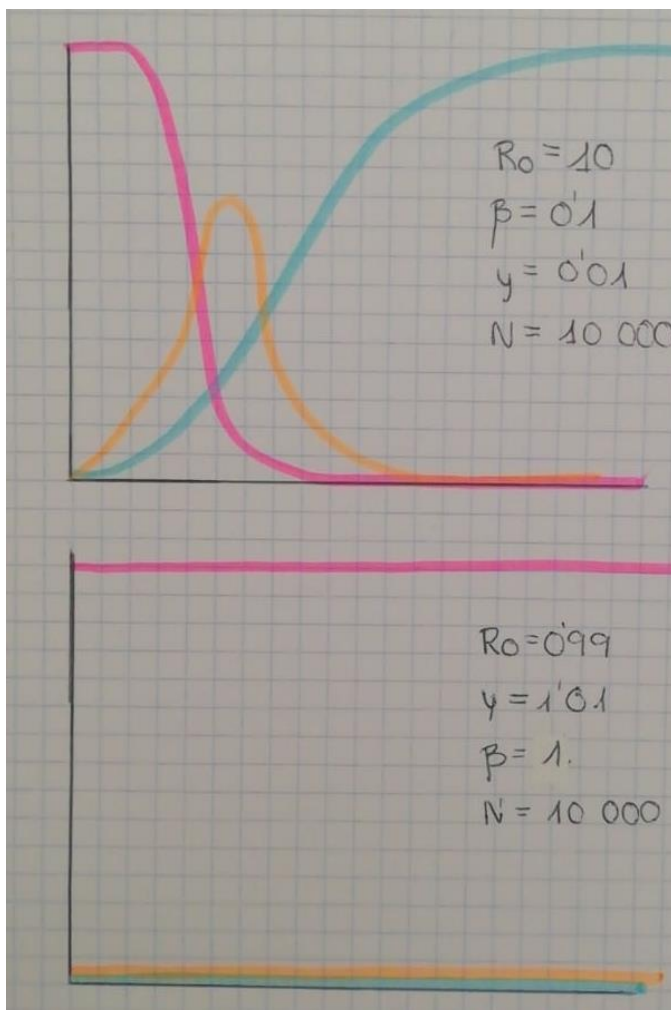


Figura 6.5. Gráfica propia.

En el eje X situamos el tiempo, mientras que en el eje Y situamos el número de individuos.

El color rosa corresponde al número de individuos susceptibles.

El color naranja corresponde al número de individuos infectados.

El color azul corresponde al número de individuos recuperados.

Por último, pero no menos importante, vamos a añadir el efecto que tiene las vacunas. Como todos sabemos, el objetivo de las vacunas es otorgar inmunidad ante una enfermedad. Dicho de otro modo, provoca que un individuo susceptible deje de serlo, ya que no es capaz de infectarse. Por este motivo, los susceptibles en nuestros modelos no vendrán definidos solo por $S(t)$, si no por $(1-v)S(t)$, donde 'v' es la fracción de individuos vacunados.

Nuestras derivadas cambiarían de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\beta(1-v)S(t) I(t) \\I'(t) &= \beta(1-v)S(t) I(t) - \gamma I(t) \\R'(t) &= \gamma I(t) \\S(t) + I(t) + S(t) &= 1\end{aligned}$$

7. Discusión de resultados.

A continuación, vamos a ver las consecuencias de la vacunación en nuestro modelo matemático.

Como hemos dicho anteriormente, nuestras ecuaciones serán:

$$S'(t) = -\beta(1-v)S(t) I(t)$$

$$I'(t) = \beta(1-v)S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$R'(t) = \gamma I(t)$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

Vamos a hacer exactamente igual que hicimos con el modelo anterior: buscar el momento en el que el número de infectados crece, es decir, que $I(t)$ sea positiva.

$$I'(t) > 0$$

$$\beta(1-v)S(t) I(t) - \gamma I(t) > 0$$

Del mismo modo vamos a suponer que $S(t \approx 0) = N$ y $I(t \approx 0) = 1$:

$$\beta(1-v)S(t) - \gamma > 0$$

Una vez despejados los susceptibles obtenemos:

$$S(0) > \gamma / \beta(1-v)$$

De igual manera vamos a determinar que la fracción de la derecha es igual a $1/R_0^v$

$$S(0) > 1/R_0^v$$

Suponiendo que la fracción de susceptibles es prácticamente 1 ya que la enfermedad acaba de aparecer:

$$R_0^v > 1$$

Hemos llegado al mismo punto que con el modelo anterior, que se produzca una epidemia depende del número básico de reproducción. Ahora vamos a compararlos los dos:

$$R_0^v = \beta(1-v) / \gamma$$

$$R_0 = \beta / \gamma$$

$$R_0^v = R_0 (1-v)$$

Como 'v' siempre va a estar entre 0 y 1, $(1-v)$ siempre va a ser un número positivo menor a 1. De aquí podemos concluir que el número básico de reproducción siempre va a ser menor en vacunados que en no vacunados, ya que estamos disminuyendo el número de susceptibles, uno de los elementos clave a la hora de producirse una epidemia, y por consecuencia, la probabilidad de que se produzca una epidemia también va a ser menor.

También podríamos determinar la fracción de individuos que tendríamos que vacunar para que no se produzca una epidemia. Para poder evitarlo, el valor R_0^v debe quedar por debajo de 1. Si determinamos que dicho valor sea igual a 1, obtenemos que:

$$\beta(1-v) / \gamma = 1$$

Despejamos y obtenemos:

$$p = 1 - (\gamma / \beta)$$

Es decir:

$$p = 1 - 1/R_0$$

Como podemos observar, el porcentaje de personas que deben de ser vacunados es proporcional al número básico de reproducción, es decir, cuanto mayor sea el número de personas que es capaz de contagiar un infectado, mayor es el porcentaje de población que necesitamos vacunar para evitar la epidemia.

A continuación vamos a mostrar la diferencia entre el transcurso de una enfermedad si no hay vacunación y con diferentes porcentajes de la misma.

Los tres modelos van a tener las siguientes constantes:

$$N = 100\,000$$

$$\beta = 0,1$$

$$\gamma = 0.01$$

$$R_0 = 10$$

En este caso, la fracción de individuos que deberíamos de vacunar (como mínimo) sería:

$$p = 1 - 1/10 = 0,9$$

Es decir, un 90% de la población.

A continuación, vemos el desarrollo normal de la enfermedad cuando no hay vacunación:

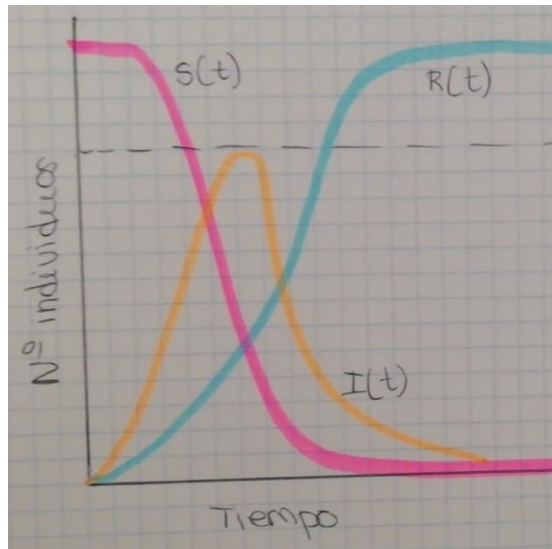


Figura 7.1. Gráfica propia.

Ahora, observemos lo que ocurre cuando establecemos un valor de vacunación de 0,6:

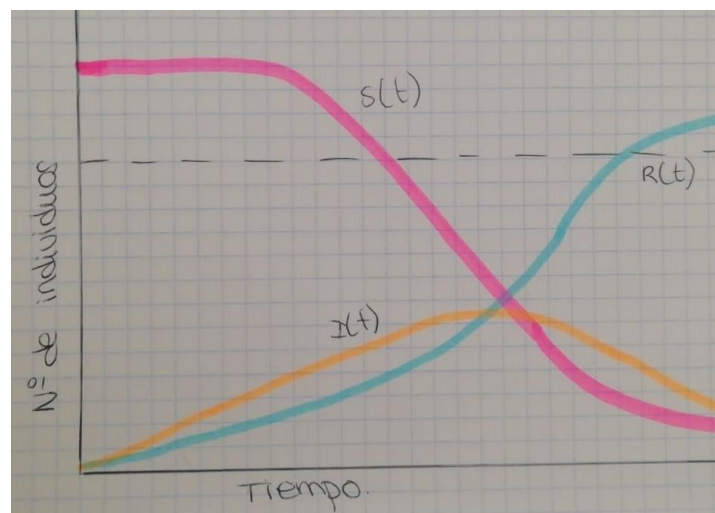


Figura 7.2. Gráfica propia.

Podemos observar que, aunque se sigue produciendo un pico en la función de infectados, no es tan alto. Esto quiere decir que la epidemia es mucho más suave que en el caso anterior.

Por último, vamos a ver el efecto que tendría un valor de vacunación de 0,9.

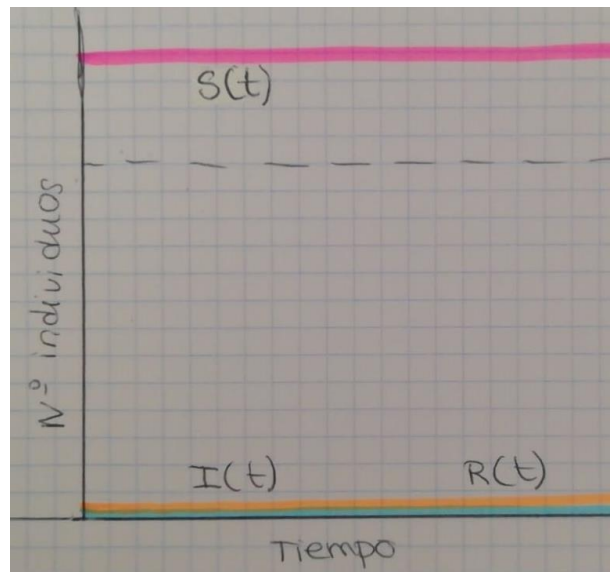


Figura 7.3. Gráfica propia.

Podemos observar claramente cómo el desarrollo de la enfermedad es casi inexistente. Dicho de otra manera, siempre y cuando mantengamos un 90% o más de la población total vacunada, conseguiremos evitar el desarrollo de una epidemia de esta enfermedad.

Por diversos motivos no siempre es posible vacunar al total de la población (en el momento de vacunar el individuo no tiene buena salud, es alérgico a algún adyuvante de la vacuna, etc.), pero si hay un alto porcentaje de esta vacunada, provoca un efecto escudo a todos aquellos que no están inmunizados. A esto se le llama inmunidad grupal (<https://es.gizmodo.com/como-funciona-la-inmunidad-de-rebano-y-por-que-no-es-un-1797046481>). Dicho efecto va perdiendo fuerza a medida que la cantidad de personas inmunizadas disminuye, poniendo en peligro a todos los demás. Cuanto mayor número básico de reproducción tenga una enfermedad, menos es el porcentaje de personas que ‘pueden no estar vacunadas’ sin que haya riesgo de epidemia.

8. Conclusiones.

Una vez obtenidos todos nuestros resultados podemos concluir que:

- El número de personas susceptibles a la enfermedad es la variable más importante a la hora de determinar si se va a producir una epidemia. Esto nos lleva a pensar que la forma más sencilla de evitar una epidemia es haciendo que los individuos no puedan contagiarse. Esto podemos conseguirlo gracias a la vacunación, ya que de esta manera hacemos inmune a la población vacunada sin necesidad de que hayan sufrido la enfermedad.
- El número de personas que es necesario vacunar depende de R_0 , que es el número de individuos a los que un infectado es capaz de infectar a lo largo de la enfermedad. Este parámetro a su vez depende de β , es decir, de la capacidad infectiva de la enfermedad y a γ , la capacidad o rapidez con la que un infectado se recupera. En resumen, cuanto mayor valor de R_0 tenga una enfermedad, mayor será el número de personas que tendremos que vacunar.
- Si el número de vacunados es suficiente, incluso los individuos que no hayan sido vacunados están cubiertos por su efecto debido a la inmunidad grupal.
- Es necesario que el movimiento antivacunas no se extienda, ya que podrían aparecer epidemias de enfermedades que podríamos considerar casi erradicadas en nuestro país debido a un aumento de la susceptibilidad hacia estas.
- Al igual que las redes sociales pueden ser un amplificador para ideales pro-vacunas, también puede convertirse en una vía por la cual el movimiento antivacunas se expanda e induzca a más individuos a opinar en contra de ellas. A medida que crece la popularidad del individuo que expone su opinión en las redes, mayor es la cantidad de personas a las que llega el mensaje. Quizás es esta la razón por la que los núcleos antivacunas no son muy amplios, ya que no tienen base científica ni social que los apoye en gran medida.

9. Bibliografía.

- Bello, J. (2017), Revista Enfermedades Emergentes, *La actitud antivacuna como enfermedad emergente, la responsabilidad de la Administración y la asistencia primaria de pediatría*
- Díaz Novás, J. y Gallego Machado, B.R. (jul-ago 2000) Revista Cubana de Medicina General Integral, v. 16, n. 4
- Flaherty, D. K. (2011). The Vaccine-Autism Connection: A Public Health Crisis Caused by Unethical Medical Practices and Fraudulent Science. *Annals of Pharmacotherapy*, 45(10), 1302–1304.
- Grima, C.,Fernandez Borja, E.,(2017) *Las matemáticas vigilan tu salud. Modelos sobre epidemias y vacunas*. Next Door Publishers.
- Gómez Marco, J.J. y Zamarilla Rojo, I. Revista Clínica Electrónica de Atención Primaria, Grupos anti-vacunas. *Análisis de sus causas y consecuencias. Situación en España y resto de países*
- <http://www.rae.es/>
- http://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/funcion/func_ejem.html
- <https://edition.cnn.com/2015/07/20/health/vaccines-fast-facts/index.html>
- <https://elpais.com>
- <https://es.gizmodo.com/como-funciona-la-inmunidad-de-rebano-y-por-que-no-es-un-1797046481>
- <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap1-geo/node3.html>

- <https://twitter.com>
- <https://www.freepng.es/png-hspjko/>
- <https://www.hiru.eus/es/matematicas/derivada-de-una-funcion>
- <https://www.mscbs.gob.es/profesionales/saludPublica/prevPromocion/vacunaciones/coberturas.htm>
- <https://www.40defiebre.com/herramientas-monitorizacion-hashtags>
- Urbiztondo, L. y Borràs, E. (2019), Revista Enfermedades Emergentes, *Retencia y rechazo ante la vacunación: un riesgo emergente*.
- Pastor-Satorras, R., Castellano, C., Van Mieghem, P. y Vespignani, A., *Epidemic Processes In complex Networks, Reviews of Modern Physics*, vol 87, 31 de agosto, 2015, 925.

Bibliografía de herramientas web:

<http://pirendo.com/>

<http://sees.aw/>

<http://twubs.com/antivacuna>

<http://www.bundlepost.com/>

<http://www.socialmention.com/>

<http://www.tweetarchivist.com/f68475ca/80476>

<http://www.tweetchat.com/>

<http://www.tweet-tag.com/index.php>

<http://www.whatthetrend.com/>

<https://hashtagify.me/hashtag/antivacuna>

<https://ritetag.com/>

<https://rowfeeder.com/>

<https://tagdef.com/es/>

<https://tagboard.com/innovator>

<https://tweetreach.com/>

<https://www.hashtags.org/analytics/antivacuna/>

<https://www.hashtracking.com/>

<https://www.trendsmap.com/topic-search?q=%23antivacunas&hashtags=on>

<https://www.tweetbinder.com/>

Anexo I

A continuación, encontramos un gran número de páginas webs con las que poder analizar la aplicación de Twitter y todo su contenido que nosotros vamos a utilizar en nuestro ámbito, es decir, en el pensamiento antivacunas.

La herramienta que íbamos a usar en un principio para obtener los datos de las opiniones antivacunas en Twitter era un complemento de la hoja de datos de google, denominado *"Twitter Archiver"*.

Cuando me disponía a trabajar con él, daba problemas y no permitía su uso a no ser que se instalara el complemento de pago, por lo que decidimos intentar buscar otras opciones para conseguir dichos datos.

Mediante la web *"<https://www.40defiebre.com/herramientas-monitorizacion-hashtags>"* procedimos a buscar aquellas herramientas que nos proporcionaran datos útiles para nuestro estudio.

1. <https://www.hashtracking.com/>

Nos permite la búsqueda de diferentes hashtags y nos aporta muchos datos sobre ellos.

2. <https://www.hashtags.org/analytics/antivacuna/>

Esta web no nos es especialmente válida, ya que solo nos muestra los tweets de las últimas 24 horas, y en el momento de la búsqueda no había ninguno relacionado con el tema que buscamos.

3. <http://www.bundlepost.com/>

Se trata de otro programa de pago.

4. <https://hashtagify.me/hashtag/antivacuna>

Podría sernos de gran ayuda, aunque las opciones más avanzadas también son de pago.

Para su uso deberíamos localizar todos los hashtags que están relacionados con este tema y analizarlos.

5. <https://rowfeeder.com/>

Es una web que te manda a otro tipo de webs de monitorización.

6. <https://tweetreach.com/>

Es una muy buena opción, ya que te analiza los hashtags y te da muchos datos sobre ellos:

TWEETREACH SNAPSHOT FOR

#antivacunas

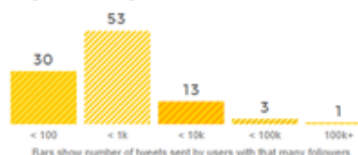
ESTIMATED REACH

EXPOSURE

879,626

ACCOUNTS REACHED

1,008,630 IMPRESSIONS



ACTIVITY

ACTIVITY



TOP CONTRIBUTORS

MOST RETWEETED TWEETS



CONTRIBUTORS

	Tweets	RTs	Impressions
CSIC	1	0	921.4k
FdezMallo	1	0	17.4k
gmph_es	1	0	13.1k
DrBioblog	1	0	11.7k

PLSDE	1	0	5.6k
LatveriasDoom	1	0	3.2k
iamhelenuki	1	0	2.4k
moigaren	1	0	1.9k
VirtudSin	1	0	1.6k
pimientoman	1	0	1.5k
honey_eyes1405	1	0	1.4k
madelman70	1	0	1.3k
antroastronomo	1	1	1.3k
bruno_rico	1	0	1.3k

TWEETS TIMELINE



Jan 17, 2019 at 11:07am UTC



Ángel Martínez @angelmarno

2 minutes ago

RT @brionesci: Justo y necesario: la #OMS ya considera al movimiento #antivacunas una amenaza para la salud global, como lo son los patógen...



Javier García @javierg131531

4 minutes ago

RT @brionesci: Justo y necesario: la #OMS ya considera al movimiento #antivacunas una amenaza para la salud global, como lo son los patógen...



Flecha @Flecha_b

7 minutes ago

RT @brionesci: Justo y necesario: la #OMS ya considera al movimiento #antivacunas una amenaza para la salud global, como lo son los patógen...



Elsie @ElsieElsilar

8 minutes ago

RT @brionesci: Justo y necesario: la #OMS ya considera al movimiento #antivacunas una amenaza para la salud global, como lo son los patógen...



Susana Pérez Escalona @Susipees

9 minutes ago

RT @brionesci: Justo y necesario: la #OMS ya considera al movimiento #antivacunas una amenaza para la salud global, como lo son los patógen...

7. <https://ritetag.com/>

Esta página nos permite buscar diferentes hashtags para una imagen o bien un texto. Nos podría servir de ayuda para la búsqueda de nuevos hashtags relativos a nuestro tema a tratar.

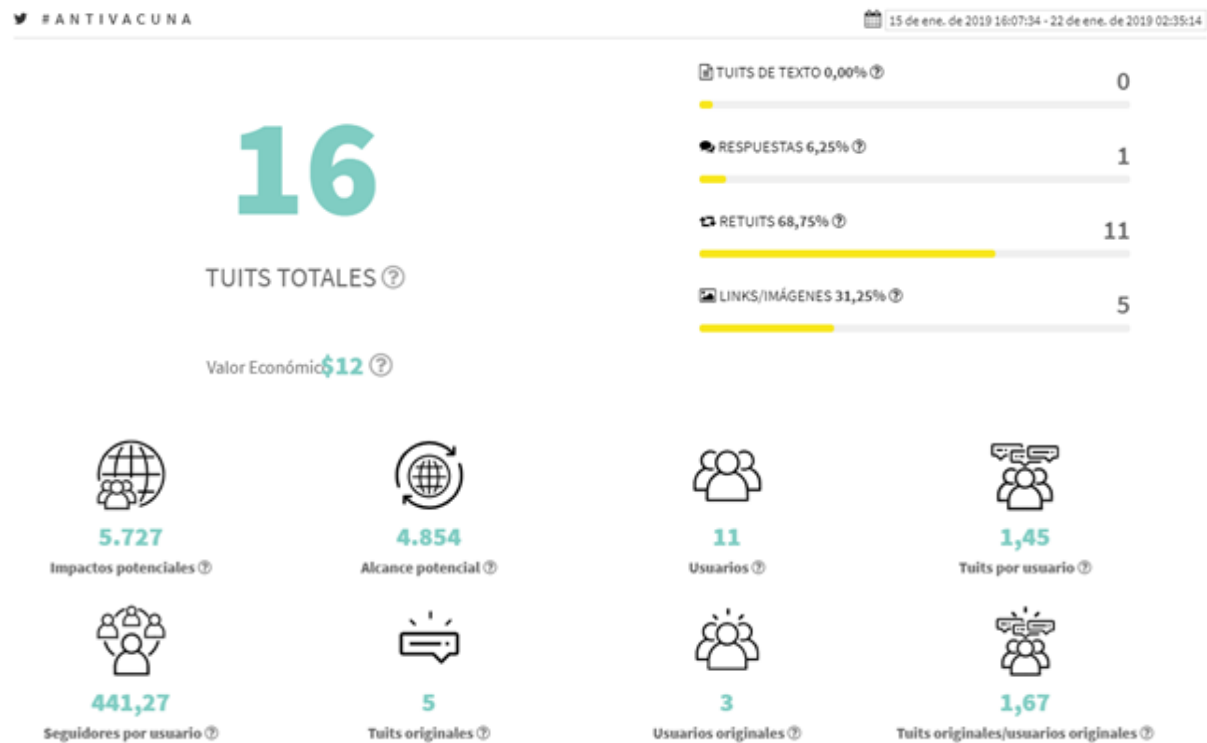
The interface is divided into two main sections: "For images" and "For text".

- For images:** Features a placeholder image of a person sitting by a lake. Below it is an "Upload my image" button, a language dropdown set to "English", and a "Suggest hashtags" button.
- For text:** Features a text input field containing "antivacuna" and a "Suggest hashtags" button.

Below these sections, a row of suggested hashtags is displayed: #antivacuna, #antivax, and #vaccine.

8. <https://www.tweetbinder.com/>

Esta página nos da información sobre un hashtag de los últimos 7 días. Nos da mucha información y podríamos descargar todos los datos en formato Excel, pero sería en la versión de pago.

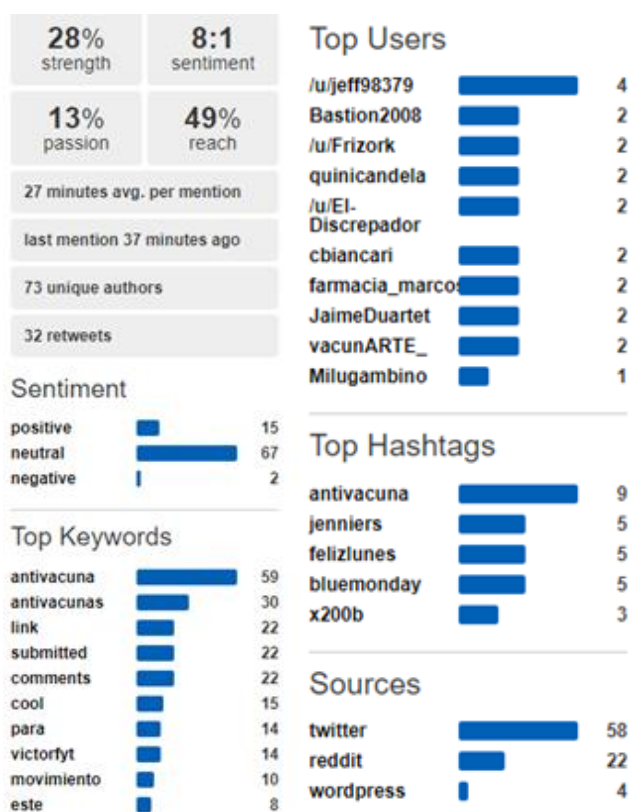


MÁS ACTIVOS ?	Tuits	RETUITEADORES ?	Retuits	MÁS ORIGINALES ?	Tuits originales
 @farmacia_marcos Farmacia Luis Marcos	3	 @farmacia_marcos Farmacia Luis Marcos	3	 @vacunarte_ vacunARTE	3
 @vacunarte_ vacunARTE	3	 @jaimeuartet Jaime	2	 @jesusnicolas Jesús Nicolás Luna A	1
 @jaimeuartet Jaime	2	 @abianmm Abián	1	 @paramicrobio ParaMicroBio	1
 @abianmm Abián	1	 @ajfernandez2001 Abraham Fernández	1		
 @ajfernandez2001 Abraham Fernández	1	 @garciajgd Jorge García Díaz	1		

MÁS POPULARES ?	Seguidores	MAYOR IMPACTO ?	Impactos	FOTÓGRAFOS ?	Imágenes
 @jesusnicolas Jesús Nicolás Luna A	1.407	 @jesusnicolas Jesús Nicolás Luna A	1.407	 @vacunarte_ vacunARTE	3
 @paramicrobio ParaMicroBio	818	 @jaimeuartet Jaime	974	 @jesusnicolas Jesús Nicolás Luna A	1
 @jaimeuartet Jaime	487	 @paramicrobio ParaMicroBio	818		
 @kike_zarzamoro Lollipop boy	483	 @farmacia_marcos Farmacia Luis Marcos	492		

9. <http://www.socialmention.com/>

Esta herramienta es muy útil, ya que nos aporta muchos datos sobre el hashtag y nos permite buscar tuits en un amplio rango de tiempo, desde las 12 horas hasta el mes.



Sort By: Results: Results 1 - 15 of 84 mentions.

-  RT @MrMotijoan: No puedes ofender a los hijos de padres antivacuna porque no llegarán a la edad suficiente para entender lo que les has dic...
twitter.com/EGhajo/status/1087635624369152000
37 minutes ago - by  @EGhajo on [twitter](#)
-  RT @MrMotijoan: No puedes ofender a los hijos de padres antivacuna porque no llegarán a la edad suficiente para entender lo que les has dic...
twitter.com/shitpolsting/status/1087625618399944706
1 hour ago - by  @shitpolsting on [twitter](#)
-  RT @MrMotijoan: No puedes ofender a los hijos de padres antivacuna porque no llegarán a la edad suficiente para entender lo que les has dic...
twitter.com/MrOrxata/status/1087624572357222401
1 hour ago - by  @MrOrxata on [twitter](#)
-  No puedes ofender a los hijos de padres antivacuna porque no llegarán a la edad suficiente para entender lo que les has dicho
twitter.com/MrMotijoan/status/1087623395053838336
1 hour ago - by  @MrMotijoan on [twitter](#)

10. <http://sees.aw/>

No permite la apertura de la web.

11. <https://tagdef.com/es/>

Sería de mucha utilidad, ya que encontraríamos información sobre el hashtag que trabajamos, pero la web no lo reconoce.

12. <http://www.tweetchat.com/>

La página da error.

13. <http://www.tweet-tag.com/index.php>

Es web nos permite monitorizar un hashtag dándonos una información muy variada sobre los tuits en los que se utiliza, menciones, seguidores, etc.

Nos hubiera sido de mucha utilidad si no quisiéramos hacer un estudio de tuits antiguos.

14. <https://tagboard.com/innovator>

Es necesario un registro previo para la utilización de dicha web.

15. <http://pirendo.com/>

Se trata de una web de pago.

16. <http://www.whatthetrend.com/>

Da error, y se trata de una web de pago, que además solo nos da información de los hashtags que son más populares en el momento, por lo que en nuestro caso no nos sería útil.

17. <http://twubs.com/antivacuna>

Nos muestra a tiempo real los tuits que van publicando con el hashtag que busquemos.

No es útil para nuestro estudio.

18. <http://www.tweetarchivist.com/f68475ca/80476>

#antivacunas			
100 Tweets	136,706 Impressions ?	2/17/2019 - 2/18/2019 Date Range	 Inactive

Esta web nos aporta mucha y muy buena información sobre un hashtag, pero para poder conseguir un rango mayor en las fechas de los tuits publicados nos pide una suscripción, sin la cual tampoco nos permite acceder a la opción de descargar los datos en formato excel.

19. <https://www.trendsmat.com/topic-search?q=%23antivacunas&hashtags=on>

Es necesaria una suscripción para su utilización.