



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

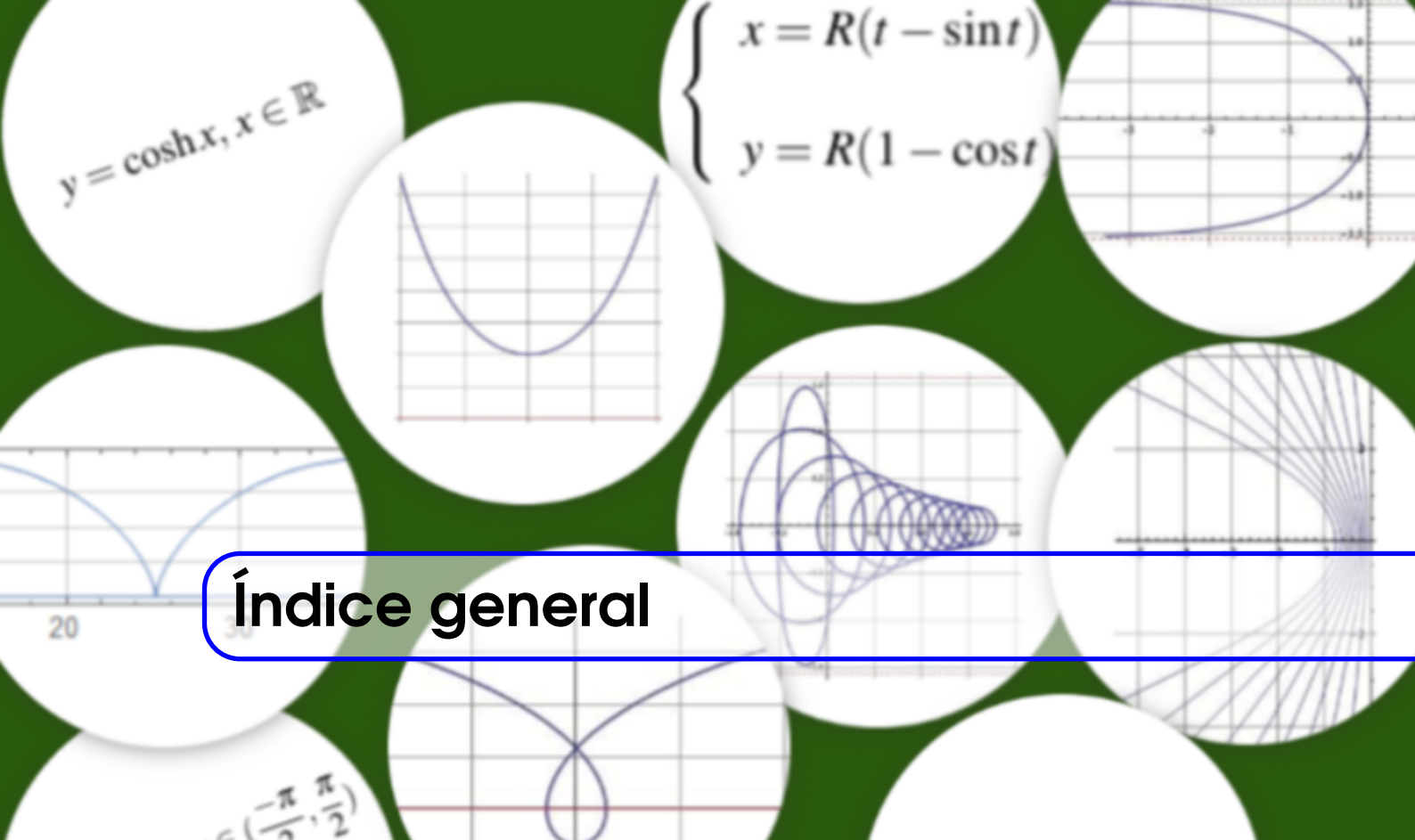
Trabajo Fin de Máster

UN PROBLEMA DE DAVID A. SINGER SOBRE CURVAS PLANAS

Alumno/a: Margarita Gutiérrez Castillo

Tutor/a: Prof. D. Ildefonso Castro López
Área: Geometría y Topología
Dpto.: Matemáticas

Octubre, 2019



Índice general

1	Introducción	1
1.1	Competencias a adquirir	1
1.2	Antecedentes, contenidos y objetivos	2
1.3	Conclusiones y trabajo futuro	8
2	Preliminares	11
2.1	Curvas planas regulares. Longitud de arco.	11
2.2	Curvatura y diedro de Frenet de una curva plana.	17
2.3	Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas	21
2.4	La catenaria	24
2.5	La curva “grim-reaper”	27
2.6	La cicloide	31
3	Problema de Singer	35
3.1	Introducción	35
3.2	Curvas planas tales que $\kappa = \kappa(y)$	36
3.3	Ejemplos	40
3.3.1	Rectas $\kappa \equiv 0$	40
3.3.2	Circunferencias $\kappa \equiv \kappa_0 > 0$	41

4	Familias de curvas integradas	43
4.1	Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/y^2$, $\lambda > 0$	43
4.1.1	Caso $\mathcal{K}(y) = -1/y$	44
4.1.2	Caso $\mathcal{K}(y) = 1 - 1/y$	45
4.1.3	Caso general $\mathcal{K}(y) = c - 1/y$, $c > -1$	47
4.2	Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/e^y$, $\lambda > 0$	49
4.2.1	Caso $\mathcal{K}(y) = -e^{-y} + c$, $-1 < c < 1$	50
4.2.2	Caso $\mathcal{K}(y) = -e^{-y} + 1$	52
4.2.3	Caso $\mathcal{K}(y) = -e^{-y} + c$, $c > 1$	53
4.3	Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/\cos^2 y$, $\lambda > 0$	54
4.4	Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/\cosh^2 y$, $\lambda > 0$	57
4.4.1	Caso $\mathcal{K}(y) = \lambda \tanh y$, $0 < \lambda < 1$	58
4.4.2	Caso $\mathcal{K}(y) = \tanh y$	59
4.4.3	Caso $\mathcal{K}(y) = \lambda \tanh y$, $\lambda > 1$	61
4.5	Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/\sqrt{y}$, $\lambda > 0$	63
	Bibliografía	64
	Referencias bibliográficas	64
	Webgrafía y otras referencias	66

1. Introducción

1. Introducción

1. Introducción

1. Introducción

1. Introducción

1. Introducción

1. Introducción

- ## 1. Introducción

- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada y del mundo de las aplicaciones) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas o refutarlas.
- Resolver problemas matemáticos avanzados, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos.
- Proponer, analizar, validar e interpretar modelos matemáticos complejos, utilizando las herramientas más adecuadas a los fines que se persigan.
- Saber elegir y utilizar aplicaciones informáticas, de cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras, para experimentar en matemáticas y resolver problemas complejos.
- Desarrollar programas informáticos que resuelvan problemas matemáticos avanzados, utilizando para cada caso el entorno computacional adecuado.
- Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos y las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, así como las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.
- Utilizar con soltura herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos.
- Usar el inglés, como lengua relevante en el ámbito científico.
- Saber trabajar en equipo y gestionar el tiempo de trabajo.

Resultados de aprendizaje.

- Demostrar que se han adquirido las competencias globales ligadas al desarrollo y aplicación de los conocimientos del Máster.
- Demostrar que se han adquirido las competencias ligadas a la búsqueda y organización de información y documentación relevante sobre el tema objeto de estudio.
- Presentar, de forma escrita y oral, la memoria, los resultados y las conclusiones del trabajo realizado.

1.2 Antecedentes, contenidos y objetivos

El presente Trabajo Fin de Máster se sitúa en el contexto de la Geometría Diferencial Clásica. Mas concretamente, en el seno de la Teoría Local de Curvas Planas. Se abordará un caso especial del llamado “Problema de Singer” (véase la referencia [10]) siguiendo como referencia fundamental el artículo [1].

Antecedentes

El punto de partida de esta investigación es el Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas. Establece que una curva plana queda unívocamente determinada, salvo rotaciones y traslaciones, por su curvatura dada como función de su longitud de arco. La demostración de este resultado (Teorema 2.3.1) es constructiva e involucra tres integrales que conducen al ángulo del vector tangente unitario con una dirección fija y a las dos componentes cartesianas de la curva a determinar. Sin embargo, en la mayoría de los casos, tales curvas son difíciles de encontrar *explícitamente* en la práctica, debido a las dificultades que aparecen en el proceso de integración habitualmente.

Motivado por este resultado fundamental, David A. Singer propuso en 1999 (véase la referencia [10]) el siguiente problema en otra línea semejante:

¿Puede determinarse una curva (plana) si su curvatura viene dada en términos de su posición?

Con el precedente de lo que ocurre en el caso que la curvatura venga dada en términos de la longitud de arco, la solución del problema de Singer aparece incluso más complicada. De hecho, su planteamiento analítico conduce a una complicada ecuación diferencial no lineal difícil de controlar para una función arbitraria que juegue el papel de curvatura (véase la Sección 3.1).

Probablemente, el caso resuelto más interesante del problema de Singer corresponde a las clásicas curvas elásticas estudiadas por Euler en 1744. Estas curvas satisfacen una propiedad destacable: su curvatura es proporcional a una de sus funciones coordenadas. Es decir, $\kappa(x, y) = 2\lambda y$ por ejemplo.

Entre las elásticas de Euler (véase la Figura 1.1) hay una única curva cerrada (con forma de ocho) y las expresiones explícitas de las mismas requieren el uso de funciones elípticas de Jacobi.

El propio Singer comenzó en [10] el problema planteado anteriormente considerando la condición $\kappa(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es decir, la curvatura viene dada justamente por la distancia al origen (véase la Figura 1.2). Trató de encontrar representaciones explícitas de estas curvas y probó un teorema (el Teorema 3.1 en [10]) en el que ponía de manifiesto que el problema de determinar una curva cuya curvatura prescrita es $\kappa(r)$, con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, puede resolverse por cuadraturas (es decir, integrales) cuando $r\kappa(r)$ es una función continua. La demostración de este resultado se basa en métodos estándar en Mecánica Clásica.

Pero incluso el caso sencillo $\kappa(r) = r$, en el que ya aparecen integrales elípticas, ilustra el hecho que las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema puedan resolverse por integrales no significa que éstas sean fáciles de calcular. De hecho, en [10] solo el caso de la lemniscata de Bernoulli ($r^2 = 3 \cos 2\theta$ en coordenadas polares) fue resuelto *explícitamente* gracias a que las correspondientes integrales elípticas degeneraban en integrales elementales.

No obstante, la curvatura de muchas curvas planas famosas, como cónicas, óvalos de Cassini, espirales de Sturm y sinusoidales, dependen solo de la distancia r desde un punto fijo. Puede consultarse [8] y [9] y las propias referencias de estos artículos.

Inspirados por las elásticas de Euler y a la luz del problema de Singer, los autores de [1] se propusieron estudiar las curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta (en lugar de a un punto). Salvo un movimiento rígido del plano, podemos fijar como recta de referencia el eje x y así estamos considerando el caso $\kappa = \kappa(y)$ del problema de Singer (véase la Figura 1.3), que incluye a la familia importante de las curvas elásticas de Euler que se corresponde con la función lineal $\kappa(y) = 2\lambda y$.

Desde un punto de vista geométrico-analítico, pretendemos afrontar el siguiente caso del problema de Singer: para una parametrización por el arco $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ de una curva plana regular, se prescribe la curvatura con la condición geométrica extrínseca

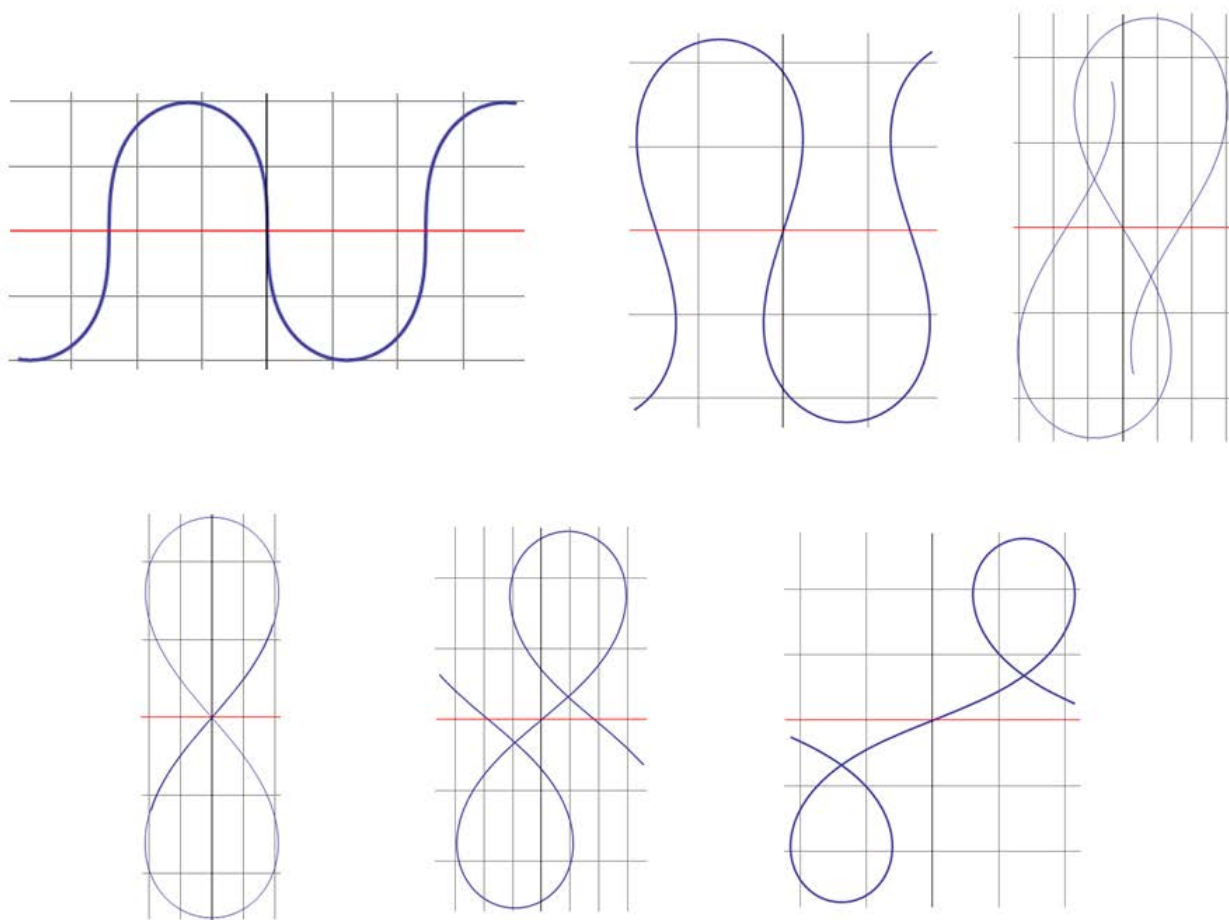


Figura 1.1: Curvas elásticas de Euler.

$\kappa = \kappa(y)$ y se desea determinar la representación analítica de $\alpha(s)$ que permita encontrar su ecuación intrínseca $\kappa = \kappa(s)$. En la misma línea del Teorema 3.1 de [10], probaremos un resultado abstracto de integrabilidad (véase el Teorema 3.2.1) que muestra que el problema de determinar tales curvas puede también resolverse por cuadraturas si $\kappa(y)$ es una función continua.

Un papel crucial en este resultado principal es jugado por la función primitiva elegida $\mathcal{K}(y)$ de la curvatura prescrita $\kappa(y)$. Esta función $\mathcal{K}(y)$ será interpretada físicamente como un momento lineal geométrico (véase la Sección 3.2).

En la destacada familia de las elásticas de Euler, $\int \kappa(y) dy = \int 2\lambda y dy = \lambda y^2 + c$; la constante c precisamente determina la tensión de la curva elástica y su máxima curvatura y sirve entonces para distinguir geoméricamente los tres tipos de elásticas existentes (de tipo onda, asintótica o bucle). En general, volvemos a tener grandes dificultades para resolver las integrales que aparecen en nuestro teorema principal, al igual que le sucedía a Singer.

En este Trabajo Fin de Máster, prestaremos atención a encontrar curvas interesantes para las que los cálculos requeridos puedan llevarse a cabo *explícitamente* en términos

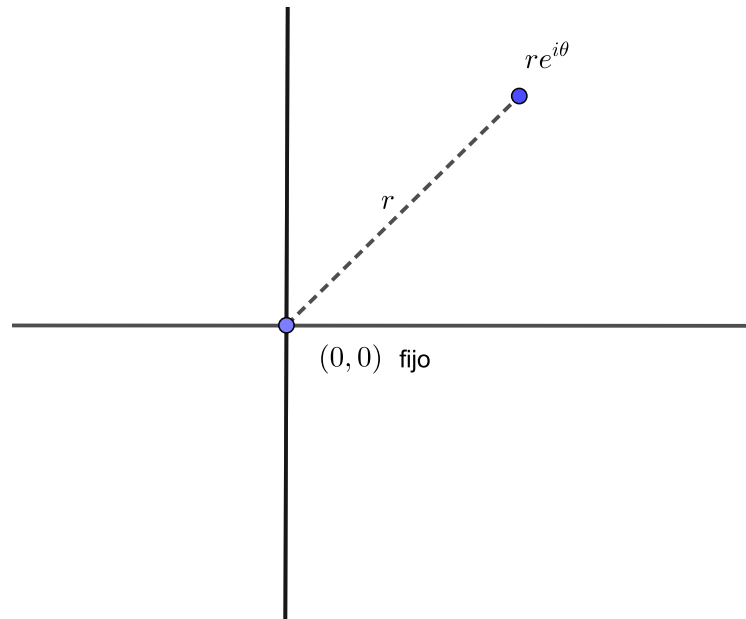


Figura 1.2: La curvatura depende de la distancia al origen $(0,0)$: $\kappa = \kappa(r)$.

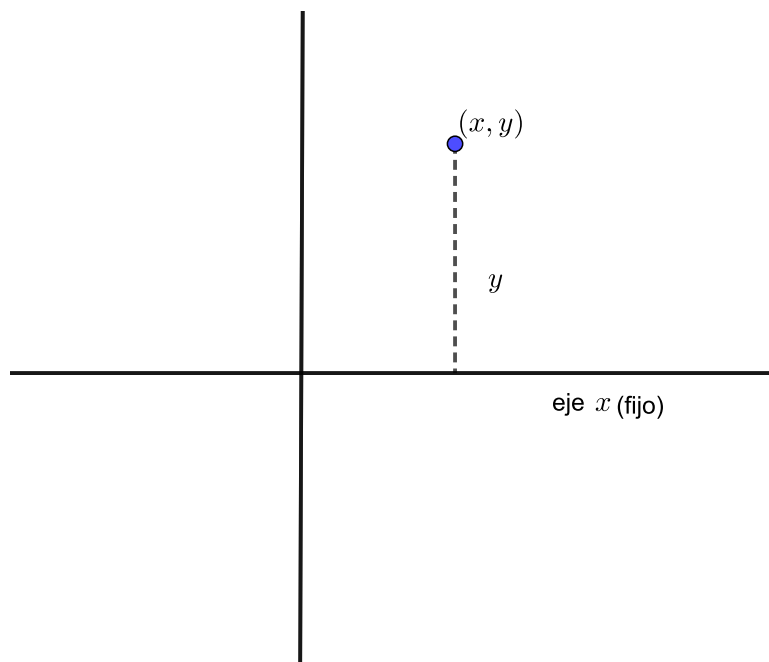


Figura 1.3: La curvatura depende de la distancia al eje x : $\kappa = \kappa(y)$.

de funciones elementales. Nos preocuparemos de identificar, computar y representar gráficamente tales ejemplos de curvas “integrables” y tendremos éxito hasta en cinco familias diferentes.

Contenidos

Los contenidos de esta memoria se centran en el estudio de diferentes familias de curvas planas (siguiendo la misma línea que la referencia [10]), del problema planteado

por David A. Singer. Más específicamente, consideraremos curvas planas cuya curvatura depende de la distancia al eje x , esto es, $\kappa = \kappa(y)$. Estos son los casos que consideraremos a lo largo del trabajo:

- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{y^2}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{e^y}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cos^2 y}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cosh^2 y}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\sqrt{y}}, \lambda > 0,$

Concretamente, en esta memoria se estudiarán, entre otras, la catenaria, la curva “grim-reaper” o la cicloide. Se examinarán además, en las anteriores familias interesantes de curvas planas, las ecuaciones intrínsecas que se expresan en términos de funciones elementales.

En cuanto a la estructura de la memoria, tiene tres capítulos destacados. El Capítulo 2 (*Preliminares*) contiene una serie de conceptos y resultados previos necesarios a lo largo del trabajo, junto con la notación a utilizar en el resto de los capítulos. El Capítulo 3 (*Problema de Singer*) describe el problema planteado por David A. Singer en 1999, para posteriormente, siguiendo la misma línea de [10], estudiar las curvas planas cuya curvatura se expresa en términos de la distancia a una recta. Y por último, en el Capítulo 4 (*Familias de curvas integradas*), nos dedicaremos a estudiar diferentes familias de curvas planas, con la condición anterior, que se pueden obtener a partir de funciones elementales, utilizando las ideas y resultados de [1]. A lo largo de este capítulo, se realizará un estudio detallado partiendo de diferentes curvaturas, y distinguiendo casos según el momento lineal geométrico elegido, así como se representarán gráficamente las curvas planas obtenidas por este proceso.

En el Capítulo 2 vamos a detallar una serie de conceptos previos: curvas planas regulares, longitud de una curva, curvatura y diedro de Frenet de una curva plana. Además, el núcleo del Capítulo 2 lo constituye el *Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas* (véase la sección 2.3). Proporcionaremos algunos ejemplos explícitos de aplicación del Teorema Fundamental 2.3.1, en los que podemos encontrar la parametrización por el arco de una curva plana a partir de su ecuación intrínseca. Finalmente, estudiaremos algunos ejemplos de curvas planas destacadas, como lo son la catenaria, la curva “grim-reaper” y la cicloide, realizando el cálculo de su ecuación intrínseca y recuperando las curvas a partir de esta ecuación.

En el Capítulo 3 de esta memoria, se realizará una introducción al caso concreto del problema de Singer en 1999 para estudiar las curvas planas cuya curvatura se expresa en términos de la distancia a una recta, en lugar de a un punto. Podemos considerar, sin

restricción, que esta recta es el eje x del sistema de referencia escogido y así estudiar el caso del problema de Singer planteado anteriormente: $\kappa = \kappa(y)$.

Siguiendo la misma línea del Teorema 3.1 en [10], demostraremos el Teorema 3.2.1, en el cual dada una función $\kappa = \kappa(y)$, continua, el problema de determinar una curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ con curvatura $\kappa(y)$ se resume en resolver tres integrales:

$$(i.) \int \kappa(y) dy = \mathcal{K}(y),$$

$$(ii.) s = s(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(y)^2}} \quad (-1 < \mathcal{K}(y) < 1),$$

$$(iii.) x(s) = - \int \mathcal{K}(y(s)) ds.$$

Precisamente, la primitiva $\mathcal{K}(y)$ elegida de $\kappa(y)$ en (i.) desempeñará un papel clave, que puede ser interpretada físicamente como un momento lineal geométrico. Además, se describirán las dificultades encontradas para computar en términos de funciones elementales las integrales anteriores. En algunos casos, por ejemplo, es imposible poder obtener *explícitamente* $y = y(s)$, invirtiendo $s = s(y)$ desde (ii.), siendo esto absolutamente necesario para obtener $x(s)$ en (iii.). Igualmente, para intentar eludir estas dificultades, se propone una forma alternativa de determinar la curva como grafo $x = x(y)$, eliminado el parámetro arco s . Para concluir este capítulo, presentaremos dos ejemplos sencillos para testear la viabilidad del Teorema 3.2.1: rectas ($\kappa \equiv 0$) y circunferencias ($\kappa \equiv \kappa_0 > 0$).

El Capítulo 4 aborda el núcleo de la memoria, en el cual nos dedicamos íntegramente a estudiar las diferentes familias de curvas planas con la condición $\kappa = \kappa(y)$. En total, estudiaremos cinco situaciones diferentes en las que somos, al menos parcialmente, exitosos con el procedimiento descrito en el Teorema 3.2.1. Recuperaremos algunas curvas muy conocidas como la catenaria, la curva “grim-reaper” o la cicloide y descubriremos otras familias de curvas planas caracterizadas por este tipo de propiedad geométrica.

Objetivos

Una vez descritos los antecedentes y la estructura principal de este Trabajo Fin de Máster, procedemos a exponer los principales objetivos asociados al mismo. El objetivo obvio es poder superar las disposiciones académicas necesarias en relación con el Máster en Matemáticas de la Universidad de Jaén. Para ello, será necesario poner de manifiesto los conocimientos y competencias adquiridos durante curso 2018-2019.

Los objetivos concretos asociados a la realización de esta memoria son:

- Realizar una breve introducción a la Geometría Diferencial en el ámbito de la Teoría Local de Curvas Planas y demostrar el Teorema Fundamental de esta teoría.
- Siguiendo la misma línea del Teorema 3.1 en [10], proporcionar una nueva demostración alternativa más simple del resultado principal del artículo [1].
- Estudiar diferentes familias explícitas de curvas planas con curvatura dependiendo de la distancia a una recta como aplicación del resultado principal de la memoria, el Teorema 3.2.1.
- Detectar dificultades para determinar curvas $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ en la aplicación del Teorema 3.2.1 e intentar buscar una solución para, finalmente, determinar la curva como grafo $x = x(y)$.

- Estudiar la bibliografía relacionada con el problema planteado.

Destacar principalmente que el objetivo de este trabajo es, principalmente, estudiar y presentar los principales resultados del artículo [1], proporcionando una nueva demostración más simple de su teorema principal y realizando una modificación de dicho teorema para poder hallar nuevas familias de curvas planas. Así, incorporamos una nueva familia que contiene la curva cicloide, utilizando el teorema principal del trabajo.

1.3 Conclusiones y trabajo futuro

Este Trabajo Fin de Máster permite concluir la realización del Máster en Matemáticas y, por supuesto, persigue cubrir una serie de objetivos de cara a la formación completa del estudiante, los cuales fueron planteados en las secciones precedentes. En esta sección se pretende realizar una reflexión y análisis final sobre la consecución de los objetivos planteados.

Esta memoria consta de tres bloques principales. El primer bloque del trabajo (Capítulo 2: *Preliminares*) tenía como objetivo fundamental recopilar los conceptos y resultados previos que han sido necesarios a lo largo del desarrollo realizado en el resto de capítulos. Creo que se ha cumplido este objetivo elaborando un texto matemático homogéneo, que evite errores asociados a una notación arbitraria y presentando los principales conceptos matemáticos necesarios a lo largo de la memoria.

En el segundo bloque fundamental del trabajo (Capítulo 3: *Problema de Singer*) tenía como objetivo presentar el problema original de Singer para utilizarlo como base para poder analizar, posteriormente, diferentes familias de curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta: $\kappa = \kappa(y)$ (véanse las referencias [1] y [10]). Además de detectar las dificultades en la aplicación del Teorema 3.2.1 (véase la Sección 3.2). En general, se encuentran grandes dificultades para realizar las integraciones que implica el Teorema 3.2.1, aunque somos, al menos parcialmente, exitosos en la aplicación de dicho Teorema y recuperamos interesantes curvas planas para las cuales los cálculos requeridos se pueden lograr *explícitamente*, en términos de funciones elementales.

Por último, el Capítulo 4 (*Familias de curvas integradas*), cumple con su objetivo fundamental, analizando diferentes familias de curvas planas tales que su curvatura cumple la condición geométrica dada. Se distinguen casos según el momento lineal geométrico de las curvas planas.

En conclusión, con la aplicación del Teorema 3.2.1 recuperamos algunas curvas bien conocidas, como la catenaria, la curva “grim-reaper” y la cicloide; y descubrimos otras nuevas familias de curvas planas que se pueden observar en la Sección 4.1.3.

Se podría continuar en esta misma línea de investigación, analizando familias de curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a un punto, a partir de la referencia [2] o trabajar los problemas correspondientes en el plano de Lorentz-Minkowski en lugar del

plano Euclídeo a partir de las referencias [3] y [4].

Este Trabajo Fin de Máster supone la culminación del proceso de enseñanza desarrollado en el Máster en Matemáticas y creo que cumple con las competencias necesarias para la formación del alumnado.

$$y = \cosh x, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

2. Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir y enlazar una serie de conceptos previos y definiciones que utilizaremos en capítulos posteriores, junto con una notación matemática adecuada para todos los capítulos. Para ello necesitamos de una fundamentación teórica sólida que permita establecer una serie de proposiciones o teoremas junto con sus demostraciones. Situamos este capítulo preliminar en el contexto de la Teoría Local de Curvas Planas, bajo la óptica de la Geometría Diferencial.

2.1 Curvas planas regulares. Longitud de arco.

Una idea intuitiva de curva podría ser la trayectoria en el espacio de una partícula en movimiento. En cada instante la partícula está en un lugar concreto, el cual depende de un parámetro (que podemos ver como la variable tiempo), y la trayectoria es suave. Con más rigor matemático, una curva parametrizada es una aplicación (véase la Figura 2.1)

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde I es un intervalo abierto de la recta real (I podría ser no acotado). Diremos que la curva α es plana cuando exista un plano afín Π de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la imagen de α , a la que denotaremos por C . En este caso podemos suponer que $\Pi \equiv \{z = 0\}$ y entonces α puede verse como una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. En este caso, podemos estudiar α en componentes cartesianas:

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I,$$

donde t es el parámetro de la curva y x e y son las componentes de la parametrización, que son funciones reales de variable real, infinitamente derivables en I (véase [5]).

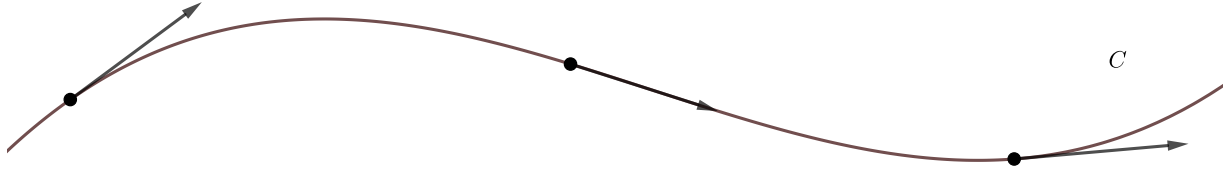


Figura 2.1: Curva plana regular.

El vector tangente o vector velocidad de α en $t \in I$ es $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. La velocidad se define por

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

y el vector aceleración viene dado por $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$.

Utilizaremos la siguiente notación abreviada para una curva plana C parametrizada por α :

$$C \equiv \alpha(t), t \in I.$$

La ecuación cartesiana de C es del tipo

$$C \equiv F(x, y) = 0.$$

Y las ecuaciones paramétricas de C se expresan mediante

$$C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

Definición 2.1.1 Una curva plana $C \equiv \alpha(t)$, $t \in I$, se dice regular si es diferenciable y verifica $|\alpha'(t)| > 0 \forall t \in I$.

Es decir, el vector tangente es no nulo en cualquier punto de la curva.

Ejemplos

- Rectas. Quedan determinadas por un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto:

$$r \equiv \alpha(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) = P_0 + t\vec{v}.$$

Así:

$$\alpha'(t) = (v_1, v_2) = \vec{v}, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

$$\alpha''(t) = (0, 0) = \vec{0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Grafos de funciones $y = f(x)$ (en coordenadas cartesianas). El grafo de una función diferenciable $y = f(x)$, que denotamos por C_f , se puede parametrizar del siguiente modo (véase la Figura 2.2):

$$C_f \equiv \alpha(x) = (x, f(x)), \quad x \in I.$$

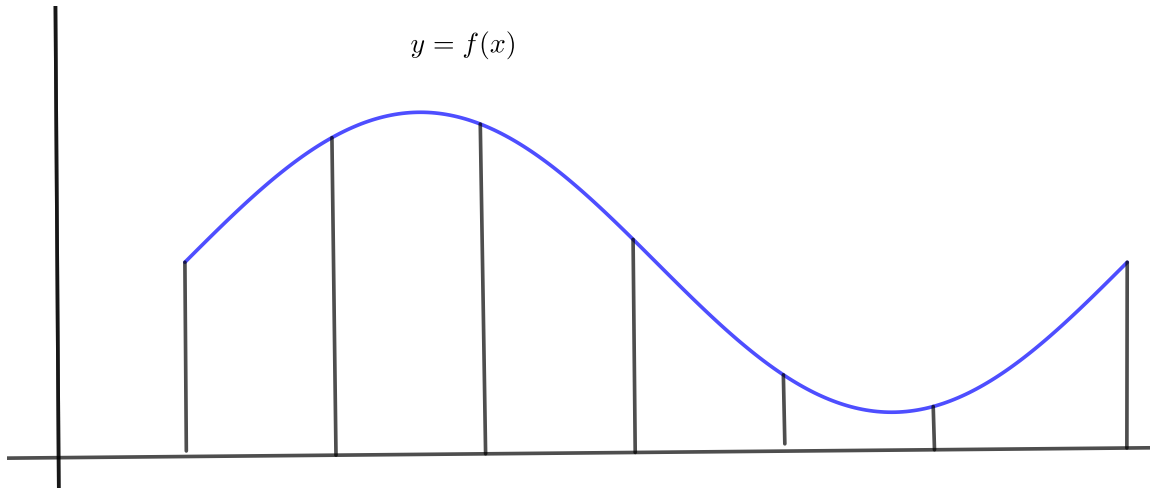


Figura 2.2: Grafos de funciones de una variable.

- Grafos de funciones $r = f(\theta)$ (en coordenadas polares). Usando como parámetro el ángulo polar θ , resulta (véase la Figura 2.3):

$$C_f \equiv \alpha(\theta) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta)), \quad \theta \in I.$$

En particular, la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $R > 0$, $r = R$, se parametriza como (véase la Figura 2.4):

$$C_R \equiv \alpha(\theta) = R(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Reparametrización de una curva

Dada una curva C parametrizada por $\alpha = \alpha(t)$, $t \in I$ y siendo $\beta = \beta(u)$, $u \in I'$, se dice que $h : I' \rightarrow I$, $t = h(u)$, es un cambio de parámetro positivo (respectivamente negativo) si h es derivable y $h'(u) > 0$ (respectivamente $h'(u) < 0$) y se cumple que $\beta = \alpha \circ h$, es decir, $\beta(u) = \alpha(h(u)) = \alpha(t)$. Entonces β se denomina una reparametrización positiva (respectivamente negativa) de α .

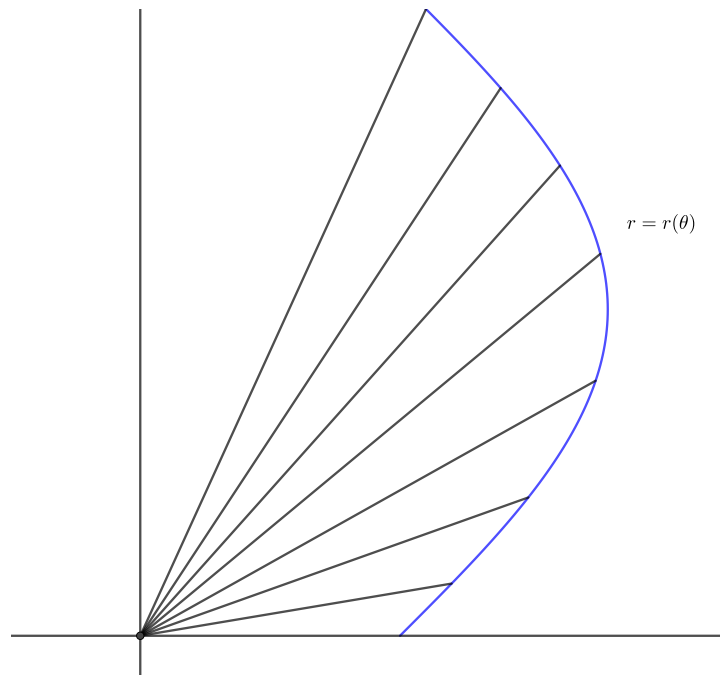


Figura 2.3: Grafos de funciones en coordenadas polares.

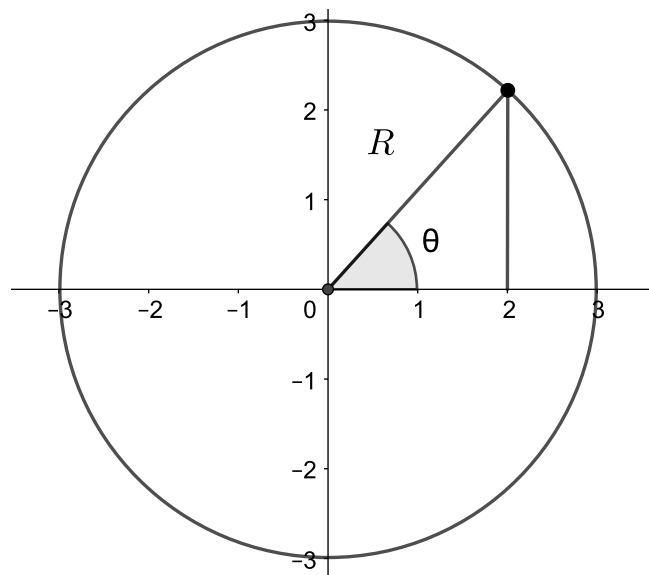


Figura 2.4: Circunferencia de radio R y parámetro $\theta \in [0, 2\pi]$.

Por tanto, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$\beta'(u) = h'(u)\alpha'(t).$$

Luego α es regular si y solo si β es regular, y se deduce que la recta tangente a α en $t = h(u)$ coincide con la recta tangente a β en u (véase la Figura 2.5).

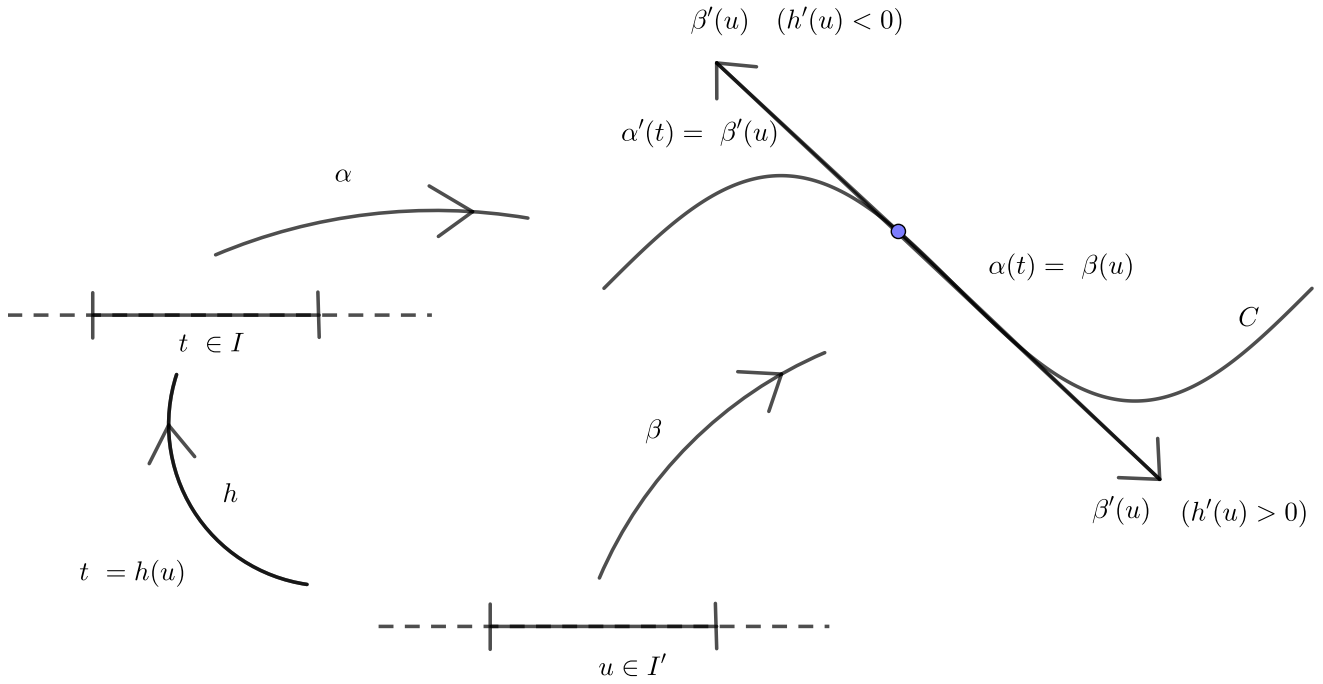


Figura 2.5: Reparametrización de una curva.

Longitud de una curva

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable y $[a, b] \subset I$. Queremos definir la longitud de α en el intervalo $[a, b]$, que denotaremos por $L_a^b(\alpha)$, y para ello vamos a medir la longitud de poligonales que aproximen a $L_a^b(\alpha)$ de una forma natural. Consideremos todas las poligonales inscritas en $L_a^b(\alpha)$, es decir, obtenidas uniendo puntos $\alpha(t_i)$ en la traza de α mediante segmentos, donde los valores t_i del parámetro se mueven en una partición de $[a, b]$. La longitud de cada una de estas poligonales es fácil de calcular: sumando $|p_i - p_{i-1}|$, donde p_i, p_{i-1} son cualesquiera vértices consecutivos de la poligonal. Cuanto mayor sea el número de puntos de la partición, mejor será la aproximación de α por poligonales. Cuando el número de segmentos tienda a infinito, puede probarse que las longitudes de las poligonales convergerán a un número real, que será la longitud de α . Veamos todo esto rigurosamente.

Sea $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Denotemos por

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de las tales particiones de $[a, b]$. Notemos que si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y $P_1 \subset P_2$, entonces $L(\alpha, P_1) \leq L(\alpha, P_2)$.

Definición 2.1.2 Se define la *longitud de la curva α desde a hasta b* como

$$L_a^b(\alpha) = \sup\{L(\alpha, P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Para que la definición de longitud tenga sentido, debe existir el supremo anterior (es decir, debe ser finito).

Proposición 2.1.1 Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable y $[a, b] \subset I$, entonces $L_a^b(\alpha)$ existe y se cumple que

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Demostración.

Primero notemos que la integral de la proposición anterior tiene sentido ya que $|\alpha'(t)|$ es continua en el compacto $[a, b]$. Ahora veamos que $L_a^b(\alpha)$ es finita. Dada una partición $P \in \mathcal{P}$, aplicando la regla de Barrow escribimos

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Como la desigualdad anterior es cierta para cualquier $P \in \mathcal{P}$, deducimos que $L_a^b(\alpha)$ existe y es igual a

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

■

Veamos algunas propiedades de la longitud de curvas. La fórmula anterior no depende de la parametrización escogida para C ni de la posición de C en el plano. Es pues una propiedad geométrica intrínseca.

Proposición 2.1.2 Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable y $[a, b] \in I$.

- La longitud es invariante por movimientos rígidos: si $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un momento rígido de $\mathbb{R}^2$, entonces: $L_a^b(\varphi \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.
- La longitud es invariante por reparametrizaciones: si $h : J \rightarrow I$ es un difeomorfismo con $h([c, d]) = [a, b]$, entonces $L_c^d(\alpha \circ h) = L_a^b(\alpha)$.
- $|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq L_a^b(\alpha)$, y la igualdad se da si y sólo si α parametriza un segmento que une sus extremos de forma monótona (esto es, la curva más corta uniendo dos puntos de $\mathbb{R}^2$ es la línea recta).

Si una curva presenta valores del parámetro en los que el vector tangente se anula, entonces no podrá ser reparametrizada por el arco. Así que necesitaremos imponer a nuestra curva que su vector tangente no se anule en ningún punto, es decir, que la curva sea regular.

Proposición 2.1.3 Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Entonces, existe una reparametrización positiva de α con velocidad unitaria. En concreto, si $h : J \rightarrow I$ es el difeomorfismo dado por

$$s = h^{-1}(t) = \int_a^t |\alpha'(r)| dr, \quad t \in I,$$

entonces $\beta = \alpha \circ h$ posee velocidad unitaria y se dice que β está parametrizada por el arco.

Demostración.

Notemos que al ser $r \in I \mapsto |\alpha'(r)|$ una aplicación continua, entonces su primitiva

$$\phi(t) = \int_a^t |\alpha'(r)| dr,$$

existe y es clase C^1 . Como α es regular, $r \in I \rightarrow |\alpha'(r)|$ es diferenciable; luego también lo es ϕ en I . Además $\phi' > 0$ en I es estrictamente creciente, luego ϕ es un difeomorfismo. Entonces $h = \phi^{-1}$ está bien definido. Notemos también que $\phi(t) = L_a^t(\alpha)$, aunque estamos abusando de la notación porque t podría ser menor que a . Entonces, por la regla de la cadena y la regla de la función inversa se tiene:

$$|\beta'(s)| = |h'(s)| |\alpha'(t)| = \frac{1}{|\phi'(t)|} |\alpha'(t)| = \frac{1}{|\alpha'(t)|} |\alpha'(t)| = 1.$$

En cuanto al número de parametrizaciones por el arco de una curva regular dada, si β_1 y β_2 , son reparametrizaciones por el arco de $\alpha = \alpha(t)$, entonces β_1 es una reparametrización de β_2 ; es decir, existe un difeomorfismo h tal que $\beta_1(s) = \beta_2(h(s))$. Derivando y tomando normas tendremos $|h'(s)| \equiv 1$. Así $s \mapsto h(s)$ es, salvo un signo, una traslación. Esto nos dice que salvo traslaciones o cambios de sentido, el parámetro arco de una curva regular es único. ■

2.2 Curvatura y diedro de Frenet de una curva plana.

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana. Nos planteamos la siguiente cuestión: "¿cómo se dobla una curva?". Queremos medir lo que la traza de α se curva en el plano alejándose de una tangencial rectilínea, asignando a cada uno de sus puntos un número. Por tanto, queremos definir una función $\kappa = \kappa(s)$ del parámetro arco de α que mida la curvatura en $\alpha(s)$. Es lógico pensar que κ sea constantemente cero en el caso de una recta, y constante no nula en el caso de una circunferencia. Una buena aproximación para definir κ es comparar la variación de longitud de α alrededor de $\alpha(s)$ con la de su imagen *esférica*, es decir la longitud de la imagen en la circunferencia unidad de $\alpha'/|\alpha'|$. Para ello necesitaremos que α sea regular.

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable parametrizada por la longitud de arco, el vector tangente $\alpha'(s)$ es unitario. A dicho *vector tangente unitario*, lo denotaremos por $T(s) = \alpha'(s)$. La aplicación $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(s) = \alpha'(s)$, es diferenciable con $|T(s)| = 1$.

Existen únicamente dos vectores unitarios perpendiculares a $T(s)$. Uno de ellos se corresponde con el giro de 90° en el sentido de las agujas del reloj y el otro en el sentido contrario. Ambos vienen dados por una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (véase la Figura 2.6). Denominaremos *vector normal unitario* a la curva α en s (o en el punto $\alpha(s)$),

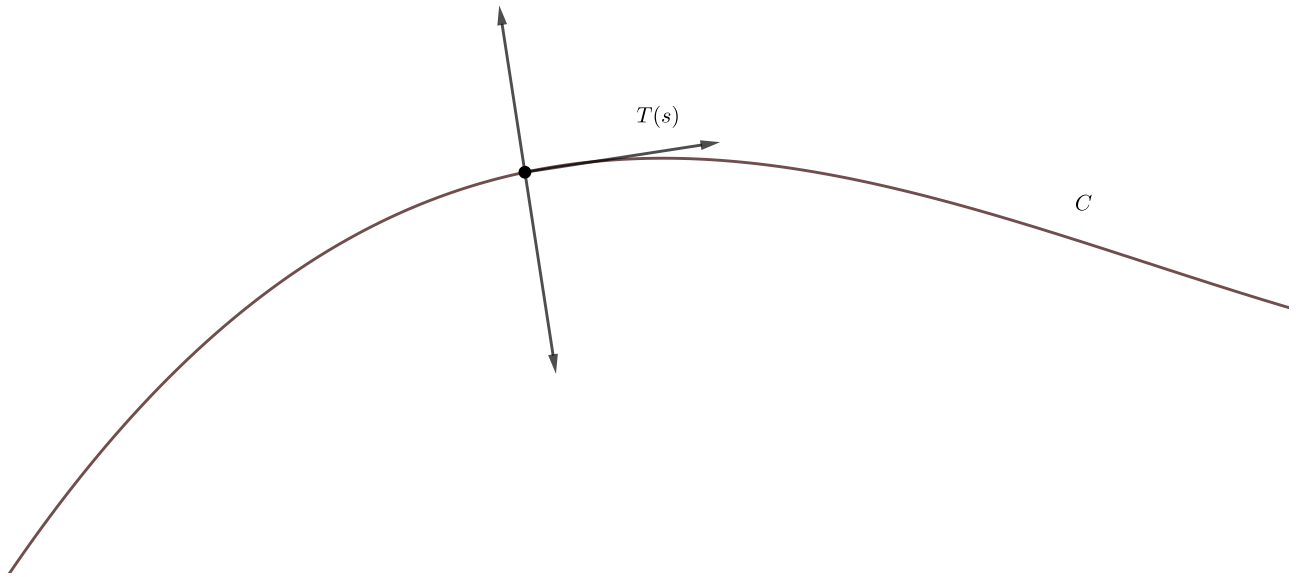


Figura 2.6: Vectores unitarios perpendiculares al vector tangente unitario $T(s)$.

al vector $N(s) = JT(s)$, donde $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el giro de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj (véase la Figura 2.7).

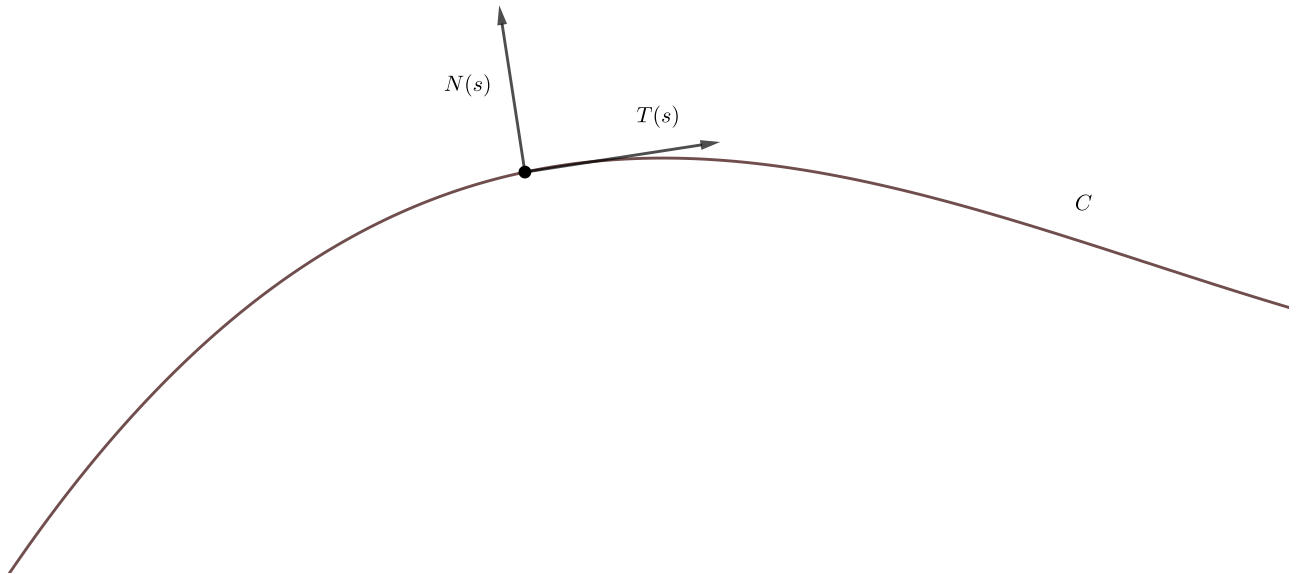


Figura 2.7: Diedro de Frenet (tangente y normal unitario).

Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, entonces $T(s) = (x'(s), y'(s))$, y por tanto $N(s) = (-y'(s), x'(s))$. La recta tangente (normal) a la curva α es la que pasa por dicho punto y tiene como vector director a $T(s)$ ($N(s)$).

Denominaremos *diedro (orientado) de Frenet* a la base $\{T(s), N(s)\}$ en cada punto $\alpha(s)$ de la curva (véase la Figura 2.7).

El estudio del comportamiento local de una curva lleva consigo conocer cómo se va “doblando” dicha curva en cada punto. Utilizaremos para ello el diedro de Frenet, observando cómo cambia conforme avanza el recorrido de la curva, para obtener una idea clara sobre este aspecto. Notaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 2.2.1 Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable regular parametrizada por la longitud de arco. Para cada $s \in I$, el vector $T'(s)$ está en la dirección de $N(s)$, es decir:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \quad s \in I;$$

donde

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

es una función diferenciable. Y además,

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s), \quad s \in I.$$

Demostración.

Para cada $s \in I$, se verifica que $|T(s)| = 1$, $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$ y $|N(s)| = 1$; si derivamos respecto a s , se tiene:

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = 0, \quad \langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0, \quad \langle N'(s), N(s) \rangle = 0.$$

Se deduce que $T'(s)$ es ortogonal a $T(s)$. Tenemos pues que para cada $s \in I$, existe un número real $\kappa(s)$ de manera que se cumple que

$$T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Ya que $|N(s)| = 1$, si hacemos el producto escalar de $T'(s)$ y $N(s)$, se tiene:

$$\langle T'(s), N(s) \rangle = \kappa(s).$$

Por otro lado, como $N'(s)$ y $N(s)$ son ortogonales, tenemos que

$$N'(s) = \mu(s)T(s)$$

con μ un número real para cada $s \in I$; si hacemos el producto escalar de $N'(s)$ y $T(s)$, entonces:

$$\langle N'(s), T(s) \rangle = \mu(s)$$

lo que implica que $\mu(s) = -\langle N(s), T'(s) \rangle = -\kappa(s)$, por tanto:

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s), \quad s \in I.$$

■

Definición 2.2.1 Denominaremos *curvatura de la curva plana* α a la función $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)).$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, se llama *radio de curvatura* de la curva α en $\alpha(s)$ a $R(s) = 1/\kappa(s)$.

Definición 2.2.2 Denominaremos *fórmulas de Frenet o ecuaciones de Frenet* a las ecuaciones diferenciales

$$T'(s) = \kappa(s)N(s),$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s).$$

El vector aceleración es $\alpha''(s) = T'(s)$. Observamos que como la velocidad es constante $|\alpha'(s)| = |T(s)| = 1$, no hay aceleración tangencial, únicamente hay aceleración normal o centrípeta. Por otra parte, según las ecuaciones de Frenet:

$$\alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Así:

$$|\alpha''(s)| = |\kappa(s)|.$$

Por tanto, $|\kappa(s)|$ determina el valor de la aceleración centrípeta; esto significa que es responsable del cambio de dirección de la curva. En conclusión, esto justifica que $\kappa(s)$ reciba el nombre de curvatura (véase la Figura 2.8). Dado que $N(s)$ era el resultado de un giro de 90° del vector $T(s)$ en sentido contrario a las agujas del reloj, si $\kappa(s) > 0$ la curva gira en esta última dirección, y si $\kappa(s) < 0$, lo hace en sentido contrario, según el sentido en que “recorremos” la curva.

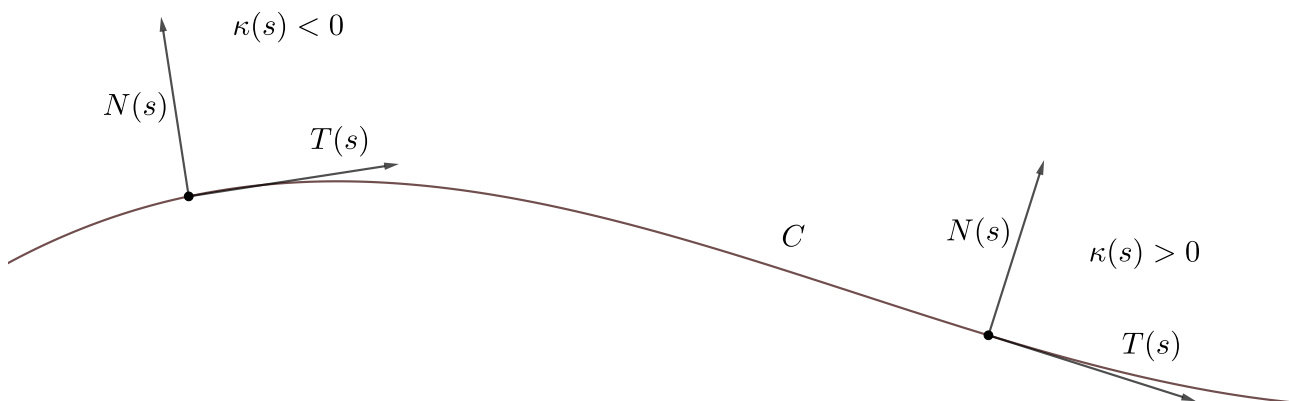


Figura 2.8: Signo de la curvatura de una curva.

La *curvatura* de una curva α , no necesariamente parametrizada por la longitud de arco, viene dada por $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(h(s))$, donde β es la reparametrización de α por la longitud de arco, κ_β es su curvatura y h es el cambio de parámetro correspondiente. Así, puede probarse que la curvatura no depende de la parametrización y, por tanto es una propiedad geométrica intrínseca.

Proposición 2.2.2 Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular parametrizada (no necesariamente por la longitud de arco), entonces:

$$\kappa_{\alpha}(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

2.3 Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas

Antes de enunciar el Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas, se va a considerar una nueva interpretación de la curvatura. El ángulo que forma el vector tangente unitario a α para cada $s \in I$, con una dirección fija $\vec{u}$ del plano, es llamado $\theta(s)$ (véase la Figura 2.9).

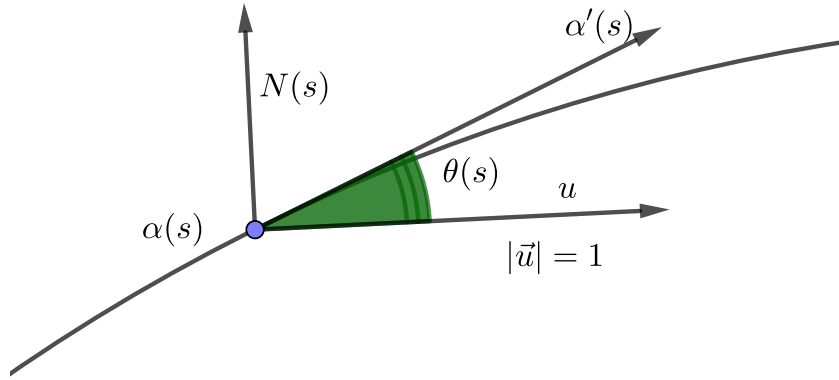


Figura 2.9: Interpretación geométrica de la curvatura.

Como se observa en la Figura 2.9 el ángulo θ viene dada por

$$\cos \theta(s) = \langle \alpha'(s), \vec{u} \rangle.$$

Derivando en ambos miembros y aplicando las ecuaciones de Frenet, se obtiene:

$$\begin{aligned} -\sin \theta(s) \theta'(s) &= \langle \alpha''(s), \vec{u} \rangle, \\ -\sin \theta(s) \theta'(s) &= \kappa(s) \langle N(s), \vec{u} \rangle, \\ -\sin \theta(s) \theta'(s) &= \kappa(s) \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \theta(s) \right), \\ -\sin \theta(s) \theta'(s) &= \pm \kappa(s) \sin \theta(s). \end{aligned}$$

Finalmente, nos quedaría:

$$\kappa(s) = \pm \theta'(s).$$

En conclusión, tenemos que salvo el signo, la curvatura mide la variación del ángulo entre $T(s)$ y una dirección fija del plano.

Teorema 2.3.1 *Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas.* Dada cualquier función $\kappa_0 = \kappa_0(s), s \in I$, continua, entonces existe una curva plana $\alpha = \alpha(s)$, parametrizada por el arco, tal que $\kappa(s) = \kappa_0(s)$. Además, α es única salvo movimientos rígidos directos (traslaciones y rotaciones).

Demostración.

Empecemos probando la unicidad. Supongamos que $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ son curvas planas p.p.a., con $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = \kappa$. Sean $\{T_\alpha, N_\alpha\}, \{T_\beta, N_\beta\}$ los diedros de Frenet respectivos. Consideremos la función derivable $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\chi(s) = |T_\alpha(s) - T_\beta(s)|^2 + |N_\alpha(s) - N_\beta(s)|^2.$$

Usando las ecuaciones de Frenet para α y β se tiene $\chi' = 0$ en I , luego χ es constante. Salvo un movimiento rígido directo, podemos suponer que $\alpha(s_0) = \beta(s_0), T_\alpha(s_0) = T_\beta(s_0)$ y $N_\alpha(s_0) = N_\beta(s_0)$. Así, $\chi(s_0) = 0$, luego χ se anula idénticamente. En particular, $\alpha' = \beta'$ en I . Como $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, tenemos $\alpha = \beta$ en I .

Probemos ahora la existencia. Por la discusión previa a este teorema tiene sentido empezar definiendo, dada $\kappa_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, la función (derivable) $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(s) := \int \kappa_0(s) ds. \quad (2.1)$$

Se define

$$\alpha(s) := \left(\int \cos \theta(s) ds, \int \sin \theta(s) ds \right). \quad (2.2)$$

Es una curva plana y diferenciable. Veamos que α está parametrizada por el arco.

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \Rightarrow |\alpha'(s)| = 1, \quad \forall s \in I.$$

A continuación, veamos que $\kappa(s) = \kappa_0(s)$. El diedro de Frenet de α viene dado por

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \\ N(s) &= J\alpha'(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)), \end{aligned}$$

y por tanto:

$$T'(s) = (-\theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s)) = \theta'(s) (\sin \theta(s), \cos \theta(s)).$$

Calculamos, finalmente la curvatura:

$$\kappa_0(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \theta'(s) = \kappa(s).$$

■

El enunciado del Teorema 2.3.1 motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.1 La ecuación del tipo $F(s, \kappa(s)) = 0$ que para una curva plana relaciona su curvatura y su parámetro arco se denomina *ecuación natural o intrínseca* de la curva.

A continuación, se exponen algunos ejemplos explícitos en los que podemos encontrar la parametrización por el arco de una curva plana a partir de su ecuación intrínseca empleando las fórmulas (2.1) y (2.2). Posteriormente, también estudiaremos algunos ejemplos de curvas planas destacadas realizando el cálculo de su ecuación intrínseca.

Rectas $\kappa \equiv 0$.

Aplicando el Teorema Fundamental 2.3.1, tenemos que

$$\theta(s) = \theta_0, \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

Definimos $\alpha(s)$ utilizando las fórmulas (2.2):

$$x(s) = \int \cos(\theta_0) ds = \cos(\theta_0) s,$$

$$y(s) = \int \sin(\theta_0) ds = \sin(\theta_0) s.$$

Por tanto:

$$\alpha(s) = (\cos(\theta_0)s, \sin(\theta_0)s).$$

Obtenemos así la ecuación:

$$y = \sin(\theta_0) \frac{x}{\cos(\theta_0)} = \tan(\theta_0) x, \quad (2.3)$$

que describe todas las rectas del plano salvo traslaciones y rotaciones (véase la Figura 2.10).

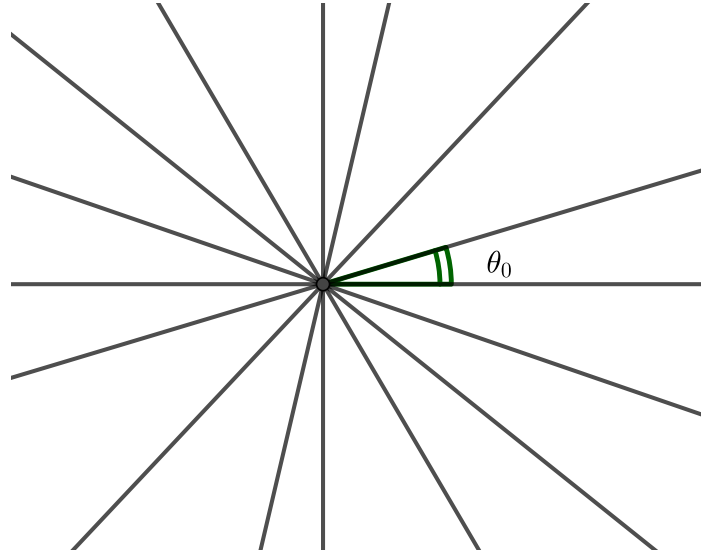


Figura 2.10: Rectas $y = \tan(\theta_0)x$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Circunferencias $\kappa \equiv \kappa_0 > 0$.

Aplicando el Teorema Fundamental 2.3.1, tenemos que

$$\theta(s) = \int \kappa_0 ds = \kappa_0 s.$$

Definimos $\alpha(s)$ utilizando las fórmulas (2.2):

$$x(s) = \int \cos(\kappa_0 s) ds = \frac{1}{\kappa_0} \sin(\kappa_0 s),$$

$$y(s) = \int \sin(\kappa_0 s) ds = \frac{-1}{\kappa_0} \cos(\kappa_0 s).$$

Por tanto:

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{\kappa_0} \sin(\kappa_0 s), \frac{-1}{\kappa_0} \cos(\kappa_0 s) \right),$$

que corresponde a una circunferencia de radio $1/\kappa_0$ centrada en $(0, 0)$:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad R = \frac{1}{\kappa_0}, \quad (2.4)$$

(véase la Figura 2.11).

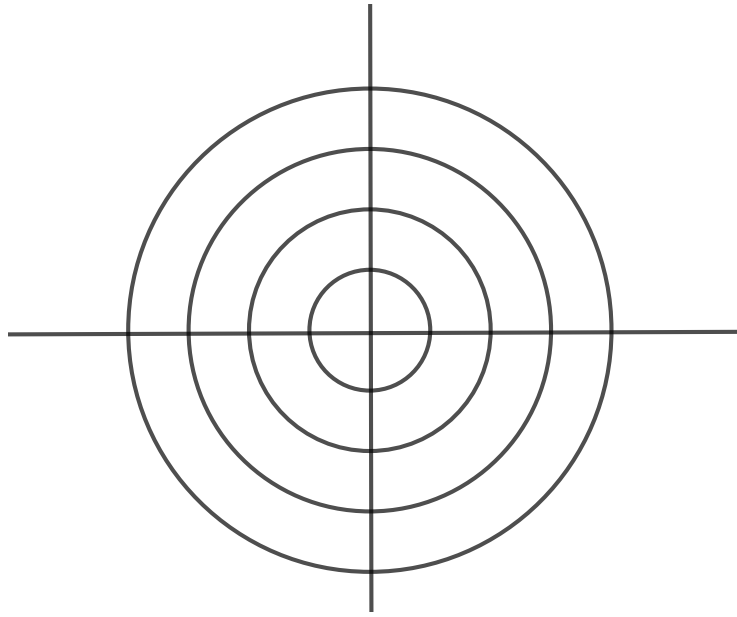


Figura 2.11: Circunferencias $x^2 + y^2 = R^2$, $R = \frac{1}{\kappa_0}$.

2.4 La catenaria

La catenaria es la forma adoptada por un cable inextensible, homogéneo, infinitamente delgado y flexible que cuelga de dos puntos, colocado en un campo gravitacional uniforme. Fue estudiada por Leibniz, Jean Bernoulli y Huygens en 1691. Galileo pensó que era un arco de parábola, pero Leibniz, Jean Bernoulli y Huygens mostraron, independientemente, que no lo era (Fuente: <http://mathcurve.com>).

En primer lugar, vamos a partir de su ecuación cartesiana (véase la Figura 2.12) dada por

$$y = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

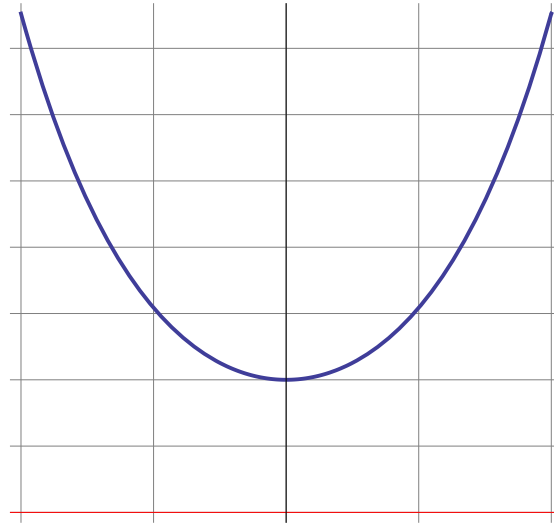


Figura 2.12: La catenaria $y = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$.

Parametrizamos como grafo $y = f(x)$, donde $f(x) = \cosh x$:

$$\alpha(x) = (x, \cosh x).$$

Calculamos el vector velocidad o vector tangente:

$$\alpha'(x) = (1, \sinh x).$$

Calculamos el vector aceleración y la velocidad de la curva en cada punto:

$$\alpha''(x) = (0, \cosh x),$$

$$|\alpha'(x)|^2 = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x.$$

Calculamos la longitud de arco:

$$s = s(x) = \int |\alpha'(x)| dx = \int \cosh x dx = \sinh x.$$

Para obtener la ecuación intrínseca, calculamos la curvatura a partir de

$$\kappa(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x))}{|\alpha'(x)|^3} = \frac{\cosh x}{\cosh^3 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{1 + s^2} = \kappa(s). \quad (2.5)$$

Por tanto:

$$\kappa(s) = \frac{1}{1 + s^2}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, puesto que $y = \cosh x$, observamos de (2.5) que también se verifica la ecuación “extrínseca”

$$\kappa(y) = \frac{1}{y^2}. \quad (2.7)$$

La ecuación intrínseca no depende de la posición de la curva, pero la ecuación “extrínseca” sí. En este caso, (2.7) corresponde a la catenaria $y = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$ (véase la Figura

2.12).

A continuación, partimos de la catenaria en otra posición (véase la Figura 2.13) dada por

$$x = -\cosh y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

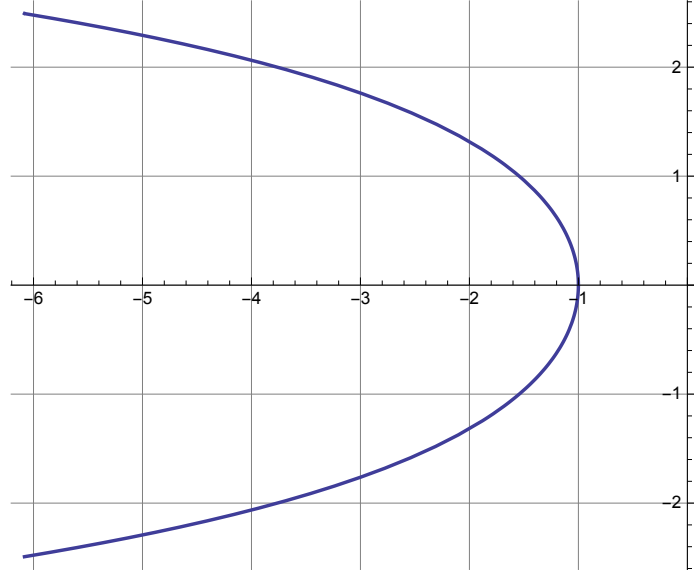


Figura 2.13: La catenaria $x = -\cosh y$, $y \in \mathbb{R}$.

Parametrizamos como grafo $x = f(y)$, donde $f(y) = -\cosh y$:

$$\alpha(y) = (-\cosh y, y).$$

Calculamos el vector velocidad:

$$\alpha'(y) = (-\sinh y, 1).$$

Calculamos el vector aceleración y la velocidad de la curva en cada punto:

$$\alpha''(y) = (-\cosh y, 0),$$

$$|\alpha'(y)|^2 = 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y.$$

Calculamos la longitud de arco para calcular la ecuación intrínseca y “extrínseca” en este caso:

$$s = s(y) = \int |\alpha'(y)| \, dx = \int \cosh y \, dy = \sinh y.$$

Por tanto:

$$\kappa(y) = \frac{\cosh y}{\cosh^3 y} = \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{1 + s^2} = \kappa(s).$$

Lógicamente, la ecuación intrínseca no depende de la posición de la curva, pero en esta posición, $x = -\cosh y$, se tiene que

$$\kappa(y) = \frac{1}{\cosh^2 y}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, partiendo de la ecuación intrínseca de la catenaria

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad s \in \mathbb{R},$$

podemos aplicar también el Teorema Fundamental 2.3.1. Así, de (2.1) se deduce que

$$\theta(s) = \int \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan s.$$

Recuperamos la curva utilizando las fórmulas (2.2):

$$x(s) = \int \cos(\arctan s) ds = \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \operatorname{arcsenh}(s),$$

$$y(s) = \int \sin(\arctan s) ds = \int \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \sqrt{1+s^2}.$$

Por tanto:

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = (\operatorname{arcsenh}(s), \sqrt{1+s^2}).$$

Observamos que obtenemos finalmente la catenaria $y = \cosh x$, ya que

$$\sinh x = s,$$

$$y = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x.$$

2.5 La curva “grim-reaper”

La curva “grim-reaper” es la forma adoptada por un cable pesado, flexible e inextensible suspendido entre dos puntos, cuando la densidad lineal (es decir, en la práctica, el grosor del cable) es proporcional a la tensión. Tal cable, por lo tanto, tiene las mismas posibilidades de romperse en un punto que en otro. Fue estudiada por Finck y Bobillier en 1826 y Coriolis en 1836 (Fuente: <http://mathcurve.com>).

En primer lugar, vamos a estudiar la curva “grim-reaper” como grafo $x = x(y)$ dado por (véase la Figura 2.14):

$$x = \log \cos y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Parametrizamos como grafo $x = f(y)$, donde $f(y) = \log \cos y$:

$$\alpha(y) = (\log \cos y, y).$$

Calculamos el vector velocidad:

$$\alpha'(y) = (-\tan y, 1).$$

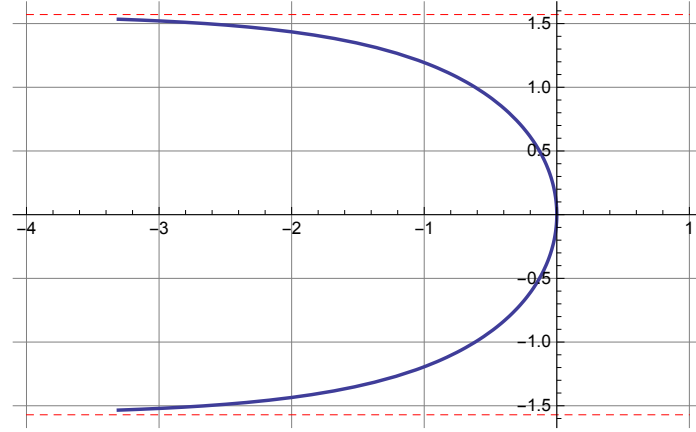


Figura 2.14: La curva “grim-reaper” $x = \log \cos y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Calculamos el vector aceleración y la velocidad de la curva en cada punto:

$$\alpha''(y) = \left(\frac{-1}{\cos^2 y}, 0 \right),$$

$$|\alpha'(y)|^2 = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Calculamos la longitud de arco para calcular la ecuación intrínseca posteriormente:

$$s = s(y) = \int |\alpha'(y)| dy = \int \sec y dy = \log(\sec y + \tan y).$$

Para obtener la ecuación intrínseca, se realizan los siguientes pasos intermedios:

$$e^s = \sec y + \tan y = \frac{1 + \sin y}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 y}}{\cos y},$$

$$(\cos y e^s - 1)^2 = 1 - \cos^2 y,$$

$$\cos y (\cos y e^{2s} - 2e^s + \cos y) = 0,$$

$$\cos y (e^{2s} + 1) = 2e^s.$$

Por tanto, se tiene que

$$\kappa(y) = \cos y = \frac{2e^s}{e^{2s} + 1} = \kappa(s).$$

Luego la ecuación intrínseca de la curva “grim-reaper” es

$$\kappa(s) = \frac{1}{\cosh s} = \operatorname{sech} s, \quad (2.9)$$

y la ecuación “extrínseca”, para el grafo $x = \log \cos y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, es

$$\kappa(y) = \cos y. \quad (2.10)$$

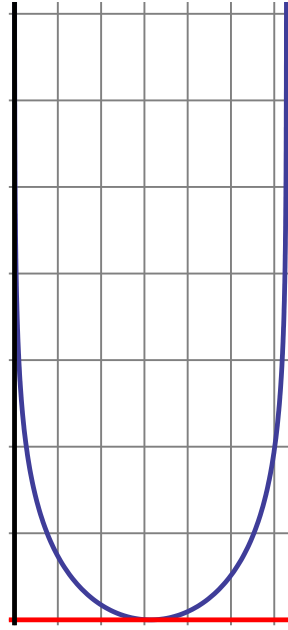


Figura 2.15: La curva “grim-reaper” $y = -\log \operatorname{sen} x$, $x \in (0, \pi)$.

A continuación, partimos de la curva “grim-reaper” en otra posición (véase la Figura 2.15):

$$y = -\log \operatorname{sen} x, \quad x \in (0, \pi).$$

Parametrizamos ahora como grafo $y = f(x)$, donde $f(x) = -\log \operatorname{sen} x$:

$$\alpha(x) = (x, -\log \operatorname{sen} x).$$

Calculamos el vector velocidad:

$$\alpha'(x) = (1, -\cot x).$$

Calculamos el vector aceleración y la velocidad de la curva en cada punto:

$$\alpha''(x) = (0, \csc^2 x),$$

$$|\alpha'(x)| = \csc x.$$

Calculamos la longitud de arco:

$$s = \int |\alpha'(x)| dx = \int \csc x dx = \log(\csc x - \cot x) = \log \tan \frac{x}{2}.$$

Para obtener ahora la ecuación intrínseca se realizan los siguientes pasos intermedios:

$$e^s = \csc x - \cot x = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x},$$

$$\operatorname{sen} x e^s = 1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},$$

$$\begin{aligned}
1 - \operatorname{sen}^2 x &= 1 - 2 \operatorname{sen} x e^s + \operatorname{sen}^2 x e^{2s}, \\
2e^s &= \operatorname{sen} x (1 + e^{2s}), \\
\operatorname{sen} x &= \frac{2e^s}{1 + e^{2s}} = \frac{1}{\cosh s}.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\kappa(s) = \operatorname{sech} s. \quad (2.11)$$

Pero la ecuación “extrínseca” para el grafo $y = -\log \operatorname{sen} x$, viene dada por

$$\kappa(y) = e^{-y}. \quad (2.12)$$

Por supuesto, la ecuación intrínseca (2.9) no depende de la posición de la curva; sin embargo, la ecuación extrínseca es diferente en función de la posición de la curva.

Por otro lado, partiendo de la ecuación intrínseca de la curva “grim-reaper”

$$\kappa(s) = \operatorname{sech} s, \quad s \in \mathbb{R},$$

podemos aplicar el Teorema Fundamental 2.3.1. Así, de (2.1) tenemos que

$$\theta(s) = \int \operatorname{sech} s \, ds = 2 \arctan e^s.$$

Recuperamos la curva utilizando las fórmulas (2.2):

$$\begin{aligned}
\cos \theta(s) &= \cos(2 \arctan e^s) = \cos^2(\arctan e^s) - \operatorname{sen}^2(\arctan e^s) = \frac{1}{1 + e^{2s}} - \frac{e^{2s}}{1 + e^{2s}} = \\
&= \frac{1 - e^{2s}}{1 + e^{2s}} = \frac{e^{-s} - e^s}{e^s + e^{-s}} = \frac{-\operatorname{senh} s}{\cosh s} = -\tanh s.
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $x(s)$ viene dada por

$$x(s) = \int -\tanh s \, ds = -\log \cosh s.$$

Y así:

$$e^{-x} = \cosh s. \quad (2.13)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \theta(s) &= \operatorname{sen}(2 \arctan e^s) = 2 \operatorname{sen}(\arctan e^s) \cos(\arctan e^s) = \frac{2e^s}{1 + e^{2s}} \\
&= \frac{2}{e^{-s} + e^s} = \frac{1}{\cosh s}.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$y(s) = \int \operatorname{sech} s \, ds = 2 \arctan e^s.$$

Se deduce que

$$\tan\left(\frac{y}{2}\right) = e^s. \quad (2.14)$$

De modo que

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = (-\log \cosh s, 2 \arctan e^s).$$

Finalmente, de (2.13) y (2.14) tenemos que

$$e^{-x} = \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2} = \frac{1 + \tan^2 \frac{y}{2}}{2 \tan \frac{y}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen} y},$$

y obtenemos la curva “grim-reaper” en la posición

$$\begin{aligned} -x &= \log \left(\frac{1}{\operatorname{sen} y} \right), \\ x &= \log \operatorname{sen} y \end{aligned} \tag{2.15}$$

(véase la Figura 2.16).

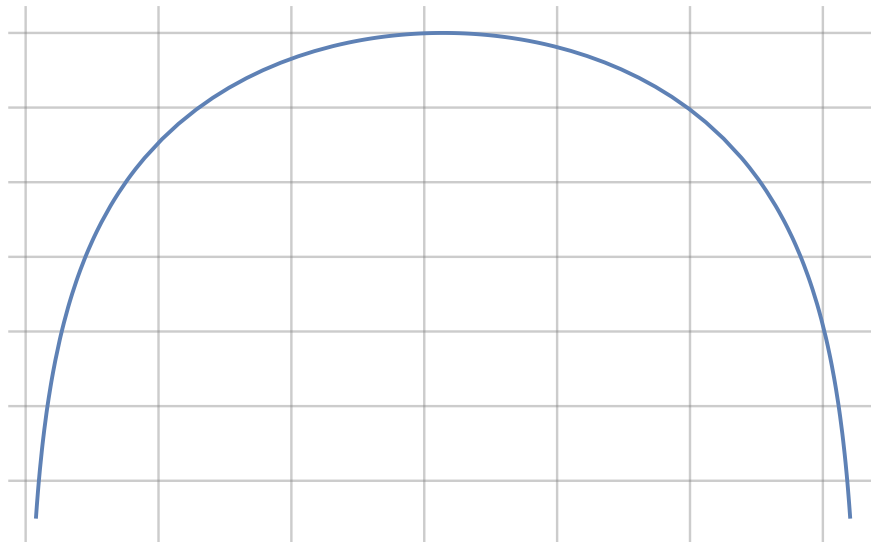


Figura 2.16: La curva “grim-reaper” $x = \log \operatorname{sen} y$, $y \in (0, \pi)$.

2.6 La cicloide

La cicloide fue estudiada por Charles Bouvelles en 1501, Mersenne y Galileo en 1599, Roberval en 1634 y Toricelli en 1644. Etimológicamente del griego *kuklos*: círculo, rueda; fue el nombre dado por Galileo. La cicloide es la curva descrita por un punto de una circunferencia de radio R , cuando esta rueda recorre sin resbalar una recta. La cicloide también se puede definir como la trayectoria de un movimiento compuesto por un movimiento rectilíneo uniforme y un movimiento circular uniforme de la misma velocidad (Fuente: <http://mathcurve.com>).

Tenemos que las ecuaciones paramétricas de la cicloide (véase la Figura 2.17) vienen dadas por

$$\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2 \frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

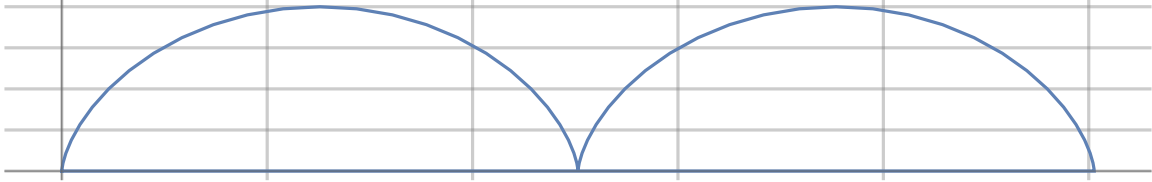


Figura 2.17: La cicloide: $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$; $t \in \mathbb{R}$, $R > 0$

A continuación, queremos calcular una ecuación extrínseca de esta curva. Tenemos la curva parametrizada por

$$\alpha(t) = (R(t - \operatorname{sen} t), R(1 - \cos t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

El vector tangente es

$$\alpha'(t) = R(1 - \cos t, \operatorname{sen} t),$$

y el vector aceleración resulta

$$\alpha''(t) = R(\operatorname{sen} t, \cos t).$$

La velocidad entonces viene dada por

$$|\alpha'(t)|^2 = R^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2R^2(1 - \cos t) = 4R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2},$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos t} = 2R \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

Aplicando la Proposición 2.2.2 obtenemos la curvatura de la cicloide. Para ello, tenemos que calcular el siguiente determinante:

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = R^2(\cos t - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = R^2(-1 + \cos t) = -2R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2},$$

además:

$$|\alpha'(t)|^3 = 2\sqrt{2}R^3(1 - \cos t)^{3/2} = 8R^3 \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}.$$

Por tanto:

$$\kappa(t) = -\frac{R^2(1 - \cos t)}{2\sqrt{2}R^3(1 - \cos t)^{3/2}} = -\frac{2R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}{8R^3 \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}},$$

$$\kappa(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos t}} = -\frac{1}{4R \operatorname{sen} t}.$$

Finalmente, ya que $y = R(1 - \cos t)$, tenemos que una ecuación extrínseca para la cicloide es dada por

$$\kappa(y) = -\frac{1}{2\sqrt{2R}\sqrt{y}}. \quad (2.17)$$

Para determinar la ecuación intrínseca de la cicloide, calculamos la longitud de arco:

$$s = s(t) = \int |\alpha'(t)| dt = \int 2R \sin \frac{t}{2} = -4R \cos \frac{t}{2}.$$

Entonces, puesto que $\kappa(t) = -\frac{1}{4R \sin t}$ y realizando el cambio $\sin \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{16R^2 - s^2}}{4R}$, tenemos que

$$\kappa(s) = -\frac{1}{\sqrt{16R^2 - s^2}}.$$

Por tanto, la ecuación intrínseca viene dada por

$$\frac{1}{\kappa^2} + s^2 = 16R^2. \quad (2.18)$$

Por otro lado, partiendo de la ecuación intrínseca de la cicloide $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{16R^2 - s^2}}$, podemos aplicar el Teorema Fundamental 2.3.1. Así, de (2.1) tenemos que

$$\theta(s) = \int \frac{ds}{\sqrt{16R^2 - s^2}} = \arcsen \frac{s}{4R}.$$

Recuperamos la curva utilizando las fórmulas (2.2):

$$x(s) = \int \cos(\arcsen \frac{s}{4R}) ds = \int \sqrt{1 - \frac{s^2}{16R^2}} ds = \frac{1}{4R} \int \sqrt{16R^2 - s^2},$$

que con ayuda de [12] resolvemos, y tenemos que

$$x(s) = \frac{s}{8R} \sqrt{16R^2 - s^2} + 2R \arcsen \frac{s}{4R}.$$

Además, tenemos que $y(s)$ viene dada por

$$y(s) = \int \sin(\theta(s)) ds = \int \frac{s}{4R} = \frac{s^2}{8R}.$$

Por tanto,

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = \left(\frac{s}{8R} \sqrt{16R^2 - s^2} + 2R \arcsen \frac{s}{4R}, \frac{s^2}{8R} \right).$$

Finalmente, observamos que realizando el cambio de parámetro $s = 4R \cos \frac{t}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \sqrt{16R^2 - 16R^2 \cos^2 \frac{t}{2}} + 2R \arcsen \left(\cos \frac{t}{2} \right), \\ x &= 2R \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} + 2R \left(-\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Y así:

$$x = R(\operatorname{sen} t - t + \pi)$$

Por otro lado, de $y = \frac{s^2}{8R}$ deducimos:

$$y = R(1 + \cos t)$$

Observamos que obtenemos finalmente la cicloide, salvo traslaciones y rotaciones (véase la Figura 2.17):

$$\begin{cases} x = R(\operatorname{sen} t - t + \pi) \\ y = R(1 + \cos t) = 2R \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

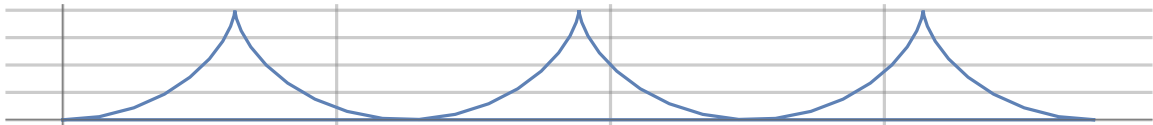


Figura 2.18: La cicloide: $x = R(\operatorname{sen} t - t + \pi)$, $y = R(1 + \cos t)$; $t \in \mathbb{R}$, $R > 0$

$$y = \cosh x, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

3. Problema de Singer

3.1 Introducción

En [10], David A. Singer consideró un problema diferente al planteado en el Teorema Fundamental 2.3.1, el cual establece que una curva $\alpha = \alpha(s)$ se determina de manera única (salvo su posición en el plano) por su curvatura dada en función de su longitud de arco ($\kappa = \kappa(s)$) a partir de las siguientes integrales:

$$\theta(s) := \int \kappa(s) ds,$$

$$x(s) = \int \cos \theta(s) ds,$$

$$y(s) = \int \sin \theta(s) ds,$$

obteniendo como resultado $\alpha(s) = (x(s), (y(s)))$.

Como ejemplos de aplicación del Teorema Fundamental 2.3.1 se puede consultar el Capítulo 2, en el cual hemos determinado rectas, circunferencias, catenarias, “grim-reapers” y cicloides, a partir de su ecuación intrínseca. En estos ejemplos las integrales involucradas son elementales, pero en la mayoría de los casos, tales curvas son imposibles de encontrar explícitamente, debido a la dificultad de resolver las integrales que aparecen en el proceso de integración anterior. Por eso, Singer planteó la siguiente pregunta:

¿Se puede determinar una curva plana si su curvatura viene dada en términos de su posición?

Teniendo en cuenta el comentario anterior, es de esperar que si la curvatura κ viene dada por una función de su posición, es decir, $\kappa = \kappa(x, y)$, la situación sea aún mas complicada.

Analíticamente se requiere resolver la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \kappa(x(t), y(t)).$$

En el artículo [10], Singer comenta un ejemplo interesante de este problema, que ocurre cuando la curvatura es proporcional a una de sus coordenadas $\kappa(x, y) = cy$. Esto es una propiedad notable de las llamadas curvas elásticas de Euler.

Tradicionalmente, una curva elástica es la solución a un problema de cálculo variacional propuesto por Daniel Bernoulli a Leonhard Euler en 1744: el de minimizar la energía de flexión de un alambre delgado e inextensible (véanse [11] y [7]). Euler, basándose en el trabajo de Bernoulli, fue el primero en caracterizar completamente la familia de curvas conocidas como elásticas (véase la Figura 3.1), y publicó un libro sobre técnicas variacionales [6].

Entre las curvas elásticas de Euler, hay una única curva cerrada con una forma similar al del número ocho y al símbolo del infinito. La curvatura de esta curva, en términos del parámetro arco, involucra funciones elípticas de Jacobi. Como observamos en la Figura 3.1, en el punto de cruce hay un punto de inflexión, y el eje x divide simétricamente la curva, con un bucle arriba y otro debajo del eje x .

Esta curva es parecida a la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 3 \sin 2\theta$ en coordenadas polares, la cual aparece explícitamente en [10] (donde la integral elíptica correspondiente se vuelve elemental para este caso especial, cuando se considera la condición $\kappa(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ o bien $\kappa(r) = r$), en la que la curvatura es justamente la distancia al origen $(0, 0)$.

En esta memoria, vamos a estudiar las curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta, en lugar de a un punto. Digamos que esta recta puede tomarse el eje x , y por tanto, la condición a estudiar es $\kappa = \kappa(y)$.

3.2 Curvas planas tales que $\kappa = \kappa(y)$

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular parametrizada por la longitud de arco s :

$$\alpha = \alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in I.$$

Por tanto, el vector tangente $\alpha'(s) = x'(s), y'(s)$ es unitario:

$$|\alpha'(s)| = 1, \quad \forall s \in I \subseteq \mathbb{R},$$

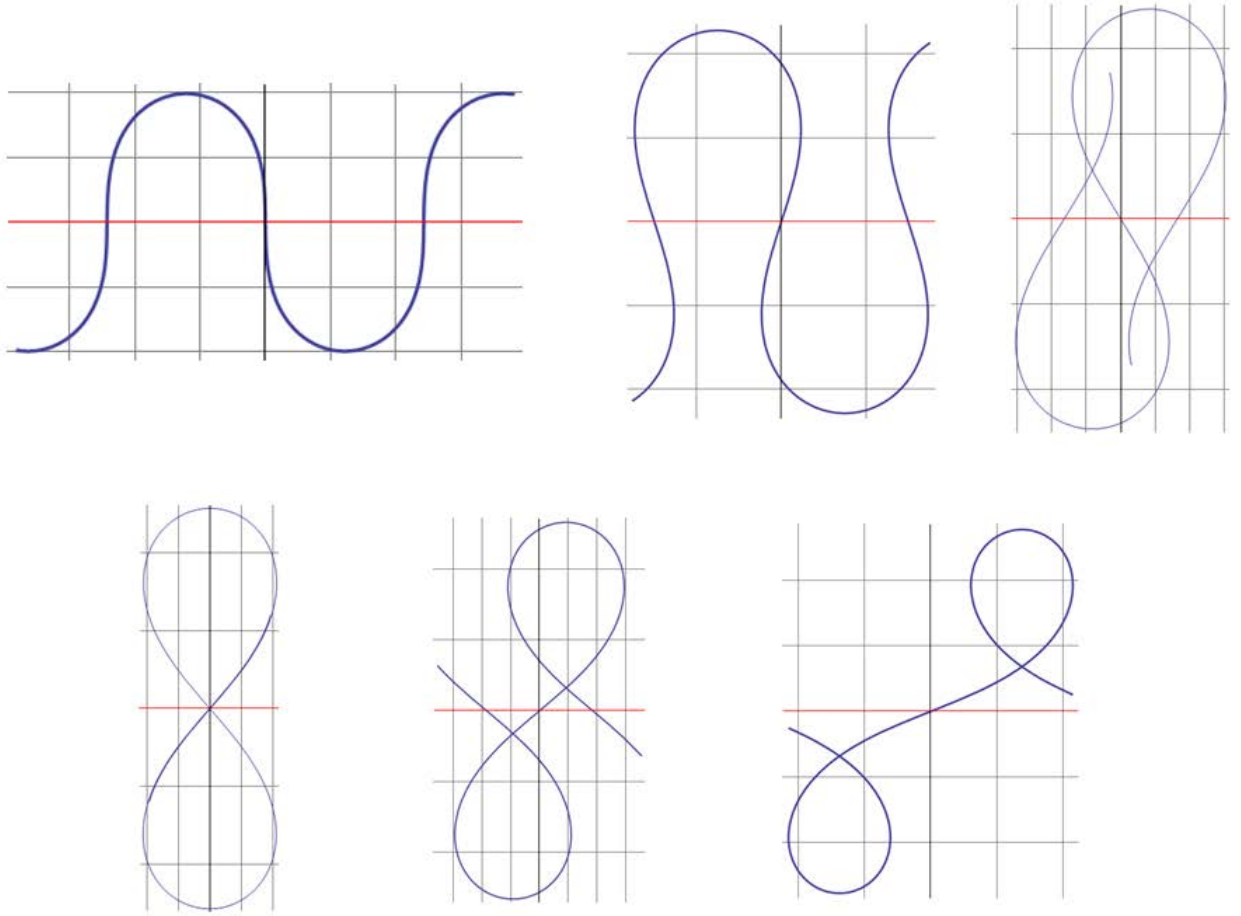


Figura 3.1: Curvas elásticas de Euler.

siendo I un intervalo abierto de la recta real $\mathbb{R}$. De ahora en adelante, se va a utilizar «'» para denotar la derivada con respecto a s . Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Escribimos $T(s) := (x'(s), y'(s))$ el vector tangente unitario a la curva α y sea $N(s) := (-y'(s), x'(s))$ el vector normal unitario, de modo que el diedro de Frenet (T, N) esta orientado positivamente.

Las ecuaciones de Frenet de α vienen dadas por (véase el Capítulo 2)

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \quad N'(s) = -\kappa(s)T(s). \quad (3.1)$$

Si denotamos $\theta = \theta(s)$ el ángulo que forma el vector tangente unitario a α con una dirección fija (es decir, $T = (\cos \theta, \sin \theta)$) para cada $s \in I$ (véase la Figura 2.3), la demostración del Teorema Fundamental 2.3.1 se resume en resolver las ecuaciones diferenciales:

$$\theta'(s) = \kappa(s), \quad x'(s) = \cos \theta(s), \quad y'(s) = \sin \theta(s). \quad (3.2)$$

Por lo tanto, una vez que se prescribe κ en términos de s , la curva se puede determinar a partir de las tres integrales que resuelven (3.2).

En el caso anterior, la curvatura de α depende de la longitud de arco s . Ahora estamos interesados en que la curvatura de α dependa de la distancia a una recta. Por tanto, es suficiente estudiar la condición $\kappa = \kappa(y)$, pues y es la distancia (con signo) al eje x .

Definimos el *momento lineal geométrico* de la curva α respecto al eje x mediante

$$\mathcal{K}(s) = -\langle T(s), (1, 0) \rangle = -\langle N(s), (0, 1) \rangle. \quad (3.3)$$

Geoméricamente, $\mathcal{K}$ controla el ángulo del diedro de Frenet de la curva respecto al eje de coordenadas. También podemos observar una interpretación física si escribimos $\mathcal{K}$ en coordenadas cartesianas. Si tenemos que $\alpha = (x, y)$, su vector tangente es $T = (x', y')$ y su vector normal es $N = (-y', x')$. Así, en el punto $\alpha(s)$ en la curva, el momento lineal geométrico $\mathcal{K}$ viene dado por

$$\mathcal{K}(s) := -x'(s). \quad (3.4)$$

Por tanto, $\kappa = \kappa(s)$ se puede describir, salvo el signo, como el momento lineal de una partícula en movimiento con velocidad unitaria y trayectoria $\alpha(s)$.

Partiendo de la definición (3.4) se tiene:

$$\mathcal{K}'(s)ds = -x''(s)ds,$$

y de las ecuaciones de Frenet de α tenemos que $T' = \kappa N$, que equivale a $x'' = -\kappa y'$. Por tanto:

$$\mathcal{K}'(s) ds = \kappa(y)y'(s) ds \Rightarrow d\mathcal{K} = \kappa(y) dy.$$

Integrando, obtenemos que

$$\mathcal{K}(y) = \int \kappa(y) dy. \quad (3.5)$$

Puesto que $\alpha(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, tenemos que $|\alpha'(s)| = 1$; entonces:

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Por tanto, de la definición (3.4) obtenemos que

$$\mathcal{K}^2 + y'^2 = 1,$$

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - \mathcal{K}^2} \quad (y' = dy/ds).$$

Integrando, siempre que y sea no constante, tenemos que

$$s = s(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(y)^2}}. \quad (3.6)$$

En caso que $y \equiv y_0$, la derivada de y se anularía, y entonces $\mathcal{K}(y)^2 \equiv 1$.

Por lo tanto, ya que $\mathcal{K} = \mathcal{K}(y)$ según (3.5), podemos hallar $y = y(s)$ invirtiendo (3.6).

Por último, de la definición (3.4), integrando de nuevo una vez conocida $y = y(s)$, obtenemos la primera componente de $\alpha(s)$ mediante:

$$x(s) = - \int \mathcal{K}(y(s)) ds. \quad (3.7)$$

Como resumen, hemos demostrado el siguiente resultado que sigue la misma línea del Teorema 3.1 en [10].

Teorema 3.2.1 Sea $\kappa = \kappa(y)$ una función continua. Entonces, el problema de determinar una curva $\alpha(s) = x(s), y(s)$, con s el parámetro arco, cuya curvatura es $\kappa(y)$, siendo y la distancia (no constante) al eje x , tiene solución mediante las tres integrales siguientes:

$$(i.) \int \kappa(y) dy = \mathcal{K}(y),$$

$$(ii.) s = s(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(y)^2}} \quad (-1 < \mathcal{K}(y) < 1),$$

de donde, invirtiendo obtenemos $y = y(s)$ (y , además, $\kappa = \kappa(s)$).

$$(iii.) x(s) = - \int \mathcal{K}(y(s)) ds.$$

Además, la curva $\alpha = \alpha(s)$ queda unívocamente determinada salvo traslaciones en la dirección del eje x .



Las dificultades principales que se pueden encontrar al llevar a cabo el algoritmo descrito en el Teorema 3.2.1 para determinar una curva plana cuya curvatura depende de la distancia a una recta ($\kappa = \kappa(y)$) son las siguientes:

1. La realización de la integral (3.6): Incluso en el caso de que $\mathcal{K}(y)$ sea un polinomio, la integral anterior (3.6) no es necesariamente inmediata. Por ejemplo, cuando $\mathcal{K}(y)$ es una ecuación de segundo grado, la integral (3.6) puede resolverse usando las funciones elípticas de Jacobi, aunque estas curvas no se van a estudiar en este Trabajo Fin de Máster.
2. La integración realizada en (3.6) nos proporciona $s = s(y)$; de aquí se tiene que despejar $y = y(s)$, pero esto no se puede obtener siempre explícitamente, aunque es lo necesario para determinar la representación analítica de la curva.
3. Incluso sabiendo explícitamente $y = y(s)$, la integración (3.7) para obtener $x(s)$ puede ser imposible de calcular utilizando funciones elementales o conocidas.

Teniendo en cuenta las dificultades explicadas en la Nota anterior, no siempre es posible obtener y explícitamente en función de s , siendo necesario este paso para poder obtener $x(s)$. Por ello, vamos a mencionar una forma alternativa de determinar $x = x(y)$ eliminando el parámetro s en el anterior proceso. Concretamente:

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(y)^2}},$$

$$dx = -\mathcal{K}(y)ds = -\frac{\mathcal{K}(y)dy}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(y)^2}}.$$

En resumen, realizando las siguientes integrales:

$$\mathcal{K}(y) = \int \kappa(y) dy, \quad (3.8)$$

$$x = x(y) = - \int \frac{\mathcal{K}(y) dy}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(y)^2}}, \quad (3.9)$$

podemos determinar el grafo $x = x(y)$.

A lo largo de la memoria, estudiaremos cinco situaciones diferentes en las que somos, al menos parcialmente, exitosos con el procedimiento descrito en el Teorema 3.2.1 y recuperaremos algunas curvas muy conocidas y descubriremos otras familias de curvas planas caracterizadas por este tipo de propiedad geométrica.

3.3 Ejemplos

A continuación, vamos a presentar dos ejemplos sencillos para testear la utilidad del Teorema 3.2.1.

3.3.1 Rectas $\kappa \equiv 0$

Si κ es constante, obviamente $\kappa = \kappa(y)$. Realizamos la integral (3.5):

$$\mathcal{K}(y) = c,$$

siendo $c \in (-1, 1)$ la constante de integración elegida.

Por consiguiente, determinamos el parámetro arco s realizando la integral (3.6):

$$s = s(y) = \frac{y}{\sqrt{1 - c^2}},$$

con $-1 < c < 1$.

A partir de la fórmula anterior, hallamos la segunda componente de α :

$$y(s) = \sqrt{1 - c^2} s.$$

Realizando la última integral (3.7), hallamos la primera componente de α :

$$x(s) = -cs.$$

En conclusión, llegamos a que la curva viene dada por

$$(x(s), y(s)) = (-cs, \sqrt{1 - c^2} s), \quad s \in \mathbb{R},$$

que son las ecuaciones paramétricas de una recta. Concretamente:

$$y = \frac{-\sqrt{1 - c^2}}{c} x.$$

Si escribimos $c = -\cos \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$, se tiene:

$$y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} x.$$

En conclusión, llegamos a que la ecuación de la recta que tenemos es (véase la Figura 3.2):

$$y = \tan \alpha x, \quad (3.10)$$

siendo $m = \tan \alpha$ su pendiente.

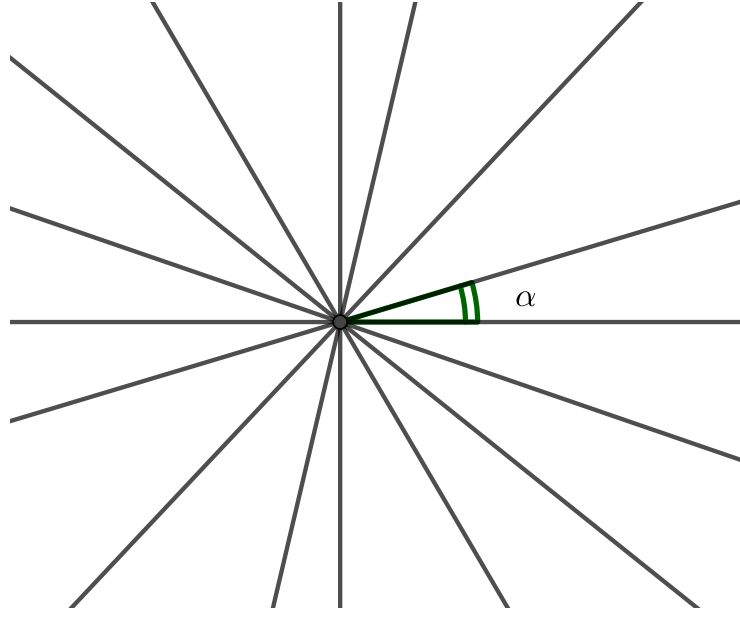


Figura 3.2: Rectas $y = \tan \alpha x$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Se obtienen de este modo aplicando el Teorema 3.2.1 todas las rectas del plano salvo traslaciones en el eje x .

3.3.2 Circunferencias $\kappa \equiv \kappa_0 > 0$

Comenzamos realizando la integral (3.5):

$$\mathcal{K}(y) = \kappa_0 y + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Por consiguiente, determinamos el parámetro arco s realizando la integral (3.6):

$$s = s(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (\kappa_0 y + c)^2}} = \frac{\arcsen(\kappa_0 y + c)}{\kappa_0}.$$

A partir de la fórmula anterior, hallamos la segunda componente de α :

$$y(s) = \frac{\sen(\kappa_0 s) - c}{\kappa_0}.$$

Realizando la última integral (3.7) hallamos la primera componente de α :

$$x(s) = - \int \left(\kappa_0 \frac{\sin(\kappa_0 s) - c}{\kappa_0} + c \right) ds,$$

$$x(s) = \frac{\cos(\kappa_0 s)}{\kappa_0}.$$

En conclusión, llegamos a la curva

$$(x(s), y(s)) = \left(\frac{\cos(\kappa_0 s)}{\kappa_0}, \frac{\sin(\kappa_0 s) - c}{\kappa_0} \right),$$

que describe las circunferencias de radio $R = \frac{1}{\kappa_0}$ y centro $(0, -c)$.

Salvo traslaciones en el eje x , recuperamos todas las circunferencias de radio $R = \frac{1}{\kappa_0}$ (véase la Figura 3.3).

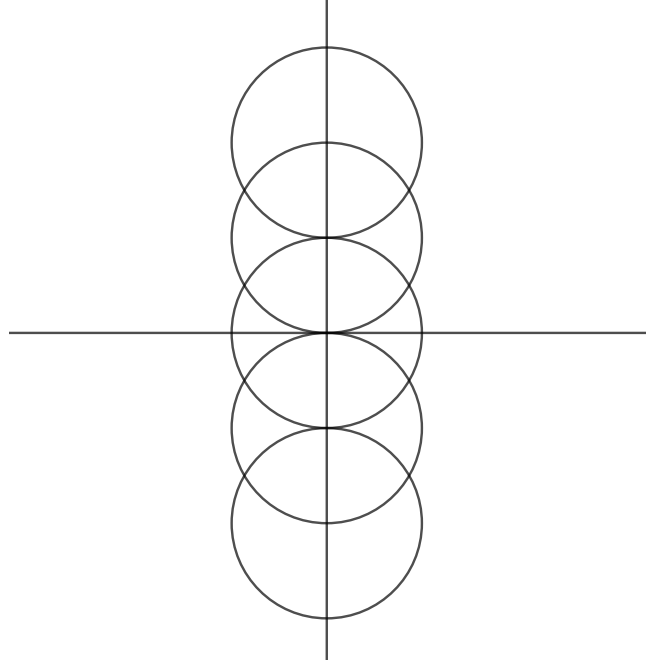


Figura 3.3: Circunferencias $x^2 + (y+c)^2 = R^2 = 1/\kappa_0^2$.

$$y = \cosh x, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

4. Familias de curvas integradas

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar diferentes familias de curvas planas que pueden obtenerse a partir de funciones elementales, utilizando el algoritmo propuesto en el Teorema 3.2.1. En particular, estudiaremos aquellas curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta, digamos el eje x , y por tanto $\kappa = \kappa(y)$. Concretamente, consideraremos los siguientes cinco casos:

- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{y^2}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{e^y}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cos^2 y}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cosh^2 y}, \lambda > 0,$
- $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\sqrt{y}}, \lambda > 0.$

4.1 Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/y^2, \lambda > 0$

En esta sección estudiaremos aquellas curvas planas cuya curvatura satisface

$$\kappa(y) = \frac{\lambda}{y^2}, \lambda > 0. \quad (4.1)$$

Salvo homotecias, puede considerarse $\lambda = 1$. Puesto que, si α es una curva plana que verifica $\kappa_\alpha = \lambda/y^2, \lambda > 0$, entonces $\kappa_{\rho\alpha} = \lambda\rho/(\rho y)^2$, para cualquier $\rho > 0$. Tomando

$\rho = 1/\lambda$ es suficiente considerar pues, el valor $\lambda = 1$.

Además, consideramos $y > 0$ puesto que y no debe anularse. Aplicando el Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\mathcal{K}(y) = \int \frac{dy}{y^2} = \frac{-1}{y} + c, \quad (4.2)$$

donde $-1 < \frac{-1}{y} + c < 1$. Por tanto, $-1 + \frac{1}{y} < c < 1 + \frac{1}{y}$; y así $c > -1$, teniendo en cuenta que $y > 0$.

Para encontrar las curvas planas $(x(s), y(s))$ tales que $\kappa(y) = 1/y^2$, tenemos en cuenta (4.2) para hallar el parámetro arco s :

$$\begin{aligned} s = s(y) &= \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{y} + c\right)^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1 + c - \frac{1}{y}} \sqrt{1 - c + \frac{1}{y}}} = \\ &= \int \frac{y dy}{\sqrt{(1+c)y-1} \sqrt{(1-c)y+1}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

y se obtiene $x(s)$ a partir de

$$x(s) = - \int \mathcal{K}(y(s)) ds, \quad (4.4)$$

con $c > -1$. La integral (4.3) se puede computar en términos de funciones elementales en todos los casos, pero solo si $c = 0$ y $c = 1$ es posible obtener y explícitamente en función de s , siendo esto absolutamente necesario para obtener $x(s)$ a través de (4.4). Por lo tanto, en principio solo consideramos los casos mencionados anteriormente debido a las dificultades descritas en la Nota de la Sección 3.2. El resto de casos se determinarán eliminando el parámetro s del algoritmo, como se detalla en la Sección 3.2.

4.1.1 Caso $\mathcal{K}(y) = -1/y$

En este primer caso, tenemos que $y > 1$. Usando (4.3), obtenemos fácilmente que

$$s = s(y) = \int \frac{y dy}{\sqrt{(y+1)(y-1)}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-1}} = \sqrt{y^2-1},$$

de donde obtenemos que

$$y(s) = \sqrt{1+s^2}.$$

De (4.4) encontramos que

$$x(s) = \int \frac{ds}{\sqrt{s^2+1}} = \operatorname{arcsenh}(s).$$

En conclusión, tenemos que las componentes de la curva vienen dadas por

$$(x(s), y(s)) = (\operatorname{arcsenh}(s), \sqrt{1+s^2}), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

de donde obtenemos que la ecuación cartesiana explícita de la misma es justamente

$$y = \cosh x.$$

Además, su ecuación intrínseca, usando (4.1) con $\lambda = 1$, viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

De hecho, esta curva es precisamente la *catenaria* (véase la Figura 4.1).

Como consecuencia del Teorema 3.2.1, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 4.1.1 La catenaria $y = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$ (véase (4.5)) es la única curva plana (salvo traslaciones en el eje x) con momento lineal $\mathcal{K}(y) = -1/y$ (y curvatura $\kappa(y) = 1/y^2$).

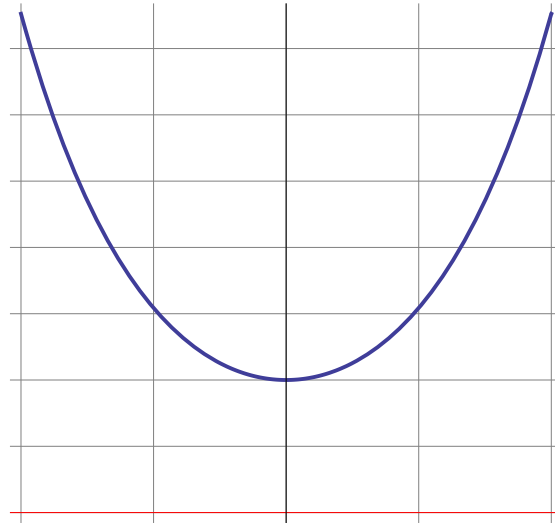


Figura 4.1: La catenaria $y = \cosh x$: $\mathcal{K}(y) = -1/y$.

4.1.2 Caso $\mathcal{K}(y) = 1 - 1/y$

En este caso, tenemos que $y \geq 1/2$. Aplicando el Teorema 3.2.1, realizamos la integral (4.3) para obtener el parámetro arco s , obteniendo que

$$\int \frac{y}{\sqrt{2y-1}} dy = \frac{y+1}{3} \sqrt{2y-1},$$

y así:

$$2y^3 + 3y^2 - 9s^2 - 1 = 0,$$

de donde, con ayuda del software “Mathematica”, obtenemos $y(s)$:

$$y(s) = \frac{1}{2} \left((1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{\frac{1}{3}}} - 1 \right). \quad (4.6)$$

Por otro lado, usando (4.4), tenemos que $x(s)$ se obtiene de

$$x(s) = -s + \int ds/y(s).$$

Teniendo en cuenta (4.6), obtenemos (con ayuda nuevamente del software “Mathematica”):

$$x(s) = -s + \frac{p(s)}{q(s)}, \quad (4.7)$$

$$p(s) = \left(-1 + (1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{\frac{1}{3}} \right) \times \\ \times \left(1944s^6 + s\sqrt{1 + 9s^2} + 324s^4(1 + 2s\sqrt{1 + 9s^2} + 12s^2(1 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})) \right),$$

$$q(s) = s(1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{\frac{2}{3}} \times \\ \times \left(1 + 324s^4 + 9s\sqrt{1 + 9s^2} + 9s^2(5 + 12s\sqrt{1 + 9s^2}) \right),$$

y además, la ecuación implícita de la misma es $9x^2 = (y - 2)^2(2y - 1)$ (véase la Sección 4.1.3). En conclusión, tenemos que la ecuación intrínseca, usando (4.1) y (4.6), es dada por

$$\kappa(s) = \frac{4}{\left((1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{\frac{1}{3}}} - 1 \right)^2},$$

$s \in \mathbb{R}$ (véase la Figura 4.2). En conclusión, hemos probado el siguiente resultado:

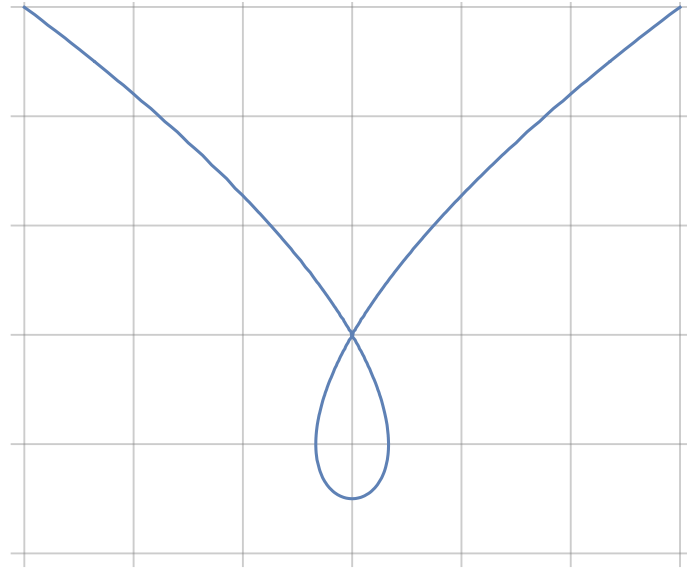


Figura 4.2: Curva con $\kappa(y) = 1/y^2$ y $\mathcal{K}(y) = -1/y + 1$.

Corolario 4.1.2 La curva $(x(s), y(s))$, $s \in \mathbb{R}$, dada por (4.7) y (4.6) es la única curva plana (salvo traslaciones en el eje x) con momento lineal $\mathcal{K}(y) = 1 - 1/y$ (y curvatura $\kappa = 1/y^2$).

A continuación, restaría estudiar el caso general $c > -1$.

4.1.3 Caso general $\mathcal{K}(y) = c - 1/y$, $c > -1$

Para este caso general, determinamos las curvas planas correspondientes haciendo uso de 3.9. A partir de (4.2), obtenemos:

$$x = x(y) = \int \frac{(\frac{1}{y} - c) dy}{\sqrt{1 - (c - \frac{1}{y})^2}} = \int \frac{(1 - cy) dy}{\sqrt{y^2 - (cy - 1)^2}} = \int \frac{(1 - cy) dy}{\sqrt{P(y)}}, \quad (4.8)$$

siendo $P(y)$ el polinomio de segundo grado dado por

$$P(y) = y^2 - (cy - 1)^2 = y^2 - c^2 y^2 + 2cy - 1 = (1 - c^2)y^2 + 2cy - 1. \quad (4.9)$$

Entonces, si $c = 1$, usando (4.8) tenemos que

$$x = \int \frac{1 - y}{\sqrt{2y - 1}} dy.$$

Con ayuda de [12], resolvemos las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1 - y}{\sqrt{2y - 1}} dy = \int \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} - \int \frac{y}{\sqrt{2y - 1}} dy; \\ \int \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} &= \sqrt{2y - 1}, \quad \int \frac{y}{\sqrt{2y - 1}} dy = \frac{y + 1}{3} \sqrt{2y - 1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Realizando algunas operaciones básicas, obtenemos la ecuación implícita de la curva:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2y - 1} - \frac{y + 1}{3} \sqrt{2y - 1}, \\ x &= \sqrt{2y - 1} \left(\frac{2 - y}{3} \right), \end{aligned}$$

y así:

$$9x^2 = (2 - y)^2(2y - 1), \quad (4.11)$$

que es la curva obtenida en la Sección 4.1.2 (véase la Figura 4.2).

Para el resto de casos ($c > -1$, $c \neq 1$), a partir de (4.2), obtenemos de (4.9) y (4.8) que

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{(1 - cy) dy}{\sqrt{(1 - c^2)y^2 + 2cy - 1}}, \\ x &= \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - c^2)y^2 + 2cy - 1}} - c \int \frac{y dy}{\sqrt{(1 - c^2)y^2 + 2cy - 1}}. \end{aligned}$$

Realizamos algunos pasos intermedios para hallar más fácilmente las integrales previas. Siendo $P(y) = (1 - c^2)y^2 + 2cy - 1$ (véase (4.9)), utilizando [12] se tiene que

$$x = -c \left(\frac{\sqrt{P(y)}}{1 - c^2} - \frac{c}{1 - c^2} \int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} \right) + \int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-c}{1-c^2} \sqrt{P(y)} + \frac{c^2}{1-c^2} \int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} + \int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = \\
&= \frac{-c}{1-c^2} \sqrt{P(y)} + \left(\frac{c^2}{1-c^2} + 1 \right) \int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene $x = x(y)$ a partir de la siguiente expresión:

$$x = \frac{-c}{1-c^2} \sqrt{P(y)} + \frac{1}{1-c^2} \int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}. \quad (4.12)$$

A continuación, se distinguen dos casos:

- Para el caso $-1 < c < 1$, utilizando (4.12) y con la ayuda de [12] tenemos:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \log \left(2\sqrt{1-c^2} \sqrt{P(y)} + 2(1-c^2)y + 2c \right).$$

En conclusión, para este caso obtenemos finalmente que, salvo una traslación en x , se tiene:

$$x(1-c^2) = -c\sqrt{P(y)} + \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \log \left(\sqrt{1-c^2} \sqrt{P(y)} + (1-c^2)y + c \right),$$

(véase la Figura 4.3).

Si $c = 0$ en la anterior expresión, resulta que

$$x = \log(\sqrt{y^2 - 1} + y), \quad e^x = \sqrt{y^2 - 1} + y, \quad (e^x - y)^2 = y^2 - 1,$$

$$2e^x y = e^{2x} + 1, \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Por tanto, efectivamente tenemos que para $c = 0$ obtenemos la ecuación explícita de la catenaria ($y = \cosh x$, véase la Figura 4.1).

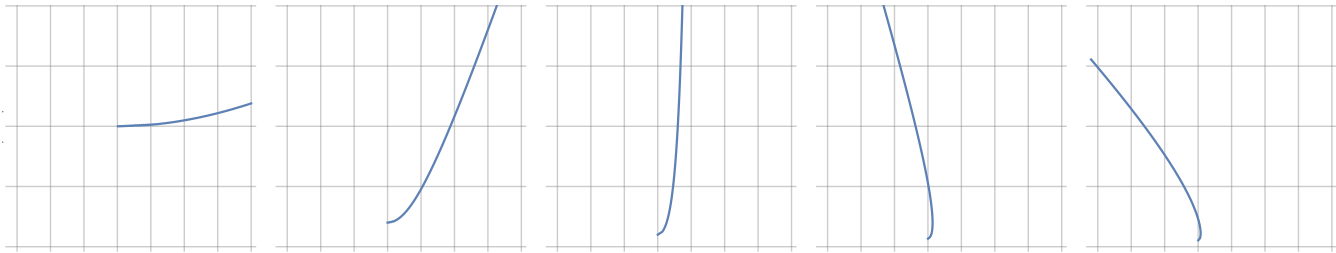


Figura 4.3: Curvas con $\kappa(y) = 1/y^2$ y $\mathcal{H}(y) = c - 1/y$, $-1 < c < 1$. En el centro, la catenaria $y = \cosh x$, $x \geq 0$, correspondiente a $c = 0$.

- Para el caso $c > 1$, con la ayuda de [12], tenemos que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{-1+c^2}} \arcsen \left(\frac{2y(1-c^2) + 2c}{\sqrt{4c^2 + 4(1-c^2)}} \right).$$

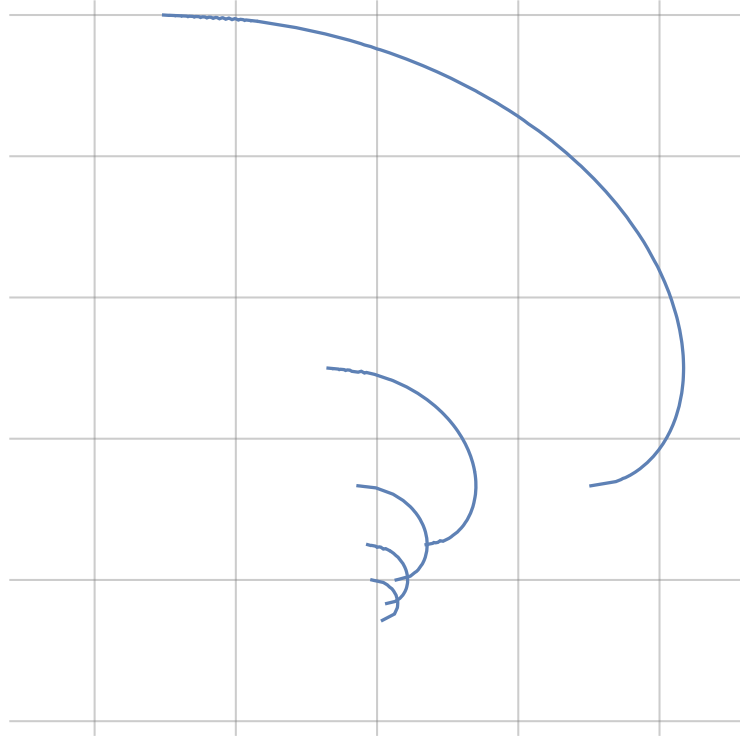


Figura 4.4: Curvas con $\kappa(y) = 1/y^2$ y $\mathcal{K}(y) = c - 1/y$, $c > 1$.

En conclusión, a partir de (4.12), para este caso obtenemos:

$$x(1 - c^2) = -c\sqrt{P(y)} - \frac{1}{\sqrt{-1 + c^2}} \arcsen((1 - c^2)y + c),$$

que nos proporciona las curvas de la Figura 4.4.

4.2 Curvas planas tales que $\kappa(\mathbf{y}) = \lambda/\mathbf{e}^y$, $\lambda > 0$

En esta sección determinamos las curvas planas cuya curvatura satisface la condición geométrica

$$\kappa(y) = \lambda e^{-y}.$$

Salvo una traslación en el eje y , es suficiente considerar $\lambda = 1$:

$$\kappa(y) = e^{-y}. \quad (4.13)$$

Aplicando el Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\mathcal{K}(y) = -e^{-y} + c, \quad (4.14)$$

donde debe cumplirse que $-1 < \mathcal{K}(y) < 1$. Por tanto:

$$-1 < \frac{-1}{e^y} + c < 1,$$

$$-1 + \frac{1}{e^y} < c < 1 + \frac{1}{e^y},$$

y así $c > -1$, teniendo en cuenta que $e^y > 0$.

Para encontrar las curvas planas $(x(s), y(s))$, tales que $\kappa(y) = e^{-y}$, tenemos en cuenta (4.14) para hallar el parámetro s :

$$s = s(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{e^y} + c\right)^2}}. \quad (4.15)$$

Además, se obtiene $x(s)$ a partir de

$$x(s) = - \int \mathcal{K}(y(s)) ds. \quad (4.16)$$

Para realizar la integración (4.15) realizamos el cambio de variable $t = e^y$, $dt = e^y dy$, obteniendo:

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{dt}{t \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{t} + c\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \left(1 - \left(\frac{-1}{t} + c\right)^2\right)}} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (-1 + ct)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - c^2 t^2 - 1 + 2ct}}. \end{aligned}$$

En resumen, se tiene que

$$s = \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - c^2)t^2 + 2ct - 1}}. \quad (4.17)$$

Esto obliga distinguir casos de acuerdo con los valores del parámetro $c > -1$. Llamaremos $P(t) = (1 - c^2)t^2 + 2ct - 1$.

4.2.1 Caso $\mathcal{K}(y) = -e^{-y} + c$, $-1 < c < 1$

Usando (4.17), obtenemos con la ayuda de [12] que

$$s = \frac{\log \left(2\sqrt{1 - c^2} \sqrt{P(t)} + 2(1 - c^2)t + 2c \right)}{\sqrt{1 - c^2}},$$

que salvo una traslación en x , podemos escribir:

$$s = \frac{\log \left(\sqrt{1 - c^2} \sqrt{P(t)} + (1 - c^2)t + c \right)}{\sqrt{1 - c^2}}, \quad t = e^y.$$

Para continuar, despejaremos t para obtener $y = y(s)$:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1 - c^2}s} &= c + t - c^2 t + \sqrt{1 - c^2} \sqrt{(1 - c^2)t^2 + 2ct - 1}, \\ (e^{\sqrt{1 - c^2}s} - c - t + c^2 t)^2 &= (1 - c^2) \left((1 - c^2)t^2 + 2ct - 1 \right), \end{aligned}$$

$$(e^{\sqrt{1-c^2}s} - c - t + c^2t)^2 = t^2 - 2c^2t^2 + 2ct - 1 + c^4t^2 - 2c^3t + c^2.$$

Tenemos que el cuadrado del primer miembro es

$$e^{2\sqrt{1-c^2}s} - 2ce^{\sqrt{1-c^2}s} - 2e^{\sqrt{1-c^2}s}t + 2c^2e^{\sqrt{1-c^2}s}t + c^2 + 2ct - 2c^3t + t^2 - 2c^2t^2 + c^4t^2 = -1.$$

Agrupando términos y despejando t , conseguimos:

$$t(-2e^{\sqrt{1-c^2}s} + 2c^2e^{\sqrt{1-c^2}s}) = -e^{2\sqrt{1-c^2}s} + 2ce^{\sqrt{1-c^2}s} - 1,$$

$$t = \frac{-e^{2\sqrt{1-c^2}s} + 2ce^{\sqrt{1-c^2}s} - 1}{-2e^{\sqrt{1-c^2}s} + 2c^2e^{\sqrt{1-c^2}s}}.$$

Simplificando, tenemos que

$$t = \frac{e^{\sqrt{1-c^2}s} - 2c + e^{-\sqrt{1-c^2}s}}{2 - 2c^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, resulta que

$$t = \frac{\cosh(\sqrt{1-c^2}s)}{1-c^2}.$$

Deshaciendo el cambio de variable $t = e^y$, obtenemos finalmente:

$$y(s) = \log \left(\frac{\cosh(\sqrt{1-c^2}s) - c}{1-c^2} \right). \quad (4.18)$$

Usamos (4.16) y (4.13) para obtener $x = x(s)$, con ayuda de [12]:

$$x(s) = -cs + \int e^{-y(s)} ds,$$

$$x(s) = -cs + \int \frac{1-c^2}{\cosh(\sqrt{1-c^2}s) - c} ds,$$

$$x(s) = -cs + (1-c^2) \int \frac{ds}{\cosh(\sqrt{1-c^2}s) - c},$$

$$x(s) = -cs + (1-c^2) \left(\frac{2}{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-c^2}} \arctan \left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}s} - c}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right).$$

Simplificando, tenemos finalmente:

$$x(s) = 2 \arctan \left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}s} - c}{\sqrt{1-c^2}} \right) - cs.$$

Recopilando, tenemos que las componentes de la curva vienen dadas por

$$(x(s), y(s)) = \left(2 \arctan \left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}s} - c}{\sqrt{1-c^2}} \right) - cs, \log \left(\frac{\cosh(\sqrt{1-c^2}s) - c}{1-c^2} \right) \right), \quad (4.19)$$

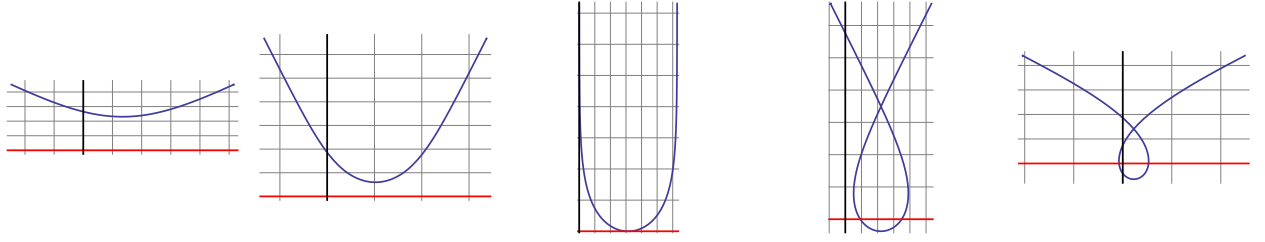


Figura 4.5: Curvas con $\kappa(y) = e^{-y}$ y $\mathcal{K} = c - e^{-y}$, $-1 < c < 1$. En el centro, la curva “grim-reaper” $y = -\log \sin x$, que corresponde con $c = 0$.

cuya ecuación intrínseca, usando (4.13), está dada por

$$\kappa(s) = \frac{1 - c^2}{\cosh(\sqrt{1 - c^2} s) - c}, s \in \mathbb{R},$$

(véase la Figura 4.5). Observamos que el caso $c = 0$ corresponde a la curva “grim-reaper”:

$$(x(s), y(s)) = (2 \arctan e^s, \log \cosh s). \quad (4.20)$$

Puede comprobarse que en (4.20) hemos deducido la parametrización por el arco del grafo:

$$(x, -\log \sin x), x \in (0, \pi).$$

En conclusión, hemos probado el siguiente resultado:

Corolario 4.2.1 La curva “grim-reaper” $y = -\log \sin x$, $0 < x < \pi$ (véase (4.20)) es la única curva plana (salvo traslaciones en la dirección del eje x) con momento lineal $\mathcal{K} = -e^{-y}$ (y curvatura $\kappa(y) = e^{-y}$).

4.2.2 Caso $\mathcal{K}(y) = -e^{-y} + 1$

Usando (4.17), obtenemos puesto que ahora $c = 1$ que

$$s = \int \frac{dt}{\sqrt{2t - 1}} = \sqrt{2t - 1},$$

de donde, despejando t se sigue que

$$t = \frac{s^2 + 1}{2}.$$

Deshaciendo el cambio de variable $t = e^y$, obtenemos finalmente que $y = y(s)$ viene dada por

$$y(s) = \log \left(\frac{s^2 + 1}{2} \right). \quad (4.21)$$

Se obtiene $x(s)$ a partir de (4.16):

$$x(s) = - \int (-e^{-y(s)} + 1) ds = -s + 2 \int \frac{ds}{s^2 + 1},$$

$$x(s) = 2 \arctan s - s.$$

En conclusión, tenemos que las componentes de la curva son

$$(x(s), y(s)) = \left(2 \arctan s - s, \log \left(\frac{s^2 + 1}{2} \right) \right), \quad (4.22)$$

cuya ecuación intrínseca, usando (4.13), viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{2}{s^2 + 1}, s \in \mathbb{R},$$

(véase la Figura 4.6). Esta curva se denomina la *alisoide*. Las alisoides son las curvas de tal manera que cuando se enrollan en una recta, el centro de curvatura de la curva en el punto de contacto describe una parábola de eje perpendicular a la recta (Fuente: <http://mathcurve.com>).

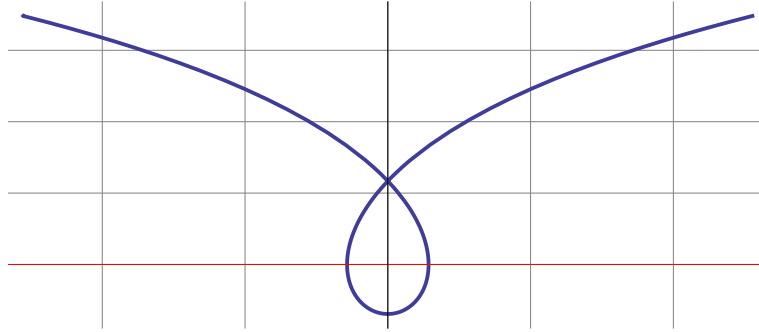


Figura 4.6: Curva con $\kappa(y) = e^{-y}$ y $\mathcal{K}(y) = 1 - e^{-y}$.

4.2.3 Caso $\mathcal{K}(\mathbf{y}) = -\mathbf{e}^{-y} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} > 1$

Usando (4.17), obtenemos en este caso con la ayuda de [12] que

$$s = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \arcsen \left(\frac{2(1 - c^2)t + 2c}{\sqrt{4c^2 + 4(1 - c^2)}} \right),$$

$$s = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \arcsen \left(\frac{2t - 2c^2t + 2c}{2} \right),$$

$$s = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \arcsen ((1 - c^2)t + c),$$

de donde, despejando t :

$$\text{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s) = -(1 - c^2)t - c,$$

$$t = \frac{\text{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s) + c}{c^2 - 1}.$$

Deshaciendo el cambio de variable $t = e^y$, obtenemos finalmente que $y = y(s)$ viene dado por

$$y(s) = \log \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s) + c}{c^2 - 1} \right). \quad (4.23)$$

Se obtiene con la ayuda de [12] $x = x(s)$ a partir de (4.16):

$$\begin{aligned} x(s) &= -cs + \int \frac{ds}{e^{y(s)}}, \\ x(s) &= -cs + \int \frac{(c^2 - 1)ds}{\operatorname{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s) + c}, \\ x(s) &= -cs + (c^2 - 1) \int \frac{ds}{\operatorname{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s) + c}, \\ x(s) &= -cs + (c^2 - 1) \left(\frac{2}{\sqrt{c^2 - 1}\sqrt{c^2 - 1}} \arctan \left(\frac{c \tan(\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 1}s) + 1}{\sqrt{c^2 - 1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Simplificando, finalmente tenemos que $x(s)$ viene dada por

$$x(s) = 2 \arctan \left(\frac{c \tan(\sqrt{c^2 - 1}s/2) + 1}{\sqrt{c^2 - 1}} \right) - cs.$$

En conclusión, tenemos que las componentes de la curva son dada por

$$(x(s), y(s)) = \left(2 \arctan \left(\frac{c \tan(\sqrt{c^2 - 1}s/2) + 1}{\sqrt{c^2 - 1}} \right) - cs, \log \left(\frac{c + \operatorname{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s)}{c^2 - 1} \right) \right), \quad (4.24)$$

cuya ecuación intrínseca, usando (4.13), viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{c^2 - 1}{c + \operatorname{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s)}, \quad s \in \left(-\frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}, \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}} \right),$$

(véase la Figura 4.7).

Como consecuencia del Teorema 3.2.1, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 4.2.2 Sea $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ una curva plana cuya curvatura satisface $\kappa(y) = e^{-y}$. Entonces, su momento lineal geométrico es $\mathcal{K}(y) = c - e^{-y}$, con $c > -1$ y α es dada, salvo traslaciones en la dirección del eje x , por (4.19) si $-1 < c < 1$, por (4.22) si $c = 1$, y por (4.24) si $c > 1$.

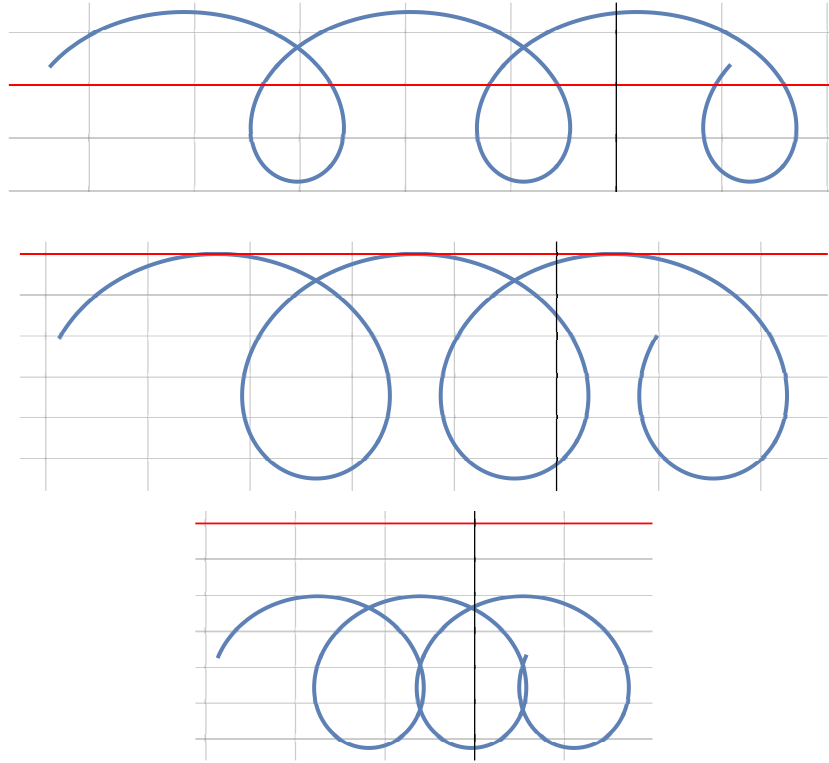
4.3 Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda / \cos^2 y$, $\lambda > 0$

En esta sección estudiaremos aquellas curvas planas cuya curvatura satisface la condición geométrica

$$\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cos^2 y}, \quad (4.25)$$

para $\lambda > 0$. Aplicando el Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\mathcal{K}(y) = \int \frac{\lambda dy}{\cos^2 y} = \lambda \tan y + c. \quad (4.26)$$

Figura 4.7: Curvas con $\kappa(y) = e^{-y}$ y $\mathcal{K} = c - e^{-y}$, $c > 1$.

Asumimos que $-\pi/2 < y < \pi/2$ y $c \in \mathbb{R}$.

Para encontrar la curvas planas $(x(s), y(s))$ tales que $\kappa(y) = 1/\cos^2 y$, tenemos en cuenta (4.26) para hallar el parámetro s :

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (\lambda \tan y + c)^2}}. \quad (4.27)$$

y se obtiene $x = x(s)$ a partir de

$$x(s) = -cs - \lambda \int \tan y(s) ds, \quad (4.28)$$

con $c \in \mathbb{R}$. Para realizar las integraciones (4.27) y (4.28) tenemos que tener en cuenta los problemas descritos la Nota de la Sección 3.2. Por ello, tan solo vamos a determinar la curva plana correspondiente al caso $c = 0$. En este caso, para realizar la integral (4.27), seguimos los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \lambda^2 \tan^2 y}} = \int \frac{\cos y}{\sqrt{\cos^2 y - \lambda^2 \sin^2 y}} dy = \int \frac{\cos y}{\sqrt{1 - \sin^2 y - \lambda^2 \sin^2 y}} dy, \\ s &= \int \frac{\cos y}{\sqrt{1 - (1 + \lambda^2) \sin^2 y}} dy. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $t = \sin y$ y tenemos que

$$s = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - (1 + \lambda^2)t^2}}.$$

Resolviendo la integral anterior, conseguimos que

$$s = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \arcsen(\sqrt{1+\lambda^2}t).$$

Así, $y(s)$ viene dada por

$$y(s) = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)\right). \quad (4.29)$$

Usando (4.28), obtenemos:

$$x(s) = -\lambda \int \tan\left(\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)\right)\right) ds.$$

Teniendo en cuenta que

$$\tan(\arcsen x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

tenemos que resolver la siguiente integral:

$$\begin{aligned} x(s) &= -\lambda \int \frac{\sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)}{\sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)\right)^2}} ds = \\ &= \int \frac{\sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)}{\sqrt{1+\lambda^2 - \sen^2(\sqrt{1+\lambda^2}s)}} ds = \int \frac{\sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)}{\sqrt{\lambda^2 + \cos^2(\sqrt{1+\lambda^2}s)}} ds. \end{aligned}$$

Para resolver la integral anterior, hacemos el cambio de variable

$$t = \cos(\sqrt{1+\lambda^2}s),$$

$$dt = -\sqrt{1+\lambda^2} \sen(\sqrt{1+\lambda^2}s) ds.$$

Entonces, tenemos la integral a resolver siguiente:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{-\sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{\lambda^2 + t^2}} &= \frac{1}{-\sqrt{1+\lambda^2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 + t^2}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \log(t + \sqrt{\lambda^2 + t^2}). \end{aligned}$$

Deshacemos el cambio de variable ($t = \cos(\sqrt{1+\lambda^2}s)$):

$$x(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \log\left(\cos(\sqrt{1+\lambda^2}s) + \sqrt{\lambda^2 + \cos^2(\sqrt{1+\lambda^2}s)}\right). \quad (4.30)$$

En conclusión, tenemos que las componentes de la curva vienen dada por

$$\begin{aligned} x(s), y(s) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \log\left(\cos(\sqrt{1+\lambda^2}s) + \sqrt{\lambda^2 + \cos^2(\sqrt{1+\lambda^2}s)}\right), \\ &\quad \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sen(\sqrt{1+\lambda^2}s)\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Además, su ecuación intrínseca, usando (4.25), viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{\lambda(1 + \lambda^2)}{\lambda^2 + \cos^2(\sqrt{1 + \lambda^2}s)}, s \in \left(\frac{-\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right),$$

(véase la Figura 4.8). Como consecuencia del Teorema 3.2.1, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 4.3.1 Dada $\lambda > 0$, la curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in (\frac{-\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}})$, dada por (4.31), es la única curva plana (salvo traslaciones en la dirección del eje x) con momento lineal $\mathcal{K}(y) = \lambda \tan y$ (y curvatura $\kappa(y) = \lambda / \cos^2 y$).

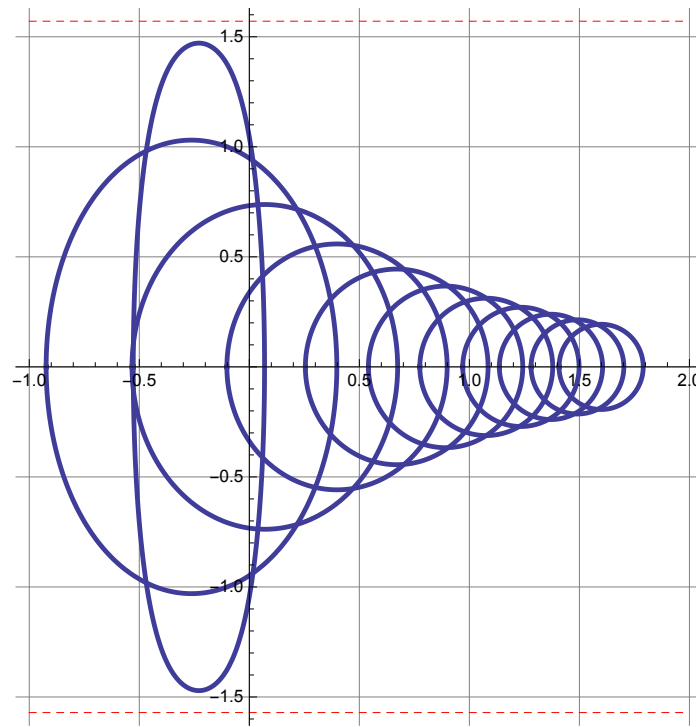


Figura 4.8: Curvas con $\kappa(y) = \lambda / \cos^2 y$ y $\mathcal{K} = \lambda \tan y$, $\lambda > 0$.

4.4 Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda / \cosh^2 y$, $\lambda > 0$

En esta sección estudiaremos aquellas curvas planas cuya curvatura satisface la condición geométrica

$$\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cosh^2 y}, \lambda > 0. \quad (4.32)$$

Aplicando el Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\mathcal{K}(y) = \int \frac{\lambda dy}{\cosh^2 y} = \lambda \tanh y + c, \quad (4.33)$$

donde $-(1+\lambda) < c < 1+\lambda$.

Para encontrar las curvas planas $(x(s), y(s))$ tales que $\kappa(y) = \frac{\lambda}{\cosh^2 y}$, tenemos en cuenta (4.33) para hallar el parámetro arco s :

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (\lambda \tanh y + c)^2}}, \quad (4.34)$$

y se obtiene $x(s)$ a partir de

$$x(s) = -cs - \lambda \int \tanh y(s) ds, \quad (4.35)$$

con $c \in (-(1+\lambda), 1+\lambda)$. Pero, como en el apartado anterior, tan solo vamos a poder considerar la constante de integración $c = 0$ para que la realización de las integraciones (4.34) y (4.35) se puedan computar en términos de funciones elementales.

Para calcular la integral (4.34), se tiene:

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{\cosh y}{\sqrt{\cosh^2 y - \lambda^2 \sinh^2 y}} dy = \int \frac{\cosh y}{\sqrt{1 + \sinh^2 y - \lambda^2 \sinh^2 y}} dy = \\ &= \int \frac{\cosh y}{\sqrt{1 + (1 - \lambda^2) \sinh^2 y}} dy. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $t = \sinh y$, tenemos:

$$s = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + (1 - \lambda^2)t^2}}, \quad (4.36)$$

siendo necesario distinguir casos de acuerdo con los valores de λ .

4.4.1 Caso $\mathcal{K}(y) = \lambda \tanh y$, $0 < \lambda < 1$

En este primer caso, usando (4.36) con la ayuda de [12], tenemos que

$$s = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arcsenh}(\sqrt{1 - \lambda^2} t).$$

Despejando t , obtenemos:

$$t = \frac{\sinh(\sqrt{1 - \lambda^2} s)}{\sqrt{1 - \lambda^2}},$$

y deshaciendo el cambio de variable:

$$y(s) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sinh(\sqrt{1 - \lambda^2} s)\right). \quad (4.37)$$

Usando (4.35), conseguimos $x(s)$:

$$x(s) = -\lambda \int \tanh\left(\operatorname{arcsenh}\left(\frac{\sinh(\sqrt{1 - \lambda^2} s)}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\right)\right) ds.$$

Para resolver la integral anterior, tenemos en cuenta que

$$\tanh(\operatorname{arcsen} h x) = \frac{\sinh(\operatorname{arcsen} h x)}{\sqrt{1 + (\sinh(\operatorname{arcsen} h x))^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Si tomamos $x = \frac{\sinh(\sqrt{1-\lambda^2}s)}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, obtenemos la siguiente integral a resolver para $x = x(s)$:

$$x(s) = -\lambda \int \frac{\frac{\sinh(\sqrt{1-\lambda^2}s)}{\sqrt{1-\lambda^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{1-\lambda^2}s)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2}} ds = -\lambda \int \frac{\sinh(\sqrt{1-\lambda^2}s)}{\sqrt{-\lambda^2 + \cosh^2(\sqrt{1-\lambda^2}s)}} ds.$$

Realizamos ahora el siguiente cambio de variable:

$$t = \cosh(\sqrt{1-\lambda^2}s),$$

$$dt = \sqrt{1-\lambda^2} \sinh(\sqrt{1-\lambda^2}s) ds.$$

Así:

$$x(s) = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \log(t + \sqrt{t^2 - \lambda^2}).$$

Finalmente, deshaciendo el anterior cambio de variable, tenemos $x = x(s)$:

$$x(s) = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \log \left(\cosh(\sqrt{1-\lambda^2}s) + \sqrt{\cosh^2(\sqrt{1-\lambda^2}s) - \lambda^2} \right). \quad (4.38)$$

En conclusión, tenemos que las componentes de la curva son

$$x(s), y(s) = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \log \left(\cosh(\sqrt{1-\lambda^2}s) + \sqrt{\cosh^2(\sqrt{1-\lambda^2}s) - \lambda^2} \right),$$

$$\operatorname{arcsen} h \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \sinh(\sqrt{1-\lambda^2}s) \right); \quad (4.39)$$

cuya ecuación intrínseca, usando (4.32), viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{\cosh^2(\sqrt{1-\lambda^2}s) - \lambda^2}, \quad s \in \mathbb{R}$$

(véase la Figura 4.9).

4.4.2 Caso $\mathcal{K}(\mathbf{y}) = \tanh \mathbf{y}$

En este caso, usando 4.34, tenemos que

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \tanh^2 y}} = \int \cosh y \, dy.$$

Entonces, obtenemos que

$$s = \sinh y,$$

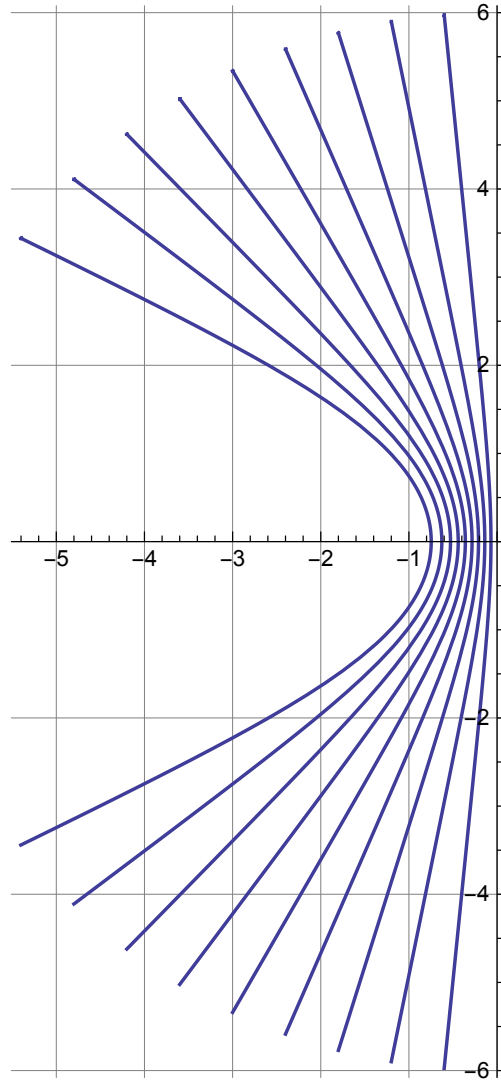


Figura 4.9: Curvas con $\kappa(y) = \lambda / \cosh^2 y$ y $\mathcal{H}(y) = \lambda \tanh y$, $0 < \lambda < 1$.

y, por lo tanto, finalmente:

$$y = \operatorname{arcsenh} s.$$

Usando (4.35), tenemos:

$$\begin{aligned} x(s) &= - \int \tanh(\operatorname{arcsenh} s) \, ds, \\ x(s) &= - \int \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \, ds = -\sqrt{1+s^2}. \end{aligned}$$

En conclusión, tenemos que las componentes de la curva vienen dadas por

$$(x(s), y(s)) = (-\sqrt{1+s^2}, \operatorname{arcsenh} s), \quad (4.40)$$

cuya ecuación intrínseca, usando (4.32), viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

Entonces, obtenemos la catenaria como grafo $x = -\cosh y$, $y \in \mathbb{R}$ (véase la Figura 4.10). En conclusión, hemos probado el siguiente resultado:

Corolario 4.4.1 La catenaria $x = -\cosh y$, $y \in \mathbb{R}$ (véase (4.40)) es la única curva plana (salvo traslaciones en la dirección del eje x) con momento lineal $\mathcal{K}(y) = \tanh y$ (y curvatura $\kappa(y) = 1/\cosh^2 y$).

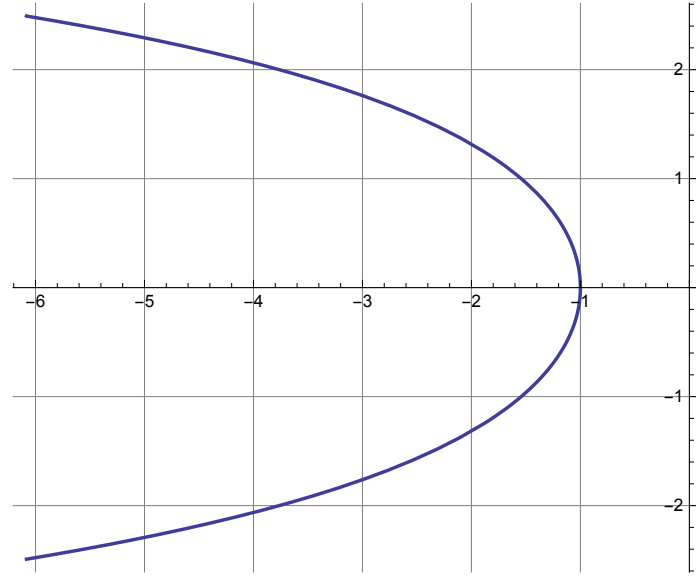


Figura 4.10: La catenaria $x = -\cosh y$, $y \in \mathbb{R}$: $\kappa(y) = 1/\cosh^2 y$ y $\mathcal{K}(y) = \tanh y$.

4.4.3 Caso $\mathcal{K}(y) = \lambda \tanh y$, $\lambda > 1$

En este caso, usando (4.36) puesto que $\lambda > 1$, tenemos que

$$s = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + (1 - \lambda^2)t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \arcsen(\sqrt{\lambda^2 - 1} t).$$

Despejamos la variable t :

$$t = \frac{\sen(\sqrt{\lambda^2 - 1} s)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}.$$

Deshaciendo el cambio de variable, $t = \senh y$, obtenemos:

$$y(s) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \sen(\sqrt{\lambda^2 - 1} s) \right). \quad (4.41)$$

Usando (4.35), tenemos que

$$\begin{aligned} x(s) &= -\lambda \int \tanh \left(\operatorname{arcsenh} \left(\frac{\sen(\sqrt{\lambda^2 - 1} s)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) \right) ds = \\ &= -\lambda \int \frac{\sen(\sqrt{\lambda^2 - 1} s)}{\sqrt{\lambda^2 - 1 + \sen^2(\sqrt{\lambda^2 - 1} s)}} ds = -\lambda \int \frac{\sen(\sqrt{\lambda^2 - 1} s)}{\sqrt{\lambda^2 - \cos^2(\sqrt{\lambda^2 - 1} s)}} ds. \end{aligned}$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$t = \cos(\sqrt{\lambda^2 - 1}s),$$

$$dt = -\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin(\sqrt{\lambda^2 - 1}s) ds,$$

tenemos que

$$x(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \int \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \arcsen\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

Deshaciendo el cambio de variable anterior, obtenemos finalmente:

$$x(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \arcsen\left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda^2 - 1}s)}{\lambda}\right). \quad (4.42)$$

En resumen, tenemos que las componentes de la curva son:

$$x(s), y(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \arcsen\left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda^2 - 1}s)}{\lambda}\right),$$

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \sin(\sqrt{\lambda^2 - 1}s)\right); \quad (4.43)$$

cuya ecuación intrínseca, usando (4.32), viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 - \cos^2(\sqrt{\lambda^2 - 1}s)}, s \in \left(\frac{-\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right),$$

(véase la Figura 4.11).

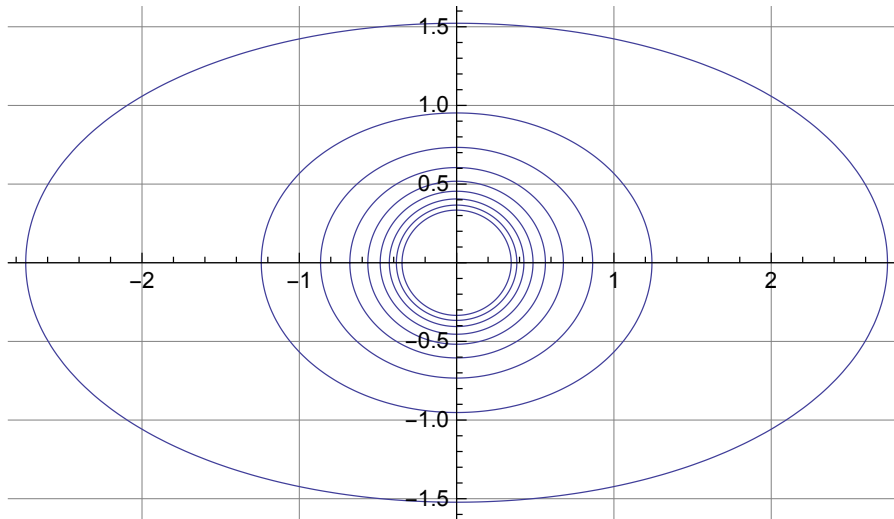


Figura 4.11: Curvas con $\kappa(y) = \lambda / \cosh^2 y$ y $\mathcal{H}(y) = \lambda \tanh y$, $\lambda > 1$.

Como consecuencia del Teorema 3.2.1, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 4.4.2 Sea $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ una curva plana con momento lineal $\mathcal{K}(y) = \lambda \tanh y$ (y curvatura $\kappa(y) = \lambda/\cosh^2 y$, $\lambda > 0$). Entonces, salvo traslaciones en la dirección del eje x , α es dada por (4.39) si $\lambda \in (0, 1)$, por (4.40) si $\lambda = 1$ y por (4.43) si $\lambda > 1$.

4.5 Curvas planas tales que $\kappa(y) = \lambda/\sqrt{y}$, $\lambda > 0$

En esta sección estudiaremos aquellas curvas planas cuya curvatura satisface la condición geométrica

$$\kappa(y) = \frac{\lambda}{\sqrt{y}}, \quad \lambda > 0, \quad y > 0, \quad (4.44)$$

para $\lambda > 0$.

Aplicando el Teorema 3.2.1, consideramos el momento lineal geométrico

$$\mathcal{K}(y) = \lambda \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\lambda \sqrt{y}.$$

Entonces, tenemos que el parámetro arco s viene dado por

$$s = s(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - 4\lambda^2 y}} = -\frac{\sqrt{1 - 4\lambda^2 y}}{2\lambda^2},$$

con $y < 1/4\lambda^2$.

De donde, $y(s)$ es dada finalmente por

$$y(s) = \frac{1 - 4\lambda^4 s^2}{4\lambda^2}, \quad (4.45)$$

con $|s| < 1/2\lambda$.

Combinando (4.45) y (4.44), obtenemos la ecuación intrínseca

$$\kappa(s) = \frac{2\lambda^2}{\sqrt{1 - 4\lambda^4 s^2}},$$

que conduce igualmente a la expresión:

$$\frac{1}{\kappa(s)^2} + s^2 = \frac{1}{4\lambda^4},$$

que corresponde a la cicloide. Su ecuación intrínseca es dada por $1/\kappa(s)^2 + s^2 = 16R^2$. Por lo tanto, hemos obtenido la cicloide de radio $R = 1/8\lambda^2$.

Se obtiene ahora $x(s)$ a partir de

$$x(s) = - \int \mathcal{K}(y(s)) ds,$$

$$x(s) = - \int \sqrt{1 - 4\lambda^4 s^2} ds.$$

Con ayuda de [12] resolvemos la anterior integral, y tenemos que

$$x(s) = -\frac{1}{4\lambda^2} \left(2\lambda^2 s \sqrt{1 - 4\lambda^4 s^2} + \arcsen(2\lambda^2 s) \right). \quad (4.46)$$

A continuación, si realizamos el cambio $s = \frac{\cos(t/2)}{2\lambda^2}$, teniendo en cuenta que $R = \frac{1}{8\lambda^2}$, obtenemos:

$$x = -\frac{1}{4\lambda^2} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \sen\left(\frac{t}{2}\right) + \arcsen\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \right),$$

$$x = -\frac{1}{4\lambda^2} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \sen\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$x = -\frac{1}{8\lambda^2} (\sen t - t + \pi),$$

y así

$$x = -R(\sen t - t + \pi).$$

Por otro lado, de (4.45), deducimos:

$$y = \frac{1 - 4\lambda^4 \frac{\cos^2(t/2)}{4\lambda^4}}{4\lambda^2} = \frac{\sen^2 \frac{t}{2}}{1/2R} = R(1 - \cos t).$$

Finalmente la curva que resulta de aplicar el Teorema 3.2.1 es la cicloide de radio $R = \frac{1}{8\lambda^2}$, salvo una traslación en la dirección del eje x (véase la Figura 4.12):

$$\begin{cases} x = R(t - \sen t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.47)$$

Como consecuencia del Teorema 3.2.1, tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 4.5.1 La cicloide de radio $R > 0$ (véase (4.47)) es la única curva plana (salvo traslaciones en la dirección del eje x) con momento lineal geométrico $\mathcal{K}(y) = \sqrt{y/2R}$ (y curvatura $\kappa(y) = \frac{1}{2\sqrt{2Ry}}$).

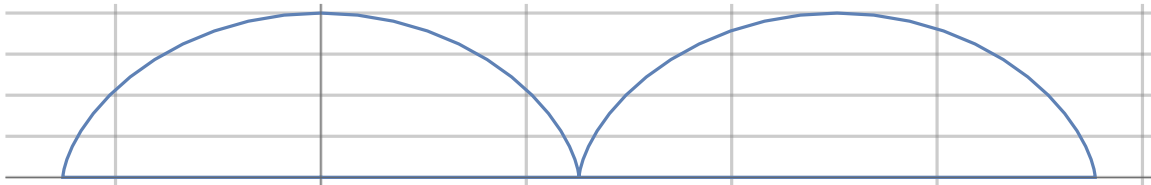
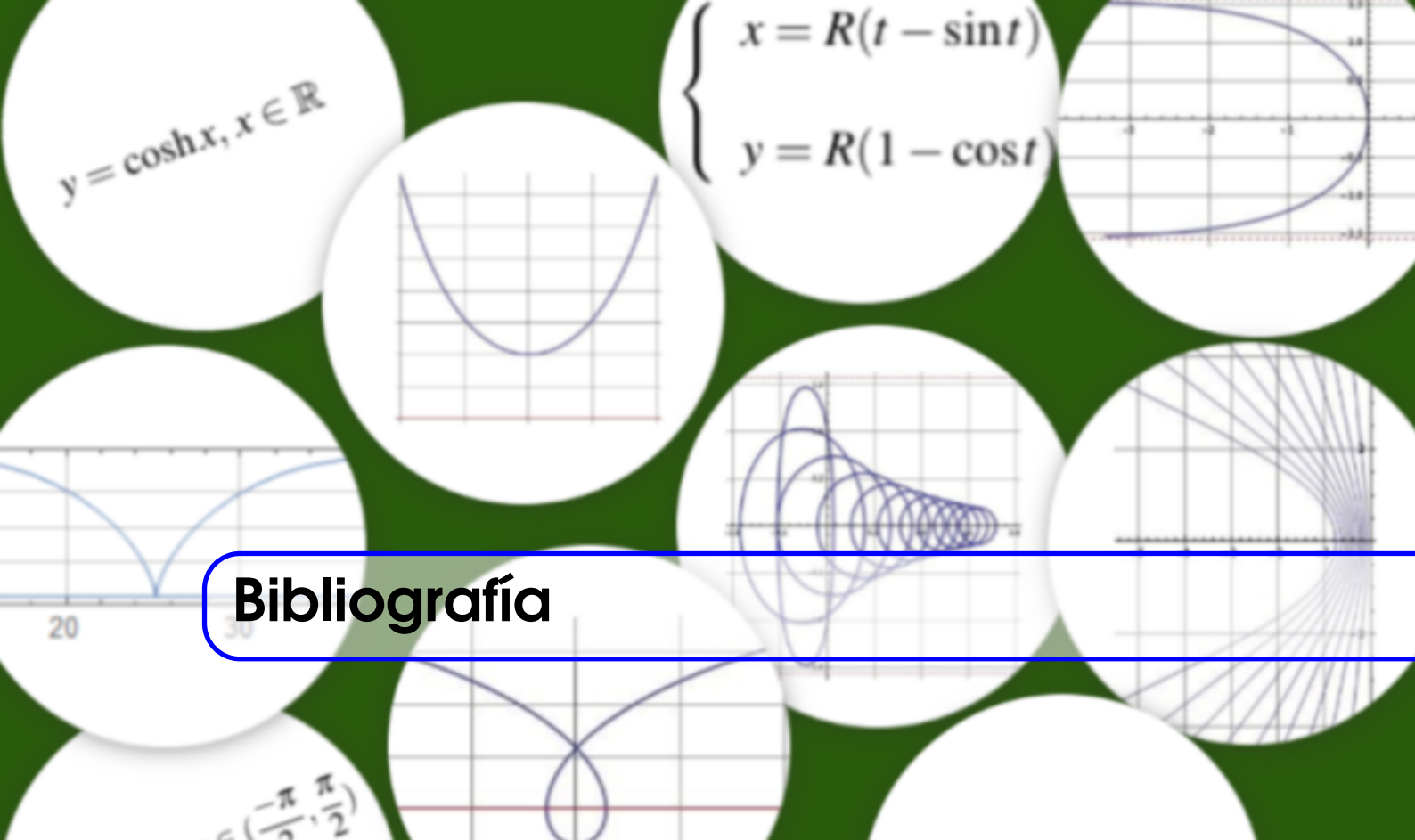


Figura 4.12: La cicloide de radio $R > 0$: $\mathcal{K}(y) = \sqrt{y/2R}$.

The background features a collage of various mathematical plots and formulas. In the top left, a circle contains the formula $y = \cosh x, x \in \mathbb{R}$. To its right, another circle shows a system of parametric equations:
$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$
. Below this, a circle displays a parabolic curve on a grid. To the right of the parabola, a circle shows a curve resembling a cardioid. Further right, a circle contains a series of concentric, slightly offset circles. In the bottom left, a circle shows a curve with a cusp, labeled with the interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Other circles contain various other curves and grid plots. The word "Bibliografía" is centered in a blue-outlined box.

Bibliografía

Referencias bibliográficas.

- [1] Castro I. and Castro-Infantes I., *Plane curves with curvature depending on distance to a line*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016) 77–97.
- [2] Castro I., Castro-Infantes I. and Castro-Infantes J., *New plane curves with curvature depending on distance from the origin*, Mediterr. J. Math. **14** (2017) 108.
- [3] Castro I., Castro-Infantes I. and Castro-Infantes J., *Curves in Lorentz-Minkowski plane: elasticae, catenaries and grim-reapers*, Open Math. **16** (2018) 747–766.
- [4] Castro I., Castro-Infantes I. and Castro-Infantes J., *Curves in Lorentz- Minkowski plane with curvature depending on their position*, Preprint, arXiv: 1806.09187.
- [5] Do Carmo, M. P., *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial (1990).
- [6] Euler L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Springer Science & Business Media **1** (1952).
- [7] Langer J. and Singer D., *The total squared curvature of closed curves*, J. Diff. Geom. **20** (1984) 1–22.
- [8] Mladenov I., Hadzhilazova M., Djondjorov P. and Vassilev V., *On the generalized Sturmian spirals*, C. R. Acad. Sci. Bulg. **64** (2011) 633–640.
- [9] Marinov P., Hadzhilazova M. and Mladenov I., *Elastic Sturmian spirals*, C. R. Acad. Sci. Bulg. **67** (2014) 167–172.

- [10] Singer D., *Curves whose curvature depends on distance from the origin*, Amer. Math. Monthly **106** (1999) 835–841.
- [11] Singer D., *Lectures on elastic curves and rods*, Curvature and variational modelling in Physics and Biophysics, AIP Conf. Proc. vol. **1002** (2008) 3–32.
- [12] Spiegel, Murray R. and Lorenzo Abellanas., *Series schaum: formulas y tablas de matematica aplicada*.

Webgrafía y otras referencias.

Para la realización de este trabajo se ha utilizado documentación aportada en el Máster Universitario en Matemáticas y otros documentos descargados. Los materiales utilizados han sido:

- Documentación aportada por el tutor Prof. D. Ildefonso Castro López de la Universidad de Jaén.
- Documentación descargada de la Universidad de Granada del Prof. D. Joaquín Pérez Muñoz “Curvas y Superficies” (2016).
- Utilización del software matemático “GeoGebra”.
- https://webs.um.es/pherrero/Geo_dif/curvas2.pdf
- <https://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/raizCyS.pdf>
- <http://mathcurve.com>