Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD

Universidad de Jaén

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES. APLICACIONES

Alumno: Carlos Javier Cuesta Cobo

Julio, 2020

ÍNDICE

RESUMEN

Las matemáticas se encuentran presentes en los ámbitos más cotidianos de la vida y se sirven de ellas para dar explicación a conceptos que son necesarios en cada caso. En la Economía se utilizan para entender conceptos como la relación oferta-demanda, tipos de interés y presupuestos entre otros. En este trabajo, utilizamos las ecuaciones diferenciales, desde un nivel básico, para resolver cuestiones económicas, como la evolución del beneficio de una empresa o la gestión de un inventario.

Trabajaremos con los métodos de resolución de problemas de valores iniciales más conocidos, como son los métodos de Euler, Taylor y Runge-Kutta, con el fin de comprender su funcionamiento y tratar de explicarlas en el ámbito económico, demostrando así, el dinamismo de las matemáticas y la conexión entre ambas ciencias, Matemáticas y Economía.

ABSTRACT

Mathematics is there in the most everyday areas of life and they are used to explain concepts that are necessary in each case. In the Economy they are used to understand concepts such as the supply-demand relationship, interest rates and budgets among others. In this paper, we use differential equations, from a basic level, to solve economic issues, such as the evolution of the benefit of a company or the management of an inventory.

We are going to work with the best-known methods of solving initial value problems, such as the methods of Euler, Taylor and Runge-Kutta, in order to understand their operation and find practical applications in the economic field, demonstrating the dynamism of mathematics and the connection between both sciences, mathematics and economics.

1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Las ecuaciones diferenciales nacen prácticamente con la aparición del Cálculo. Los historiadores señalan que el primero en usar el término “diferentialis” fue Leibniz en 1676, para mostrar una relación entre las diferenciales *dx* y *dy* y dos variables *x* e *y*.

Igualmente hay que recalcar que las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecieron durante la polémica Newton-Leibniz, cuando Newton le envió este anagrama a Leibniz “*6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x* “que significa, “Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa” y que, en lenguaje matemático contemporáneo, decía: “*Es útil resolver ecuaciones diferenciales*”.

Newton y Leibniz

También se piensa que la fecha de aparición de las ecuaciones diferenciales fue en noviembre de 1675 cuando Leibniz escribió la fórmula $\int ydy = \frac{y^2}{2}$ y, no es que resolviera una ecuación diferencial, sino que significó el momento de la invención del símbolo de la integración.

El primero en dar una clasificación a las ecuaciones diferenciales de primer orden, o ecuaciones fluxionales en el lenguaje de la época, fue Newton. Las clasificó en tres grupos. El primero lo componían aquellas ecuaciones en las que dos fluxiones x’, y’, y un fluente x o y, están relacionados, como por ejemplo $\frac{x\prime}{y\prime} = f(x)$; el segundo lo formaban las ecuaciones que tenía dos fluxiones y dos fluentes $\frac{x\prime}{y\prime} = f(x,y)$ ($\frac{dx}{dy} = f(x,y)$); y un último grupo que correspondía a las ecuaciones con más de dos fluxiones. Las del primer tipo se denominan en la actualidad ecuaciones diferenciales ordinarias, y las del segundo y tercer tipo son llamadas ecuaciones en derivadas parciales.

Posteriormente, los hermanos Bernoulli, a finales del siglo XVII, introducen términos como integrar una ecuación diferencial, y formalizaron el proceso de separación de variables. Johan Bernoulli, uno de estos hermanos, encontró un método de resolución de ecuaciones diferenciales antes utilizado en otros problemas, la multiplicación por un factor integrante.

En 1724 el matemático J. R. Riccatti estudió la ecuación $\frac{dx}{dy} + ay^2 = bx^\alpha$, (α, a, b constantes) definiendo la integrabilidad en funciones elementales en ésta, y por este motivo, todas las ecuaciones del tipo $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$, (P, Q y R funciones continuas), llevan su nombre.

Pero es a Euler a quien le debemos la primera sistematización de todos los trabajos anteriores, siendo esto lo que podríamos denominar la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Su obra engloba el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden y su correspondiente clasificación, las de segundo orden y su generalización de las de orden superior, así como el método de series de potencias para resolver ecuaciones como $y'' + ax^n y = 0$.

Un poco más tarde, en 1766, D'Alembert descubrió que la solución general de una ecuación lineal no homogénea es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea. Otros matemáticos aportaron conocimientos a esta materia, como Lagrange que introdujo el principio de superposición; Cauchy y Picard, que establecieron un método de aproximaciones sucesivas que permite establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden *n*; Poncaire y Liapunov entre otros. Llegando así hasta la concepción actual de las ecuaciones diferenciales.

2. ANÁLISIS TEÓRICO

2.1 Definición de ecuación diferencial

Definición 2.1.1 Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que intervienen derivadas de una función respecto de una o más variables de las que depende.

Éstas no siempre tienen solución, y cuando la tienen, pueden no encontrarse soluciones explícitas o implícitas.

El estudio de las ecuaciones diferenciales es una rama de las matemáticas con más aplicaciones en la resolución de problemas de otras áreas como la Física, Química, Astronomía, Economía, etc.

2.2 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de tres maneras, según su tipo, según su linealidad o no linealidad y por el orden.

2.2.1 Clasificación según el tipo

Según el tipo se puede distinguir entre ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales. Veamos a continuación las definiciones correspondientes.

Definición 2.2.1.1 Una **ecuación diferencial ordinaria** es aquella que contiene solamente derivadas ordinarias respecto a una única variable independiente y que responden a la formulación general:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Donde *y* es una función que depende de *x*.

Definición 2.2.1.2 Una **ecuación diferencial en derivadas parciales**, es aquella en la que intervienen derivadas parciales respecto de dos o más variables independientes. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

es una ecuación en derivadas parciales donde u = u(x, *y*) es una función que depende de *x* y de *y*.

2.2.2 Clasificación según el orden y el grado

Definición 2.2.2.1. **El orden de una ecuación diferencial** es el de la derivada más alta de la variable dependiente que aparezca en la ecuación diferencial. Por ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y=0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2.

Definición 2.2.2.2. Si la variable dependiente y sus derivadas sucesivas aparecen en forma polinómica, entonces se llama **grado de la ecuación diferencial** al mayor exponente al que aparece elevada la derivada de mayor orden de la ecuación diferencial. Por ejemplo:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de orden 4 y de grado 2.

2.2.3 Clasificación según la linealidad o no linealidad

Definición 2.2.3.1 Una **ecuación diferencial** de orden *n* se dice que es **lineal** si F es lineal en y, y',…, $y^{(n)}$. Es decir, una ecuación diferencial es lineal si se puede expresar en la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

2.3 Solución general y solución particular de una ecuación diferencial ordinaria. Problemas de valores iniciales.

En esta sección vamos a definir los conceptos de solución general y solución particular de una ecuación diferencial ordinaria, y se expondrán los primeros ejemplos en los que se encontrarán soluciones de ecuaciones diferenciales.

Generalmente, ningún fenómeno queda descrito mediante una ecuación diferencial. La descripción se debe completar con la ayuda de ciertas condiciones sobre la solución. Así, cuando el fenómeno descrito es de carácter temporal, las condiciones complementarias suelen tomar la forma de valores de la solución y sus derivadas sucesivas en algún instante inicial t_0. Se habla entonces de un problema de valores iniciales (P.V.I) o de un problema de Cauchy. Por ejemplo:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

es un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial de orden uno; y

$$\begin{cases} y^n = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

es un problema de Cauchy para una ecuación diferencial de orden *n*.

Definición 2.3.1 Una función $y = f(x)$ es **solución general** de la ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

en un intervalo $(a, b) \subseteq R$, si la función $y = f(x)$ y sus derivadas sucesivas satisfacen la ecuación diferencial $\forall x \in (a, b)$

O de otro modo, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden es una función G que posee al menos *n* derivadas para las que:

$$F(x, G(x), G'(x), \dots, G^n(x)) = 0 \quad \text{Para toda } x \text{ en } (a, b).$$

Como puede verse en cualquier libro elemental de ecuaciones diferenciales y, en particular, DENNIS G. ZILL. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, cuando las funciones que intervienen en una ecuación diferencial de orden *n* son suficientemente regulares, entonces su solución general involucra precisamente *n* constantes. Es decir, que la solución general es en realidad una familia de curvas con *n* parámetros.

Ejemplo 2.3.1 Probar que la función $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ es la solución general de la ecuación diferencial ordinaria

$$y' = xy.$$

Como se ha dicho antes, la solución general de una ecuación diferencial ordinaria tiene que contener tantas constantes como el orden de la ecuación diferencial. Así, en nuestro caso, $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ satisface esta condición respecto a la E.D.O. $y' = xy$. Por tanto, solo tendremos que probar que es solución. Pero esto es inmediato puesto que:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}},$$

de donde se tiene que en efecto es cierto que $y' = xy$.

Definición 2.3.2. La **solución particular** de una ecuación diferencial es aquella que se obtiene utilizando datos adicionales que nos permitan asignar valores específicos a las constantes que aparecen en la solución general.

En el siguiente ejemplo mostramos cómo se puede calcular, dadas unas condiciones iniciales, una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo 2.3.2. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = xy$$

que pase por el punto (0,1).

Dado que en el Ejemplo 2.3.1 se ha probado que $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ es la solución general de la ecuación diferencial $y' = xy$, entonces solo tendremos que determinar el valor de la constante *C* para que la curva solución pase por el punto (0,1). Para ello sustituimos *x* por 0 e *y* por 1 en la expresión de la solución general

$$1 = Ce^{\frac{0^2}{2}},$$

de donde se obtiene que *C* = 1. Por tanto la solución particular sería $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

3. MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

En esta sección vamos a recordar algunos métodos conocidos para la resolución de determinados tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que ya hemos definido anteriormente.

3.1 Ecuaciones diferenciales de variables separadas

Definición 3.1.1 Una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) de primer orden se dice que es **de variables separadas** si se pueden separar y reunir todos los términos en *x* con *dx*, y los términos en *y* con *dy*. Esto significa que podríamos escribir la ecuación diferencial en la forma:

$$F(x)dx + G(y)dy = 0$$

El procedimiento para resolverlo es:

i. Separar las variables de la E.D.O. tal que en un miembro solo aparezca la variable x y en el otro solo aparezca la variable y; es decir, que se exprese en la forma:

$$F(x)dx = G(y)dy$$

ii. Integrar los dos miembros de la ecuación para conseguir la solución general.

$$\int F(x)dx = \int G(y)dy$$

3.2 Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 3.2.1.1 Si una E.D.O. puede escribirse de la forma

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0$$

y tiene la propiedad de que $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}$, entonces se dice que es **exacta**.

Para encontrar la solución general de una ecuación diferencial exacta se debe hallar una función $h(x,y)$ de modo que:

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = F(x,y) \qquad \text{Y} \qquad \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = G(x,y)$$

3.3 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 3.2.2.1 Una E.D.O. ordinaria de primer orden:

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0$$

es **homogénea** si $F(x,y)dx$ y $G(x,y)dy$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Recordemos que una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n en x e y si y solo si:

$$f(\beta x, \beta y) = \beta^n f(x,y)$$

Si una ecuación diferencial es homogénea, entonces, se pude transformar en una ecuación diferencial de variables separadas mediante el cambio de variables $y = vx$. Así, el procedimiento para resolverla sería el siguiente:

i. Comprobar que la ecuación diferencial

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0$$

es homogénea.

ii. Hacer el cambio de variables $y = vx$, de donde $dy = vdx + xdv$.

iii. Separar las variables y hallar la solución general.

iv. Sustituir *v* en la solución general para mostrarla con las variables *x* e *y* originales.

3.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 3.2.3.1 Una E.D.O. de primer orden es **lineal** si puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + F(x)y = G(x).$$

Cuando $G(x) = 0$, entonces la ecuación $y' + F(x)y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea y si $G(x) \neq 0$ entonces es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea.

Para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden procedemos de la siguiente manera.

i. Se multiplican ambos miembros de la igualdad por el factor $e^{\int F(x)dx}$ de modo que se obtiene así:

$$\frac{dy}{dx}\, e^{\int F(x)dx} + yF(x)e^{\int F(x)dx} = G(x)e^{\int F(x)dx}$$

ii. Se observa que el lado izquierdo de la ecuación es $\frac{d}{dx}\left[ye^{\int F(x)dx}\right]$, así podemos volver a escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int F(x)dx}\right] = G(x)e^{\int F(x)dx}.$$

Finalmente, tan sólo debemos integrar ambos miembros de la ecuación para llegar a la solución implícita:

$$ye^{\int F(x)dx} = \int G(x)e^{\int F(x)dx} + C.$$

3.5 Campo vectorial

Todos los métodos que hemos visto anteriormente nos ayudan a encontrar una solución, si es que la tiene, a una ecuación diferencial ordinaria, pero, ¿qué hacemos cuando estos métodos no son capaces de hallar solución?

Se puede hallar una solución determinando direcciones en un plano creando un campo direccional, o mediante los métodos numéricos de resolución de problemas de valores iniciales, que estudiaremos en la siguiente sección.

Un campo direccional es la representación gráfica de los vectores de dirección de los puntos asociados a una función.

Así, dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' = f(x,y)\ ,$$

aunque cabe la posibilidad de que no podamos hallar una solución, sabemos que la pendiente de la función y en el punto (x,y) es $f(x,y)$, por lo tanto, conocemos la dirección de la curva de la solución en cualquiera de sus puntos. De este modo podemos usar ese campo direccional para hacernos una idea de cómo son las soluciones de dicha ecuación diferencial.

Pongamos como ejemplo la siguiente ecuación diferencial para resolverla con *Wolfram Mathematica®*.

$$y' = xy$$

Representamos el campo vectorial de la ecuación diferencial.

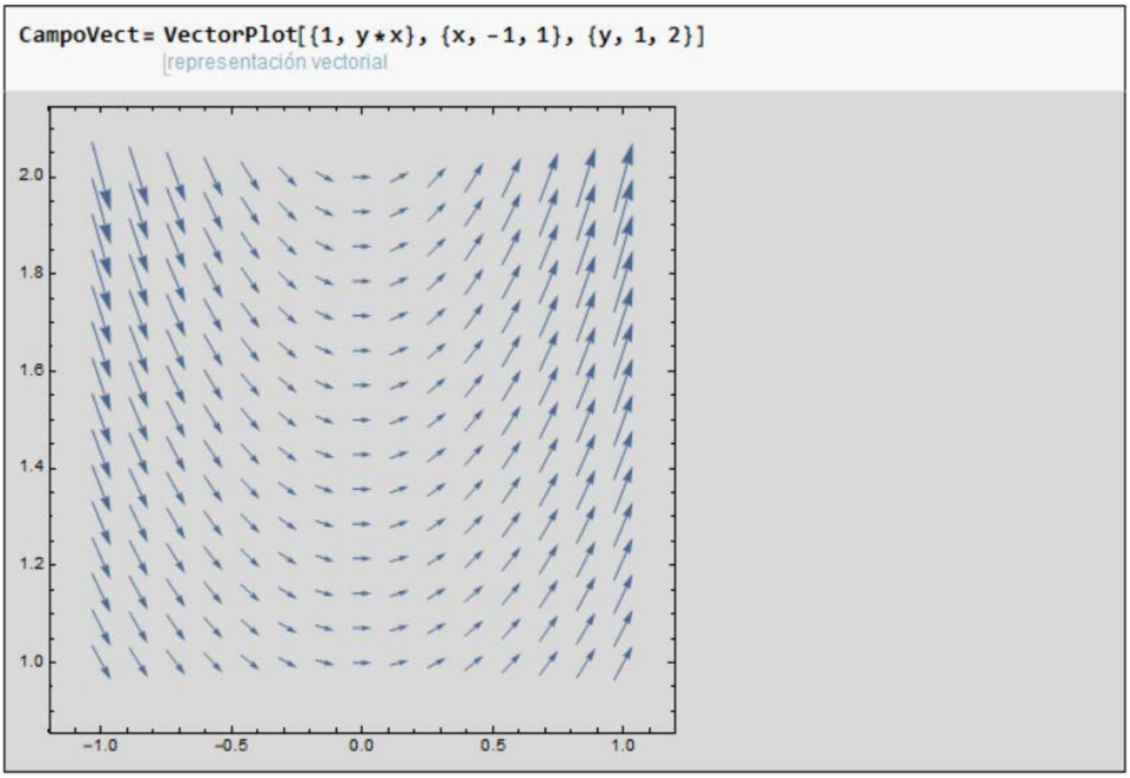


Figura 3.5.1 Representación gráfica del campo vectorial de $y' = xy$

Resolvemos con el comando *DSolve* para obtener la solución general de esta ecuación.

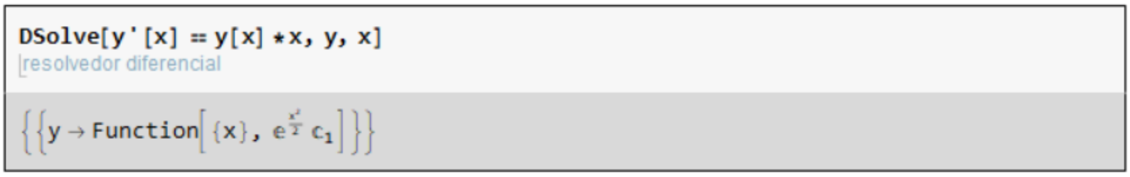


Figura 3.5.2 Cálculo de la solución general de $y' = xy$ *con el comando DSolve*

$$y = C * e^{\frac{x^2}{2}}$$

Y utilizando su solución particular para C=1, podemos representar conjuntamente el campo direccional y su solución particular.

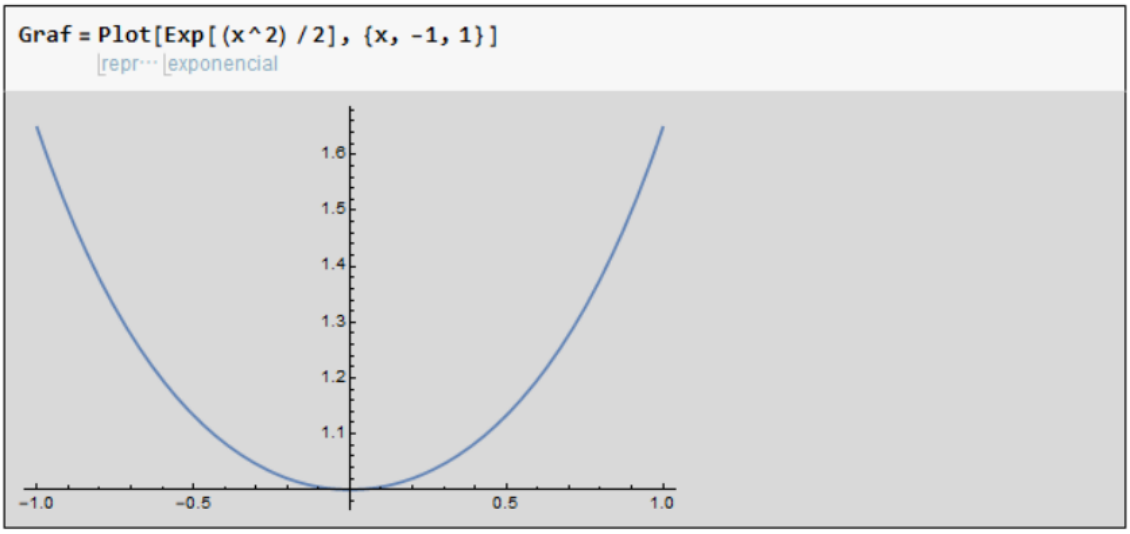


Figura 3.5.3 Representación gráfica de la solución particular para C=1 de $y' = xy$

```
Show[CampoVect, Graf]
[muestra
```

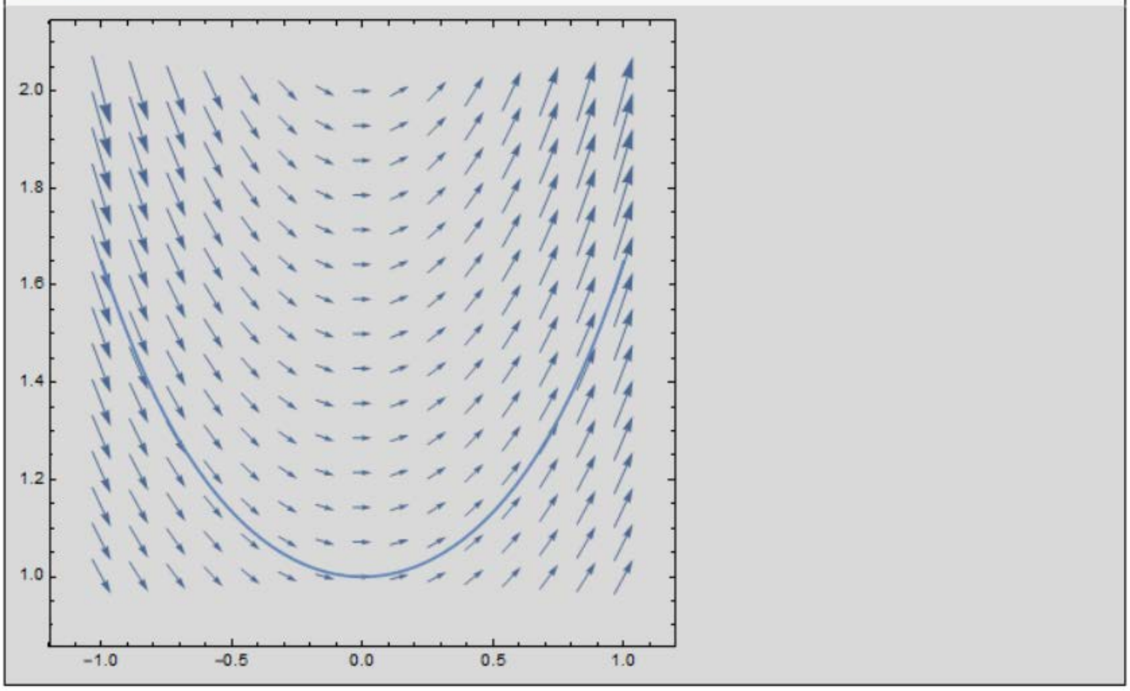


Figura 3.5.4 Representación gráfica de la solución particular para C=1 de $y' = xy$ *junto con el campo vectorial.*

Finalmente representamos varias soluciones particulares junto con el campo vectorial de la ecuación diferencial.

```
DSolve[y'[x] == y[x] *x, y, x];
{{y → Function[{x}, e^(x^2/2) c1]}};

CampoVect = VectorPlot[{1, x}, {x, -1, 1}, {y, 1, 2}];
Graf = Plot[Exp[(x^2) /2], {x, -1, 1}];
Graf2 = Plot[1.2 Exp[(x^2) /2], {x, -1, 1}];
Graf3 = Plot[1.3 Exp[(x^2) /2], {x, -1, 1}];
Graf4 = Plot[1.4 Exp[(x^2) /2], {x, -1, 1}];
Show[CampoVect, Graf, Graf2, Graf3, Graf4]
```

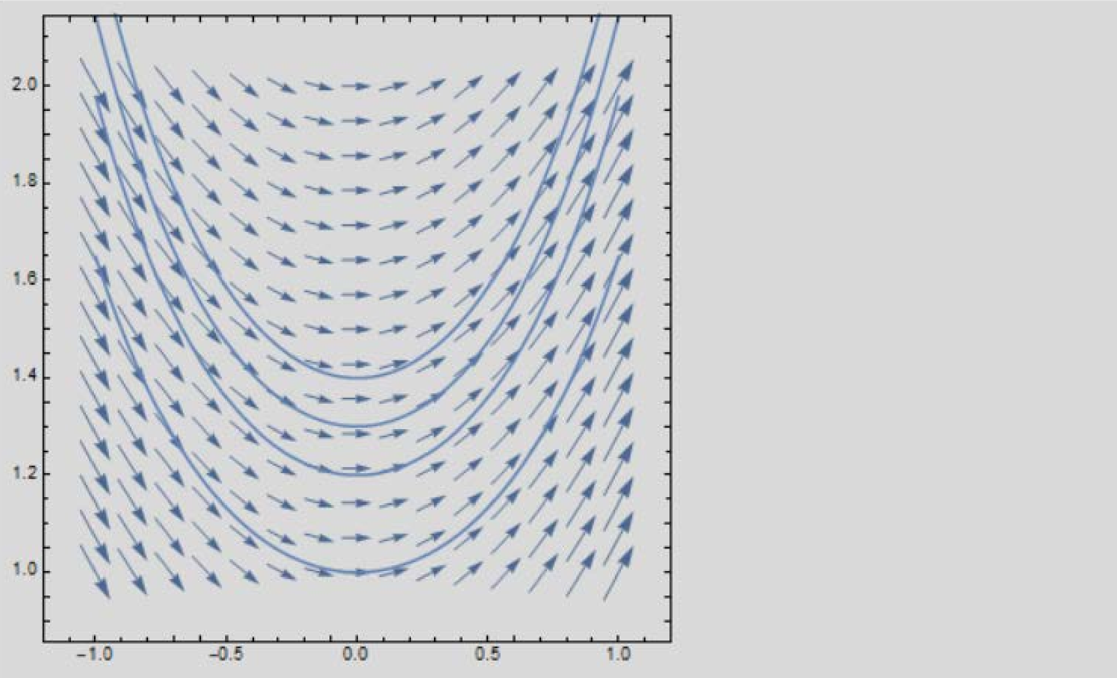


Figura 3.5.5 Representación gráfica de las soluciones particulares para C=1, C=1.2, C=1.3, C=1.4 de $y' = xy$ junto con el campo vectorial.

Como bien se aprecia, gracias al campo de vectores que se obtiene, se puede visualizar o prever, cómo sería la solución a la ecuación diferencial, lo que nos ayuda a intuir la forma de la solución o los cambios que va a experimentar.

4. MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

Como ya hemos visto anteriormente, una ecuación diferencial no siempre tiene solución y aun teniéndola, cabe la posibilidad de que no se encuentren soluciones implícitas o explícitas. Gracias a los campos vectoriales podemos hacernos una idea de la forma de la función solución de la ecuación diferencial, pero no es un método preciso y sólo nos da una idea sobre el comportamiento de la solución.

Otra manera de resolver el problema y poder visualizar la posible solución, vendría de la mano de los métodos numéricos, que se emplean para, hallar una solución.

Un problema de valores iniciales (P.V.I), para una ecuación diferencial ordinaria de orden uno, es una ecuación diferencial a la que se le establece una condición inicial, por ejemplo.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

siendo $y' = f(x, y)$ la ecuación diferencial e $y(x_0) = y_0$ la condición inicial.

Existen varios métodos numéricos de resolución, entre los más utilizados se encuentran los métodos de Euler, Taylor y Runge-Kutta.

4.1 Método de Euler

El método de Euler, también conocido como método de la recta tangente, es el método más sencillo de los métodos numéricos de resolución de P.V.I. Consiste en hallar la recta tangente a la solución en un punto. Así, si conseguimos varios puntos de la solución, podemos movernos a lo largo de las rectas tangentes obtenidas y visualizar de manera aproximada la solución.

Desarrollado de manera analítica, consideremos el problema de valores iniciales expuesto anteriormente:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Si suponemos que tiene solución única, podemos aplicar este método. Partiendo de la condición inicial $y(x_0) = y_0$, podemos hallar la coordenada $y(x_1) = y_1$, punto de la tangente a la curva $y(x)$.

Para resolver un P.V.I. mediante el método de Euler es preciso utilizar los denominados pasos de discretización, que consisten en obtener valores aproximados de la solución en algunos puntos (normalmente equidistantes).

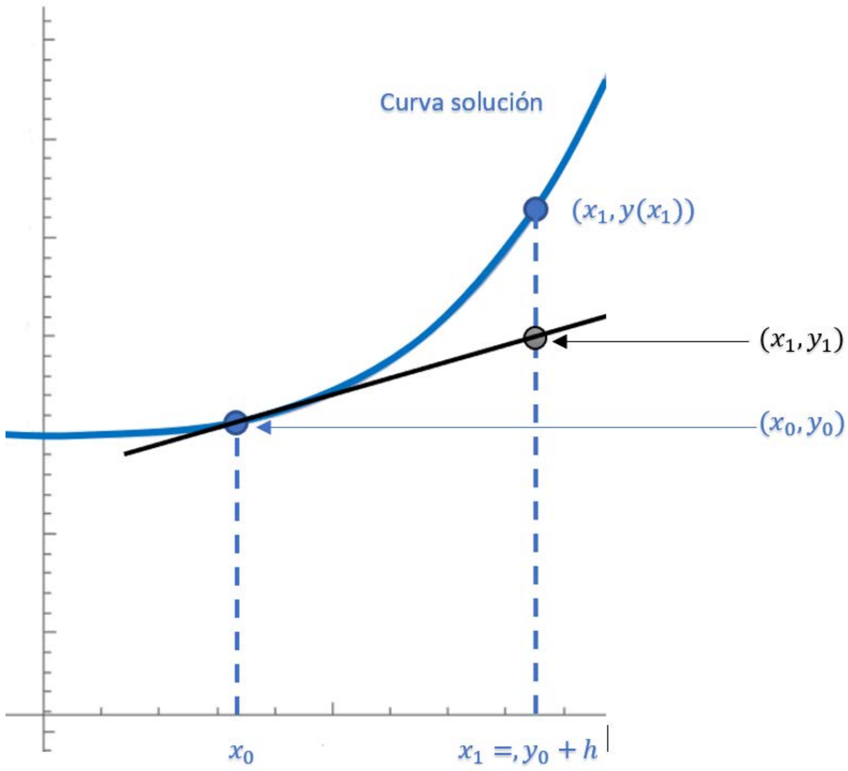


Figura 4.1.1 Representación gráfica general del método de Euler (Elaboración propia)

Así, si suponemos que $h = x_1 - x_0$ es el **paso de discretización**, obtenemos

$$y'_0(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}.$$

Si resolvemos,

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Y repitiendo el procedimiento, y teniendo en cuenta que el paso de discretización es $h = y_{j+1} - y_j$, se obtiene:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j).$$

Se denomina **error de truncamiento** a la diferencia entre el valor exacto $y(x_j)$, y el valor aproximado obtenido, y_j. Es decir, $e_j = y_{j-1} - y(x_j)$. En el ejemplo siguiente vamos a ver que cuanto menor es el paso de discretización, menor es el error de truncamiento.

Resolvamos el siguiente ejemplo de problema de valores iniciales con el comando DSolve del programa *Wolfram Mathematica*® y con el método de Euler considerando una amplitud de intervalo de *h* = 0.1.

Ejemplo 4.1.1. Dado el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = 3y * x^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Se pide:

a) Obtener la solución exacta utilizando el comando *DSolve* del programa *Wolfram Mathematica®*.
b) Aplicar el Método de Euler utilizando *Wolfram Mathematica®*, con un paso de discretización h = 0.1 y en el intervalo [0,1]. Representar a continuación la solución exacta obtenida en (a) y los puntos obtenidos por el Método de Euler.
c) Elaborar una tabla, con el programa Excel, en la que figuren los valores exactos, los valores aproximados del método de Euler y los errores de truncamiento.

Obtenemos la solución exacta con el comando *DSolve*

```
DSolve[{y'[x] == 3 y[x] * x^2, y[0] == 1}, y, x]
resolvedor diferencial
```

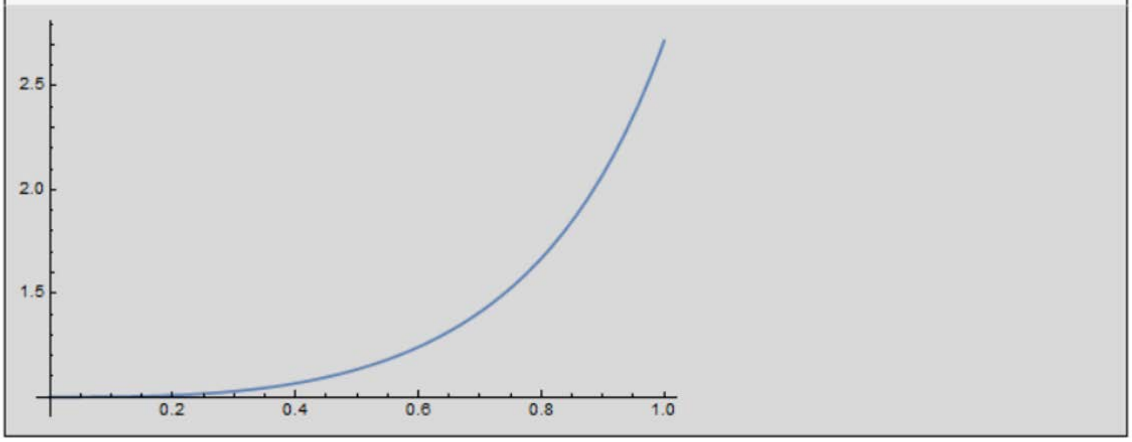
$$\{\{y \to \text{Function}[\{x\}, e^{x^3}]\}\}$$

Figura 4.1.2 Cálculo de la solución particular de $y' = 3yx^2$ *con el comando DSolve*

y representamos gráficamente la solución en el intervalo [0,1].

Aplicamos a continuación el método de Euler para resolver el P.V.I. propuesto en el intervalo [0,1] considerando una amplitud de h = 0.1, y representamos gráficamente los puntos obtenidos.

```
grafica = Plot[Exp[x^3], {x, 0, 1}]
```




```
f[x_, y_] := 3 y * x^2
x[0] = 0; y[0] = 1; n = 10.; h = 1 / n;
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
 y[j] = y[j - 1] + h * f[x[j - 1], y[j - 1]]]
```

```
euler = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]]
```

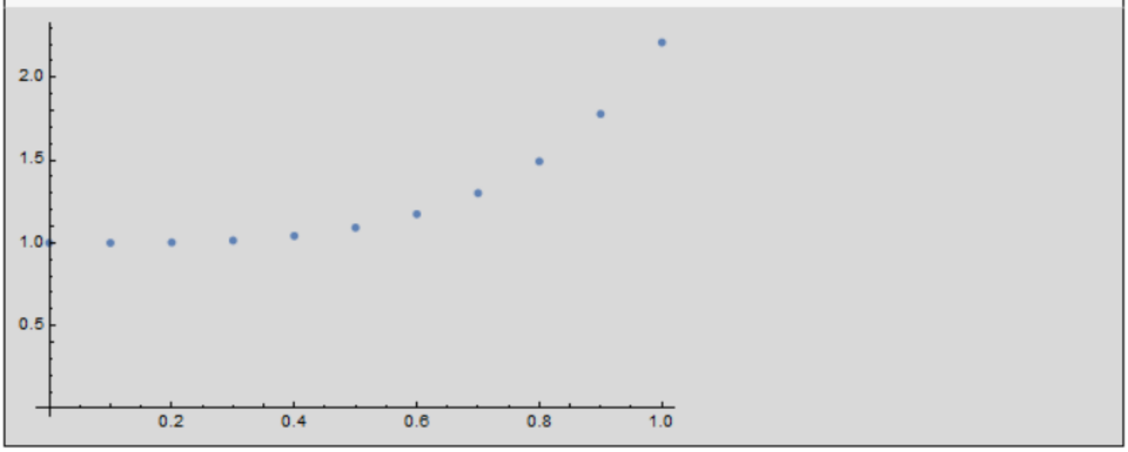


Figura 4.1.3 Representación gráfica de los puntos obtenidos al aplicar el método de Euler con h=0.1 para el P.V.I. considerado.

Finalmente, en la siguiente gráfica se muestra la representación gráfica de la función solución y los puntos obtenidos mediante el método de Euler para un $h = 0.1$ que hemos resuelto con el programa *Wolfram Mathematica®.*

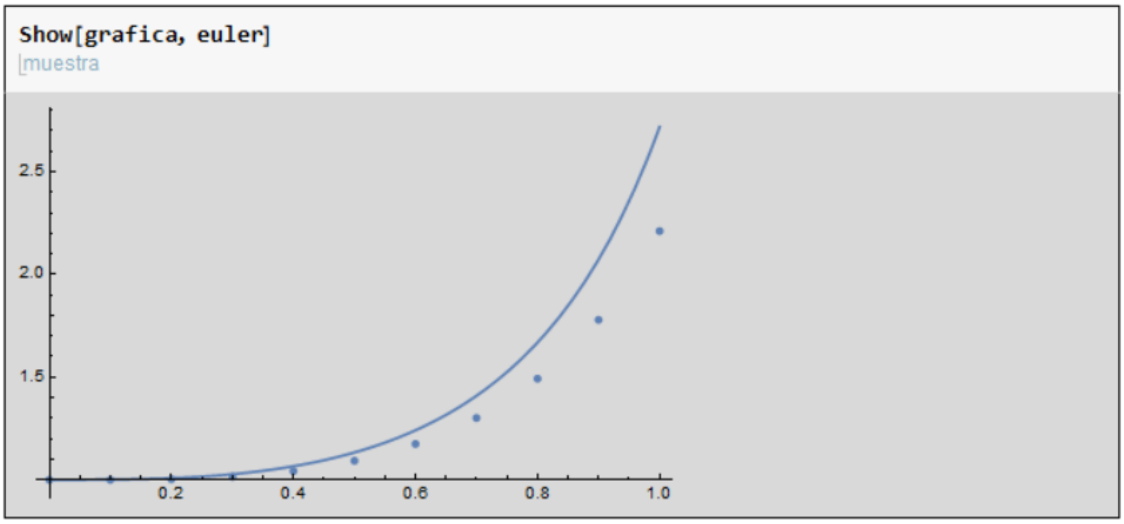


Figura 4.1.4 Representación gráfica de la curva solución y de los puntos obtenidos al aplicar el método de Euler con h=0.1para el P.V.I. considerado.

Observamos que los puntos están próximos, pero no coinciden con la gráfica.

Utilizando la fórmula que hemos visto anteriormente:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j),$$

y dividiendo el intervalo [0,1] en 10 partes, siendo $x_j = \frac{j}{10}, j = 0,1,2 \dots ,10$,obtenemos la tabla siguiente:

j	xj	Solución aproximada	Solución exacta	Error de truncamiento
0	0	1	1	0
1	0,1	1	1,0010005	0,0010005
2	0,2	1,003	1,00803209	0,005032086
3	0,3	1,015036	1,0273678	0,012331803
4	0,4	1,04244197	1,0660924	0,023650427
5	0,5	1,09247919	1,13314845	0,040669266
6	0,6	1,17441513	1,24110238	0,066687253
7	0,7	1,30125196	1,40916876	0,107916803
8	0,8	1,492536	1,66862511	0,176089113
9	0,9	1,77910291	2,07300656	0,293903656
10	1	2,21142492	2,71828183	0,506856913

Figura 4.1.5 Cálculo numérico mediante el método de Euler para un h=0.1 del P.V.I. considerado (Elaboración propia con Microsoft Excel).

Para minimizar el error que se comete, el valor de h debe ser más pequeño. Veámoslo en el mismo ejemplo, pero con un $h = 0.01$.

Ejemplo 4.1.2

Dado el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = 3y * x^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

contestar a las mismas cuestiones que en el **Ejemplo 4.1.1** pero considerando un paso de discretización $h = 0.01$ en el intervalo [0,1].

```
f[x_, y_] := 3 y * x^2
x[0] = 0; y[0] = 1; n = 100.; h = 1 / n;
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
|para cada
 y[j] = y[j - 1] + h * f[x[j - 1], y[j - 1]]]
grafica = Plot[Exp[x^3], {x, 0, 1}];
                  |exponencial
euler1 = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]];
         |represent··· |tabla
Show[grafica, euler1]
|muestra
```

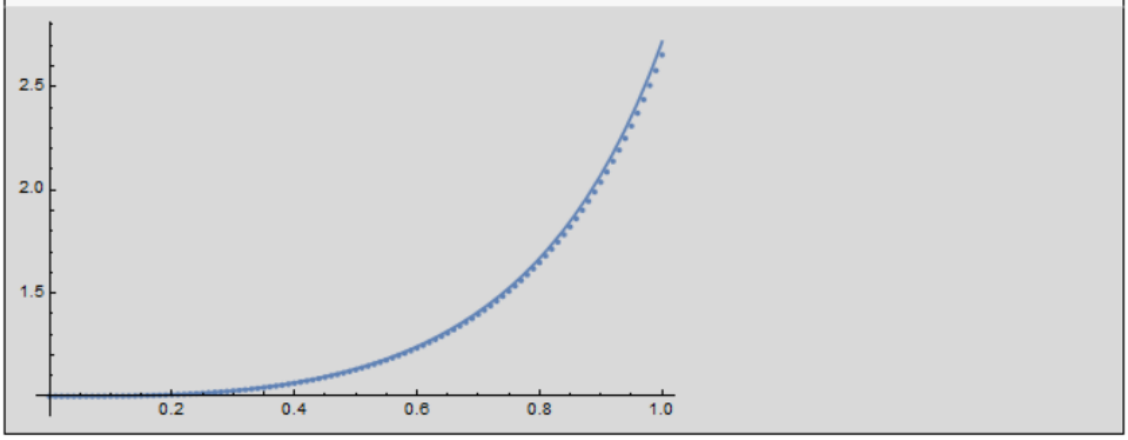


Figura 4.1.6 Representación gráfica de la curva solución y de los puntos obtenidos al aplicar el método de Euler con h=0.01para el P.V.I. considerado.

j	xj	Solución aproximada	Solución exacta	Error de truncamiento
0	0	1	1	0
1	0,01	1	1,000001	1E-06
2	0,02	1	1,000008	8,00003E-06
3	0,03	1,00002	1,000027	7,00036E-06
4	0,04	1,00004	1,000064	2,4002E-05
5	0,05	1	1,00012501	0,000125008
6	0,06	1,00017	1,00021602	4,60233E-05
7	0,07	1,00027	1,00034306	7,30588E-05
8	0,08	1,00042	1,00051213	9,21311E-05
9	0,09	1,00061	1,00072927	0,000119266
10	0,1	1,00086	1,0010005	0,0001405

Figura 4.1.7 Cálculo numérico mediante el método de Euler para un h=0.01 del P.V.I. considerado (Elaboración propia con Microsoft Excel).

En comparación con la gráfica anterior, se observa que, el dibujo que describe el conjunto de puntos es mucho más próximo a la gráfica de la función solución, y si observamos la tabla realizada con Excel demostramos analíticamente que cuanto menor sea el valor de h, menor será el error cometido.

4.2 Método de Taylor

El método de Taylor es más complejo que el de Euler porque implica realizar cálculos y evaluaciones de las derivadas parciales de la función.

Suponiendo que $y(x)$ es solución en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$ del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Y que f es suficientemente diferenciable, se pueden obtener las derivadas sucesivas de *y(x)* en la forma:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f^{(1)}$$

$$y'''(x) = \frac{dy''}{dx} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} * \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} f = f^{(2)}$$

y así sucesivamente

$$y^{(n)}(x) = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x} + \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial y} f = f^{(n-1)},$$

obteniendo así las sucesivas derivadas y considerando que $f^{(0)} = f$. De este modo, teniendo en cuenta que la Fórmula de Taylor es:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^n(x_j),$$

El método de Taylor para la resolución numérica del P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

consiste en el cálculo de la solución aproximada en x_{j+1} , mediante la expresión

$$y_{j+1} = y_j + hf^{(0)}(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2!} f^{(1)}(x_k, y_k) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_j, y_j)$$

La dificultad del método de Taylor radica en el cálculo de las derivadas sucesivas, pero tiene su interés en que cuanto mayor es *n*, más preciso es el método puesto que el intervalo que escogemos para estudiar se divide en más puntos.

Veamos ahora, sobre el mismo ejemplo anterior, el método de Taylor para poder comparar los resultados obtenidos.

Ejemplo 4.2.1 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = 3y * x^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

se pide:

a) Obtener la solución exacta utilizando el comando *DSolve* del programa *Wolfram Mathematica®*.

b) Aplicar el Método de Taylor considerando hasta la derivada de orden 2 utilizando *Wolfram Mathematica®*, con un paso de discretización *h* = 0.1 y en el intervalo [0,1]. Representar a continuación la solución exacta obtenida en (a) y los puntos obtenidos por el Método de Taylor.

c) Elaborar una tabla, con el programa Excel, en la que figuren los valores exactos, los valores aproximados del método de Taylor y los errores de truncamiento.

Como ya hemos calculado la solución general con el comando *DSolve* en los ejemplos anteriores, no es necesario volver a utilizarlo.

```
f[x_, y_] := 3 y * x^2
x[0] = 0; y[0] = 1; n = 10.; h = 1 / n;
f[1][x_, y_] = D[f[x, y], x] + D[f[x, y], y] * f[x, y];
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
 y[j] = y[j - 1] + h * f[x[j - 1], y[j - 1]] + h^2 / 2 * f[1][x[j - 1], y[j - 1]]]
grafica = Plot[Exp[x^3], {x, 0, 1}];
taylor = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]];
Show[grafica, taylor]
```

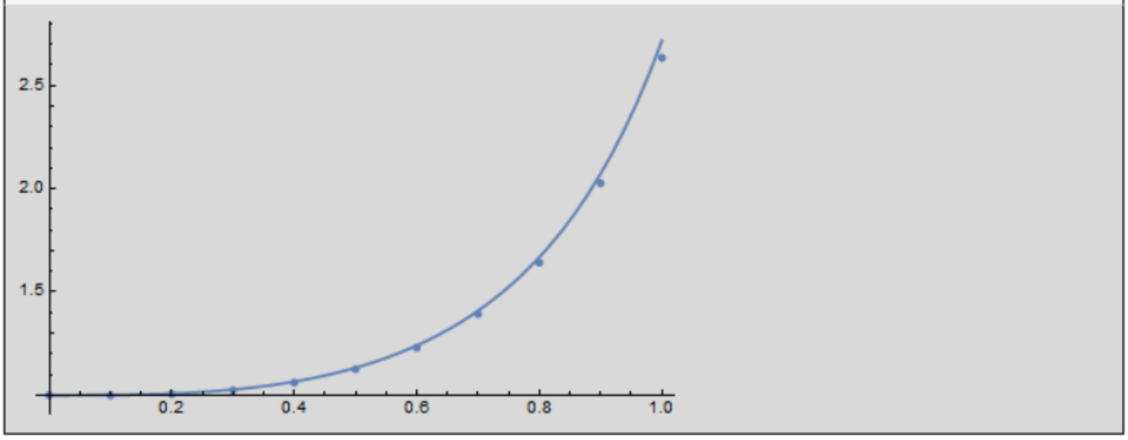


Figura 4.2.1 Representación gráfica de la curva solución y de los puntos obtenidos al aplicar el método de Taylor con h=0.1 para el P.V.I. considerado.

En la gráfica se ve representada la solución con una línea continua y el método de Taylor con puntos para un $h = 0.1$ Se puede apreciar que la proximidad de los puntos se acerca mucho más que el método de Euler.

Operando con la fórmula que hemos explicado anteriormente y aplicándola al ejemplo obtenemos la siguiente tabla.

$$y' = 3y\, x^2$$

$$f^{(0)}(x,y) = 3yx^2$$

$$f^{(1)}(x,y) = \frac{df}{dx} + f * \frac{df}{dy} = 6yx + 9yx^4$$

Para poder ilustrarlo, utilizaremos el método de Taylor de orden 2 y calcularemos el valor aproximado de *y(1)* para *h = 0.1*

$$y_{j+1} = y_j + hf^{(0)}(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2!} f^{(1)}(x_k, y_k) = y_j + h * 3y_j\, x_j{}^2 + \frac{h^2}{2!}(6y_j x_j + 9y_j x_j{}^4)$$

Si operamos con esa fórmula obtenemos la siguiente tabla.

j	xj	Solución aproximada	Solución exacta	Error de truncamiento
0	0	1	1	0
1	0,1	1,0001	1,0010005	0,0009005
2	0,2	1,006	1,00803209	0,002032086
3	0,3	1,02419	1,0273678	0,003177803
4	0,4	1,06143	1,0660924	0,004662399
5	0,5	1,12634	1,13314845	0,006808453
6	0,6	1,23088	1,24110238	0,010222379
7	0,7	1,39314	1,40916876	0,016028762
8	0,8	1,64225	1,66862511	0,02637511
9	0,9	2,02724	2,07300656	0,045766564
10	1	2,63445	2,71828183	0,083831828

Figura 4.2.2 Cálculo numérico mediante el método de Taylor para un h=0.1 del P.V.I. considerado (Elaboración propia con Microsoft Excel).

Y para un $h = 0.02$ el resultado sería aún más próximo. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.2

Dado el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = 3y * x^2 \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

contestar a las mismas cuestiones que en el **Ejemplo 4.2.1** pero considerando un paso de discretización h = 0.02 en el intervalo [0,1].

```
f[x_, y_] := 3 y * x^2
x[0] = 0; y[0] = 1; n = 50.; h = 1 / n;
f[1][x_, y_] = D[f[x, y], x] + D[f[x, y], y] * f[x, y];
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
 y[j] = y[j - 1] + h * f[x[j - 1], y[j - 1]] + h^2 / 2 * f[1][x[j - 1], y[j - 1]]]
grafica = Plot[Exp[x^3], {x, 0, 1}];
taylor = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]];
Show[grafica, taylor]
```

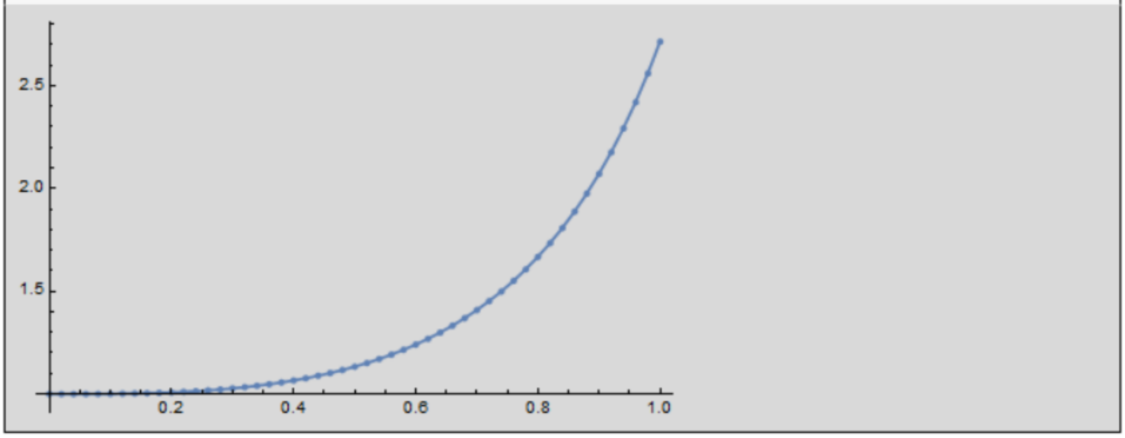


Figura 4.2.3 Representación gráfica de la curva solución y de los puntos obtenidos al aplicar el método de Taylor con h=0.02 para el P.V.I. considerado.

j	xj	Solución aproximada	Solución exacta	Error de truncamiento
0	0	1	1	0
1	0,02	1	1,000008	8,00003E-06
2	0,04	1,00005	1,000064	1,4002E-05
3	0,06	1,00019	1,00021602	2,60233E-05
4	0,08	1,00048	1,00051213	3,21311E-05
5	0,10	1,00096	1,0010005	4,05002E-05
6	0,12	1,00168	1,00172949	4,94939E-05
7	0,14	1,00269	1,00274777	5,77682E-05
8	0,16	1,00404	1,0041044	6,44001E-05
9	0,18	1,00578	1,00584904	6,90392E-05
10	0,2	1,00795	1,00803209	8,20855E-05

Figura 4.2.4 Cálculo numérico mediante el método de Taylor para un h=0.02 del P.V.I. considerado (Elaboración propia con Microsoft Excel).

Observando la gráfica vemos como los puntos son prácticamente coincidentes con la representación de la función, y observando la tabla de errores realizada con Excel apreciamos cómo el error de truncamiento disminuye.

4.3 Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un método desarrollado por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutt alrededor de 1900. Se basa en el método de Euler, que utiliza la tangente de una curva próxima a la curva "solución". Runge-Kutta expande más esa idea y utiliza varias tangentes intermedias y para poder dar una aproximación numérica a los problemas de valores iniciales, sin necesidad de calcular derivadas sucesivas, como ocurre con el método de Taylor.

El método de Runge-Kutta permite obtener, con mayor exactitud una solución. El método de Runge-Kutta más utilizado es el denominado de orden 4, en el que partiendo de $y_0 = y(x_0)$ se calculan las iteraciones sucesivas y_k en la forma:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

donde

$$K_1 = f(x_k, y_k)$$

$$K_2 = f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_2\right)$$

$$K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3).$$

La suma $\frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ se considera un promedio de pendientes, ya que cada K_n es una aproximación en base a la pendiente medida en puntos intermedios entre los dos puntos que estudiamos.

Continuando con los ejemplos anteriores, aplicamos a continuación el método de Runge-Kutta:

Ejemplo 4.3.1 Dado el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = 3y\,x^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

se pide:

a) Obtener la solución exacta utilizando el comando *DSolve* del programa *Wolfram Mathematica®.*

b) Aplicar el Método de Euler utilizando *Wolfram Mathematica®*, con un paso de discretización h = 0.1 y en el intervalo [0,1]. Representar a continuación la solución exacta obtenida en (a) y los puntos obtenidos por el Método de Runge-Kutta de orden 4.

c) Elaborar una tabla, con el programa Excel, en la que figuren los valores exactos, los valores aproximados del método de Runge-Kutta y los errores de truncamiento.

Resolvamos a continuación con el programa *Wolfram Mathematica®* el P.V.I planteado para un $h = 0.1$ y posteriormente para un $h = 0.01$.

```
f[x_, y_] := 3 y * x^2
x[0] = 0; y[0] = 1; h = 0.1; n = 1. / h;
K1[x_, y_] := f[x, y]
K2[x_, y_] := f[x + h / 2, y + h / 2 * f[x, y]]
K3[x_, y_] := f[x + h / 2, y + h / 2 * K2[x, y]]
K4[x_, y_] := f[x + h, y + h * K3[x, y]]
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
para cada
 y[j] = y[j - 1] + h / 6 (K1[x[j - 1], y[j - 1]] +
      2 * K2[x[j - 1], y[j - 1]] + 2 K3[x[j - 1], y[j - 1]] + K4[x[j - 1], y[j - 1]])]
grafica = Plot[Exp[x^3], {x, 0, 1}];
          repr··· exponencial
rungekutta = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]];
               represent··· tabla
Show[grafica, rungekutta]
muestra
```

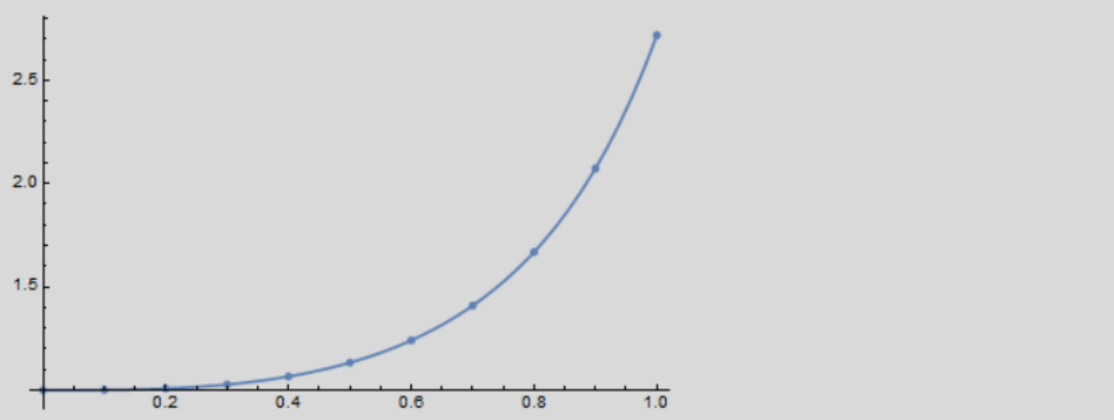


Figura 4.3.1 Representación gráfica de la curva solución y de los puntos obtenidos al aplicar el método de Runge-Kutta con h=0.1 para el P.V.I. considerado.

Operando con las fórmulas anteriores y suponiendo un $h = 0.1$ obtenemos la siguiente tabla.

j	xj	Solución aproximada	Solución exacta	Error de truncamiento				
0	0	1	1	0			K1	0
1	0,1	1,00100	1,0010005	0,00000			K2	0,0075
2	0,2	1,00803	1,00803209	0,00000			K3	0,00750281
3	0,3	1,02737	1,0273678	0,00000			K4	0,0300225
4	0,4	1,06609	1,0660924	0,00000				
5	0,5	1,13315	1,13314845	0,00000				
6	0,6	1,24110	1,24110238	0,00000				
7	0,7	1,40917	1,40916876	0,00000				
8	0,8	1,66862	1,66862511	0,00001				
9	0,9	2,07299	2,07300656	0,00002				
10	1	2,71823	2,71828183	5,18285E-05				

Figura 4.3.2 Cálculo numérico mediante el método de Runge-Kutta para un h=0.1 del P.V.I. (Elaboración propia con Microsoft Excel)

Ejemplo 4.3.2 Dado el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = 3y\,x^2 \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

contestar a las mismas cuestiones en el **Ejemplo 4.2.1** pero considerando un paso de discretización h = 0.01 en el intervalo [0,1].

```
f[x_, y_] := 3 y * x^2
x[0] = 0; y[0] = 1; h = 0.01; n = 1./h;
K1[x_, y_] := f[x, y]
K2[x_, y_] := f[x + h / 2, y + h / 2 * f[x, y]]
K3[x_, y_] := f[x + h / 2, y + h / 2 * K2[x, y]]
K4[x_, y_] := f[x + h, y + h * K3[x, y]]
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
 y[j] = y[j - 1] + h / 6 (K1[x[j - 1], y[j - 1]] +
      2 * K2[x[j - 1], y[j - 1]] + 2 K3[x[j - 1], y[j - 1]] + K4[x[j - 1], y[j - 1]])]
grafica1 = Plot[Exp[x^3], {x, 0, 1}];
rungekutta = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]];
Show[grafica1, rungekutta]
```

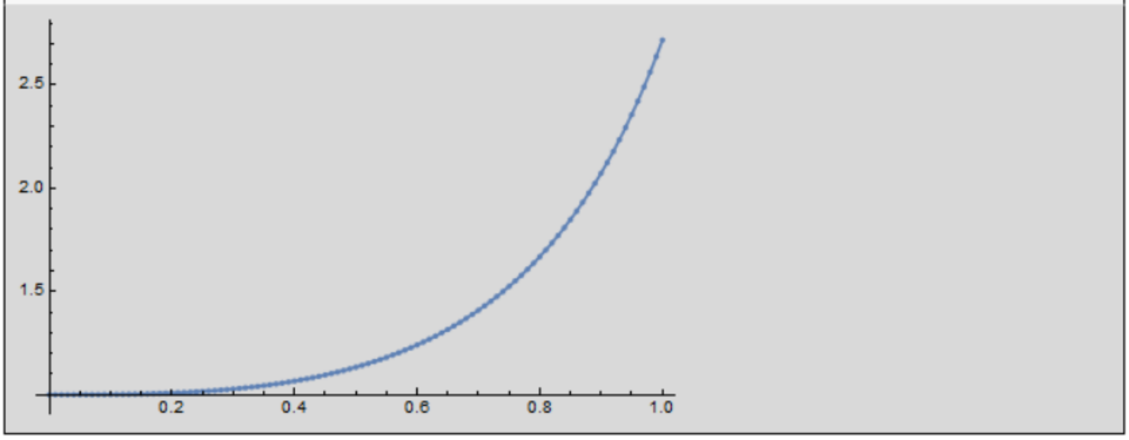


Figura 4.3.3 Representación gráfica de la curva solución y de los puntos obtenidos al aplicar el método de Runge-Kutta con h=0.01 para el P.V.I. considerado.

Visualmente, para un h muy pequeño es difícil de apreciar la disminución de error respecto a los métodos anteriores, Euler y Taylor, pero, por ejemplo, para un $h = 0.1$ se puede ver cómo el método de Runge-Kutta es más eficaz, puesto que los puntos obtenidos son prácticamente coincidentes con la gráfica.

4.4 Resolver un problema de valores iniciales no compatible con el comando DSolve

En los ejemplos anteriores se ha mostrado la eficiencia de los 3 métodos numéricos de resolución de P.V.I. estudiados. Conviene ahora destacar que no siempre se pueden obtener soluciones explícitas o implícitas de ecuaciones diferenciales. A modo de ejemplo, veamos a continuación como el comando DSolve en efecto no puede resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$y'(x) = \frac{e^x}{x}.$$

```
DSolve[{y'[x] == E^x / x}, y, x]
[resolvedor diferencial [número e

{{y → Function[{x}, C[1] + ExpIntegralEi[x]]}}
```

Figura 4.4.1 No es posible el cálculo de la solución general de $y' = \frac{e^x}{x}$ *con el comando DSolve.*

Sin embargo, en estos casos, como en cualesquiera otros, siempre podremos aplicar los métodos numéricos estudiados. De aquí, si cabe, se pone de manifiesto un mayor interés en el conocimiento de los métodos de Euler, Taylor y Runge - Kutta. Veamos en el siguiente ejemplo como sí que podemos obtener soluciones aproximadas utilizando los métodos numéricos estudiados, de un P.V.I. que incluye a la citada E.D.O. que no puede ser resuelta por *Wolfram Mathematica®*.

Ejemplo 4.4.1 Resolver mediante el comando DSolve el siguiente P.V.I

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^x}{x} \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

Vemos en primer lugar como no es posible resolver el P.V.I. con el comando *DSolve*.

```
- DSolve[{y'[x] == E^x / x, y[1] == 2}, y, x]
  [resolvedor diferencial [número e

{{- (y → Function[{x}, 2 - ExpIntegralEi[1] + ExpIntegralEi[x]])}}
```

Figura 4.4.2 No es posible el cálculo de la solución particular de $y' = \frac{e^x}{x}$ *para* $y(1) = 2$ *con el comando DSolve*

Es decir, que el comando DSolve no nos proporciona ninguna solución del PVI. Apliquemos ahora el método de Euler.

```
f[x_, y_] := E^x / x
x[0] = 1; y[0] = 2; n = 100.; h = 1 / n;
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, x[j] = x[0] + j * h;
 y[j] = y[j - 1] + h * f[x[j - 1], y[j - 1]]]
```

```
euler = ListPlot[Table[{x[j], y[j]}, {j, 0, n}]]
```

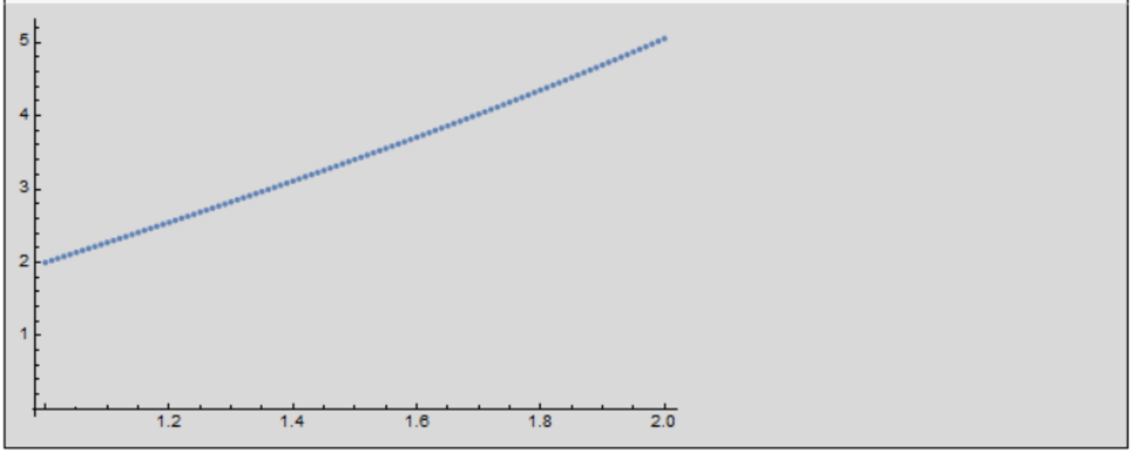


Figura 4.1.3 Representación gráfica mediante el método de Euler para un h=0.01 del P.V.I. considerado.

Se han representado gráficamente los 100 puntos obtenidos al aplicar el método de Euler, con amplitud $h = 0.01$ y en el intervalo [1, 2], en la resolución del P.V.I. propuesto. Sin embargo, no se ha podido obtener una solución ni explícita ni implícita mediante el comando DSolve. Por otra parte, observar que ahora no podemos calcular el error de truncamiento puesto que no tenemos solución exacta del P.V.I.

5. APLICACIONES A LA ECONOMÍA

Las ecuaciones diferenciales tienen múltiples aplicaciones, fuera de los campos de la Física o la Química, que nos pueden ayudar a resolver problemas cotidianos. En el ámbito que nos concierne, el económico, nos pueden ser de utilidad para numerosas situaciones.

5.1 Inventarios

La gestión de un inventario es un problema básico en la Economía y que puede suponer un problema para una empresa que no lo gestione bien, ocasionando que la empresa asuma costes de almacenaje innecesarios muy importantes para el beneficio de la empresa o suministros insuficientes para una demanda más elevada que la esperada.

Según el modelo económico, la oferta es igual a la demanda, pero en la vida real, esta situación no siempre es así, sino que la oferta supera a la demanda o viceversa. Tomaremos como ejemplo que la oferta es mayor que la demanda, así los productores tienen exceso de producción, debiendo mantener un stock del producto fabricado.

Llamamos $q(t)$ a la cantidad de producto en stock en el momento t. Así, en el momento $t + \Delta t$ el stock sería $q(t + \Delta t)$ y, por tanto, la cantidadcorrespondiente al incremento del stock viene dada por:

$$\Delta q(t + \Delta t) = q(t + \Delta t) - q(t)$$

Por otra parte, el incremento del stock ha de ser igual al incremento de la oferta S menos el incremento de la demanda D; es decir:

$$\Delta q(t + \Delta t) = S\Delta t - D\Delta t,$$

de donde dividiendo por Δt se tiene:

$$\frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = S - D.$$

Finalmente, haciendo ahora el límite cuando $\Delta t \to 0$ se obtiene que:

$$\frac{dq}{dt} = S - D\ .$$

Suponiendo que el productor desea protegerse pidiendo que la tasa a la que debe incrementar el precio sea proporcional a la tasa que modifica el inventario, y en este caso:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha \frac{dq}{dt}$$

Siendo α la constante de proporcionalidad, y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha(S - D\ )$$

Y como S y D pueden expresarse en términos de p, la ecuación anterior se convierte en una ecuación diferencial.

Supongamos un ejemplo aplicativo en el que la oferta y la demanda están dadas en términos de precios p, por: S = 80 + p y D = 130 – 4p, la constante de proporcionalidad es $\alpha = 2$ y deseamos calcular el precio en cualquier instante de tiempo t>0, dada la condición inicial t = 0 y p = 6.

La ecuación diferencial se expresaría de la siguiente forma:

$$\frac{dp}{dt} = -2(80 + p - 130 + 4p)$$

$$\frac{dp}{dt} + 10p = 100\ ,$$

que es una ecuación diferencial lineal de orden 1. Así, aplicando el procedimiento de resolución expuesto anteriormente para este tipo de ecuaciones diferenciales, se tiene que:

$$p(t)e^{-\int 10dt} = \int 100e^{\int 10dt}\, dt.$$

Es decir:

$$p(t)e^{-10t} = \int 100e^{10t}dt = 100\frac{1}{10}\int 10e^{10t}dt = 10e^{10t} + C.$$

De donde,

$$p(t) = e^{-10t}(10e^{-10t} + C) = 10 + Ce^{-10t}$$

Teniendo en cuenta ahora la condición inicial

$$t = 0 \Rightarrow\ p(0) = 10 + Ce^{-10*0} = 10 + C = 6,$$

se obtiene:

$$C = -4.$$

Finalmente, la solución queda de la siguiente forma, siendo el precio en cualquier tiempo *t*:

$$p(t) = 10 - 4e^{-10t}.$$

Utilizando *Wolfram Mathematica*® comprobamos que la solución es correcta.

```
DSolve[{p'[t] == -10p[t] + 100, p[0] == 6}, p, t]
resolvedor diferencial

{{p → Function[{t}, 2 e^(-10 t) (-2 + 5 e^(10 t))]}}
```

Figura 5.1.1.1 Cálculo de la solución particular de $dp/dt + 10p = 100$ *con el comando DSolve.*

```
Simplify[2 e^(-10 t) (-2 + 5 e^(10 t))]
simplifica

10 - 4 e^(-10 t)
```

Figura 5.1.1.2 Cálculo de la solución particular de $dp/dt + 10p = 100$ *con el comando DSolve.*

Si aplicamos el método de Euler como hemos visto anteriormente con el programa *Wolfram Mathematica®* para un intervalo h =0.02 y unimos las gráficas, podemos ver cómo se aproxima la solución obtenida por el método de Euler a la gráfica.

```
f[t_, p_] := 100 - 10 p
t[0] = 0; p[0] = 6; n = 50; h = 1 / n;
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, t[j] = t[0] + j * h;
para cada
 p[j] = p[j - 1] + h * f[t[j - 1], p[j - 1]]]
grafica = Plot[10 - 4 * Exp[-10 * t], {t, 0, 1}];
          representació··· exponencial
euler = ListPlot[Table[{t[j], p[j]}, {j, 0, n}]];
        represent··· tabla
Show[grafica, euler]
muestra
```

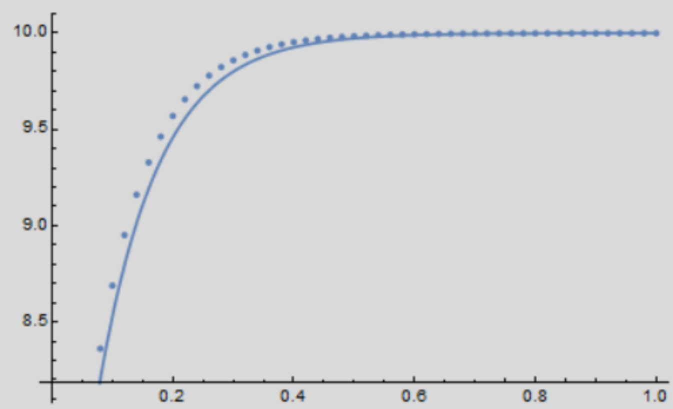


Figura 5.1.2 Representación gráfica mediante el método de Euler para un h=0.02 del P.V.I. planteado considerado.

Vemos así, cómo utilizando el método de Euler podemos aproximar una posible solución y anticiparnos a un suceso que, en este caso el almacenamiento de unidades en stock, puede provocar problemas graves en la situación de una empresa.

5.2 Función de beneficios de una empresa

Un aspecto claramente muy importante en la Economía de una empresa es la determinación de la función de beneficios puesto que la misión principal de una empresa es la creación de beneficio. Si conocemos o podemos hacernos una idea de cómo va a ser la evolución de la función del beneficio, en un modelo simplificado, la empresa se podrá adaptar a posibles cambios, prever posibles crisis y anticiparse a realizar inversiones para optimizar el beneficio.

Pongamos ahora un ejemplo práctico para determinar las características de la función de beneficios de una empresa conociendo la siguiente información: la tasa de variación de los ingresos es proporcional al beneficio inicial, y la tasa de variación de los gastos es proporcional al beneficio existente. Dichas tasas de variación son 1/3 y 3, respectivamente. Contamos con que las condiciones iniciales de ingresos son 6 millones de euros y gastos iniciales 2 millones de euros. Vamos a tomar, en las ecuaciones, los datos en millones de euros.

Los beneficios iniciales de una empresa se definen como la diferencia entre ingresos y gastos iniciales y añadiendo los datos aportados tenemos:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{3}(I_0 - G_0) = \frac{1}{3}(6-2) = \frac{4}{3}$$

De donde integrando:

$$I = \frac{4}{3}t + C\ .$$

Ahora bien, como los ingresos iniciales son de 6 millones de euros, podemos calcular la constante *C*.

$$I(0) = 6 \Rightarrow \frac{4}{3} * 0 + C = 6 \Rightarrow C = 6$$

Respecto a los gastos tenemos que:

$$\frac{dG}{dt} = 3(I - G) = 3\left(\frac{4}{3}t + 6 - G\right) = 4t + 18 - 3G$$

Es decir, que se tiene la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dG}{dt} + 3G = 4t + 18\ .$$

Por tanto, aplicando la fórmula expuesta anteriormente cuando se definían este tipo de ecuaciones diferenciales se tiene que:

$$G(t)e^{\int 3dt} = \int (4t + 18)e^{\int 3dt}dt + C.$$

Así.

$$G(t)e^{3t} = \int (4t + 18)e^{3t} + C.$$

Y calculando la integral:

$$G(t)e^{3t} = 2e^{3t}\left(\frac{25}{9} + \frac{2t}{3}\right) + C,$$

de donde, despejando G(t):

$$G(t) = 2\left(\frac{25}{9} + \frac{2t}{3}\right) + Ce^{-3t}.$$

Finalmente, teniendo en cuanta que los gastos iniciales son de 2 millones de euros:

$$G(0) = 2\left(\frac{25}{9} + \frac{2 * 0}{3}\right) + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \frac{50}{9} = \frac{-32}{9}.$$

Así, la función de gastos es:

$$G(t) = 2\left(\frac{25}{9} + \frac{2t}{3}\right) - \frac{32}{9}e^{-3t}.$$

Una vez calculada la función de ingresos y gastos, se tiene que la función de beneficios de la empresa es:

$$B(t) = I(t) - G(t) = \frac{4}{3}t + 6 - 2\left(\frac{25}{9} + \frac{2t}{3}\right) + \frac{32}{9}e^{-3t},$$

que simplificando:

$$B(t) = \frac{4}{9} + \frac{32}{9}e^{-3t}.$$

De esta forma, cuando el tiempo *t* se va haciendo grande el beneficio de la empresa se hace estable entorno a 4/9 millones de euros puesto que:

$$\lim_{t\to 0} B(t) = \lim_{t\to 0}\frac{4}{9} + \frac{32}{9}e^{-3t} = \frac{4}{9}$$

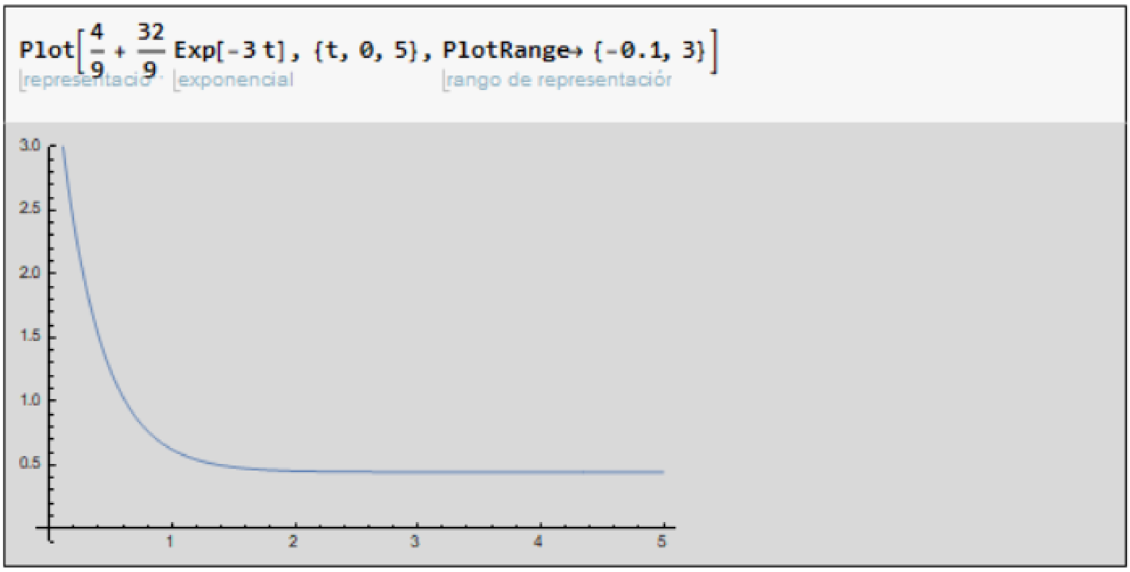


Figura 5.2.1 Representación gráfica de la función beneficios B(t).

A continuación, observamos los buenos resultados obtenidos al aplicar el método de Taylor de orden 2 a la hora de resolver el P.V.I.

$$\begin{cases} G'(t) + 3G = 4t + 18 \\ G(0) = 2\,. \end{cases}$$

Vamos a proceder ahora con la resolución.

Utilizamos el programa *Wolfram Mathematica®* aplicando el método de Taylor, para un paso de discretización $h = 0.1$.

```
f[t_, G_] := -3 G + 4 t + 18
t[0] = 0; G[0] = 2; n = 50.; h = 0.1;
f[1][t_, G_] = D[f[t, G], t] + D[f[t, G], G] * f[t, G];
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, t[j] = t[0] + j * h;
 G[j] = G[j - 1] + h * f[t[j - 1], G[j - 1]] + h^2 / 2 * f[1][t[j - 1], G[j - 1]]]
grafica = Plot[2/9 (25 - 16 e^(-3 t) + 6 t), {t, 0, 5}];
taylor = ListPlot[Table[{t[j], G[j]}, {j, 0, n}]];
Show[grafica, taylor]
```

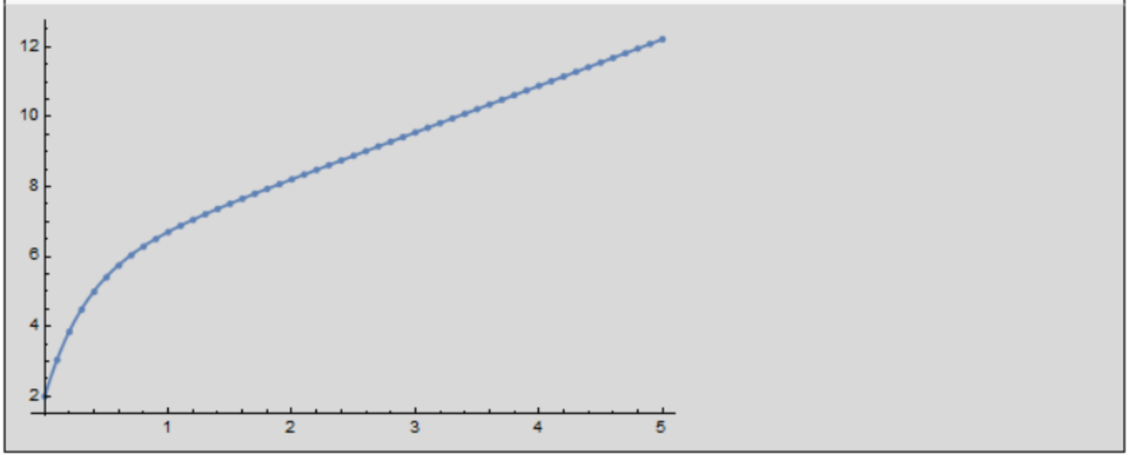


Figura 5.2.2 Representación gráfica mediante el método de Taylor para un h=0.1 de la función de gastos G(t).

5.3 Crecimiento de la población

Otro problema que puede ser interesante tratar es el crecimiento de la población. El caso estudiado trata sobre la introducción de una especie invasora en un ecosistema utilizado con un fin productivo, suponiendo que quieras usarlo como remedio a un problema ambiental. Esto implica que los recursos que se destinan a la especie que se desea producir se desaprovechan o incluso se tengan que destinar recursos para combatir la destrucción del ecosistema de producción.

El problema establece que la población de la especie invasora crece de manera exponencial, de modo que en un momento inicial se calculó una población de especie invasora de 60.000 unidades y 4 años más tarde, dicha población ascendía a 80.000. En función del tiempo t (t = años), este crecimiento queda dado por la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP,\ \ P(t_0) = t_0$$

Para calcular la solución general, podemos obtenerla mediante integración:

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{p} = kdt \Rightarrow \int \frac{dP}{p} = \int kdt \Rightarrow \ln P = k \int dt$$

Así:

$$\ln P = kt + C_1.$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{(kt+C_1)} = e^{(kt)} * e^{C_1} = Ce^{(kt)}\,,$$

la solución general es:

$$P = e^{kt}C.$$

El problema nos da dos condiciones:

$$t = 0 \;\rightarrow P(0) = 60.000$$

$$t = 4 \;\rightarrow P(4) = 80.000$$

Entonces resultaría el siguiente sistema de dos ecuaciones con las incógnitas k y C:

$$60.000 = e^0 C = C$$

$$80.000 = e^{4k}C.$$

De la primera ecuación se tiene que C = 60.000 , y así, sustituyendo en la segunda,

$$\frac{80.000}{60.000} = e^{4k},$$

de donde aplicando logaritmos neperianos:

$$0.285178 = 4k \Rightarrow k = \frac{0.285178}{4} = 0.0712945$$

Por lo tanto, la solución particular para cualquier momento de tiempo t, sería:

$$60.000 = P_0 e^{0.0712945\,t}$$

Teniendo la ecuación diferencial y las condiciones iniciales se puede plantear como un problema de valores iniciales y resolverlo así con cualquiera de los métodos anteriormente estudiado. En este caso utilizaremos el método de Runge-Kutta.

Comprobemos primero que la solución que hemos obtenido es la correcta utilizando el comando DSolve

```
k = 0.0712945;
DSolve[{p'[t] == k*p[t], p[0] == 60000}, p, t]
resolvedor diferencial

{{p → Function[{t}, 60000. e^(0.0712945 t)]}}
```

Figura 5.3.1 Cálculo de la solución particular del P.V.I. considerado con el comando DSolve.

Utilizando el método de Runge-Kutta para aproximar la solución, obtenemos:

```
f[t_, p_] := k*p
t[0] = 0; p[0] = 60000; h = 0.10; n = 50;
K1[t_, p_] := f[t, p]
K2[t_, p_] := f[t + h/2, p + h/2*f[t, p]]
K3[t_, p_] := f[t + h/2, p + h/2*K2[t, p]]
K4[t_, p_] := f[t + h, p + h*K3[t, p]]
For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1, t[j] = t[0] + j*h;
para cada
 p[j] = p[j - 1] + h/6 (K1[t[j - 1], p[j - 1]] +
      2*K2[t[j - 1], p[j - 1]] + 2 K3[t[j - 1], p[j - 1]] + K4[t[j - 1], p[j - 1]])]
grafica = Plot[60000* Exp[0.0712945* t], {t, 0, 5}];
              representació··· exponencial
rungekutta = ListPlot[Table[{t[j], p[j]}, {j, 0, n}]];
                 represent··· tabla
Show[grafica, rungekutta]
muestra
```

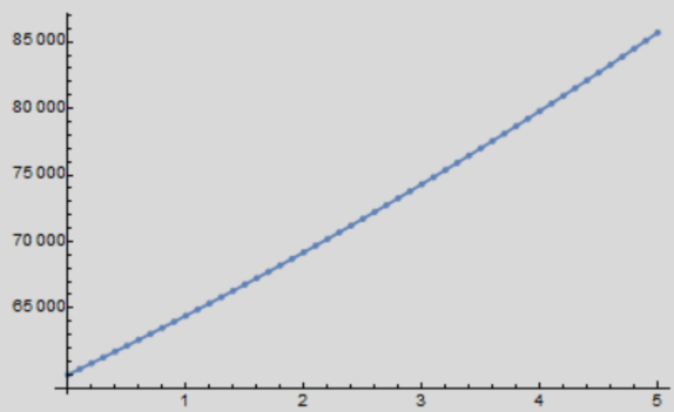


Figura 5.3.2 Representación gráfica mediante el método de Runge-Kutta para un h=0.1 del P.V.I. considerado.

6. CONCLUSIONES

Como hemos podido comprobar, gracias a las ecuaciones diferenciales podemos modelizar ciertas situaciones en las que, sin las herramientas matemáticas adecuadas, serían complicadas de estudiar.

Las ecuaciones diferenciales se pueden aplicar en muchos problemas de la vida cotidiana, no solo en el ámbito de las ciencias puras. Nos pueden facilitar la obtención de tipos de interés, crecimientos de la población, gestión de inventarios, estimaciones de la oferta y la demanda, evolución de precios o beneficio de una empresa. Como hemos visto en los casos anteriormente explicados, los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para estudiar esos casos.

Es cierto que en el planteamiento de los problemas está muy simplificado e intervienen una gran amplitud de variables que no se contemplan, pero sirven para entender la aplicación de los métodos de resolución de problemas de valores iniciales.

El caso del crecimiento de la población lo hemos abordado como un problema de Economía ecológica, pero podría extrapolarse al caso de la población mundial y su estudio podría tener más aplicaciones.

En este trabajo hemos utilizado los tres métodos para la resolución numérica de problemas de valores iniciales que hemos desarrollado al principio, los métodos de Euler, Taylor y Runge-kutta, pero es cierto que el método de Runge-Kutta es el método que menos error tiene y por consecuencia da unos resultados más aproximados a los valores exactos.

Como conclusión, este análisis ha sido de utilidad para exponer que las ciencias matemáticas son útiles en el estudio económico brindando soluciones cercanas a las obtenidas en situaciones reales.

7. BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

[1] BENÍTEZ LÓPEZ, JULIO *El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad (2008).

[2] BLANCHARD, PAUL; DEVANEY ROBERT L. Y HALL GLEN R.. *Ecuaciones diferenciales*. International Thompson (1999).

[3] BOYCE WILLIAM E. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa (2015).

[4] CAICEDO B., ALFREDO; GARCÍA U., JORGE MARIO Y OSPINA M., LILIANA PATRICIA. *Métodos para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ediciones Elizoom. (2010).

[5] CORCHO SÁNCHEZ, PAULA I. Y CORCHO, PEDRO. *Ecuaciones diferenciales para las licenciaturas de Economía y Administración de Empresas*. Universidad de Extremadura (2003).

[6] NÁPOLES, JUAN E. y NEGRÓN SEGURA, CARLOS. *La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto*. Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas (2002).

[7] REYES ORTIZ, GIOVANNI E. *Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas.* Editorial Universidad del Rosario (2012).

[8] *Historia de las ecuaciones diferenciales. Alden Analytics LLC - Cary, NC.* Recuperado de *https://www.preceden.com/timelines/272302-historia-de-las-ecuaciones-diferenciales*

[9] *Introducción a las ecuaciones diferenciales.* Recuperado de https://www.monografias.com/trabajos97/introduccion-ecuaciones-diferenciales-teoria-y-ejemplos-resueltos/introduccion-ecuaciones-diferenciales-teoria-y-ejemplos-resueltos.shtml

[10] MURRAY R. SPIEGEL. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. (1983).

[11] ZILL, DENNIS G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica.(1986).

[12] ZILL, DENNIS G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Leaming (2009).