



Universidad de Jaén

Facultad de Ciencias Sociales
y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

ECUACIONES EN DIFERENCIAS. APLICACIONES

Alumno: Álvaro Contreras Ballesteros

Junio, 2020

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	4
2. ECUACIONES EN DIFERENCIAS	11
2.1. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS	11
2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES	13
2.2.1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEAS	14
2.2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES COMPLETAS	17
3. APLICACIONES ECONÓMICAS.....	21
3.1. MODELO DE LA TELARAÑA.....	21
3.2. MODELO MULTIPLICADOR DE LA RENTA	24
3.3. MODELO MULTIPLICADOR-ACELERADOR DE SAMUELSON	26
3.4. MODELO DE EXISTENCIAS DE ALMACÉN.....	29
3.5. MODELO DE AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO	32
4. CONCLUSIONES	34
5. BIBLIOGRAFÍA:.....	35
5.1. ARTÍCULOS DE REVISTAS	36
5.2. WEBGRAFÍA:	36
5.3. PROGRAMAS:	36

ABSTRACT

In this Final Project of Degree, it's studying equations in differences and it showing example of application to resolution of economics models.

While differences equations are using to resolve continuous models, equations in differences are using to resolve discrete models. So, it presented some definition and results in methods of resolving of differences lineal equations, it will explain the principal object of this Final Project of Degree that it will resolve of some economics models. In this way, the Cobweb Model, a Loan Amortization Model, a Warehouse Stock Model, the Samuelson Multiplier Model and an Income Multiplier Model are studied. At the same time, the Wolfram Mathematica® program will be used to show how differences in equations can be solved both analytically and graphically using symbolic calculation programs.

RESUMEN

En el presente Trabajo Fin de Grado se estudian las ecuaciones en diferencias y se muestran ejemplos de aplicación para la resolución de modelos económicos.

Mientras que las ecuaciones diferenciales son utilizadas para la resolución de modelos continuos, las ecuaciones en diferencias se utilizan para la resolución de modelos discretos. Así, tras presentar algunas definiciones y resultados conocidos en cuanto a métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales, se llegará al objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado que será la resolución de algunos modelos económicos. De esta forma se estudiarán el Modelo de Telaraña, un Modelo de Amortización de un Préstamo, un Modelo de Existencias de Almacén, el Modelo Multiplicador de Samuelson y un Modelo Multiplicador de la Renta. Al mismo tiempo se utilizará el programa Wolfram Mathematica® para mostrar como las ecuaciones en diferencias pueden ser resueltas tanto analítica como gráficamente mediante programas de cálculo simbólico.

1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo de introducción se van a dar unas primeras definiciones y ejemplos tanto de ecuaciones diferenciales como de ecuaciones en diferencias. Consideramos que es interesante indicar que en el programa de la asignatura de Matemáticas II para el Grado en Administración y Dirección de Empresas se dedica un tema al estudio de las ecuaciones diferenciales y algunos métodos elementales de solución, mientras que no se abordan las ecuaciones en diferencias. Tanto unas como otras resultan de gran interés para la resolución de problemas de las ciencias experimentales y sociales en los que se trata del estudio de la evolución temporal de determinadas variables. La diferencia fundamental entre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias es que en las primeras se consideran **variables continuas** (toman valores en intervalos de números reales) mientras que en las segundas se consideran **variables discretas** (toman valores en números enteros o naturales).

Las ecuaciones diferenciales comenzaron a desarrollarse a finales del siglo XVII, coincidiendo con el desarrollo del cálculo diferencial e integral. En un principio surgieron para dar respuesta a problemas concretos de la Física tales como elasticidad, movimiento de un péndulo, atracción gravitatoria, etc. De forma general podemos decir que una ecuación diferencial representa un modelo matemático en el que interviene una variable x que depende del tiempo t ; es decir, $x = x(t)$, y en la que interviene también la derivada $x'(t)$, que es la variación instantánea de $x(t)$. Recordamos a continuación algunas definiciones básicas para ecuaciones diferenciales ordinarias, de las cuales después veremos las correspondientes para ecuaciones en diferencias.

Definición 1.1.- Una *ecuación diferencial ordinaria* es una función que muestra la siguiente forma:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

La variable dependiente y depende de un valor independiente x , es decir, que $y = y(x)$. Además, x no toma valores sólo en un punto, sino que recorre uno o varios intervalos en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Definición 1.2.- Se llama *orden de una ecuación diferencial ordinaria* al orden de la derivada más alta de la variable dependiente que aparece en la ecuación diferencial.

Por ejemplo,

$$y'' - y' + 5x = 0$$

es una ecuación diferencial de orden 2; mientras que

$$y'''(x) + 4\operatorname{sen}(x) + y'(x) = 0$$

es una ecuación diferencial orden 3.

Si la variable dependiente y sus derivadas sucesivas aparecen con forma polinómica, entonces se puede definir el grado de la ecuación diferencial ordinaria. En este sentido se tiene la siguiente definición.

Definición 1.3.- Cuando la variable dependiente y sus derivadas sucesivas aparecen en forma polinómica, se define el **grado de una ecuación diferencial ordinaria** como el mayor exponente al que aparece elevada la derivada de mayor orden.

Así, por ejemplo, $(y'')^5 + y' - 5 = 0$, es una ecuación diferencial de orden 2 y grado 5.

En el caso de que se esté analizando un fenómeno temporal se suele cambiar la variable independiente x por t para representar ese espacio temporal.

En general, la solución de una ecuación diferencial de orden n involucra n constantes (es lo que se denomina **solución general**). Es por esto que ningún fenómeno queda totalmente determinado por una ecuación diferencial sino que para ello habrá que proporcionar además unas condiciones iniciales en un momento inicial t_0 , teniendo así un **problema de valores iniciales**.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

es un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria de orden uno. Análogamente, para una ecuación diferencial ordinaria de orden n un problema de valores iniciales viene dado por:

$$\begin{cases} F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y'(t_0) = y_0 \\ y''(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

En general, cuando son ciertas determinadas condiciones de regularidad, los problemas de valores iniciales tienen solución única. Finalmente, recordemos que se llama **solución particular** a una solución de la ecuación diferencial en la que no intervienen constantes.

Ejemplo 1.1.- Probar que la función $y = Cx + C^2$ es la solución general, en $\mathbb{R}$, de la ecuación diferencial

$$xy' + (y')^2 - y = 0$$

Para comprobar que la solución general de la ecuación recorre todo $\mathbb{R}$, se deriva en la expresión $y = Cx + C^2$. De esta forma, se obtiene que el valor de la derivada es

$$y' = C.$$

Así, sustituyendo en la ecuación diferencial la variable y con la derivada de la misma, y' , se demuestra que es cierta $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.- Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$xy' + (y')^2 - y = 0$$

que pase por el punto $(0, 1)$.

Sabemos que $y = Cx + C^2$ es la solución general de la ecuación diferencial:

$$xy' + (y')^2 - y = 0.$$

De aquí, para obtener una solución particular que pase por el punto $(0, 1)$ sustituimos x por 0 e y por 1 en la expresión de la solución general y obtenemos el valor o valores de la constante C que determinan dicha solución particular:

$$1 = C * 0 + C^2 \rightarrow C = \pm 1.$$

Como vemos se obtienen entonces dos soluciones particulares; a saber, $y = -x - 1$ e $y = x + 1$, lo que pone de manifiesto que por un punto se pueden tener varias soluciones particulares de una ecuación diferencial.

Para resolver determinados tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas de valores iniciales son conocidos algunos métodos como el de variables separadas, ecuaciones diferenciales homogéneas, ecuaciones diferenciales exactas, factores integrantes, etc. Sin embargo, en la práctica es frecuente que los referidos métodos de resolución no nos permitan

obtener la solución exacta de determinados problemas de valores iniciales. En estos casos se tienen dos opciones:

- Calcular soluciones numéricas haciendo uso, por ejemplo, del método de Euler, métodos de Runge-Kutta, etc. (ver Quesada, Molina y Sánchez, 2000).
- Estudiar el comportamiento de las soluciones a través de su campo direccional (ver **Definición 1.4**).

El cálculo de soluciones numéricas de valores de problemas iniciales conllevaría un estudio exhaustivo que no es objeto de este Trabajo Fin de Grado, por lo que a continuación sólo vamos a mostrar un ejemplo de cómo la representación gráfica del campo direccional de una ecuación diferencial de primer orden nos permite visualizar la forma de sus soluciones.

Definición 1.4.- *Dada una ecuación diferencial de primer orden*

$$y' = f(x, y),$$

*se define su **campo direccional** como la representación gráfica de las direcciones asociadas a cada punto (x, y) .*

Observemos que, de acuerdo con la definición de campo direccional, como $y' = dy/dx$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = y(x)$ en el punto (x, y) , en cada punto del plano en el que la función esté definida el valor de dicha pendiente viene dado por $f(x, y)$.

Vemos a continuación el siguiente ejemplo en el que, con la ayuda del programa Wolfram Mathematica®, representamos campos direccionales y soluciones particulares de problemas de valores iniciales.

Ejemplo 1.3.- Representar gráficamente el campo direccional correspondiente a la ecuación diferencial ordinaria $y'(x) = x$. Calcular la solución particular del problema de valores iniciales

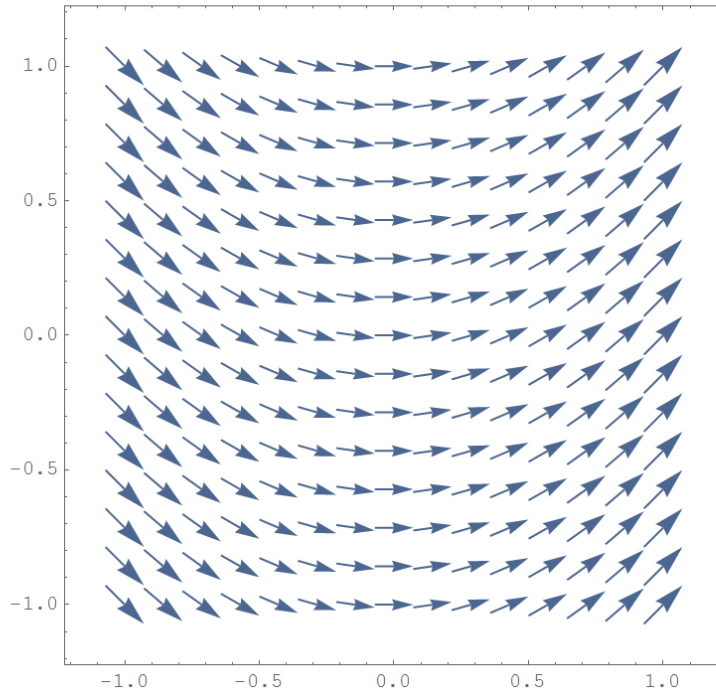
$$\begin{cases} y'(x) = x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

y representar gráficamente esta solución particular superponiéndola al campo direccional.

Resolvemos el ejemplo utilizando el programa Wolfram Mathematica®. En primer lugar hacemos la representación gráfica del campo direccional de la ecuación diferencial $y'(x) = x$ mediante el comando **VectorPlot**:

```
In[1]:= figural = VectorPlot[{1, x}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

```
Out[1]=
```



A continuación, con el comando **DSolve** calculamos la solución general de la ecuación diferencial dada.

```
In[2]:= DSolve[y' [x]==x,y[x],x]
```

```
Out[2]=
```

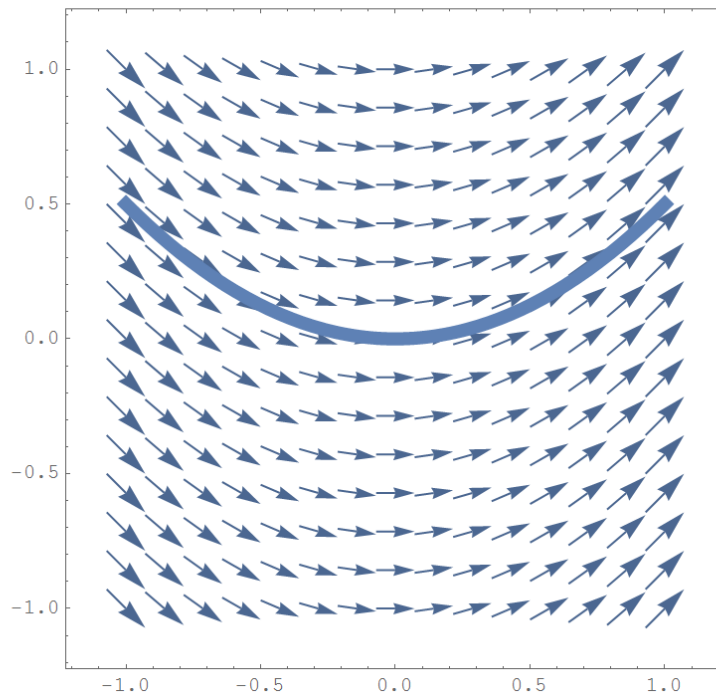
```
{ {y[x] ->  $\frac{x^2}{2} + C[1]$  } }
```

Así, es inmediato ver que en si la solución particular pasa por el punto (0,0), entonces $C[1] = 0$.

Finalmente representamos la referida solución particular y el campo direccional de la ecuación diferencial.


```
In[3]:=
figura2 = Plot[x^2/2, {x, -1, 1}, PlotStyle -> Thickness[0.02]];
Show[{figura1, figura2}]
```

```
Out[4]=
```



Siguiendo con la comparativa que queremos mostrar en esta sección entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias, pasamos a continuación a presentar definiciones y ejemplos análogos a los vistos hasta ahora, pero en este caso para ecuaciones en diferencias.

Las ecuaciones en diferencias surgen para el estudio de modelos matemáticos de fenómenos que evolucionan en el tiempo, pero considerando que la variable t , que representa al tiempo, toma **valores discretos** (valores en el conjunto de los números enteros o naturales). De esta forma, en las ecuaciones en diferencias denotaremos y_t en lugar de $y(t)$ para referirnos al valor de y en el momento t . Así, por ejemplo, las ecuaciones en diferencias se utilizan en operaciones discretas para medir momentos exactos en el tiempo como el pago de un préstamo a lo largo de la vida del mismo, que puede ser en meses o en años.

Presentamos a continuación unas primeras definiciones de ecuaciones en diferencias que serán similares a las vistas anteriormente para ecuaciones diferenciales.

Definición 1.5. - Una *ecuación en diferencias* es una ecuación que se formula de la siguiente manera:

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0.$$

Diremos que y es la variable dependiente y que t es la variable independiente.

Definición 1.6. – Se llama **orden en una ecuación en diferencias** al subíndice mayor que esté sumando a t en la variable dependiente de la ecuación en diferencias.

Por ejemplo:

$$2y_{t+1} + 4y_t + 6 = 0$$

es una ecuación en diferencias de orden 1 y

$$6y_{t+2} + 3y_{t+1} + 24y_t - 18 = 0$$

es una ecuación en diferencias de orden 2.

Las soluciones de una ecuación en diferencias son todas las sucesiones que la verifiquen. Así, de manera similar a como sucedía en las ecuaciones diferenciales, también ahora distinguiremos entre soluciones generales, en las que intervienen constantes, y soluciones particulares. La solución general de una ecuación en diferencias de orden n involucra n constantes. De esta forma se tendrán que establecer n condiciones iniciales para poder obtener una solución particular.

Resolvemos a continuación con la ayuda del programa Wolfram Mathematica® una ecuación en diferencias de orden 2.

Ejemplo 1.4.- Resolver, con el comando RSolve del programa Wolfram Mathematica®, la ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 0$$

Representar gráficamente alguna solución particular.

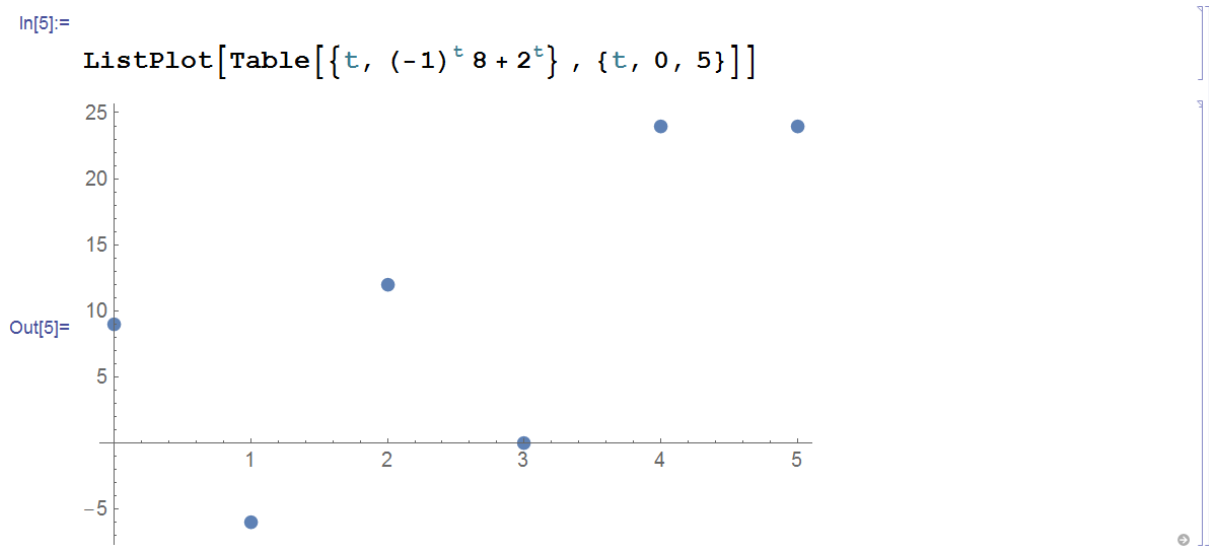
Obtenemos en primer lugar la solución general de la ecuación en diferencias.

```
In[4]:= RSolve[y[t + 2] - y[t + 1] - 2 y[t] == 0, y[t], t]
```

```
Out[4]= {{y[t] -> (-1)^t C[1] + 2^t C[2]}}
```

Como vemos, esta solución general involucra 2 constantes, puesto que la ecuación en diferencias es de orden 2.

También con el programa Wolfram Mathematica® podemos representar gráficamente las soluciones particulares. Así, por ejemplo, representamos a continuación la solución particular cuando $C[1] = 8$ y $C[2] = 1$.



Observar que en la representación gráfica se consideran los valores enteros de t en el intervalo $[0, 5]$; es decir, se consideran valores discretos.

Tras esta sección de introducción donde se han visto algunas similitudes entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias, pero donde también se ha puesto de manifiesto la diferencia fundamental entre ambas, en cuanto a que, en las primeras, las variables son continuas y en las segundas, las variables son discretas, nos centramos a continuación en el estudio de métodos de resolución de determinados tipos de ecuaciones en diferencias.

2. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Las ecuaciones en diferencias son una herramienta que ha ido adquiriendo protagonismo con el paso del tiempo, ya que se ha incrementado la importancia de su estudio en hechos discretos y en la simulación de los mismos.

2.1. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS

Definición 2.1.- Una ecuación en diferencias será lineal de orden n cuando su expresión sea:

$$y_{t+n} + a_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)y_{t+1} + a_n(t)y_t = b(t)$$

Por ejemplo,

$$y_{t+1} + 5ty_t = 5$$

es una ecuación en diferencias lineal de orden 1.

Definición 2.2.- Una ecuación lineal en diferencias es **homogénea** cuando $b(t)$ es igual a 0, es decir, puede escribirse de la siguiente forma:

$$y_{t+n} + a_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)y_{t+1} + a_n(t)y_t = 0$$

Por ejemplo,

$$y_{t+1} + 2y_t = 0$$

es una ecuación lineal en diferencias homogénea de orden 1.

Si $b(t) = 0$, entonces se dice que la ecuación en diferencias es **completa**.

Definición 2.3.- Una ecuación lineal en diferencias de orden n se dice que es de **coeficientes constantes** si puede escribirse en la forma:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0.$$

Es decir, los coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ no dependen de t

Así, por ejemplo,

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 1$$

sería una ecuación lineal en diferencias de orden 2 y con coeficientes constantes, ya que $a_1 = -2$ y $a_2 = 3$, no dependen de t .

Ejemplo 2.1.- Clasifica las siguientes ecuaciones en diferencias según sean lineales o no, según su orden, y si son homogéneas o de coeficientes constantes:

- a) $5y_{t+2} + 8y_t = 4$
- b) $y_{t+1} + y_t = 0$
- c) $3y_{t+1} + \cos(2y_t) = 8$
- d) $y_{t+2} + y_t = 2 + \tan t$
- e) $y_{t+3} - 8y_{t+1} = y_t$
- f) $y_{t+3} - 3 \cos y_t = 3$
- g) $y_{t+2} - 7e^t + y_t = 3$
- h) $51y_{t+5} + 14y_t = 2$
- i) $y_{t+1} + e^{y_t} = 0$

Recordemos que en la **definición 1.6.**, el orden es el mayor subíndice que esté sumando a t en la variable dependiente que haya en la ecuación en diferencias.

- a) Es una ecuación lineal, no homogénea y con coeficientes constantes con orden 2.
- b) Es una ecuación lineal, homogénea y con coeficientes constantes con orden 1.

- c) Es una ecuación no lineal, porque el valor y_t está afectado por el coseno, no homogénea y con coeficientes constantes.
- d) Es una ecuación lineal (aunque haya una tangente en la ecuación esta afecta a t , no a y_t), no homogénea y sin coeficientes constantes con orden 1.
- e) Es una ecuación lineal, no homogénea y con coeficientes constantes con orden 3.
- f) Es una ecuación no lineal, porque el valor y_t está afectado por el coseno, no homogénea y con coeficientes constantes.
- g) Es una ecuación lineal (aunque este el valor e en la ecuación esta afecta a t , no a y_t), no homogénea y sin coeficientes constantes con orden 1.
- h) Es una ecuación lineal, homogénea y con coeficientes constantes con orden 5.
- i) Es una ecuación no lineal, porque el valor y_t está afectado por el valor e , no homogénea y sin coeficientes constantes.

2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección se estudian los procedimientos de resolución de ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes, ya que éstas son las más utilizadas en el estudio de modelos económico discretos. Las demostraciones de los Teoremas 1, 2 y 3 pueden consultarse en los libros Gutiérrez, Balbás y Gil, (1998), y Pérez-Grasa, Minguillón y Jarne (2001).

Definición 2.4. – Dada la ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0$$

definimos su **polinomio característico** como

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

y su **ecuación característica**

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Así, por ejemplo, dada la ecuación lineal en diferencias, homogénea y con coeficientes constantes:

$$y_{t+4} + 3y_{t+3} + 2y_{t+2} + y_t = 0,$$

su ecuación característica es:

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

2.2.1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEAS

Los Teoremas 1 y 2 que vemos a continuación nos van a proporcionar un método para el cálculo de la solución general de una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes y homogénea.

Teorema 1.- Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal en diferencias homogénea y con coeficientes constantes

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0,$$

entonces su solución general viene dada por:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$$

donde $C_i, i = 1, 2, \dots, n$, son constantes.

Teorema 2.- Dada la ecuación lineal en diferencias homogénea y con coeficientes constantes

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0,$$

se tiene que:

1. Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es raíz con multiplicidad m ($m \leq n$) de su polinomio característico, entonces

$$\lambda_0^t, t\lambda_0^t, \dots, t^{m-1}\lambda_0^t$$

son m soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias.

2. Si $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$ son raíces complejas simples de su polinomio característico, entonces

$$r^t \cos \alpha t \quad y \quad r^t \sin \alpha t$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias, siendo

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad y \quad \alpha = \arctan \frac{b}{a}.$$

3. Si $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$ son raíces complejas con multiplicidad m ($2m \leq n$) de su polinomio característico, entonces

$$r^t \cos \alpha t, r^t \sin \alpha t, t r^t \cos \alpha t, t r^t \sin \alpha t, \dots, t^{m-1} r^t \cos \alpha t, t^{m-1} r^t \sin \alpha t,$$

son $2m$ soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias.

4. Todas las soluciones consideradas en los apartados anteriores son también linealmente independientes.

De acuerdo con los Teoremas 1 y 2, resolveremos a continuación ejemplos en los que se obtienen las soluciones generales de algunas ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes y homogéneas.

Ejemplo 2.2.- Calcular la solución general de la ecuación lineal en diferencias de orden 1, homogénea y con coeficientes constantes:

$$y_{t+1} + 2y_t = 0.$$

Dado que la ecuación en diferencias es de orden 1, de acuerdo con el Teorema 1, su solución general será de la forma $C_1 u_1$, siendo u_1 una solución particular y C_1 una constante. Ahora bien, teniendo en cuenta el Teorema 2, para obtener la solución u_1 calculamos la raíz de la ecuación característica correspondiente:

$$\lambda + 2 = 0,$$

que obviamente es $\lambda_0 = -2$. Así, por el apartado 1 del Teorema 2 se tiene que una solución de la ecuación en diferencias es

$$u_1 = (-2)^t.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$C_1(-2)^t.$$

Ejemplo 2.3.- Calcular la solución general de la ecuación lineal en diferencias de orden 2, homogénea y con coeficientes constantes:

$$y_{t+2} + 2y_{t+1} - 8y_t = 0.$$

Dado que la ecuación en diferencias es de orden 2, de acuerdo con el Teorema 1, su solución general será de la forma $C_1 u_1 + C_2 u_2$, siendo u_1 y u_2 soluciones linealmente independientes; y C_1 y C_2 constantes. Ahora bien, teniendo en cuenta el Teorema 2, para obtener las soluciones u_1 y u_2 , calculamos las raíces de la ecuación característica correspondiente:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0.$$

Al tratarse de una ecuación de segundo grado, las soluciones de las raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -4$, por lo que

$$u_1 = 2^t \text{ y } u_2 = (-4)^t$$

son soluciones linealmente independientes, según el apartado 4 del Teorema 2.

Por tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 (-4)^t.$$

Ejemplo 2.4.- Resuelve la ecuación en diferencias homogénea y con coeficientes constantes:

$$y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0.$$

Dado que la ecuación en diferencias es de orden 2, su solución general será de la forma $C_1 u_1 + C_2 u_2$, siendo u_1 y u_2 soluciones particulares; y C_1 y C_2 las constantes, de acuerdo con el Teorema 1. Ahora bien, teniendo en cuenta el Teorema 2, para obtener las soluciones u_1 y u_2 , calculamos la raíz de la ecuación característica correspondiente:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Las soluciones de las raíces son:

$$\lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

Como el resultado de las raíces tienen la forma $a + bi$ donde $a = -1$ y $b = \pm 2$, de acuerdo con el Teorema 2 apartado 2, calculamos los valores de r y la arco tangente

El cálculo de r es:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = 1,$$

y el arco tangente:

$$\alpha = \arctg \frac{2}{-1} = -2$$

Así,

$$1^t \cos(-2t) \text{ y } 1^t \sin(-2t)$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias.

Finalmente, por el Teorema 1 se concluye que la solución general es

$$y_t = C_1 1^t \cos(-2t) + C_2 (-2)^t \sin(-2t).$$

2.2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES COMPLETAS

Teorema 3.- Dada la ecuación lineal en diferencias completa y coeficientes constantes:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = b(t),$$

su solución general es:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n + V$$

donde $u_1, u_2, \dots, u_n$ son soluciones linealmente independientes de la correspondiente ecuación lineal en diferencias homogénea

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0$$

y V es una solución particular de la ecuación en diferencias completa.

De acuerdo con este Teorema 3, y teniendo en cuenta los resultados vistos en la anterior sección para ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes y homogéneas, se contemplan a continuación diferentes casos dependiendo de la forma del término independiente de la ecuación en diferencias.

El **método de los coeficientes indeterminados** consiste en buscar una solución particular V dependiendo de la forma de $b(t)$. Se distinguirán los siguientes cuatro casos:

Caso 1. Si $b(t) = \alpha \beta^t$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no nulos y $p(\beta) \neq 0$, entonces se buscará una solución particular de la forma $V = C \beta^t$, siendo C una constante.

Caso 2. Si $b(t) = \alpha \beta^t$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no nulos y β es raíz con multiplicidad k del polinomio característico $p(\lambda)$, entonces se buscará una solución particular $V = C t^k \beta^t$, con C constante.

Caso 3. Si $b(t)$ es un polinomio de grado m , entonces el método de coeficientes indeterminados consiste en buscar una solución particular V que sea un polinomio de grado menor o igual que m .

Caso 4. Si $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, entonces se puede calcular una solución particular $V = V_1 + V_2$, donde V_1 sería la solución particular de la ecuación completa con término independiente $b_1(t)$ y V_2 sería la solución particular de la ecuación completa con término independiente $b_2(t)$.

De acuerdo con el Teorema 3, los anteriores Teoremas 1 y 2, y los distintos casos de método de los coeficientes indeterminados, resolvemos a continuación ejemplos en los que se obtienen

las soluciones generales de algunas ecuaciones lineales en diferencias completas con coeficientes constantes.

Ejemplo 2.5.- Obtén la solución general de la ecuación lineal en diferencias de orden 1, no homogénea y con coeficientes constantes:

$$5y_{t+1} + 10y_t = 15.$$

En primer lugar, se simplifica la ecuación, sacando factor común de 5:

$$y_{t+1} + 2y_t = 3.$$

Como vimos en el Ejemplo 2.2., la solución general de la correspondiente ecuación homogénea es:

$$y_t = C_1(-2)^t$$

Como se dijo en el Teorema 3, para obtener una solución general de una ecuación lineal en diferencias no homogénea, hay que calcular una solución particular de la ecuación completa. Dado que $b(t) = 3$ probamos a encontrar una solución particular que sea una constante, según el Caso 3 del método de los coeficientes indeterminados. Así, si $y_t = C$ para todo t , se tiene que

$$C + 2C = 3$$

Por tanto,

$$C = 3$$

De esta forma, de acuerdo con el Teorema 3, la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea es:

$$y_t = C_1(-2)^t + 3.$$

Ejemplo 2.6.- Calcula la solución general de la ecuación lineal en diferencias de orden 2 y con coeficientes constantes:

$$y_{t+2} + 2y_{t+1} - 8y_t = 4.$$

Como en el ejemplo anterior se trataría de calcular la solución general de la ecuación en diferencias homogénea, que se ha calculado en el Ejemplo 2.3., es:

$$C_1 2^t + C_2(-4)^t$$

Por el Caso 3 del método de coeficientes indeterminados, se buscará la solución particular de la ecuación en diferencias a través de la resolución de la ecuación de grado 1:

$$C + 2C - 8C = 4.$$

Así,

$$C = -\frac{4}{5},$$

y, por el Teorema 3, la solución general de la ecuación en diferencias completa es:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 (-4)^t - \frac{4}{5}.$$

Ejemplo 2.7.- Calcula la solución general de la ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes de orden 2:

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3^t + 2.$$

La ecuación homogénea correspondiente es:

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0.$$

Se sustituye la incógnita para obtener la ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

y las raíces de la ecuación son

$$\lambda = \frac{6}{2} = 3.$$

Como la solución general es una raíz doble, es decir, las soluciones de ambas λ son iguales, seguiremos resolviendo la ecuación a través del Teorema 2 apartado 2.

La solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_t = C_1 3^t + C_2 t 3^t.$$

Como $b(t)$ en la ecuación en diferencias es una suma de dos términos, se aplicará el Caso 4 del método de coeficientes indeterminados para obtener la solución particular. De acuerdo con el Caso 4, se buscará la solución particular de la exponencial, 3^t (Caso 2), y la solución particular del polinomio 2 (Caso 3).

Para el polinomio, se calcularía como si calculáramos esta ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 2.$$

Este tipo de ecuación ya ha sido explicada con anterioridad por lo que su resultado es:

$$C - 6C + 9C = 2$$

$$4C = 2$$

$$C = \frac{1}{2}.$$

En la exponencial, el cálculo de una solución particular de la ecuación en diferencias es:

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3^t$$

La función y_t será sustituida por $Ct^2\beta^t$ pero solo en caso de que la raíz sea doble. En el caso de que la raíz no fuese doble, habría que sustituirla por $Ct\beta^t$.

Como $\beta = 3$, a través del Caso 2 de los métodos de coeficientes indeterminados, se tiene que

$$y_{t+1} = C(t+1)^2 3^{t+1}$$

$$y_{t+2} = C(t+2)^2 3^{t+2}$$

En nuestra ecuación:

$$C(t+2)^2 3^{t+2} - 6C(t+1)^2 3^{t+1} + 9C(t)^2 3^t = 3^t$$

Sacamos factor común de C:

$$C[(t+2)^2 3^{t+2} - 6(t+1)^2 3^{t+1} + 9(t)^2 3^t] = 3^t$$

Sacamos factor común de 3^t :

$$3^t C[(t+2)^2 3^2 - 6(t+1)^2 3 + 9(t)^2] = 3^t$$

Resolvemos la ecuación paso por paso:

$$3^t C[9(t+2)^2 - 18(t+1)^2 + 9(t)^2] = 3^t$$

$$3^t * C[9 * (t^2 + 4t + 4)^2 - 18 * (t^2 + 2t + 1)^2 + (9t)^2] = 3^t$$

$$3^t C[9t^2 + 36t + 36 - 18t^2 - 36t - 18 + 9t^2] = 3^t$$

$$3^t C[18] = 3^t$$

$$18C = \frac{3^t}{3^t}$$

$$C = \frac{1}{18}.$$

Como tenemos el valor de la constante que queríamos obtener de $Ct^2\beta^t$ sustituimos:

$$\frac{1}{18} t^2 3^t.$$

Para concluir, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_t = C_1 3^t + C_2 t 3^t + \frac{1}{2} + \frac{1}{18} t^2 3^t.$$

3. APLICACIONES ECONÓMICAS

Las ecuaciones en diferencias se han ido aplicando en mayor medida a la economía porque este tipo de ecuaciones modelan de mejor manera los hechos reales. Además, las ecuaciones en diferencias tienen la capacidad de ser útiles tanto en el marco teórico como en el práctico.

3.1. MODELO DE LA TELARAÑA

En una economía existen dos partes fundamentales en el mercado que son: la demanda y la oferta. La **demand**a es la cantidad de bienes y servicios que adquiere un consumidor o una entidad en el mercado a un determinado precio, y la **oferta** es la cantidad de bienes y servicios que una empresa pone a disposición del mercado a un determinado precio. Ambas definiciones llevan consigo dos variables relevantes: el precio y la cantidad.

Cuando un demandante desea adquirir un bien o un servicio tiene en cuenta el precio, es decir, cuanto más bajo sea el precio mayor será la posibilidad de que el cliente lo compre, provocando así un mayor consumo de ese bien o servicio.

Cuando el precio es muy elevado para el demandante, no lo comprará o comprará en menor medida porque no tenga la suficiente capacidad adquisitiva para adquirirlo o sea excesivamente caro respecto al resto de productos competitivos.

Teniendo en cuenta las anteriores afirmaciones, desde la perspectiva de la oferta, las empresas no pueden poner precios excesivamente bajos porque no tendrían beneficios con la venta de bienes o servicios, pero tampoco pueden ser elevados porque no venderían los suficientes bienes para hacer frente al mercado. Como consecuencia de este hecho, se busca un **punto de equilibrio**, es decir, un punto en el que el precio que no sería elevado para los compradores ni lo suficientemente bajo para los vendedores.

A continuación, un ejemplo de cómo se representaría gráficamente con el programa Excel. (Gráfico 1):

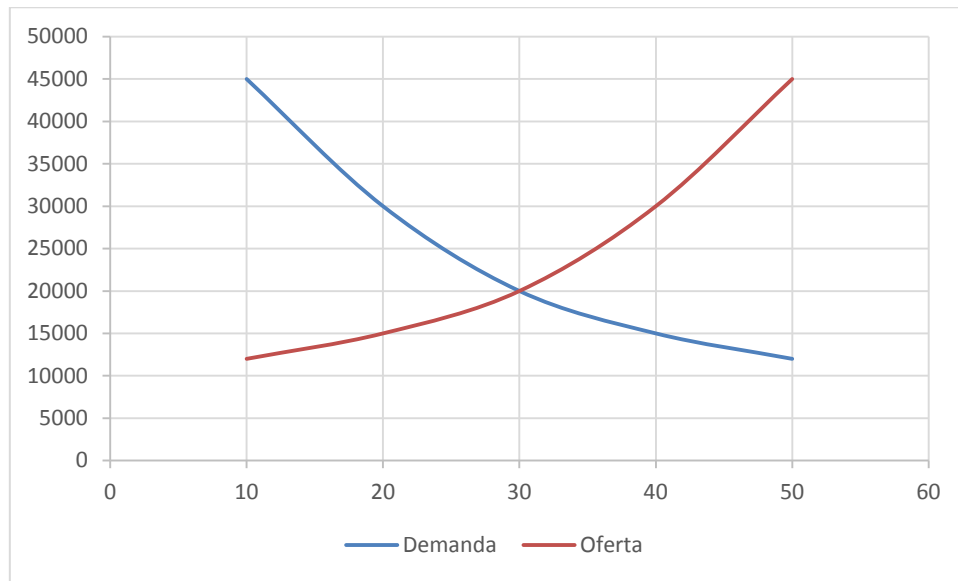


Gráfico 1 Demanda y Oferta. Elaboración propia.

Sin embargo, en la práctica, esto no es suficiente debido a que el **punto de equilibrio** solo mide un instante en el tiempo en un mercado que está en constante cambio. Un ejemplo sencillo sería la venta de dulces navideños. Al principio los dulces tendrán una elevada demanda hasta un nivel en el que hay un exceso de demanda, pero a medida que pasa el tiempo hay más competidores y los clientes no le dan la misma importancia al producto que antes. También hay que tener en cuenta que después de la temporada navideña, tienen una menor demanda. El modelo de la telaraña predice cual sería el precio y la cantidad idónea en diferentes momentos de tiempo.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado el modelo de la telaraña se fundamenta en:

- a) La oferta de un bien o servicio de una empresa depende del precio en el período anterior.

Es decir,

$$S_t = -c + dP_{t-1}$$

- b) La demanda de ese bien o servicio depende del precio en el periodo inicial:

$$D_t = a - bP_t$$

Conociendo la fórmula de la demanda y la oferta podemos obtener la condición de equilibrio, anteriormente mencionada, en el que la oferta debe ser igual a la demanda,

$$S_t = D_t .$$

Podemos ver que:

$$-c + dP_{t-1} = a - bP_t$$

o también

$$-a - c + dP_{t-1} = bP_t$$

$$\frac{-a - c}{b} + \frac{d}{b}P_{t-1} = P_t$$

que finalmente, reordenando los subíndices, puede escribirse en la forma:

$$P_{t+1} + \frac{d}{b}P_t = -\frac{a + c}{b},$$

que es una ecuación lineal en diferencias no homogénea, de orden 1 y con coeficientes constantes.

Veamos a continuación un ejemplo concreto del modelo de la Telaraña.

Ejercicio 3.1. La entidad “Ecuación S.A.”, tras varios estudios, encuentra que la demanda de un bien en el momento t viene dado por

$$D_t = 22 - 3y_t$$

y su oferta en el mismo momento t está determinada por

$$S_t = -2 + y_{t-1}.$$

- Resolver la ecuación en diferencias para el modelo de la telaraña correspondiente.
- Resolver el problema de valores iniciales resultante cuando el precio del bien en el momento inicial es de 18 unidades monetarias.

La ecuación debe cumplir la igualdad $S_t = D_t$. Por lo tanto, la ecuación a resolver es:

$$22 - 3y_t = -2 + y_{t-1}.$$

Reordenando los índices:

$$22 - 3y_{t+1} = -2 + y_t.$$

El siguiente paso es reducir la ecuación:

$$3y_{t+1} + y_t = 24.$$

Dividiendo por 3 quedaría:

$$y_{t+1} + \frac{1}{3}y_t = 8.$$

Se homogeneiza la ecuación y se obtiene su ecuación característica:

$$y_{t+1} + \frac{1}{3}y_t = 0$$

$$\lambda + \frac{1}{3} = 0,$$

cuya solución es:

$$\lambda = \frac{-1}{3}.$$

Entonces, por el Teorema 2 apartado 1, la solución de la ecuación en diferencias homogénea es:

$$C_1 \left(\frac{-1}{3} \right)^t.$$

Para el cálculo de una solución particular de la ecuación en diferencias no homogénea, por el Caso 3 del método de los coeficientes indeterminados,

$$C + \frac{1}{3}C = 8$$

$$C = 6.$$

Así, la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea es:

$$y_t = C \left(\frac{1}{3} \right)^t + 6.$$

Ya obtenida la solución general de la ecuación en diferencias para el apartado a), continuaremos con el apartado b).

Conociendo que el precio en el momento cero que es 18, la constante, C_1 , es:

$$18 = C_1 \left(\frac{1}{3} \right)^0 + 6$$

$$C_1 = 12.$$

Así, la solución del problema de valores iniciales es:

$$y_t = 12 \left(\frac{1}{3} \right)^t + 6.$$

3.2. MODELO MULTIPLICADOR DE LA RENTA

Supongamos que, en una economía, el consumo, Q_t , en un periodo t depende de la renta en el periodo $t - 1$, es decir,

$$Q_t = a + bY_{t-1}$$

donde $a \geq 0$ es llamado consumo autónomo y b que está entre los valores 0 y 1, es la propensión marginal al consumo.

Para que haya una condición de equilibrio en la renta, el modelo debe ser

$$Y_t = Q_t + I_t,$$

donde la inversión, I_t , varía de forma autónoma en un periodo t , siendo constantes en los siguientes periodos; es decir, que partiendo de una inversión inicial I_0 , se produciría un incremento en un periodo determinado de la inversión, ΔI . Así, la inversión en los siguientes periodos vendría dada por:

$$I_t = I = I_0 + \Delta I.$$

Por tanto, sustituyendo en la condición de equilibrio, se obtiene

$$Y_t = Q_t + I_t = a + bY_{t-1} + I,$$

de donde

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I.$$

Reordenando los subíndices:

$$Y_{t+1} - bY_t = a + I,$$

que es una ecuación lineal en diferencias de orden 1, no homogénea con coeficientes constantes.

Vamos a continuación a resolver un ejemplo concreto del Modelo Multiplicador de la Renta.

Ejercicio 3.2. En un país, tras varios estudios, la renta media de un ciudadano se compone: 600 unidades monetarias de consumo autónomo; 400 unidades monetarias de ingreso inicial con un incremento de 75 unidades monetarias; y una propensión marginal de 0,5.

- Resolver la correspondiente ecuación en diferencias para el Modelo Multiplicador de la Renta.
- Resolver el problema de valores iniciales resultante cuando la renta en el momento 0 es de 1200 unidades monetarias.

Sustituyendo con los datos del enunciado en la ecuación obtenemos

$$Y_{t+1} - 0,5Y_t = 600 + 475.$$

La variable ingresos se ha obtenido a través de

$$I_t = I_0 + \Delta I = 400 + 75 = 475.$$

Por tanto, la ecuación en diferencias a resolver es

$$Y_{t+1} - 0,5Y_t = 1075.$$

Su correspondiente ecuación homogénea es

$$Y_{t+1} - 0,5Y_t = 0,$$

y su ecuación característica

$$\lambda - 0,5 = 0$$

tiene raíz $\lambda = 0,5$.

La solución general de la ecuación en diferencias homogénea es

$$Y_t = C(0,5)^t.$$

Se obtiene la solución particular de la ecuación en diferencias, como se indica en el Caso 3 de los métodos de coeficientes indeterminados, que es

$$C - 0,5C = 1075$$

$$C = \frac{1075}{0,5} = 2150.$$

Con las soluciones que hemos calculado anteriormente obtenemos que la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea es

$$Y_t = C_1(0,5)^t + 2150.$$

Resuelto la ecuación en diferencias del apartado a), pasaremos a resolver el problema de valores iniciales del apartado b).

Al conocer el valor de $Y_0 = 1200$, planteamos la solución de C .

$$1200 = C(0,5)^0 + 2150.$$

$$C = -950.$$

Así, la solución del problema de valores iniciales es

$$Y_t = -950(0,5)^t + 2150.$$

3.3. MODELO MULTIPLICADOR-ACELERADOR DE SAMUELSON

El modelo multiplicador-acelerador de Samuelson mide la renta nacional de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Y_t = Q_t + I_t + G_0 \\ Q_t = zY_{t-1} \\ I_t = w(Q_t - Q_{t-1}) \end{cases}$$

donde los parámetros z y w cumplen: $w > 0$ y $0 < z < 1$. Las variables dependientes Y_t , Q_t e I_t representan la renta, el consumo y la inversión nacional en cada período t , respectivamente, y G_0 representa el gasto público.

La primera ecuación es una condición de equilibrio que iguala los ingresos de la renta y los gastos del consumo, de la inversión y del gasto público.

En la segunda ecuación, z es un porcentaje de la renta obtenida en el periodo anterior debido a que z debe ser mayor a cero y menor a 1, representando así la propensión del consumo marginal al consumo.

En la tercera ecuación, la variable inversión en un periodo t es proporcional al incremento del consumo en los distintos periodos consecutivos, es decir, de la diferencia entre Q_t y Q_{t-1} . La constante w es el factor de aceleración de la inversión, es decir, es el efecto positivo que tiene el crecimiento económico sobre la inversión. Todo esto basado en la variación del consumo.

Para obtener la ecuación en diferencias que represente la evolución de Y_t :

- 1) Sustituimos las variables de consumo (Q_t) e inversión nacional (I_t) del modelo en la primera ecuación. Obtenemos,

$$Y_t = zY_{t-1} + w(Q_t - Q_{t-1}) + G_0.$$

- 2) Sustituimos Q_t , de nuevo, en esta expresión y conseguimos

$$Y_t - z(1 + w)Y_{t-1} + wzY_{t-2} = G_0.$$

- 3) Reordenando índices

$$Y_{t+2} - z(1 + w)Y_{t+1} + wzY_t = G_0.$$

A continuación, se resolverá un ejemplo sobre el modelo multiplicador-acelerador de Samuelson.

Ejercicio 3.3. En un país, la renta nacional (Y_t) en millones de euros, en el periodo t , se estructura como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} Y_t = Q_t + I_t + G_0 \\ Q_t = zY_{t-1} \\ I_t = w(Q_t - Q_{t-1}), \end{cases}$$

donde $G_0 = 8$ millones de euros es el gasto gubernamental constante, $z = \frac{1}{3}$ es el porcentaje de la renta nacional del año anterior que se dedica al consumo en este año y $w = \frac{1}{10}$ es el coeficiente acelerador.

- a) Resolver la ecuación en diferencias para el modelo multiplicador-acelerador de Samuelson.

- b) Resolver el problema de valores iniciales resultante cuando la renta en 2020, el momento inicial, es de 10 millones de euros y en 2021 es de 10,2 millones de euros.

Con los datos que nos dan, las ecuaciones del modelo de Samuelson quedan como:

$$\begin{cases} Y_t = Q_t + I_t + 8 \\ Q_t = \frac{1}{3}Y_{t-1} \\ I_t = \frac{1}{10}(Q_t - Q_{t-1}), \end{cases}$$

cuya correspondiente ecuación en diferencias, es:

$$Y_{t+2} - \frac{11}{30}Y_{t+1} + \frac{1}{30}Y_t = 8.$$

Obtenida la ecuación lineal en diferencias no homogénea y con coeficientes constantes de orden 2, podemos calcular las soluciones de la misma.

La ecuación en diferencias homogénea es

$$Y_{t+2} - \frac{11}{30}Y_{t+1} + \frac{1}{30}Y_t = 0,$$

y su ecuación característica

$$\lambda^2 - \frac{11}{30}\lambda + \frac{1}{30} = 0,$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{11}{30} + \frac{1}{30}}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{11}{30} - \frac{1}{30}}{2} = -\frac{1}{5}.$$

Como ambas raíces son reales y distintas, se tiene que su solución general es:

$$Y_t = C_1 \left(-\frac{1}{6}\right)^t + C_2 \left(-\frac{1}{5}\right)^t.$$

Para calcular la solución de la ecuación no homogénea consideraremos, como en los ejercicios y ejemplos anteriores, que $Y_t = C$. Sustituimos y conseguimos

$$C - \frac{11}{30}C + \frac{1}{30}C = 8,$$

y despejando se tiene que $C = \frac{2}{3}$.

Por tanto, la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea es:

$$Y_t = C_1 \left(-\frac{1}{6}\right)^t + C_2 \left(-\frac{1}{5}\right)^t + \frac{2}{3}$$

Resuelta la ecuación en diferencias del apartado a) pasamos a resolver el apartado b).

Conociendo los valores de $Y_0 = 10$ e $Y_1 = 10,2$, planteamos las soluciones de C_1 y C_2 .

En el momento Y_0 ,

$$10 = C_1 \left(-\frac{1}{6}\right)^0 + C_2 \left(-\frac{1}{5}\right)^0 + \frac{2}{3},$$

que simplificando sería:

$$C_1 + C_2 = \frac{28}{3}.$$

En el momento Y_1 ,

$$10,2 = C_1 \left(-\frac{1}{6}\right)^1 + C_2 \left(-\frac{1}{5}\right)^1 + \frac{2}{3},$$

y simplificando:

$$-\frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{5}C_2 = \frac{143}{15}.$$

Resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = \frac{28}{3} \\ -\frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{5}C_2 = \frac{143}{15} \end{array} \right\}$$

de donde obtenemos los valores $C_1 = 342$ y $C_2 = \frac{998}{3}$.

Sustituyendo los valores anteriores, la solución del problema de valores iniciales es:

$$Y_t = 342 \left(-\frac{1}{6}\right)^t + \frac{998}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^t + \frac{2}{3}.$$

3.4. MODELO DE EXISTENCIAS DE ALMACÉN

Este modelo matemático regula las existencias que tendría una empresa en su almacén.

Las hipótesis que sigue este modelo son:

- 1) Los empresarios producen una cantidad determinada de productos para su venta.
- 2) Los empresarios producen una cantidad determinada de productos para mantener un nivel de existencias adecuado al stock del mercado.

3) Los apartados 1 y 2 ocurren en un determinado tiempo.

Suponemos que los empresarios invierten una cantidad j_t en cada periodo, y el número de unidades producidas para su venta como v_t , y para el almacén como l . Entonces, la renta conseguida por los empresarios en un periodo t , denominada Y_t , está regida por:

$$Y_t = j_t + v_t + l$$

Otra hipótesis que incorporaremos en este modelo es que la producción de cada periodo de tiempo está basada en las ventas del periodo anterior. Así que supondremos que el número de ventas en un periodo depende proporcionalmente de la renta en ese periodo y que la producción en un momento t es igual a las ventas del periodo anterior. Esto nos da una nueva ecuación en diferencias para la resolución donde

$$j_t = \gamma Y_{t-1}$$

con γ es una constante en el intervalo entre 0 y 1.

Añadimos que la producción destinada al almacenaje en un periodo t , es igual a la diferencia entre las ventas esperadas en ese periodo y las ventas del periodo anterior, es decir,

$$v_t = j_t - j_{t-1} = \gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2}$$

La unión de las tres hipótesis anteriores nos permitirá obtener

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + \gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + l$$

$$Y_t - 2\gamma Y_{t-1} + \gamma Y_{t-2} = l.$$

Reordenando los subíndices conseguimos

$$Y_{t+2} - 2\gamma Y_{t+1} + \gamma Y_t = l,$$

que es una ecuación lineal en diferencias de orden 2, no homogénea y con coeficientes constantes.

Ejercicio 3.4. – En una empresa te han encargado que crees un modelo para las existencias de bolígrafos para el almacén. Después de un estudio, sabes que el valor $\gamma = \frac{1}{5}$ y $l = 1000$. Resuelve la ecuación en diferencias para el modelo de existencias de almacén.

Con los valores $\gamma = \frac{1}{5}$ y $l = 1000$, y de acuerdo con la explicación teórica previa, se tiene la ecuación en diferencias:

$$Y_{t+2} - \frac{2}{5}Y_{t+1} + \frac{1}{5}Y_t = 1000.$$

Para resolverla consideramos en primer lugar su correspondiente ecuación en diferencias homogénea

$$Y_{t+2} - \frac{2}{5}Y_{t+1} + \frac{1}{5}Y_t = 0,$$

cuya ecuación característica

$$\lambda^2 - \frac{2}{5}\lambda + \frac{1}{5} = 0$$

tiene las siguientes soluciones:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{2}{5} + 0,8 * i}{2} = 0,2 + 0,4i$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{2}{5} - 0,8 * i}{2} = 0,2 - 0,4i$$

De aquí calculamos el modulo

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2} = 0,4$$

y su arco tangente:

$$\alpha = \arctg \frac{0,2}{0,2} = 1$$

De acuerdo con el apartado 2 del Teorema 2, la solución general de la ecuación lineal en diferencias no homogénea es:

$$Y_t = C_1(0,4)^t * \cos t + C_2(0,4)^t * \sin t.$$

Para la solución particular de la ecuación en diferencias aplicamos el método de los coeficientes indeterminados. Así,

$$C - \frac{2}{5}C + \frac{1}{5}C = 1000$$

$$C = 2500.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación lineal en diferencias de este caso, como se indica en el Teorema 3, es

$$Y_t = C_1(0,4)^t * \cos t + C_2t(0,4)^t * \sin t + 2500.$$

3.5. MODELO DE AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO

En una economía, el dinero no permanece estático en un lugar, sino que está en constante movimiento a través de operaciones financieras.

Una de las operaciones financieras más conocidas y usadas en la actualidad es el préstamo. Un préstamo es la cesión de una cantidad de dinero a cambio de que se devuelva en un futuro con unos intereses.

La ecuación inicial del préstamo es

$$C_{t+1} = C_t + iC_t - a ,$$

es decir, C_{t+1} , la cantidad a devolver al banco en un periodo $t + 1$, es igual a la deuda del periodo anterior, C_t , más los intereses del préstamo en el periodo anterior, iC_t , menos la cuota fija, a , que se paga en cada periodo.

La ecuación en diferencias sería

$$C_{t+1} - C_t - iC_t = -a$$

y sacando factor común C_t

$$C_{t+1} - C_t(1 + i) = -a.$$

Esta ecuación es una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes de orden uno.

Ejercicio 3.5.- El banco le confiere un préstamo a Problema S.A. de 800.000 euros con un tipo de interés del 8% anual.

- Sabiendo que se paga una cantidad fija anual de 119.223,59 euros. Plantea y resuelve la correspondiente ecuación en diferencias para el modelo de amortización del préstamo.
- Determina el cuadro de amortización del préstamo.

La ecuación inicial es

$$C_{t+1} = C_t(1 + 0,08) - 119.223,59 ,$$

ordenándolo

$$C_{t+1} - 1,08C_t = -119.223,59.$$

La ecuación en diferencias homogénea es

$$C_{t+1} - 1,08C_t = 0,$$

se obtiene la ecuación característica de la ecuación,

$$\lambda - 1,08 = 0$$

y su valor es

$$\lambda = 1,08.$$

La solución general de la ecuación en diferencias homogénea es:

$$C_{t+1} = K(1,08)^t,$$

donde K sería la constante que a lo largo de todo el trabajo se ha denominado C_1 , de acuerdo con la notación en el Teorema 1. En este sentido, recordar que en el presente ejemplo, el significado de C_t es la deuda en el momento t .

Para la solución general de la ecuación en diferencias no homogénea buscamos el valor de C ,

$$C - 1,08C = -119.223,59$$

$$C = 1.490.294,88.$$

La solución general de la ecuación lineal en diferencias completa es:

$$C_{t+1} = K(1,08)^t + 1.490.294,88$$

Obtenida la solución de la ecuación en diferencias completa del apartado a), pasaremos a resolver el problema de valores iniciales, del apartado b), conociendo que el capital en el momento $t = 0$ es 800.000. Por lo tanto:

$$800.000 = K(1,08)^0 + 1.490.294,88$$

$$K = -690.294,88.$$

Así la solución del problema de valores iniciales es:

$$C_{t+1} = -690.294,88(1,08)^t + 1.490.294,88$$

A continuación se muestra el cuadro de amortización del préstamo (Tabla 1):

n	a	I	A	C	M
0				800.000,00 €	
1	119.223,59 €	64.000,00 €	55.223,59 €	744.776,41 €	55.223,59 €
2	119.224,59 €	59.583,11 €	59.641,48 €	685.134,93 €	114.865,07 €
3	119.225,59 €	54.812,80 €	64.412,79 €	620.722,14 €	179.277,86 €
4	119.226,59 €	49.660,77 €	69.565,82 €	551.156,32 €	248.843,68 €
5	119.227,59 €	44.096,50 €	75.131,09 €	476.025,23 €	323.974,77 €
6	119.228,59 €	38.087,02 €	81.141,57 €	394.883,66 €	405.116,34 €
7	119.229,59 €	31.596,69 €	87.632,90 €	307.250,76 €	492.749,24 €
8	119.230,59 €	24.587,06 €	94.643,53 €	212.607,23 €	587.392,77 €
9	119.231,59 €	17.016,58 €	102.215,01 €	110.392,22 €	689.607,78 €
10	119.232,59 €	8.840,37 €	110.392,22 €	- €	800.000,00 €

Tabla 1. Cuadro de amortización del Ejemplo 3.5 con Microsoft Excel.

Siendo los elementos del cuadro de amortización:

- n. Número de periodos en que se amortiza el préstamo.
- a. Cuota fija que se paga en cada periodo.
- I. Cantidad a pagar en concepto de intereses del préstamo en cada periodo.
- A. Cantidad a pagar en concepto de devolución del préstamo en cada periodo.
- C. Deuda restante del préstamo tras la amortización en cada periodo.
- M. Cantidad total de la deuda amortizada en cada periodo.

4. CONCLUSIONES

Con la redacción de este Trabajo Fin de Grado se ha comprobado que las ecuaciones en diferencias son necesarias para la Economía. Este hecho se ve claramente en la explicación del modelo de la amortización del préstamo, ya que es una de las operaciones financieras más conocidas en la sociedad.

Con la información de este documento, permitirá cumplir el objetivo de ampliar los horizontes del lector, en conocimientos matemáticos, para la realización de estudios en la rama económica o asentar unas bases para el lector en otras ramas, como la ciencia en el estudio de elementos relevantes para la misma, como se explicó en la introducción de este documento.

Con el uso de la información obtenida a través de la bibliográfica y de las webs visitadas, he comprobado que los estudios económicos con ecuaciones en diferencias no se enfocan de la misma manera que las ecuaciones diferenciales porque la información más usada en la

economía es de carácter continuo. Aunque considerar solo las variables continuas sería erróneo al llevar a cabo un proyecto porque las variables discretas permiten enfocarse en distintos aspectos, por ejemplo, el planteamiento de un objetivo como el stock que desea tener en un almacén de una empresa para hacer frente a sus demandantes de bienes.

Por ello, en este documento se ha tratado las ecuaciones en diferencias y diferenciales debido a que ambas son relevantes cuando se lleva a cabo un estudio económico, ya que tratan de traducir al lenguaje de las matemáticas la naturaleza del mismo, permitiendo su análisis y profundizar en su comprensión.

Debido a que una sociedad está limitada en base a unos recursos, se crean diversos modelos para explotar de la forma más eficaz y eficiente los recursos de los que se dispone. Por ejemplo, con los modelos que se han tratado en este TFG afectarían a distintos departamentos que tendría una empresa, por ejemplo, el modelo de existencias de almacén que afectaría al departamento de logística y almacenamiento de una empresa; o el modelo de amortización de un préstamo que es relevante para el departamento financiero.

Este TFG tiene como finalidad explicar los principios básicos de las ecuaciones en diferencias en modelos discretos, a la vez de mostrar aplicaciones reales en la Economía. Aunque este trabajo solo se enfoca en ser una introducción a las ecuaciones lineales en diferencias y, en menor medida, a las ecuaciones diferenciales.

5. BIBLIOGRAFÍA:

1. Alconchel Pérez, Ana y Vigneron Tenorio, Alberto. (2004). *Ecuaciones lineales en diferencias. Aplicaciones a la empresa y la economía*. Cádiz: Servicios de publicaciones Universidad de Cádiz.
2. Cortés López, Juan Carlos; Monreal Mengual, Llúcia; Navarro Quiles, Ana; Sánchez Sánchez, Almudena; Santamaría Navarro, Cristina; Villanueva Micó, Rafael Jacinto. (2016). *Modelos matemáticos discretos para administración y dirección de empresas. Problemas resueltos*. Valencia: Editorial UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA.
3. Fernández Pérez, Carlos; Vázquez Hernández, Francisco José y Vegas Montaner, José Manuel. *Ecuaciones diferenciales y en diferencia. Sistemas dinámicos*. Madrid: Editorial Thomson.

4. Gutiérrez Valdeón, Sinesio; Balbás de la Corte, Alejandro y Gil Fana, José Antonio. (1998). *Análisis matemático para la economía II. Cálculo integral y sistemas dinámicos*. Madrid: Editorial AC.
5. Hammond, Peter J.; Sydsaeter, Knut. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid: Editorial PRENTICE-HALL INTERNATIONAL EDITION
6. Pérez-Grasa, Isabel; Minguillón Constante, Esperanza; Jarne Jarne, Gloria. (2001). *Matemáticas para la economía programación matemática y sistemas dinámicos*. Aravaca: Editorial MCGRAW-HILL.
7. Quesada Teruel, José María; Molina Alba, María Francisca; Sánchez Cobo, Francisco Tomás. (2000). *Matemáticas II para Ingeniería Técnica Industrial*. Jaén: Editorial Joxman Editores Multimedia.
8. Rodríguez Ruiz, Julián; García Sestafe, José Vicente; García Llamas, Carmen; Matilla García, Mariano. (2002). *Matemáticas para la economía y empresa. Volumen.3: Cálculo integral. Ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas. Programación lineal*. Madrid: Ediciones Académicas.

5.1. ARTÍCULOS DE REVISTAS

1. Tenorio Villalón, Ángel F; Martín Caraballo, Ana M; Paralera Morales, Concepción y Contreras Rubio, Ignacio. (2013). “Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros”. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 16, 165-199.

5.2. WEBGRAFÍA:

1. Francisco López, José. *Ley de oferta y demanda*. Recuperado de <https://economipedia.com/definiciones/ley-de-oferta-y-demanda.html>
2. Sánchez Galán, Javier. *Teorema de la telaraña*. Recuperado de <https://economipedia.com/definiciones/teorema-la-telarana.html>

5.3. PROGRAMAS:

1. Wolfram Mathematica®
2. Microsoft Office Excel