



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS II

Alumno/a: Martínez Sánchez, Andrés

Tutor/a: Prof.^a Dr.^a Raquel Caballero Águila

Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2021



UNIVERSIDAD DE JAÉN

CENTRO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE DISTRIBUCIONES DE
PROBABILIDAD PARA LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS II**

**MÁSTER EN PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA,
BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS.
ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS.**

Autor: Andrés Martínez Sánchez

Tutora: Prof.^a Dr.^a Raquel Caballero Águila

Departamento: Estadística e Investigación Operativa

Jaén, Junio 2021

Agradecimientos

A mis padres, mi hermana, mi abuelo y los que no están. Sin ellos no estaría aquí. A ellos, que hacen más fácil cualquier tiempo difícil y que me han apoyado tanto.

A Raquel, por su calidad profesional y humana, y por brindarme su valiosa colaboración y orientación en el desarrollo de este trabajo.

Resumen

A lo largo de este Trabajo de Fin de Máster (TFM) se recogen los fundamentos epistemológicos, curriculares y didácticos para el diseño de una unidad didáctica. Concretamente, se ha escogido la unidad titulada *Distribuciones de probabilidad*, dirigida al alumnado de 2º de Bachillerato de ciencias y tecnología, de la asignatura Matemáticas II.

El TFM se divide en tres partes:

En la primera parte, se encuentran la fundamentación epistemológica (capítulo 1), la fundamentación curricular (capítulo 2) y la fundamentación didáctica (capítulo 3). En la fundamentación epistemológica se elabora un tema de oposiciones relacionado con los contenidos de la unidad didáctica, para explorar de manera profunda los cimientos matemáticos sobre los que esta se sustenta. En la fundamentación curricular, se analizan las normativas estatal y autonómica vigentes y se comparan libros de texto de dos editoriales distintas. En la fundamentación didáctica, se analizan dos investigaciones relacionadas con el campo de la enseñanza de las distribuciones de probabilidad y la estadística.

En la segunda parte, se presenta la unidad didáctica, propiamente dicha, sobre distribuciones de probabilidad (capítulo 4), analizando todos los aspectos necesarios para su desarrollo: metodología empleada, actividades y recursos que se van a utilizar, herramientas y criterios de evaluación, etc.

La tercera parte consta de tres anexos. En el primero de ellos se presentan las demostraciones de algunos resultados establecidos en el capítulo 1; en el segundo, algunos ejemplos de aplicación de las distribuciones estudiadas en dicho capítulo, y en el tercero, diversas actividades y recursos relacionados con la unidad didáctica desarrollada en el capítulo 4.

Palabras clave: Distribuciones de probabilidad, Matemáticas, Bachillerato, unidad didáctica, enseñanza.

Abstract

Throughout this Master's Degree Final Project (MFP) the epistemological, curricular and didactic foundations for the design of a teaching unit are collected. The unit is called *Probability distributions*, and it is developed for the last year of the sciences and technology specialty at high school (17-18 year-old students). The course is called Mathematics II.

This MFP is divided in three parts:

In the first part, the epistemological (chapter 1), curricular (chapter 2) and didactic foundations (chapter 3) can be found. In the epistemological foundation, a unit of the math teacher's public exam syllabus related to the contents of the teaching unit is elaborated, in order to deeply explore the mathematical foundations on which it is based. In the curricular foundation, the current national and regional regulations are analyzed, and textbooks from two different publishers are compared. In the didactic foundation, two investigations related to the field of teaching probability distributions and statistics are also analyzed.

In the second part, the teaching unit on probability distributions is presented (chapter 4), analyzing all the necessary aspects for its development: methodology, activities and resources to be used, tools and evaluation criteria, etc.

The third part consists of three annexes. The first one contains the demonstrations of some of the results established in chapter 1; the second one, some application examples of the distributions studied in chapter 1; and in the third one, several activities and resources related to the teaching unit developed in chapter 4.

Keywords: Probability distributions, Mathematics, high school, teaching unit, teaching.

Índice general

Índice de tablas	x
Introducción	1
Objetivos	3
I Fundamentación epistemológica, curricular y didáctica	4
1 Fundamentación epistemológica	5
1.1 Variable aleatoria: definición y caracterización	5
1.2 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria	7
1.3 Función de distribución de una variable aleatoria	8
1.4 Variables aleatorias independientes	8
1.5 Clasificación de variables aleatorias	9
1.6 Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta	10
1.7 Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta	11
1.8 Modelos de distribuciones de probabilidad discretas	11
1.8.1 Experimento de Bernoulli	11
1.8.2 Distribución binomial	12
1.8.3 Distribución de Poisson	13
1.8.4 Distribución geométrica	14
1.8.5 Distribución binomial negativa	15
1.8.6 Otras distribuciones discretas	15
1.9 Función de densidad de una variable aleatoria continua	16
1.10 Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua	17
1.11 Modelos de distribuciones de probabilidad continuas	18
1.11.1 Distribución uniforme	18
1.11.2 Distribución exponencial	18
1.11.3 Distribución gamma	19
1.11.4 Distribución normal	20
1.11.5 Otras distribuciones continuas	23
Lista de símbolos	25
2 Fundamentación curricular	26
2.1 Normativa vigente aplicable a Bachillerato	26
2.1.1 Leyes Orgánicas	26
2.1.2 Ley de Educación en Andalucía	26
2.1.3 Desarrollo curricular de la materia	27
2.2 El currículo según la normativa vigente	27
2.3 Análisis de los libros de texto	33

2.3.1	Análisis de contenidos curriculares y estructura	33
2.3.2	Análisis de ejercicios y ejemplos	36
2.3.3	Conclusiones	38
3	Fundamentación didáctica	39
3.1	Estadística por proyectos	39
3.2	Aprendizaje cooperativo en Matemáticas	40
II	Proyección didáctica	42
4	Unidad didáctica	43
4.1	Título	43
4.2	Objetivos y punto de partida de la unidad	43
4.3	Justificación	43
4.4	Contextualización del centro y del aula	45
4.5	Objetivos	45
4.5.1	Objetivos generales de etapa	45
4.5.2	Objetivos de área de las Matemáticas	46
4.5.3	Objetivos didácticos de la unidad	47
4.5.4	Relación entre objetivos de etapa y de área	48
4.6	Competencias clave	48
4.7	Contenidos	51
4.8	Metodología	52
4.9	Actividades y recursos	54
4.9.1	Actividades	54
4.9.2	Recursos	54
4.10	Atención a la diversidad	55
4.11	Temporalización	56
4.12	Evaluación	60
4.12.1	Criterios de evaluación	60
4.12.2	Criterios de calificación	61
5	Conclusiones	66
	Bibliografía	68
III	Anexos	xii
Anexo I. Demostraciones		xiv
AI.I	Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria	xiv
AI.II	Propiedades de la función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta	xvi
AI.III	Relación entre la distribución de probabilidad y la función masa de probabilidad	xvi
AI.IV	Demostraciones para la distribución binomial	xvii
AI.V	Demostraciones para la distribución de Poisson	xviii
AI.VI	Demostraciones para la distribución geométrica	xix
AI.VII	Demostraciones para la distribución binomial negativa	xx
AI.VIII	Demostraciones para la distribución uniforme	xxii

AI.IX Demostraciones para la distribución exponencial	xxiii
AI.X Demostraciones para la distribución gamma	xxv
AI.XI Demostraciones para la distribución normal	xxvi

Anexo II. Ejemplos de aplicación de las distribuciones de probabilidad **xxviii**

AII.I Aplicación de la distribución de Bernoulli	.xxviii
AII.II Aplicación de la distribución binomial	.xxviii
AII.III Aplicación de la distribución de Poisson	xxix
AII.IV Aplicación de la distribución geométrica	xxx
AII.V Aplicación de la distribución binomial negativa	xxx
AII.VI Aplicación de la distribución uniforme	xxxi
AII.VII Aplicación de la distribución exponencial	xxxi
AII.VIII Aplicación de la distribución gamma	.xxxii
AII.IX Aplicación de la distribución normal	.xxxiii

Anexo III. Actividades y recursos para la unidad didáctica **xxxv**

AIII.I Actividades de aprendizaje y desarrollo	.xxxv
AIII.II Actividades de consolidación	xl
AIII.III Actividad de tipo PBL	xli
AIII.IV Ejemplos de actividades de ampliación y refuerzo	xliv
AIII.V Examen de la unidad	xlvi

Índice de tablas

2.1	Currículo para el bloque 5 de Estadística y Probabilidad en Matemáticas II. En negrita, los contenidos de la unidad didáctica propuesta. <i>Fuente: Boletín Oficial del Estado (RD 1105/2014).</i>	28
2.2	Currículo para el bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas II. <i>Fuente: Boletín Oficial del Estado (RD 1105/2014).</i>	30
2.3	Relación de las siglas con los nombres completos de las competencias clave del currículo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	30
2.4	Relación entre los criterios de evaluación del RD 1105/2014 y las competencias clave que se desarrollan en comparación con la orden de 14 julio de 2016 para Andalucía, en el bloque 1. de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas. <i>Fuente: Boletín Oficial de la Junta de Andalucía.</i>	31
2.5	Relación entre los criterios de evaluación del RD 1105/2014 y las competencias clave que se desarrollan en comparación con la orden de 14 de julio de 2016 para Andalucía, en el bloque 5. de Estadística y Probabilidad. <i>Fuente: Boletín Oficial de la Junta de Andalucía.</i>	32
2.6	Profundidad que se da a los contenidos de la fundamentación epistemológica en los libros de texto. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	34
2.7	Contenidos comunes a los libros de texto de ambas editoriales. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	35
2.8	Contenidos no comunes a los libros de texto de ambas editoriales. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	35
2.9	Tipología de las actividades de los libros de texto escogidos, cantidad y peso relativo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	36
4.1	Correspondencia entre los objetivos generales de etapa y los objetivos de área. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	48
4.2	Relación entre los contenidos de la unidad didáctica y los contenidos relativos al bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas II. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	51
4.3	Relación entre los contenidos de la unidad didáctica y los contenidos relativos al bloque 5 de Estadística y Probabilidad en Matemáticas II. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	52
4.4	Recursos necesarios para facilitar el desarrollo la unidad didáctica y el logro de los fines de la educación. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	55
4.5	Sesión 1: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	57
4.6	Sesión 2: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	57
4.7	Sesión 3: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	58

4.8 Sesión 4: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	58
4.9 Sesión 5: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	59
4.10 Sesión 6: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	59
4.11 Sesión 7: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	60
4.12 Criterios de calificación. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	61
4.13 Rúbrica 1, de la prueba escrita.	62
4.14 Rúbrica 2, de la participación en clase.	63
4.15 Rúbrica 3, del proyecto.	64
4.16 Rúbrica 4, de actitud personal y trabajo autónomo.	65
All.1 Valores de la función de distribución $F_Z(\cdot)$ de una v.a. $Z \sim N(0, 1)$. <i>Fuente: elaboración propia.</i>	.xxxiv

Introducción

Este Trabajo Fin de Máster (TFM) constituye la culminación de mis estudios de *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*, en la especialidad de Matemáticas, por la Universidad de Jaén. Para su realización, se han puesto en práctica gran parte de los conocimientos aprendidos y de las competencias adquiridas durante el desarrollo de este máster, tanto en la parte de asignaturas específicas, como en la parte de asignaturas comunes.

El objetivo es llevar a cabo el diseño fundamentado de una unidad didáctica, elaborando una propuesta basada en tres pilares, que permiten fundamentar el contenido de la misma desde el punto de vista curricular, epistemológico y didáctico, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos. Concretamente, hemos elegido la unidad didáctica titulada *Distribuciones de probabilidad*, dirigida al alumnado de 2º de Bachillerato de ciencias y tecnología, de la asignatura Matemáticas II.

Las distribuciones de probabilidad tienen una gran importancia, ya que nos ayudan a modelizar y resolver cuestiones presentes en el día a día, y en particular en campos de la ciencia y la tecnología, especialidad de Bachillerato a la que pertenece la asignatura escogida para la unidad didáctica. Hay docentes que llevan mucho tiempo aplicando metodologías tradicionales para la enseñanza de esta materia, y a lo largo de los años los alumnos siguen sin tener actitudes positivas hacia las matemáticas en general, aunque esto está cambiando con el tiempo gracias a la importante labor de los investigadores de la didáctica y gracias también a los mismos docentes, que cada vez innovan más en el aula. Esto pone de manifiesto la importancia de investigar las dificultades y otros aspectos relevantes que afectan a la enseñanza y el aprendizaje del tema escogido, desde el punto de vista epistemológico, curricular y didáctico.

Los conocimientos matemáticos que requieren el estudio y manejo de distribuciones de probabilidad tienen bastante complejidad, tanto conceptual como procedimental, y en la primera parte de este documento se realizará una fundamentación epistemológica para hablar más en profundidad sobre los contenidos matemáticos que se van a enseñar, desarrollando dos temas de oposiciones para profesorado de matemáticas sobre distribuciones de probabilidad (temas 65 y 66).

Seguidamente, en la fundamentación curricular, se analizará el currículo según las normativas estatal y autonómica vigentes para Bachillerato, y libros de texto de dos editoriales distintas, con el objetivo de sintetizar y ordenar los contenidos matemáticos para

adaptarlos al nivel del curso, y también para conocer y aplicar las exigencias en cuanto al desarrollo de competencias transversales para los alumnos.

Actualmente, la educación se basa en una enseñanza por competencias, y mediante el estudio de distribuciones de probabilidad estaremos ayudando a desarrollar la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología. Además, el desarrollo de investigaciones didácticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas y la estadística han revelado nuevas metodologías para que los alumnos puedan cambiar sus actitudes hacia estas materias, estén más motivados y a su vez desarrollen otras competencias transversales beneficiosas para sus vidas personales y profesionales. En este trabajo hablaremos de dos investigaciones, una sobre metodologías de aprendizaje cooperativo y otra sobre aprendizaje basado en proyectos, en el capítulo de fundamentación didáctica.

Una vez realizadas las tres fundamentaciones, se elabora la unidad didáctica propiamente dicha en la parte segunda de este trabajo. En ella se desarrollan los aspectos más relevantes del proceso de enseñanza-aprendizaje, como los objetivos que se persiguen, las competencias a adquirir por el alumnado, los contenidos a exponer en el aula, metodología, actividades y recursos, temporalización de las sesiones, y los criterios de evaluación y calificación, intentando en todo momento atender a todas las exigencias curriculares en cuanto a contenidos básicos y transversales, competencias clave, y sobre todo atendiendo a la necesidad y exigencia de los propios alumnos de una educación útil para la vida.

Por último, me gustaría destacar que, en atención a la Ley 3/2007, de 22 de marzo, para la igualdad efectiva entre hombres y mujeres, toda mención en este Trabajo de Fin de Máster a personas, colectivos, cargos académicos, etc., cuyo género sea masculino, estará haciendo referencia al masculino genérico, incluyendo por tanto la posibilidad de referirse tanto a hombres como a mujeres.

Objetivos

Como se ha indicado en la Introducción, el objetivo primordial de este trabajo es el diseño y programación de una unidad didáctica que esté sujeta a la normativa actual y que sea útil para mi futura profesión como docente. Aparte de esta finalidad, con este trabajo también se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

- Desarrollar la competencia profesional a través del diseño fundamentado de una unidad didáctica.
- Desarrollar, con cierto rigor y profundidad, parte de los temas 65 y 66 de oposiciones, relacionados con los contenidos de la unidad didáctica.
- Analizar la normativa curricular vigente y algunos libros de texto para fundamentar la unidad didáctica desde el punto de vista curricular.
- Conocer, planificar y desarrollar los contenidos curriculares correspondientes a la asignatura.
- Analizar investigaciones que aborden aspectos relacionados con los contenidos de la unidad.
- Elaborar una unidad didáctica adaptada a las necesidades del alumnado.
- Utilizar lo aprendido, tanto en clase como durante las prácticas en el máster y las fundamentaciones realizadas en el trabajo, para completar la unidad didáctica y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Parte I

Fundamentación epistemológica, curricular y didáctica

Fundamentación epistemológica

En este primer capítulo, se examinarán los fundamentos en los que se apoya la unidad didáctica que se va a desarrollar, titulada *Distribuciones de probabilidad*, desde el punto de vista epistemológico. El término “epistemología”, etimológicamente, viene de la unión de las palabras *episteme* (conocimiento) y *logos* (estudio). Para realizar una buena labor didáctica es indispensable conocer lo que se llama el “saber sabio” y fundamentar, con profundidad y rigor matemático, los conocimientos sobre la materia que se incluirán en la unidad didáctica. Concretamente, se desarrollarán los temas 65 y 66 del temario oficial de oposiciones (Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio).

Para poder fundamentar los conocimientos matemáticos en los que se basará la unidad didáctica, se comenzará introduciendo el concepto de variable aleatoria y el de distribución de probabilidad de una variable aleatoria, la definición de función de distribución y, posteriormente, la clasificación de variables aleatorias en discretas, continuas y mixtas. En el caso discreto, se introducen los conceptos de función masa de probabilidad, esperanza y varianza, y seguidamente se examinarán algunos modelos de distribuciones discretas notables. En el caso de las distribuciones continuas, de forma análoga, se definirá la función de densidad, esperanza y varianza, y posteriormente se examinarán algunos modelos notables de distribuciones continuas.

Este capítulo está basado fundamentalmente en tres referencias bibliográficas, concretamente Rohatgi Saleh (2015), CDPYE (s.f.) y Sáez (2012), que se omitirán durante el desarrollo del mismo. Otras fuentes de consulta que se han utilizado de forma más puntual serán citadas en los apartados correspondientes.

1.1. Variable aleatoria: definición y caracterización

Una variable aleatoria (v.a.) es una función real, definida sobre el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, que describe alguna característica de los posibles resultados del experimento.

Se presenta a continuación su definición formal:

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ un espacio de probabilidad asociado a un experimento aleatorio, donde Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, $\mathcal{S}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y P es una función de probabilidad definida en $\mathcal{S}$. Una función real $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se llama variable aleatoria si la imagen inversa de cualquier conjunto Borel en $\mathbb{R}$ es un suceso, es decir, si

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{S} \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (1.1)$$

Siendo $\mathcal{B}$ la σ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ (generada por la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$).

Nota 1: Una función medible finita sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{S})$ es una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica que $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$, $\forall B \in \mathcal{B}$. Luego una v.a. no es más que una función medible finita definida sobre un espacio de probabilidad.

Para resaltar la medibilidad de la función, también suele notarse de la siguiente forma $X : (\Omega, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, o incluso para destacar, además, el carácter probabilístico del espacio donde se define la variable $X : (\Omega, \mathcal{S}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Nota 2: De forma abreviada, los conjuntos de la forma $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ suelen notarse $[X \in B]$.

Para verificar que una función real definida en $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ es una v.a., no es necesario comprobar que la ecuación (1.1) se cumple para todos los conjuntos de Borel $B \in \mathcal{B}$. Es suficiente verificar (1.1) para cualquier clase $\mathfrak{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que genere $\mathcal{B}$. Tomando $\mathfrak{A}$ como la clase de las semirrectas de tipo $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ se obtiene la siguiente caracterización, que será de gran utilidad en el estudio de variables aleatorias.

Teorema 1: X es una variable aleatoria si y solo si para cada $x \in \mathbb{R}$

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = [X \leq x] \in \mathcal{S}. \quad (1.2)$$

Nota 3: Si X es una v.a., los conjuntos $[X = a]$, $[a < X \leq b]$, $[X < a]$ son sucesos, ya que son preimagen de conjuntos de Borel.

Nota 4: Véase que la noción de probabilidad no influye en la definición de variable aleatoria. No obstante, hay que destacar que está definida sobre un espacio probabilístico, ya que si no, no sería v.a. sino simplemente una función medible.

Aunque existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no pertenecen a $\mathcal{B}$ y por tanto pueden existir funciones reales definidas en un espacio de probabilidad que no son variables aleatorias, estas funciones no se suelen encontrar en aplicaciones prácticas. Por tanto, informalmente, se puede considerar que una v.a. X es, en definitiva, una función real definida sobre un espacio probabilístico; es decir, una función que asigna valores reales a los resultados asociados al experimento.

Ejemplo: Sean “positivo” y “negativo” los resultados que se pueden obtener de un test PCR para conocer si alguien está infectado por el virus de la COVID-19. Una v.a. X asignará valores reales a cada uno de estos posibles resultados. Por ejemplo:

$$\Omega = \{\text{positivo}, \text{negativo}\} \rightarrow \begin{cases} X(\text{positivo}) = 1; \\ X(\text{negativo}) = 0. \end{cases}$$

La imagen inversa X^{-1} de cualquier conjunto Borel, será un suceso de la σ -álgebra $\mathcal{S}$.

En efecto:

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B, 1 \notin B; \\ \{\text{positivo}\} & \text{si } 0 \notin B, 1 \in B; \\ \{\text{negativo}\} & \text{si } 0 \in B, 1 \notin B; \\ \Omega & \text{si } 0 \in B, 1 \in B. \end{cases}$$

1.2. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

La característica fundamental de las variables aleatorias es que dan lugar a una función de probabilidad sobre el espacio de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, denominada distribución de probabilidad de la variable.

Definición: Si X es una variable aleatoria sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, se define su distribución de probabilidad como la función

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ B &\rightarrow P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P[X \in B]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Esta función de conjunto, inducida en $\mathcal{B}$ por la función de probabilidad P definida en $\mathcal{S}$, satisface los axiomas de Kolmogorov.

$$\begin{aligned} A1 : & P_X(B) \geq 0, \forall B \in \mathcal{B}. \\ A2 : & P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1. \\ A3 : & \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B} \text{ y } B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \Rightarrow P_X \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i). \end{aligned} \tag{1.4}$$

La distribución de probabilidad está definida sobre el espacio de Borel, transformándolo en un espacio probabilístico $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, por tanto, toda v.a. transforma el espacio probabilístico inicial en un nuevo espacio probabilístico de tipo cuantitativo $X : (\Omega, \mathcal{S}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$.

El estudio de una v.a., se centrará por tanto, en el estudio de su distribución de probabilidad. En general, trabajar con distribuciones de probabilidad no es simple, por tratarse de funciones de conjunto. Para salvar este inconveniente, se asigna a la distribución de probabilidad una función de punto que la describe completamente, denominada función de distribución de la variable X .

1.3. Función de distribución de una variable aleatoria

Definición: Si X es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, se define su función de distribución como la función

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P[X \leq x]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las siguientes propiedades de F_X caracterizan a las funciones de distribución de variables aleatorias. La demostración de estas propiedades puede encontrarse en el apartado [A1.1](#) del anexo I.

La función de distribución de una variable aleatoria satisface:

- Es monótona no decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$. [Dem. 1](#)
- Es continua a la derecha: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$. [Dem. 2](#)
- $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) \equiv F_X(-\infty) = 0$ y $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) \equiv F_X(+\infty) = 1$. [Dem. 3](#)

1.4. Variables aleatorias independientes

El concepto de independencia es fundamental en el cálculo de probabilidades. Su definición se puede establecer en términos de funciones de distribución.

Definición: Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio probabilístico, con funciones de distribución $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$, respectivamente. El conjunto de las variables aleatorias forman un vector aleatorio¹ cuya función de distribución es

$$F_X(x_1, \dots, x_n).$$

Se dice que estas variables son mutuamente independientes, o simplemente, independientes, si:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Es decir, dado un conjunto de n variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, son independientes si la función de distribución conjunta se expresa como producto de las marginales de cada una de las variables.

Esta definición nos servirá en futuras secciones para comprender las caracterizaciones de algunos modelos de distribuciones, como la binomial o la gamma, o el teorema central del límite en la sección de la distribución normal.

¹Un vector aleatorio definido sobre un espacio probabilístico es un conjunto de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio, $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{S}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. No se profundizará más en variables aleatorias multidimensionales, ya que queda fuera de los objetivos que se proponen.

1.5. Clasificación de variables aleatorias

Las variables aleatorias pueden clasificarse en discretas, continuas o mixtas.

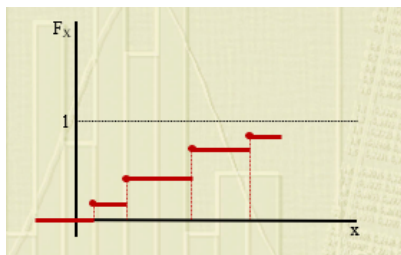
Definición: Una variable aleatoria $X : (\Omega, \mathcal{S}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es **discreta** si existe un conjunto finito o infinito numerable $E_X \subseteq \mathbb{R}$, tal que $P[X \in E_X] = 1$.

Es decir, se trata del caso particular en el que el rango de valores de la variable es un conjunto finito o infinito numerable. A menudo $E_X = \mathbb{N}$ o $E_X = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

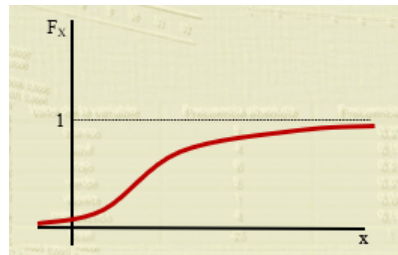
Definición: Se dice que una variable aleatoria es absolutamente continua o, simplemente, **continua**, si su función de distribución es absolutamente continua, es decir, si existe una función no negativa e integrable $f_X(x)$ tal que para cualquier número real x se tiene que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt. \quad (1.7)$$

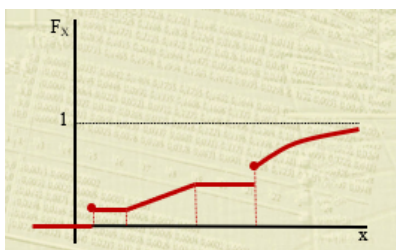
La función f_X se llama función de densidad de probabilidad, o, simplemente, función de densidad de la variable aleatoria X .



(a) Función de distribución de una v.a. discreta.



(b) Función de distribución de una v.a. continua.



(c) Función de distribución de una v.a. mixta.

Figura 1.1 Función de distribución de una v.a. discreta (a), v.a. continua (b) y v.a. mixta (c). Fuente: CDPYE (s.f.)

La función de distribución de una v.a. discreta tiene discontinuidades en su dominio y entre las discontinuidades toma valores constantes. De hecho, dichas discontinuidades (los “saltos”) son realmente las probabilidades con que la variable toma cada uno de los posibles valores, cumpliéndose $\sum_i P[X = x_i] = 1$ (figura 1.1 (a)). La función de distribución de una v.a. continua es, sin embargo, continua en todo su dominio (figura 1.1 (b)).

Definición: Se dice que una variable aleatoria es mixta si su función de distribución se puede descomponer como combinación lineal convexa no trivial de una función de distribución a saltos, y otra absolutamente continua (figura 1.1 (c)).

Intuitivamente, es una mezcla entre una v.a. discreta, y una continua.

En general, toda función de distribución puede expresarse como combinación lineal convexa de dos funciones: una discontinua a saltos, y otra continua (que, a su vez, se descompone en una parte absolutamente continua y otra singular).

Este trabajo se centrará en el estudio de variables aleatorias discretas y continuas, tema sobre el que se va a realizar la unidad didáctica, por lo que el análisis de las variables aleatorias mixtas queda fuera de los objetivos que se proponen.

1.6. Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Para poder describir el comportamiento de una v.a. discreta, se necesita conocer la probabilidad con la que toma cada uno de sus posibles valores.

Definición: Si X es una variable discreta con valores en el conjunto E_X , se define su función masa de probabilidad como

$$\begin{aligned} p_X : E_X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow p_X(x) = P_X(\{x\}) = P[X = x]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

La función masa de probabilidad de una v.a. discreta verifica las siguientes propiedades, cuya demostración puede verse en el apartado [Al.II](#) del anexo I.

- Es no negativa: $p_X(x) \geq 0$, $\forall x \in E_X$. [Dem. 1](#)
- La suma de sus valores es la unidad: $\sum_{x \in E_X} p_X(x) = 1$. [Dem. 2](#)

Lo más importante de esta función masa de probabilidad es que determina la distribución de probabilidad de la v.a. (Brémaud, 2017); es decir, que si son conocidas las probabilidades $P[X = x]$, $\forall x \in E_X$, se puede determinar cualquier probabilidad del tipo $P[X \in B]$, $\forall B \in \mathcal{B}$. Por tanto, la función masa de probabilidad proporciona un método para manejar variables aleatorias discretas alternativo al uso de la función de distribución (y, en general, más simple).

Teorema: La distribución de probabilidad de una v.a. discreta $X : (\Omega, \mathcal{S}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ está determinada por su función masa de probabilidad según la siguiente relación

$$P_X(B) = P[X \in B] = \sum_{x \in B \cap E_X} P[X = x], \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (1.9)$$

Dem. véase apartado [Al.III](#) del anexo I.

A la vista de este teorema, para calcular la probabilidad de que una v.a. discreta tome valores en un conjunto de Borel determinado, solo hay que sumar los valores de la función masa de probabilidad en todos los valores de la variable que pertenezcan a dicho conjunto.

Ejemplo: Se considera el experimento aleatorio de tirar un dado, y la variable aleatoria X que asigna a cada resultado su valor:

$$X(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in \{1, 2, \dots, 6\}.$$

Se supone que el dado no está trucado, por tanto $p_X(x) = P[X = x] = 1/6$. Es una función masa de probabilidad constante.

Si se pretendiese conocer la probabilidad de que al tirar el dado se obtuviera un valor menor o igual a 4, es decir, $P[X \leq 4]$, se tendría

$$F_X(4) = P[X \leq 4] = \sum_{x \in B \cap E_X} P[X = x] = \sum_{x=1}^4 p_X(x) = 4/6.$$

1.7. Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta

La esperanza de una v.a. discreta, si existe, es el valor medio de los valores de la misma variable ponderados por su probabilidad. Por esto se suele llamar “valor medio” o “media” de la variable.

Definición: Sea $X : (\Omega, \mathcal{S}, P_X)$ una variable aleatoria discreta con valores en el conjunto E_X (numerable):

1. Existe la esperanza de X si $\sum_{x \in E_X} |x|P[X = x] < +\infty$.
2. En caso existir, se define la esperanza de X (y se nota $E[X]$), como

$$E[X] = \sum_{x \in E_X} xP[X = x]. \quad (1.10)$$

La varianza de una v.a. discreta, si existe, es el valor medio de las desviaciones cuadráticas de los valores de la variable respecto de su esperanza. Tanto este valor como la desviación típica, que es la raíz cuadrada de la varianza, se usan como medidas de la dispersión de la v.a.

$$\begin{aligned} \text{var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2, \\ \sigma &= \sqrt{\text{var}[X]}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.8. Modelos de distribuciones de probabilidad discretas

En esta sección se estudiarán algunos modelos de distribuciones de probabilidad de tipo discreto, que aparecen frecuentemente en la práctica, así como sus propiedades básicas.

Cada modelo representará una familia de distribuciones con una forma concreta de la función masa de probabilidad, que dependerá de unos parámetros, cuyos valores determinarán la distribución de la variable aleatoria que se estudie en cada caso concreto.

1.8.1. Experimento de Bernoulli

Un experimento o prueba de Bernoulli es un experimento aleatorio con dos posibles resultados mutuamente excluyentes (éxito y fracaso). El espacio muestral es, por tanto, $\Omega = \{F, E\}$ donde F representa el fracaso y E el éxito.

Definición: Consideremos un experimento de Bernoulli y sea $p = P(E) \in (0, 1)$ la probabilidad de éxito. Se dice que una v.a. X sigue una distribución de Bernoulli de parámetro p si toma los valores

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si ocurre } E; \\ 0, & \text{si ocurre } F. \end{cases} \quad (1.12)$$

Suele notarse $X \sim b(1, p)$.

La función masa de probabilidad tiene la siguiente forma:

$$p_X(x) = P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x} \quad \text{para } x = 0, 1. \quad (1.13)$$

La media y la varianza de una variable aleatoria de Bernoulli son

$$\begin{aligned} E[X] &= 0p_X(0) + 1p_X(1) = 0 + p = p \\ \text{var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = 0p_X(0) + 1p_X(1) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned} \quad (1.14)$$

En la práctica, la distribución de Bernoulli aparece, por ejemplo, en los experimentos de lanzamiento de monedas, y más generalmente, cualquier experimento no trivial puede ser dicotomizado para ajustarse a un modelo de Bernoulli. Por ejemplo, sea $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ el espacio probabilístico de un experimento, y sea $A \in \mathcal{S}$ con $P(A) = p > 0$ el suceso que se denomina éxito. Entonces, $P(A^c) = 1 - p$ será el suceso que se denomina fracaso.

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución de Bernoulli en el apartado [AII.I](#) del anexo II.

1.8.2. Distribución binomial

Consideremos un experimento de Bernoulli, que se repite n veces de forma independiente, y sea p la probabilidad de éxito (constante, por ser los ensayos independientes). Entonces la variable aleatoria X que mide el número de éxitos en las n repeticiones sigue una distribución binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$.

Definición: Se dice que la v.a. X sigue una distribución binomial de parámetros n y p (y se nota $X \sim b(n, p)$) si su función masa de probabilidad está dada por

$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

Se puede observar que $\sum_{k=0}^n p_X(k) = [p + (1 - p)]^n = 1$, por lo que p_X define una función masa de probabilidad.

La distribución binomial también puede ser considerada como la distribución de la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $b(1, p)$. Por ejemplo, si se lanza una moneda con probabilidad constante de salir cara p y cruz $1 - p$ (Bernoulli), n veces, la distribución del número de caras en los n lanzamientos está dada por (1.15).

Se puede demostrar (anexo [AI.IV. Dem. 1](#)) que

$$\begin{aligned} E[X] &= np, \\ \text{var}[X] &= np(1 - p) = npq. \end{aligned} \quad \text{Dem. 1} \quad (1.16)$$

donde $q = 1 - p$.

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución binomial en el

apartado [AII.II](#) del anexo II.

1.8.3. Distribución de Poisson

Se considera un suceso, que ocurre aleatoriamente en el tiempo o en el espacio, a razón de λ veces por unidad de tiempo o espacio (en promedio) y de forma independiente. Entonces la variable aleatoria que mide el número de ocurrencias del suceso por unidad de tiempo o espacio sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

Definición: Se dice que una v.a. X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ (y se nota $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$) si su función masa de probabilidad está dada por

$$p_X(x) = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Esta función es, en efecto, una función masa, ya que:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

El modelo de Poisson será adecuado si las ocurrencias del suceso cumplen las siguientes condiciones:

- El número de ocurrencias en un intervalo de tiempo o región del espacio es independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo o región disjunto.
- Si se considera un intervalo muy pequeño o región muy pequeña:
 - La probabilidad de que haya una sola ocurrencia del suceso es proporcional a la longitud del intervalo, o al tamaño de la región.
 - La probabilidad de que haya más de una ocurrencia es prácticamente nula.

La distribución de Poisson suele usarse por ejemplo como modelo para el número de accidentes ocurridos en una población a lo largo de un periodo de tiempo. Es importante, a la hora de estudiar si se cumplen estas condiciones, comprobar si los individuos tienen el mismo riesgo o no de sufrir un accidente, y también, comprobar si el hecho de que un individuo tenga un accidente puede influir o no en nuevos accidentes.

Otra aplicación en la que suele usarse la distribución de Poisson es cuando se intenta ajustar a una v.a. que sigue el número de partículas por unidad de volumen en un fluido. Si los datos muestran que la distribución de Poisson no se ajusta correctamente, se puede inferir que la disolución no está bien disuelta (λ no es constante y la distribución de las partículas no es homogénea).

La distribución de Poisson es la única distribución en la que la esperanza y la varianza son iguales, y son iguales al parámetro de la misma (demostraciones en el apartado [AI.V](#) del anexo I).

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda, & \text{Dem. 1} \\ \text{var}[X] &= \lambda. & \text{Dem. 2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Aproximación de la binomial: La distribución de Poisson también se suele llamar “ley de los sucesos raros”. Este nombre se debe a una propiedad que relaciona la distribución de Poisson con una distribución binomial cuando n es muy grande y p es muy pequeña, o lo que es lo mismo, un suceso que tiene una probabilidad muy baja de ocurrir en una muestra de experimentos muy grande (demostración en el apartado [Al.V. Dem. 3](#) del anexo I).

$$X \sim b(n, p) \Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} P[X = x] = P[Y = x], \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{con } Y \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Nota: Esta propiedad garantiza que si $X \sim b(n, p)$ con n suficientemente grande y p suficientemente pequeña, se puede aproximar el valor de $P[X = x]$ por $P[Y = x]$ donde $Y \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$. En la práctica, se considera aplicable esta aproximación cuando $n > 30$ y $p \leq 0,1$.

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución de Poisson en el apartado [AII.III](#) del anexo II.

1.8.4. Distribución geométrica

Consideremos varias realizaciones independientes de un experimento de Bernoulli, con probabilidad de éxito $p \in (0, 1)$. La v.a. que mide el número de fracasos x hasta que aparece el primer éxito sigue una distribución geométrica de parámetro p .

Definición: (Thomopoulos, 2018) Se dice que la v.a. X sigue una distribución geométrica de parámetro p (y se nota $X \sim G(p)$) si su función masa de probabilidad tiene la siguiente forma:

$$p_X(x) = P[X = x] = (1 - p)^x p, \quad x = 0, 1, \dots \quad (1.19)$$

Puede comprobarse que p_X es, en efecto, una función masa de probabilidad, ya que

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (1 - p)^x p = p \sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{p}{1 - (1 - p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Siendo $q = 1 - p$.

El valor esperado para su media y varianza son los siguientes:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1 - p}{p}, \\ \text{var}[X] &= \frac{1 - p}{p^2}. \end{aligned} \quad \text{Dem. 1} \quad (1.20)$$

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución geométrica en el apartado [AII.IV](#) del anexo II de ejemplos de aplicación.

1.8.5. Distribución binomial negativa

Consideremos sucesivas repeticiones independientes de un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito $p \in (0, 1)$. La v.a. que mide el número de fracasos hasta que aparece el k -ésimo éxito sigue una distribución binomial negativa de parámetros $k \in \mathbb{N}$ y p .

Definición: Se dice que la v.a. X sigue una distribución binomial negativa de parámetros k y p (y se nota $X \sim BN(k, p)$) si su función masa de probabilidad toma la siguiente forma:

$$p_X(x) = \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(k)\Gamma(x+1)} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, \dots \quad (1.21)$$

donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds$ es la función gamma.

Puesto que los valores de la variable son enteros, $\Gamma(x) = (x-1)!$. Por tanto, la función masa de probabilidad puede expresarse como sigue

$$p_X(x) = \frac{(k+x-1)!}{(k-1)!x!} p^k (1-p)^x = \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, \dots \quad (1.22)$$

Nota: Puede observarse que la distribución geométrica es un caso particular de la binomial negativa cuando $k = 1$ (fracasos hasta el $k = 1$ “primer” éxito).

Esta función satisface las propiedades de una función masa de probabilidad (ver apartado [Al.VII. Dem. 1](#) del anexo I).

Los valores de la esperanza y la varianza en esta distribución son los mismos que en la distribución geométrica, multiplicados por el parámetro k (en la geométrica $k = 1$). Puede verse su demostración en el anexo [Al.VII](#).

$$\begin{aligned} E[X] &= k \frac{1-p}{p}, \\ \text{var}[X] &= k \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned} \quad \text{Dem. 2} \quad (1.23)$$

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución binomial negativa en el apartado [AII.V](#) del anexo II.

1.8.6. Otras distribuciones discretas

Existen muchas otras distribuciones de probabilidad discretas, algunas más utilizadas que otras, algunas más complejas de utilizar que otras, pero casi siempre habrá alguna que sea la más apropiada para el caso que se esté estudiando.

No es un objetivo de este trabajo el de profundizar en todas las distribuciones discretas que existen puesto que sería una fundamentación epistemológica demasiado larga y ambiciosa, pero sí que se van a nombrar en este apartado algunos otros modelos (Johnson et al., 2005) para tener una idea de las posibilidades que existen. En cursiva aparecen las distribuciones que han sido estudiadas en los epígrafes anteriores y que, como puede verse, son solo una pequeña parte de la enorme gama existente.

- Distribución uniforme.
- *Distribución de Bernoulli.*
- *Distribución binomial.*
- *Distribución de Poisson.*
 - Distribución de Poisson desplazada.
 - Hiperdistribución de Poisson.
 - Distribución binomial de Poisson.
- *Distribución geométrica.*
- Distribución de Pascal.
- *Distribución binomial negativa.*
- Distribución logarítmica.
- Distribución logarítmica modificada.
- Distribución de Stirling de primera especie.
- Distribución de Stirling de segunda especie.
- Distribución hipergeométrica.
- Distribución hipergeométrica inversa.
- Distribución hipergeométrica negativa.
- Distribución hipergeométrica extendida.
- Distribución de Pólya-Eggenberger.
- Distribución de Pólya.
- Distribución de Pólya inversa.
- Distribución de Hermite.
- Distribución de Neymann (tipo A, B y C).
- Distribución de Beall-Rescia.
- Distribución de Thomas.
- Distribución de Pólya-Aeppli.
- Distribución de Waring.
- Distribución de Yule.
- Distribución de excedencias.
- Distribución factorial.
- Distribución de Ising-Stevens.

1.9. Función de densidad de una variable aleatoria continua

De forma análoga a la función masa de probabilidad para las variables aleatorias discretas, la función de densidad de una variable aleatoria continua determina la distribución

de probabilidad de la variable.

De la definición de v.a. continua establecida en la sección (1.4), se deduce que la función de distribución es continua, y por tanto se cumple que:

$$P[X = x] = F_X(x) - F_X(x^-) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La función f_X se denomina función de densidad de la variable aleatoria X . Cumple tres propiedades:

- Es no negativa.
- Es integrable.
- Satisface que su integral en todo $\mathbb{R}$ vale 1:

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

Para calcular probabilidades en este tipo de distribuciones se usará la función de distribución, o bien la función de densidad. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} P[X < b] &= P[X \leq b] = \int_{-\infty}^b f_X(t) dt = F_X(b), \\ P[a < X < b] &= P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(t) dt - \int_{-\infty}^a f_X(t) dt = F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

1.10. Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua

Como en el caso discreto, la esperanza de una v.a. continua, si existe, puede identificarse de forma intuitiva con el valor central o valor medio de los valores de la variable.

Definición: Sea $X : (\Omega, \mathcal{S}, P_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(\cdot)$:

1. Existe la esperanza de X si $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < +\infty$.
2. En caso de existir, se define la esperanza de X como

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx. \quad (1.24)$$

La condición para que exista la esperanza en una v.a. continua es debida a que la integral que la define es, en general, una integral de Lebesgue, que exige la integrabilidad absoluta de una función para que sea integrable.

La varianza de una v.a. continua, si existe, es (de forma idéntica al caso discreto) el valor medio de las desviaciones cuadráticas de los valores de la variable respecto de su esperanza, y su expresión queda reflejada en la ecuación (1.10).

1.11. Modelos de distribuciones de probabilidad continuas

En esta sección se estudiarán algunas distribuciones de probabilidad de variable continua que aparecen frecuentemente en la práctica, así como sus propiedades básicas.

Como en el caso discreto, cada modelo corresponde a una familia de distribuciones de probabilidad con una determinada función de distribución que se ajustará a cada caso concreto, mediante unos parámetros.

1.11.1. Distribución uniforme

Sea X una v.a. continua con valores en un intervalo $[x_1, x_2]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Supongamos que la probabilidad de que los valores de la variable estén en un subintervalo solo depende de la longitud del mismo. Entonces la v.a. X sigue una distribución uniforme entre x_1 y x_2 .

Definición: Se dice que una v.a. continua X sigue una distribución uniforme en el intervalo (x_1, x_2) (y se nota $X \sim U(x_1, x_2)$) si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & \text{si } x_1 < x < x_2; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{Dem. 1} \quad (1.25)$$

Esta función satisface las propiedades de una función de densidad (ver apartado [Al.VIII. Dem. 1](#) del anexo I).

Si la v.a. sigue una distribución uniforme $X \sim U(x_1, x_2)$, entonces puede demostrarse (anexo [Al.VIII](#))

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ \text{var}[X] &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}. \end{aligned} \quad \text{Dem. 2} \quad (1.26)$$

Un ejemplo de uso práctico es el de la orden RND de cualquier calculadora. Es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$, que devuelve un número aleatorio entre 0 y 1.

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución uniforme en el apartado [AII.VI](#) del anexo II.

1.11.2. Distribución exponencial

Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda > 0$ una v.a. discreta que cuenta el número de éxitos en un determinado periodo de tiempo. El tiempo que pasa entre dos de estos éxitos consecutivos, T , es una v.a. continua que sigue una distribución exponencial $T \sim \exp(\lambda)$.

Definición: Sea X una v.a. continua que puede tomar valores $x \geq 0$. Se dice que X sigue una distribución exponencial de parámetro λ (y se nota $X \sim \exp(\lambda)$) si su función de densidad es de la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{Dem. 1} \quad (1.27)$$

Puede demostrarse por definición que su función de distribución es (ver anexo I apartado

Al.IX. Dem. 2):

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.28)$$

Y la esperanza y varianza en el caso de esta distribución serán

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\lambda}, \\ \text{var}[X] &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (1.29) \quad \text{Dem. 3}$$

Por ejemplo, si el número de accidentes de coche al mes sigue una Poisson de parámetro λ accidentes al mes en promedio, entonces, el tiempo que hay entre dos accidentes consecutivos, será una v.a. que sigue una distribución exponencial de parámetro λ , y se podría calcular la probabilidad $P[T < 1/30]$, es decir la probabilidad de que el tiempo entre dos accidentes consecutivos sea menor que aproximadamente un día, como sigue:

$$P\left[T < \frac{1}{30}\right] = 1 - e^{-\frac{\lambda}{30}}.$$

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución exponencial en el apartado AII.VII del anexo II.

1.11.3. Distribución gamma

Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda > 0$ una v.a. discreta que cuenta el número de éxitos en un determinado periodo de tiempo, entonces el tiempo que pasa entre el k -ésimo éxito y el $k + a$, es decir, la variable aleatoria T , sigue una distribución $T \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$ ².

Definición: Sea X una v.a. continua que puede tomar valores $x \geq 0$. Se dice que X sigue una distribución gamma de parámetros $a \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$ (y se denota $X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$) si su función de densidad es de la forma

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}, \quad \forall x \geq 0. \quad \text{Dem. 1} \quad (1.30)$$

donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds$ es la función gamma.

Nota 1: Puede observarse que si $a = 1$, se obtiene la distribución exponencial, estudiada en el apartado anterior.

Nota 2: Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son v.a. independientes e idénticamente distribuidas, con distribución exponencial $\exp(\lambda)$, la variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^n X_i$ sigue una $\text{Gamma}(n, \lambda)$.

Por ejemplo, si el número de bajas laborales mensuales sigue una distribución de Poisson de parámetro λ donde este parámetro es el promedio de bajas laborales al mes, entonces el tiempo que pasa entre la baja laboral k y la baja $k + 2$ es una v.a. T con distribución gamma de parámetros $(2, \lambda)$.

²Al ser a un número entero, se denomina distribución $\text{Erlang}(a, \lambda)$. La generalización cuando $a \in \mathbb{R}^+$, da lugar a la definición en (1.30)

Su esperanza y varianza son:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{a}{\lambda}, \\ \text{var}[X] &= \frac{a}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad \text{Dem. 2} \quad (1.31)$$

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución gamma en el apartado [AII.VIII](#) del anexo II.

1.11.4. Distribución normal

Definición: Sea X una v.a. continua que puede tomar cualquier valor real. Se dice que X sigue una distribución normal o gaussiana de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ (y se denota $X \sim N(\mu, \sigma)$) si su función de densidad tiene la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.32)$$

Se puede demostrar que esta función es, en efecto, una función de densidad (ver anexo I [AI.XI. Dem. 1](#)).

Su esperanza y varianza son, precisamente:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu, \\ \text{var}[X] &= \sigma^2. \end{aligned} \quad \text{Dem. 2} \quad (1.33)$$

Esta es una de las distribuciones más importantes y conocidas; su nombre *normal* indica su frecuente uso en todos los ámbitos (científico, tecnológico, empresarial, biosanitario, etc.).

- Tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros de personas, animales, plantas, etc.
- Caracteres fisiológicos como el efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- Caracteres sociológicos, como el consumo de cierto producto por un grupo de individuos, puntuaciones en un examen, etc.
- Caracteres psicológicos, como el cociente intelectual, o el grado de adaptación a un medio.
- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes.
- Valores estadísticos muestrales, como la media.
- Otras distribuciones como la binomial o la de Poisson pueden aproximarse por la normal.

Tipificación de la distribución normal: Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$. Entonces:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad (1.34)$$

propiedad que se reconoce como *tipificación de la normal*. La distribución $N(0, 1)$ se denomina normal estándar o normal tipificada.

Esta propiedad es muy útil, ya que las probabilidades que se asocian a la normal no pueden calcularse de forma exacta, porque las integrales de la función de densidad de esta distribución solo pueden calcularse de forma numérica.

No obstante existen tablas donde aparecen muchos valores de la función de distribución de la distribución $N(0, 1)$ calculados numéricamente, y a partir de estos valores se pueden calcular probabilidades de cualquier $N(\mu, \sigma)$ utilizando la propiedad de la tipificación. Puede verse la tabla de estos valores en el apartado “[Tabla para la normal \$N\(0,1\)\$](#) ” del anexo II.

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que $X \sim N(\mu, \sigma)$ esté en el intervalo $[a, b]$, se tiene que

$$P[a \leq X \leq b] = P\left[\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right] = F_Z\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right),$$

donde $F_Z(\cdot)$ es la función de distribución de una variable $Z \sim N(0, 1)$, y pueden buscarse sus valores en las tablas.

Se puede observar un ejemplo de un caso donde se aplica la distribución normal y la tipificación en el apartado [AII.IX](#) del anexo II.

Teorema Central del Límite: Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, según una distribución de media (esperanza) $\mu_X \in \mathbb{R}$ y desviación típica $\sigma_X > 0$. Entonces, la suma de estas variables sigue aproximadamente una distribución normal, cuando n es elevado:

$$\sum_{i=1}^n X_i \underset{n \gg}{\approx} N(n\mu_X, \sqrt{n}\sigma_X). \quad (1.35)$$

Tipificando, se puede re-enunciar el Teorema Central del Límite:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \underset{n \gg}{\approx} N(0, 1).$$

Este teorema es la justificación matemática de por qué la distribución normal es un modelo adecuado para un gran número de fenómenos reales, en los que actúan muchas causas independientes en pequeña proporción (un ejemplo típico es el caso de los errores de medida).

Aproximación de la binomial por la normal (teorema de De Moivre-Laplace): Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. con $X_n \sim b(n, p)$. Entonces:

$$X_n \sim b(n, p) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left[\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z\right] = P[Z \leq z], \quad \text{con } Z \sim N(0, 1). \quad (1.36)$$

Este teorema garantiza que, cuando n es suficientemente grande, la función de distribución de la v.a. de la forma $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ se puede aproximar por la de una normal $N(0, 1)$, y por tanto, la de $X_n \sim b(n, p)$ por la de una $N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Esta aproximación se considera apropiada cuando $np > 5$ y $p > 0,1$.

Por ejemplo, si se desea aproximar el valor de $P[X = k]$ de una v.a. $X \sim b(n, p)$, esta probabilidad se tiene que expresar en términos de la función de distribución, y después aplicar el teorema. Al estar aproximando una distribución discreta por una continua, es habitual emplear la siguiente *corrección por continuidad*:

$$\begin{aligned} P[X = k] &= P\left[k - \frac{1}{2} < X \leq k + \frac{1}{2}\right] = \\ &= P\left[\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \simeq \\ &\simeq P\left[\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < Z \leq \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si se quiere calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned} P[X = 50] &= P\left[50 - \frac{1}{2} < X \leq 50 + \frac{1}{2}\right] = \\ &= P\left[\frac{50 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{50 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \simeq \\ &\simeq P\left[\frac{50 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < Z \leq \frac{50 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \end{aligned}$$

Aproximación de la distribución de Poisson por la normal: Sea X_λ una v.a. tal que $X_\lambda \sim Poisson(\lambda)$. Entonces:

$$X_\lambda \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P\left[\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq z\right] = P[Z \leq z], \quad \text{con } Z \sim N(0, 1). \quad (1.37)$$

Esta aproximación garantiza que, cuando λ es suficientemente grande, la función de distribución de la v.a. de la forma $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ se puede aproximar por la de una normal $N(0, 1)$, y por tanto, la de $X_\lambda \sim Poisson(\lambda)$ por la de una $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$. Esta aproximación se considera apropiada cuando $\lambda > 10$.

Por ejemplo, si se desea aproximar el valor de $P[X = k]$ de una v.a. $X \sim Poisson(\lambda)$, esta probabilidad se tiene que expresar en términos de la función de distribución, y después aplicar (1.37). Al estar aproximando una distribución discreta por una continua, es

habitual, como en el caso de la binomial, emplear la siguiente *corrección por continuidad*:

$$\begin{aligned}
 P[X = k] &= P\left[k - \frac{1}{2} < X \leq k + \frac{1}{2}\right] = \\
 &= P\left[\frac{k - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right] \simeq \\
 &\simeq P\left[\frac{k - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < Z \leq \frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si se quiere calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned}
 P[X = 30] &= P\left[30 - \frac{1}{2} < X \leq 30 + \frac{1}{2}\right] = \\
 &= P\left[\frac{30 - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{30 + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right] \simeq \\
 &\simeq P\left[\frac{30 - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < Z \leq \frac{30 + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]
 \end{aligned}$$

1.11.5. Otras distribuciones continuas

Existen muchas otras distribuciones de probabilidad continuas. Como en el caso discreto, no es nuestro objetivo profundizar en todas las distribuciones continuas que existen, pero sí que vamos a nombrar en este apartado algunos otros modelos (Crooks, 2019) para tener una idea de la amplia gama que existe. En cursiva, se han resaltado las distribuciones aquí estudiadas.

- *Distribución uniforme.*
- *Distribución exponencial.*
- Distribución de Laplace.
- *Distribución normal.*
- Distribución log-normal.
- Distribución de función potencial.
 - Distribución de Pareto generalizada.
 - Distribución q-exponencial.
 - Distribución beta positiva.
 - Distribución Pearson tipo IX.
 - Distribución Pearson tipo VIII.
 - Distribución beta negativa.
 - Distribución de Pareto.
 - Distribución Lomax.
 - Distribución uniforme prima.
- *Distribución gamma.*

- Distribución de Wein.
- *Distribución de Erlang.*
- Distribución chi-cuadrado.
- Distribución de Porter-Thomas.
- Distribución gamma-exponencial.
 - Distribución chi-cuadrado-exponencial.
 - Distribución Gumbel generalizada.
 - Distribución Gumbel.
 - Distribución BHP.
 - Distribución de Moyal.
- Distribución Pearson tipo VII.
 - Distribución t de Student.
 - Distribución de Cauchy.
 - Distribución de Breit-Wigner relativista.

Lista de símbolos

Ω	Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
$\mathcal{S}$	σ -álgebra de Borel asociada a un experimento aleatorio.
$P(\cdot)$	Función de probabilidad.
$X(\cdot)$	Variable aleatoria (v.a.).
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales.
$\mathcal{B}$	σ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.
$P_X(\cdot)$	Distribución de probabilidad de una variable aleatoria, X .
$F_X(\cdot)$	Función de distribución de una variable aleatoria, X .
E_X	Conjunto finito o infinito numerable de valores de una variable aleatoria discreta, X .
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
$f_X(\cdot)$	Función de densidad de una variable aleatoria continua, X .
$p_X(\cdot)$	Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta, X .
$E[\cdot]$	Esperanza de una v.a.
$var[\cdot]$	Varianza de una v.a.

Fundamentación curricular

En este segundo capítulo, se examinarán los fundamentos curriculares en los que se apoya la unidad didáctica. Para ello, lo primero que se realiza es una búsqueda y análisis de la normativa vigente aplicable a nuestra unidad didáctica. La normativa en España, particularmente, es muy cambiante y se ha tenido cuidado de considerar este hecho, ya que actualmente tanto a nivel estatal como autonómico se han llevado a cabo nuevas leyes y derogaciones de leyes y decretos que podrían influir a la hora de diseñar la unidad didáctica.

Posteriormente, se analizará el currículo según la normativa vigente, y se relacionará con el primer capítulo del trabajo ya que hay que introducir y adaptar, al nivel del curso y asignatura, los contenidos de la fundamentación epistemológica para la elaboración de la unidad didáctica.

Para ello, será de gran ayuda analizar los libros de texto de dos editoriales distintas, que nos guiarán a la hora de estructurar los contenidos y de los que se pueden extraer y adaptar numerosas actividades que se proponen. Se analizarán estos libros y se extraerá información valiosa para el diseño de nuestra unidad didáctica.

2.1. Normativa vigente aplicable a Bachillerato

2.1.1. Leyes Orgánicas

- Ley Orgánica¹ 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE).

2.1.2. Ley de Educación en Andalucía

- Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (LEA).

¹La actual Ley Orgánica por la que se modifica la LOE (LOMLOE) está en vigor desde el 19 de enero de 2021, pero en transición. Hasta el curso 2022-2023 y 2023-2024 no se prevé que se modifiquen el currículo, organización y contenido de las enseñanzas.

2.1.3. Desarrollo curricular de la materia

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 03-01-2015).
- Orden² de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación en el proceso de aprendizaje del alumnado. (BOJA de 29-07-2016).

2.2. El currículo según la normativa vigente

Puesto que se pretende elaborar una unidad didáctica para 2º de Bachillerato en un centro de la comunidad autónoma de Andalucía, el marco de normativa vigente será el aplicable a Bachillerato, tanto a nivel estatal como autonómico.

Como se ha mencionado anteriormente en la nota al pie 1, en lo que a currículo se refiere, actualmente está vigente la LOMCE, y no se prevé, hasta el curso 2023-2024, que se modifique el currículo de 2º de Bachillerato por la LOMLOE.

La asignatura en concreto en la que se va a desarrollar el tema propuesto para la unidad didáctica es Matemáticas II (2º de Bachillerato, modalidad de Ciencias y Tecnología). En concreto, la unidad didáctica se centrará en los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo para esta asignatura establecidos en el real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, en su bloque 5 de Estadística y Probabilidad (tabla 2.1). También se centrará de forma transversal en los contenidos, criterios y estándares del bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas (tabla 2.2).

Para complementar esta información, en la siguiente sección se estudiarán también los contenidos y se analizarán los estándares y criterios que se establecen en los libros de texto actuales de dos editoriales distintas, para el tema, asignatura y curso en cuestión.

Según la normativa sobre el currículo de Bachillerato para la sección de distribuciones de probabilidad en la asignatura de Matemáticas II, y relacionando esta parte con la fundamentación epistemológica, los capítulos o contenidos que se tendrían que adaptar utilizando herramientas didácticas y los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para su posterior enseñanza serían:

- Variable aleatoria.
- Distribución de probabilidad de una variable aleatoria.
- Clasificación de variables aleatorias.
- Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
- Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta.
- Distribución binomial.
- Función de densidad de una variable aleatoria continua.
- Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua.

²Esta orden ha sido sustituida recientemente por la del 15 de enero de 2021. Esta nueva orden está en vigor actualmente y su implantación se realizará en el curso 2021-2022. La orden de 14 de julio de 2016 será la de referencia en este trabajo.

- Distribución normal.
- Aproximación de la distribución binomial por la normal.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 5. Estadística y Probabilidad		
Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso. Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real. 2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados. 3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.	1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. 1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. 1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. 2.1. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. 2.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica. 2.3. Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. 2.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica. 2.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

Tabla 2.1 Currículo para el bloque 5 de Estadística y Probabilidad en Matemáticas II. En negrita, los contenidos de la unidad didáctica propuesta. *Fuente: Boletín Oficial del Estado (RD 1105/2014).*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. Iniciación a la demostración en Matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc. Razonamiento deductivo e inductivo. Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático. Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas.	1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados. 5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.	1.1. Expresa verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.5. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Utiliza diferentes métodos de demostración en función del contexto matemático. 3.2. Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.). 4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 4.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 4.3. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar, tanto en la búsqueda de resultados como para la mejora de la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas		
Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad. 9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 10. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 11. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 12. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras. 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 14. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	5.1. Conoce la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc. 5.2. Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5.3. Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.). 7.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 7.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 7.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 7.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación. 7.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 8.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 8.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 8.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc. 10.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad para la aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, autocritica constante, etc. 10.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 10.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 11.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad. 12.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas		
		13.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 13.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 13.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 14.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 14.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 14.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 2.2 Currículo para el bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas II. *Fuente: Boletín Oficial del Estado (RD 1105/2014).*

Además de consultar este real decreto, se ha consultado también la Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la comunidad autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

En concreto, se ha comparado esta orden con el real decreto para asociar cada uno de los criterios de evaluación correspondientes con las competencias que se desarrollan en cada uno de ellos. La tabla que relaciona las siglas de las competencias clave con su nombre completo es la tabla 2.3, y las tablas donde se muestra la relación de los criterios con las competencias son la tabla 2.4 para el bloque 1 y la tabla 2.5 para el bloque 5.

Siglas	Nombre completo
CCL	Competencia en comunicación lingüística.
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología.
CAA	Competencia de aprender a aprender.
CD	Competencia digital.
SIEP	Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
CSC	Competencias sociales y cívicas.

Tabla 2.3 Relación de las siglas con los nombres completos de las competencias clave del currículo. *Fuente: elaboración propia.*

Criterios de evaluación - Bloque 1	Competencias clave
1. Expresar oralmente y por escrito, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.	CCL, CMCT, CAA.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA, CCL.
3. Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	CMCT, CAA.
4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados.	CCL, CMCT, SIEP.
5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.	CMCT, CAA, SIEP.
6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de la resolución de un problema y la profundización posterior; la generalización de propiedades y leyes matemáticas y la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.	CMCT, CAA, CSC.
7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados.	CMCT, CAA, SIEP, CCL.
8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones reales.	CMCT, CAA, CSC, SIEP.
9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y las limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA.
10. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT, CAA.
11. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP.
12. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA.
13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA.
14. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA.

Tabla 2.4 Relación entre los criterios de evaluación del RD 1105/2014 y las competencias clave que se desarrollan en comparación con la orden de 14 julio de 2016 para Andalucía, en el bloque 1. de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas. *Fuente: Boletín Oficial de la Junta de Andalucía.*

Criterios de evaluación - Bloque 5	Competencias clave
1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.	CMCT, CSC.
2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.	CMCT.
3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica la información estadística presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de datos como de las conclusiones.	CCL, CMCT, CD, CAA, CSC.

Tabla 2.5 Relación entre los criterios de evaluación del RD 1105/2014 y las competencias clave que se desarrollan en comparación con la orden de 14 de julio de 2016 para Andalucía, en el bloque 5. de Estadística y Probabilidad. Fuente: Boletín Oficial de la Junta de Andalucía.

Por último, la Orden de 14 de julio de 2016 establece en su página 446 los objetivos generales de etapa de las matemáticas en Bachillerato, que se resumen en los siguientes puntos:

1. Conocer, comprender y aplicar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio y conocimiento de las distintas áreas del saber, ya sea en el de las propias matemáticas como de otras ciencias, así como aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de otros ámbitos.
2. Conocer la existencia de demostraciones rigurosas como pilar fundamental para el desarrollo científico y tecnológico.
3. Usar procedimientos, estrategias y destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación, formulación, contraste de hipótesis, aplicación de deducción e inducción, etc.) para enfrentarse y resolver investigaciones y situaciones nuevas con autonomía y eficacia.
4. Reconocer el desarrollo de las matemáticas a lo largo de la historia como un proceso cambiante que se basa en el descubrimiento, para el enriquecimiento de los distintos campos del conocimiento.
5. Utilizar los recursos y medios tecnológicos actuales para la resolución de problemas y para facilitar la comprensión de distintas situaciones dado su potencial para el cálculo y representación gráfica.
6. Adquirir y manejar con desenvoltura vocabulario de términos y notaciones matemáticas y expresarse con rigor científico, precisión y eficacia de forma oral, escrita y gráfica en diferentes circunstancias que se puedan tratar matemáticamente.
7. Emplear el razonamiento lógico-matemático como método para plantear y abordar problemas de forma justificada, mostrar actitud abierta, crítica y tolerante ante otros razonamientos u opiniones.

8. Aplicar diferentes estrategias y demostraciones, de forma individual o en grupo, para la realización y resolución de problemas, investigaciones matemáticas y trabajos científicos, comprobando e interpretando las soluciones encontradas para construir nuevos conocimientos y detectando incorrecciones lógicas.
9. Valorar la precisión de los resultados, el trabajo en grupo y distintas formas de pensamiento y razonamiento para contribuir a un mismo fin.

2.3. Análisis de los libros de texto

Para realizar este análisis se han escogido libros de texto de dos editoriales distintas: Bruño (Arias Maza, 2016) y SM (Alcaide et al., 2016). Se analizarán los contenidos y las actividades que se proponen en cada uno, examinando las semejanzas y diferencias en cuanto a tipo de actividades, contenidos, orden de los mismos y forma de exponerlos.

2.3.1. Análisis de contenidos curriculares y estructura

En la editorial Bruño, el tema es “Tema 15. Probabilidad. Distribuciones binomial y normal.”, mientras que en la editorial SM, el tema es “Tema 14. Distribuciones de probabilidad.”. En ambos casos, se trata del último tema del libro.

En el caso de la editorial Bruño, el tema de probabilidad está incluido en el mismo tema que el de distribuciones de probabilidad. Esta parte se excluirá del análisis porque no entra en el currículo estudiado aquí.

Tras el estudio realizado en la fundamentación epistemológica (capítulo 1), donde se han descrito los contenidos matemáticos en profundidad, y el análisis del currículo según la normativa vigente (2.2), donde se han enumerado las partes de la fundamentación epistemológica que hay que considerar contenidos a enseñar según el real decreto 1105/14 en su bloque 5 de Estadística y Probabilidad, nos planteamos en qué profundidad deben ser desarrollados para este curso. Esta información puede extraerse de los libros de texto y se analiza en la tabla 2.6.

Fundamentación epistemológica	Profundidad en los libros de texto
■ Variable aleatoria.	■ Pequeña definición informal, sin introducir concepto de σ-álgebra de Borel, ni función medible.
■ Clasificación de variables aleatorias.	■ Breve definición de v.a. discreta (aquella con un número finito o infinito numerable de valores distintos) y v.a. continua (aquella con valores en un intervalo de la recta real).
■ Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta.	■ Definición, condiciones que debe cumplir, uso de esta función en el cálculo de probabilidades. También se introduce brevemente, antes o después, el concepto de distribución de probabilidad.

Fundamentación epistemológica	Profundidad en los libros de texto
■ Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta.	■ Presuponiendo que existen, breve definición de esperanza, varianza y desviación típica en variables discretas.
■ Distribución binomial.	■ Breve introducción a partir de la distribución de Bernoulli, definición, esperanza y varianza y ejemplos de aplicación en el cálculo de probabilidades, bien por la función masa o mediante tablas de la distribución.
■ Función de densidad de una variable aleatoria continua.	■ Definición de función de densidad de una v.a. continua y condiciones que debe cumplir, y definición también de la función de distribución.
■ Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua.	■ Presuponiendo que existen, breve definición de esperanza, varianza y desviación típica en variables continuas.
■ Distribución normal.	■ Función de densidad de la distribución y sus características, breve definición de la normal estándar, tipificación de la normal y cálculo de probabilidades utilizando tablas.
■ Aproximación de la distribución binomial por la normal.	■ Con algún ejemplo ilustrativo, introducir el resultado del teorema de De Moivre-Laplace. Realización de algunos ejercicios e introducción de la corrección por continuidad al aproximar una distribución discreta por una continua.

Tabla 2.6 Profundidad que se da a los contenidos de la fundamentación epistemológica en los libros de texto.
Fuente: elaboración propia.

La profundidad con la que se imparten los contenidos va a variar según el libro de texto, y también va a variar su estructura y los contenidos mismos que presenta cada editorial. Hay libros de texto que incluyen incluso más contenidos que los indicados en el currículo.

En la tabla 2.7 se muestran los contenidos que comparten las dos editoriales respecto al tema de distribuciones de probabilidad, y en la tabla 2.8 se muestran los contenidos que no comparten; es decir, los que aparecen en uno de los libros, pero no en el otro.

Como puede observarse, ambos libros de texto contemplan prácticamente todo el contenido del currículo oficial según el real decreto 1105/14 para este tema del bloque 5, salvo en el caso del libro de texto de Bruño que no introduce explícitamente el concepto de variable aleatoria.

Por el contrario, ambos libros tienen contenidos que no están contemplados en el currículo, como el caso del libro de Bruño sobre el factorial de un número y números combinatorios, o en el caso del libro de SM sobre la distribución de Bernoulli.

También puede observarse que el libro de SM está más enfocado a resolver los problemas de cálculo de probabilidades para la binomial mediante tablas con los valores de

la función de distribución, mientras que el libro de Bruño da nociones sobre factorial y combinatorios para que los alumnos sepan realizar estos cálculos sin necesidad de tablas.

Contenidos editorial Bruño	Contenidos editorial SM
■ Distribución de frecuencias relativas de una variable discreta.	■ Función masa de probabilidad de una variable discreta.
■ Parámetros de una variable discreta.	■ Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta.
■ Cálculo de la probabilidad en una distribución binomial.	■ La distribución binomial.
■ Parámetros de una distribución binomial.	■ Esperanza y varianza de la distribución binomial.
■ Distribución de frecuencias y probabilidad continuas.	■ Distribuciones continuas.
■ Características de una distribución normal.	■ La distribución normal.
■ Distribución normal estándar.	■ La distribución normal estándar.
■ Tipificación de la variable.	■ Tipificación de la variable normal.
■ La normal como una aproximación de la binomial.	■ Aproximación de la binomial por la normal.
■ Corrección por continuidad.	■ Corrección por continuidad.

Tabla 2.7 Contenidos comunes a los libros de texto de ambas editoriales. *Fuente: elaboración propia.*

Contenidos editorial Bruño	Contenidos editorial SM
■ Factorial de un número. ■ Números combinatorios.	■ Variables aleatorias. ■ Distribución de Bernoulli. ■ Tablas para la distribución binomial.

Tabla 2.8 Contenidos no comunes a los libros de texto de ambas editoriales. *Fuente: elaboración propia.*

En cuanto a cómo se estructuran los contenidos, ambos libros de texto tienen una estructura muy similar, por no decir idéntica en el orden (salvo por los contenidos en los que difieren) y también en la estructura que sigue para exponer estos contenidos.

Ambas editoriales presentan estructuras deductivas; es decir, en primer lugar aparecen conceptos teóricos, y a continuación ejemplos resueltos sobre estos conceptos, terminando con unos cuantos ejercicios para que el alumnado ponga en práctica la teoría.

Cabe mencionar aquí, que el libro de SM desarrolla algo más las explicaciones mediante una breve introducción o puesta en contexto, y el libro de Bruño es más conciso y casi siempre empieza directamente con la teoría.

En cuanto a las ilustraciones, apuntes en los márgenes, comentarios y otras notas de interés, los dos libros son muy parecidos. En ambos hay ilustraciones explicativas de la teoría, de los ejemplos resueltos y gráficos. Y en ambos libros hay anotaciones en los márgenes de las explicaciones teóricas donde destacan puntos importantes a tener en cuenta, llamando la atención de los alumnos hacia estos puntos.

Lo que sí es distinto en este aspecto es que el libro de Bruño tiene anotaciones a los márgenes como apoyo para el cálculo de las probabilidades utilizando la calculadora, mientras en el libro de SM este tipo de anotaciones se derivan a GeoGebra para que los alumnos puedan experimentar de forma gráfica con las distribuciones de probabilidad. Esto es así porque, como hemos mencionado anteriormente, en el libro de SM se realizan los cálculos de la distribución binomial mediante tablas, sin utilizar las funciones masa de probabilidad, mientras que en el libro de Bruño se indica cómo usar la calculadora para obtener los resultados utilizando la función masa de probabilidad, sin el uso de tablas, después de haber introducido los conceptos de factorial y número combinatorio.

Ambas estructuras sin duda, que van de lo general a lo específico, se basan en una metodología transmisiva, en la que el profesor explica los contenidos a los alumnos y, seguidamente, estos realizan los ejercicios propuestos.

2.3.2. Análisis de ejercicios y ejemplos

En lo que se refiere a ejercicios y ejemplos, pueden relacionarse con los contenidos del bloque 1 del currículo según el real decreto 1105/14, en cuanto a que el alumno puede establecer estrategias y protocolos para la adecuada resolución de los problemas, y en algunos ejercicios puede poner en práctica su resolución por medios TIC (herramientas informáticas o web).

Para comparar ambos textos, se ha elaborado una tabla (tabla 2.9) que clasifica las actividades según su tipología. También se presenta un diagrama de barras que muestra de forma gráfica la distribución de las actividades según su tipo en cada editorial (figura 2.1).

	Editorial Bruño		Editorial SM	
	Cantidad	% del total	Cantidad	% del total
AP	16	15,7 %	41	37,9 %
DES	21	20,6 %	20	18,5 %
CON	17	16,7 %	30	27,8 %
AMP	29	28,4 %	3	2,8 %
TIC	10	9,8 %	3	2,8 %
EV	9	8,8 %	11	10,2 %
Total	102	100 %	108	100 %

Tabla 2.9 Tipología de las actividades de los libros de texto escogidos, cantidad y peso relativo. *Fuente: elaboración propia.*

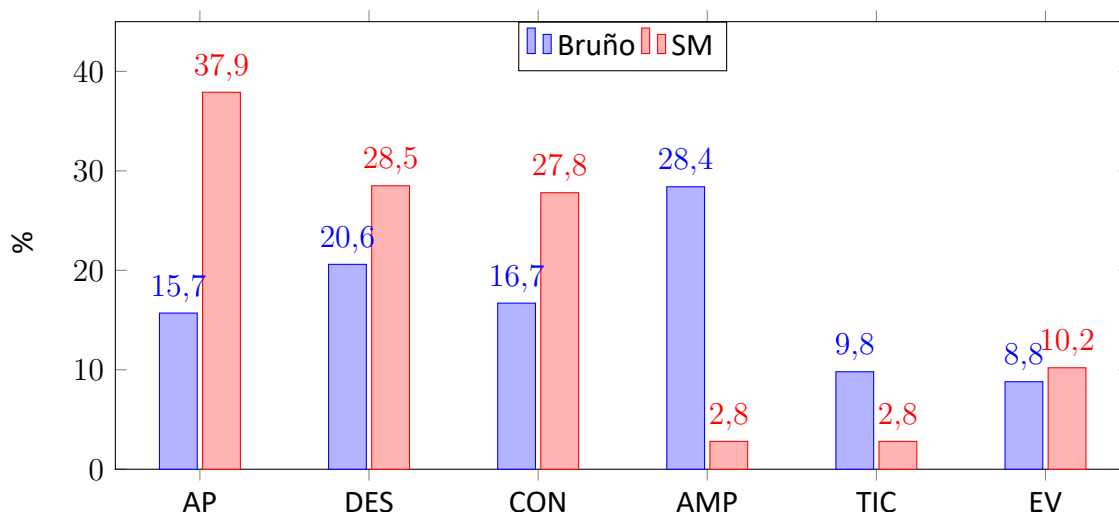


Figura 2.1 Diagrama de barras con el que se compara el porcentaje de actividades de cada tipo en los libros de texto de las dos editoriales. Fuente: elaboración propia.

Las tipologías establecidas se enumeran a continuación:

- **AP:** Actividades de aprendizaje. Permiten adquirir destrezas procedimentales y conceptuales. Se han incluido aquí los ejercicios resueltos y pequeños ejemplos que se encuentran en ambas editoriales entre la exposición de los contenidos.
- **DES:** Actividades de desarrollo. Permiten desarrollar y fijar los contenidos. Se han tenido en cuenta los ejercicios propuestos al acabar cada sección, son ejercicios para aplicar la teoría.
- **CON:** Actividades de consolidación. Permiten ser conscientes de los objetivos conseguidos. Se incluyen en esta tipología los ejercicios propuestos al final del tema.
- **AMP:** Actividades de ampliación. Permiten individualizar la enseñanza. Se han tenido en cuenta los ejercicios de ampliación y profundización incluidos al final del tema.
- **TIC:** Actividades TIC. Permiten familiarizarse con las herramientas TIC. Son ejercicios que se proponen para utilizar herramientas de cálculo como Microsoft Excel, o GeoGebra.
- **EV:** Actividades de evaluación. Determinan el grado de consecución de los objetivos. Al final de los temas, existe un apartado de ejercicios de evaluación, con un formato de tipo examen. Dichos ejercicios se incluyen en esta tipología.

Podemos observar cómo en las actividades de aprendizaje, en la editorial de Bruño hay un 15,7 % mientras que en SM tienen un peso de un 37,9 %. Sin embargo, aunque en las actividades de desarrollo se parecen ambos libros de texto, en las actividades de consolidación hay un 16,7 % en Bruño frente a un 27,8 % en SM, y en las actividades de ampliación hay un 28,4 % en Bruño frente a un 2,8 % en SM.

El objetivo es el mismo, sin embargo ambas editoriales difieren en el cómo. En el caso de SM, parece que su intención es dar más peso a las actividades de aprendizaje, desarrollo y consolidación. Se pretende que el alumno afiance bien desde el principio los contenidos aprendidos y que pueda finalmente consolidarlos de forma segura si realiza las actividades. En cambio, el libro de Bruño busca dar un peso más ligero a las actividades

de aprendizaje, desarrollo y consolidación, pero más peso a las de ampliación.

2.3.3. Conclusiones

En resumen, se podría decir que los dos libros son muy parecidos en cuanto a estructura, contenidos y metodología. Y en cuanto a las actividades, prácticamente son iguales, excepto que en Bruño se da más peso a las actividades de ampliación, y en SM a las de desarrollo y consolidación. En cuanto al enfoque, se distingue bien que el libro de Bruño está más inclinado a que los alumnos aprendan los procedimientos para el cálculo de probabilidades con el uso de calculadora, mientras que en el libro de SM se dan tablas para calcular a partir de las mismas los valores necesarios en el cálculo de probabilidades.

En cualquier caso, ambos libros cumplen con los contenidos especificados en el currículo en el bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, en cuanto a la resolución de problemas y uso de las TIC, como también los del bloque 5. El profesor bien podría seguir fielmente estos libros y planificar sus sesiones basándose en la teoría y actividades que en ellos se proponen, eligiendo el de la editorial que mejor se adapte a los objetivos didácticos de su unidad.

Fundamentación didáctica

En los capítulos anteriores se ha investigado el tema elegido para la unidad didáctica desde dos perspectivas: el “*saber sabio*”, analizado en la fundamentación epistemológica (saber científico y riguroso, pero que no puede ser enseñado directamente a la comunidad escolar a la que va dirigida nuestra unidad didáctica) y el “*saber a enseñar*”, analizado en la fundamentación curricular (contenidos que han sido designados como objetos a enseñar). En este capítulo examinaremos algunas investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo de probabilidades y la estadística, materias en las que se enmarca el tema de nuestra unidad didáctica, con el fin de identificar errores, dificultades, estrategias o fenómenos didácticos que puedan servirnos de orientación en el diseño de la misma.

No se pretende hacer un estudio exhaustivo del “estado de la cuestión”, ya que esto sería inviable por cuestiones de espacio, sino aportar algunas investigaciones relevantes, analizarlas brevemente y explicar la forma en que afectarán a la elaboración de la unidad didáctica.

3.1. Estadística por proyectos

Hay muchos estudios que demuestran los beneficios de aprender estadística mediante la metodología basada en proyectos, entre ellos el estudio de Batanero Díaz (2011). Esta metodología se llama Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP por sus siglas en español) o *Project Based Learning* (PBL por sus siglas en inglés).

La motivación e implicación del alumnado aumenta cuando se le brinda la oportunidad de participar, eligiendo e investigando acerca de un tema de interés personal, y esto es precisamente lo que se busca para todos los alumnos en una clase, sobre todo para aquellos que tienen cierta falta de compromiso con su aprendizaje o falta de interés por la asignatura, como es el caso habitual en Matemáticas, sobre todo por desconocer la utilidad o la aplicación real de lo aprendido.

La comprensión, interpretación y reacción frente a la información estadística requiere conocimiento matemático o estadístico, habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad de plantear preguntas y postura crítica, y todas estas capacidades se incentivan en el trabajo por proyectos, además de los beneficios socioculturales para el

alumnado del trabajo en equipo, y el desarrollo de la capacidad discursiva como medio de ampliar sus habilidades de pensamiento crítico, ya que al realizar sus informes deben situar el análisis del problema dentro de un argumento coherente y convincente.

En el desarrollo de un proyecto se comienza planteando un problema práctico y de interés (si puede ser de algún ámbito cercano a los alumnos, mejor). Posteriormente hay una fase de planteamiento de preguntas en la que el profesor guía a los alumnos a formular las preguntas de investigación correctas, como “¿Qué se quiere probar?”, “¿Qué datos se necesitan?” o “¿Qué problemas crees que vas a encontrar?”. Después se recogen los datos necesarios, se organizan, analizan e interpretan, y se ve si puede resolverse el problema o no. Se haya podido resolver el problema o no, el último paso es el de escribir un informe en el que quede reflejado todo el proceso.

Si los estudiantes trabajan la estadística por medio de proyectos, se consiguen varios puntos positivos (Holmes, 1980):

- Los proyectos permiten contextualizar la estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y tienen que ser interpretados.
- Los proyectos refuerzan el interés, sobre todo si el alumno es el que elige el tema. El alumno quiere resolver el problema, no es impuesto por el profesor.
- Se aprende mejor qué son los datos reales, y se introducen ideas que no aparecen con los “datos inventados por el profesor”: precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo.
- Se muestra que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

Lo ideal sería que los alumnos eligieran el tema que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos pequeños de unos 3 o 4 alumnos, y podrían también conectarse con otras áreas curriculares. En la unidad didáctica que proponemos en este trabajo, por motivos de espacio, se desarrolla una sola actividad de este tipo para toda la clase, aunque la posibilidad más atractiva sería presentar varios proyectos del mismo tipo y que los alumnos puedan escoger el que les pueda resultar más interesante.

3.2. Aprendizaje cooperativo en Matemáticas

En el estudio llevado a cabo por Batanero Díaz (2011) se señala la poca pertinencia de proponer ejercicios descontextualizados, ya que los estudiantes no ven el sentido a los conceptos y procedimientos que se trabajan habitualmente en clase de Matemáticas. Además de esto, se conoce que las metodologías que emplean aprendizaje cooperativo permiten a los estudiantes adquirir competencias para su desarrollo personal, social y profesional.

Según el estudio realizado por Herrada Baños (2018), el aprendizaje cooperativo ocupa un lugar destacado en la enseñanza de las matemáticas (y de cualquier otra materia), dada su utilidad para el desarrollo de competencias transversales y su efectividad para romper con tabúes vinculados a las relaciones interpersonales de los estudiantes. Se ha demostrado en varias investigaciones recogidas en Herrada Baños (2018) que el aprendizaje cooperativo favorece no solo la adquisición de competencias y la mejora en el rendimiento académico de los estudiantes, sino que incrementa el interés del alumnado sobre las materias objeto de estudio. Esto es muy importante para la asignatura de Matemáti-

cas de cara a reducir los elevados índices de fracaso escolar existentes y mejorar el nivel educativo de los alumnos. Según Vilches Peña Gil Pérez (2011), el aprendizaje cooperativo es una herramienta imprescindible para el estudio de las matemáticas, ya que favorece el aprendizaje significativo y la cultura científica, e implica a profesores y alumnos en una tarea común, por lo que mejora el clima en el aula.

La cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes, los alumnos procuran obtener resultados que sean beneficiosos para ellos mismos y para todos los demás miembros del grupo. Por tanto, el aprendizaje cooperativo se basa en el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás, y no como en el aprendizaje individualista y competitivo en el que los estudiantes trabajan por su cuenta para lograr metas individuales y desvincularse de los demás compañeros.

Además, esta metodología es compatible con la de aprendizaje basado en proyectos. No solamente es compatible sino que es necesariamente complementaria, porque no se entiende el aprendizaje por proyectos si los alumnos no están en grupos en los que cooperen para conseguir llevarlo a cabo.

En la unidad didáctica se propone el aprendizaje cooperativo como complemento del aprendizaje por proyectos, y además se realizarán todas las actividades de aprendizaje, desarrollo y consolidación por pequeños grupos heterogéneos, fomentando que trabajen en equipo para lograr un objetivo común, y que también ayuden a sus compañeros de otros grupos.

Parte II

Proyección didáctica

Unidad didáctica

4.1. Título

La unidad didáctica que se desarrolla a continuación se titula *Distribuciones de probabilidad*, y sus contenidos se incluyen en la asignatura Matemáticas II del curso 2º de Bachillerato en su modalidad de ciencias y tecnología.

4.2. Objetivos y punto de partida de la unidad

En esta unidad, los alumnos van a estudiar las distribuciones binomial y normal. Podrán distinguir situaciones en que una variable aleatoria discreta siga una distribución binomial, hallarán su función de probabilidad y calcularán probabilidades asociadas. Asimismo, para el caso de la distribución normal, calcularán probabilidades asociadas mediante la tipificación de la normal y el uso de tablas. Por último, calcularán probabilidades a través de la aproximación de la binomial por la normal.

Los alumnos ya conocen los conceptos previos sobre probabilidad y experimentos aleatorios, distinguen entre frecuencia y probabilidad y conocen métodos de cálculo de probabilidades elementales. Sin embargo, puede que encuentren alguna dificultad a la hora de identificar los distintos tipos de distribuciones, y a la hora de operar con ellas. Deberán ejercitarse en la resolución de estas operaciones para dominarlas. Puede que, además de esto, algunos alumnos tengan dificultades en relacionar el tema de distribuciones de probabilidad y la vida diaria, o de identificar problemas reales asociados a este tema. Se plantea una unidad didáctica que refuerce estas dos posibles dificultades por parte del alumnado.

4.3. Justificación

En el capítulo 2 se ha analizado el currículo que establece la normativa vigente tanto estatal como autonómica para la asignatura y curso en cuestión, así como los objetivos relativos a la etapa de Bachillerato, tanto en el bloque 1 transversal de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, como en el bloque 5 de Estadística y Probabilidad.

En esta unidad didáctica, se estudia la parte de distribuciones de probabilidad, por lo

que no se van a desarrollar todos los contenidos recogidos en las tablas 2.1 y 2.2, sino que solamente se atenderá a aquellos relativos a los conceptos de variable aleatoria y distribuciones de probabilidad, así como a algunos de los contenidos del bloque 1, que se recogen en el real decreto 1105/14 y en la orden de 14 de julio de 2016 de la Junta de Andalucía.

Concretamente, del bloque 5 de Estadística y Probabilidad, se abordan los siguientes contenidos:

- Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.
- Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.
- Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.
- Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.

Sus criterios de evaluación son:

2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.
3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

Y sus estándares de aprendizaje evaluables:

- 2.1 Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica.
- 2.2 Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica.
- 2.3 Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico.
- 2.4 Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica.
- 2.5 Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.
- 3.1 Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

4.4. Contextualización del centro y del aula

El I.E.S. Cástulo se encuentra en la localidad de Linares, en Jaén. Este municipio es la capital de la comarca de Sierra Morena, y es el segundo municipio más poblado de la provincia con 57.353 habitantes según el padrón municipal del INE de 2020.

En este centro se imparten:

- Todos los cursos de la ESO.
- Bachillerato, en las modalidades de:
 - Humanidades y ciencias sociales.
 - Ciencia y tecnología.
- Formación profesional:
 - Tres ciclos de la familia profesional de comercio y marketing: FPB en servicios comerciales, técnico en actividades comerciales y técnico superior en gestión de ventas y espacios comerciales.

En este centro asisten cada día a clase alrededor de 535 alumnos, y el equipo docente está formado por 44 profesores.

En cuanto a las características del alumnado, predominan las familias de clase media-baja. En casi todos los casos el ambiente familiar es favorable, estable y positivo, y la relación de las familias con el centro es igualmente positiva, colaborando en su relación con los tutores por la educación de sus hijos.

El curso concreto al que va dirigida esta unidad didáctica es 2º de Bachillerato de la modalidad de ciencias y tecnología. En este grupo, para el curso 2020-2021 hay un total de 23 estudiantes: 10 alumnas y 13 alumnos.

Tanto los aspectos físicos como psicológicos de los alumnos son normales, propios de su edad, y no hay nadie con necesidades especiales diagnosticadas. Todos los alumnos están, a priori, capacitados para seguir el ritmo normal de las clases, lo que se valorará a la hora de realizar esta unidad didáctica en cuanto a objetivos y metodología, a pesar de que sí se observan diferencias en el compromiso por el estudio de la materia de las Matemáticas, y como se verá más adelante, se contemplan actividades y recursos para aumentar la motivación y compromiso de estos alumnos.

4.5. Objetivos

4.5.1. Objetivos generales de etapa

Los objetivos generales de etapa son los que los estudiantes deben trabajar durante la etapa de Bachillerato, en este caso. Estos objetivos, detallados en el real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, en el artículo 25, se enumeran a continuación:

1. Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
2. Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma respon-

sable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

3. Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
4. Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
5. Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
6. Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
7. Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
8. Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
9. Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
10. Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
11. Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
12. Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
13. Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
14. Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

4.5.2. Objetivos de área de las Matemáticas

En la orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, se encuentran los objetivos de las Matemáticas II de 2º de Bachillerato, que son:

1. Conocer, comprender y aplicar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio y conocimiento de las distintas áreas del saber, ya sea en el de las propias matemáticas como de otras ciencias, así como aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de otros ámbitos.

2. Conocer la existencia de demostraciones rigurosas como pilar fundamental para el desarrollo científico y tecnológico.
3. Usar procedimientos, estrategias y destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación, formulación, contraste de hipótesis, aplicación de deducción e inducción, etc.) para enfrentarse y resolver investigaciones y situaciones nuevas con autonomía y eficacia.
4. Reconocer el desarrollo de las matemáticas a lo largo de la historia como un proceso cambiante que se basa en el descubrimiento, para el enriquecimiento de los distintos campos del conocimiento.
5. Utilizar los recursos y medios tecnológicos actuales para la resolución de problemas y para facilitar la comprensión de distintas situaciones dado su potencial para el cálculo y representación gráfica.
6. Adquirir y manejar con desenvoltura vocabulario de términos y notaciones matemáticas y expresarse con rigor científico, precisión y eficacia de forma oral, escrita y gráfica en diferentes circunstancias que se puedan tratar matemáticamente.
7. Emplear el razonamiento lógico-matemático como método para plantear y abordar problemas de forma justificada, mostrar actitud abierta, crítica y tolerante ante otros razonamientos u opiniones.
8. Aplicar diferentes estrategias y demostraciones, de forma individual o en grupo, para la realización y resolución de problemas, investigaciones matemáticas y trabajos científicos, comprobando e interpretando las soluciones encontradas para construir nuevos conocimientos y detectando incorrecciones lógicas.
9. Valorar la precisión de los resultados, el trabajo en grupo y distintas formas de pensamiento y razonamiento para contribuir a un mismo fin.

4.5.3. Objetivos didácticos de la unidad

La unidad didáctica presenta unos objetivos didácticos propios, y son los siguientes:

1. Desarrollar los conceptos asociados a distribuciones discretas y continuas de probabilidad.
2. Distinguir cuándo una variable aleatoria es discreta o continua.
3. Distinguir los casos a los que se aplica el modelo binomial y saber aplicar el cálculo de probabilidades.
4. Distinguir los casos a los que se aplica el modelo normal y saber aplicar el cálculo de probabilidades.
5. Saber determinar en qué condiciones una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial puede aproximarse a una normal. Utilizar esta aproximación en el cálculo de probabilidades para las binomiales.
6. Saber relacionar problemas de la vida cotidiana con los modelos de distribuciones discretas y continuas, y solucionar los problemas aplicando los conocimientos adquiridos.
7. Ejercitar el dominio de los procedimientos de cálculo de probabilidades para la distribución binomial y la normal.

8. Conocer casos reales de interés y aprender distintas estrategias para resolver problemas.
9. Familiarizar al alumnado con herramientas TIC para la elaboración de informes matemáticos e incluirlos en un repositorio de la nube.

4.5.4. Relación entre objetivos de etapa y de área

Objetivos de área	Objetivos generales de etapa													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		X		X	X	X		X	X	X	X	X	X	
2		X		X	X	X			X	X				
3				X	X	X	X	X	X					
4	X	X		X	X	X	X	X	X			X		
5				X	X	X	X	X	X		X			X
6		X		X	X	X	X							
7	X	X	X				X				X	X		
8	X	X	X				X				X	X		
9	X	X	X					X		X	X			

Tabla 4.1 Correspondencia entre los objetivos generales de etapa y los objetivos de área. *Fuente: elaboración propia.*

4.6. Competencias clave

Los alumnos deberían desarrollar 7 competencias clave durante el curso con el fin de conseguir la resolución adecuada y eficaz de actividades y problemas complejos, según el real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

Esta unidad didáctica contribuirá al desarrollo de estas competencias clave, que vienen marcadas según los criterios de evaluación que se van a trabajar (orden del 14 de julio de la Junta de Andalucía).

Las competencias clave que se desarrollarán en esta unidad didáctica son las siguientes:

1. Comunicación lingüística (CCL).
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
3. Competencia digital (CD).
4. Aprender a aprender (CAA).
5. Competencias sociales y cívicas (CSC).
6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).

Se intentarán implementar actividades y hábitos en el aula, durante el periodo en el que se ponga en práctica esta unidad didáctica, que permitan al alumnado el desarrollo en todas las distintas competencias. Las posibles actividades y hábitos que se contemplan relacionadas a las competencias clave se enumeran a continuación:

Comunicación lingüística (CCL): Esta competencia se desarrollará durante toda la unidad. Es causa y consecuencia al mismo tiempo de la comprensión de los contenidos teóricos y los problemas. Se estará desarrollando de las siguientes formas, siempre desde el respeto y la tolerancia:

- Durante las clases magistrales, en la comunicación profesor-alumno, al utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
- Durante la corrección de los ejercicios, en la comunicación profesor-alumno y alumno-profesor.
- En la comunicación profesor-alumno, y alumno-profesor sobre todo, a la hora de expresar dudas, soluciones, opiniones y argumentaciones o conclusiones.
- Al utilizar las TIC y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, y haciendo argumentaciones sobre esta información.
- Al realizar un informe sobre su proyecto de investigación, escribir sobre los conceptos matemáticos y argumentar de forma coherente.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT): Esta competencia se desarrollará durante todos los momentos del aprendizaje en la unidad didáctica:

- Al enfrentarse a cualquier problema matemático.
- Durante el aprendizaje en las clases magistrales.
- Al enfrentarse al proyecto de investigación, donde los alumnos deben comprender que aplicando matemáticas, y en concreto estadística, se consigue obtener información muy importante para cualquier campo de la ciencia y la tecnología, e incluso para la vida cotidiana.
- Cuando utilizan los conceptos aprendidos para comprender un problema, lo relacionan con problemas de la vida cotidiana y lo solucionan.
- Cuando son capaces de expresar conceptos matemáticos nuevos con claridad y de forma adecuada al resto de compañeros, y a su vez comprenden lo que estos últimos expresan de la misma forma.
- Al utilizar las TIC para buscar información relevante sobre la materia.
- Al realizar un informe sobre su proyecto de investigación, escribir sobre los conceptos matemáticos y argumentar de forma coherente.

Competencia digital (CD): Esta competencia se integrará en la unidad didáctica mediante la utilización de herramientas TIC para la elaboración de un informe científico y se desarrollará en los siguientes contextos:

- Al conocer las distintas herramientas de procesamiento de texto, formatos y normas en la elaboración de un informe científico.

- Cuando aprenden sobre el almacenaje de las actividades y recuperación de las mismas en la nube.
- Cuando realizan búsquedas online para obtener información fidedigna auxiliar en la realización de las actividades.

Aprender a aprender (CAA): Con el desarrollo de esta competencia, el alumno tendrá una capacidad cada vez más eficaz y autónoma de aprendizaje, ya que incluye una serie de destrezas que requieren la reflexión y conciencia de los propios procesos de aprendizaje:

- Cuando se vean de principio a fin todas las etapas de investigación de un problema real aplicable, donde los alumnos interioricen la estrategia de resolución de problemas mediante el método científico y la experimentación, y se familiaricen con las herramientas actuales de transmisión del conocimiento.
- Cuando se desarrollen debates alumno-alumno sobre los conceptos aprendidos.
- Cuando los contenidos que pretenden motivar y despertar interés en los alumnos son efectivos y ellos mismos de forma autónoma reflexionan y experimentan con las herramientas utilizadas para la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Competencias sociales y cívicas (CSC): El alumno debe desarrollar cada día su capacidad para relacionarse con los demás y contribuir de una forma cívica, activa y democrática al bienestar personal y colectivo. Esta competencia se desarrolla a lo largo de la unidad didáctica en las siguientes situaciones:

- Cuando se cumplen unas normas en el aula establecidas democráticamente por los miembros de la misma (alumnos y profesor).
- Al desarrollar actividades en grupos heterogéneos, participar de una forma natural y activa fundamentada en el respeto y la igualdad.
- Al fomentar el diálogo y el respeto y motivar un buen ambiente en el aula.
- Cuando se propicia que las opiniones sean escuchadas y toleradas, sin menospreciar las opiniones ajenas.

Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP): Se pretende que el alumnado desarrolle capacidades y herramientas para la toma de decisiones:

- Al motivar a los alumnos a que utilicen lo aprendido en situaciones y problemas fuera del aula, indicando ejemplos reales de aplicación de los contenidos estudiados.
- Cuando los alumnos encuentran motivación al enfrentarse a problemas de investigación y superan inseguridades y bloqueos ante la resolución de situaciones desconocidas.

4.7. Contenidos

Los contenidos de la presente unidad didáctica se enumeran, relacionándose en las con los contenidos de sus respectivos bloques del real decreto 1105/14, en las siguientes tablas:

Contenidos RD 1105/14	Contenidos UD
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas II	
1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas. 1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. 1.3 Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes.	■ Lectura de los enunciados y situaciones planteadas de forma comprensiva. ■ Revisión de las soluciones y del planteamiento de los problemas resueltos. ■ Relación de los problemas resueltos con otros problemas similares conocidos.
1.4 Iniciación a la demostración en Matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. 1.5 Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.	■ Expresión de razonamientos matemáticos. ■ Utilización del lenguaje matemático adecuado al nivel.
1.6 Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas. 1.7 Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado.	■ Proyecto de investigación sobre los usos de las distribuciones de probabilidad en la vida real, en campos de la ciencia y la tecnología o la vida cotidiana. ■ Elaboración de un informe científico en formato digital sobre la investigación, guardado en la nube.
1.8 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. 1.9 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	■ Realización de una sesión de modelización sobre el problema real que hayan investigado. ■ Debate en clase a lo largo de la sesión y reflexión sobre lo aprendido.
1.10 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	■ Elaboración de un informe científico escrito sobre la investigación y los resultados del cálculo, y su posterior subida a la nube para guardarlo. Nociones sobre búsqueda web de bibliografía, formato, y normativa en este tipo de informes.

Tabla 4.2 Relación entre los contenidos de la unidad didáctica y los contenidos relativos al bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas II. *Fuente: elaboración propia.*

Contenidos RD 1105/14	Contenidos UD
Bloque 5. Estadística y Probabilidad	
5.1 Variables aleatorias discretas. 5.2 Distribución de probabilidad. 5.3 Media, varianza y desviación típica.	■ Concepto de variable aleatoria discreta. ■ Concepto de distribución de probabilidad de variable discreta. ■ Media, varianza y desviación típica en distribuciones discretas.
5.4 Distribución binomial. 5.5 Caracterización e identificación del modelo. 5.6 Cálculo de probabilidades.	■ Caracterización de la distribución binomial. ■ Cálculo de probabilidades utilizando la binomial. ■ Cálculo de media, varianza y desviación típica de la distribución binomial.
5.7 Distribución normal. 5.8 Tipificación de la distribución normal. 5.9 Asignación de probabilidades en una distribución normal.	■ Concepto de distribución de probabilidad de variable continua. ■ Introducción a la distribución normal. ■ Cálculo de probabilidades utilizando la normal. Tipificación.
5.10 Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.	■ Aproximación de la binomial por la normal: Teorema de De Moivre-Laplace. ■ Cálculo de probabilidades.

Tabla 4.3 Relación entre los contenidos de la unidad didáctica y los contenidos relativos al bloque 5 de Estadística y Probabilidad en Matemáticas II. *Fuente: elaboración propia.*

4.8. Metodología

En esta unidad didáctica no se seguirá una única metodología, sino una combinación de metodologías, con el objetivo de hacer las sesiones lo más amenas posible para los estudiantes sin faltar al aprendizaje teórico fundamental, favoreciendo la consolidación de lo aprendido y que el alumnado sea capaz de utilizar lo aprendido también en sus vidas cotidianas o en sus futuros profesionales. Se busca con esto, también, motivar a los alumnos que tengan un menor compromiso con la asignatura y, más ampliamente, con su aprendizaje en general.

Concretamente, se usará una mezcla de metodología transmisiva y activa. Habrá clases magistrales, clases de aprendizaje cooperativo y un par de sesiones de aprendizaje por proyectos (PBL, ver sección 3.1). En las distintas sesiones que se plantean en la unidad, se intercalarán periodos en los que el profesor expondrá los contenidos fundamentales a los alumnos, teniendo estos últimos un papel más pasivo, tomando notas, formulando sus dudas y subrayando en el libro de texto, y otros periodos en los que se realizarán actividades de aprendizaje y desarrollo, para que puedan desarrollar destrezas procedimentales y conceptuales, aplicar la teoría a la práctica y afianzar los conceptos aprendidos. Estos periodos de actividades serán por aprendizaje cooperativo, se pondrán a los alumnos en pequeños grupos heterogéneos y juntos irán reflexionando y debatiendo también con el profesor para la resolución de las actividades, y para que las actividades sean motivantes, se adaptarán sus enunciados para acercarlas a los intereses de los alumnos. Sin embargo, donde realmente pueden verse más motivados y van a consolidar lo aprendido, será en las sesiones PBL, en las que el profesor propondrá un proyecto de aplicación real, y los alumnos en sus mismos grupos (3 o 4 alumnos por grupo) deberán plantearlo y resolverlo. Los alumnos deberán exponer sus estrategias de resolución en clase, debatir y ver el proceso de modelización matemática en la que pasarán de una situación de la vida real a un modelo matemático que les dé respuestas a sus problemas. Esto generará aprendizajes significativos, pues los alumnos comprobarán la utilidad de lo aprendido, crearán un buen clima en el aula y encontrarán intereses y motivaciones que en un principio puede que no tuviesen. El profesor debe valorar sus esfuerzos día a día y mantener alta la

motivación y autoestima de los estudiantes.

La razón principal por la que se llevarán a cabo sesiones transmisivas es porque antes de poder enfrentarse a los proyectos de las sesiones PBL, necesitan haber aprendido al menos lo básico a nivel conceptual y saber aplicar las herramientas proporcionadas para el cálculo de probabilidades. Esta parte es la más tediosa para ellos, y por eso el profesor aquí debe estar pendiente de no alargar demasiado las partes puramente teóricas. Se ha considerado también la posibilidad de hacer estas sesiones por la metodología de aula invertida, donde el profesor grabaría los contenidos teóricos para que los alumnos los vean en casa y después se ejercitarían en clase, pero en este caso nos hemos decantado por la opción de que los contenidos teóricos se van a dar en clase, ya que el profesor deberá ir estimulando a los alumnos para mantener su entusiasmo, explicar los contenidos con énfasis y pasión, lanzando debates y reflexiones, relacionando los contenidos con ejemplos que se ven en la vida real, e incluso algunas actividades cortas de aplicación de las herramientas para el cálculo de probabilidades (como el uso de la tabla de la distribución normal tipificada o el cálculo mediante calculadora de las probabilidades utilizando la función masa de la binomial), aspectos que no consideramos tan factibles mediante el uso del aula invertida. Bajo nuestro punto de vista, lo más importante es generar oportunidades para que el alumnado participe en clase, conozca los conceptos relativos a las distribuciones de probabilidad y pueda desarrollar destrezas procedimentales básicas.

En una sesión anterior a las PBL y posterior a las sesiones transmisivas, se realizarán actividades de consolidación para que los alumnos sean conscientes de los objetivos aprendidos, y tengan una mejor posición para enfrentarse a los problemas del proyecto. Esta sesión de ejercicios de consolidación será del mismo tipo que los periodos de aprendizaje cooperativo que se incluyen para las actividades de aprendizaje y desarrollo.

A lo largo de las sesiones PBL, se utilizarán las herramientas TIC, por un lado, para hacer búsquedas por Internet, y por otro, para utilizar los recursos informáticos necesarios para elaborar un informe final del proyecto. Las búsquedas por Internet deberán hacerse de forma responsable y con perspectiva crítica, adquiriendo la capacidad de sintetizar toda la información que se recibe para quedarse con la más apropiada. Deben ser capaces de distinguir una fuente fidedigna de otra que no lo es, y saber que todas las fuentes de las que se nutre el informe del proyecto deben ser correctamente referenciadas y citadas en el mismo. Asimismo, para redactar el informe, se dará una serie de normas de formato que deben cumplir. Finalmente, los alumnos subirán sus proyectos a un repositorio en la nube donde podrán, entre todos, leer los informes de sus compañeros y aumentar su curiosidad por la materia.

El aprendizaje dialógico, que puede adquirirse en las situaciones de debate en clase y de trabajo en equipo, busca el diálogo igualitario entre estudiantes, donde las personas interactúan a través del diálogo de forma tolerante y en igualdad. Deben respetar la opinión del resto, y argumentar de una forma tolerante, coherente y válida. Además, deberán llegar a acuerdos dentro de su propio grupo de trabajo, ya que la negociación y la conciliación serán, en algún momento, clave en sus vidas futuras.

En resumen, teniendo en cuenta los beneficios mencionados anteriormente, se propone una metodología transmisiva, intercalando actividades de aplicación de la teoría por aprendizaje cooperativo y promoviendo la participación del alumnado, con sesiones de actividades de consolidación cooperativas y sesiones PBL, donde usarán las TIC para realizar búsquedas web e informes que subirán a un repositorio en la nube.

4.9. Actividades y recursos

A continuación, se presentan las actividades y recursos que se van a utilizar a lo largo de las sesiones. El objetivo de estas actividades y recursos es que los alumnos puedan desarrollar su aprendizaje y adquirir las competencias y los contenidos que se especifican en el currículo.

4.9.1. Actividades

Las tareas propuestas vienen recogidas en el [anexo III](#), y cada una de las actividades se asocia a los criterios de evaluación que se van a trabajar para facilitar la evaluación del alumnado. Se pueden dividir en cuatro grupos: actividades de aprendizaje y desarrollo, de consolidación, de tipo PBL utilizando las TIC y actividades de ampliación y refuerzo.

- **Actividades de aprendizaje y desarrollo:** Estas actividades son las que pueden encontrarse en los libros de texto (ver sección [2.3.2](#)), al final de cada apartado o como ejemplos de aplicación entre las explicaciones teóricas. Sirven principalmente para afianzar los conceptos explicados en las sesiones expositivas o clases magistrales, y se realizarán paralelamente al desarrollo de las mismas, de forma que se vean ejemplos de aplicación práctica de la teoría. Las que se proponen en esta unidad didáctica pueden encontrarse en el apartado [AIII.I](#) del anexo III.
- **Actividades de consolidación:** Estas actividades son las que pueden encontrarse en los libros de texto al final de cada tema. Permiten que los alumnos sean conscientes de los objetivos aprendidos, aumentar su confianza de cara al proyecto PBL y consolidar los conocimientos teóricos de la unidad. Las que se proponen en esta unidad didáctica pueden encontrarse en el apartado [AIII.II](#) del anexo III.
- **Actividades de tipo PBL:** Estas actividades no suelen encontrarse en los libros de texto, sino que tienen que ser diseñadas por el profesor. Se trata de ver la utilidad de las distribuciones de probabilidad más allá de las matemáticas, y que los alumnos se enfrenten a un problema real y de interés desde el principio, utilizando las herramientas que han aprendido y desarrollando un informe donde se familiarizarán con algunas herramientas TIC. Adquirirán con ellas diversas competencias transversales y son las actividades más importantes de la unidad. La actividad de tipo PBL que se propone para esta unidad didáctica puede encontrarse en el apartado [AIII.III](#) del anexo III.
- **Actividades de ampliación y refuerzo:** Estas actividades son adaptaciones de las actividades de aprendizaje y desarrollo y de las actividades de consolidación. El objetivo es facilitar el aprendizaje para los alumnos que lo necesiten, ya sea por tener un ritmo de aprendizaje más rápido o más lento, y las adaptaciones se basan en hacer cada actividad más o menos estructurada. Algunos ejemplos pueden encontrarse en el apartado [AIII.IV](#) del anexo III.

4.9.2. Recursos

Para poder desarrollar esta unidad didáctica según la metodología propuesta, exponer los contenidos y realizar las actividades, se necesitarán los siguientes recursos:

Tipo de recurso	Recursos
Específicos	■ Pizarra y tiza.
Impresos	■ Libro de texto: Matemáticas II para 2.º de Bachillerato. Editorial SM. ISBN: 978-84-675-8713-5. ■ Actividades externas al libro de texto (PBL, ficha en anexo III, apartado AIII.III). ■ Cuaderno de los estudiantes. ■ Examen de la unidad (ver apartado AIII.V del anexo III).
Audiovisuales	■ Pizarra digital (idealmente, o si no hay pizarra y tiza), o proyector, para presentar los contenidos, presentaciones y actividades planteadas.
Informáticos	■ Ordenadores con conexión a Internet, para realizar las búsquedas web al trabajar los proyectos en clase, y acceder al repositorio en la nube. ■ Procesador de textos (MWord u OpenOffice), para redactar los informes. ■ Navegador web.
Tecnológicos	■ Calculadora científica, para realizar los cálculos de probabilidad.
Ambientales	■ Propios: • Aula. • Aula de informática. • Biblioteca.
Humanos	■ Profesor de Matemáticas: coordina el trabajo de la clase y desarrolla las sesiones. ■ Alumnos: son los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje. ■ Profesores de otras materias: ayudan mediante relaciones interdisciplinares. ■ Equipo directivo: ayudan y colaboran en la organización de actividades complementarias. ■ Departamento de orientación: colaboran con profesores y alumnos. ■ Familias y otras personas invitadas a formar parte del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Tabla 4.4 Recursos necesarios para facilitar el desarrollo la unidad didáctica y el logro de los fines de la educación. Fuente: elaboración propia.

4.10. Atención a la diversidad

El objetivo de este apartado es poner de manifiesto que, para cumplir el objetivo didáctico de esta unidad y satisfacer las necesidades educativas de cada alumno, será necesario ofrecer programas de atención a la diversidad. A pesar de que nuestros alumnos pueden no tener ninguna necesidad educativa especial, sí que tienen distintos ritmos de aprendizaje, y por tanto se justifica la necesidad de estos programas.

Para esto, el profesor necesitará primero conocer el nivel inicial de cada alumno mediante distintos criterios de evaluación. El profesor utilizará la primera sesión de la unidad para

observar la respuesta de los alumnos al proceso de enseñanza-aprendizaje y valorará la necesidad de aplicar un programa especial a los alumnos que puedan considerarse en desigualdad de oportunidades si se considerase continuar con el ritmo normal de las clases, bien tengan un ritmo más rápido o más lento. Se podrá evaluar el nivel inicial de los alumnos en las actividades cooperativas (por grupos) que se realizan en la primera sesión, y posteriormente acercarse a estos grupos para confirmar si pudieran necesitar actividades de refuerzo o de ampliación.

Los programas de atención a la diversidad no solo se centran en ejercicios de refuerzo o ampliación, sino que también es fundamental establecer un programa para aquellos alumnos repetidores, o que hayan repetido alguna materia. Para todos ellos, se necesitarían actividades específicas que consigan reforzar el conocimiento del alumnado, y requerirá la dedicación de ambas partes, tanto del profesor como del alumno, por lo que dichas actividades se suministrarán por parte del departamento de Matemáticas o por parte del profesor de manera individualizada.

El profesor realizará una selección de las actividades propuestas en el anexo III sobre actividades de aprendizaje y desarrollo (AIII.I) y se realizará una adaptación de las mismas para adecuarse al nivel educativo de estos alumnos que pudieran necesitarlo.

Por otra parte, y debido a la gran importancia en esta unidad didáctica del trabajo por proyectos y en grupo, es imprescindible que los grupos estén formados según el criterio del profesor, de la forma más heterogénea posible y no de forma casual, para no diferenciar a los alumnos en el aula.

Si existiera la necesidad de alguno de los alumnos o de un grupo de ellos, se realizaría una ampliación del horario lectivo, bien utilizando algún recreo, o bien alguna tarde fuera del horario lectivo, siempre contando con el acuerdo de los padres.

Se proponen en el anexo III, en el apartado AIII.IV, algunas actividades de ampliación y de refuerzo para adaptarnos a aquellos alumnos que lo necesiten. Cabe destacar que dichas actividades pueden ser idénticas a las actividades para el resto de los alumnos, pero modificando alguna variable como la estructuración de los problemas. Si es más desestructurado, para los alumnos de altas capacidades, y si es más estructurado, para los alumnos con necesidades de refuerzo.

Como conclusión, decir que es imposible tener planificadas medidas para las circunstancias que puedan ocurrir en cada clase, pero se plantean en esta unidad didáctica medidas para detectar la diversidad de aprendizaje y se van a poner los medios oportunos para actuar en el caso de que se produzca.

4.11. Temporalización

Para poder desarrollar el total de la unidad didáctica, se prevé que se necesiten un total de 7 horas lectivas, es decir, 7 sesiones, contando como última sesión la del examen de evaluación de la unidad.

A continuación, se desarrollan las 7 sesiones por separado, indicando los contenidos, criterios de evaluación, objetivos de aprendizaje y competencias clave que se irán fomentando en las mismas.

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN A LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 5.1., 5.2., 5.3.
Criterios de evaluación: CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE5.2.
Objetivos: 1, 2.
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA.
Desarrollo: ■ Explicación de los contenidos teóricos sobre variable aleatoria, distribución de probabilidad discreta, función de masa de una variable aleatoria discreta, esperanza y varianza (30 minutos). ■ Ejercicios como actividad de aprendizaje cooperativo (ver anexo III apartado AIII.I, actividades para la sesión 1). Por grupos de 3-4 alumnos, resolver los ejercicios en clase y favorecer cuestiones y debate (20 minutos). ■ Corrección de los ejercicios anteriores. Algunos voluntarios expondrán sus soluciones a los ejercicios propuestos y el profesor los irá corrigiendo, además de responder a las dudas que pudieran surgir (10 minutos).

Tabla 4.5 Sesión 1: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

SESIÓN 2: LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 5.4., 5.5., 5.6.
Criterios de evaluación: CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE5.2.
Objetivos: 1, 2, 3, 7.
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA.
Desarrollo: ■ Explicación de los contenidos teóricos sobre la distribución binomial, cálculo de probabilidades, media y varianza (30 minutos). ■ Ejercicios como actividad de aprendizaje cooperativo (ver anexo III apartado AIII.I, actividades para la sesión 2). Por grupos de 3-4 alumnos, resolver los ejercicios en clase y favorecer cuestiones y debate (20 minutos). ■ Corrección de los ejercicios anteriores. Algunos voluntarios expondrán sus soluciones a los ejercicios propuestos y el profesor los irá corrigiendo, además de responder a las dudas que pudieran surgir (10 minutos).

Tabla 4.6 Sesión 2: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

SESIÓN 3: LA DISTRIBUCIÓN NORMAL.
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 5.7., 5.8., 5.9., 5.10.
Criterios de evaluación: CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE5.2.
Objetivos: 1, 2, 4, 5, 7.
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA.
Desarrollo: ■ Explicación de los contenidos teóricos sobre distribuciones continuas, introducción a la distribución normal, tipificación de la normal y aproximación de la binomial a la normal (30 minutos). ■ Ejercicios como actividad de aprendizaje cooperativo (ver anexo III apartado AIII.I, actividades para la sesión 3). Por grupos de 3-4 alumnos, resolver los ejercicios en clase y favorecer cuestiones y debate (20 minutos). ■ Corrección de los ejercicios anteriores. Algunos voluntarios expondrán sus soluciones a los ejercicios propuestos y el profesor los irá corrigiendo, además de responder a las dudas que pudieran surgir (10 minutos).

Tabla 4.7 Sesión 3: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

SESIÓN 4: PROBLEMAS DE CONSOLIDACIÓN.
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 5.6., 5.9., 5.10.
Criterios de evaluación: CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE5.3.
Objetivos: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD, CSC.
Desarrollo: ■ Ejercicios como actividad de aprendizaje cooperativo (ver anexo III apartado AIII.II, actividades de consolidación). Por grupos de 3-4 alumnos, resolver los ejercicios en clase y favorecer cuestiones y debate. Corrección de los ejercicios conforme se vayan terminando. Algunos voluntarios expondrán sus soluciones a los ejercicios propuestos y el profesor los irá corrigiendo, además de responder a las dudas que pudieran surgir (60 minutos).

Tabla 4.8 Sesión 4: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

SESIÓN 5: PROYECTO.
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 1.6., 1.7., 1.8., 1.9., 1.10. 5.4., 5.5., 5.6., 5.7., 5.8., 5.9., 5.10.
Criterios de evaluación: CE1.1., CE1.2., CE1.4., CE1.5., CE1.6., CE1.7., CE1.8., CE1.9., CE1.10., CE1.11., CE1.12., CE1.13., CE1.14., CE5.2., CE5.3.
Objetivos: 6, 7, 8, 9.
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD, CSC, SIEP.
Desarrollo: ■ Introducción al proyecto PBL (ver anexo III apartado AIII.III) (10 minutos). ■ Dividir la clase por grupos de 3-4 alumnos para resolver el proyecto y realizar el informe (5 minutos). ■ Empezar a trabajar en la ficha del proyecto en clase y favorecer cuestiones y debate. El profesor irá pasando por las mesas para guiar a los grupos por su aprendizaje (35 minutos). ■ Comentar a los alumnos al final de la clase las instrucciones para la entrega del informe sobre el proyecto (5 minutos).

Tabla 4.9 Sesión 5: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

SESIÓN 6: PROYECTO.
Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 1.6., 1.7., 1.8., 1.9., 1.10. 5.4., 5.5., 5.6., 5.7., 5.8., 5.9., 5.10.
Criterios de evaluación: CE1.1., CE1.2., CE1.4., CE1.5., CE1.6., CE1.7., CE1.8., CE1.9., CE1.10., CE1.11., CE1.12., CE1.13., CE1.14., CE5.2., CE5.3.
Objetivos: 1, 2, 4, 5, 7.
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD, CSC, SIEP.
Desarrollo: ■ Continuar con el proyecto del día anterior, los alumnos siguen realizando el proyecto y el profesor se pasa por las mesas para dirigir a los alumnos por su aprendizaje (40 minutos). ■ Enseñar a los alumnos cómo pueden elaborar el informe con el procesador de textos, un ejemplo de gráfico de distribuciones binomial y normal realizados online y cómo subir el informe a la nube en Google Classroom (20 minutos).

Tabla 4.10 Sesión 6: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

SESIÓN 7: EVALUACIÓN DE LA UNIDAD.	
Contenidos:	1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 5.1., 5.2., 5.3., 5.4., 5.5., 5.6., 5.7., 5.8., 5.9., 5.10.
Criterios de evaluación:	CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.11., CE1.12., CE5.2., CE5.3.
Objetivos:	1, 2, 4, 5, 6, 7.
Competencias clave:	CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEP.
Desarrollo:	Realización de una prueba escrita con peso en la evaluación final, para comprobar si los alumnos han alcanzado los objetivos del tema. Se realizará de forma individual. (60 minutos).

Tabla 4.11 Sesión 7: contenidos, criterios, objetivos, competencias clave y desarrollo. *Fuente: elaboración propia.*

4.12. Evaluación

La evaluación se dividirá en dos partes, criterios de evaluación para conocer qué se va a evaluar, y criterios de calificación para saber cómo se va a evaluar.

Para la evaluación de un alumno, no solo se deben tener en cuenta los aprendizajes adquiridos en esta unidad, sino también las competencias clave y transversales que ha ido desarrollando durante la misma.

4.12.1. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación vienen recogidos en el real decreto 1105/14 de 26 de diciembre y en la orden de 14 de julio de 2016 de la Junta de Andalucía. En el real decreto podemos encontrar los estándares de aprendizaje asociados a cada criterio de evaluación, y en la orden andaluza se pueden ver las competencias clave asociadas también a los criterios de evaluación. A la hora de evaluar al alumnado, se van a considerar estos criterios y estándares, tanto del bloque 5 de Estadística y Probabilidad como del bloque 1 de contenidos transversales (véanse las tablas 2.1 y 2.2, donde se asocian los criterios de evaluación a los estándares de aprendizaje, las tablas 2.4 y 2.5, donde se asocian los criterios de evaluación a las competencias clave, y las tablas 4.5 a 4.11, donde se especifican los criterios de evaluación y las competencias clave que se van a trabajar en esta unidad didáctica para cada sesión).

Tal y como se indica en el artículo 17.1 de la orden de 14 de julio de 2016, la evaluación del alumnado es *criterial*:

Artículo 17. Referentes de la evaluación.

1. Los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa en las evaluaciones continua y final de las distintas materias son los criterios de evaluación y su concreción en los estándares de aprendizaje evaluables a los que se refiere el artículo 2.

Por todo esto, el Departamento Didáctico de Matemáticas, en su programación anual, deberá haber realizado una ponderación de todos los criterios de evaluación que se van a tener en cuenta durante el curso. De esta forma, los criterios que se evalúan en esta

unidad, tendrán un peso específico dentro de la totalidad de criterios del curso.

4.12.2. Criterios de calificación

En este apartado se especifica cómo se va a evaluar el aprendizaje que se trabaja durante la unidad, es decir, las herramientas que se utilizarán para evaluar a los alumnos.

Para la evaluación, se utilizarán rúbricas, que nos ayudarán a especificar el método de evaluación de cada una de las actividades y exámenes programados.

En la tabla siguiente se puede ver la ponderación de cada una de las partes que se van a evaluar.

Rúbrica	Herramienta de evaluación	Ponderación
1	Examen (Prueba escrita)	40 %
2	Participación en clase	10 %
3	Proyecto	40 %
4	Actitud personal y trabajo autónomo	10 %

Tabla 4.12 Criterios de calificación. *Fuente: elaboración propia.*

Según el artículo 21 de la orden de 14 de julio de 2016 en Andalucía, las notas finales se expresarán numéricamente del 1 al 10, sin poder utilizar decimales. Las notas que sean iguales o mayores a 5 son notas favorables, mientras que las notas que sean menores a 5 serán desfavorables.

A continuación, se presentan las distintas rúbricas que se van a utilizar como instrumento asociado a las herramientas de evaluación, y que nos permitirán calificar los criterios que se trabajen en cada una de las sesiones. Las rúbricas presentadas son de elaboración propia, o adaptaciones de las rúbricas en el documento *Rúbricas de evaluación* (s.f.).

RÚBRICA 1. PRUEBA ESCRITA.						
	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	15 %	
Corrección ortográfica	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su nivel.	10 %	
Vocabulario empleado	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque utiliza palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	15 %	
Contenido	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa de forma coherente.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa de forma coherente.	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa con algún error.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa con diversos errores.	60 %	
Valoración final:						

Tabla 4.13 Rúbrica 1, de la prueba escrita.

RÚBRICA 2. PARTICIPACIÓN EN CLASE.						
	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Expresión oral	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	10 %	
Participación voluntaria	Participa en clase, suele levantar la mano, responde correctamente a las preguntas y comunica también sus dudas, además de ser voluntario en las actividades y colabora con sus compañeros.	Participa algo en clase, a veces levanta la mano, responde a las preguntas y a veces comunica sus dudas.	Alguna vez ha participado en clase, a veces responde a las preguntas.	No participa nada en clase de forma voluntaria.	20 %	
Cuestiones formales y secuencia en las intervenciones	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y en un tiempo adecuado en sus intervenciones.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y en un tiempo más o menos adecuado en sus intervenciones.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo adecuado.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse a un tiempo adecuado y manifestar interés y control emocional.	20 %	
Contenido	Demuestra un completo dominio del tema utilizando un vocabulario específico, destacando los aspectos importantes, exponiendo claramente.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	50 %	
Valoración final:						

Tabla 4.14 Rúbrica 2, de la participación en clase.

RÚBRICA 3. PROYECTO.						
	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Formato	La bibliografía, las citas y el texto se presentan adecuadamente y en el formato exigido.	La bibliografía y algunas citas en el texto se presentan adecuadamente, y el formato se parece al exigido.	No todas las citas y las fuentes bibliográficas se han presentado correctamente. El formato del texto es mejorable.	No se presenta bibliografía ni citas, y no se ajusta al formato exigido.	20 %	
Corrección ortográfica	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su nivel.	10 %	
Grado de resolución del problema	Se analiza el problema correctamente, se entiende correctamente y se ha resuelto correctamente, con el procedimiento adecuado.	Se analiza el problema, se entiende algo y se ha resuelto bien.	Se entiende algo y se ha intentado resolver correctamente.	No se ha entendido nada y se ha resuelto mal.	20 %	
Contenido	Demuestra un completo dominio del tema utilizando un vocabulario específico, destacando los aspectos importantes, exponiendo claramente.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	50 %	
Valoración final:						

Tabla 4.15 Rúbrica 3, del proyecto.

RÚBRICA 4. ACTITUD PERSONAL Y TRABAJO AUTÓNOMO.						
	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Autonomía y confianza	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades superando las dificultades de forma habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades superando las dificultades con alguna ayuda.	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	25 %	
Actitud respetuosa y responsable	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	25 %	
Corrección en la presentación	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	25 %	
Conclusión del trabajo	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos establecidos, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos establecidos.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.	25 %	
Valoración final:						

Tabla 4.16 Rúbrica 4, de actitud personal y trabajo autónomo.

Conclusiones

El presente TFM supone la culminación de mis estudios oficiales de *Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación profesional y Enseñanza de Idiomas*. En él se han aplicado los conocimientos y competencias adquiridos en todas las asignaturas y actividades realizadas a lo largo del curso, para aproximarnos con una mejor perspectiva al escenario educativo de un centro de enseñanza real.

En el TFM se han expuesto con detalle algunos aspectos fundamentales sobre los que se sustenta el proceso de enseñanza-aprendizaje, como son los fundamentos epistemológicos, curriculares y didácticos.

Como parte de la fundamentación curricular, se han comparado dos libros de texto de distintas editoriales para analizar en paralelo el contenido de la unidad didáctica sobre distribuciones de probabilidad, y conocer desde la perspectiva de estos libros cómo se desarrollan y se ejercitan los contenidos básicos y transversales.

El problema de los libros de texto analizados es que siguen una metodología más tradicional, en la que el profesor explicaría los contenidos teóricos y luego se realizarían actividades por parte de los alumnos de forma individual, o como tarea para hacer en casa, sin incorporar metodologías innovadoras como una propuesta más realista y cercana al entorno de la vida cotidiana del alumnado, aprendizajes cooperativos o proyectos que contribuyen a generar aprendizajes significativos.

Por esto, se ha realizado una búsqueda de fuentes bibliográficas sobre investigaciones didácticas con el objetivo de combinar metodologías y permitir así que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea para los alumnos más inclusivo, más motivante e interesante, y que ellos puedan ser los protagonistas de su propio aprendizaje.

Se ha diseñado una unidad didáctica que incorpora estas propuestas para la realización de las actividades y proyectos, favoreciendo el aprendizaje y despertando el interés de los alumnos por descubrir realmente la utilidad de los conceptos y herramientas que se están enseñando, evitando incurrir en escenarios surrealistas y repetitivos que aburren y convierten a los estudiantes en máquinas de memorizar para aprobar y luego olvidar.

Como puntos de mejora para futuras unidades didácticas destacaría la posibilidad de realizar un catálogo de actividades PBL, para que los alumnos puedan elegir el que resulte más interesante para ellos y que sean capaces de ver distintos ejemplos de aplicación,

modelizarlos y solucionar problemas de la vida real, para posteriormente realizar su informe. Otro punto de mejora sería el de la optimización de las clases teóricas para hacerlas más amenas sin perjuicio del aprendizaje y del tiempo, de forma que ellos tengan un papel algo más activo pero puedan desarrollar las mismas destrezas procedimentales y conceptuales en el mismo periodo de tiempo. Esto se intenta realizar en esta unidad didáctica, pero hay que ponerla en práctica y hay que seguir innovando y aprendiendo de los propios alumnos, año tras año, para poder realizar un proceso de mejora continua.

Bibliografía

- Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V., Sanz, L. (2016). *Matemáticas II*. Grupo SM.
- Arias, J. M., Maza, I. (2016). *Matemáticas 2*. Grupo Editorial Bruño.
- Batanero, C., Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.
- Biagini, F., Campanino, M. (2016). *Elements of probability and statistics*. Springer.
- Brémaud, P. (2017). *Discrete probability models and methods*. Springer.
- CDPYE. (s.f.). *Curso de probabilidad*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada. (Disponible en: <https://www.ugr.es/~cdpye/CursoProbabilidad>.)
- Crooks, G. E. (2019). *Field guide to continuous probability distributions*. Berkeley Institute for Theoretical Sciences, Berkeley.
- Herrada, R. I., Baños, R. (2018). Experiencias de aprendizaje cooperativo en matemáticas. *Espiral. Cuadernos del Profesorado*, 11(23), 99–108.
- Holmes, P. (1980). *Teaching statistics*. Sloug: Foulsham Educational.
- Johnson, N. L., Kemp, A. W., Kotz, S. (2005). *Univariate discrete distributions*. John Wiley & Sons.
- Peña, D., Romo, J. (1997). *Introducción a la estadística para las ciencias sociales*. Editorial McGraw-Hill, Madrid.
- Rohatgi, V. K., Saleh, A. M. E. (2015). *An introduction to probability and statistics*. John Wiley & Sons.
- Román, P. (2016). *Grado en Estadística, Cálculo de Probabilidades I, Tema 6; Algunos modelos de distribuciones continuas*. (Disponible en: https://www.ugr.es/~proman/ProbI/2016_2017/PDF/DistribucionesContinuas.pdf)
- Rúbricas de evaluación. (s.f.). Colabora, Junta de Andalucía. (Disponible en: <https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/Rúbricas+de+evaluación/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?>)
- Sáez, A. J. (2012). *Apuntes de Estadística para Ingenieros*. Creative Commons, Jaén. (Disponible en: <https://es1lib.org/book/11247729/d65cef>)
- Thomopoulos, N. T. (2018). *Probability distributions*. Springer.
- Vilches Peña, A., Gil Pérez, D. (2011). El trabajo cooperativo en las clases de ciencias: una estrategia imprescindible pero aún infrautilizada. *Alambique, Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 69, 73–79.

Referencias normativas

- Orden, de 14 de julio de 2016, por el que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. (2016, 29 de Julio). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, núm. 145. (Disponible en: <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/145/52>)
- Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas. (1993, 21 de Septiembre). *Boletín Oficial del Estado*, núm. 226. (Disponible en: https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-1993-23257)
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato. (2015, 3 de Marzo). *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3. (Disponible en: <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2015-37>)

Parte III

Anexos

Índice de anexos

Anexo I. Demostraciones	xiv
AI.I Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria	xiv
AI.II Propiedades de la función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta	xvi
AI.III Relación entre la distribución de probabilidad y la función masa de proba- bilidad	xvi
AI.IV Demostraciones para la distribución binomial	xvii
AI.V Demostraciones para la distribución de Poisson	xviii
AI.VI Demostraciones para la distribución geométrica	xix
AI.VII Demostraciones para la distribución binomial negativa	xx
AI.VIII Demostraciones para la distribución uniforme	xxii
AI.IX Demostraciones para la distribución exponencial	xxiii
AI.X Demostraciones para la distribución gamma	xxv
AI.XI Demostraciones para la distribución normal	xxvi
Anexo II. Ejemplos de aplicación de las distribuciones de probabilidad	xxviii
AII.I Aplicación de la distribución de Bernoulli	xxviii
AII.II Aplicación de la distribución binomial	xxviii
AII.III Aplicación de la distribución de Poisson	xxix
AII.IV Aplicación de la distribución geométrica	xxx
AII.V Aplicación de la distribución binomial negativa	xxx
AII.VI Aplicación de la distribución uniforme	xxx
AII.VII Aplicación de la distribución exponencial	xxx
AII.VIII Aplicación de la distribución gamma	xxx
AII.IX Aplicación de la distribución normal	xxx
Anexo III. Actividades y recursos para la unidad didáctica	xxxv
AIII.I Actividades de aprendizaje y desarrollo	xxxv
AIII.II Actividades de consolidación	xl
AIII.III Actividad de tipo PBL	xli
AIII.IV Ejemplos de actividades de ampliación y refuerzo	xliv
AIII.V Examen de la unidad	xlvi

Anexo I. Demostraciones

Las demostraciones que se recogen en este anexo están basadas fundamentalmente en tres referencias bibliográficas; concretamente, Rohatgi Saleh (2015), CDPYE (s.f.) y Sáez (2012). Otras fuentes de consulta que se han utilizado de forma más puntual serán citadas en los apartados correspondientes.

AI.I Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria

Demostración 1

Claramente, si $x_1 < x_2$, se verifica que $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$.

Por tanto, debido a la monotonía de P_X ,

$$P_X((-\infty, x_1]) \leq P_X((-\infty, x_2]),$$

o de forma equivalente, si se tiene en cuenta la definición de F_X ,

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

Demostración 2

Al ser F_X monótona los límites existen, y por tanto, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(x_n)$ siendo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente con $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$.

Como la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, está claro que la sucesión de intervalos $\{(-\infty, x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ también decrece y, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\infty, x_n] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x_0].$$

Entonces, si se tiene en cuenta la propiedad de continuidad de P_X ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X((-\infty, x_0]),$$

o de forma equivalente, según la definición de F_X , y las consideraciones que se han hecho al inicio de la demostración,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0).$$

Demostración 3

Al ser F_X monótona los límites $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x)$ existen, y de la misma forma que en la demostración 2 de este apartado, pueden calcularse por sucesiones monótonas tendiendo a $-\infty$ y a $+\infty$, respectivamente.

En el primer caso, tomamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(x_n)$ siendo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \downarrow -\infty$. Así, la sucesión de intervalos $\{(-\infty, x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\infty, x_n] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (-\infty, x_n] = \emptyset.$$

Por tanto, aplicando la propiedad de continuidad de P_X , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X(\emptyset) = 0,$$

o de forma equivalente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.

En el segundo caso, tomamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(x_n)$ siendo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$. Por tanto, la sucesión de intervalos $\{(-\infty, x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\infty, x_n] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (-\infty, x_n] = \mathbb{R}.$$

Aplicando de nuevo la propiedad de continuidad de P_X , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X(\mathbb{R}) = 1,$$

y por tanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

AI.II Propiedades de la función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Demostración 1

Es una demostración inmediata por el axioma de no negatividad de la probabilidad: $p_X(x) = P[X = x] \geq 0, \quad \forall x \in E_X$.

Demostración 2

Por la σ -aditividad de P_X , teniendo en cuenta que el conjunto de valores, E_X , es numerable, se tiene que

$$\sum_{x \in E_X} p_X(x) = \sum_{x \in E_X} P_X(\{x\}) = P_X\left(\bigcup_{x \in E_X} \{x\}\right) = P_X(E_X) = P[X \in E_X] = 1.$$

AI.III Relación entre la distribución de probabilidad y la función masa de probabilidad

Demostración 1

Sea X una v.a. discreta con valores en el conjunto E_X . Si $B \in \mathcal{B}$ es un conjunto de Borel arbitrario, tenemos

$$B = (B \cap E_X) \cup (B \cap E_X^c),$$

y ya que $(B \cap E_X) \cap (B \cap E_X^c) = \emptyset$, por la aditividad de P_X se tiene

$$P_X(B) = P_X(B \cap E_X) + P_X(B \cap E_X^c).$$

Teniendo en cuenta que $B \cap E_X^c \subseteq E_X^c$, por la monotonía de P_X se deduce que

$$P_X(B \cap E_X^c) \leq P_X(E_X^c) = P[X \in E_X^c] = 0,$$

y por tanto,

$$P_X(B) = P_X(B \cap E_X).$$

Ahora, teniendo en cuenta que $B \cap E_X \subseteq E_X$ es numerable y aplicando la σ -aditividad,

$$P_X(B) = P_X(B \cap E_X) = P_X\left(\bigcup_{x \in B \cap E_X} \{x\}\right) = \sum_{x \in B \cap E_X} P_X(\{x\}) = \sum_{x \in B \cap E_X} P[X = x].$$

AI.IV Demostraciones para la distribución binomial

Demostración 1. Esperanza y varianza

Se calculará la esperanza por definición para el caso de la distribución binomial.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^n x \frac{n}{x} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = \\ &= n \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $k = x - 1$, y posteriormente aplicando la fórmula de Newton (teorema del binomio),

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} E[X] &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{(n-1)-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = \\ &= np(p + 1 - p)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos la varianza:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2,$$

donde

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{x=0}^n x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n x n \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = \\ &= np \sum_{x=1}^n x \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)}. \end{aligned}$$

Realizando los cambios de variable $k = x - 1$ y $m = n - 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= np \sum_{k=0}^m (k+1) \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \\ &= np \left(\sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \right). \end{aligned}$$

El primer sumando es la esperanza de una variable con distribución $b(m, p)$ y el segundo la suma de sus probabilidades. Aplicando las propiedades de la función masa de probabilidad y la expresión obtenida para la esperanza de la distribución binomial, concluimos

que:

$$E[X^2] = np(mp + 1),$$

y deshaciendo el cambio $m = n - 1$ obtenemos:

$$E[X^2] = np((n - 1)p + 1) = n^2p^2 + np(1 - p).$$

Sustituyendo este valor en la varianza, se tiene que:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = n^2p^2 + np(1 - p) - (np)^2 = np(1 - p).$$

AI.V Demostraciones para la distribución de Poisson

Demostración 1. Esperanza

Por definición de esperanza de una v.a. discreta, tenemos que

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!},$$

y, haciendo el cambio de variable $y = x - 1$, se concluye que

$$E[X] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{(y)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Demostración 2. Varianza

Puesto que $\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ y $E[X^2] = E[X(X - 1)] + E[X]$, se calcula en primer lugar $E[X(X - 1)]$:

$$E[X(X - 1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x - 1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2} e^{-\lambda}}{(x - 2)!}.$$

Haciendo el cambio de variable $y = x - 2$, y utilizando que la sumatoria de la función masa de probabilidad vale 1, se tiene que:

$$E[X(X - 1)] = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \lambda^2.$$

Por tanto:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \lambda^2 = E[X(X - 1)] + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Demostración 3. Relación entre la distribución binomial y la de Poisson

Sea $X \sim b(n, p)$. Para $x = 0, 1, \dots$, se tiene:

$$\begin{aligned} P[X = x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{(np)^x}{n^x} (1-p)^{n-x} = \\ &= \frac{(np)^x}{x!} \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x} (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Si ahora se considera $n \rightarrow +\infty$ y $np \rightarrow \lambda$, se tiene que:

- $\lim_{np \rightarrow \lambda} \frac{(np)^x}{x!} = \frac{\lambda^x}{x!}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)\dots[n-(x-1)]}{n^x} = 1.$
- si $n \rightarrow +\infty$ y $np \rightarrow \lambda$, significa que $p \rightarrow 0$, con lo que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} (1-p)^{n-x} = e^{\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} (n-x)(-p)} = e^{-\lambda}.$$

A partir de estos puntos, se puede concluir que:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = P[Y = x], \quad \forall x \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

con $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

AI.VI Demostraciones para la distribución geométrica

Demostración 1. Esperanza y varianza

Notando $q = 1 - p$, se tiene que:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot q^x \cdot p = pq \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = pq \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = \\ &= pq \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{dq} (q^x) = pq \frac{d}{dq} \left[\sum_{x=0}^{\infty} (q^x) \right] = pq \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{1-q} \right] = \\ &= \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{p(1-p)}{(p)^2} = \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

En cuanto a la varianza, primero se calculará la esperanza $E[X(X - 1)]$:

$$\begin{aligned} E[X(X - 1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x - 1) \cdot q^x \cdot p = p \cdot q^2 \sum_{x=0}^{\infty} x(x - 1) \cdot q^{x-2} = \\ &= p \cdot q^2 \frac{d^2}{dq^2} \left[\sum_{x=0}^{\infty} q^x \right] = p \cdot q^2 \frac{d^2}{dq^2} \left[\frac{1}{1 - q} \right] = \\ &= p \cdot q^2 \frac{2}{(1 - q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \frac{2q^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Una vez calculada esta esperanza, se calcula la varianza

$$\begin{aligned} \text{var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = E[X(X - 1)] + E[X] - E[X]^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \\ &= \frac{q}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}. \end{aligned}$$

AI.VII Demostraciones para la distribución binomial negativa

Demostración 1. Propiedades de la función masa de probabilidad

Puede demostrarse la segunda propiedad de las funciones masa de probabilidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{k + x - 1}{x} (1 - p)^x p^k = \\ &= p^k \sum_{x=0}^{\infty} \binom{k + x - 1}{x} (1 - p)^x, \end{aligned}$$

donde vemos que en el último término, la serie es la serie binomial negativa. Se utiliza el desarrollo en serie de potencias de la función

$$(1 + t)^\alpha = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha}{x} t^x, \quad |t| < 1, \alpha \in \mathbb{R},$$

y por tanto, por analogía, el término de la sumatoria en esta demostración equivale a $(1 - (1 - p))^{-k}$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = p^k \sum_{x=0}^{\infty} \binom{k + x - 1}{x} (1 - p)^x = p^k (1 - (1 - p))^{-k} = p^k (p^{-k}) = 1.$$

Demostración 2. Esperanza y varianza

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{(k+x-1)!}{(k-1)!x!} p^k (1-p)^x = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(k+x-1)!}{\frac{k!}{k} x(x-1)!} p^k (1-p)^x = \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} k \frac{(k+x-1)!}{k!(x-1)!} p^k (1-p)^x = k \sum_{x=1}^{\infty} \binom{k+x-1}{x-1} p^k (1-p)^x. \end{aligned}$$

El término siguiente vale 1 como ya se ha demostrado en el apartado anterior, por ser la función masa de probabilidad de la binomial negativa, y se realiza un cambio de variable para llegar al mismo en el cálculo de la esperanza de la v.a.:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x = 1.$$

Por tanto, realizando los cambios $y = x - 1$ y $g = k + 1$, se tiene que:

$$k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{g+y-1}{y} p^{g-1} (1-p)^{y+1} = k \frac{1-p}{p} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{g+y-1}{y} p^g (1-p)^y = k \frac{1-p}{p}.$$

Para la varianza, se procede como sigue:

$$\text{var}[X] = E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2.$$

Se calcula entonces $E[X(X-1)]$:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{(k+x-1)!}{(k-1)!x!} p^k (1-p)^x = \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{(k+x-1)!}{\frac{(k+1)!}{k(k+1)} x(x-1)(x-2)!} p^k (1-p)^x = \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} k(k+1) \frac{(k+x-1)!}{(k+1)!(x-2)!} p^k (1-p)^x. \end{aligned}$$

Se realizan los cambios de variable $y = x - 2$ y $g = k + 2$, y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 E[X(X-1)] &= (g-2)(g-1) \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(g+y-1)!}{(g-1)!(y)!} p^{g-2} (1-p)^{y+2} = \\
 &= (g-2)(g-1) \sum_{y=0}^{\infty} \binom{g+y-1}{y} p^{g-2} (1-p)^{y+2} = \\
 &= \frac{(g-2)(g-1)(1-p)^2}{p^2} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{g+y-1}{y} p^g (1-p)^y = \\
 &= \frac{(g-2)(g-1)(1-p)^2}{p^2}.
 \end{aligned}$$

deshaciendo el cambio de variable, se obtiene

$$E[X(X-1)] = \frac{k(k+1)(1-p)^2}{p^2},$$

Y sustituyendo, se concluye que:

$$\begin{aligned}
 \text{var}[X] &= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 = \\
 &= \frac{k(k+1)(1-p)^2}{p^2} + k \frac{1-p}{p} + \left(k \frac{1-p}{p} \right)^2 = \\
 &= k \frac{1-p}{p^2}.
 \end{aligned}$$

AI.VIII Demostraciones para la distribución uniforme

Demostración 1: Propiedades de la función de densidad

Comprobemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1.$$

Demostración 2: Esperanza y varianza

Utilizando directamente la definición de esperanza, se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{x_2 - x_1} dx = \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \\
&= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_2 + x_1}{2}.
\end{aligned}$$

Y, para la varianza:

$$\begin{aligned}
var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{x_2 - x_1} dx - \frac{(x_2 + x_1)^2}{4} = \\
&= \frac{x_2^3 - x_1^3}{3(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 + x_1)^2}{4} = \frac{4(x_2^3 - x_1^3) - 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)^2}{12(x_2 - x_1)} = \\
&= \frac{4x_2^3 - 4x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 6x_1x_2^2 - 3x_2^3 + 3x_1^3 + 6x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2}{12(x_2 - x_1)} = \\
&= \frac{x_2^3 + 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_1^3}{12(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)^3}{12(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Al.IX Demostraciones para la distribución exponencial

Demostración 1: Propiedades de la función de densidad

Comprobemos que $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, es una función de densidad. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} -\lambda e^{-\lambda x} dx = - [e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \\
&= (e^{-\lambda 0} - e^{-\lambda \infty}) = 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

Demostración 2: Función de distribución

- Si $x \leq 0 \rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 0$.
- Si $x > 0 \rightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = (-e^{-\lambda x} - (-1)) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Luego,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración 3: Esperanza y varianza

Para el caso de la esperanza, se tiene:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Esta integral se realiza por partes $u = x$, $du = dx$ y $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, $v = -e^{-\lambda x}$ y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[X] &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x e^{-\lambda x}) - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x e^{-\lambda x}) - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} -\lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x e^{-\lambda x}) - \frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x e^{-\lambda x}) + \frac{1}{\lambda} = \\ &= 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Para la varianza, razonamos de la siguiente forma:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Hay que calcular el valor de $E[X^2]$, por tanto, análogamente al cálculo de la esperanza:

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Esta integral se realiza por partes $u = x^2$, $du = 2x dx$ y $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, $v = -e^{-\lambda x}$ y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 e^{-\lambda x}) - \int_0^{\infty} -2x e^{-\lambda x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 e^{-\lambda x}) + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 e^{-\lambda x}) + \frac{2}{\lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la varianza:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

AI.X Demostraciones para la distribución gamma

Demostración 1: Propiedades de la función de densidad

Para comprobar que la función $f_X(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}$, $x > 0$, es una función de densidad, se hará el cambio de variable $t = \lambda x$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)} dx &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{a-1} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^a}{\lambda^a \Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{\lambda^a \Gamma(a)}{\lambda^a \Gamma(a)} = 1. \end{aligned}$$

Demostración 2: Esperanza y varianza

Para la esperanza, se calcula por definición, haciendo un cambio de variable $t = \lambda x$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^a e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Gamma(a)} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \\ &= \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \Gamma(a)} = \frac{a \Gamma(a)}{\lambda \Gamma(a)} = \frac{a}{\lambda}. \end{aligned}$$

Y pasa el caso de la varianza, análogamente se calculará siguiendo la fórmula:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Se calcula el primer término, haciendo el cambio de variable $t = \lambda x$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a+1} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{a+1} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a+1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2 \Gamma(a)} = \frac{a(a+1) \Gamma(a)}{\lambda^2 \Gamma(a)} = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Y ahora se calcula la varianza:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a(a+1) - a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}.$$

AI.XI Demostraciones para la distribución normal

Demostración 1: Propiedades de la función de densidad

(Biagini Campanino, 2016)

Debe cumplirse, para que sea una función de densidad, la siguiente expresión. Para su desarrollo se harán dos cambios de variable, uno en el que se pasa de una distribución $N(\mu, \sigma)$ a una $N(0, 1)$, es decir $x = z\sigma + \mu$, y un cambio a coordenadas polares $z = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(z\sigma-\mu+\mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma dz \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dz dy = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-\frac{z^2+y^2}{2}} dz dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \\
 &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = 1,
 \end{aligned}$$

por lo que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Demostración 2: Esperanza y varianza

En el caso de la esperanza de la distribución normal, se tiene que:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $z = \sigma x + \mu$:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\sigma + \mu}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(z\sigma-\mu+\mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\sigma + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z\sigma + \mu) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\sigma e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
 &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
 \end{aligned}$$

Ahora se eleva la esperanza al cuadrado para calcular la segunda integral, haciendo un

cambio de variable a coordenadas polares donde $z = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

$$\begin{aligned} E[X]^2 &= \frac{\mu^2}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 = \frac{\mu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z^2+y^2)}{2}} dz dy = \\ &= \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 2\pi \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \\ &= \mu^2 \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = \mu^2 \Rightarrow E[X] = \mu. \end{aligned}$$

En el caso de la varianza, se tiene que:

$$var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[(X - \mu)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $z = (x - \mu)/\sigma$ se obtiene:

$$var[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Teniendo en cuenta que la función es simétrica y haciendo ahora el cambio de variable $u = z^2/2$ se reduce la integral a una función gamma:

$$\begin{aligned} var[X] &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2 \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= 2 \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Como $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du$, la integral puede escribirse como:

$$var[X] = 2 \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right),$$

y teniendo en cuenta que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, concluimos que $var[X] = \sigma^2$.

Anexo II. Ejemplos de aplicación de las distribuciones de probabilidad

II.I Aplicación de la distribución de Bernoulli

(Peña Romo, 1997)

Una máquina produce un 3 % de piezas defectuosas. Se elige una pieza al azar para ver si presenta algún defecto. ¿Cómo se distribuye la variable aleatoria X que vale 1 si la pieza no es defectuosa y 0 si es defectuosa? ¿Cuáles son su media y varianza?

Se tiene un ejemplo claro de la distribución de Bernoulli, ya que se tiene un suceso aleatorio (coger una pieza al azar) y la probabilidad de éxito es constante $p = 0,97$, y la probabilidad de fracaso por tanto es $(1 - p) = 0,03$.

Por tanto X sigue una distribución de Bernoulli con parámetro $p = 0,97$. La media y la varianza son:

$$\begin{aligned}E[X] &= p = 0,97, \\var[X] &= p(1 - p) = 0,97(1 - 0,97) = 0,97 \cdot 0,03 = 0,0291.\end{aligned}$$

II.II Aplicación de la distribución binomial

(Sáez, 2012)

Un ingeniero se ve obligado a transmitir dígitos binarios a través de un sistema de comunicaciones bastante imperfecto. Por estudios previos, estima que la probabilidad de que un dígito se transmita incorrectamente es del 20 %. El ingeniero envía un mensaje de 4 dígitos y se pregunta cuántos se recibirán incorrectamente.

Obviamente, es imposible responder a esta pregunta con certeza. Lo que puede hacerse desde el punto de vista estadístico, es facilitarle el grado de certeza (la probabilidad) de cada uno de los posibles resultados.

Concretamente, si se analiza la variable aleatoria X que cuenta el *número de dígitos que se reciben incorrectamente*, teniendo en cuenta que el ensayo del envío de cada dígito se hará de forma independiente y que la probabilidad de que el dígito se transmita incorrec-

tamente es 0,2, se puede afirmar que un modelo de probabilidad adecuado para dicha variable es una distribución $b(4, 0,2)$ (en este caso $n = 4$ que es el número de “intentos” y $p = 0,2$ que es la probabilidad de éxito constante).

Esta distribución permitirá calcular la probabilidad de que se crucen 0, 1, 2, 3 o 4 de estos dígitos.

$$P[X = 0] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{4}{0} 0,2^0 (1 - 0,2)^{4-0} = 0,41,$$

$$P[X = 1] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{4}{1} 0,2^1 (1 - 0,2)^{4-1} = 0,41,$$

$$P[X = 2] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{4}{2} 0,2^2 (1 - 0,2)^{4-2} = 0,15,$$

$$P[X = 3] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{4}{3} 0,2^3 (1 - 0,2)^{4-3} = 0,03,$$

$$P[X = 4] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{4}{4} 0,2^4 (1 - 0,2)^{4-4} = 0,00.$$

Se le puede decir al ingeniero, que es altamente improbable que le falle la transmisión de los 4 dígitos, pero que tiene una probabilidad de que le falle el envío de al menos uno de ellos de casi un 60 %:

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0,41 = 0,59.$$

III.III Aplicación de la distribución de Poisson

(Sáez, 2012)

Un fabricante de maquinaria pesada tiene instalados en el campo 3840 generadores de gran tamaño. Si la probabilidad de que cualquiera de ellos falle durante el año en curso es de $1/1200$, determinar la probabilidad de que 4 generadores fallen durante el año en curso, y también la de que más de 1 generador falle durante el año en curso.

El promedio de motores que fallan en el año es $\lambda = n \cdot p = (3800)(1/1200) = 3,2$.

Sea X la variable que define el *número de motores que pueden fallar en el año*, con valores $x = 0, 1, 2, \dots, 3840$.

En principio $X \sim b(3840, 1/1200)$, pero dado que n es muy grande y p es muy pequeño, se puede considerar que $X \sim Poisson(3,2)$ por la aproximación de una binomial a una Poisson (ley de los sucesos raros). Por tanto,

$$P[X = 4] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3,2^4 e^{-3,2}}{4!} = 0,17809.$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned} P[X > 1] &= 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = \\ &= 1 - \frac{3,2^0 e^{-3,2}}{0!} - \frac{3,2^1 e^{-3,2}}{1!} = 0,82880. \end{aligned}$$

AII.IV Aplicación de la distribución geométrica

(Sáez, 2012)

Siguiendo sobre el ejemplo de la distribución binomial del ingeniero que envía dígitos a través de un canal imperfecto, ahora se plantea cuántos dígitos se recibirán correctamente hasta que uno se cruce (hasta el primer éxito), sabiendo que la probabilidad de que uno cualquiera lo haga es de 0,2.

La variable de interés ahora es Y , que cuenta el *número de dígitos que se reciben bien hasta el primero que se cruza*. Esta variable tiene como modelo una distribución geométrica de parámetro 0,2, es decir $Y \sim G(0,2)$. Gracias a este modelo, se le puede decir al ingeniero que la probabilidad de que envíe bien dos y que falle el tercer dígito es de un 12,8 %:

$$P[Y = 2] = p(1 - p)^x = 0,2(1 - 0,2)^2 = 0,128.$$

AII.V Aplicación de la distribución binomial negativa

(Sáez, 2012)

Continuando con el ejemplo de la transmisión de dígitos. ¿Cuántos dígitos se transmitirán correctamente hasta que dos lo hagan incorrectamente?

De nuevo se debe asumir que no hay una respuesta exacta para esto, pero se puede considerar un modelo de probabilidad que nos ayude a tomar decisiones.

Sea Z la variable aleatoria que cuenta el *número de dígitos que se reciben bien hasta que dos se cruzan*, sigue una distribución $BN(2, 0,2)$. Gracias a este modelo, se le puede decir al ingeniero, por ejemplo, que la probabilidad de que se crucen 2 dígitos con 10 o menos envíos es de un 62 %:

$$\begin{aligned}
 P[Z \leq 8] &= \sum_{z=0}^8 P[Z = z] = \sum_{z=0}^8 \frac{(k+z-1)!}{(k-1)!z!} p^k (1-p)^z = \\
 &= \sum_{z=0}^8 \frac{(2+z-1)!}{(2-1)!z!} 0,2^2 (1-0,2)^z = 0,62.
 \end{aligned}$$

AII.VI Aplicación de la distribución uniforme

(Román, 2016)

El tiempo en minutos que tarda un señor para ir de su casa al trabajo oscila de forma uniforme entre 20 y 30 minutos. Si debe llegar al trabajo a las 8 de la mañana, ¿a qué hora debe salir de su casa para tener una probabilidad del 90 % de no llegar tarde?

Si X denota el tiempo en ir de casa al trabajo (en minutos), su distribución es $U(20, 30)$. Se busca el valor de a tal que $P[X \leq a] = 0,9$:

$$P[X \leq a] = F_X(a) = \int_{20}^a \frac{1}{30-20} dx = \frac{a-20}{30-20} = 0,9 \Rightarrow a = 29.$$

Debe salir de casa 29 minutos antes, es decir a las 7:31.

El tiempo medio que tarda en ir de casa al trabajo es de $E[X] = \frac{20+30}{2} = 25$ min y su desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza:

$$var[X] = \frac{(30-20)^2}{12} = 8,33 \text{ (min)}^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{var[X]} = 2,88 \text{ min.}$$

AII.VII Aplicación de la distribución exponencial

(Román, 2016)

En un parking público se ha observado que los coches llegan aleatoria e independientemente a razón de 360 coches por hora.

a) Utilizando la distribución exponencial, calcular la probabilidad de que el próximo coche no llegue dentro de medio minuto.

b) Calcular la misma probabilidad anterior utilizando la distribución de Poisson.

Sea T el tiempo en minutos que transcurren entre dos llegadas consecutivas. Como el parámetro y la variable aleatoria deben estar expresadas en las mismas unidades:

$$\lambda = \frac{360}{60} = 6 \text{ coches por minuto.}$$

Así, se tiene que $T \sim \exp(\lambda)$ y la probabilidad que se pide se calcula como:

$$\begin{aligned}
 P[T \geq 0,5] &= 1 - P[T < 0,5] = 1 - \int_0^{0,5} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{0,5} = \\
 &= 1 - (e^0 - e^{-\lambda 0,5}) = 1 - (1 - 0,049) = 0,049.
 \end{aligned}$$

Si se define ahora la variable X como el número de coches que llegan en el próximo medio minuto, entonces $X \sim Poisson(\lambda/2)$ por ser en medio minuto, y la probabilidad será:

$$P[X = 0] = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = 0,049.$$

II.VIII Aplicación de la distribución gamma

(Elaboración propia)

Si un aparato electrónico en una máquina falla cada 100 horas, ¿cuál es el tiempo medio que transcurre hasta que fallan 2 de estos aparatos? ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran 250 horas antes de que fallen los dos componentes?

La v.a. $X \sim Gamma(a, \lambda)$ cuenta el tiempo que pasa entre 2 fallos.

El parámetro de la distribución se calculará como $\lambda = 1/100$ fallos/hora. Por tanto, la esperanza será:

$$E[X] = \frac{a}{\lambda} = a \cdot 100 = 200 \quad \text{horas de media para fallar 2 aparatos.}$$

Para calcular la probabilidad, se usará la función de distribución, y deberá calcularse de forma numérica (aquí hemos utilizado el comando de MExcel

“=1-DISTR.GAMMA.N(250;2;100;VERDADERO)”

para calcular el valor numérico):

$$\begin{aligned}
 P[X > 250] &= 1 - P[X < 250] = 1 - \int_0^{250} \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)} dx = \\
 &= 1 - \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{250} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = 0,3084.
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que transcurran 250 horas antes de que fallen los dos aparatos electrónicos es de un 30,84 %.

All.IX Aplicación de la distribución normal

(Sáez, 2012)

En un artículo titulado “Índices de relación peso-talla como indicadores de masa muscular en el adulto del sexo masculino” de una revista sobre alimentación y nutrición, aparece un colectivo de varones con un peso cuya media y desviación típica son, respectivamente, 65,6 y 11,7.

1. ¿Cómo podemos, mediante las tablas de la $N(0, 1)$, calcular, por ejemplo, la probabilidad de que uno de esos varones pese más de 76,25 kg?

Para resolver este problema, se hará uso de la tabla de valores numéricos de la función de distribución de una variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$ ([Tabla Normal N\(0,1\)](#)).

$$\begin{aligned} P[X > 76,25] &= P\left[\frac{X - 65,6}{11,7} > \frac{76,25 - 65,6}{11,7}\right] = \\ &= P[Z > 0,91] = 1 - P[Z \leq 0,91] = 1 - 0,8186 = 0,1814. \end{aligned}$$

2. ¿Y la probabilidad de que pese menos de 60 kg?

$$\begin{aligned} P[X < 60] &= P\left[\frac{X - 65,6}{11,7} < \frac{60 - 65,6}{11,7}\right] = \\ &= P[Z \leq -0,48] = P[Z > 0,48] = 1 - P[Z \leq 0,48] = \\ &= 1 - 0,6844 = 0,3156. \end{aligned}$$

3. ¿Y la probabilidad de que pese entre 60 y 76,25 kg?

$$P[60 \leq X \leq 76,25] = P[X \leq 76,25] - P[X < 60] = 0,8186 - (1 - 0,6844) = 0,503.$$

Tabla para la normal $N(0,1)$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Tabla AII.1 Valores de la función de distribución $F_Z(\cdot)$ de una v.a. $Z \sim N(0, 1)$. Fuente: elaboración propia.

Anexo III. Actividades y recursos para la unidad didáctica

Tanto las actividades de aprendizaje y desarrollo como las actividades de consolidación y las actividades del examen han sido recogidas del libro de texto de la asignatura Matemáticas II de 2º de Bachillerato de la editorial SM. Las de refuerzo y ampliación han sido adaptadas como elaboración propia, así como el proyecto.

AIII.I Actividades de aprendizaje y desarrollo

Actividades para la primera sesión

Actividad 1 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Dada la variable aleatoria discreta X cuya función masa se recoge en la siguiente tabla

x_i	-1	0	1	2	3
$p_X(x_i)$	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Halla su media, su varianza, su desviación típica y la probabilidad $P[0 \leq X < 2]$.

Solución:

$$E[X] = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = 0,8.$$

$$\text{var}[X] = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot p_i - E[X]^2 = 1,96.$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}[X]} = 1,4.$$

$$P[0 \leq X < 2] = P[X = 0] + P[X = 1] = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

Actividad 2 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Sea X una variable aleatoria que toma los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades 0,2; 0,25; 0,4; 0,15. Calcula su media, su varianza y $P[X > 1]$.

Solución:

$$E[X] = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,15 = 1,5.$$

$$\text{var}[X] = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i - E[X]^2 = 0,95.$$

$$P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - 0,2 - 0,25 = 0,55.$$

Actividad 3 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): De una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 rojas, se extraen 3 bolas al azar sucesivamente y sin reemplazamiento. Sea la variable aleatoria Y : “número de bolas blancas extraídas”. Determina:

1. Su función masa de probabilidad.
2. Su media y varianza.
3. La probabilidad de que se extraigan al menos dos bolas blancas.

Solución:

El número de bolas blancas extraídas podrá tomar valores enteros en el intervalo $[0,3]$, ya que existe la posibilidad de extraer 0, 1, 2 o 3 bolas blancas como máximo, por tanto, los posibles valores de Y son $y_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Para calcular las probabilidades de sacar un número y_i de bolas blancas, llamaremos B al suceso “sacar una bola blanca” y R al suceso “sacar una bola roja”, y tener en cuenta que las probabilidades son condicionadas. Por ejemplo, para sacar 0 bolas blancas hay que sacar 3 bolas rojas:

$$p_0 = P[Y = 0] = P[R] \cap P[R|_R] \cap P[R|_{RR}] = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = 0,018.$$

Para sacar 1 bola blanca, tenemos varios casos. Se puede sacar 1 bola blanca y 2 rojas; una bola roja, una blanca y una roja; o dos bolas rojas y una blanca:

$$\begin{aligned} p_1 &= P[Y = 1] = P[B] \cap P[R|_B] \cap P[R|_{BR}] \cup P[R] \cap P[B|_R] \cap P[R|_{RB}] \cup \\ &\quad \cup P[R] \cap P[R|_R] \cap P[B|_{RR}] = \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = 0,27. \end{aligned}$$

Hacemos lo mismo con el resto de posibilidades, y obtendremos los resultados:

y_i	0	1	2	3
p_i	0,018	0,27	0,54	0,18

$$E[Y] = \sum_{i=0}^3 y_i \cdot p_i = 1,88.$$

$$\text{var}[Y] = \sum_{i=0}^3 y_i^2 \cdot p_i - E[Y]^2 = 0,5.$$

$$P[Y \geq 2] = 1 - P[Y < 2] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] = 0,71.$$

Actividades para la segunda sesión

Actividad 1 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Halla en cada caso la probabilidad indicada.

1. $X \sim b(n = 5, p = 0,15) \rightarrow P[X < 4]$.
2. $Y \sim b(n = 7, p = 0,65) \rightarrow P[Y \geq 4]$.

Solución:

$$P[X < 4] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = 0,99.$$

$$P[Y \geq 4] = 1 - P[Y < 4] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2] - P[Y = 3] = 0,19.$$

Actividad 2 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Se sabe que en la prestigiosa escuela Hogwarts, de magia y hechicería, el sombrero seleccionador envía a los jóvenes magos a Gryffindor el 25 % de las veces. Se seleccionan 6 jóvenes magos al azar que ya han pasado por el sombrero. Calcula la probabilidad de que, entre los 6 elegidos:

1. Haya uno que sea de Gryffindor.
2. Al menos haya uno que sea de Gryffindor.

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de jóvenes de Gryffindor entre los 6 elegidos" $\sim b(6, 0,25)$.

$$P[X = 1] = \frac{6!}{1!(6-1)!} (0,25)^1 (1 - 0,25)^{6-1} = 0,36.$$

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - P[X = 0] = 0,82.$$

Actividad 3 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Se lanza repetidas veces un dado equilibrado. ¿Cuántas veces hay que lanzar el dado para obtener al menos un 6 con probabilidad igual o superior a 0,9?

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de veces que aparece un 6 en n lanzamientos del dado" $\sim b(n, 1/6)$.

$$\begin{aligned}
P[X \geq 1] &= 0,9. \\
n = 9 &\Rightarrow P[X \geq 1] = 0,81, \\
n = 10 &\Rightarrow P[X \geq 1] = 0,84, \\
n = 11 &\Rightarrow P[X \geq 1] = 0,87, \\
n = 12 &\Rightarrow P[X \geq 1] = 0,89, \\
n = 13 &\Rightarrow P[X \geq 1] = 0,91.
\end{aligned}$$

Conclusión: hay que lanzar el dado como mínimo 13 veces para que la probabilidad de obtener al menos un 6 sea igual o superior a 0,9.

Actividad 4 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): En un país, la tasa de paro es del 26 % de su población activa. Si se toma una muestra de 50 personas adultas y se les pregunta por su situación laboral, ¿cuál será el número esperado de desempleados? ¿Y su desviación típica?

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de personas desempleadas en la muestra de 50" $\sim b(50, 0,26)$.

$$\begin{aligned}
E[X] &= n \cdot p = 50 \cdot 0,26 = 13. \\
var[X] &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3,10. \\
\sigma &= \sqrt{var[X]} = 1,76.
\end{aligned}$$

Actividades para la tercera sesión

Actividad 1 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

1. Calcula su esperanza y varianza.
2. Calcula $P\left[X > \frac{3}{2}\right]$ y $P\left[\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right]$.

Solución:

1. Utilizando la definición de esperanza y varianza, se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}
E[X] &= 1,6. \\
var[X] &= 0,07.
\end{aligned}$$

2. Integrando la función de densidad en los recintos correspondientes, se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}
P\left[X > \frac{3}{2}\right] &= 0,66. \\
P\left[\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right] &= 0,49.
\end{aligned}$$

Actividad 2 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Utilizando la tabla de la normal estándar, determina a o p en cada caso:

1. $P[Z \geq 1,46] = p$.
2. $P[Z > 2,13] = p$.
3. $P[-0,57 \leq Z \leq -0,12] = p$.
4. $P[Z < a] = 0,0026$.
5. $P[-a \leq Z < a] = 0,9676$.

Solución:

1. $p = 0,0721$.
2. $p = 0,0166$.
3. $p = 0,1679$.
4. $a = -2,8$.
5. $a = 2,14$.

Actividad 3 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): Un fabricante de un cierto tipo de motores asegura que la duración de su producto tiene una distribución normal de media 10 años de uso con una varianza de 4 años. Calcula la probabilidad de que un motor elegido al azar dure:

1. Más de 12 años.
2. Menos de 9 años.
3. Entre 10 y 11 años.

Si un comerciante compra un lote de 100 motores al fabricante, calcula cuántos motores puede esperarse que duren:

4. Más de 7 años.
5. Más de 9 años.

Solución:

Definimos la v.a. X ="Años que dura un motor de este tipo" $\sim N(10, 4)$.

1. $P[X > 12] = 0,3085$.
2. $P[X < 9] = 0,4013$.
3. $P[10 < X < 11] = 0,0987$.
4. Se calcula la probabilidad de que el motor dure más de 7 años $p_1 = P[X > 7] = 0,77$. Definimos la v.a. Y ="número de motores que duran más de 7 años" $\sim b(100, p_1 = 0,77)$ y calculamos su esperanza: 77 motores.
5. Se calcula la probabilidad de que el motor dure más de 9 años $p_2 = P[X > 9] = 0,59$. Definimos la v.a. W ="número de motores que duran más de 9 años" $\sim b(100, p_2 = 0,59)$ y calculamos su esperanza: 59 motores.

Actividad 4 (CE1.2., CE1.3., CE5.2.): El 40 % de las personas empadronadas en una ciudad viven en urbanizaciones alejadas del centro. De una muestra de 1500 personas, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 580 personas vivan en estas urbanizaciones?

Solución:

$$p = 0,4, \quad n = 1500.$$

$$X \sim b(n, p) \rightarrow Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

$$P[X < 580] \approx P[Y < 580 + 0,5] = P[Z < -1,02] = 1 - P[Z < 1,02] = 0,1539.$$

AIII.II Actividades de consolidación

Actividad 1 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): Sea X la variable aleatoria que consiste en sumar las puntuaciones obtenidas al lanzar conjuntamente un dado y una moneda equilibrados. Las puntuaciones de la moneda son 0 para cara y 1 para cruz.

1. Escribe su función masa de probabilidad y dibuja su gráfica.
2. Calcula la probabilidad de que la variable X tome como valor un número primo.
3. Calcula la esperanza y la varianza de X .

Solución:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,083	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,083

$$P[X = \text{primo}] = P[X = 1] + P[X = 3] + P[X = 5] + P[X = 7] = 0,506.$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^7 x_i \cdot p_i = 4.$$

$$\text{var}[X] = \sum_{i=1}^7 x_i^2 \cdot p_i - E[X]^2 = 3,17.$$

Actividad 2 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): El fabricante de varitas mágicas Olivanders también fabrica varitas con madera de chopo, y necesita conocer un par de cosas para saber si en una plantación, los chopos son idóneos para fabricar las varitas. El encargado de una de estas plantaciones asegura que, en este momento, el diámetro de los árboles sigue una distribución normal de media 20 cm y que el 90 % de ellos tiene un diámetro inferior a 25 cm.

1. Calcula la desviación típica de la distribución.
2. Olivanders necesita conocer la probabilidad de que un árbol elegido al azar tenga más de 22 cm de diámetro, calcúlalo.

Solución:

Definimos la v.a. X ="diámetro de un chopo de la plantación" $\sim N(20, \sigma)$.

$$P[X < 25] = 0,9 \Rightarrow \frac{25 - \mu}{\sigma} = \frac{5}{\sigma} = 1,28 \Rightarrow \sigma = 3,9.$$

$$P[X > 22] = 0,304.$$

Actividad 3 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): Antes de poner a la venta un nuevo smartphone, se realizan 4 controles de calidad independientes. En cada control, si el smartphone es defectuoso se detecta en el 95 % de los casos. Si el smartphone no supera alguno de los 4 controles, no se pone a la venta. Calcula la probabilidad de que un smartphone en malas condiciones:

1. Sea detectado en uno solo de los 4 controles.
2. Se detecte en al menos dos de los controles.
3. No sea puesto a la venta.

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de controles en los que el smartphone es detectado como defectuoso" $\sim b(4, 0,95)$.

$$P[X = 1] = 0,0005.$$

$$P[X \geq 2] = 0,99.$$

$$P[X \geq 1] = 1.$$

Actividad 4 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): Un tribunal debe calificar a 700 aspirantes para cubrir 25 vacantes en un organismo oficial. Si las calificaciones son de 0 a 10 y su distribución es normal de media $\mu=5,7$ puntos, y desviación típica $\sigma=1,5$ puntos, se pide:

1. ¿Cuántos opositores han obtenido puntuación igual o superior a 5 puntos?
2. ¿Cuál es la nota de corte para ser seleccionado?

Solución:

$$1. P[X \geq 5] = 0,6796 \Rightarrow 475 \text{ opositores.}$$

$$2. 25/700 = 0,036 \rightarrow P[X > x] = 0,036 \rightarrow x = 8,4.$$

AIII.III Actividad de tipo PBL

¿Se puede aprobar sin estudiar un examen de tipo test?

Este proyecto consiste en conocer las opciones que existen de aprobar exámenes de tipo test que no se han preparado antes.

Por supuesto, se trata de que lleguen a la conclusión de que un examen tipo test con menos de 10 preguntas y 3 opciones de respuesta única, no es una herramienta de evaluación justa, ya que hay una probabilidad relativamente alta de aprobar sin haber estudiado. Por eso, los exámenes de tipo test suelen tener más de 10 preguntas y distintas reglas como la de que un fallo reste puntuación, o que las opciones sean multirespuesta.

Criterios de evaluación: CE1.1, CE1.2., CE1.4., CE1.5., CE1.6., CE1.7., CE1.8., CE1.9., CE1.10., CE1.11., CE1.12., CE1.13., CE1.14., CE5.2. y CE5.3.

Objetivos didácticos de la unidad: 6, 7, 8 y 9.

Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD, CSC, SIEP.

En el proyecto se dará una ficha a los alumnos como guión, donde tendrán los apartados del proyecto y los problemas y cuestiones que se plantean, además de las instrucciones para el formato del informe.

El alumnado deberá escribir un informe donde desarrollen todos los puntos del guión e introduzcan las gráficas y las tablas que se deben incluir. Se les pedirá un formato determinado (márgenes, tipo de letra, encabezado y pie de página, numeración de página, interlineado, norma APA para bibliografía mencionando como mínimo el libro de texto) deben incluir los gráficos y tablas con título y numeración y el formato de las ecuaciones, si incluyen alguna. Deberá realizarse con un procesador de textos tipo Microsoft Word, u OpenOffice en su defecto. Se les dará a los alumnos también acceso a un repositorio en la nube (como Google Classroom, por ejemplo) para que se familiaricen con estos entornos y suban sus archivos de informes al repositorio como entrega del trabajo.

FICHA PARA EL ALUMNADO:

TABLA 1.					
Pregunta	Miembro 1	Miembro 2	Miembro 3	Miembro 4	Miembro 5
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
% de aciertos					

1. Un miembro del grupo prepara un examen de tipo test de 10 preguntas. Las preguntas irán numeradas del 1 al 10, cada pregunta tiene 3 opciones (a, b y c) y solo hay una única opción correcta. La peculiaridad es que las preguntas y las respuestas están en blanco, de forma que la persona que haga el examen no tiene ni idea de las respuestas, y solo la persona que ha redactado el examen conoce las respuestas porque se las ha inventado. Las respuestas deben estar anotadas en otra hoja, que

será secreta hasta que hayan realizado el examen.

2. Repartir el examen a los demás miembros del grupo y que realicen el examen, tienen 1 minuto aproximadamente para terminarlo.
3. Se corrige el examen con las respuestas anotadas en la hoja secreta, y se ve qué proporción de respuestas correctas tiene cada uno de los miembros del grupo. Registrar los datos en tablas como la siguiente (tabla 1), donde en cada una de las 10 preguntas, C significa correcto, e I significa incorrecto.
4. Reflexionar sobre las respuestas de los miembros del grupo. ¿Tienen todos más o menos la misma nota? ¿Por qué crees que ocurre esto? ¿Qué crees que cambiaría si los alumnos estudiaran y supieran algunas de las respuestas?
5. Calcular cuál es la probabilidad de acertar una sola pregunta, sabiendo que el alumno no tiene ni idea de la respuesta. Justifica el cálculo con la explicación del apartado anterior.
6. ¿Con qué “herramienta” que se ha visto en clase podríamos calcular la probabilidad de acertar un número n de preguntas? Calcular la probabilidad de que el alumno acierte el número de preguntas de la siguiente tabla (tabla 2). Justifica la elección de la “herramienta” utilizada en el cálculo.

TABLA 2.	
Número de preguntas correctas	Probabilidad de acertar
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

7. Elaborar un gráfico apropiado para la distribución de la tabla anterior.
8. Si una persona va a realizar este examen, ¿cuántas respuestas se espera que vaya a acertar? Calcula también la desviación típica.
9. Repetir los exámenes desde el punto 1, pero ahora el examen tiene 20 preguntas.
10. Sea X el número de preguntas acertadas que se han observado en los exámenes de 20 preguntas. Usando la aproximación a una distribución normal, encuentra las probabilidades $P[X \geq 5]$ y $P[X < 12]$.

11. ¿Crees ahora que realmente se puede aprobar un examen tipo test sin haber estudiado? Calcula dicha probabilidad para los exámenes de 10 y 20 preguntas.
12. ¿Qué crees que pasaría si en lugar de 3 opciones (a, b y c) fuesen 5 opciones? ¿Y si es multirespuesta? ¿Y si los fallos restan puntos? Comentar como una reflexión.
13. ¿En qué otros casos de la vida real crees que puede darse un tipo de problema parecido a este? Mencionar al menos uno y explicar por qué.
14. Realizar una comparación entre todos los exámenes de los miembros del grupo, y obtener conclusiones sobre los resultados obtenidos.

Formato del informe:

- Deberá realizarse mediante Microsoft Word u OpenOffice, en su defecto.
- Portada
- Márgenes: 2,5cm a cada lado, excepto el izquierdo de 3cm.
- Tipo de letra Calibri (o similar) 12pt de tamaño.
- Numeración de página centrada, en el pie de página.
- Encabezado con el nombre del proyecto, asignatura y curso.
- Interlineado 1.15pt.
- Bibliografía y citas según la norma APA (<https://normasapa.com/como-citar-referenciar-libros-con-normas-apa/comment-page-28/>)
- Ecuaciones centradas en la hoja, entre párrafos, no es necesario numerarlas en este trabajo.

Entrega: Entregar el informe en Google Classroom en la tarea abierta por el profesor, antes de la fecha que se ha previsto para la misma.

AIII.IV Ejemplos de actividades de ampliación y refuerzo

Actividad 1 - Refuerzo: Sea X una variable aleatoria que toma los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 3$ con probabilidades $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,25$; $p_3 = 0,4$; $p_4 = 0,15$, respectivamente. Calcula su media (sumatorio de $x_i \cdot p_i$), su varianza (sumatorio de $x_i^2 \cdot p_i$ menos la media al cuadrado) y $P[X > 1]$ (sumatorio de p_i para las x mayores de 1).

Solución:

$$E[X] = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,15 = 1,5.$$

$$\text{var}[X] = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i - E[X]^2 = 0,95.$$

$$P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - 0,2 - 0,25 = 0,55.$$

Actividad 1 - Ampliación: Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores enteros en el intervalo $[0, 3]$, con probabilidades 0,2; 0,25; 0,4 y 0,15, respectivamente. Calcula su media, su varianza y la probabilidad de que tome valores mayores que 1.

Solución:

$$E[X] = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,15 = 1,5.$$

$$\text{var}[X] = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i - E[X]^2 = 0,95.$$

$$P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - 0,2 - 0,25 = 0,55.$$

Actividad 2 - Refuerzo: En un país, la tasa de paro es del 26 % de su población activa, es decir, la probabilidad de estar en paro es $p = 0,26$. Si se toma una muestra de $n = 50$ personas adultas y se les pregunta por su situación laboral, calcular la esperanza y la desviación típica.

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de personas desempleadas en la muestra de 50" $\sim b(50, 0,26)$.

$$E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0,26 = 13.$$

$$\text{var}[X] = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3,10.$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}[X]} = 1,76.$$

Actividad 2 - Ampliación: En un país, la tasa de paro es del 26 % de su población activa. Si se toma una muestra de 50 personas adultas y se les pregunta por su situación laboral, ¿cuántos desempleados se espera que haya en la muestra? ¿Qué medidas de dispersión conocidas podríamos calcular de esta distribución? Calcular la probabilidad de que la mitad de las personas de esta muestra, estén realmente desempleadas.

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de personas desempleadas en la muestra de 50" $\sim b(50, 0,26)$.

$$E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0,26 = 13.$$

$$\text{var}[X] = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3,10.$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}[X]} = 1,76.$$

$$P[X = 25] = \binom{50}{25} 0,26^{25} (1 - 0,26)^{(50-25)} = 0,00016.$$

Actividad 3 - Refuerzo: Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

1. Calcula su esperanza y varianza, por definición, sabiendo que $\int_1^2 x \frac{3}{7} x^2 dx = \frac{3}{7} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2$.
2. Calcula $P \left[X > \frac{3}{2} \right]$ y $P \left[\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10} \right]$.

Solución:

1. Utilizando la definición de esperanza y varianza, se obtienen los siguientes valores

$$E[X] = 1,6.$$

$$var[X] = 0,07.$$

2. Integrando la función de densidad en los recintos correspondientes, se obtienen los siguientes valores

$$P\left[X > \frac{3}{2}\right] = 0,66.$$

$$P\left[\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right] = 0,49.$$

Actividad 3 - Ampliación: Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

1. Calcula su esperanza y varianza.
2. Calcula su función de distribución $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$.
3. Calcula $P\left[X > \frac{3}{2}\right]$ y $P\left[\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right]$ utilizando la función de distribución $F_X(x)$.

Solución:

1. Utilizando la definición de esperanza y varianza, se obtienen los siguientes valores

$$E[X] = 1,6.$$

$$var[X] = 0,07.$$

2. Para calcular la función de distribución, realizamos la integral:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_1^x \frac{3}{7}t^2 dt = \frac{x^3 - 1}{7}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{7}, & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

3. Evaluando la función de distribución para calcular las probabilidades, se obtienen los siguientes valores

$$P\left[X > \frac{3}{2}\right] = 1 - F_X(3/2) = 0,66.$$

$$P\left[\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right] = F_X(19/10) - F_X(3/2) = 0,49.$$

AIII.V Examen de la unidad

A continuación se diseña una posible prueba escrita que los alumnos deberán realizar en la última sesión de la unidad didáctica para asegurarnos que han entendido los conceptos y procedimientos que se han desarrollado a lo largo de la unidad didáctica y han adquirido las competencias correspondientes.

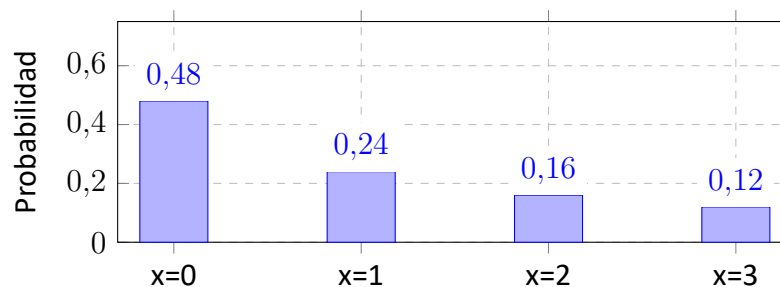
Ejercicio 1 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): La función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta X viene dada por la siguiente expresión:

$$P[X = x] = \frac{k}{x+1} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3.$$

1. Calcula el valor de la constante k . (0,5 puntos).
2. Representa gráficamente la función. (0,5 puntos).
3. Calcula la esperanza, varianza y desviación típica. (0,5 puntos).
4. Calcula $P[0,5 < X < 3,5]$. (0,5 puntos).

Solución:

1. $\sum_{x=0}^3 \frac{k}{x+1} = 1 \Rightarrow k = \frac{12}{25}$.
2. Gráfico de la función masa de probabilidad:



3. $E[X] = 0,92$; $var[X] = 1,11$; $\sigma = 1,06$.
4. $P[0,5 < X < 3,5] = P[1 \leq X \leq 3] = 0,52$.

Ejercicio 2 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): En el planeta Kamino hay unas instalaciones donde se está formando un ejército de clones, pedido por la República Galáctica. Hay un estricto control de calidad, y 4 de cada 5 clones lo pasan. Si están sujetos a ese control un total de 10.000 clones:

1. ¿Cuántos clones se espera que superen el control de calidad? (1 punto).
2. ¿Cuál es la probabilidad de que superen el control de calidad entre 8.000 y 9.000 clones? (2 puntos).

Solución:

Definimos la v.a. X ="número de clones que superan el control de calidad" $\sim b(10000, 4/5)$.

1. $E[X] = np = 10000 \cdot 4/5 = 8000$.

$$2. P[8000 \leq X \leq 9000] \approx P[7999,5 \leq Y \leq 9000,5], Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}) \rightarrow P[-0,0125 \leq Z \leq 25,0125] = 0,495.$$

Ejercicio 3 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): El tiempo en horas que tarda en llegar el Halcón Milenario (la nave espacial de Han Solo) desde el planeta Naboo hasta el planeta Coruscant, sigue una distribución normal $N(\mu = 9, \sigma = 0,1)$, mientras que el tiempo en horas que tarda por el mismo trayecto un Ala X de la Alianza Rebelde, sigue una distribución normal $N(\mu = 8, \sigma = 1)$.

1. Si Luke Skywalker tiene que hacer este viaje y solo dispone de 10 horas, ¿qué nave debería escoger para llegar a tiempo? Calcula y razona los resultados. (2 puntos).
2. Supongamos que elige el Halcón Milenario. Quiere saber con una seguridad del 90 % cuánto es lo más que puede tardar en llegar a Coruscant. (1 punto).

Solución:

Definimos las v.a. X ="Duración en horas del trayecto utilizando el Halcón Milenario" $\sim N(9, 0,1)$ e Y ="Duración en horas del trayecto utilizando el Ala X de la Alianza Rebelde" $\sim N(8, 1)$.

1. $P[X > 10] = 0, P[Y > 10] = 0,0228$.
2. 9,12 horas como mucho.

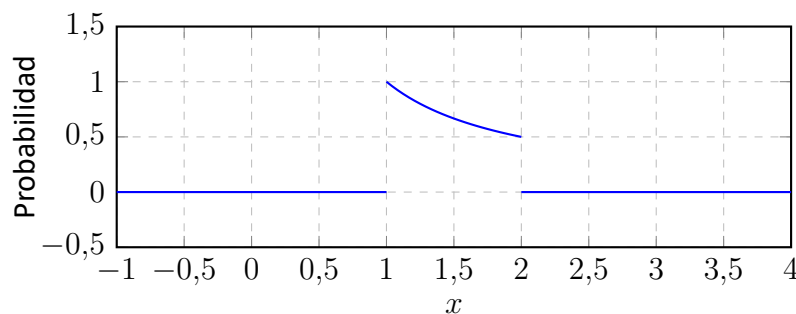
Ejercicio 4 (CE1.1., CE1.2., CE1.3., CE1.10., CE1.12., CE5.2., CE 5.3.): Considerar una variable aleatoria continua en con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

1. Dibuja la gráfica de su función de densidad. (1 punto).
2. Calcula su esperanza y su varianza. (1 punto).

Solución:

1. Gráfico de la función de densidad:



2. $E[X] = 1; var[X] = 0,5$.