



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

UNIDAD DIDÁCTICA TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: **Unión Sánchez, Juan de Dios**

Tutor/a: Prof. D. Samuel Gómez Moreno
 Prof. D. Khader Faiez Abu-Helaiel Jadallah

Dpto: Matemáticas
 Didáctica de las Ciencias

Octubre, 2021

ÍNDICE DE FIGURAS

Ilustración 1 Bloque 1: "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas"	11
Ilustración 2 Bloque 3: "Geometría"	12
Ilustración 3 Representación del concepto de ángulo	21
Ilustración 4 Triángulos rectángulos semejantes	22
Ilustración 5 Circunferencia goniométrica	23
Ilustración 6 Razones trigonométricas de cualquier ángulo	24
Ilustración 7 Triángulo equilátero de lado a. Elaboración propia	26
Ilustración 8 Cuadrado de lado a. Elaboración propia	27
Ilustración 9 Razones trigonométricas de ángulos complementarios	28
Ilustración 10 Razones trigonométricas de ángulos suplementarios	29
Ilustración 11 Razones trigonométricas de ángulos que difieren 180°	29
Ilustración 12 Razones trigonométricas del ángulo opuesto	30
Ilustración 13 Razones trigonométricas del ángulo suma. Elaboración propia	30
Ilustración 14 Resolución de triángulos rectángulos	34
Ilustración 15 Teorema del coseno	35
Ilustración 16 Teorema del seno	36
Ilustración 17 Cálculo de la altura de un edificio	39
Ilustración 18 Cálculo del área de un pentágono regular	40
Ilustración 19 Incorrecta medición de ángulos. Fuente: Artículo analizado	42
Ilustración 20 Materiales utilizados en el estudio	43
Ilustración 21 Secuencia parte 1 SP1. Fuente: Artículo analizado	43
Ilustración 22 Secuencia parte 2 SP2. Fuente: Artículo analizado	43
Ilustración 23 Secuencia parte 3 SP3. Fuente: Artículo analizado	44
Ilustración 24 Secuencia parte 4 SP4. Fuente: Artículo analizado	44
Ilustración 25 Identificar cada figura con el ángulo girado. Fuente: Artículo analizado	44
Ilustración 26 Ejemplo de respuestas a la pregunta. Fuente: Artículo analizado	45
Ilustración 27 Apartado 1 problema propuesto. Fuente: Artículo analizado	47
Ilustración 28 Apartado 2 problema propuesto. Fuente: Artículo analizado	47
Ilustración 29 Error cometido en el apartado 1. Fuente: Artículo analizado	48
Ilustración 30 Error cometido en el apartado 3. Fuente: Artículo analizado	48
Ilustración 31 Primera parte del trabajo experimental. Fuente: Artículo analizado	49
Ilustración 32 Segunda parte del trabajo experimental. Fuente: Artículo analizado	49
Ilustración 33. Sextante. Fuente: Página web Ayuntamiento La Coruña	53
Ilustración 34 Trigonometría en el billar. Fuente: Colegio CEI Murcia	53
Ilustración 35. Descomposición fuerzas plano inclinado. Fuente: GeoGebra	54
Ilustración 36. Relación de la trigonometría y pirámides egipcias. Fuente: Egiptología	55
Ilustración 37. Ubicación del IES San Felipe Neri (Martos). Fuente: Google Maps	56
Ilustración 38. Fachada del IES San Felipe Neri. Fuente: www. sanfelipenerimartos.es	56

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Competencias de los criterios de evaluación del Bloque 1. Elaboración propia.	13
Tabla 2 Competencias de los criterios de evaluación del Bloque 3. Elaboración propia	14
Tabla 3 Competencias adquiridas en los Bloques 1 y 3. Elaboración propia	14
Tabla 4 Comparación contenidos editoriales ANAYA y SANTILLANA. Elaboración propia	16
Tabla 5 Comparación contenidos Tema 7 Trigonometría en ambas editoriales	17
Tabla 6 Contenidos comunes en ambas editoriales. Elaboración propia	18
Tabla 7 Contenidos diferentes en ambas editoriales. Elaboración propia	19
Tabla 8 Signos de las razones trigonométricas. Elaboración propia	24
Tabla 9. Relación entre objetivos generales de etapa y objetivos del área de matemáticas. Fuente: Elaboración propia	61
Tabla 10 Contenidos Bloque 1 en relación con la UD. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia	66
Tabla 11 Contenidos Bloque 3 en relación con la UD. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia	67
Tabla 12 Sesión 1 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	76
Tabla 13 Sesión 2 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	77
Tabla 14 Sesión 3 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	78
Tabla 15 Sesión 4 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	79
Tabla 16 Sesión 5 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	80
Tabla 17 Sesión 6 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	81
Tabla 18 Sesión 7 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	82
Tabla 19 Sesión 8 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	83
Tabla 20 Sesión 9 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	84
Tabla 21 Sesión 10 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	84
Tabla 22 Sesión 11 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	85
Tabla 23 Sesión 12 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia	85
Tabla 24 Criterios de evaluación, contenidos, competencias y estándares de aprendizaje evaluables. Fuente: RD 1105/2014 y Orden 14 Julio de 2016	91
Tabla 25 Criterios de calificación. Fuente: Elaboración propia	91

RESUMEN

La Trigonometría es una rama de las matemáticas, y en concreto de la geometría, que se encarga de estudiar las medidas de los ángulos. En el presente documento se va a desarrollar el Trabajo Fin de Máster (TFM) de una Unidad Didáctica de Trigonometría para estudiantes de 4º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Con la realización del presente trabajo se pondrán en práctica todos los conceptos teóricos que han sido explicados a lo largo de las asignaturas que componen el máster. Toda la normativa utilizada ha sido estudiada en la asignatura *de procesos y contextos educativos* del módulo genérico. Para el desarrollo del tema de oposición ha sido de gran ayuda los conceptos de la asignatura *Complementos de Formación disciplinar en matemáticas* del módulo específico y finalmente para la Unidad Didáctica, la experiencia vivida durante el módulo *Prácticum* en el I.E.S San Felipe Neri de Martos (Jaén), ha sido fundamental.

ABSTRACT

Trigonometry is a branch of mathematics, and specifically of geometry, which deals with the study of angle measurements. In this document we are going to develop the Master's Final Project (TFM) of a Trigonometry Didactic Unit for students of 4th ESO of Mathematics oriented to Academic Education.

This work will put into practice all the theoretical concepts that have been explained throughout the subjects that make up the master's degree. All the regulations used have been studied in the subject of educational processes and contexts of the generic module. For the development of the opposition topic, the concepts of the subject Complements of Disciplinary Training in Mathematics of the specific module have been of great help and finally, for the Didactic Unit, the experience lived during the Practicum module in the I.E.S San Felipe Neri de Martos (Jaén), has been fundamental.

Contenidos

ÍNDICE DE FIGURAS	1
ÍNDICE DE TABLAS	2
RESUMEN	3
ABSTRACT	4
1. INTRODUCCIÓN	7
2. OBJETIVOS	9
3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	10
3.1 ANÁLISIS DEL CURRÍCULO	10
3.2 ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO	15
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA: DESARROLLO DE UN TEMA DE OPOSICIÓN	20
4.1 INTRODUCCIÓN	20
4.2 LOS ÁNGULOS. DEFINICIÓN Y UNIDADES DE MEDIDA	20
4.2.1 DEFINICIÓN	20
4.2.2 UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS	21
4.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO	21
4.3.1 DEFINICIÓN DE RAZONES DE UN ÁNGULO AGUDO	21
4.3.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO	23
4.4 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRÍA	24
4.5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES	25
4.5.1 RAZONES DE LOS ÁNGULOS 0, 90, 180 Y 270	25
4.5.2 RAZONES DE LOS ÁNGULOS 30, 45 Y 60	25
4.6 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE	28
4.6.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS	28
4.6.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS	28
4.6.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180°	29
4.6.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO OPUESTO	30
4.7 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUMA, DIFERENCIA, DOBLE Y MITAD	30
4.7.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS ÁNGULO SUMA	30
4.7.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DIFERENCIA	31
4.7.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE	32
4.7.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD	32
4.8 TRANSFORMACIONES DE SUMAS EN PRODUCTOS	33
4.9 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	34
4.10 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS	35
4.11 APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA TRIGONOMETRÍA	39

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA: INVESTIGACIONES SOBRE APRENDIZAJE Y/O LA ENSEÑANZA	41
5.1 APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE NIVEL SECUNDARIA (Rotaèche y Montiel, 2016)	41
5.2 LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL TRABAJO EXPERIMENTAL EN MATEMÁTICAS: REFLEXIONES DE UNA INDAGACIÓN EN EL AULA (Naranjo y Triana, 2015)	47
6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA	51
6.1 TÍTULO	51
6.2 JUSTIFICACIÓN	51
6.2.1 JUSTIFICACIÓN CURRICULAR	51
6.2.2 JUSTIFICACIÓN SOCIAL Y/O PROFESIONAL	52
6.2.3 JUSTIFICACIÓN INTERNA	54
6.2.4 JUSTIFICACIÓN ESTÉTICA Y CULTURAL	55
6.3 CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA	56
6.3.1 SITUACIÓN GEOGRÁFICA DEL CENTRO	56
6.3.2 ASPECTOS SOCIOECONÓMICOS Y DEMOGRÁFICOS	57
6.3.3 CARACTERÍSTICAS E INSTALACIONES DEL CENTRO	57
6.4 OBJETIVOS	58
6.4.1 OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA	58
6.4.2 OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS	59
6.4.3 RELACIÓN ENTRE OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA Y OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS	61
6.4.4 OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	61
6.5 COMPETENCIAS CLAVE	62
6.6 CONTENIDOS	65
6.7 METODOLOGÍA	68
6.8 ACTIVIDADES Y RECURSOS	70
6.8.1 ACTIVIDADES	70
6.8.2 RECURSOS DIDÁCTICOS	72
6.9 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD	74
6.10 TEMPORALIZACIÓN	76
6.11 EVALUACIÓN	86
6.11.1 CRITERIOS DE EVALUACIÓN	86
6.11.2 CRITERIOS DE CALIFICACIÓN	91
7. CONCLUSIONES	92
Bibliografía	93
Referencias normativas	93
ANEXO I DE ACTIVIDADES	94

1. INTRODUCCIÓN

En el presente documento se va a desarrollar el Trabajo Final de Máster (TFM) del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas por la Universidad de Jaén, en el curso académico 2020/2021, donde se pone en práctica todo lo aprendido en las asignaturas de cada uno de los módulos que componen dicho máster.

Este trabajo corresponde a la especialidad de matemáticas y nos vamos a centrar en el desarrollo de una Unidad Didáctica de Trigonometría de un curso de 4º ESO de matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

La trigonometría es una de las ramas de las matemáticas más utilizada en la vida diaria, la cual no solo se utiliza para la construcción de edificios, sino también para la medición de distancias entre algunos puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites o por ejemplo calcular la inclinación del peralte en una carretera, entre otros. En general la trigonometría es la parte de mayor uso en la vida diaria y podrá ser observada tanto directa como indirectamente en muchas aplicaciones.

La estructura del TFM se dividirá en dos partes bien diferenciadas. La primera parte estará compuesta por los siguientes apartados.

- Fundamentación curricular: Se hará un estudio de la normativa curricular y se hará un análisis de libros de texto de diferentes editoriales con el objetivo de ver hasta qué punto se ajustan a la legislación vigente.
- Fundamentación epistemológica: Se realizará el desarrollo de un tema de oposiciones vinculado con la Unidad Didáctica. El tema de oposiciones elegido es el número 38 *“Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones”*
- Fundamentación Didáctica: Investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza. Es la parte más investigativa del trabajo pues se planteará una revisión de la literatura hasta llegar al estado de la cuestión. En este apartado se mostrarán resultados de principales errores y dificultades de los alumnos en el aprendizaje de la trigonometría o estrategias para mejorar en el aprendizaje de esta área.

Finalmente, la segunda parte del presente trabajo, la compondrá el desarrollo de una Unidad Didáctica compuesta por los siguientes apartados: objetivos, competencias clave, metodología, actividades y recursos, temporalización y evaluación. En esta Unidad Didáctica se desarrollará, como ya hemos mencionado anteriormente, el tema correspondiente a Trigonometría para estudiantes de 4º ESO.

En el desarrollo de esta Unidad Didáctica, se utilizarán diferentes metodologías para el desarrollo de los contenidos que componen el tema, propiciando la comprensión de los diferentes conceptos por parte del alumnado.

La aplicación de estas metodologías, hará que los alumnos alcancen un pensamiento más crítico descubriendo diferentes caminos conducentes hacia la solución, siendo conscientes de que no existe un método único hasta llegar a ella.

El diseño de esta Unidad Didáctica se contextualiza en el IES San Felipe Neri, en la localidad de Martos (Jaén), donde durante 6 semanas he realizado las prácticas del módulo Prácticum del presente máster, como docente en la especialidad de matemáticas.

La normativa utilizada para el desarrollo del TFM será la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de Diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del bachillerato , el decreto 111/2016, de 14 de Junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, así como la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas.

2. OBJETIVOS

Los objetivos del presente Trabajo Fin de Máster vienen descritos en la planificación del máster y pueden ser encontrados en la página web de la Universidad de Jaén (www.ujaen.es) en el apartado dedicado al Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas y son descritos a continuación:

- Potenciar una actitud positiva y crítica hacia el desarrollo de la identidad profesional docente, colaborando con los agentes del ámbito educativo y, de forma especial, con los equipos directivos de los centros docentes.
- Integrar experiencias profesionales con procesos de formación e investigación en el aula, a través de la reflexión crítica, sobre todo lo que se experimenta o se aprende.
- Propiciar una formación cultural, personal, ética y social adecuada para el ejercicio de la profesión docente con el rigor científico que se debe aplicar en el ámbito de la educación de adolescentes.
- Promover el reconocimiento, análisis y atención de las características diferenciales del alumnado, según su desarrollo evolutivo, contextos familiares, sociales y culturales de referencia.
- Conocer las competencias profesionales docentes propias de cada especialidad y su relación con las demás competencias a través de mecanismos de transversalidad.

El TFM supone el último escalón para cumplir los objetivos descritos anteriormente, ya que pondremos en práctica todos los conocimientos que hemos adquirido a lo largo del curso en las asignaturas que componen dicho máster. Con respecto a la normativa que utilizaremos para el desarrollo del TFM (fundamentación curricular), fue estudiada en la asignatura de Procesos y Contextos educativos correspondiente al módulo genérico. Por un lado, para el desarrollo del tema de oposición correspondiente a nuestra Unidad Didáctica (fundamentación epistemológica), nos basaremos en los conocimientos adquiridos en la asignatura de Complementos de Formación Disciplinar en Matemáticas del módulo específico. Por otro lado, para la fundamentación didáctica aplicaremos los conceptos adquiridos en las asignaturas de Innovación docente e iniciación a la investigación educativa y Aprendizaje I y II en matemáticas, también correspondientes al módulo específico. Finalmente para el desarrollo de la Unidad Didáctica nos basaremos en la experiencia vivida en las prácticas docentes en Centros de Secundaria del módulo Prácticum del máster.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En este apartado se hará un análisis del currículo escolar, concretamente en el curso académico en el que se centra nuestra Unidad Didáctica, y por otro lado, un análisis de los libros de textos utilizados en el aula para el desarrollo de la asignatura.

Como hemos comentado anteriormente, la Unidad Didáctica que vamos a desarrollar está orientada para alumnos y alumnas de 4º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, concretamente sobre el tema de estudio de Trigonometría.

3.1 ANÁLISIS DEL CURRÍCULO

Para hacer un análisis del currículo vigente, nos centraremos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del bachillerato. Concretamente, en el Anexo I, se exponen los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de cada una de las materias que componen la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

La asignatura en la que nos centramos es la de matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas para el curso de 4º ESO. Esta asignatura va dirigida a aquellos estudiantes que van a continuar su formación académica cursando Bachillerato.

Según el RD 1105/2014, la asignatura se dividirá en 5 bloques: Procesos, métodos y actitudes matemáticas, números y álgebra, geometría, funciones y estadística y probabilidad. Para el desarrollo de esta Unidad Didáctica se tendrán en cuenta 2 bloques: el primer bloque *“Procesos, métodos y actitudes matemáticas”* pues es transversal a los bloques restantes y el tercer bloque *“Geometría”* ya que es el que recoge el contenido referente al tema de Trigonometría.

Los contenidos que deben desarrollarse en los dos bloques anteriores son extraídos del Real Decreto 1105/2014, además se muestran los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables referentes a dichos bloques.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas--realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad 4.1. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantearse preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos,

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Ilustración 1 Bloque 1: "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas"

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Ilustración 2 Bloque 3: "Geometría"

Por otro lado, también se ha consultado la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas. En esta orden se definen los objetivos de etapa, los contenidos y los criterios de evaluación con la adquisición de distintas competencias.

Comparando el Real Decreto 1105/2014 con la Orden de 14 de julio de 2016, observamos como los criterios de evaluación están exactamente igual descritos en ambas normativas con la diferencia que en la Orden de 14 julio a esos criterios de evaluación se les asocia las competencias que deben desarrollar cada uno de ellos.

A continuación se exponen los criterios de evaluación de los bloques 1 y 3, cada uno asociado a sus respectivas competencias:

BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
CRITERIO DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA
1.1 Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
1.2 Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
1.3 Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
1.4 Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
1.5 Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
1.6 Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
1.7 Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA
1.8 Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
1.9 Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
1.10 Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
1.11 Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
1.12 Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 1 Competencias de los criterios de evaluación del Bloque 1. Elaboración propia.

BLOQUE 3: GEOMETRÍA	
CRITERIO DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA
3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT, CAA
3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT, CAA
3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 2 Competencias de los criterios de evaluación del Bloque 3. Elaboración propia

Por lo tanto, las competencias que se han desarrollado en los bloques 1 y 3 son las siguientes:

CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
CD	Competencia digital
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencia Sociales y Cívicas

Tabla 3 Competencias adquiridas en los Bloques 1 y 3. Elaboración propia

Finalmente, en la Orden de 14 de julio de 2016, se especifican una serie de capacidades que los alumnos y alumnas han podido desarrollar a través de los objetivos de etapa y les permiten:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presente en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones

que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y valorar su belleza.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) para realizar cálculos, buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

3.2 ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Los libros de texto adquieren gran importancia en la mayoría de los centros de Educación Secundaria Obligatoria, pues sirven de apoyo tanto para el alumnado como para el profesorado en el desarrollo de los contenidos matemáticos correspondientes al nivel educativo que se esté cursando.

En España las tres grandes editoriales de libros de texto para Educación Secundaria Obligatoria son:

- Hachette Livre (Anaya, Bruño y Salvat)
- Savia SM
- Santillana Educación

Tras realizar el módulo Prácticum y consultar varias editoriales para preparar el material de clase utilizado durante las 6 semanas, nos decantamos por analizar los libros de las editoriales Anaya y Santillana.

Los libros en cuestión que vamos a analizar son los siguientes:

- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºESO. Aprender es crecer en conexión castellano. Editorial ANAYA. ISBN: 9788469810699
- Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve 4º ESO Saber Hacer. Editorial SANTILLANA. ISBN: 9788468040400

Haciendo un análisis previo al tema que nos ocupa de trigonometría, observamos cómo cada uno de los libros presenta un número de temas distinto y una estructura también diferente. Luego en el índice de ambas editoriales tenemos:

ÍNDICE ANAYA	ÍNDICE SANTILLANA
1. Números reales	1. Números reales. Porcentajes
2. Polinomios y fracciones algebraicas	2. Potencias y radicales. Logaritmos
3. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	3. Polinomios y fracciones algebraicas
4. Funciones. Características	4. Ecuaciones e inecuaciones
5. Funciones elementales	5. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones
6. Semejanza. Aplicaciones	6. Áreas y volúmenes. Semejanza
7. Trigonometría	7. Trigonometría
8. Geometría analítica	8. Vectores y rectas
9. Estadística	9. Funciones
10. Distribuciones bidimensionales	10. Funciones polinómicas y racionales
11. Combinatoria	11. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas
12. Cálculo de probabilidades	12. Estadística
	13. Combinatoria
	14. Probabilidad

Tabla 4 Comparación contenidos editoriales ANAYA y SANTILLANA. Elaboración propia

Como podemos observar en la tabla anterior vemos como el tema de trigonometría, correspondiente a nuestra Unidad Didáctica, se desarrolla en ambas editoriales en el Tema 7. Otra de las semejanzas que podemos ver, es que el tema previo a trigonometría corresponde a Semejanza, tema muy importante ya que es

necesario saber aplicar semejanza en triángulos para afrontar con garantías el tema de trigonometría. Por otro lado, con respecto a las diferencias existentes en el temario de ambas editoriales, observamos como en la editorial de SANTILLANA se desarrolla el tema de “Potencias y radicales. Logaritmos” y por el contrario en la editorial ANAYA no. Finalmente, el tema de “Distribuciones bidimensionales” es propuesto por la editorial ANAYA, sin embargo por la editorial SANTILLANA no.

Una vez analizadas ambas editoriales en lo que a sus contenidos globales se refiere, haremos una comparación y un análisis del tema 7 correspondiente a Trigonometría en ambos libros de texto. La estructura de contenidos en ambas editoriales es la siguiente:

TEMA 7 TRIGONOMETRÍA ANAYA	TEMA 7 TRIGONOMETRÍA SANTILLANA
1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo	1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Relaciones trigonométricas fundamentales	2. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo
3. Utilización de la calculadora en trigonometría	3. Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°
4. Resolución de triángulos rectángulos	4. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera
5. Resolución de triángulos oblicuángulos	5. Aplicaciones de la trigonometría
6. Razones trigonométricas de 0° a 360°	
7. Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas	
8. Funciones trigonométricas. El radián	

Tabla 5 Comparación contenidos Tema 7 Trigonometría en ambas editoriales

Estudiando la editorial de **Anaya**, el tema empieza con el primer apartado de “razones trigonométricas de un ángulo agudo” donde se definen el seno, coseno y tangente de un ángulo agudo y se realiza un cálculo gráfico aproximado de estas razones trigonométricas, demostrando que las razones trigonométricas dependen del ángulo y no del triángulo. En el segundo apartado de “relaciones trigonométricas fundamentales” se definen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ y se realiza la demostración de ambas igualdades fundamentales en la trigonometría. Además en este mismo apartado se explican las relaciones trigonométricas de ángulos 30°, 45° y 60°. El tercer punto se utiliza “la calculadora en trigonometría” donde se enseña al alumnado a manejar tres unidades de medida de ángulos: DEG (Grados sexagesimales), GRA (Grados centesimales) y RAD (Radianes). Como anotar los ángulos en grados °, minutos ´ y segundos ″, además de calcular las razones trigonométricas de un ángulos con las teclas *sin*, *cos* y *tan*. En el cuarto apartado “resolución de triángulos rectángulos”, se resuelven este tipo de triángulos conociendo dos lados o conociendo

un lado y un ángulo. El quinto apartado *“resolución de triángulos oblicuángulos”* se relaciona con el apartado anterior dividiendo los triángulos oblicuángulos en 2 rectángulos y aplicando los conocimientos previos para resolverlos. En el sexto apartado *“relaciones trigonométricas de 0° a 360° ”* se utiliza la circunferencia goniométrica para calcular la razón trigonométrica de un ángulo cualquiera. En el séptimo epígrafe *“Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas”* se explica qué ocurre cuando un ángulo es mayor de 360° o el ángulo es negativo y como se calcularían sus razones trigonométricas básicas. En el octavo y último apartado de esta editorial *“Funciones trigonométricas. El radián”* se relaciona el concepto de radián con el de grados $^\circ$ y se realiza una introducción a las funciones trigonométricas básicas: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, así como el cálculo de su dominio, periodicidad y asíntotas.

Por otro lado, examinando la editorial **Santillana**, el primer apartado correspondiente a *“razones trigonométricas de un ángulo agudo”* se realiza la representación gráfica de un triángulo con sus lados y sus ángulos y se definen las relaciones trigonométricas fundamentales. En el segundo apartado *“Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo”*, se realiza la demostración de la fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y se hace un pequeño recordatorio del teorema de Pitágoras. El tercer epígrafe a tratar es *“Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° ”* dónde se demuestran las razones de un ángulo de 45° con la ayuda de un triángulo isósceles y los razones de 30° y 60° trazando la altura en un triángulo equilátero, quedando dividido en dos triángulos rectángulos cuyos ángulos son 30° y 60° . El cuarto punto *“Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera”* con la ayuda de la circunferencia goniométrica se realiza el análisis de las razones trigonométrica del cualquier ángulo diferenciando en qué cuadrante se encuentre y deduciendo el signo de sus razones. Finalmente el tema se cierra con el quinto apartado *“Aplicaciones de la trigonometría”* donde se proponen algunas actividades de aplicación relacionadas con los contenidos dados como por ejemplo *“Calcular la apotema de un pentágono sabiendo la longitud de su lado”*, etc.

Luego a modo de resumen tenemos que los contenidos comunes en ambas editoriales, son los siguientes:

CONTENIDOS COMUNES EN AMBAS EDITORIALES	Razones trigonométricas de un ángulo agudo
	Relación fundamental trigonometría $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
	Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60°
	Circunferencia goniométrica

Tabla 6 Contenidos comunes en ambas editoriales. Elaboración propia

Por otro lado, los contenidos diferentes que desarrollan Anaya y Santillana, son los siguientes:

CONTENIDOS DIFERENTES EN AMBAS EDITORIALES	Relación fundamental trigonometría $tg \alpha = sen \alpha / cos \alpha$
	Utilización de la calculadora en trigonometría
	Resolución de triángulos rectángulos
	Resolución de triángulos oblicuángulos
	Funciones trigonométricas. El radián
	Aplicaciones de la trigonometría

Tabla 7 Contenidos diferentes en ambas editoriales. Elaboración propia

A pesar de esto, los contenidos de ambas editoriales se adaptan al currículo vigente. Sin embargo se observa como en la editorial Anaya se profundiza más en determinados contenidos en los que Santillana no, como por ejemplo, el uso de la calculadora en trigonometría, resolución de triángulos e introducción a las funciones trigonométricas.

Los ejercicios y problemas propuestos en ambas editoriales presentan un factor común pues se basan en el trabajo individualista del alumnado, sin propiciar un entorno colaborativo entre ellos. El aprendizaje entre iguales conduce a alcanzar buenos resultados de aprendizaje ya que la explicación se realiza desde un mismo o similar nivel cognitivo, lo que propicia un entendimiento más inmediato y eficaz.

En definitiva, los contenidos en los dos libros de textos son bastante similares. Los ejercicios y problemas propuestos para el alumnado son bastante parecidos y ambas editoriales conceden poca importancia a los trabajos cooperativos. Se podría afirmar que la editorial Anaya, tiene una base teórica más amplia que Santillana, pero en definitiva, ambas editoriales se adaptan en sus contenidos a la normativa vigente.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA: DESARROLLO DE UN TEMA DE OPOSICIÓN

Para profundizar en el conocimiento matemático sobre la temática de nuestra Unidad Didáctica (Trigonometría), desarrollaremos el tema de oposición **“Número 38: Trigonometría plana. Resolución de triángulos”** que se encuentra entre los temas recogidos en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidad y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, recogidos en la Orden de 9 de septiembre de 1993 (BOE 226 de 21 de septiembre de 1993).

4.1 INTRODUCCIÓN

En la antigüedad se usaron los ángulos para poder orientarse en el mar, en agrimensura, etc. Cabe destacar a Hiparco (siglo II A.C) y a Tolomeo (siglo II D.C), que escribió el *Almagesto*, la colección de libros de geometría más completa de la antigüedad, e incluso construyó unas tablas de las funciones trigonométricas de medio grado en medio grado y mejoradas hasta hace unos 30 años, donde fueron sustituidas por las actuales calculadoras.

La trigonometría deriva del griego y proviene de dos palabras, *trigonom* (*triángulo*) y *metron* (*medida*). Es la parte de la matemática que estudia la manera de calcular todos los elementos de un triángulo (ángulos y lados), conociendo tres de ellos independientes entre sí y siempre que estos no sean a la vez los tres ángulos. De dicho conocimiento se puede deducir la forma del triángulo y calcular los restantes elementos.

Así, para resolver un triángulo deberemos conocer sus tres lados y sus tres ángulos, por lo que será necesario encontrar las relaciones que existen entre ellos con el fin de que a partir de tres de los datos podamos encontrar los otros tres restantes. Por último veremos problemas de aplicaciones prácticas de resolución de triángulos.

4.2 LOS ÁNGULOS. DEFINICIÓN Y UNIDADES DE MEDIDA

4.2.1 DEFINICIÓN

Se define ángulo como la región del plano limitado por dos semirrectas con el mismo origen. Se forman así dos ángulos:

- Interior: ángulo menor (parte más pequeña del plano)
- Exterior: ángulo mayor (parte más grande del plano)

Además, los ángulos tienen sentido, siendo el sentido positivo el antihorario y el sentido negativo el horario.

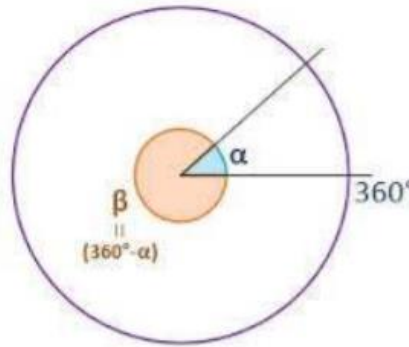


Ilustración 3 Representación del concepto de ángulo

4.2.2 UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

Las medidas que se emplean para medir ángulos o arcos de circunferencia son las siguientes:

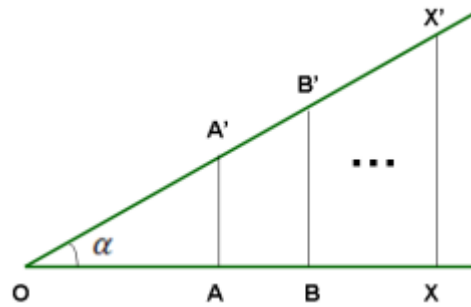
- **Grado sexagesimal:** Es igual a $1/360$ partes de una circunferencia. Esta unidad se divide a su vez en sesenta minutos y cada minuto en sesenta segundos, expresándose de la siguiente manera: $^{\circ}$ (grados), $'$ (minutos), $''$ (segundos).
- **Grado centesimal:** Es igual a $1/400$ partes de una circunferencia. Esta unidad se divide en cien minutos y a su vez cada minuto en cien segundos, expresándose dichas unidades como: g , m y s .
- **Radián:** Es la medida de un ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que el radio.

Así de esta manera, el ángulo que abarca una circunferencia completa tiene 360 grados sexagesimales, 400 grados centesimales y 2π radianes.

4.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

4.3.1 DEFINICIÓN DE RAZONES DE UN ÁNGULO AGUDO

Se dice que dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen entre sí un ángulo en común (ángulo agudo), además del ángulo recto.

**Ilustración 4 Triángulos rectángulos semejantes**

Sabiendo la longitud de los lados de los triángulos semejantes, y sabiendo además que son proporcionales, quedarán determinadas los valores de las relaciones de los lados de cualquier triángulo rectángulo con el ángulo fijado:

$$\frac{X'X}{OX'} = \frac{B'B}{OB'} = \frac{A'A}{OA'} = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\frac{OX}{OX'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'} = \text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\frac{X'X}{OX} = \frac{B'B}{OB} = \frac{A'A}{OA} = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}.$$

Luego se deduce que las razones trigonométricas dependen del ángulo y no del triángulo. Por otra parte, de las relaciones anteriores, tenemos que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}.$$

A partir de las relaciones trigonométricas fundamentales se pueden definir las siguientes:

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}},$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}},$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}.$$

4.3.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

Para deducir las razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° introducimos el concepto de circunferencia goniométrica, que se define como la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio la unidad, de forma que cada punto de dicha circunferencia define un ángulo, midiéndose con relación al eje de abscisas. De esta forma nos quedaría:

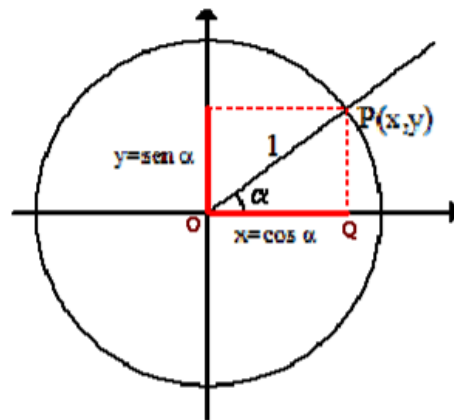
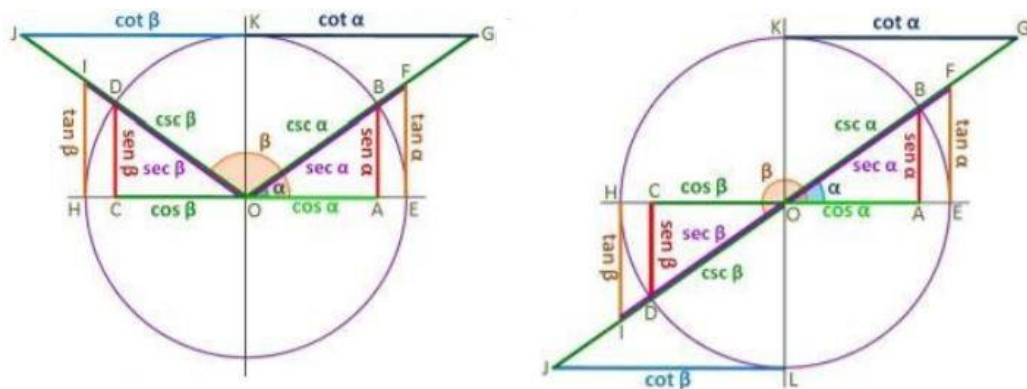


Ilustración 5 Circunferencia goniométrica

Como observamos, la circunferencia goniométrica ha quedado dividida en cuatro cuadrantes: Primer cuadrante ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), segundo cuadrante ($90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$), tercer cuadrante ($180^\circ < \alpha \leq 270^\circ$) y cuarto cuadrante ($270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$).

Además mediante la circunferencia goniométrica también podemos representar la tangente y las restantes razones trigonométricas que hemos definido en el apartado anterior.



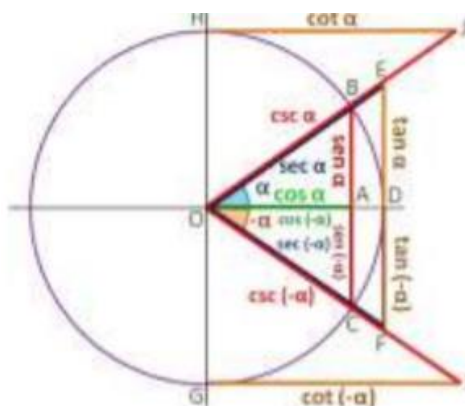


Ilustración 6 Razones trigonométricas de cualquier ángulo

Finalmente se deduce el signo de las razones trigonométricas básicas en cada uno de los cuadrantes:

	seno	coseno	tangente
I Cuadrante	+	+	+
II Cuadrante	+	-	-
III Cuadrante	-	-	+
IV Cuadrante	-	+	-

Tabla 8 Signos de las razones trigonométricas. Elaboración propia

4.4 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRÍA

A parte de las relaciones que ligan las razones trigonométricas dadas con anterioridad como:

$$tg \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}, \sec \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}, \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}, \cotg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}$$

Existen unas identidades trigonométricas, que llamamos fórmulas fundamentales y que son:

1. $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$,
2. $1 + tg^2 \alpha = \sec^2 \alpha$,
3. $1 + \cotg^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha$.

Para demostrar la primera identidad nos basaremos en las definiciones de seno y de coseno para el triángulo rectángulo de la figura 4, expuesto anteriormente:

$$\left(\frac{X'X}{OX'}\right)^2 + \left(\frac{OX}{OX'}\right)^2 = \frac{(X'X)^2 + (OX)^2}{(OX')^2}.$$

Aplicando la definición del Teorema de Pitágoras nos quedaría:

$$(X'X)^2 + (OX)^2 = (OX')^2.$$

Luego, finalmente, se demuestra que:

$$\left(\frac{X'X}{OX'}\right)^2 + \left(\frac{OX}{OX'}\right)^2 = \frac{(X'X)^2 + (OX)^2}{(OX')^2} = \frac{(OX')^2}{(OX')^2} = 1$$

Analizando la segunda identidad trigonométrica nos quedaría:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha.$$

Finalmente, demostramos la tercera relación trigonométrica:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

4.5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

4.5.1 RAZONES DE LOS ÁNGULOS 0, 90, 180 Y 270

	$\alpha = 0^\circ$ $= 0 \text{ rad}; P(1,0)$	$\alpha = 90^\circ$ $= \pi/2 \text{ rad}; P(0,1)$	$\alpha = 180^\circ$ $= \pi \text{ rad}; P(-1,0)$	$\alpha = 270^\circ$ $= 3\pi/2 \text{ rad}; P(0,-1)$
$\operatorname{sen} \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	∞	0	∞

4.5.2 RAZONES DE LOS ÁNGULOS 30, 45 Y 60

Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos 30° y 60° , construimos un triángulo equilátero de lado a , que dividiremos en dos triángulos rectángulos por medio de una de sus alturas, tal como se aprecia en la siguiente figura.

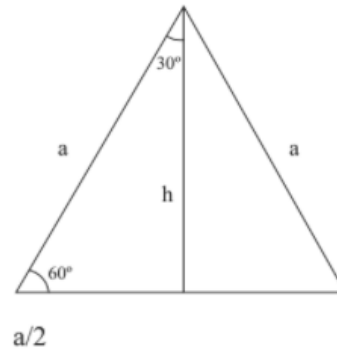


Ilustración 7 Triángulo equilátero de lado a. Elaboración propia

Analizando el ángulo de 60° tenemos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{a}.$$

Mediante el teorema de Pitágoras, calculamos h en función de lado del triángulo a :

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Finalmente, nos quedaría:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por otro lado:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, el valor de la tangente se deduce:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Analizando el ángulo de 30° tenemos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente, el valor de la tangente se calcularía como:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para calcular las razones trigonométricas de 45° , construimos un cuadrado de lado a , que posteriormente dividimos en dos triángulos rectángulos por medio de una diagonal tal como se ve en la siguiente figura:

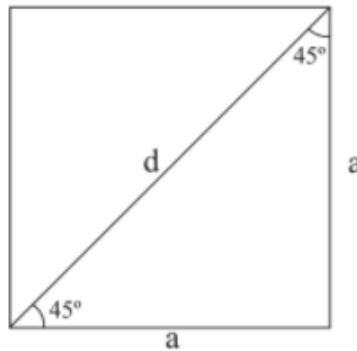


Ilustración 8 Cuadrado de lado a . Elaboración propia

Calculando el valor de la diagonal d mediante el teorema de Pitágoras, nos quedaría:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

$$d = a\sqrt{2}.$$

Analizando las relaciones trigonométricas de este ángulo tenemos:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1.$$

4.6 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

En este apartado veremos cómo podemos poner las razones trigonométricas de un ángulo de cualquier cuadrante en función de las razones trigonométricas de uno del primero.

4.6.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Se dice que dos ángulos son complementarios cuando se cumple que: $\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Donde se deduce $\beta = 90^\circ - \alpha$

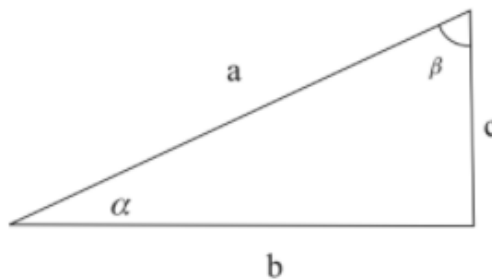


Ilustración 9 Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Observando la figura anterior podemos deducir las razones trigonométricas de los ángulos α y β

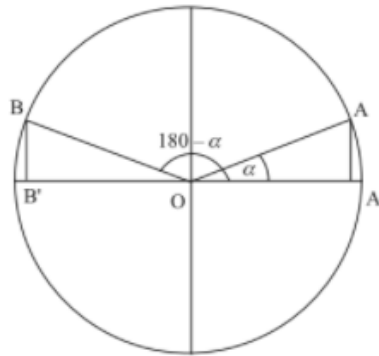
$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a} = \cos \beta \rightarrow \text{sen } \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \text{sen } \beta \rightarrow \cos \alpha = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{c}{b} = \text{cotg } \beta \rightarrow \text{tg } \alpha = \text{cotg}(90^\circ - \alpha)$$

4.6.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos son suplementarios cuando suman $180^\circ (\pi \text{ radianes})$. Así calcularemos las razones trigonométricas del ángulo $180^\circ - \alpha$ en función de las de α .

**Ilustración 10 Razones trigonométricas de ángulos suplementarios**

Los triángulos OAA' y OBB' son iguales, por lo que tendremos:

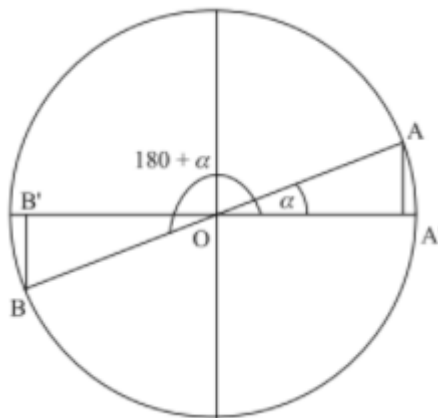
$$\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = B'B = A'A = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = OB' = -OA' = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)}{\cos (180^\circ - \alpha)} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

4.6.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180°

Haciendo las mismas consideraciones de igualdad de triángulos que en los apartados anteriores tenemos que:

**Ilustración 11 Razones trigonométricas de ángulos que difieren 180°**

$$\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = B'B = -A'A = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (180^\circ + \alpha) = OB' = -OA' = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha)}{\cos (180^\circ + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

4.6.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO OPUESTO

La representación gráfica de la reducción de un ángulo del cuarto cuadrante al primero es la siguiente:

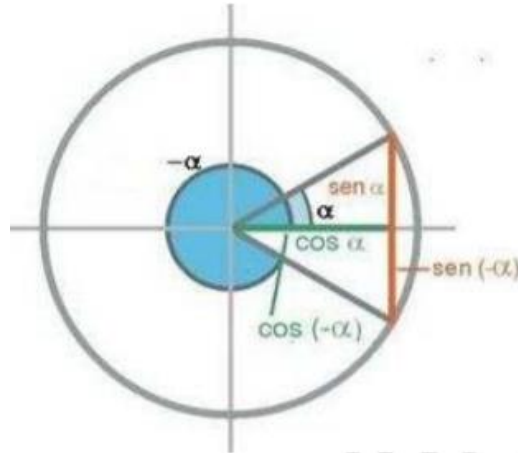


Ilustración 12 Razones trigonométricas del ángulo opuesto

4.7 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUMA, DIFERENCIA, DOBLE Y MITAD

4.7.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS ÁNGULO SUMA

Para realizar esta demostración nos apoyaremos en la siguiente figura, donde tenemos tres triángulos rectángulos.

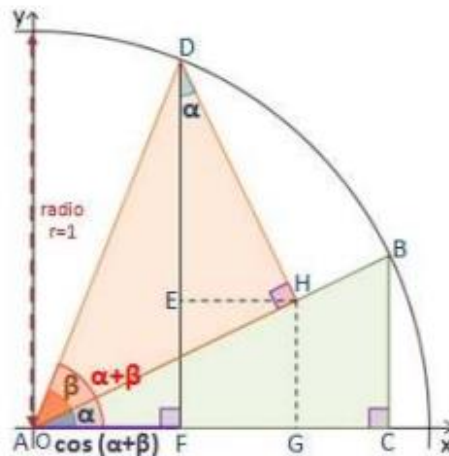


Ilustración 13 Razones trigonométricas del ángulo suma. Elaboración propia

Observando la figura tenemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{HG}{AH} = \frac{EH}{DH},$$

$$\cos \alpha = \frac{AG}{AH} = \frac{ED}{DH'}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{DH}{AD},$$

$$\cos \beta = \frac{AH}{AD}.$$

Por otro lado:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{FD}{AD} = \frac{ED + HG}{AD} = \frac{ED}{AD} + \frac{HG}{AD} = \cos \alpha \cdot \frac{DH}{AD} + \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{AH}{AD},$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AF}{AD} = \frac{AG - FG}{AD} = \frac{AG}{AD} - \frac{FG}{AD} = \cos \beta \cdot \frac{AG}{AH} - \operatorname{sen} \beta \cdot \frac{HG}{AH},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \beta \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \beta \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

4.7.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DIFERENCIA

Utilizando las fórmulas obtenidas en el apartado anterior del ángulo suma tendremos:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta),$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta),$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta.$$

Y para la tangente tendremos

$$tg(\alpha - \beta) = tg(\alpha + (-\beta)) = \frac{tg \alpha + tg(-\beta)}{1 - tg \alpha \cdot tg(-\beta)},$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha \cdot tg \beta}.$$

4.7.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Utilizando las fórmulas del ángulo suma y haciendo $\beta = \alpha$, tenemos:

$$\text{sen } 2\alpha = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha = 2\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha,$$

$$tg 2\alpha = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg \alpha + tg \alpha}{1 - tg \alpha \cdot tg \alpha} = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}.$$

4.7.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Si tomamos las ecuaciones del coseno del ángulo doble y la primera fórmula fundamental tenemos:

$$1 = \text{sen}^2 a + \cos^2 a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a.$$

Si sumamos y restamos ambas fórmulas nos quedará:

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a,$$

$$1 - \cos 2a = 2\text{sen}^2 a.$$

Despejando $\text{sen } a$ y $\cos a$, y haciendo el cambio $\alpha = 2a$, tendremos:

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

4.8 TRANSFORMACIONES DE SUMAS EN PRODUCTOS

Si utilizamos las fórmulas de los ángulos suma y diferencia obtenidas anteriormente:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta + \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta.$$

Si las sumamos y las restamos nos quedaría:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta.$$

Haciendo lo mismo para las fórmulas del coseno:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cdot \cos \alpha - \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \alpha,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta.$$

Tendremos:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta.$$

Si ahora hacemos el cambio $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$, llegamos a que $\alpha = \frac{A+B}{2}$ y $\beta = \frac{A-B}{2}$

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \cdot \text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen} \frac{A-B}{2},$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen} \frac{A-B}{2}.$$

4.9 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

El triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto. En este triángulo el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa, a , y los otros dos lados catetos, b y c .

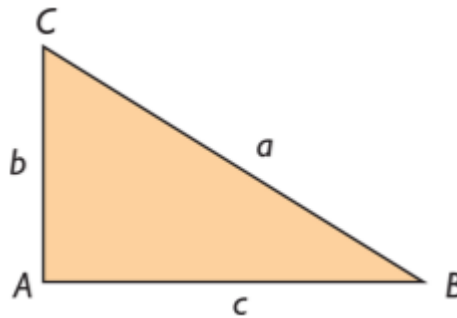


Ilustración 14 Resolución de triángulos rectángulos

Podemos aplicar en estos triángulos:

1. Suma de ángulos: $B + C = 90^\circ$
2. Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$
3. Razones trigonométricas.

Para resolver un triángulo rectángulo, necesitamos tener dos datos, en el que uno de ellos al menos sea el valor de un lado:

1. Conocido los catetos (b y c): $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, $B = \arctg\left(\frac{b}{c}\right)$, $C = 90^\circ - B$.
2. Conocido un cateto y la hipotenusa (b y a): $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $B = \arcsen\left(\frac{b}{a}\right)$, $C = 90^\circ - B$.
3. Conocido un ángulo e hipotenusa (B y a): $b = a \cdot \sen B$, $c = a \cdot \cos B$, $C = 90^\circ - B$.
4. Conocido ángulo y cateto contiguo (B y c): $b = c \cdot \tg B$, $a = c / \cos B$, $C = 90^\circ - B$.
5. Conocido ángulo y cateto opuesto (B y b): $c = b / \tg B$, $a = b / \sen B$, $C = 90^\circ - B$.

4.10 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Para resolver triángulos no rectángulos no podemos aplicar el teorema de Pitágoras ni las razones trigonométricas fundamentales, sólo el teorema de la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera. Se necesitan, por lo tanto, dos teoremas nuevos:

- *Teorema del coseno (o de Pitágoras generalizado)*

$$(1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$(2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$(3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

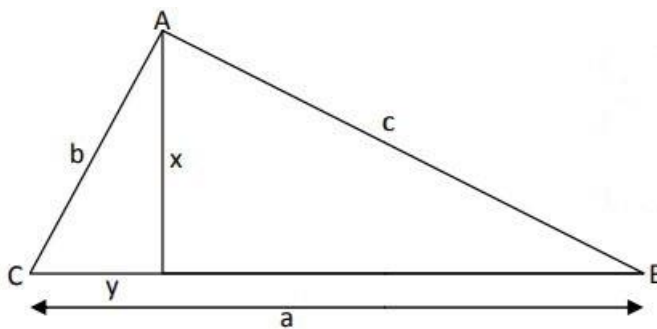


Ilustración 15 Teorema del coseno

Si en el triángulo se cumple que $A = 90^\circ$:

- (1) *Teorema de Pitágoras*

$$(2) \cos B = \frac{c}{a}$$

$$(3) \cos C = \frac{b}{a}$$

Demostración:

Dividimos el triángulo anterior en dos triángulos rectángulos por medio de una de sus alturas, tal y como se muestra en la figura 15, entonces se cumple:

$$x = b \cdot \operatorname{sen} C,$$

$$y = b \cdot \cos C,$$

$$c^2 = x^2 + (a - y)^2 = (b \cdot \operatorname{sen} C)^2 + (a - b \cdot \cos C)^2,$$

$$c^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 C + a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C,$$

$$c^2 = b^2 (\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + a^2 - 2ab \cos C,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- *Teorema del seno*

Se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Demostración:

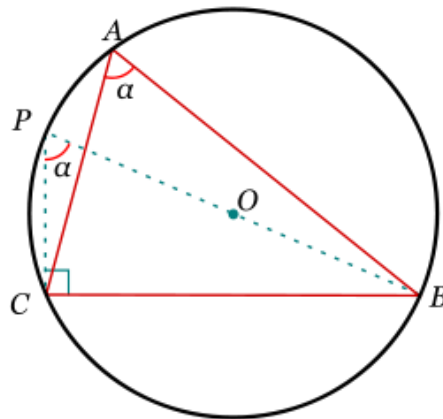


Ilustración 16 Teorema del seno

Dado el triángulo ABC, denotamos por O su circuncentro y dibujamos su circunferencia circunscrita. Prolongando el segmento BO hasta cortar la circunferencia, se obtiene un diámetro BP. Ahora el triángulo PBC es recto, puesto que BP es un diámetro y además los ángulos A y P son iguales, porque ambos son ángulos inscritos que abren el segmento BC. Por definición de la función trigonométrica seno, se tiene:

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} P = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{2R}.$$

Haciendo lo mismo para los lados b y c, se tiene:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{2R},$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{2R}.$$

Despejando el valor de $2R$ en las tres ecuaciones anteriores e igualando, tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Una vez demostrados los teoremas del seno y del coseno, se presentan varios casos en la resolución de triángulos no rectángulos:

1. Conocemos los tres lados: a, b y c

Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \rightarrow B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right),$$

$$C = 180^\circ - B - A.$$

Se cumple que siempre existirá la solución $C > 0$, si el lado mayor es menor que la suma de los otros dos y el lado menor es mayor que la resta de los otros dos.

2. Conocemos un lado y dos ángulos

Aplicando el teorema del seno:

$$A = 180^\circ - B - C,$$

$$b = a \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

$$c = a \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

En este caso siempre existe una solución.

3. Conocemos dos lados y ángulo comprendido (a,b y C)

Aplicando el teorema del coseno:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Aplicando el teorema del seno:

$$B = \arcsen\left(\frac{b \sen C}{c}\right),$$

$$A = 180^\circ - B - C.$$

Siempre existe una solución.

4. Conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (a,b y A)

Este caso que se presenta es el más complejo pues el problema puede no tener solución, puede tener una o incluso dos:

$$B = \arcsen\left(\frac{b \cdot \sen A}{a}\right).$$

a) Si $a < b$ hay que considerar 3 opciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a < b \cdot \sen A, \text{ entonces no existe solución,} \\ a = b \cdot \sen A; B = 90^\circ, \text{ existe una solución,} \\ a > b \sen A; \sen B < 1; \text{ dos soluciones } \left\{ \begin{array}{l} B_1 > A \text{ y } C_1 = 180 - B_1, \\ B_2 = 180^\circ - B_1, C_2 = 180^\circ - B_2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

b) Si $a = b$, entonces $B = A$ y $C = 180^\circ - 2A$ (no existe solución si $A \geq 90^\circ$).

c) Si $a > b$, existe solución única:

$$B = \arcsen\left(\frac{b \cdot \sen A}{a}\right),$$

Con la solución que haga $B < A$ y $C = 180^\circ - B - A$.

4.11 APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA TRIGONOMETRÍA

Las aplicaciones geométricas de la trigonometría, así como las de los teoremas vistos anteriormente son muy amplias. En este apartado veremos algunas aplicaciones prácticas:

- **Ejemplo 1: Cálculo de la altura de un edificio**

Conociendo un ángulo α y la distancia horizontal d desde la que se observa el edificio, tenemos:

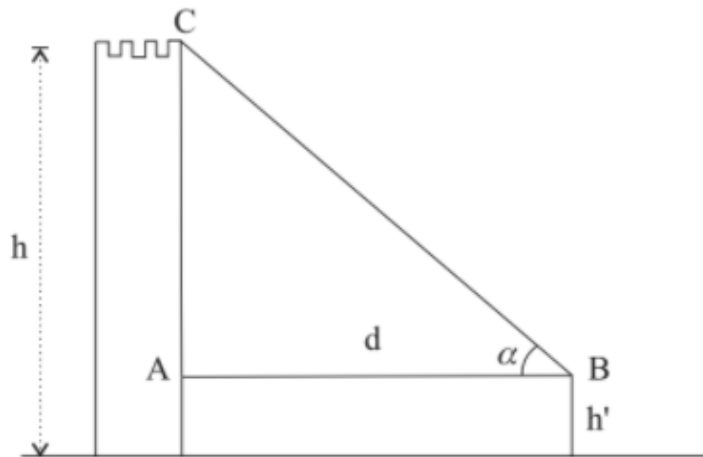


Ilustración 17 Cálculo de la altura de un edificio

Para calcular la altura h del edificio, con un teodolito de altura h' , se mide la distancia d de separación de la vertical del aparato de medida al pie de la torre y el ángulo de inclinación α , que forma la horizontal del aparato con la visual dirigida al punto más alto del edificio. De esta forma el valor de la distancia AC es fácilmente calculable:

$$AC = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Luego finalmente para calcular la altura del edificio, basta con sumar la altura del teodolito:

$$h = h' + d \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

- **Ejemplo 2: Cálculo del área de un polígono regular de n lados de longitud l**

En este caso, calcularemos el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia conociendo la longitud de sus lados.

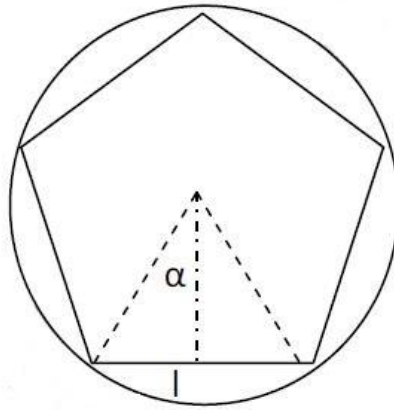


Ilustración 18 Cálculo del área de un pentágono regular

El valor del ángulo α , para todo polígono regular inscrito en una circunferencia viene dado por:

$$\alpha = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}.$$

Sabiendo el valor del ángulo α , y el valor del lado del pentágono que también es conocido, podemos calcular la apotema mediante:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l/2}{ap} \rightarrow ap = \frac{l/2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Luego el área del polígono regular de n lados será:

$$area = \frac{perimetro \cdot ap}{2} = \frac{n \cdot l \cdot \frac{l/2}{\operatorname{tg} \alpha}}{2} = \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{180}{n} \right)}.$$

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA: INVESTIGACIONES SOBRE APRENDIZAJE Y/O LA ENSEÑANZA

El área de didáctica de las matemáticas se centra en la investigación de cómo aprenden los alumnos y alumnas las matemáticas y en el análisis de los posibles errores en el proceso enseñanza-aprendizaje. Para realizar esta fundamentación, estudiaremos los problemas que presentan los estudiantes a la hora de aprender e interpretar los conceptos relacionados con el presente trabajo fin de máster: los ángulos y la trigonometría. En este apartado se hará un análisis de dos artículos de investigación para profundizar más en el tema que nos ocupa.

Los dos artículos de investigación en los que nos hemos centrado son los siguientes:

1. Rotaache Guerrero, Rosa Araceli y Montiel Espinosa, Gisela (2016). Aprendizaje del concepto de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. DOI: 10.24844/EM2901.07
2. Naranjo Triana, William Eduardo y Triana Tobar, María Angélica (2015). Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas: Reflexiones de una indagación en el aula. Revista Ejes, 3, pp. 67-73. Código ID: 9816

Estas dos investigaciones científicas se centran en alumnos de educación secundaria, lo cual es muy apropiado para el desarrollo de nuestra Unidad Didáctica ya que estará orientada para estudiantes de 4º ESO.

5.1 APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE NIVEL SECUNDARIA (Rotaache y Montiel, 2016)

Este artículo constituye el análisis de los resultados de una investigación científica cuyo objetivo fue que los estudiantes aprendieran el concepto de ángulo.

En lo que a estudiantes mexicanos se refiere el concepto de ángulo se empieza a estudiar en el cuarto grado de educación primaria y se termina de asentar durante la secundaria cuando empiezan a usar las escuadras y los cartabones (ángulos de 30° , 45° y 60°), aunque presentan ciertas dificultades pues no son capaces de distinguir una de la otra.

Otro de los errores comunes que presentan los estudiantes es a la hora de medir ángulos en una circunferencia con un transportador de ángulos, ya que lo hacen como si estuvieran midiendo una distancia lineal, pero en este caso es midiendo la longitud del arco de circunferencia con el transportador.

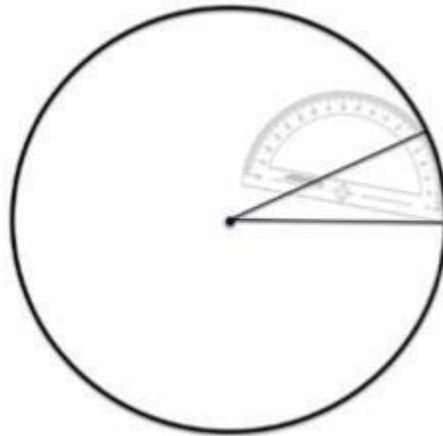


Ilustración 19 Incorrecta medición de ángulos. Fuente: Artículo analizado

Para la realización del estudio se aplicó una metodología basada en la Ingeniería Didáctica que se dividía en 4 fases: Análisis preliminar, diseño y experiencia didáctica, análisis a posteriori y conclusiones.

Análisis preliminar

Numerosos autores, entre los que destacan Mitchelmore y White (2000), plantean que los alumnos construyen el concepto de ángulo a través de sus experiencias físicas. En el sistema de educación de México el concepto de ángulo tiene dos momentos claves: en el cuarto grado de educación primaria (alumnos de 9 años) y el primer curso de educación secundaria (alumnos de 12 años), como se ha comentado anteriormente.

En la educación primaria, el concepto se trabaja como “partes de una vuelta” asociándole a este giro el ángulo y asignándole la medida de grados. En secundaria se parte de este significado de ángulo como giro y se empiezan a introducir elementos para medirlos como el transportador de ángulos y para realizarlos como el compás. Por otra parte se avanza en como clasificarlos e identificarlos en figuras geométricas (paralelogramos, triángulos, etc.).

Diseño y experiencia didáctica

La experiencia fue dividida en seis partes (SP1, SP2,...SP6) con la intención de que los estudiantes realizaran diferentes actividades relacionadas con el concepto de ángulo.

Se utilizaron materiales como: micas circulares transparentes, chinchetas, folios y cartulinas y rotuladores. Las chinchetas permitían que los alumnos girasen los folios a través de las micas circulares transparentes.

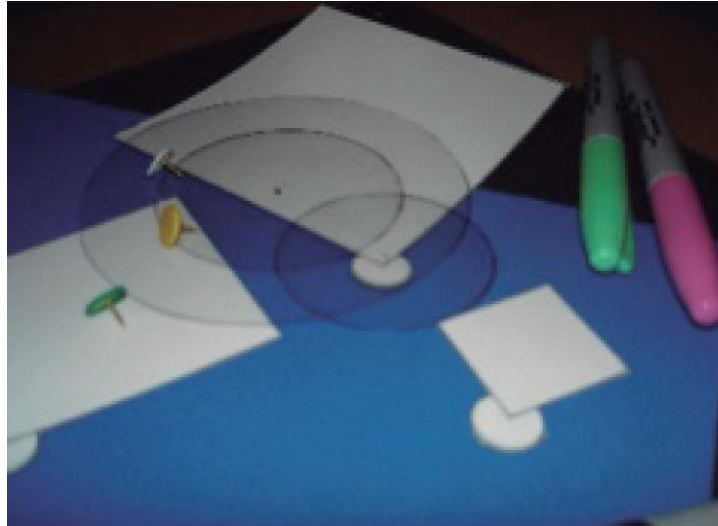


Ilustración 20 Materiales utilizados en el estudio

Secuencia Parte 1 (SP1)

Mediante un polígono conocido para los estudiantes como es el cuadrado, la actividad trata de ver el número de veces que puede girar el cuadrado para cubrir la circunferencia.

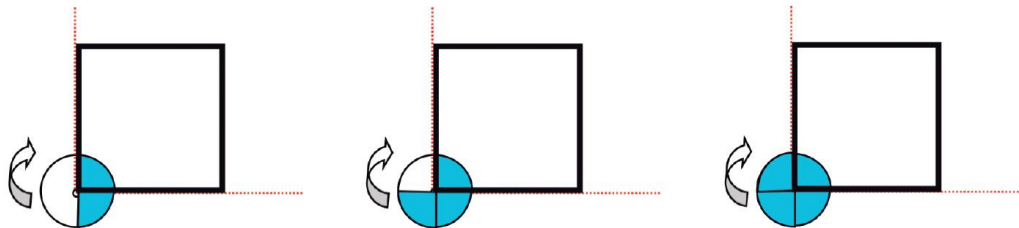


Ilustración 21 Secuencia parte 1 SP1. Fuente: Artículo analizado

Secuencia Parte 2 a 4 (SP2 a SP4)

Estas tres secuencias son muy similares en funcionamiento a la primera. En ellas con un triángulo correspondiente a la mitad del cuadrado anterior, un triángulo equilátero y un triángulo mitad del equilátero se trata de observar el número de veces que estas tres figuras pueden cubrir la circunferencia (6, 8 y 12 veces)



Ilustración 22 Secuencia parte 2 SP2. Fuente: Artículo analizado

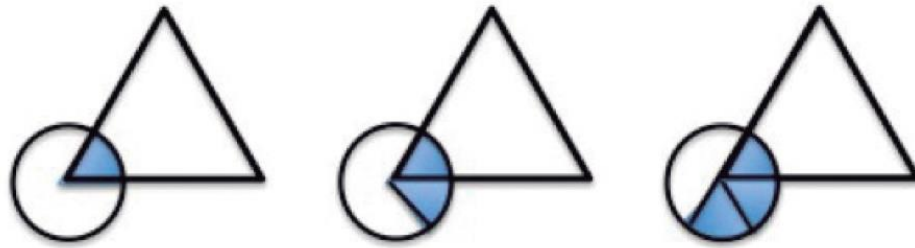


Ilustración 23 Secuencia parte 3 SP3. Fuente: Artículo analizado

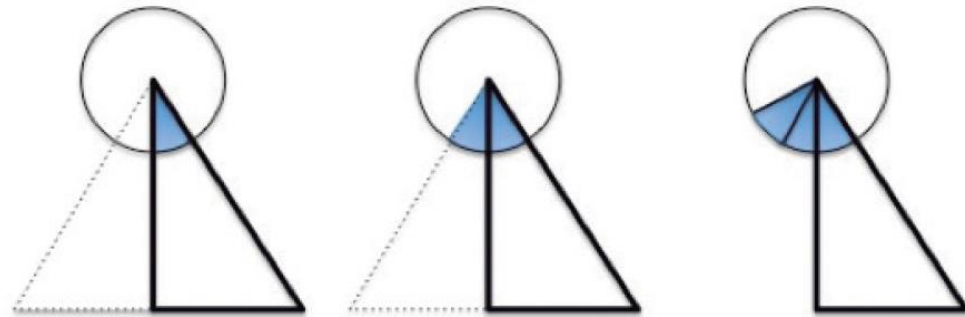


Ilustración 24 Secuencia parte 4 SP4. Fuente: Artículo analizado

Secuencia Parte 5 y 6 (SP5 y SP6)

En esta parte final de la experiencia didáctica, en la secuencia Parte 5 (SP5) los estudiantes tienen que relacionar las figuras utilizadas durante la experiencia didáctica con el giro realizado con cada una de ellas. Se pretende sacar conclusiones sobre como los estudiantes construyen e interiorizan el concepto de ángulo. Para ello se les pedía realizar una ficha como la siguiente:

Relaciona ambas columnas con una línea:

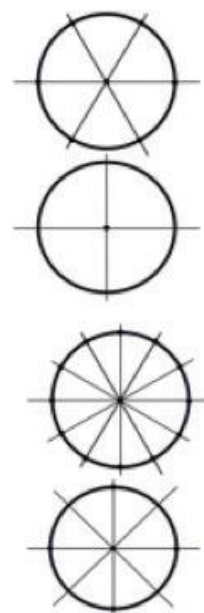
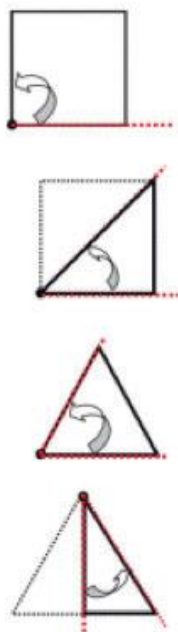


Ilustración 25 Identificar cada figura con el ángulo girado. Fuente: Artículo analizado

Finalmente en la SP6, los estudiantes tenían que escribir en un papel y responder a la pregunta que le lanzo la profesora: “¿Cómo definirían un ángulo?”

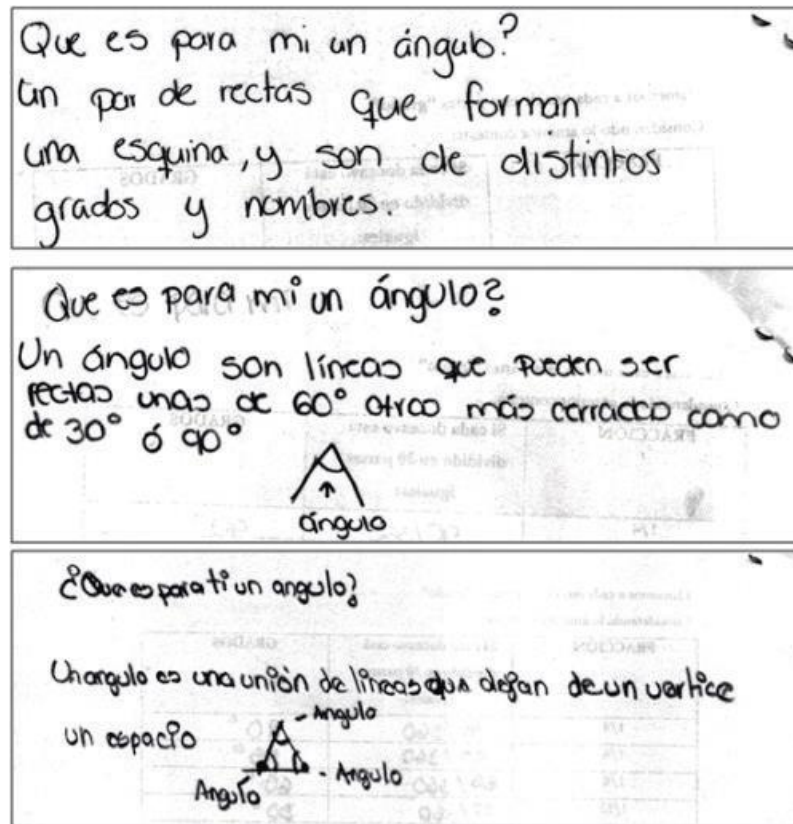


Ilustración 26 Ejemplo de respuestas a la pregunta. Fuente: Artículo analizado

Análisis a posteriori

En esta fase del estudio se analizaron todas las respuestas que se obtuvieron del concepto de ángulo y se clasificaron según al concepto al que estaban relacionadas. Las categorías fueron las siguientes:

1. Líneas rectas unidas por un punto.
2. Relación con figuras geométricas.
3. Relación con fracciones.
4. Expresiones relacionadas a una idea concreta (abertura medida en grados, partes de una circunferencia, etc.)

Todos los alumnos respondieron a la pregunta, excepto un alumno que respondió que no sabía definir el concepto de ángulo. En base al análisis preliminar realizado al inicio del estudio, al preguntarles a los estudiantes por el concepto de ángulo, recordaron esquemas mentales que hacen referencia a líneas rectas, puntos de encuentro y aberturas más que a los giros realizados durante las secuencias de la experiencia didáctica.

Conclusiones

La conclusión principal que se obtiene de la experiencia didáctica es que los estudiantes sólo logran construir algunos significados angulares e identifican y acotan la angularidad, más que el concepto de ángulo. Otro hecho significativo que arroja el estudio es que los alumnos confunden el concepto de “transportador” y lo llaman “transformador”, al instrumento para medir ángulos.

Los autores consideran que durante la realización de la secuencias se debería de poner más atención en el comportamiento de los estudiantes pues el concepto de ángulo no se aprende de una vez y por todas, y que no se aprendió completamente en primaria, sino que es un concepto que se va moldeando y terminando de interiorizar con el paso de los años y de los cursos académicos.

5.2 LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL TRABAJO EXPERIMENTAL EN MATEMÁTICAS: REFLEXIONES DE UNA INDAGACIÓN EN EL AULA (Naranjo y Triana, 2015)

El objetivo del presente artículo de investigación es identificar los problemas de del proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de razón trigonométrica. En este estudio se detectó que la enseñanza basada en la relación de ejercicios que suponían una rutina repetitiva de aplicación de fórmulas y teoremas generaba problemas de aprendizaje y poca comprensión del concepto de razón trigonométrica. Se propone una metodología de enseñanza, con la ayuda de GeoGebra, para comprender dicho concepto.

La experiencia didáctica se centra en las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente de ángulos agudos, ya que según opinión del autor, son la base para comprender el resto de conceptos trigonométricos.

Dificultades que presentan los estudiantes

Tras haber explicado el concepto de razón trigonométrica, se le propuso a un grupo de alumnos compuesto por 41 estudiantes, el siguiente ejercicio que constaba de 3 apartados:

- Apartado 1: Resolver un triángulo rectángulo, hallando la longitud de sus 3 lados y la medida de sus 3 ángulos.

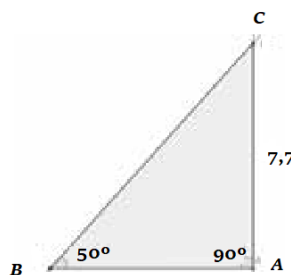


Ilustración 27 Apartado 1 problema propuesto. Fuente: Artículo analizado

- Apartado 2: Dada una razón trigonométrica, construir un triángulo rectángulo que la representa y al mismo tiempo resolverlo.

$$\text{Tan}(A) = \frac{5}{3}$$

Ilustración 28 Apartado 2 problema propuesto. Fuente: Artículo analizado

- Apartado 3: Desde la última altura de un edificio, una persona observa un automóvil con un ángulo del 30° . ¿Qué distancia hay del automóvil a la base del edificio? Recuerde que la altura de éste son 206m

Las respuestas observadas en cada uno de los apartados fueron las siguientes:

- En el primer apartado despejan la incógnita de manera incorrecta para calcular el valor del cateto:

$$\begin{aligned} \tan 50^\circ &= \frac{7,7}{c} \\ (7,7) \cdot \tan 50^\circ &= c \\ (7,7) \cdot 1,19 &= c \\ c &= 9,16 \end{aligned}$$

Ilustración 29 Error cometido en el apartado 1. Fuente: Artículo analizado

- En el segundo apartado al construir el triángulo rectángulo confunden el cateto opuesto con el cateto contiguo.
- En el tercer apartado, cuando usan las razones trigonométricas, los estudiantes confunden lados con ángulos.

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{206 \text{ m}}{x} \\ \tan x &= \frac{206 \text{ m}}{A} \\ \tan x &= \frac{206 \text{ m}}{30^\circ} \\ \tan x &= 6,8 \\ \tan^{-1} \tan x &= \tan^{-1} 6,8 \\ x &= 81,6 \end{aligned}$$

Ilustración 30 Error cometido en el apartado 3. Fuente: Artículo analizado

Observando estas respuestas, se puede afirmar que el planteamiento de los autores para el aprendizaje de las razones trigonométricas no fue el más adecuado, debido a los errores cometidos cuando se resolvían los triángulos rectángulos propuestos en los ejercicios anteriores. Se diseñó una secuencia de actividades que ayudaran a los estudiantes a una mejor comprensión de las razones trigonométricas básicas.

Trabajo experimental realizado

El trabajo de investigación se basa en el uso del software matemático GeoGebra. En la primera parte del estudio se les presenta a los estudiantes un triángulo rectángulo virtual realizado con este software, con la idea de que los alumnos vean la relación entre la longitud del cateto opuesto a 30° y la longitud de la hipotenusa (la mitad).

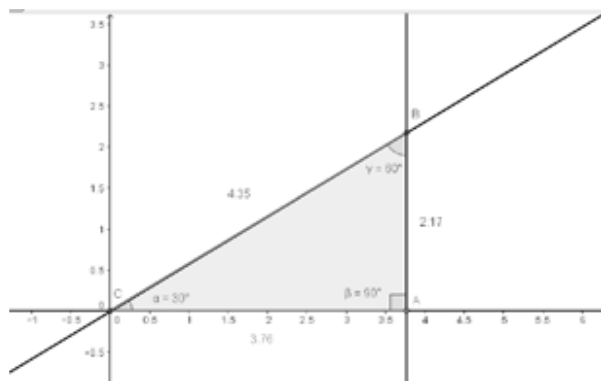


Ilustración 31 Primera parte del trabajo experimental. Fuente: Artículo analizado

Mediante la experimentación con objetivos virtuales, los estudiantes pueden modificar el tamaño del triángulo propuesto y darse cuenta que analizando el ángulo de 30° la relación entre la longitud del cateto opuesto y la hipotenusa siempre será la mitad sea cual sea el triángulo, pudiendo deducir que las razones son independientes de los triángulos.

En la segunda parte, se les presenta el siguiente triángulo virtual, con la intención de que los estudiantes recojan en una hoja, sus conjeturas y deducciones en base a lo realizado en la primera parte del estudio (relación entre longitudes de catetos e hipotenusa, etc. con los ángulos del triángulo rectángulo)

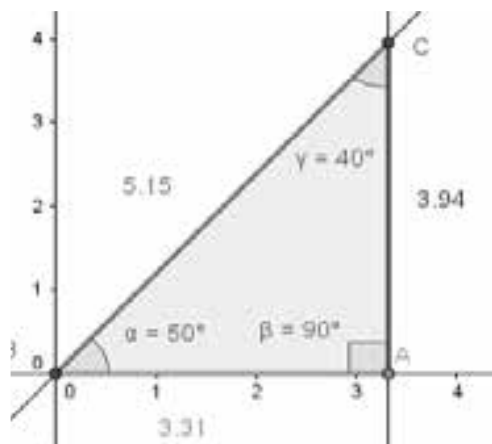


Ilustración 32 Segunda parte del trabajo experimental. Fuente: Artículo analizado

Conclusiones

Mediante este trabajo de indagación en el aula se han puesto de manifiesto los numerosos problemas que presentan los alumnos con las razones trigonométricas cuando el método de enseñanza se basa en trabajar de forma repetitiva aplicando fórmulas y teoremas para resolver triángulos rectángulos.

Los resultados de las actividades propuestas con GeoGebra, demuestran que la experimentación con objetos virtuales favorece el proceso de aprendizaje de un concepto tan abstracto como es el de razón trigonométrica, a la vez que permite al profesorado aplicar nuevas técnicas de enseñanza y transformar la enseñanza de las matemáticas en el aula.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

6.1 TÍTULO

La siguiente Unidad Didáctica recibe el nombre de “Unidad Didáctica Trigonometría” y se enmarca dentro de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO

6.2 JUSTIFICACIÓN

6.2.1 JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

A diferencia del apartado de fundamentación curricular, en este apartado, se hará solamente un análisis de los conceptos que pertenecen al bloque 3 de Geometría. Por otro lado, todos los contenidos pertenecientes al bloque 3, no serán desarrollados en la presente Unidad Didáctica, ya que no están relacionados con la trigonometría sino con la geometría analítica en el plano (Vectores, ecuaciones de la recta, etc.)

Según el del Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre y la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, los contenidos que deben desarrollarse en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en el curso de 4º ESO en el bloque 3 de Geometría, y que están relacionados expresamente con la trigonometría como hemos comentado anteriormente son:

1. *“Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes”*
2. *“Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos”*
3. *“Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes”*
4. *“Semejanza. Figuras semejantes. Razones entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes”*
5. *“Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas”*

Los criterios de evaluación que se asocian a estos contenidos, pueden encontrarse también en el Real Decreto 1105/2014 y son los siguientes:

“3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.” CMCT, CAA

“3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.” CMCT, CAA

Finalmente, también en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de Diciembre, se especifican los estándares de aprendizaje evaluables de los criterios de evaluación que se asocian a los contenidos expuestos anteriormente:

“1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.”

“2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.”

“2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.”

“2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas”

“3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.”

Las competencias que desarrollarán los alumnos a través de la presente Unidad Didáctica serán las siguientes:

1. CMCT: Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología.
2. CAA: Competencia de aprender a aprender.

6.2.2 JUSTIFICACIÓN SOCIAL Y/O PROFESIONAL

La trigonometría está presente en numerosos aspectos tanto de la ciencia como de nuestra vida cotidiana debido a las medidas tan precisas que se obtiene mediante su utilización.

Con respecto a la ciencia una de las aplicaciones más importantes de la trigonometría es en el campo de la astronomía pues se pueden calcular distancias entre planetas u otros parámetros planetarios como el radio de dichos cuerpos astronómicos mediante el método de la triangulación, en el que los lados del triángulo corresponden a las distancias que queremos medir.

Otro de los aspectos de la ciencia con profunda importancia de la trigonometría es la arquitectura, pues numerosos aspectos de las construcciones arquitectónicas se basan en ella tales como los ángulos de las paredes de los edificios o los ángulos de inclinación de las cubiertas del tejado para una eficaz evacuación del agua de lluvia.

Además, otra de las aplicaciones más importantes de la trigonometría, es en el campo de la navegación, cuando se creó un instrumento denominado sextante que permitía calcular distancias triangulando con el Sol. Actualmente este sistema se sustituyó por satélites también basados en la trigonometría.

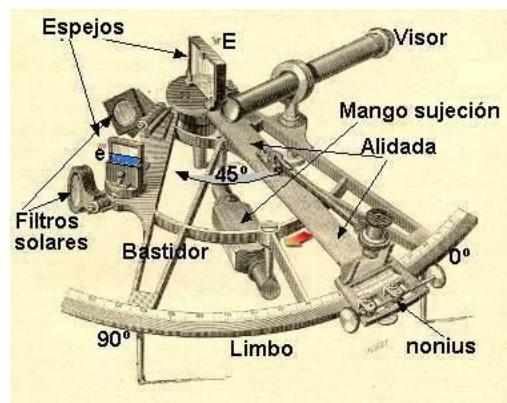


Ilustración 33. Sextante. Fuente: Página web Ayuntamiento La Coruña

Por otro lado, con respecto a la vida cotidiana, un juego de mesa como el billar se basa también en el uso de esta área de las matemáticas para determinar las trayectorias de las bolas que cada jugador tenga presente en su estrategia. Estas trayectorias están relacionadas con los ángulos del rebote de las bolas en la pared, definiendo el movimiento de cada uno de los jugadores de la partida.



Ilustración 34 Trigonometría en el billar. Fuente: Colegio CEI Murcia

Como se observa en la figura, para que la bola blanca se desplace de un punto a otro del tablero sin tocar a la bola roja, es necesario golpear la bola blanca bajo un ángulo determinado α

6.2.3 JUSTIFICACIÓN INTERNA

El conocimiento de los principales conceptos del tema de trigonometría de 4º ESO matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, es fundamental para afrontar con garantías los contenidos que se desarrollarán con posterioridad en el presente curso académico, así como en cursos académicos posteriores y en diferentes asignaturas de ciencias.

El tema de geometría analítica en el plano de 4º ESO desarrolla el concepto de vector y las principales operaciones básicas con vectores. La relación de este tema con la trigonometría existe en varios apartados del mismo, como por ejemplo calcular las componentes en x e y sabiendo el ángulo que forma el vector con la horizontal, cálculo del producto escalar de dos vectores en el que es necesario el cálculo del coseno del ángulo que forman o calcular el ángulo que forman dos vectores siendo necesario aplicar la inversa del coseno para hallar dicho ángulo.

Además, en cursos posteriores de la asignatura de matemáticas, como en primero o segundo de bachillerato, se explicará el tema de funciones y dentro del mismo se desarrollarán las funciones trigonométricas y en el que será necesario tener afianzados los conceptos de trigonometría básica para poder deducir dominio e imagen de las funciones trigonométricas, puntos de corte con los ejes, máximos y mínimos, etc.

Finalmente, en otras asignaturas de ciencias diferentes a las matemáticas, como por ejemplo física, en la parte de física mecánica, se estudian los planos inclinados, donde es muy necesario dominar los conceptos de trigonometría pues generalmente se requiere la descomposición de fuerzas y velocidades a través de ángulo que forma el plano para resolver el sistema mecánico.

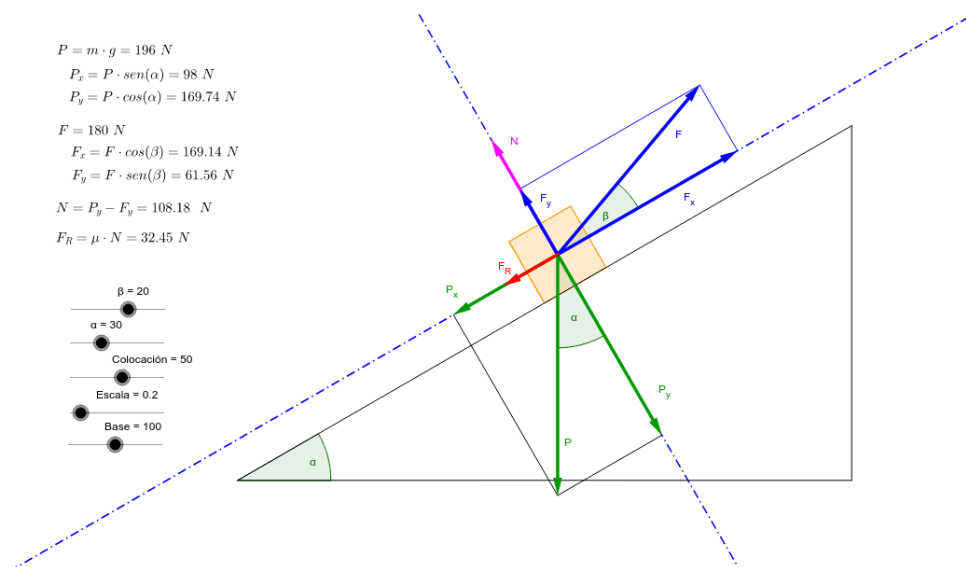


Ilustración 35. Descomposición fuerzas plano inclinado. Fuente: GeoGebra

6.2.4 JUSTIFICACIÓN ESTÉTICA Y CULTURAL

Desde el punto de vista estético y cultural, el uso de la trigonometría está muy ligado con las construcciones arquitectónicas. Unas de las construcciones más importantes tanto a nivel estético como cultural que se basan en el uso de esta área de las matemáticas son las Pirámides Egipcias. El término trigonometría hacía referencia en el antiguo Egipto a “medir la tierra”. Ya desde ese momento esta civilización fue capaz de conseguir ángulos rectos y por consiguiente triángulos rectángulos, diferenciaban catetos e hipotenusa, conocían cuerpos geométricos como cilindros, pirámides y troncos de pirámides y fueron capaces de dar un valor aproximado al número π .

Una pirámide es un cuerpo geométrico formado por una base poligonal y caras formadas por triángulos isósceles coincidentes en un punto denominada cúspide (vértice principal).

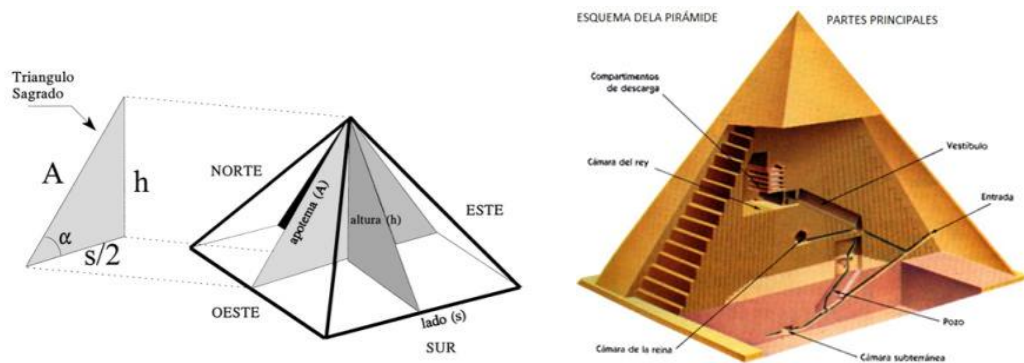


Ilustración 36. Relación de la trigonometría y pirámides egipcias. Fuente: Egiptología

Existen numerosos tipos de pirámides egipcias, siendo las más populares las siguientes: escalonada, perfecta, romboidal o mastaba (tronco piramidal).

Otros monumentos emblemáticos son las tres grandes pirámides de Guiza, siendo la gran pirámide de Guiza declarada como una de las siete maravillas del mundo y la única que se conserva o la gran pirámide de Keops muy relacionada con el número π como detallaremos a continuación:

La longitud de la base de la gran pirámide de Keops es 230,38m y su altura 146,6m. Si calculamos 2 veces la longitud de su base y la dividimos entre su altura obtenemos:

$$2 \text{ veces la base} = 2 \cdot 230,38 = 460,76m$$

$$\frac{460,76m}{146,6m} = 3,1429 \dots \approx \pi$$

6.3 CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA

6.3.1 SITUACIÓN GEOGRÁFICA DEL CENTRO

El I.E.S San Felipe Neri se encuentra en la localidad de Martos (Jaén), ocupando la parte llana de la localidad. Es una zona de creciente población y desarrollo tanto comercial como industrial, en la que hay alrededor de 9500 habitantes según datos del Servicio Municipal de Urbanismo.



Ilustración 37. Ubicación del IES San Felipe Neri (Martos). Fuente: Google Maps



Ilustración 38. Fachada del IES San Felipe Neri. Fuente: www.sanfelipenerimartos.es

6.3.2 ASPECTOS SOCIOECONÓMICOS Y DEMOGRÁFICOS

Es un pueblo que vive principalmente de la agricultura olivarera además de un polígono industrial. Apenas existen familias numerosas, siendo lo más frecuente las de cuatro miembros. En los últimos años, la zona de influencia ha experimentado un importante crecimiento demográfico, urbanístico e industrial. Junto a la zona urbanística, se encuentra el mencionado polígono donde están enclavadas diferentes industrias, siendo la de “Valeo Iluminación” la más importante en capacidad de oferta de empleo y la que ha generado un importante tejido industrial.

6.3.3 CARACTERÍSTICAS E INSTALACIONES DEL CENTRO

Es un centro que ha sufrido una importante reconversión desde su creación como Centro de Formación Profesional. Su evolución se ha basado en los cambios de las enseñanzas que ha ofertado, debido a la demanda educativa del alumnado. Actualmente, atiende alumnos y alumnas de edades comprendidas entre los 12 y 25 años, aproximadamente. Cuenta con tres etapas educativas: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Ciclos Formativos de grado medio y superior, en las ramas de administración y finanzas, mecanizado y mantenimiento. Además, dispone de una línea de FP básica.

El alumnado de ESO, en su mayoría, procede de los centros de Primaria adscritos Virgen de la Villa, Hermanos Carvajales y Antonio Pérez Cerezo. Para enseñanzas postobligatorias el alumnado procede generalmente del propio centro, de los colegios concertados de la localidad (Divina Pastora y San Antonio de Padua) y de pueblos de alrededor como Las Casillas, Fuensanta, Torredonjimeno y Torredelcampo.

Para la etapa de la ESO, el centro dispone de grupos de desdoble en los grupos de 1º, 2º y 3º de ESO, con el fin de garantizar una atención más personalizada, atendiendo siempre al criterio de inclusión. Además, existen también dos cursos de Programa de Mejora del Aprendizaje y los Rendimientos (PMAR) en 2º y 3º de ESO.

En cuanto a la plantilla, el centro dispone de 76 docentes, de los cuales 9 componen el departamento de matemáticas. Además del profesorado, dispone del siguiente personal: 2 conserjes y 3 administrativos y 1 operario del servicio de limpieza. Completa la plantilla una monitora de Educación especial. Sin lugar a dudas, el centro dispone del personal suficiente para atender las exigencias educativas.

6.4 OBJETIVOS

6.4.1 OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA

Se definen los objetivos generales de etapa como aquellos objetivos que los estudiantes han alcanzado al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria y vienen desglosados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, en el artículo 11. Son los siguientes:

- a) *“Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.”*
- b) *“Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.”*
- c) *“Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer”*
- d) *“Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos”*
- e) *“Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación”*
- f) *“Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia”*
- g) *“Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades”*
- h) *“Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma,*

textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura”

- i) “Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada”*
- j) “Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural”*
- k) “Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora”*
- l) “Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación”*

6.4.2 OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Los objetivos de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas vienen detallados en la Orden de 14 de julio de 2016 y serán los siguientes:

- 1. “Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana”*
- 2. “Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados”*
- 3. “Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación”*
- 4. “Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes”*
- 5. “Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser*

sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación”

6. *“Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje”*
7. *“Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones”*
8. *“Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado”*
9. *“Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas”*
10. *“Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica”*
11. *“Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural”*

6.4.3 RELACIÓN ENTRE OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA Y OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Objetivos del área de matemáticas	Objetivos generales de etapa
1	<i>f,g,h</i>
2	<i>f,g</i>
3	<i>f</i>
4	<i>e,f</i>
5	<i>f,l</i>
6	<i>e,f</i>
7	<i>f,g</i>
8	<i>e,f,g</i>
9	<i>b,f</i>
10	<i>f,g</i>
11	<i>a,c,d,f,j,l</i>

Tabla 9. Relación entre objetivos generales de etapa y objetivos del área de matemáticas. Fuente: Elaboración propia

6.4.4 OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Los objetivos específicos de la presente Unidad Didáctica de Trigonometría, se alcanzarán al final del desarrollo de la misma y son los siguientes:

1. Entender el concepto de razón trigonométrica de un ángulo y saber que son independientes del triángulo utilizado.
2. Saber aplicar las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos
3. Reconocer, deducir y saber aplicar las relaciones trigonométricas fundamentales.
4. Aprender a utilizar la calculadora científica para el cálculo de razones trigonométricas.
5. Saber resolver triángulos oblicuángulos mediante la relación con los triángulos rectángulos previamente estudiados.
6. Deducir cualquier razón trigonométrica mediante la aplicación de la circunferencia goniométrica.
7. Saber calcular razones trigonométricas de ángulos mayores de 360°
8. Utilización de diferentes unidades para medir los ángulos. Concepto de radián.
9. Entender las características de las distintas funciones trigonométricas (dominio, período, etc.)
10. Utilización de recursos web a través de las TIC que ayuden a los alumnos en la resolución de problemas.
11. Realizar un análisis crítico de los resultados obtenidos en la resolución de problemas para deducir su coherencia según los datos de partida.

6.5 COMPETENCIAS CLAVE

En el Real Decreto 1105/2014 de 26 de Diciembre, en el artículo 2, se establecen siete competencias que deberán estar presentes en el currículo y que se adquirirán en la presente Unidad Didáctica de Trigonometría de la siguiente forma:

a) Comunicación Lingüística (CCL)

- Ser capaz de escuchar las explicaciones del profesor y procesar la información para decidir cuál es más relevante y cuál es más trascendente.
- Participar en debates o trabajos en grupos de personas donde se debe aportar información y opinión y crear lluvias de ideas para la consecución de los resultados.
- Lectura comprensiva de los textos o enunciados propuestos.
- Realizar exposiciones de trabajos o resolver ejercicios/problemas en la pizarra para explicarlo a los compañeros.

b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

- Capacidad de resolver problemas empleando distintos métodos de resolución cuando sea posible.
- Realizar una correcta traducción de un texto escrito a lenguaje algebraico.
- Analizar los diferentes resultados obtenidos en un problema y descartar posibles soluciones.
- Emplear un lenguaje matemático adecuado en la formulación de teoremas y en las ecuaciones fundamentales de las matemáticas.
- Relacionar números aspectos de la trigonometría y de las ciencias con el mundo exterior (ángulos, alturas, distancias, etc.)
- Capacidad para comprender y entender un concepto matemático cuando no es explicado por un docente (por ejemplo un compañero de clase durante una exposición)

c) Competencia Digital (CD)

- Utilización de software matemático para resolver problemas y ejercicios relacionados con la trigonometría.
- Saber utilizar la calculadora científica para calcular las razones trigonométricas básicas de cualquier ángulo.
- Utiliza herramientas de ofimática para la entrega de trabajos y/o realización de exposiciones.

- Comunicación con el profesorado mediante la utilización de plataformas de almacenamiento en la nube como Google Drive o de conferencia como Google Meet.

d) Aprender a aprender (CAA)

- El estudiante es capaz de comprender la relación entre relaciones trigonométricas de los ángulos más conocidos mediante la creación de tablas para afianzar dicho conocimiento.
- Organiza de forma adecuada la información proporcionada durante la resolución de ejercicios/problemas mediante la creación de esquemas para una resolución eficaz.
- Trabaja de forma grupal para crear lluvias de ideas y aprende de los conocimientos de los compañeros durante las actividades de tipo colaborativo.

e) Competencias sociales y cívicas (CSC)

- Relacionarse tanto con sus compañeros como con el equipo docente durante el curso académico.
- Muestra empatía con el resto de sus compañeros y es capaz de prestar ayuda cuando otro alumno la necesite.
- Rechaza cualquier actitud de desprecio y/o vacío y es capaz de pedir ayuda al profesorado en el caso de que se produzca.
- Es capaz de expresar su opinión de una forma abierta y respeta la de los demás compañeros y profesores.
- Participa activamente en actividades extraescolares y sociales organizadas por el centro.

f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SEIP)

- Propone nuevos tipos de ejercicios/problemas o muestra interés en diferentes metodologías de resolución que puedan aplicarse durante en el campo de la trigonometría.
- Se interesa por conceptos más avanzados de las matemáticas, y en concreto, de la trigonometría respecto a cursos académicos posteriores.
- Se motiva por realizar aquellos tipos de ejercicios más complejos y que requieren un enfoque distinto.
- Es capaz combinar la resolución tradicional en papel y comprobar la solución a través de herramientas TIC sin necesidad de que el profesor lo haya pedido expresamente.

g) Conciencia y expresiones culturales (CEC)

- Conocer la relación de la trigonometría con la historia y la arquitectura, como por ejemplo, en la construcción de edificios históricos como las pirámides egipcias.
- Conocer aquellos aspectos más importantes de las matemáticas en relación con la historia y la cultura y saber identificarlos en una línea temporal.

6.6 CONTENIDOS

Contenidos del Real Decreto 1105/2014	Contenidos Unidad Didáctica
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas	- Lectura comprensiva de los enunciados de actividades y problemas - Realización de esquemas para el correcto planteamiento del problema
1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	-Traducción de un texto a lenguaje algebraico -Realización de esquemas para el correcto planteamiento del problema
1.3 Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc	-Análisis de resultados para que sea coherente con el enunciado del problema - Empleo de varios métodos de resolución de problemas
1.4 Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	-Investigar el origen de las razones trigonométricas fundamentales y su uso en la antigüedad
1.5 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos	- Análisis de situaciones de la vida cotidiana que pueden ser modeladas a través de la trigonometría
1.6 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico	-Empleo de varios métodos de resolución en el caso de encontrar dificultades con la elección de otro método

1.7 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) La recogida ordenada y la organización de datos. b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	- Utilización del software matemático GeoGebra aplicado a la trigonometría - Búsqueda de información en la web
--	---

Tabla 10 Contenidos Bloque 1 en relación con la UD. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia

Contenidos del Real Decreto 1105/2014	Contenidos Unidad Didáctica
Bloque 3: Geometría	
3.1 Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes	- Empleo de la circunferencia goniométrica -Diferentes unidades de medidas de ángulos. El concepto de radián
3.2 Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	- Razones trigonométricas directas de un ángulo agudo - Razones trigonométricas de ángulos fundamentales 30°, 45° y 60° -Relación entre razones trigonométricas de ángulos - Resolución de triángulos (rectángulos y obtusángulos)
3.3 Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.	- Cálculo de áreas en triángulos rectángulos - Cálculo de áreas en triángulos obtusángulos

3.6 Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	- Uso del software matemático GeoGebra aplicado a la trigonometría
---	--

Tabla 11 Contenidos Bloque 3 en relación con la UD. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia

6.7 METODOLOGÍA

Durante el transcurso de la presente Unidad Didáctica de Trigonometría para estudiantes de 4º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas se aplicarán varias metodologías durante el desarrollo de las sesiones, con el objetivo de combinarlas de la mejor forma posible para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje y alcanzar los objetivos anteriormente expuestos.

La primera metodología utilizada será una **metodología transmisiva o de clase expositiva**. Es una metodología tradicional que se basa en la “transmisión” o explicación de los contenidos por parte del docente hacia el alumnado a través de la exposición de los mismos. Esto provoca un trabajo autónomo e individual que se reflejará durante las actividades de desarrollo e introducción que explicaremos en el siguiente apartado.

Esta metodología presenta la ventaja de favorecer la habilidad de la concentración del alumno pero por otro lado también presenta la desventaja de provocar el aburrimiento en el alumno en el caso de que se alargue demasiado en el tiempo. La clave en esta metodología es encontrar un punto intermedio en el que el discente permanezca atento a la explicación sin llegar a “desconectar” de la clase.

En segundo lugar, en determinadas sesiones de la Unidad, se aplicará la **metodología de trabajo colaborativo** y consiste en dividir a la clase en grupos equitativos para trabajar en colaboración con el resto de sus compañeros, de ahí su nombre. La aplicación de esta metodología permite que el alumno aprenda a través de sus compañeros, creando lluvias de ideas y así establecer una mejor estrategia para conseguir el objetivo propuesto.

Las ventajas que presenta esta metodología son varias como aprender a respetar la opinión del resto y desarrollar habilidades sociales y lingüísticas para relacionarse con el resto del grupo. Por otro lado el inconveniente que presenta esta metodología es ralentizar el desarrollo normal de la clase, pues el dividir la clase en grupos equitativos, explicar la actividad o actividades a desarrollar y resolver posibles dudas requiere un tiempo más elevado que en la metodología transmisiva.

Esta metodología suele ser una de las más divertidas para el alumno pues le ayuda a salir de la “rutina” de las clases expositivas y se divierte a la vez que aprende colaborando con sus compañeros.

A lo largo de la Unidad didáctica, esta metodología tendrá menos peso que la metodología transmisiva, debido precisamente a lo comentado anteriormente de la ralentización del desarrollo normal de clase.

En tercer lugar, durante el desarrollo de dos sesiones, concretamente en la cuarta y en la antepenúltima que veremos posteriormente en la temporalización, se basarán en el **uso de herramientas TIC**. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación jugarán un papel fundamental en la preparación del alumno para cursos posteriores. Es muy importante enseñar al alumno a hacer una búsqueda fiable de la información a la vez que transmitirle el enorme potencial que tendrán estas tecnologías durante su educación académica.

La ventaja de aplicar esta metodología es que el alumno aprenda la ayuda que le pueden proporcionar estas herramientas a la hora de estudiar; como por ejemplo buscar problemas adicionales a los resueltos en clase, uso de software para representar figuras geométricas o aprender historia de las matemáticas. Por otro lado la desventaja del uso excesivo de esta tecnología es que el alumno se haga completamente dependiente del ordenador para realizar todas sus tareas o la búsqueda de información en fuentes no fiables y no contrastadas.

Esta metodología tendrá prácticamente el mismo que la basada en el aprendizaje colaborativo.

Finalmente, la última metodología que aplicaremos estará basada en la **modelización matemática**. Se trata de aplicar las matemáticas, o en nuestro caso específico, la trigonometría en problemas que aparecen en la vida cotidiana y que pueden ser formulados matemáticamente. Esto permite al discente desarrollar su creatividad y agudeza para resolver un problema real.

Como se puede deducir una de las ventajas más importantes que presenta esta metodología es transmitirle al alumno la relación de las matemáticas con la vida cotidiana, sin embargo, también presenta un inconveniente como el transmitirle al alumnado que no siempre todos nuestros modelos o suposiciones tienen solución.

Esta metodología es la que menor peso tiene durante el desarrollo de la presente Unidad Didáctica.

6.8 ACTIVIDADES Y RECURSOS

En el presente apartado se explicarán las actividades y los recursos didácticos necesarios para el desarrollo de la Unidad Didáctica y en la que se trabajarán los contenidos anteriormente expuestos.

6.8.1 ACTIVIDADES

Las actividades que se han propuesto en esta Unidad Didáctica de Trigonometría están descritas en el **Anexo I** del presente documento, y se dividen en seis tipos en función de los contenidos que se estén trabajando.

- **Introducción (INT)**

Este tipo de actividades se caracteriza por ser de resolución rápida y de extensión corta. La finalidad es la de dar una visión general del tema presentando y facilitar la asimilación de conceptos.

- **Desarrollo (DES)**

A diferencia de las actividades de introducción, en este tipo de actividades, la extensión es más larga y la resolución es más compleja, pues en la mayoría de los casos requiere la aplicación de varios conceptos a la vez, que generalmente están relacionados entre sí. Además favorece el razonamiento y la habilidad para realizar operaciones matemáticas.

El principal objetivo de la aplicación de éstas es la de afianzar los conceptos que se han ido explicando a lo largo de las diferentes sesiones.

- **Profundización (PROF)**

Para abordar este tipo de actividades, es fundamental que el alumno haya afianzado de manera correcta todos los conceptos del tema, pues se requiere un enfoque distinto para plantear estos ejercicios. Estos problemas no son tan “mecánicos” como pueden ser algunas actividades de desarrollo sino que se basan la mayor parte del tiempo en pensar el planteamiento para que sea correcto. Una vez se ha realizado el planteamiento, la resolución es rápida ya que la complejidad de estas actividades reside en realizar un correcto planteamiento.

Generalmente, en los libros de texto, estas actividades vienen recogidas en la parte final del glosario de problemas de la unidad.

- **Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)**

En el desarrollo de este tipo de actividades utilizaremos el software matemático GeoGebra, que será muy útil durante la sesión de la circunferencia goniométrica pues se podrá observar de forma dinámica como van variando las razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 360° .

Además, GeoGebra, será una herramienta de apoyo para el alumnado ya que les permitirá comprobar los resultados de las actividades que realicen, ver sus errores y avanzar en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado se hará uso de la calculadora científica, para calcular las razones seno, coseno y tangente. Este hecho será muy importante para cursos posteriores de matemáticas y para el desarrollo de otras asignaturas como física donde se estudia el plano inclinado y la trigonometría es fundamental.

- **Evaluable (EV)**

Las actividades recogidas en la prueba escrita de evaluación de la presente Unidad se englobarán dentro de este tipo. Consistirán en un conjunto de ejercicios/problemas de características muy similares a las actividades trabajadas durante las sesiones y expuestas anteriormente, con la finalidad de comprobar si se han alcanzado los objetivos propuestos de la Unidad Didáctica.

- **Modelización matemática (MOD)**

Este tipo de actividad se aplicará durante la penúltima sesión de la programación, y consistirá en una actividad grupal en el patio del IES donde se calculará la altura de un ciprés aplicando Trigonometría. Para ello será necesario la construcción de un teodolito casero para medir ángulos y una cinta métrica para medir distancias.

Se le denomina modelización matemática ya que se aplican conceptos de las matemáticas para resolver problemas de la realidad (calcular la altura de un ciprés) mediante modelos matemáticos (método de la doble observación).

Este tipo de actividad es muy enriquecedora para los estudiantes ya que son conscientes de la gran utilidad que tienen las matemáticas en todos los aspectos de la vida cotidiana, frente a la realización de actividades más tradicionales y más rutinarias dentro del aula.

6.8.2 RECURSOS DIDÁCTICOS

Para el buen transcurso de la Unidad Didáctica, hacen falta una serie de recursos que serán descritos a continuación:

- **Recursos impresos**

- Se utilizará como referencia el libro de texto: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºESO. Aprender es crecer en conexión castellano. Editorial ANAYA. ISBN: 9788469810699
- Actividades extra o de refuerzo que serán entregadas impresas a los alumnos por parte del profesor.
- Cuaderno de los estudiantes.

- **Recursos específicos**

- Pizarra

- **Recursos tecnológicos**

- Ordenadores con conexión a internet y navegador web
- Proyector y altavoces. Este recurso es muy útil por ejemplo para resolver los ejercicios en GeoGebra y proyectarlos a la clase a la misma vez que se resuelve de forma tradicional en pizarra para comprobar las similitudes.
- Calculadora científica.

- **Recursos software**

- Software matemático GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>)
- Herramientas ofimáticas como procesador de textos, hojas de cálculo, presentaciones, etc.

- **Recursos físicos**

- Aula de clase
- Patio del IES San Felipe Neri. Este recurso se utilizará en la penúltima sesión dónde se realizará una actividad de modelización matemática dónde se calculará la altura de un ciprés como explicaremos en el **Anexo I**
- Otras instalaciones, como por ejemplo, la sala de profesores en el caso de que el estudiante necesite preguntar/resolver dudas.

- **Recursos humanos**

- Profesor/a de matemáticas
- Alumnado
- Resto del equipo docente que sustituirá, en momentos puntuales, al profesor de matemáticas en caso de enfermedad u otros problemas.
- Familias de los discentes que colaborarán junto con el profesor de matemáticas en el proceso de aprendizaje de sus hijos e hijas.

6.9 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La finalidad del equipo docente es que el alumnado alcance los objetivos propuestos independientemente de sus necesidades educativas, es por ello necesario aplicar programas de atención de la diversidad para conseguirlo. En esta Unidad Didáctica se aplicarán las siguientes estrategias:

- **Creación de grupos equitativos**

Consiste en crear grupos colaborativos de alumnos en el que el nivel educativo sea similar entre el número total de grupos en los que se ha dividido la clase. Esto se consigue realizando un análisis de los alumnos de la clase, utilizando herramientas como evaluación inicial, evaluación final de cada una de las Unidades Didácticas, etc. De esta forma se puede mezclar de una forma homogénea a los alumnos que posean un alto nivel en matemáticas junto con los que poseen un nivel medio/bajo. Esto hecho favorecerá a ambas partes, pues los alumnos con un bajo nivel podrán aprender y afianzar los conceptos mediante la explicación de sus compañeros, y a su vez, será beneficioso para los alumnos que posean un alto nivel pues les servirá sus explicaciones como método de repaso.

En la penúltima sesión de la Unidad en la que se realizará la Actividad de Modelización matemática “*EL CLINÓMETRO*”, la clase se dividirá en grupos equitativos, aplicando por lo tanto como estrategia de atención a la diversidad la creación de grupos heterogéneos y aprendizaje basado en proyectos.

- **Actividades de apoyo y refuerzo**

Es bien conocido que en la mayoría de las aulas existe un perfil de alumnado con dificultades de aprendizaje, siendo el ritmo de asimilación de conceptos más lento que el de la mayoría de los compañeros de aula. Para solventar este problema y evitarlo se aplicará la estrategia de atención a la diversidad conocida como “Actividades de apoyo y refuerzo”.

La finalidad de este tipo de actividades es ayudar a los estudiantes que presenten dificultades de aprendizaje, a adquirir los conceptos que son fundamentales para seguir aprendiendo, de manera más individualizada o personalizada.

Herramientas como la evaluación continua ayudará al docente a identificar qué cantidad de alumnos precisan de esta ayuda para poder aplicar adaptaciones del currículum y de esta forma mejorar en su proceso de aprendizaje.

- **Actividades de ampliación y motivación**

Al igual que como hemos comentado anteriormente existen en las aulas perfiles de alumnos con dificultades de aprendizaje, existe también un perfil de alumno, aunque es menos frecuente denominado de altas capacidades. Este perfil tiene la principal característica de poseer ciertas habilidades y nivel educativo superior a la media de la población.

Es muy importante también detectar este tipo de alumnos en un aula pues se puede correr el riesgo de aburrirse y llegar a desmotivarse. La forma más eficaz de detectarlos es realizar las pruebas de escalas de Weschler, test de Kaufman, escalas de inteligencia de Stanford-Binet y Matrices Progresivas de Raven, que son test psicométricos de inteligencia general.

A lo largo de la Unidad Didáctica, existirán actividades del tipo “*PROFUNDIZACIÓN*” que ayudará a este perfil de alumno a pensar y plantear los problemas/ejercicios de una manera diferente a la tradicional, ayudando de esta forma al desarrollo de sus altas capacidades.

6.10 TEMPORALIZACIÓN

La presente Unidad Didáctica de Trigonometría se dividirá en doce sesiones lectivas de aproximadamente una hora cada una, de las cuáles la última sesión se utilizará para la realización de la prueba de evaluación escrita.

Las actividades utilizadas en cada sesión vienen recogidas en el **Anexo I** del presente documento y la distribución de sesiones será la siguiente:

PRESENTACIÓN E INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA Y LA EVALUACIÓN Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS					
Nº Sesión	1	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	ODU1	CCL, CMCT, CSC	1.1, 1.2, 1.3, 3.2
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
15'	Debate: ¿Qué es la Trigonometría? ¿Cuáles son las aplicaciones y objetivos de esta?			Aprendizaje cooperativo	Pizarra (opcional)
10'	Presentación de la Unidad: se mostrará el índice de la unidad con todo el contenido a impartir.			Clase expositiva	Proyector Presentación
5'	Presentación de la Evaluación: se explicará la evaluación de dicho tema, los tipos de ejercicios y el examen final para evaluar el aprendizaje del alumno.			Clase expositiva	Proyector Presentación
25'	Razones trigonométricas directas: explicación de las razones trigonométricas directas de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente). Demostración de su independencia respecto al triángulo utilizado. (Actividad 1.1). El objetivo de la actividad es alcanzar una óptima comprensión de los contenidos anteriores. Se mandarán como tarea las actividades 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5.			Clase expositiva	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5		DES. – INT.		Individual y grupal	

Tabla 12 Sesión 1 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS FUNDAMENTALES					
Nº Sesión	2	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	ODU1, ODU11	CCL, CMCT, CAA	1.1, 1.2, 1.3, 3.2
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
10'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
20'	Corrección: se corregirán detenidamente las cuatro actividades mandadas como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
25'	Razones trigonométricas de ángulos fundamentales: demostración y exposición de las razones de los ángulos de 30°, 45° y 60°. Se mandará como tarea la actividad 1.6.			Clase expositiva	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividad 1.6		DES.		Individual	

Tabla 13 Sesión 2 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA, RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES Y TEST					
Nº Sesión	3	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	OULD3, OULD11	CCL, CMCT, CD	1.2,1.3,1.7,3.2
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/Técnica	Recursos didácticos
10'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
5'	Corrección: se corregirá detenidamente la actividad mandada como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
25'	Relaciones trigonométricas fundamentales: Demostración y exposición de las dos relaciones fundamentales. (Actividad 1.7). Servirá de apoyo a la lección para afianzar lo explicado. Se mandarán las actividades 1.8, 1.9 y 1.10 como tarea para el alumno.			Clase expositiva	Pizarra
15'	Test: tipo test proyectado en la pizarra digital que se irá resolviendo en común entre alumnos y profesor.			TIC	Proyector Presentación
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.7, 1.8, 1.9 y 1.10		DES.		Individual y grupal	

Tabla 14 Sesión 3 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS, CALCULADORA CIENTÍFICA Y ACTIVIDAD GRUPAL					
Nº Sesión	4	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	ODU2, ODU4, ODU10, ODU11	CCL, CMCT, CD, CSC	1.1, 1.3, 1.6, 1.7, 3.3
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
10'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
15'	Corrección: se corregirán detenidamente las actividades mandadas como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
15'	Calculadora científica: ejercicios para aprender a usar la calculadora científica en el cálculo de razones trigonométricas. (Actividades 1.11 y 1.12). Estas actividades ayudarán a asentar lo explicado anteriormente.			TIC	Calculadora Proyector
15'	Actividad grupal: se plantearán tres tipos de ejercicios distintos (actividades 1.13, 1.14 y 1.15), que tendrán que ser resueltos por cada grupo formado, en cuanto a resolución de triángulos rectángulos. Tendrán que poner en común las ideas y resolverlo lo antes posible para ser el grupo ganador y obtener una calificación extra en el examen.			Aprendizaje cooperativo	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 y 1.15		TIC		Individual y grupal	

Tabla 15 Sesión 4 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS Y ACTIVIDADES PARA VOLUNTARIOS					
Nº Sesión	5	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	ODU2, ODU5, ODU11	CCL, CMCT, CSC, SIEP	1.1,1.3,1.6, 3.3
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
5'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
30'	Triángulos obtusángulos: explicación, resolviendo las actividades 1.16 y 1.17, de la resolución de triángulos obtusángulos mediante la relación con los triángulos estudiados aplicados en los problemas de doble observación. Se mandarán como tarea para el alumno las actividades 1.18, 1.19.			Clase expositiva	Pizarra
20'	Actividades para voluntarios: se propondrán las actividades 1.20, 1.21 y 1.22 para que, voluntariamente, los alumnos salgan a la pizarra y expliquen su resolución ante toda la clase.			Clase expositiva	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21 y 1.22		DES.		Individual y grupal	

Tabla 16 Sesión 5 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS Y CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA					
Nº Sesión	6	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	OULD6,OULD7, OULD11	CCL, CMCT, CAA	1.1, 1.2, 3.1, 3.2
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/Técnica	Recursos didácticos
10'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
15'	Corrección: se corregirá detenidamente las actividades mandadas como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
30'	Circunferencia goniométrica: se explicará su aplicación, sus cuatro cuadrantes constituyentes, las razones trigonométricas de ángulos en cada uno de ellos y para ángulos mayores de 360° . Se resolverá la actividad 1.23 para apoyar la teoría y se mandará como tarea la actividad 1.24.			Clase expositiva	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.23 y 1.24		DES.		Individual y grupal	

Tabla 17 Sesión 6 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA, DIFERENTES UNIDADES PARA LA MEDIDA DE ÁNGULOS, CONCEPTO DE RADIÁN Y ACTIVIDAD GRUPAL					
Nº Sesión	7	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	OUD8, OUD10, OUD11	CCL, CMCT, CD, CSC	1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.6
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
10'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
5'	Corrección: se corregirá detenidamente la actividad mandada como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
20'	Diferentes unidades para la medida de ángulos. Concepto de radián: se presentarán las diferentes unidades para la medida de ángulos, entre ellos el radián. Se explicará la conversión de grados a radianes tanto de forma manual como con la calculadora científica. Se complementará la explicación con las actividades 1.25 y 1.26.			TIC y Clase expositiva	Calculadora Pizarra
15'	Actividad grupal: se formarán grupos de 5 o 6 personas que deberán pensar en el enunciado de una actividad que englobe todo lo visto anteriormente. Las actividades propuestas serán la tarea para el siguiente día que deberá realizar cada alumno.			Aprendizaje cooperativo	Pizarra (opcional)
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.25 y 1.26		TIC – DES.		Individual y grupal	

Tabla 18 Sesión 7 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS					
Nº Sesión	8	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	ODU9, ODU11	CCL, CMCT, CAA, CEC	1.4, 1.5, 3.1
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/Técnica	Recursos didácticos
5'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
20'	Corrección: se corregirán detenidamente las actividades mandadas como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
30'	Funciones trigonométricas: se presentarán las funciones trigonométricas simples y se explicarán sus principales características. Se resolverán en clase las actividades 1.27, 1.28 para apoyar la teoría. Se mandarán como tarea la actividad 1.29.			Clase expositiva	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.27, 1.28 y 1.29		DES.		Individual y grupal	

Tabla 19 Sesión 8 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

REPASO, CORRECCIÓN DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA Y GEOGEBRA					
Nº Sesión	9	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	ODU10, ODU11	CCL, CMCT, CD	1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.6
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
5'	Repaso: recordatorio de lo que se vio en la clase anterior para refrescar conocimientos.			Clase expositiva	Pizarra
10'	Corrección: se corregirán detenidamente las actividades mandadas como tarea por el alumno en la pizarra.			Clase expositiva	Pizarra
40'	Geogebra: se presentará esta herramienta matemática tan útil y se utilizará para resolver los distintos tipos de actividades vistas a lo largo del tema de una forma más rápida y versátil. Se resolverán, entre todos, las actividades 1.30, 1.31, 1.32 y 1.33 con Geogebra.			TIC	Proyector Presentación
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.30, 1.31, 1.32 y 1.33		TIC		Grupal	

Tabla 20 Sesión 9 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN					
Nº Sesión	10	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	Todos los de la UD	CCL, CMCT, CSC, CAA, SIEP	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 3.1, 3.2
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/ Técnica	Recursos didácticos
55'	Autoevaluación: se resolverán las actividades 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41 y 1.42 de autoevaluación entre todos para completar el tema y darlo por finalizado.			Clase expositiva	Pizarra
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41 y 1.42		DES. – PROF.		Grupal	

Tabla 21 Sesión 10 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

ACTIVIDADES EN EL PATIO DEL INSTITUTO					
Nº Sesión	11	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Patio IES	Todos los de la UD	CCL, CMCT, CAA, CD, CSC, SIEP, CEC	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 3.2
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/Técnica	Recursos didácticos
55'	<i>Actividades en el patio del instituto:</i> se plantearán una serie de actividades que deberán ser resueltas en grupo. Consistirán en el cálculo de distancias y ángulos haciendo uso de la trigonometría.			Aprendizaje cooperativo	Teodolito y cinta métrica
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
"EL CLINÓMETRO"		MOD.		Grupal	

Tabla 22 Sesión 11 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

EXAMEN FINAL					
Nº Sesión	12	Espacio	Objetivos	Competencias	Contenidos
		Aula	Todos los de la UD	CCL, CMCT, SIEP	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3
Tiempo (min)	Desarrollo			Metodología/Técnica	Recursos didácticos
55'	<i>Examen final:</i> se realizará el examen final de la unidad, compuesto de las actividades 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49 y 1.50 para poder evaluar completamente al alumno en dicha unidad.			Ninguna	Ninguno
Actividades		Tipo de actividad		Agrupamiento	
Actividades 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49 y 1.50		EVAL.		Individual	

Tabla 23 Sesión 12 Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia

6.11 EVALUACIÓN

En el presente apartado de evaluación se van a describir los criterios que se van a evaluar y qué herramientas se van a utilizar para hacerlo. Estos criterios de evaluación vienen recogidos en el decreto 144/2016 para la asignatura de matemáticas, que es la que nos ocupa. Por otro lado en la Orden de 14 de julio de 2016, se describen las competencias que se asignan a cada uno de los criterios de evaluación y contenidos, que se recogen finalmente en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de Diciembre.

6.11.1 CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Los criterios de evaluación se relacionarán con los estándares de aprendizaje evaluables, competencias y contenidos como se muestra en la siguiente tabla:

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMP	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas.	CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.	CCL CMCT	EA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema aplicando el uso del lenguaje matemático acorde a su etapa educativa.
1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación de problemas, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT CAA	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas, identificando los datos, relacionándolos entre ellos y entendiendo el contexto donde se desarrolla el problema. EA.1.2.2 Entiende lo que se requiere en el enunciado del problema y es capaz de detectar las soluciones que éste puede tener. EA.1.2.3. Realiza una valoración del problema y es capaz de utilizar estrategias inductivas o deductivas realizando una validación de los resultados obtenidos

1.3 Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA	EA.1.4.1. Es capaz de indagar en el resultado del problema ya resuelto, formulando otras maneras de resolución y razonando el significado del resultado obtenido, analizando su coherencia. EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas a partir de los resueltos, con nuevas aportaciones y proponiendo nuevos casos de planteamientos.
1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	CE.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL CMCT CAA SIEP	EA.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguidos además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico y probabilístico.
1.5 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT CAA CSC SIEP	EA.1.6.1. Identifica elementos o situaciones en la realidad que tienen posible relación con problemas matemáticos. Realiza su modelización. EA.1.6.2. Establece vínculos entre problemas de su vida cotidiana y el mundo matemático, interpretándolo y aportando los conocimientos matemáticos necesarios.
	CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los	CMCT CAA	EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados

	modelos utilizados o construidos.		
1.6 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT	EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, planificación del proceso y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos con la precisión de su nivel educativo y a la dificultad de la situación. EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, plantea y se encuentra en una búsqueda de respuestas adecuadas, tanto para el aprendizaje de conceptos como para la obtención de resultados en problemas.
	CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT CAA SIEP	EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización acorde a sus consecuencias y conveniencias de sencillez y utilidad.
	CE.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT CAA SIEP	EA.1.10.1. Reflexiona sobre la solución de los problemas abordados y su proceso de resolución, recopilando las ideas claves para su aplicación en situaciones futuras similares
1.7 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:			

a) la recogida ordenada y la organización de datos.	CE.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL CMCT CD CAA	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión.
b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.	CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT CD CAA	EA.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. EA.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. EA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	CE.1.12.Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL CMCT CD CAA	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios, tras un proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante. EA.1.12.2. Utiliza los recursos creados para cimentar la base de su aprendizaje y poder utilizarla durante las distintas sesiones de clase. EA.1.12.3. Mediante los medios tecnológicos estructura adecuadamente sus conocimientos, mejorando su proceso de aprendizaje. Con los resultados obtenidos, es capaz de analizar sus puntos fuertes y débiles, focalizando y autoevaluándose para establecer pautas de mejora.
3.1 Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. 3.2 Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	CE.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT CAA	EA.3.1.1. Relaciona los ángulos y lados de un triángulo rectángulo. Calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo EA.3.1.2. Conoce y obtiene las razones trigonométricas así como las relaciones en la circunferencia goniométrica. Aplica el concepto de radián. EA.3.1.3. Utiliza la trigonometría para la resolución de áreas de polígonos. EA.3.1.4. Utiliza medios tecnológicos para la resolución de problemas trigonométricos. EA.3.1.5. Identifica, reconoce y resuelve problemas cotidianos mediante la aplicación de razones trigonométricas.

3.3. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medidas de longitudes, áreas y volúmenes. 3.6 Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas	CE.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT CAA	EA.3.2.1. Obtiene valores geométricos mediante la medición directa de datos y la resolución de triángulos aplicando las razones y relaciones trigonométricas. EA.3.2.2. Resuelve problemas mediante aplicaciones informáticas y recursos Web, fortaleciendo los conceptos teóricos y prácticos desarrollados en clase.
--	--	-------------	---

Tabla 24 Criterios de evaluación, contenidos, competencias y estándares de aprendizaje evaluables. Fuente: RD 1105/2014 y Orden 14 Julio de 2016

6.11.2 CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

Las herramientas que utilizaremos para evaluar los criterios y estándares de aprendizaje desarrollados en el apartado anterior serán tres, con la siguiente ponderación:

Nº	HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN	PESO
1	Prueba Final Evaluable	70%
2	Entrega de Actividades y realización del cuaderno de clase	20%
3	Trabajo y participación en clase	10%

Tabla 25 Criterios de calificación. Fuente: Elaboración propia

Para calcular la calificación final de la evaluación se utilizará la ponderación de la tabla anterior, siendo necesario una calificación mínima de 4,5 puntos en la prueba final evaluable para poder aplicarla.

Las calificaciones posibles serán:

- < 5 puntos: INSUFICIENTE
- 5 puntos: SUFICIENTE
- 6 puntos: BIEN
- 7 y 8 puntos: NOTABLE
- 9 y 10 puntos: SOBRESALIENTE

7. CONCLUSIONES

A modo de conclusión destacaría la percepción de la enseñanza que he adquirido durante la realización del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, y en concreto durante el módulo Practicum y la posterior redacción del presente TFM, pues he podido ver el funcionamiento del aula desde el *“otro lado”*, ya que siempre había tenido la percepción como estudiante. Durante este tiempo he podido comprobar lo rápido que ha evolucionado la enseñanza con la introducción de medios tecnológicos que facilitan y aceleran el proceso enseñanza-aprendizaje.

Esta introducción de medios tecnológicos ha ayudado al profesorado a introducir actividades y tareas novedosas que motivan y predisponen al alumnado a la adquisición de nuevos conocimientos y destrezas que les serán muy útiles a medida que avance su etapa de formación.

Además, un punto importante a destacar es la relación que debe existir entre los distintos departamentos de un centro, ya que debe de existir coordinación entre los contenidos impartidos en cada una de las asignaturas de cada nivel para así poder garantizar que los alumnos avanzan de curso con los contenidos fundamentales y esenciales para afrontar un nuevo nivel educativo sin dificultades por falta de conocimientos previos.

Otro punto fundamental es la organización y el control de la clase para lograr los objetivos que se han propuesto a la hora de planificar las actividades y tareas. Hay que saber gestionar el grupo, es decir, conocer las características individuales de cada uno y abordarlos de forma individual.

Finalmente, a modo de reflexión sobre el estado de la enseñanza actual, debe de existir un ratio número de alumnos por aula adecuado que garantice el desarrollo normal de las clases y que el método enseñanza-aprendizaje sea efectivo en la adquisición de nuevos conocimientos por parte de alumnado.

En conclusión, podríamos decir que impartir contenidos novedosos, actualizarse continuamente, y mantener una relación de cooperación con los alumnos y familias, son la clave del éxito, no sólo de la asignatura que nos ocupa, sino en general en el desarrollo personal y académico del estudiante. Además sin olvidar la gestión y control del grupo, adquirir cierto grado de confianza con el alumnado, manteniendo siempre el rol de profesor-alumno, es indispensable para el buen funcionamiento del grupo.

Bibliografía

Rotaeché Guerrero, R.A, Montiel Espinosa, G (2016). *Aprendizaje del concepto de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria*

Naranjo Triana, W.E, Triana Tobar, M.A (2015). *Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula.*

Cólera Jiménez, J, Ignacio Gaztelu, A, Oliveira González, M.J (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º ESO. ISBN (13):9788467852134*

Matemáticas Enseñanzas Académicas Serie Resuelve 4º ESO Saber Hacer. Editorial SANTILLANA. ISBN: 9788468040400

Matemáticas, temario oposiciones profesorado de enseñanza secundaria (2017). Editorial MAD. ISBN: 9788414211502

PLAN DE CENTRO (IES San Felipe, Martos). <http://www.sanfelipenerimartos.es/>

Carrillo de Albornoz Torres, Agustín. (2009). *GeoGebra: mucho más que geometría dinámica*

Fioriti, G, Ferragina, R (2018). *GeoGebra entra al aula de matemáticas.*

Delgado Rodríguez, S, Fernández González Mario. *Análisis de la implantación de las TICs en la Educación Secundaria. Tendencias tecnológicas actuales.*

Andrade Aray, C, Guerrero Alcívar Y, Montenegro Palma L, Navarrete Ampuero, S (2020). *La superficialidad de la enseñanza de la trigonometría en el Bachillerato y su incidencia en el aprendizaje en niveles universitarios*

Martín Fernández, E, Ruiz Hidalgo, JF, Rico Luis (2016). *Significado escolar de las razones trigonométricas elementales*

UJA JAÉN (página web). <https://www.ujaen.es/estudios/oferta-academica/masteres/master-universitario-en-profesorado-de-educacion-secundaria-obligatoria-y-bachillerato>

Referencias normativas

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

ANEXO I DE ACTIVIDADES

En el presente anexo vienen recogidas las actividades que se realizarán durante el desarrollo de la Unidad Didáctica, y cuáles han sido aplicadas en cada una de las sesiones, tal y como se ha explicado en el apartado de temporalización. Se dividirán en los siguientes tipos: Introducción, desarrollo, profundización, TIC, evaluable y modelización matemática.

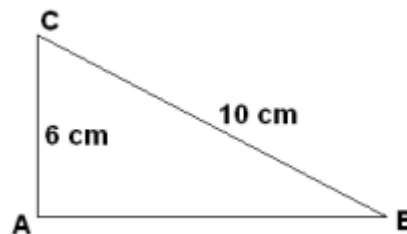
- **INTRODUCCIÓN**

Responde a las siguientes cuestiones:

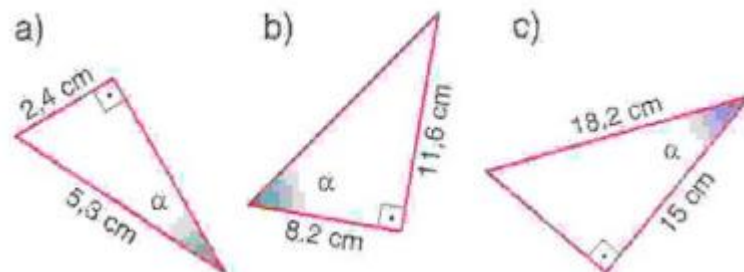
- ¿Qué es la Trigonometría?
- Enumera aplicaciones y usos de la trigonometría en la vida cotidiana

- **DESARROLLO**

- 1.1 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC cuyos lados miden $a = 25$ y $c = 35$.
- 1.2 En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, si la tangente de B es 1.4 y $b = 2.5$, ¿cuánto mide c?
- 1.3 Halla, según el dibujo, el seno, coseno y tangente de los ángulos B y C.

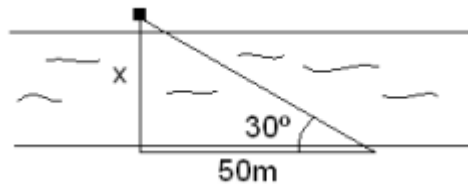


- 1.4 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:



- 1.5 Sabiendo que las diagonales de un rombo miden 12 y 8 cm, calcula los ángulos de dicho rombo.

1.6 Calcula, sin utilizar la calculadora, la anchura del río:



1.7 Si α es un ángulo agudo cuyo coseno vale 0.2, calcula el resto de razones trigonométricas de ese ángulo.

1.8 Si α es un ángulo agudo en el que $\tan \alpha = 0.4$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas.

1.9 Completa el siguiente cuadro sabiendo que α es un ángulo agudo.

$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$
	0.7	
$1/3$		
		2

1.10 Si α es un ángulo agudo cuyo seno vale 0.5, calcula el resto de razones trigonométricas de ese ángulo.

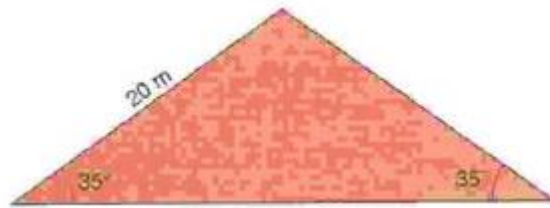
1.11 Haciendo uso de la calculadora, calcula el seno, coseno y tangente de los ángulos de 9° y 181° . ¿Qué relación encuentras entre ellas?

1.12 Usando la calculadora, determina los ángulos α y β sabiendo que $\text{sen } \alpha = 0.4$ y $\text{cos } \beta = 0.5$.

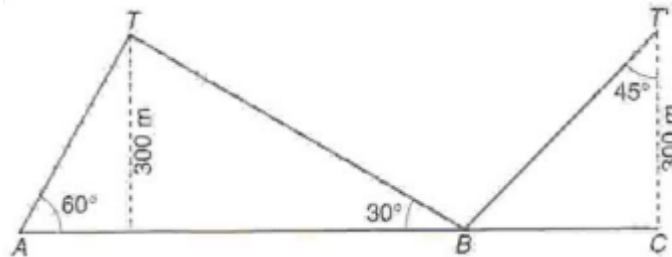
1.13 Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Para ello, sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto B.



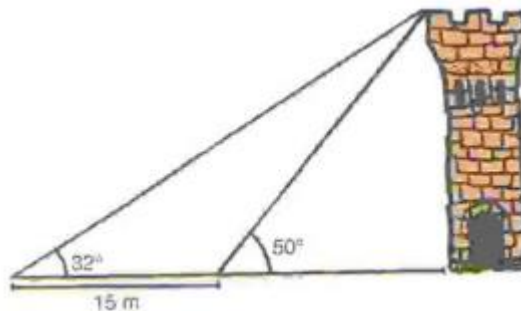
- 1.14 Calcular el área del siguiente triángulo:



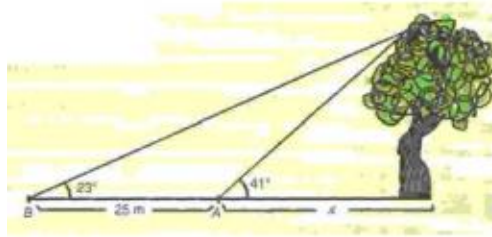
- 1.15 Un cable pasa por los puntos T y T' de manera indirecta como puede verse en la figura:



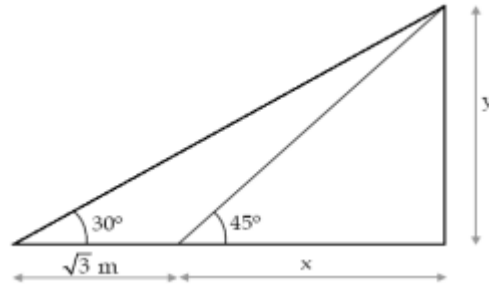
- Calcular la longitud del cable que va desde A a T' pasando por B.
 - Si no tuviera que pasar por B, ¿qué cantidad de cable se ahorraría uniendo A con T y T'?
- 1.16 Desde el lugar donde me encuentro la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal y con el punto máximo de la altura de esta. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50° . ¿Cuál es la altura de la torre?



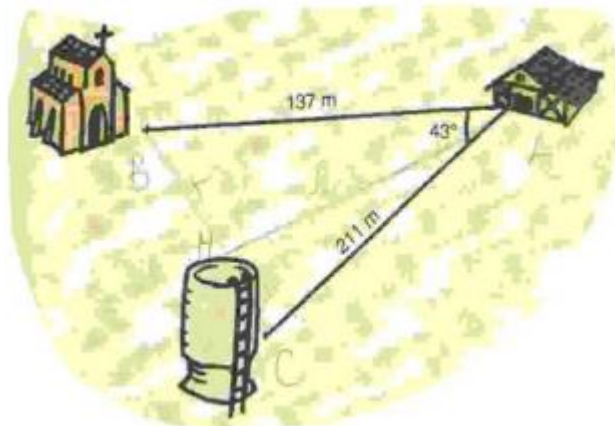
- 1.17 Calcular la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible conociendo las siguientes medidas tomadas desde un barco:
- El ángulo que forma la visual hacia la luz con el horizonte es de 25°
 - Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10° .
- 1.18 Calcular la altura del árbol y la anchura de un río si cuando nos situamos frente al árbol y medimos el ángulo que forman con la horizontal la visual con la parte alta del árbol este es de 41° . Después, nos alejamos del árbol, en dirección a la orilla, andando 25 m y volvemos a medir el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol. Ahora son 23° .



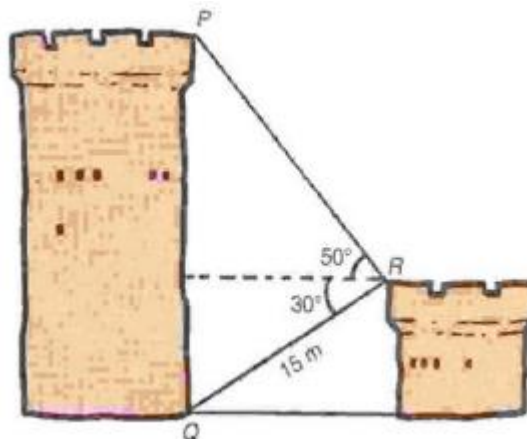
1.19 Halla “x” e “y”.



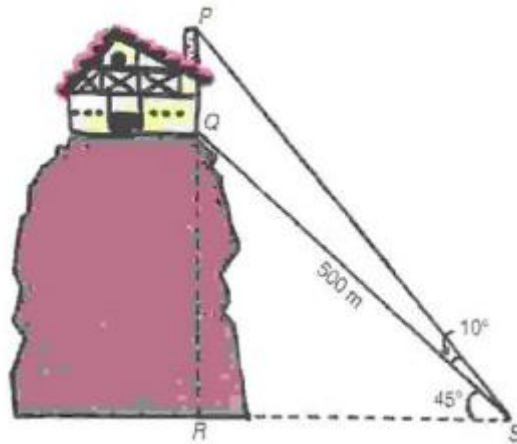
1.20 La distancia de nuestra casa a la iglesia es de 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m y el ángulo, 43° , bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito. ¿Cuál es la distancia entre la iglesia y el depósito?



1.21 Si $QR = 15$ m, ¿cuál es la altura de la torre PQ?



- 1.22 Para calcular la altura del edificio, PQ hemos medido los ángulos que se indican en la siguiente figura:



Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 500 m.

- 1.23 Sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos y di sus valores:

Ángulo	cuadrante	seno	coseno	tangente
165°				
-230°				
315°				
$3\ 625^\circ$				

- 1.24 Representa en la circunferencia goniométrica las razones trigonométricas de los ángulos de 225° , 240° , 135° y 330° y calcula el valor de cada una de ellas relacionándolos con ángulos del primer cuadrante.

- 1.25 Pasa a radianes los ángulos de 38° , 54° , 121° , 96° , 167° , 215° , 273° , 300° y 350° .

1.26 Calcula:

- a) $\cos(3\pi/4)$
- b) $\sin(5\pi/3)$
- c) $\tan(5\pi/6)$
- d) $\cos(8\pi/9)$
- e) $\sin(6\pi/5)$
- f) $\tan(3\pi/2)$

1.27 Estudia el dominio, período y recorrido de la función $y = \sin(3\pi/4)$ y represéntala.

1.28 Estudia el dominio, período y recorrido de la función $y = \cos(5\pi/3)$ y represéntala.

1.29 Estudia el dominio, período y recorrido de la función $y = \tan(3\pi/2)$ y represéntala.

- **TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC)**

1.30 Representa en diferentes circunferencias goniométricas y las relaciones que hay entre ellos de las razones trigonométricas de los ángulos complementarios, suplementarios, opuestos, que se diferencian en 90° , 180° y 270° .

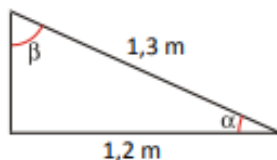
1.31 Haz la conversión de radianes a ángulos y viceversa de los ángulos de 0° a 360° con un incremento de 25° . Representa dichos ángulos en la circunferencia goniométrica.

1.32 Construye las Funciones Trigonómicas seno, coseno y tangente a partir de un punto de la circunferencia unidad. Representa además las funciones de las actividades 1.27, 1.28 y 1.29.

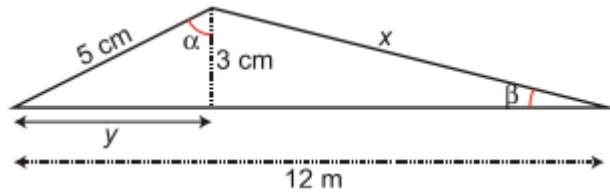
1.33 Resuelve la actividad 1.15 con Geogebra y demuestra que los ángulos interiores de un triángulo suman 180° .

- **PROFUNDIZACIÓN Y AUTOEVALUACIÓN**

1.34 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



1.35 Calcula "x" e "y" en el triángulo:



1.36 Completa las siguientes tablas ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$):

sen α			1	
cos α	1/2			
tg α		$\sqrt{3}/3$		
α				45°

sen α	$\sqrt{3}/2$			
cos α				$\sqrt{2}/2$
tg α		0		
α			30°	

α		90°		
sen α	0			
cos α				$\sqrt{3}/2$
tg α			$\sqrt{3}$	

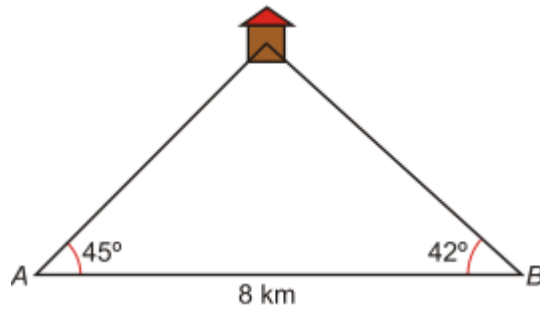
1.37 Sabiendo que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, completa la siguiente tabla usando las relaciones fundamentales:

sen α		0,8
cos α		
tg α	0,75	

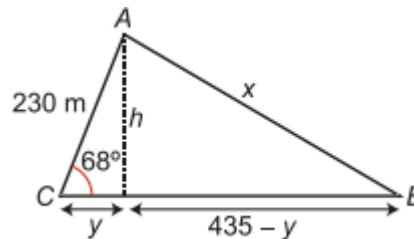
1.38 De un ángulo α sabemos que $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcula sen α y cos α .

1.39 Representa en la circunferencia goniométrica las razones trigonométricas de los ángulos de 150° , 225° , 315° y 2130° .

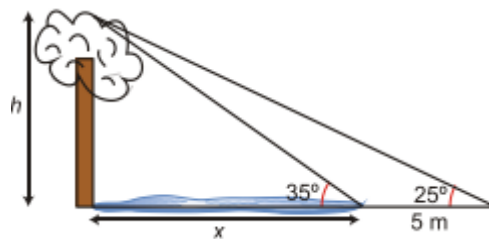
1.40 Dos pueblos, distanciados 8 km en línea recta, se encuentran a una distancia determinada de una casa. Observa la figura y calcula la distancia que separa a cada pueblo de la casa:



- 1.41 El ángulo que se forma en la intersección de los caminos AC y CB es de 68° . El establo A está a 230 m del C, y el establo B a 435 m del mismo. ¿A qué distancia en línea recta está el establo A del establo B?



- 1.42 Pedro observa un árbol que está en la orilla opuesta del río y mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35° . Si retrocede 5 m y mide el nuevo ángulo, obtiene un ángulo de 25° . Calcula la altura del árbol y la anchura de río.



• PREGUNTAS TIPO TEST SESIÓN 3

- ¿A qué equivale el seno de un ángulo en un triángulo rectángulo?
 - Cateto opuesto / hipotenusa
 - Hipotenusa / cateto contiguo
 - Hipotenusa / cateto opuesto
 - Cateto contiguo / cateto opuesto
- ¿A qué equivale la tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo?
 - Hipotenusa / cateto contiguo
 - Cateto contiguo / cateto opuesto
 - Cateto opuesto / cateto contiguo
 - Cateto opuesto / hipotenusa

3. Si la tangente de un ángulo vale $\sqrt{3}/3$, ¿de qué ángulo se trata?
- a) 60°
 - b) 90°
 - c) 45°
 - d) 30°
4. ¿Cuál de estas operaciones da un valor igual a la unidad?
- a) Ninguno de ellos
 - b) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec^2 \alpha$
 - c) $\cos \alpha * \operatorname{cosec} \alpha$
 - d) $\operatorname{sen}^2 \alpha * \cos^2 \alpha$
5. Dado un triángulo de lados 9, 12 y 15 cm, ordena de mayor a menor el seno, coseno y tangente del ángulo menos amplio.
- a) Seno, coseno y tangente
 - b) Seno, tangente y coseno
 - c) Tangente, seno y coseno
 - d) Coseno, seno y tangente
6. Selecciona el valor que sea distinto al resto.
- a) $\operatorname{Sen} 0^\circ$
 - b) $\operatorname{Tg} 90^\circ$
 - c) $\operatorname{Cos} 270^\circ$
 - d) $\operatorname{Sen} 360^\circ$
7. Selecciona la igualdad que sea incorrecta.
- a) $\operatorname{Cos} 30^\circ = \sqrt{3}/2$
 - b) $\operatorname{Tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
 - c) $\operatorname{Sen} 45^\circ = 2/\sqrt{2}$
 - d) $\operatorname{Cos} 45^\circ = \sqrt{2}/2$
8. El seno de un ángulo vale 0.6, ¿a cuánto equivale el coseno?
- a) 0.8
 - b) 0.4
 - c) 0.64

d) 0.36

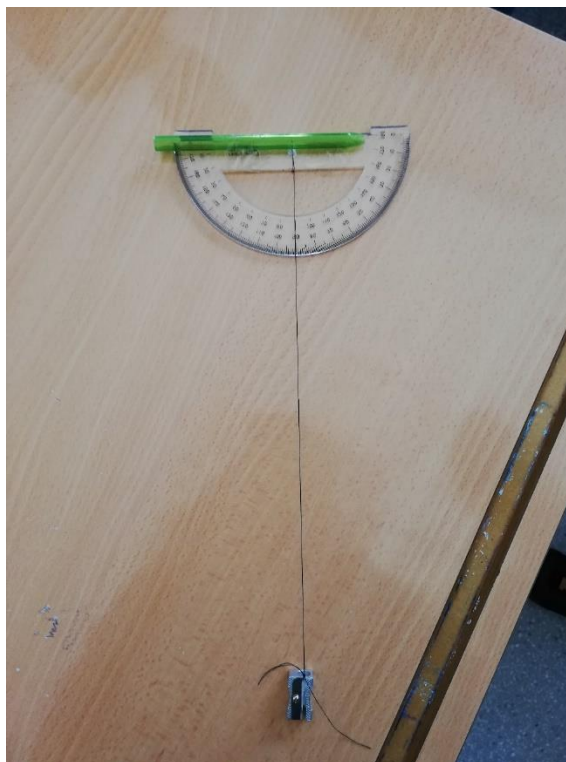
- **MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

El nombre de la actividad matemática propuesta es: “EL CLINÓMETRO”

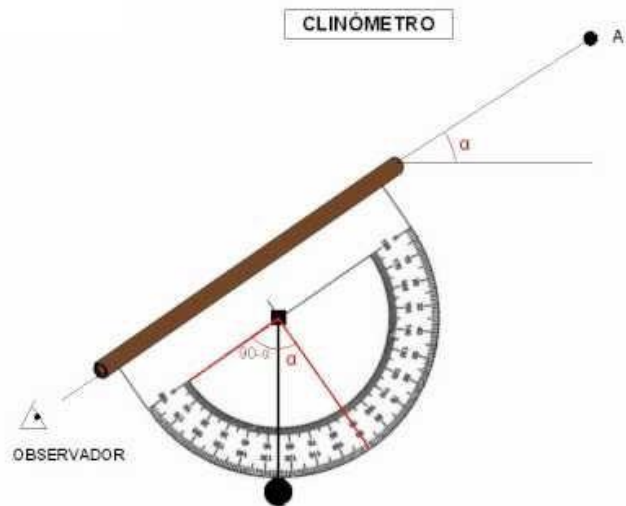
La actividad consiste en salir al patio del instituto y medir la altura de un ciprés. Aplicando un poco de matemáticas y utilizando herramientas especializadas se pueden obtener medidas precisas. El material que necesitamos para llevar a cabo la actividad es calculadora, lápiz y papel, una cinta métrica y nuestro propio clinómetro.

Este método, además de ser más preciso, nos permite medir la altura de cualquier objeto, desde cualquier distancia.

Para la construcción del clinómetro necesitaremos un transportador de ángulos, un tubo pequeño de plástico, un trozo de hilo y un peso (puede ser un sacapuntas, goma, etc.). En la siguiente fotografía se muestra un clinómetro construido para la realización de dicha actividad.



La forma de medir con este tipo de clinómetro es apuntar al punto de altura máxima del árbol mediante observación a través del tubito de plástico verde y observando cuantos grados se mueve el peso (en este caso el sacapuntas) que hemos puesto. En la siguiente imagen se muestra un esquema de medición.

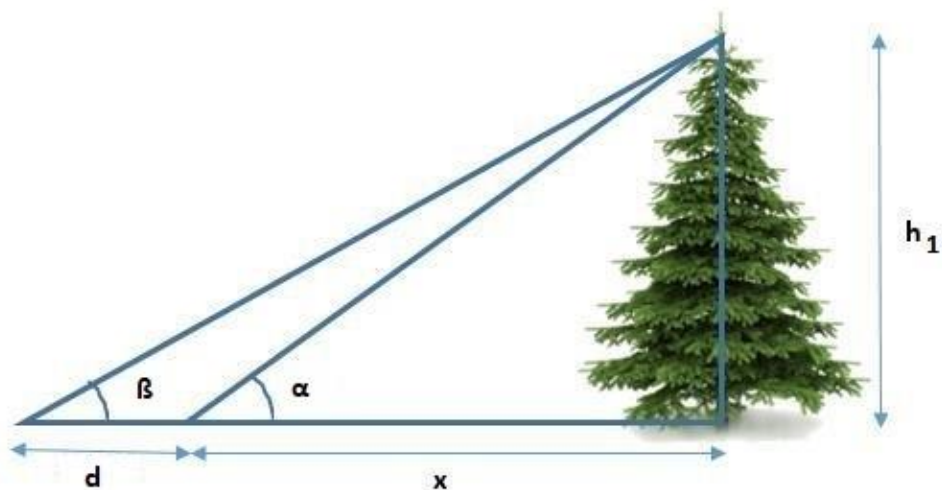


En las siguientes fotografías se muestran el ciprés a medir, situado en el patio del instituto, y la cinta métrica para tomar los dos puntos de medición





Las medidas que se realizarán durante la clase, servirán para resolver un problema de doble observación. Dicho problema corresponderá al siguiente esquema:



Los datos conocidos en el siguiente esquema son: α y β , medidos con el clinómetro y d que es la distancia que nos separamos desde el primer punto de medición, la cual se puede obtener con la cinta métrica.

Aplicando las relaciones trigonométricas fundamentales, nos quedaría:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1}{x} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h_1}{d+x} \quad (2)$$

Despejando la altura h_1 de las ecuaciones (1) y (2)

$$h_1 = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$h_1 = (d+x) \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Tenemos un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas, que, resolviendo por igualación, tras haber despejado la altura h_1 , nos quedaría:

$$x \cdot \operatorname{tg} \alpha = (d+x) \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{d+x}{x} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\frac{d}{x} + 1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\frac{d}{x} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} - 1$$

$$\frac{d}{x} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}$$

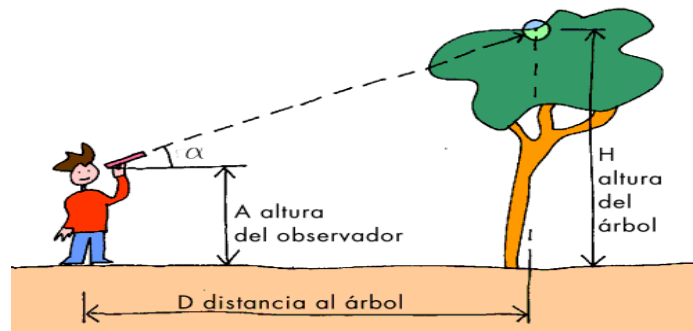
$$x = d \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

Una vez obtenido el valor de x , calculamos el valor de h_1 , sustituyendo en la ecuación (1):

$$h_1 = d \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

La tarea propuesta se realizará en 4 grupos colaborativos. Para realizar esta tarea, cada uno de los grupos colaborativos debe seguir los siguientes pasos:

1. Mide la distancia que hay desde el suelo hasta tus ojos, con la ayuda de la cinta métrica.
2. Mide el ángulo de elevación (α), con la ayuda del clinómetro, hasta la parte superior del árbol cuya altura queremos calcular.
3. Aléjate los metros que consideres oportunos (al menos 5m) y vuelve a medir el ángulo de elevación (β).
4. Este proceso lo repetirá cada miembro del grupo.



Los resultados se irán anotando en una tabla como la siguiente:

Alumno/a	Altura hasta los ojos (2 decimales)	α	Me alejo distancia d	β
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Con estos valores, cada alumno/a debe plantear un problema de doble observación y calcular la altura h_1 con 2 decimales de precisión.

Cuando cada integrante del grupo calcule h_1 , deberá calcular la altura del árbol (h), que es la suma $h = h_1 + \text{altura hasta los ojos}$. Los resultados obtenidos se reflejarán en una tabla como la siguiente:

Alumno/a	h_1 (2 decimales)	Altura hasta los ojos (2 decimales)	$h = h_1 + \text{altura}$ hasta los ojos (dos decimales)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

6.			
----	--	--	--

Finalmente, la solución de la altura total del ciprés, será la **media aritmética** (usando dos decimales aproximados) de los resultados de la última columna de la tabla anterior obtenidos por los miembros del grupo.

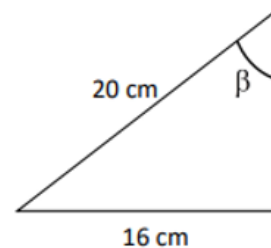
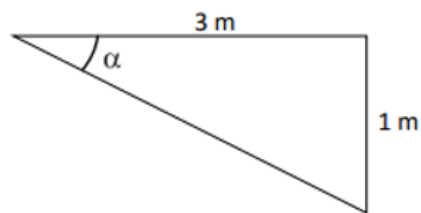
Solución

Media aritmética:

$$h =$$

• PRUEBA FINAL EVALUABLE

- 1.43 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos que se indican en los siguientes triángulos rectángulos utilizando la definición.

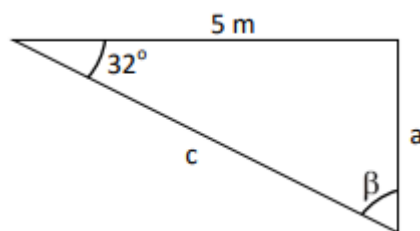


- 1.44 Calcula las razones trigonométricas restantes de los siguientes ángulos de un triángulo rectángulo.

- a) $\cos \alpha = 0.6$
b) $\operatorname{tg} \beta = 1.2$

- 1.45 Un ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y su seno vale $4/5$. Calcula el valor del coseno y de la tangente del ángulo α .

- 1.46 Calcula el valor de los lados a y c y del ángulo β en el siguiente triángulo rectángulo.



- 1.47 Expresa los siguientes ángulos como un número determinado de vueltas, más un ángulo que se encuentre entre 0° y 360° . De cada uno de ellos,

di a qué cuadrante pertenece y cuál es el signo de sus razones trigonométricas. Además, expresa en radianes dichos ángulos obtenidos.

- a) 1945°
- b) 3180°

- 1.48 La altura de la Giralda es de 104 metros. ¿Cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos de sol es de 30° ? Realiza un dibujo de la situación.
- 1.49 Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 60° . ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área? Realiza un dibujo.
- 1.50 Calcula la altura h del edificio más alto.

