



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

DIVISIBILIDAD EN EL ANILLO DE POLINOMIOS

Alumno/a: **Hernández Marín, Sara**

Tutor/a: Prof.^a D.^a Carmen Ordóñez Cañada
Dpto: Matemáticas

Junio, 2020

Índice general

Resumen	4
I Resumen	5
II Introducción	9
III Objetivos	13
IV Fundamentación didáctica	17
1. Artículo 1	21
2. Artículo 2	25
V Fundamentación epistemológica	29
3. Introducción y motivación	31
4. El anillo de los polinomios en una variable	33
4.1. Suma de polinomios	37
4.2. Producto de polinomios	38
4.3. Fórmulas de Newton	38
4.3.1. Números combinatorios. Introducción	38
4.3.2. Binomio de Newton	39

4.3.3. Aplicación a las fórmulas de Leibniz	40
5. Divisibilidad en el anillo de polinomios	41
5.1. M.C.D y m.c.m en DFU	42
5.2. M.C.D y m.c.m en DIP	42
5.3. Dominios Euclídeos	43
5.4. Descomposición factorial	46
6. Cuerpo de fracciones de K	49
6.1. Suma de fracciones	49
6.2. Producto de fracciones	50
6.3. Descomposición en fracciones simples	50
VI Fundamentación curricular	53
7. Análisis de los documentos curriculares	57
8. Análisis de libros de texto	59
8.1. Marco teórico	59
8.1.1. Significados personales e institucionales	60
8.1.2. Entidades primarias	60
8.2. Discusión de resultados y comparativa	62
8.3. Conclusión y propuestas	63
VII Proyección didáctica	65
9. Título	67
10. Justificación	69
11. Contextualización del centro y del aula	71
12. Objetivos	73
12.1. Objetivos didácticos	73

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
13. Competencias clave	75
14. Contenidos	77
15. Metodología	79
16. Actividades y recursos	81
17. Atención a la diversidad	83
18. Temporalización	87
19. Evaluación	89
VIII Conclusiones	91
IX Referencias bibliográficas	95
X Anexo 1: Análisis de los libros de texto	101
20. Análisis de la divisibilidad en editorial <i>Anaya</i>	103
20.1. Situaciones-problemas	103
20.2. Lenguaje	104
20.3. Conceptos	105
20.4. Propositiones	106
20.5. Procedimientos	107
20.6. Argumentos	108
21. Análisis de la divisibilidad en editorial <i>SM</i>	109
21.1. Situaciones-problemas	109
21.2. Lenguaje	110
21.3. Conceptos	110
21.4. Propositiones	111
21.5. Procedimientos	112

21.6. Argumentos	112
XI Anexo 2: Objetivos	113
22.Objetivos de etapa	115
23.Objetivos de materia	117
XII Anexo 3: Actividades	119

Parte I

Resumen

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

El presente trabajo tiene como objetivo general describir la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad en polinomios en la Educación Secundaria Obligatoria.

Mediante una revisión bibliográfica sobre investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, relacionadas con el tema en cuestión, se ponen de manifiesto algunas dificultades y conflictos semióticos potenciales que se han tenido en cuenta para la propuesta didáctica. Además, se establece el significado institucional de referencia por el que consideraremos los conocimientos básicos.

Se ha realizado un análisis didáctico de diferentes libros de texto de 3º de ESO. Siguiendo el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) en el que se han podido detectar varias carencias que se solucionarán también en la propuesta didáctica.

Finalmente, teniendo en cuenta todo lo anterior, se desarrolla una unidad didáctica con la que se pretende conseguir un aprendizaje significativo con el que los estudiantes puedan alcanzar los objetivos que se proponen.

Palabras clave: Divisibilidad, polinomios, secundaria, enfoque ontosemiótico

ABSTRACT AND KEYWORDS

The present work has the general objective of describing the teaching and learning of divisibility in polynomials in Secondary Education.

Through a bibliographic review of research in Mathematics Didactics, related to the subject in question, some difficulties and potential semiotic conflicts taken into account for our didactic proposal are revealed. Furthermore, the institutional reference meaning by which we will consider basic knowledge is established.

A didactic analysis of different textbooks of 3rd ESO has been carried out. Following the theoretical framework of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction in which several deficiencies have been detected that will also be solved in the didactic proposal.

Finally, taking into account all of the above, a didactic unit is developed with which it is intended to achieve meaningful learning and that students can achieve the proposed objectives.

Keywords: Divisibility, polynomials, secondary, onto-semiotic approach

Parte II

Introducción

INTRODUCCIÓN

Este documento corresponde al Trabajo Fin de Máster del curso 2019/2020, perteneciente al “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”, en concreto, para la especialidad de Matemáticas.

Lo que pretendemos con este trabajo es describir la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad en el anillo de polinomios. Esto ayudado de otras fundamentaciones, que serán de gran ayuda para una elaboración más profunda de nuestra propuesta didáctica.

Basándonos en la Orden 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, podemos observar que el estudio de la divisibilidad en polinomios empieza a impartirse en el tercer curso de la ESO.

No obstante, hay que tener en cuenta que será necesario el conocimiento previo de la divisibilidad en los números naturales. Esto se desarrolla durante los dos primeros cursos de Secundaria.

Respecto a la estructura de dicho trabajo, podemos destacar cuatro partes. La primera, **fundamentación didáctica**, que hablaremos sobre investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas, con el fin de extraer dificultades o conflictos semióticos para su posible corrección.

Sobre la **fundamentación epistemológica**, en la que encontramos recursos teóricos avanzados. Se desarrollará un tema de las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Titulado: Polinomios. Operaciones. Fórmulas de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas.

La tercera parte, la **fundamentación curricular** incluirá el análisis de las disposiciones curriculares vigentes y el de dos libros de texto. Con el fin de determinar, el alcance que deben tener los contenidos según la legislación vigente, así como las distintas visiones de ambos manuales.

Por último, el diseño de una **unidad didáctica** referente a la divisibilidad en el anillo de polinomios. En ella se incluirá información de los apartados anteriores para realizar un diseño de actividades lo más detallado posible.

Parte III

Objetivos

OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es describir y analizar la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad en polinomios y sus aplicaciones en la Educación Secundaria Obligatoria, haciendo uso de los conocimientos adquiridos durante el Máster.

Para alcanzarlo se proponen conseguir distintos subobjetivos. En primer lugar, se aborda la fundamentación epistemológica donde se pretende:

- O1** Establecer el significado institucional de referencia sobre la divisibilidad en el anillo de polinomios desarrollando uno de los temas que se incluyen en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Secundaria relacionados con este tema.
- O2** Identificar las distintas configuraciones epistémicas según los distintos dominios de definición (DI, DFU, DIP, DE) para el máximo común divisor y mínimo común múltiplo y analizar las aplicaciones al estudio de las fracciones algebraicas.

A continuación, en la fundamentación curricular se aborda el siguiente subobjetivo:

- O3** Analizar el significado institucional de la divisibilidad en polinomios implementado en dos libros de texto, identificando carencias y conflictos semióticos potenciales, y realizar una comparativa entre ellos, utilizando como herramienta las entidades primarias que proporciona el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

En la Fundamentación Didáctica se perseguirá:

- O4** Analizar varias investigaciones en Didáctica de las Matemáticas en las que se abordasen aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad, en particular, en el anillo de polinomios.

En el último subobjetivo, teniendo en cuenta lo anterior y los conocimientos adquiridos en los estudios de Máster, elaboraremos una propuesta personal con la que afrontar algunas dificultades o carencias que se han puesto de manifiesto en esta temática:

- O5** Elaborar y desarrollar actividades relacionadas con la divisibilidad en polinomios en tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Parte IV

Fundamentación didáctica

En esta parte lo que se pretende es hacer un sondeo acerca de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, que hayan abordado aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad en el anillo de polinomios, poniendo de manifiesto dificultades y conflictos semióticos potenciales en esta temática.

Para su desarrollo, se han escogido tres artículos

1. Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2019), publicado en la revista AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática.
2. Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H. y Amaya, T. (2015), podemos encontrarlo en la revista Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
3. Hausberger, T. (2018) publicado en International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education.

La selección de estos artículos se debe principalmente a que las tres investigaciones tratan conceptos relacionados con la divisibilidad que pueden aplicarse al anillo de polinomios. Mientras que dos de ellas tratan cuestiones algebraicas importantes sobre los distintos dominios (Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2019) y Hausberger, T. (2017)), la tercera se centra en las dificultades que encuentran los estudiantes de secundaria en la factorización de polinomios.

Aunque por motivos de extensión, solo trabajaremos en profundidad dos de ellos. Por lo que no se examinará minuciosamente el artículo de Hausberger, T. (2018). Este se centra en la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras algebraicas desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), para introducir la noción de praxeología estructuralista, relacionada con la aritmética de los anillos abstractos. Se discuten cuestiones en el contexto de las dificultades que experimentan los estudiantes en el paso de los estudios de pregrado y posgrado en matemáticas, en la universidad. Concluye con un programa de investigación basado en análisis praxeológicos de las tareas, métodos, metodologías y teorías características del pensamiento estructuralista en un entorno de enseñanza y aprendizaje.

Capítulo 1

Artículo 1

Este primer artículo de investigación se titula *Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática* (C.,Ordóñez, L. y Contreras, A., 2019). Tiene como **objetivo** analizar la actividad matemática sobre la enseñanza del máximo común divisor (M.C.D.) mostrado en manuales para el Grado en Ingeniería Informática, a partir del significado institucional de referencia.

Requiere de un **marco teórico** para abarcar los distintos aspectos de dicha actividad. Constituido por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). Siguiendo a Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007) que consideran los significados de los objetos matemáticos como emergentes de los sistemas de prácticas. En esta investigación se analiza el significado institucional del M.C.D. a través del análisis de manuales, prestando atención además en los posibles conflictos semióticos.

A partir de una **metodología** de análisis de la actividad matemática basada en 5 niveles (Font, Planas y Godino, 2010). Esta investigación solo se centra en tres de ellos. El análisis de tipos de problemas y de sistemas de prácticas y la idoneidad didáctica.

En primer lugar, un estudio epistemológico basado en los dominios de definición, del que surge el significado institucional de referencia (CE).

Se presentan de forma muy detallada las configuraciones epistémicas del M.C.D. en sus dominios de definición. Como son: los dominios de integridad (DI), dominios de factorización única (DFU), dominios de ideales principales (DIP) y dominios euclídeos (DE). En la figura 1.1 podemos ver la relación entre ellos. Teniendo en cuenta que en la enseñanza del M.C.D. se realiza el proceso inverso.

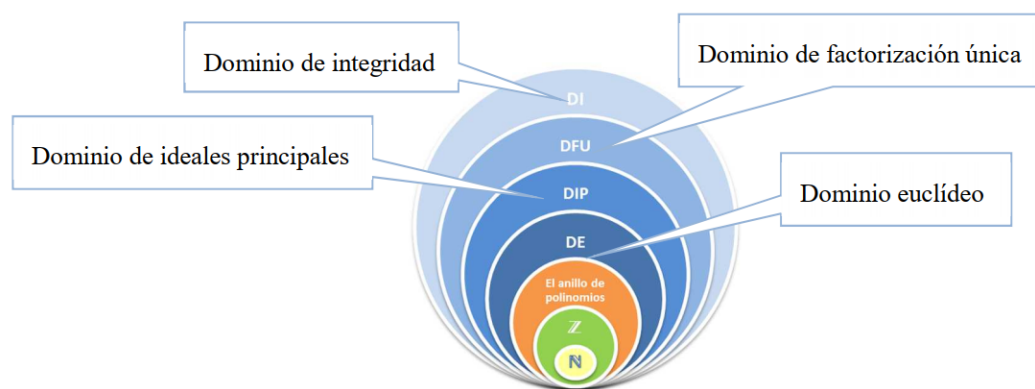


Figura 1.1: Relación entre dominios de definición (Ordóñez et al., p.27)

Y en segundo lugar, un análisis de 8 manuales universitarios recomendados por tres Universidades españolas (Granada, Jaén y Politécnica de Madrid) para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática. En la investigación se muestran dos manuales: M1 (Rosen, 2004) y M2 (Cohn, 2000).

Para dicho análisis, elaboraron una plantilla en la que consideraban las entidades primarias del EOS (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). A partir de la cual analizar ambos libros de texto.

El manual 1, titulado *Matemática Discreta y sus aplicaciones* recomendado por las tres universidades anteriormente nombradas. Se caracteriza por la ausencia de demostraciones para la mayoría de proposiciones. Aunque su idoneidad ecológica es muy alta, entre otras, ya que consta de una gran cantidad de situaciones y aplicaciones a la informática con la que valorar las matemáticas en la vida profesional y enlazándolas con los conocimientos previos. Pero no promueve la generalidad.

El segundo manual, *Classic Algebra* está recomendado por dos de esas tres universidades. La generalización de los contenidos es mucho mayor debido al formalismo matemático, aunque este no trata aplicaciones a la informática ni procedimientos de cálculo. El alto nivel de abstracción causa dificultad a la hora de comprender los significados pretendidos, llegando a causar conflictos semióticos potenciales.

Este análisis permitió extraer las siguientes **conclusiones**. Al analizar ambos manuales, de forma unificada, respecto al significado institucional de referencia, se pueden enmendar las dificultades relativas a la diversidad curricular de la etapa universitaria.

En cuanto a la comparativa entre los dos manuales, la ausencia de las demostraciones en M1 suponen una importante carencia en la enseñanza y fuente de conflictos semióticos para el alumno, aunque lo hace un texto más accesible.

El uso de la tecnología aplicada a la Informática provoca que prevalezca lo particular ante lo general.

Por último, resalta la importancia de que el profesor haga uso de recursos tecnológicos para trabajar el proceso de generalización.

Capítulo 2

Artículo 2

Este segundo artículo de investigación se titula *Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios* (Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H. y Amaya, T., 2015). El **objetivo** que persigue es describir las dificultades que presentan los estudiantes al factorizar polinomios para implementar nuevas metodologías que fortalezcan su aprendizaje.

Según Hitt (2003) dichas dificultades se deben principalmente a la ley de los signos, lo cual lleva a resultados erróneos. Por lo que muchos autores coinciden en la importancia de estos para el aprendizaje. Atribuidos a las dificultades de comprensión de los conceptos y que en el aula predomina un aprendizaje procedimental sobre el conceptual.

Tomando como referencia los modelos cognitivos enfocados en el estudio de los problemas de enseñanza del álgebra, siguiendo el **marco teórico**, Carrión (2007) hace una clasificación de los errores en tres tipos: 1) Errores de entrada (aunque siguen los procedimientos correctos, los realizan a una operación distinta a la que se les planteó), 2) Errores de operación (debido al mal uso de las operaciones o signos) y 3) Errores de escritura (aunque obtienen resultados correctos, cometen errores al comunicar los procedimientos).

Por otra parte, la **metodología** cuantitativa empleada para la investigación sigue un estudio cuasi-experimental. Consistió en proponer a 26 estudiantes colombianos con edades entre 12 y 14 años una prueba de forma individual, entrevistando además a algunos de más interés.

En primer lugar, se llevó a cabo un acercamiento con los alumnos en el aula. Seguidamente se intentaron detectar los errores más comunes con el tema a tratar, despejando algunas dudas. Para después, realizarles una prueba piloto de 3 polinomios para factorizar, con el fin de identificar los errores y dificultades más frecuentes

y poder abordar el porqué.

Los polinomios que se pedían factorizar fueron:

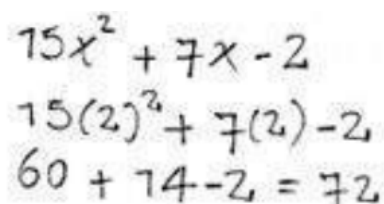
a) $15x^2 + 7x - 2$

b) $x^3 - 4x^2 - 4x$

c) $3x^5 - 18x^3 + 27$

Respecto a los **resultados** de dicha prueba se analizaron mediante una técnica de análisis de contenido Servan y Servan (2010), teniendo en cuenta la clasificación que vimos, según Carrión.

Los errores más comunes fueron: Para el primer polinomio, de los 26 estudiantes, el 52 % presentaron errores. En la figura 2.1 podemos ver un ejemplo de error de entrada.



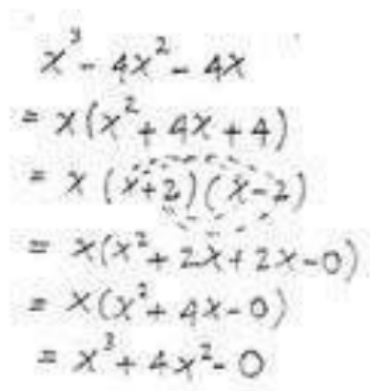
$$15x^2 + 7x - 2$$

$$15(2)^2 + 7(2) - 2$$

$$60 + 14 - 2 = 72$$

Figura 2.1: Error de entrada (Baltazar et al., p.681).

En cuanto a la segunda expresión, cometieron errores 12 de los alumnos. Podemos observar en la figura 2.2, error de operación, al dar un mal uso tanto de las operaciones como de los signos.



$$x^3 - 4x^2 - 4x$$

$$= x(x^2 + 4x + 4)$$

$$= x(x+2)(x-2)$$

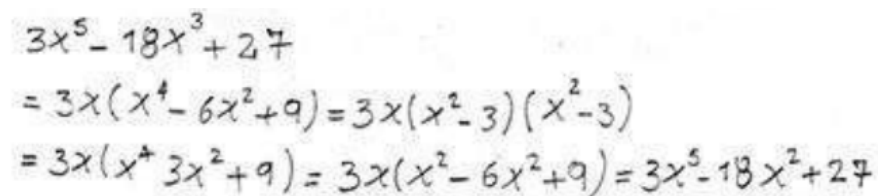
$$= x(x^2 + 2x + 2x - 0)$$

$$= x(x^2 + 4x - 0)$$

$$= x^3 + 4x^2 - 0$$

Figura 2.2: Error de operación (Baltazar et al., p.682).

En la última expresión, el 47,22 % de los alumnos cometieron errores de escritura. Como se muestra en la figura 2.3. Además de errores de entrada (al intentar sacar x como factor común) y errores de operación (al cambiar los signos).



$$\begin{aligned}
 & 3x^5 - 18x^3 + 27 \\
 &= 3x(x^4 - 6x^2 + 9) = 3x(x^2 - 3)(x^2 - 3) \\
 &= 3x(x^4 - 3x^2 + 9) = 3x(x^2 - 6x^2 + 9) = 3x^5 - 18x^2 + 27
 \end{aligned}$$

Figura 2.3: Error de escritura (Baltazar et al., p.682).

Las distintas categorías que se han observado, permiten un diagnóstico más efectivo para ayudar a los estudiantes en sus dificultades y carencias de sentido en cuanto a los objetos matemáticos.

En conclusión, los errores cometidos por los estudiantes son debidos a los signos, atribuirle valores a las letras e incluso a la motivación por la asignatura. Por lo que la solución que se plantea es que los docentes implementen clases dinámicas, para que los alumnos asimilen mejor los conceptos y no solo aprendan procedimientos.

Parte V

Fundamentación epistemológica:
Polinomios. Operaciones.
Fórmulas de Newton. Divisibilidad
de polinomios. Fracciones
algebraicas.

Capítulo 3

Introducción y motivación

Importante dentro del álgebra, encontramos el estudio de las ecuaciones algebraicas. Muchas civilizaciones antiguas, como la mesopotámica, babilónica o egipcia tenían métodos para resolver problemas cotidianos con un álgebra muy elemental. Como podía ser, el reparto de cosechas o materiales. Aunque tenían una notación muy abstracta.

Hubo grandes descubrimientos, como los de Cardano o Tartaglia, ambos matemáticos, que contribuyeron en la búsqueda de fórmulas con las que resolver algunas ecuaciones algebraicas. Y entre otros resultados teóricos interesantes, Descartes contribuyó de forma importante al desarrollo de la notación que tenemos actualmente y Ruffini, intentó demostrar que no era posible encontrar una fórmula, con la que calcular las soluciones de todos los polinomios generales de grado cinco o superior.

El matemático Abel (s. XIX) realizó un estudio sobre la teoría de Galois, a través de la teoría de cuerpos. Y proporcionó una elegante respuesta a lo que pretendía Ruffini, comprobar que no existía dicha fórmula.

Actualmente, se estudian en Secundaria muchos temas en los que intervienen polinomios. Y a veces, los alumnos no conocen su relevancia. Por supuesto, están íntimamente relacionados con las demás áreas de las matemáticas, pues pueden ser consideradas como funciones reales de variable real. Podemos ver su utilidad en ciencias como la Física o Química (para expresar matemáticamente las leyes elementales), Economía (calcular el consumo en función del ingreso), Ingeniería forestal (cantidad de árboles por replantar tras talar una zona de un bosque), Medicina (calcular dosis adecuadas de un medicamento), etc. Por todo esto, merece gran importancia el estudio de los polinomios y no debe quedar como una imposición sin utilidad en la enseñanza secundaria.

Capítulo 4

El anillo de los polinomios en una variable

El estudio de la divisibilidad en polinomios se puede tratar en ambientes más generales. Vamos a introducir varias definiciones que posibiliten su estudio, y estas podrán extenderse a dominios más ambiguos.

Definición 4.1 Un conjunto A se denomina **anillo**, si se han definido sobre él dos operaciones binarias, se denota por $(A, +, \cdot)$. Verificando que:

1. La suma es asociativa $\forall a, b, c \in A \ (a + b) + c = a + (b + c)$
2. La suma es conmutativa $\forall a, b \in A \ a + b = b + a$
3. Existe elemento neutro $\forall a \in A \ a + 0 = a$
4. Existe elemento simétrico $\forall a \in A \ \exists b \in A$ tal que $a + b = 0$
5. El producto es asociativo $\forall a, b, c \in A \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. Distributividad del producto sobre la suma $\forall a, b, c \in A \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Definición 4.2 Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, llamaremos **anillo con unidad** si existe un elemento $1_A \in A$ tal que $\forall a, \ a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$. Lo notaremos por $(A, +, \cdot, 1_A)$.

Definición 4.3 Sea $(A, +, \cdot, 1_A)$ un anillo con unidad, si además se cumple la propiedad conmutativa para el producto. Diremos que es un **anillo conmutativo con unidad**.

En adelante, denotaremos por A al anillo conmutativo con unidad, $(A, +, \cdot, 1_A)$. Ya que a partir de aquí todos los ejemplos de anillos con los que trabajaremos serán conmutativos, por lo que omitiremos mencionarlo explícitamente.

Definición 4.4 Se le llama **unidad** al elemento del anillo A con unidad 1_A , que cumple $u \cdot v = v \cdot u = 1_A$.

Al conjunto de estos elementos se le denota por $U(A)$.

Ejemplo 4.1 En el anillo $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, serían unidades $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1$.

Definición 4.5 Se dice que dos elementos son **asociados**, $a \sim b$, sii existe $u \in U(A)$ tal que $a = u \cdot b$.

Definición 4.6 Sea $a \in A, a \neq 0$. Se dice que a es **divisor de cero** si $\exists b \in A, b \neq 0$ tal que $a \cdot b = 0$.

Ejemplo 4.2 En $\mathbb{Z}^2$, $(0, 1) \times (0, 1) = (0, 0)$. Por tanto, ambos serían divisores de cero.

Llamaremos **cuerpo** al anillo conmutativo, donde todo elemento $a \in A, a \neq 0$ admite un inverso, que se suele denotar por a^{-1} y cumple que $a \cdot a^{-1} = 1_A$.

Definición 4.7 (DI) Sea A un anillo conmutativo, se dice **dominio de integridad** si no tiene divisores de cero, es decir,

$$ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

Todo cuerpo es DI. Y todo DI finito es un cuerpo.

Nociones básicas sobre el estudio de divisibilidad dentro de cualquier anillo son:

Definición 4.8 Sea $a, b \in A$. Se dice que a es **divisor** de b sii $\exists c \in A$ tal que $b = ac$. Se denota $a|b$.

Definición 4.9 Sea $a, b \in A$. Se dice que a es **múltiplo** de b sii $\exists c \in A$ tal que $a = bc$. Se denota $a|b$.

Definición 4.10 Sea A un anillo conmutativo. Se dice que $p \in A, p \neq 0$ y $p \notin U(A)$ es un elemento **irreducible** si verifica que $p = s \cdot r$ entonces, o bien $s \in U(A)$ o $r \in U(A)$.

Definición 4.11 Sea A un anillo conmutativo, un elemento $p \in A, p \neq 0$ y $p \notin U(A)$ es **primo** si $p|ab$ entonces $p|a$ o $p|b$.

Todo elemento primo es irreducible. El recíproco no siempre es cierto.

Ejemplo 4.3 En $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. El número 3 es irreducible pero no primo, ya que 9 puede ser escrito como $(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, $3|9$ pero no divide a ninguno de estos factores.

Definición 4.12 (DFU) Un DI es dominio de factorización única si todo elemento, no nulo y no unidad, tiene una única factorización en elementos irreducibles.

En este dominio los conceptos de primo e irreducible coinciden, por ejemplo en el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros. También, para el anillo de polinomios con coeficientes en K van a coincidir, pero no todos son así.

Definición 4.13 Sea A un anillo, un subconjunto $I \subset A$ se llama **subanillo** si I con las operaciones del anillo, es de nuevo un anillo.

Definición 4.14 Sea A anillo conmutativo, llamaremos **ideal** a todo subanillo, I , que verifique estas dos condiciones:

1. Si $a, b \in I$, entonces $a + b \in I$
2. Si $a \in I$ y $c \in A$, entonces $a \cdot c \in I$

Además, un ideal se dice **principal** si está generado por un único elemento, $I = \langle r \rangle$. Es decir, todo elemento $x \in I$ puede escribirse como $x = sr$.

Definición 4.15 (DIP) Un DI es dominio de ideales principales si todo ideal I del anillo es principal.

Ejemplo 4.4 En $\mathbb{Z}$, $10 = 2 \cdot 5$. Por lo que el ideal $\langle 10 \rangle \subseteq \langle 5 \rangle$. De esta forma, existe un orden a través de las cadenas de ideales y, en ellos, los irreducibles se caracterizan a través de los maximales.

Lema 4.1 Sea A un DIP y $a \in A$, $a \neq 0$ y $a \notin U(A)$ entonces son equivalentes:

- I) a es primo
- II) a es irreducible
- III) El ideal $\langle a \rangle$ es maximal

Teorema 4.2 Todo DIP es un DFU.

Demostración. Empezamos probando que todo elemento $a \in A$, $a \neq 0$ y $a \notin U(A)$ es producto finito de irreducibles. Probaremos por reducción al absurdo la existencia. Ya que, existiría un elemento a_0 que no se podría expresar como producto finito de elementos irreducibles. En particular, a_0 no sería irreducible y lo escribiríamos como $a_0 = a_1 \cdot a'_1$, ambos no unidades. Tendríamos así, $\langle a_0 \rangle \subset \langle a_1 \rangle$ y $\langle a_0 \rangle \subset \langle a'_1 \rangle$. Por otra parte a_1, a'_1 no se podrían expresar como producto de irreducibles (porque entonces expresaría a a_0).

Suponemos que a_1 no es producto finito de elementos irreducibles. Y aplicando este proceso, obtendríamos una cadena $\langle a_0 \rangle \subset \langle a_1 \rangle \subset \langle a_2 \rangle \subset \dots$ cuya unión será un ideal, $I \in A$. Luego generado por un elemento $a \in A$. Como $a \in I$, $\exists n$ tal que $a \in \langle a_n \rangle$, es decir, $a = ba_n$ para algún $b \in A$. Por otro lado, $a_{n+1} \in I$, $a_{n+1} = ca$ para algún $c \in A$. Por tanto, $a_{n+1} = cba_n$ ($\langle a_{n+1} \rangle \subset \langle a_n \rangle$). Con lo que ambos

ideales serían iguales, llegando a ¡contradicción!.

Ahora probamos que dicha descomposición es única. Cogemos dos descomposiciones en irreducibles (o primos, por el lema 4.1) de a : $a = b_1 b_2 \dots b_n = c_1 c_2 \dots c_m$. Como $b_1 | a$, divide a algún c_j , $j = 1, \dots, m$, suponemos c_1 . Por tanto, $c_1 = u_1 b_1$ y como c_1 y b_1 son elementos irreducibles, u_1 es una unidad. Entonces $b_2 \dots b_n = u_1 c_2 \dots c_m$, repitiendo el proceso, llegamos a la conclusión de que, salvo unidades la descomposición es única. $\square$

Definición 4.16 (DE) Un DI es dominio euclídeo si existe una aplicación llamada, función euclídea, $\delta : A - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ verificando que:

- I) $\delta(ab) > \delta(a) \quad \forall a, b \neq 0$.
- II) $\forall a, b \in A$ si $b \neq 0$, $\exists q, r \in A$ tal que $a = bq + r$, donde $\delta(r) < \delta(b)$ o $r = 0$.

Ejemplo 4.5 El anillo $\mathbb{Z}$ es un DE. Tomando la función euclídea, valor absoluto.

Respecto al anillo de polinomios, será el grado como veremos más adelante.

Teorema 4.3 *Todo DE es un DIP.*

Demostración. Sea $I \neq 0$ un ideal. Tomamos $b \in I, b \neq 0$ tal que $\delta(b)$ sea mínimo y vemos que b genera I . En efecto, sea un elemento $a \in I$. Por ser A DE, existen $q, r \in A$ tales que $a = qb + r$, con $r = 0$ o $\delta(r) < \delta(b)$. Como $r = a - qb$, está en I y no podría ser que $\delta(r) < \delta(b)$. Por lo tanto, $r = 0$, luego $a = qb$. Y por último, tendríamos que todo elemento de I es múltiplo de b . $\square$

Una vez definidos los distintos dominios, pretendemos estudiar el significado de divisibilidad, a partir del significado de referencia del máximo común divisor, que veremos en detalle.

La relación entre los distintos dominios podemos considerarla con la siguiente figura adaptada (Ordóñez, 2018, p.66).



Figura 4.1: Implicaciones (no recíprocas) entre dominios.

Definición 4.17 $A[X]$ es el **conjunto de polinomios** en la indeterminada X con coeficientes en A , donde la expresión de cualquier polinomio viene dada de la siguiente forma:

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \quad (4.1)$$

donde los coeficientes del polinomio, $a_i \in A \quad \forall i = 0, \dots, n$.

Notamos $gr(P)$ al grado del polinomio, esto es, el máximo de los exponentes de la variable.

Si P es un polinomio no nulo, el **coeficiente principal/líder** será $a_n \neq 0$, siendo n el grado del polinomio. Si el coeficiente es 1, se le llama polinomio mónico.

Si P es un polinomio nulo, su **coeficiente principal/líder** es 0 y por convenio, tomamos como grado $-\infty$.

4.1. Suma de polinomios

Definición 4.18 Sean P y Q dos polinomios, $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$, $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$. Se define la suma de $P+Q$ como:

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) X^i$$

Suponiendo que $a_i = 0$ si $i > m$ cuando $m < n$ y $b_i = 0$ si $i > n$ cuando $n < m$.

Proposición 4.4 El conjunto de los polinomios $A[X]$ con la operación suma, forman un grupo abeliano, verificando:

1. propiedad asociativa
2. existencia de elemento neutro
3. existencia de elemento opuesto
4. propiedad conmutativa

De forma análoga, la resta de polinomios $P-Q$ puede observarse como:

$$P - Q = \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i - b_i) X^i$$

Proposición 4.5 Respecto al grado de la suma/resta de polinomios se observa que:

$$gr(P \pm Q) \leq \max(gr(P), gr(Q))$$

Ejemplo 4.6 Sea $P = (x^3 + 2x^2 + x + 1)$ y $Q = (-x^3 + x^2)$, sabemos que $gr(P+Q) \leq 3$.

Si lo calculamos, $P + Q = 3x^2 + x + 1 \Rightarrow gr(P + Q) = 2 < 3$.

4.2. Producto de polinomios

Definición 4.19 Sean $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$, $Q = \sum_{j=0}^n b_j X^j$ se define el polinomio producto como:

$$P \cdot Q = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i,j:i+j=k} a_i b_j \right) X^k$$

Proposición 4.6 Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, entonces $(A[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Proposición 4.7 Con respecto al grado del producto tenemos que:

$$\text{gr}(P \cdot Q) \leq \text{gr}(P) + \text{gr}(Q)$$

Proposición 4.8 Si ahora, tomamos A como dominio de integridad, $A[X]$ también lo será.

Proposición 4.9 Si A es DI, las unidades del anillo de polinomios serán las del anillo A .

Ejemplo 4.7 $U(\mathbb{Z}[X])$ son las de $\mathbb{Z}$, $u = 1, -1$.

Análogamente, se pueden trasladar de forma natural los conceptos de divisor, múltiplo, irreducible, primo... que hemos definido anteriormente al anillo de polinomios. Por ejemplo: polinomio irreducible.

En muchas ocasiones son muy útiles las fórmulas de Newton que repasaremos en la siguiente sección. En concreto, para la Educación Secundaria las identidades notables son una gran herramienta en todos los cursos.

4.3. Fórmulas de Newton

Para llegar a obtener el desarrollo de la fórmula de Newton, vamos a necesitar repasar los números combinatorios. Y concluiremos con la fórmula de Leibniz, que podemos verla como la generalización de la potencia de un polinomio.

4.3.1. Números combinatorios. Introducción

Se definen los números combinatorios con donde $n \geq r$ como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

teniendo en cuenta sus propiedades más importantes.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
3. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Podemos observar que si colocamos los números combinatorios en forma de triángulo

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
 \end{array}$$

y aplicamos la propiedad 3. de forma reiterada, obtenemos que cada número será suma de los dos que tiene encima. Lo que nos da lugar al triángulo de Pascal. Para los laterales, por la propiedad 1., sabemos que valen uno. Por una parte, el lateral izquierdo será siempre de la forma $\binom{n}{0}$ y el derecho, $\binom{n}{n}$ con $n \geq 0$.

4.3.2. Binomio de Newton

Con lo visto anteriormente sobre números combinatorios podemos obtener el desarrollo de la potencia de un binomio, para verlo como un polinomio. Todos los números que encontramos en cada fila del triángulo corresponderían a los coeficientes del desarrollo de las potencias del binomio de Newton.

Proposición 4.10 (Binomio de Newton) *Se verifica que*

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

De esta forma, tenemos que los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$, se encuentran en la fila $n + 1$ del triángulo de Pascal.

4.3.3. Aplicación a las fórmulas de Leibniz

La fórmula de Newton se aplica a binomios, si lo que se pretende es generalizar sobre la potencia de un polinomios general, usaremos la de Leibniz.

Proposición 4.11 (Fórmula de Leibniz) *Se tiene que*

$$(a + b + \dots + k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \kappa!} a^\alpha b^\beta \dots k^\kappa$$

cumpliendo que $\alpha + \beta + \dots + \kappa = n$

En particular, para un binomio obtendríamos la fórmula de Newton.

Capítulo 5

Divisibilidad en el anillo de polinomios

Los conceptos generales para un anillo que hemos ido viendo en el capítulo anterior, como el de divisor, asociado, primo, irreducible,... pueden trasladarse directamente a DI. Y los iremos particularizando en otros dominios.

Definición 5.1 Dos polinomios $P, Q \in A[X]$ son **asociados** si existe $a \in U(A)$, $a \neq 0$, tal que $P = aQ$.

Ejemplo 5.1 En $\mathbb{R}[X]$ los polinomios $P = 5x^4 + 3x + 2$ y $Q = \frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x + 1$ son asociados ya que $Q = \frac{1}{2}P$. Pero no lo serían en $\mathbb{Z}[X]$.

Proposición 5.1 Sean $P, Q \in A[X]$, $P, Q \neq 0$. Si $Q|P$ entonces $gr(Q) \leq gr(P)$.

Definición 5.2 Sea $P, Q \in A[X]$, el $M.C.D(P, Q) = D \in A[X]$ tal que:

- i) $D|P$ y $D|Q$
- ii) Si $D' \in A[X]$, $D'|P$ y $D'|Q$ entonces $D'|D$.

Podemos hallar el M.C.D. calculando los divisores de cada polinomio, seleccionamos los comunes, y de ellos, nos quedamos con el máximo.

Proposición 5.2 El M.C.D. es único salvo asociados.

Proposición 5.3 En DI, $\text{Primo} \Rightarrow \text{Irreducible}$.

Pero en general, el recíproco no es cierto. Podemos verlo sobre el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ en el que el número 3 es irreducible, pero no primo.

5.1. M.C.D y m.c.m en DFU

A continuación, podemos observar una gran analogía con la aritmética de los números enteros y los polinomios. En estos dominios existe una mayor concreción.

Proposición 5.4 Si A es DFU $\Rightarrow A[X]$ es DFU.

En este dominio coinciden los conceptos de **primo e irreducible**. Serán importantes para la factorización de polinomios a través de ellos.

Si pensamos por ejemplo, en la noción de polinomio irreducible, en concordancia con lo dicho anteriormente, sería la definición análoga a número primo en la aritmética de $\mathbb{Z}$.

Definición 5.3 Sea $P \in A[X]$ un polinomio $P \neq 0$ y $P \notin U(A[X])$. Diremos que el polinomio P es **irreducible** si verifica que $P = S \cdot R$ entonces $S \in U(A[X])$ o $R \in U(A[X])$.

Ejemplo 5.2 El polinomio $2(x+1)$ no es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$ por no ser 2 unidad. Pero si lo es en $\mathbb{Q}[X]$ o $\mathbb{R}[X]$.

En los DFU, el **máximo común divisor** (M.C.D) se calculará como “comunes (de los irreducibles) elevados al menor exponente”.

Y el **mínimo común múltiplo** (m.c.m) como “comunes y no comunes (de los irreducibles) al mayor exponente”.

Pero, por otro lado el estudio de los primos en estos dominios no es sencillo. Por lo que buscaremos ambientes más propicios. Veremos más adelante que ocurre en DIP y DE.

5.2. M.C.D y m.c.m en DIP

Como $A[X]$ es un anillo conmutativo, vamos a dar definiciones generales de M.C.D y m.c.m y caracterizarlos en términos de ideales del anillo.

Proposición 5.5 Sea I un ideal del anillo de polinomios, existe un polinomio $P \in A[X]$ tal que I es el conjunto de todos los múltiplos de P .

Dicho polinomio P es único, salvo asociados.

Teorema 5.6 Sean P y Q dos polinomios de $A[X]$. El **máximo común divisor**, M.C.D, será el polinomio base del generador $\langle P \rangle + \langle Q \rangle$.

Proposición 5.7 (Identidad de Bezout) Sea $P, Q \in A[X]$; $P, Q \neq 0$. Cuyo M.C.D. $(P, Q) = d$, entonces existe $R, S \in A[X]$ tales que $d = PR + QS$.

Proposición 5.8 Se dice que dos polinomios $P, Q \in A[X]$ son **coprimos**, cuando M.C.D. $(P, Q) = 1$.

Demostración. (Utilizando la Identidad de Bezout) Si M.C.D. $(P, Q) = d$, donde $d \in A[X]$, entonces M.C.D. $(P/d, Q/d) = 1$ ya que el polinomio d divide a los otros dos.

Además, existen otros dos polinomios $R, S \in A[X]$ tales que:

$$d = R \cdot P + S \cdot Q$$

Luego,

$$1 = R \cdot \frac{P}{d} + S \cdot \frac{Q}{d}$$

□

Teorema 5.9 Sean P y Q dos polinomios de $A[X]$. El **mínimo común múltiplo**, m.c.m, es el polinomio generador del ideal $\langle P \rangle \cap \langle Q \rangle$.

Proposición 5.10 Sean P y Q dos polinomios de $A[X]$ y $M = \text{m.c.m.}(P, Q)$. El polinomio M verifica:

1. P/M Y Q/M (M es múltiplo de P y Q)
2. Si existe $M' \in A[X]$ tal que $P/M' \text{ Y } Q/M' \Rightarrow M/M'$

5.3. Dominios Euclídeos

En este capítulo, trabajaremos con el caso particular en el que el anillo conmutativo sea un cuerpo, llamado K . Este nos va a permitir aplicar el algoritmo de la división para todos los polinomios de este dominio.

Teorema 5.11 (Algoritmo de la división) Sea K un cuerpo. Dados dos polinomios $P, D \in K[X]$ y $D \neq 0$, existen dos únicos polinomios Q y $R \in K[X]$ verificando que:

$$P = QD + R \quad \text{si } \text{gr}(R) < \text{gr}(D) \text{ o } R = 0.$$

Demostración. Primero empezaremos probando la existencia: Mediante inducción sobre el grado de P .

Si P es un polinomio constante, bastaría con tomar $Q = 0, R = P$.

Definimos:

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ con } a_n \neq 0 \text{ (gr}(P) = n)$$

$$D = \sum_{j=0}^m b_j X^j \text{ con } b_m \neq 0 \text{ (} gr(D) = m \text{)}$$

Tendíamos nuevamente que, si $n < m$, $Q = 0$ y $R = P$.

Suponemos $n \geq m$. Dividiendo los monomios de los coeficientes líderes (se puede hacer ya que K es un cuerpo), obtenemos el primer cociente

$$Q_0 = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$$

Igualmente, definimos $R_0 = P - Q_0 D$, que sería el primer resto. Si $R_0 = 0$ o $gr(R_0) < gr(D)$, habríamos terminado, tomando $Q = Q_0$ y $R = R_0$.

Si no, tendremos que seguir repitiendo el proceso. Teniendo ahora que $gr(R_0) < gr(P)$, ya que los términos de la posición n se cancelan. Entonces, por la hipótesis de inducción, existirían Q_1 y R_1 , correspondiendo al cociente y resto de la división de R_0 entre D . Es decir,

$$R_0 = Q_1 D + R_1$$

donde $R_1 = 0$ o $gr(R_1) = gr(D)$. Si recopilamos, tenemos que:

$$P = Q_0 D + R_0 = Q_0 D + Q_1 D + R_1 = (Q_0 + Q_1) D + R_1$$

Entonces tomando $R = R_1$ y $Q = Q_0 + Q_1$ obtenemos lo que queríamos. Y quedaría demostrada la parte de *existencia*.

Por último, nos quedaría demostrar la unicidad. Para ellos vamos a suponer dos cocientes Q, Q' y dos restos R, R' :

$$P = QD + R \text{ y } R = 0 \text{ o } gr(R) < gr(D)$$

$$P = Q'D + R' \text{ y } R' = 0 \text{ o } gr(R') < gr(D)$$

Entonces, tenemos que

$$QD + R = Q'D + R'; \quad (Q - Q')D = R' - R$$

Si $R = R'$ tendríamos que $(Q - Q')D = 0 \Rightarrow$ como $D \neq 0$, $Q - Q' = 0$, es decir, $Q = Q'$.

Tenemos que probar que no puede darse que $R \neq R'$. Si esto ocurriese, $R - R' \neq 0$ y $Q - Q' \neq 0$, basta con comparar los grados para llegar a ¡contradicción!

$$gr[(Q - Q')D] = gr(Q - Q') + gr(D) \geq gr(D)$$

$$gr(R' - R) \leq \max(gr(R), gr(R')) < gr(D)$$

Como supusimos que $R \neq R'$. Llegamos a la conclusión de que $R = R'$, y por lo tanto, $Q = Q'$. Quedando así probada la *unicidad* del cociente y del resto.

□

Por tanto, al realizar la división euclídea de P entre D , llamaremos cociente al polinomio Q y resto a R .

Cuando el resto de esta división es 0, se dice que P es múltiplo de Q , o bien, Q es divisor de P .

Por otra parte, observamos que la función euclídea es el grado del polinomio.

Proposición 5.12 *Sea K DE $\Rightarrow K[X]$ también lo es.*

Definición 5.4 Dado un polinomio $P \in K[X]$. Llamaremos **raíces o ceros** de un polinomio a todo elemento $a \in K$ verificando que el valor numérico de $P(a) = 0$.

Corolario 5.13 (Teorema del resto) *Sea $P \in K[X]$, $a \in K$. El resto de la división de un polinomio P por $X - a$ coincide con el valor $P(a)$ del polinomio P cuando $X = a$.*

Demostración. Dividiendo P por $X - a$ tendríamos

$$P(X) = Q(X) \cdot (X - a) + R$$

donde el resto debe ser un polinomio constante. Luego, si evaluamos esta expresión en $X = a$, obtenemos que $P(a) = R$. □

Corolario 5.14 (Teorema del factor) *Sea $a \in K$. Un polinomio $P \in K[X]$ es divisible por $X - a$ sii a es raíz de P .*

Este corolario es útil al resolver ecuaciones, ya que al encontrar alguna raíz del polinomio, el problema inicial se reduce a resolver una ecuación de un grado menor.

Corolario 5.15 *Sea $P \in K[X]$ un polinomio y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ raíces distintas del polinomio, entonces P se puede factorizar como:*

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (X - \lambda_r) \cdot Q(X)$$

Si comparamos los grados en ambos miembros de la ecuación, observamos que si un polinomio es de grado n , este no podrá tener más de n raíces en K .

El siguiente resultado puede ser útil para el cálculo del máximo común divisor.

Proposición 5.16 (Algoritmo de Euclides) *Sean P y D dos polinomios de $K[X]$. Si existen Q y $R \in K[X]$ tales que $P = DQ + R$, entonces el $M.C.D(P, D) = M.C.D(D, R)$*

Si se aplica reiteradamente este resultado y sabiendo que el grado de los sucesivos restos irá decreciendo, llegaremos a un momento en el que el resto será cero, por el algoritmo de Euclides. El $M.C.D(P, D)$ será el último resto no nulo.

Una vez calculado el máximo común divisor podemos calcular el mínimo común múltiplo con la siguiente proposición.

Proposición 5.17 Sean P y Q dos polinomios de $K[X]$. Si $D = M.C.D(P, Q)$ y $M = m.c.m(P, Q)$ se verifica que:

$$D \cdot M \sim P \cdot Q, \text{ es decir, son asociados}$$

5.4. Descomposición factorial

Sabemos que por ser K un cuerpo, el anillo $K[X]$ es un DE y por tanto, también un DIP y DFU. Por lo que estudiaremos la factorización de dicho anillo.

Proposición 5.18 Las unidades del anillo $K[X]$ son los polinomios constantes no nulos.

Hasta ahora hemos hablado de polinomios en una indeterminada. Pero si definimos para cada polinomio una función como la siguiente, podemos notar la diferencia entre, $P(x)$ es una función polinómica y $P[X]$ es una función del anillo $K[x]$.

$\forall P \in K[X]$ definimos $P^* : K \rightarrow K$ la aplicación, tal que si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, entonces

$$P^*(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Aunque, escribiremos $P(x)$ en lugar de $P^*(x)$.

Existen distintos resultados, entre ellos podemos destacar:

Cuando se quiere factorizar un polinomio una aplicación práctica importante es la regla de Ruffini.

Proposición 5.19 (Regla de Ruffini) Dado $k \in K$. Para cada polinomio $P \in K[X]$ existe un polinomio $Q \in K[X]$ verificando que:

$$P(x) = Q(x)(x - k) + P(k)$$

Además, $P(k) = 0 \Leftrightarrow (x - k) | P(x)$

Demostración. Bastará con obtener la división del polinomio $P(x)$ entre $(x - k)$:

$$P(x) = Q(x)(x - k) + R(x)$$

siendo $Q(x)$ el cociente y el resto $R(x)$, con grado $R(x) < \text{gr}(x - k) = 1$. Nos queda que $\text{gr}(R) = 0 \Rightarrow R(x) = r$ constante.

Entonces, si evaluamos en $x = k$, nos queda:

$$P(k) = Q(k)(k - k) + r \Rightarrow P(k) = r$$

□

Cabe destacar un resultado importante para encontrar las raíces de un polinomio $P \in \mathbb{Q}[X]$ con coeficientes enteros.

Teorema 5.20 (Criterio de Gauss) Sea $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de P , con $p, q \in \mathbb{Z}$ primos entre sí. Entonces: $p|a_0$ y $q|a_n$.

Teorema 5.21 (Criterio de Eisenstein) Sea $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un polinomio primitivo y $p \in K$ un primo tal que $p \nmid a_n, p \mid a_i, i = 0, \dots, n-1$ y $p^2 \nmid a_0$. Entonces P es irreducible en $K[X]$.

Definición 5.5 Un cuerpo es **algebraicamente cerrado**, si todo polinomio no constante de grado n , tiene exactamente n raíces en él.

Teorema 5.22 (Fundamental del Álgebra) El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos es algebraicamente cerrado.

Capítulo 6

Cuerpo de fracciones de K

Definición 6.1 Una fracción algebraica está formada por dos polinomios $N, D \in K[X]$ con $D \neq 0$. Denominados numerador y denominador respectivamente. Se representa por $\frac{N}{D}$.

De la misma forma que a partir del anillo $\mathbb{Z}$ podemos establecer el cuerpo de fracciones $\mathbb{Q}$, a partir del anillo de polinomios $K[X]$ podemos construir $K(x)$ el cuerpo de fracciones algebraicas. Mediante una relación de equivalencia, R , en $K[X] \times \{K[X] - \{0\}\}$ dada por

$$\frac{N}{D} R \frac{N'}{D'} \Leftrightarrow N \cdot D' = D \cdot N'$$

Proposición 6.1 Sea el conjunto cociente $K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R$ sus clases de equivalencia son de la forma:

$$[(N, D)] = \{(N', D') \in K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} : (N, D) R (N', D')\}$$

Se elige como representante de la clase de equivalencia a la fracción irreducible $\frac{N}{D}$, tal que $M.C.D.(N, D) = 1$.

6.1. Suma de fracciones

Definición 6.2 Definimos en $K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R$ la ley de composición interna, llamada suma, como:

$$\forall \left[\frac{A}{B} \right], \left[\frac{C}{D} \right] \in K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R; \left[\frac{A}{B} \right] + \left[\frac{C}{D} \right] = \left[\frac{AD + BC}{BD} \right]$$

Dicha operación está bien definida, ya que el numerador $AD + BC \in K[X]$ y el denominador $BD \in K[X] - \{0\}$

Proposición 6.2 *La suma definida en $K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R$ verifica las siguientes propiedades por ser un grupo abeliano:*

- Asociativa
- Conmutativa
- Existencia de elemento neutro
- Existencia de elemento opuesto/simétrico

6.2. Producto de fracciones

Definición 6.3 Definimos en $K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R$ la ley de composición interna, llamada producto, como:

$$\forall \left[\frac{A}{B} \right], \left[\frac{C}{D} \right] \in K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R; \left[\frac{A}{B} \right] \cdot \left[\frac{C}{D} \right] = \left[\frac{AC}{BD} \right]$$

De nuevo podemos ver que la operación está bien definida, ya que el numerador $AC \in K[X]$ y el denominador $BD \in K[X] - \{0\}$, por ser producto de dos polinomios no nulos.

Proposición 6.3 *El conjunto $(K[X] \times \{K[X] - \{0\}\} / R, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, por lo que es llamado **cuerpo de fracciones** y se notará $K(x)$.*

6.3. Descomposición en fracciones simples

Buscaremos expresiones de la forma más simple posible.

Definición 6.4 Una fracción algebraica $\frac{A}{B} \in K(x)$ se dice **simple** si $M.C.D.(A, B) = 1$

Proposición 6.4 *Dada $\frac{A}{B} \in K(x)$ y $P \in K[X]$ no nulo. Se verifica que $\frac{A}{B} = \frac{AP}{BP}$*

Corolario 6.5 *Para cada $\frac{A}{B} \in K(x)$, existen dos únicos polinomios $A', B' \in K[X]$ tal que:*

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \text{ con } M.C.D.(A', B') = 1$$

Proposición 6.6 *Todo elemento $\frac{A}{B} \in K(x)$, fracción simple, puede escribirse de manera única como:*

$$\frac{A}{B} = P + R$$

donde $P \in K[X]$ y R es una fracción simple $\frac{A'}{B'}$ con $gr(A') < gr(B)$.

El polinomio P que nos da esta proposición se llama parte entera de $\frac{A}{B}$.

Lema 6.7 Sea $\frac{A}{B} \in K(x)$ con $gr(A) < gr(B)$, $A \neq 0$. Si $B = B_1 \cdot B_2 \cdot \dots \cdot B_n$ con B_i, B_j coprimos $\forall i \neq j$. Entonces $\frac{A}{B}$ se descompone de forma única como:

$$\frac{A}{B} = \frac{N_1}{B_1} + \dots + \frac{N_n}{B_n}$$

con $gr(N_i) < gr(B_i)$, si $i = 1, \dots, n$.

Esta descomposición tiene distintas aplicaciones, como es por ejemplo, el estudio de integrales.

Parte VI

Fundamentación curricular

En esta sección, lo que se pretende es analizar y determinar el alcance de los contenidos seleccionados para este tema. En qué curso se tratará la divisibilidad de polinomios y en qué profundidad, con respecto al currículo vigente, tanto a nivel nacional como autonómico.

Por otro lado, realizaremos un análisis didáctico de dos manuales de tercer curso de Educación Secundaria, siguiendo el marco teórico del EOS. La clasificación que hemos seguido se basa en el estudio de seis entidades primarias:

- situaciones-problemas
- lenguaje matemático
- conceptos
- proposiciones
- procedimientos y argumentos

Con el fin de realizar una comparación entre ambos manuales, viendo los aspectos positivos y negativos, para poder hacer nuestra propia propuesta didáctica posteriormente.

Capítulo 7

Análisis de los documentos curriculares

La unidad didáctica que veremos posteriormente se enmarca en el estudio sobre la divisibilidad en el anillo de polinomios. En el ámbito legislativo actual, con la LOMCE (2013), Ley orgánica de mejora de la calidad educativa, se presentan los documentos a tener en cuenta.

A nivel nacional, aparece el **Real Decreto 1105/2014**, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, que tomaremos como referencia para determinar los distintos elementos curriculares en la elaboración de la unidad didáctica.

En concreto, el Bloque 2: “Números y Álgebra” en el que encontramos los **contenidos** vinculados a la divisibilidad de polinomios:

- ↪ “Transformación de expresiones algebraicas” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 392).
- ↪ “Igualdades notables” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 392).
- ↪ “Operaciones elementales con polinomios” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 392).

El **criterio de evaluación** elegido seria el 3. “Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 392).

Y por último, los **estándares de aprendizaje evaluables**:

- ↪ 3.1. “Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 393).
- ↪ 3.2. “Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 393).
- ↪ 3.3. “Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 393).

A nivel autonómico, se seguirán las disposiciones del **Orden de 14 de Julio de 2016**, en la que se especifica que contenidos deben impartirse en cada curso de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Veremos que contenidos y a qué profundidad se dan estos en los diferentes cursos.

En primer de Educación Secundaria la divisibilidad se trabaja sobre números naturales. Recoge los siguientes contenidos

“Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.” (Consejería de Educación, 2016, p.207)

En segundo curso además, se empieza a trabajar con polinomios.

“Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.” (Consejería de Educación, 2016, p.209)

Pero es en las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º ESO, donde se estudia la divisibilidad de polinomios.

“Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.” (Consejería de Educación, 2016, p.192)

Por último en 4º ESO el estudio de la divisibilidad es más profundo.

“Utilización de igualdades notables. Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización. Ecuaciones de grado superior a dos. Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones.” (Consejería de Educación, 2016, p.195)

Capítulo 8

Análisis de libros de texto

Vamos a presentar dos libros de texto de distintas editoriales, *Anaya* (Colera, Gaztelu, Oliveira y Colera) y *SM* (Alcaide, Hernández y Serrano), centrándonos en el curso de 3º ESO, ya que es al que estará dirigida nuestra unidad didáctica. El criterio de elección para los libros de texto, además de ser dos de las editoriales más conocidas, se debe a que una de ellas era la utilizada en el centro, en el que realicé las prácticas y la otra recomendada por los profesores de allí.

Lo que pretendemos hacer, es un análisis didáctico de los libros de texto siguiendo el marco teórico del EOS. Existen diversos trabajos de análisis de manuales, como Ordoñez, C. (2018). Investigaciones, respecto del análisis de manuales, que utilizan también el EOS, son: Ordoñez, C. (2011), Gea, M. M. (2014), Parra-Urrea, Y. y Pino-Fan, L. (2017), Del Pino-Ruiz, J. y Estepa, A. (2017), Del Pino-Ruiz, J. (2019) y Balcaza, T. (2018). En las cuales se hacen operativas las entidades primarias, propuestas en dicho marco teórico, para el estudio de manuales. Y tendremos en cuenta también los conflictos semióticos potenciales que se definen según Godino, J.D.(2002) como: *“toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas”* (p. 258).

8.1. Marco teórico

Para la realización del análisis didáctico de manuales nos hemos basado en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, J.D. (2002), Godino J.D. y Batanero, C. (1994), Godino J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007), Godino J.D. (2017)). Cuyo proceso de enseñanza y aprendizaje se ve condicionado por diversos factores y procesos que intervienen en la mejora de la educación matemática .

8.1.1. Significados personales e institucionales

Los significados de los objetos matemáticos son considerados como emergentes de los sistemas de prácticas. Dependiendo de quién realiza las prácticas, podemos distinguir: los significados personales, cuando las realiza una persona. Y los significados institucionales, cuando las realizan los componentes de una institución (Godino y Batanero, 1994, p.334).

En cuanto a los significados institucionales, distinguimos cuatro tipos:

- **Referencial:** se usa como base para elaborar el significado pretendido.
- **Pretendido:** sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de institución.
- **Implementado:** es el sistema de prácticas ejercidas por el docente en un proceso de estudio.
- **Evaluable:** es el sistema que deriva de las prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Respecto de los significados personales, Godino, Batanero y Font (2012, pp. 53-54) proponen los siguientes tipos:

- **Global:** sistema de prácticas que es capaz de llevar a cabo el estudiante respecto a un objeto matemático.
- **Declarado:** prácticas que el alumno realiza en las pruebas de evaluación de aprendizajes, incluyendo tanto las correctas como incorrectas.
- **Logrado:** corresponde a los sistemas de prácticas manifestados correctos conforme a la institución.

8.1.2. Entidades primarias

Considerando la función que realizan los objetos en la actividad matemática, El EOS propone una clasificación. Tales objetos reciben el nombre de entidades primarias, que podemos ver representadas en la figura 8.1.

- **Lenguaje matemático:** son los términos, expresiones, notaciones o gráficos en sus diversos registros tales como escrito, oral, gestual...
- **Situaciones-problemas:** tales como aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios...

- **Conceptos:** los objetos que introducimos como definiciones o descripciones.
- **Proposiciones:** Enunciados sobre conceptos.
- **Procedimientos:** operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo.
- **Argumentos:** enunciados empleados para justificar o validar las proposiciones y procedimientos.

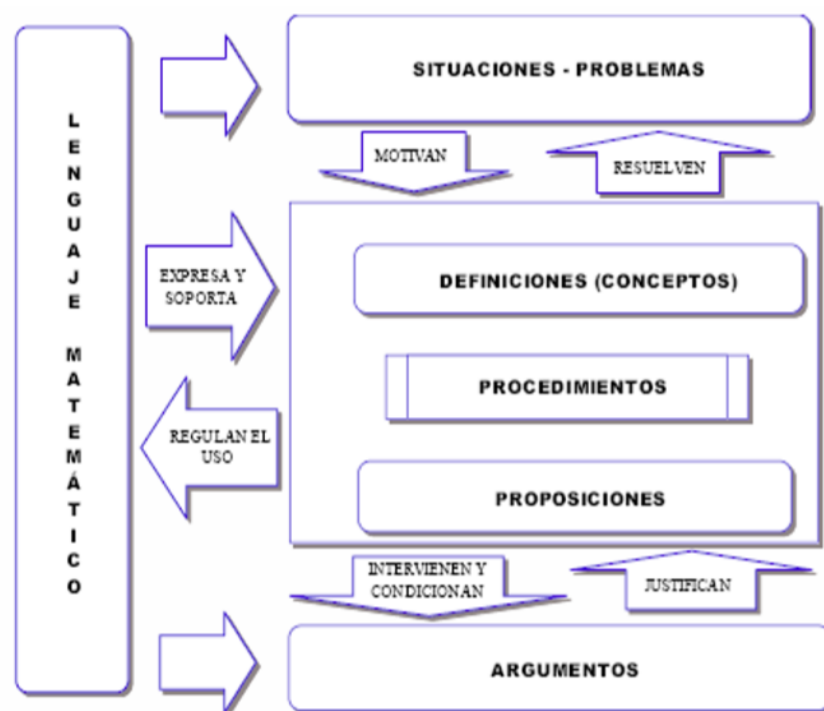


Figura 8.1: Configuración de entidades elementales (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009, p. 65).

También se pueden analizar las dificultades y errores en términos de conflictos semióticos que según Godino (2002), se definen como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.” (p.258).

Tanto el análisis de la divisibilidad en editorial Anaya como en SM, se encuentra en la parte X: Análisis de los libros de texto. En el que se analizan las entidades elementales que hemos visto anteriormente.

8.2. Discusión de resultados y comparativa

Como hemos podido observar en la parte epistemológica, el estudio de la divisibilidad sobre el anillo de los polinomios es complejo. Ya que va a depender del **dominio** en el que estemos trabajando, puesto que la generalización no es inmediata.

Principalmente, hay que destacar que ambos temas se desarrollan sobre dominios euclídeos. Con la diferencia de que en el manual 1 (ANAYA), solo trabajan sobre el anillo de los enteros, $\mathbb{Z}[X]$. Mientras que en el manual 2 (SM) además, también introducen el de los racionales, $\mathbb{Q}[X]$.

Un error muy común en el primer manual sería asumir que en la división, el polinomio con coeficiente principal mayor será el haya que tomar como dividendo. Para solucionarlo podemos presentar actividades en las que se utilicen números racionales.

Haremos una comparativa según las identidades primarias identificadas anteriormente para ambos manuales.

En cuanto a las **situaciones-problemas** en el primer manual existe escasez de problemas/ejercicios contextualizados lo que puede desmotivar al alumno, al no verle utilidad. Mientras que en el segundo manual si existen problemas contextualizados, en los ejercicios propuestos al final del tema.

Ambos libros, indican el grado de dificultad de los ejercicios en una escala de tres niveles. En SM 27 serían de un nivel de dificultad bajo (54 %), 18 de nivel medio (36 %) y 5 de nivel alto (10 %). En Anaya, 24 de nivel bajo (38 %), 37 medio (59 %) y 2 de nivel alto (3 %). Además en el manual 2, entre los ejercicios anteriores hay actividades resueltas. Y por último, podemos destacar que en ambos libros de texto para los ejercicios de autoevaluación pueden encontrar las soluciones en la web de cada editorial.

Según los tipos de **lenguaje** que hemos distinguido anteriormente, en ambos manuales existe variedad, que permite al estudiante el aprendizaje. Pero en el manual 2 predomina un lenguaje más formal, mientras que en el 1, natural/vernáculo.

Respecto a los **conceptos** observamos que ningún manual trata explícitamente el concepto de M.C.D o m.c.m. de polinomios. Pero además, en el primero tampoco definen el concepto de polinomio irreducible y ninguno trata la diferencia entre primo e irreducible, lo que puede llevar a un conflicto semiótico potencial más adelante. Ya que la generalización de estos objetos matemáticos respecto de los enteros no es inmediata.

Las **proposiciones** son muy escasas en ambos libros. Aunque el segundo manual presenta algunas más, trata el teorema del resto y el del factor.

Ambos libros utilizan **procedimientos** fáciles de entender, aunque la conexión entre estos podría mejorarse, ya que en el primer manual el apartado 5 explica la división y la regla de Ruffini, dándole poca importancia a la factorización, que la expresa como una aplicación de la regla de Ruffini. En SM, sí le dedican un apartado especial a la factorización.

No se aportan procedimientos para el cálculo de irreducibles, salvo regla de Ruffini, sin explicitarlo directamente. Tampoco se hace referencia alguna al algoritmo de Euclides como método para calcular el máximo común divisor.

En el primer manual, en el apartado de Investiga se propone un ejercicio para crear el triángulo de Pascal.

Como dijimos anteriormente, los **argumentos** son deductivos y muy generales. No se utilizan demostraciones por reducción al absurdo, ensayo-error... ya que corresponden a un nivel superior. Con la excepción en el segundo manual de la demostración del teorema del resto.

8.3. Conclusión y propuestas

En conclusión, respecto a las situaciones-problemas creemos que en ambos libros de texto se debería proponer la resolución de ejercicios finales para potenciar el trabajo personal del estudiante. Si bien, en ambos se ofrece la posibilidad de encontrar ejercicios resueltos en la web del manual.

Tanto en el manual 1 como en el 2, observamos que se enfocan en el estudio de los procedimientos, quedando en segundo plano el estudio y la profundización de los conceptos, como la comparativa entre primo e irreducible o el cálculo del M.C.D. que se supone como una generalización inmediata.

Aunque las proposiciones son escasas por el posible nivel que requieren, se debe trabajar el razonamiento deductivo que permita una mejora en los distintos componentes matemáticos.

Después de esta comparación de manuales, pretendemos en el próximo capítulo hacer nosotros una propuesta en la que se subsanen las deficiencias que hemos podido observar.

Parte VII

Proyección didáctica

Capítulo 9

Título

En esta parte se va a presentar una unidad didáctica para la materia de Matemáticas aplicadas a las enseñanzas académicas de 3º ESO. Para ello, lo primero de todo será confeccionar el título de la unidad didáctica.

En algunos libros, como hemos visto en la parte curricular, titulan a esta unidad: “El lenguaje algebraico”, “Polinomios”, “División de polinomios”,... pero no engloban todo lo que correspondería a la materia que deberían de trabajar. Se ha querido priorizar más en las propiedades algebraicas referentes a dominios euclídeos y en particular, la división.

Por lo tanto, nuestra propuesta como título para la siguiente unidad didáctica es **“Divisibilidad en polinomios”**

Capítulo 10

Justificación

La divisibilidad es una parte del Álgebra muy estudiada durante la educación primaria y secundaria. Por lo tanto, es lógico que los temas que abarcan dicho contenido se encuentren en el Bloque 2. Números y Álgebra.

Si nos centramos en la Educación Secundaria, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, vemos que en el primer ciclo, se alude a seguir un criterio de evaluación basado en, observar si los alumnos han incorporado nuevos significados sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales y si son capaces de implementarlos en distintos contextos. Los contenidos dirigidos a este curso son: Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 411).

En cambio, en 3º y 4º de ESO, ya se empieza a introducir el estudio de la divisibilidad de polinomios, centrándose más en la factorización de estos. Los estándares de aprendizaje propuestos son los siguientes, los tres primeros referentes al tercer curso.

- 1.5. “Factoriza expresiones numéricas sencillas que contengan raíces, opera con ellas simplificando los resultados” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 392).
- 3.1. “Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 393).
- 3.3. “Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 393).

- 3.2. “Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 396).
- 3.3. “Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 396).
- 3.4. “Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 396).

Según el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, la resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Una de las capacidades esenciales que se desarrollan con la actividad matemática es la habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinarias en contextos reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico (2015, p. 389).

Por eso, sería bueno basar las explicaciones en sus usos y aplicaciones, para atraer así la atención de los estudiantes. Desde un punto de vista social y/o profesional, hay que tener en cuenta la cantidad de utilidades prácticas que tienen los polinomios y la importancia de seguir analizando y estudiando métodos de obtención de sus raíces. Vamos a ver algunos ejemplos, aunque hay muchos más, que nos ayudarán a valorar su relevancia en contextos profesionales y científicos.

Si pensamos en los terremotos o las turbulencias de un avión, donde la resonancia puede llegar a ser destructiva. Para construir estructuras resistentes, los ingenieros hacen uso del estudio de las raíces de polinomios. Con el propósito de que las notas de resonancia en estas estructuras tengan poca posibilidad de darse en la naturaleza. La criptografía nos permite poder intercambiar información de manera confidencial. Para ello se elaboran distintos métodos seguros, siendo útil en muchos de ellos el resto de la división de polinomios.

Y muchos ejemplos más, el estudio de la estructura molecular de las proteínas, en meteorología (pronosticar el clima), en tecnología (creación de móviles, Internet, ordenadores,...) Por todo esto, es importante que los estudiantes comprendan tales utilidades y se adentren en el estudio de los polinomios.

Capítulo 11

Contextualización del centro y del aula

El centro en que he realizado las prácticas ha sido el IES Virgen del Carmen, situado en la zona centro de Jaén, con buena comunicación ya que además su acceso principal está situado en una importante vía de comunicación de la capital. Debido a esta ubicación, si prestamos atención a los niveles básicos (ESO y Bachillerato), buena parte del alumnado que solicita este Instituto no tiene su domicilio familiar en la zona, sino que sea el domicilio de trabajo de alguno de sus progenitores. El centro imparte enseñanzas además ESO y Bachillerato, Formación Profesional y Educación de Adultos.

El horario general del centro es el siguiente:

- Mañanas de 8.15h a 14.45h con su respectivo recreo de 11.15h a 11.45h.
- Tardes de 16.30h a 22.30h.

Mayoritariamente, el perfil de familias de estos alumnos es medio alto, en cuanto a niveles de ingresos. Se agrupan normalmente en el sector servicios. Aunque también las hay del sector primario, pero con un perfil muy parecido al anterior. Un tercer grupo, son aquellos que provienen de otros países. Se integran con un nivel académico inferior y sobre el cual realizan acciones especiales para su integración tanto personal como escolar.

Por lo general, los padres tienen un nivel de estudios medio; existiendo en buena parte de los domicilios ordenadores y biblioteca que puede ser utilizada por el alumnado.

En lo que se refiere a las instalaciones, el edificio consta de tres plantas en las que están distribuidas además de las aulas ordinarias, Biblioteca, Departamentos Didácticos, Laboratorios, Gimnasio, aulas específicas de informática, tecnología,

música y plástica, Salón de Actos y distintas dependencias destinadas a despachos y administración. También está equipado de tres pistas deportivas de distinto tamaño que siguen disponibles fuera del horario escolar para sus miembros y asociaciones y colectivos de la zona en la que se encuentra ubicado el Instituto.

El personal docente del centro está formado actualmente por 97 miembros, de los cuales 71 tienen destino definitivo y 69 pertenecen a los Cuerpos de Educación Secundaria. Además del personal indicado, existen dos ayudantes de conversación (para el programa plurilingüe), un monitor de Educación Especial, tres de atención a la diversidad y uno de perfeccionamiento del idioma para inmigrantes.

Además del programa bilingüe, el centro consta de diversos proyectos como: Forma joven, Centro TIC, Coeducación, Programa de calidad ISO (9001:2015) y Escuela espacio de paz.

En cuanto al aula, está equipada con cañón proyector y pizarra digital, además el centro consta de carros con ordenadores portátiles, que se podrán utilizar en ciertas sesiones. El grupo de 3º ESO, de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, al que va dirigida la presente unidad didáctica, estará compuesto de 28 alumnos y alumnas, entre los que hay dos repetidores, un alumno con TDAH y otro con altas capacidades, que tendremos en cuenta para un aprendizaje significativo e integral.

Capítulo 12

Objetivos

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los objetivos son los “referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin” (2015, p.172). Referente a esta definición vamos a presentar los objetivos que se esperan alcanzar con nuestra unidad didáctica.

Vamos a diferenciar estos objetivos en tres grados de concreción, desde lo más general a lo concreto. El primer nivel, se correspondería con los de la Educación Secundaria Obligatoria. El segundo, los objetivos del área de matemáticas y el último, los propios y concretos de la unidad.

Los dos primeros, objetivos de etapa y objetivos de la materia se pueden encontrar en XI: objetivos.

12.1. Objetivos didácticos

En este apartado vamos a escoger unos objetivos más concretos para nuestra unidad didáctica (División de polinomios).

1. Traslada correctamente información numérica contextualizada al lenguaje algebraico.
2. Conoce e identifica componentes de los polinomios, tales como el grado o los coeficientes.
3. Conoce y obtiene el valor numérico de un polinomio.
4. Reconoce si un número es raíz de un polinomio dado.
5. Conoce y desarrolla identidades notables sencillas. Realiza el proceso inverso.

6. Efectúa operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios.
7. Divide correctamente polinomios con el algoritmo usual.
8. Conoce la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto en la división de polinomios.
9. Conoce la regla de Ruffini y la aplica para la descomposición de polinomios.
10. Factoriza polinomios usando factor común e identidades notables.
11. Reconoce las raíces en la factorización de un polinomio.
12. Aplica el teorema del resto para la factorización de polinomios.

Capítulo 13

Competencias clave

Según el Decreto 111/2016, de 14 de junio, se definen las competencias como “capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos” (2016, p. 30).

De acuerdo con lo establecido en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, dichas competencias serán las siguientes:

- a) Comunicación lingüística: Existen ejercicios y/o problemas en los que será necesario que los alumnos se agrupen para su resolución. Gracias a ello, pondrán en práctica sus habilidades de comunicación, argumentación (tanto oral como escrita), razonamiento...
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: Para la resolución de los ejercicios, el alumnos tendrá que asimilar los contenidos y aplicarlos para una mejor asimilación. Además al resolver situaciones con aplicaciones prácticas, se familiarizarán con el uso del lenguaje matemático.
- c) Competencia digital: Para el desarrollo de esta competencia se estimulará la motivación del alumno mediante algún software.
- d) Aprender a aprender: Gracias a los ejercicios de investigación, estos ayudarán al alumno a trabajar de manera autónoma y ser mas eficaz.
- e) Competencias sociales y cívicas: Mediante actividades contextualizadas, el alumno irá comprendiendo mejor la realidad, pudiendo llegar a solucionar pequeños problemas sociales.
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: Realizar actividades en los que se requiere hacer uso de la creatividad y la innovación, ayuda a los niños a planificar y gestionar mejor sus propios proyectos.

- g) Conciencia y expresiones culturales: Al hacer debates o expresar su propia opinión para debatirla con los demás compañeros, ayuda a su enriquecimiento personal y espíritu crítico.

Capítulo 14

Contenidos

En el Real Decreto 1105/2014 se definen los contenidos como: “Conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 172)

Por lo que, los contenidos que recogemos en nuestra unidad didáctica son:

1. Definición de polinomio. Elementos. Valor numérico. Raíces.
2. Operaciones elementales.
 - a) Suma y resta de polinomios.
 - b) Producto de polinomios.
3. Identidades notables.
4. División de polinomios.
5. Regla de Ruffini.
6. Teoremas del resto y del factor.
7. Factorización.
 - a) Factorizar usando sacar factor común.
 - b) Factorizar mediante el uso de identidades notables
8. Fracciones algebraicas. Operaciones.

Contenidos transversales

En el Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. Encontramos algunos contenidos, que aunque no son exclusivos de nuestro tema, en concreto, se deben tratar en el aula. -Planificación del proceso de resolución de problemas.

-Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

-Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.391).

Capítulo 15

Metodología

Para el desarrollo de nuestra unidad didáctica, será muy importante pensar y detallar una metodología clara, es decir, cómo vamos a enseñar. Para ello hay que tener en cuenta, tanto la descripción como la organización del trabajo como docente, para adoptar la metodología mas adecuada a nuestro grupo de alumnos.

Según el Decreto 111/2016, de 14 de junio, se define la metodología didáctica como el conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.

Lo que se pretende es motivar a los alumnos y lograr los objetivos propuestos. Para ello, no vamos a seguir una sola metodología ya que podría ser contraproducente, crearíamos una clase monótona y los alumnos podrían aburrirse.

Esto pasa con las clases tradicionales en las que solo se usa la metodología transmisiva. Los alumnos aprenden conceptos sin atribuirles ninguna utilidad. No significa que no haya que utilizarla, sino combinarla con otras para fortalecer la competencia matemática. Las que utilizaremos para el desarrollo de nuestra unidad serán:

- **Metodología tradicional o transmisiva:** La utilizaremos para introducir los diferentes conceptos matemáticos, pero sin hacer un uso excesivo ya que el alumno pierde capacidad de razonar, aprendiendo solo por memorización o repetición.
- **Modelización matemática:** Gracias a ella conseguiremos relacionar los conceptos matemáticos con situaciones reales. Lo que puede ayudar al alumno a comprender la importancia y utilidad de las matemáticas en nuestro día a día.
- **Aprendizaje por investigación (IBL):** Mediante la investigación y sus conocimientos previos, el alumno será el que construya su propio conocimiento.

Desarrollará el pensamiento crítico, la colaboración, comunicación...

- **Gamificación:** Es una técnica de aprendizaje a través de juegos. Esta metodología facilita el aprendizaje al ser más dinámica y entretenida. Con la que pretendemos motivar al alumnado. Por ejemplo con el Kahoot que realizaremos.

Capítulo 16

Actividades y recursos

Vamos a presentar una serie de actividades con el fin de que todas ellas nos ayuden a lograr los objetivos propuestos y adquirir los contenidos de esta unidad. Además habrá ejercicios y actividades de refuerzo y ampliación para quien las necesite.

Estas actividades vienen definidas en XII: actividades.

Para la consecución de los objetivos propuestos, se dispondrá de los siguientes recursos materiales:

- Ficha de actividades propuestas por el profesor. Ejercicios como los que se proponen en la parte XII
- Pizarra
- Proyector
- Dispositivo con conexión a Internet
- Calculadora
- Tijetas y pegamento

Capítulo 17

Atención a la diversidad

En la LOMCE podemos encontrar un capítulo especial para la atención a la diversidad. Se encuentran los artículos del 71 al 79 y en ellos se establecen que los alumnos que tienen una serie de necesidades especiales, dificultades de aprendizaje, TDAH... necesitan una cierta atención diferenciada por parte del profesorado.

En particular, en el capítulo IV: “Atención a la diversidad”, de la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, se divide en tres secciones: medidas y programas para la atención a la diversidad en Educación Secundaria Obligatoria, programas de refuerzo en primer y cuarto curso y programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento.

La diversidad en el alumnado es muy amplia por lo que un buen modelo de enseñanza-aprendizaje consistirá en tener en cuenta las necesidades de cada discente. Existen diferentes necesidades específicas de apoyo, según la Consejería de Educación y Deporte, Escuela de Familias encontramos:

- Necesidades educativas especiales: referidas a aquel que requiere determinados apoyos y atenciones educativas específicas debido a diferentes grados y tipos de capacidades personales de orden físico, psíquico, cognitivo o sensorial o trastornos graves de conducta.
- Dificultades de aprendizaje: aquel que requiere determinados apoyos y atenciones educativas específicas debido a desórdenes en los procesos cognitivos básicos implicados en los procesos de aprendizaje.
- Altas capacidades intelectuales: aquellos alumnos y alumnas que manejan y

relacionan múltiples recursos cognitivos de tipo lógico, numérico, espacial, de memoria, verbal y creativo, o bien que destacan especialmente y de manera excepcional en el manejo de uno o varios de ellos.

- Acciones de carácter compensatorio: alumnado que presenta desfase curricular significativo que puede estar relacionado con su historia personal, familiar y/o social; con una escolarización irregular por periodos de hospitalización o de atención domiciliaria, por pertenencia a familias empleadas en trabajos de temporada o que desempeñan profesiones itinerantes, por incorporación tardía al sistema educativo...

En concreto para la presente unidad didáctica haremos énfasis en alumnos con TDAH y altas capacidades.

En cuanto a los primeros, suelen presentar un rendimiento escolar mas bajo del esperado. Además es frecuente que encuentren dificultades en áreas como lengua y matemáticas. Por lo que presentaremos una serie de pautas que podemos seguir en clase para adecuar el contexto académico a las necesidades de los alumnos. Sin olvidar la importancia de una comunicación frecuente con la familia para que el trabajo resulte eficaz.

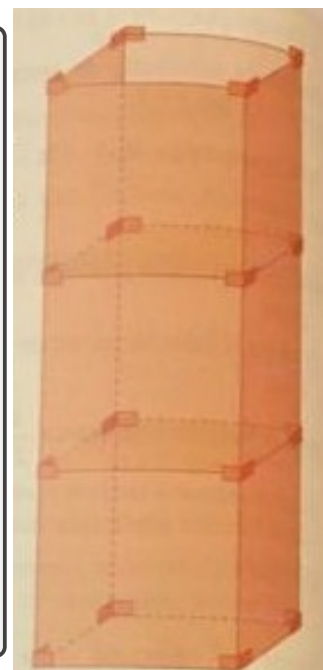
Es importante un ambiente estructurado ya que aprenderán con más facilidad. Explicarles mediante instrucciones simples y sencillas, proporcionarles materiales de apoyo... Un ambiente predecible ya que no suelen adaptarse bien a los cambios y por último un ambiente adecuado para el aprendizaje, podemos sentarlo cerca de nosotros para que no se distraiga, evitar ponerlo en evidencia, hacer uso de materiales audiovisuales, no limitarles el tiempo en los exámenes o optar por otra forma de evaluación más adecuada, por la que les resulte más sencillo demostrar su conocimiento, viendo si han conseguido superar los objetivos.

Para alumnos con altas capacidades existen muchos estereotipos asociados a ellos, como pueden ser: problemas de tipo escolar, ya que pueden sentirse de desmotivados, aburridos, tener un rendimiento por debajo de sus posibilidades... Problemas de interacción social, se tiende a pensar que por su madurez intelectual no se sienten a gusto con sus iguales y problemas entre el desarrollo emocional y cognitivo. Hay que tener todo esto en cuenta para adecuarnos a sus intereses y conseguir un aprendizaje adecuado. Un método que podría ser bastante enriquecedor sería que al realizar ciertas tareas en parejas o grupos pequeños, estos alumnos ayudasen a otros con más dificultades. Además le facilitaremos ejercicios no mecánicos, sino que tengan que reflexionar y usar la lógica, como por ejemplo (SM, pp. 91-92):

Tu estantería matemática

Se quiere construir una estantería como la de la figura.

1. Para formar un solo cubo, ¿cuántas láminas son necesarias? ¿Y cuántos anclajes?
2. Busca una fórmula que dé las láminas necesarias para formar una torre de x cubos de altura. Y otra que dé los anclajes necesarios para esa torre de x cubos de altura.
3. La superficie de cada lámina cuadrada mide $(x+1)^2 \text{ cm}^2$. ¿Cuántos cubos son necesarios para formar una torre que tenga un volumen de $6x^3 + 18x^2 + 18x + 6 \text{ cm}^3$?



Ejercicio: PARA PENSAR MÁS

El polinomio $P(x)$ de 4º grado y coeficiente principal 2, tiene por raíces 0 y 1 y al dividirlo por $x-2$ y $x+1$ da 24 y 0 como resto, respectivamente. sus coeficientes suman:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Algoritmo de Euclides

Calcular el M.C.D de los siguientes polinomios a partir del algoritmo de Euclides.

- $x^3 - x$
- $x^3 + x^2 - 2x$

Para la evaluación de estos alumnos, seguiremos la establecida en el apartado 19. Aunque pudiendo añadir algún ejercicio con grado mayor de dificultad.

Capítulo 18

Temporalización

Respetando lo dispuesto en el artículo 13 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, para el curso de 3º ESO, la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas dispone de 4 sesiones a la semana.

Sesión 1

- Presentación/motivación sobre polinomios y su utilidad práctica en distintas ciencias . [10 min.]
- Clase magistral: presentaremos los siguientes contenidos a la vez que realizamos ejemplos en la pizarra para una mejor comprensión. [30 min.] Ejercicios 1, 2, 3 y 4. [20 min.] Los ejercicios podrían ir intercalados con la teoría.
 - Concepto de polinomio
 - Elementos de un polinomio.
 - Valor numérico de un polinomio.
 - Raíces de un polinomio.

Sesión 2

- Clase magistral: explicaremos los operaciones básicas de suma, resta (como caso concreto de la suma) y multiplicación de polinomios. Iremos resolviendo ejemplos en la pizarra. [25 min.]
- Ejercicios 5 y 6. [15 min.]
- Realizaremos el Kahoot! para aumentar la motivación, sobre contenidos de estas dos primeras sesiones.[10 min.]

Sesión 3

- IBL: Para aprender las identidades notables, se realizará la actividad 8 (cuadrado de una suma). [40 min.]
- Clase magistral: Para las otras dos identidades, el cuadrado de una resta y suma por diferencia, se explicarán en la pizarra. Haciendo además ejemplos de ambos. [15 min.]

Sesión 4

- Clase magistral: Para explicar la división de polinomios (empezando por: división de monomios, división de un polinomio entre un monomio y por último, división de polinomios). Polinomio múltiplo o divisor. [30 min.]
- Ejercicios 9, 10 y 11. [30 min.]

Sesión 5

- Clase magistral: En la que explicaremos la regla de Ruffini como método concreto de la división general. Junto con los teoremas del resto y del factor.
- Ejercicios 12, 13 y 14. [30 min.]

Sesión 6

- Clase magistral: Introducción al concepto de factorización. Cómo factorizar usando sacar factor común e identidades notables. [30 min.]
- Ejercicios 16,17 y 18. [30 min.]

Sesión 7

- Tarea de StandardsUnits: Actividad 23. Para entender mejor la factorización. [1 h.]

Sesión 8

- Clase magistral: Sobre M.C.D y m.c.m. Fracciones algebraicas. [35 min.]
- Ejercicios 19, 20, 21 y 22. [25 min.]

Sesión 9

- Examen.

Capítulo 19

Evaluación

En este capítulo presentaremos las herramientas utilizadas para la evaluación del grado de conocimiento del alumno para esta unidad didáctica.

Según el Real Decreto 1105/2014 (pp.393-394) el criterio de evaluación óptimo sería 3.Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola. CMCT.

Además los estándares de aprendizaje esperados:

- 3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.
- 3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia y las aplica en un contexto adecuado.
- 3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, las identidades notables y la extracción del factor común.

Basándonos en todo lo anterior podremos comprobar si el alumnado a logrado los conocimientos deseados. Por lo que evaluaremos los estándares de aprendizaje en las actividades propuestas suponiendo un 40 % de la calificación final. Mientras que el 60 % restante se evaluará en la siguiente prueba individual. Esta se realizará en la última sesión, con una duración de 60 minutos.

Examen

Ejercicio 1 ¿Verdadero o falso? justifica tu respuesta o da un ejemplo.

- a) Si multiplicamos dos binomios de grado 1 y 2 respectivamente, se obtiene un polinomio de grado 3.
- b) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- c) Si $P(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 4$, su valor numérico para $x = 0$ es -4
- d) $x + 3$ es divisor de $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Ejercicio 2 Efectúa y reduce:

- a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x$
- b) $\frac{3-x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{x-5}{2x}$
- c) $\left(\frac{x-2}{x} \cdot \frac{3x}{x+1}\right) : (x - 2)$

Ejercicio 3 Divide los polinomios.

- a) $(10x^3 - 25x^2) : (-5x)$
- b) $(2x^3 - 7x^2 + 3x - 5) : (x^2 + 2x - 5)$

Ejercicio 4 Factoriza los siguientes polinomios.

- a) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$
- b) $P(x) = x^4 - x^2$
- c) $P(x) = 9x^2 - 12x + 4$

Ejercicio 5 Calcula las raíces de $P(x) = 3x^3 - 9x + 6$ y $Q(x) = x^4 - 4x^2$

Parte VIII

Conclusiones

En el presente trabajo, el diseño de la unidad didáctica ha servido para adquirir conocimientos en cuanto a la futura actividad docente, en particular, sobre divisibilidad en polinomios.

En la parte III, se detallaron los objetivos pretendidos. Partiendo de un objetivo general, *describir y analizar la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad en polinomios y sus aplicaciones en la Educación Secundaria Obligatoria, haciendo uso de los conocimientos adquiridos durante el Máster*, para la consecución de este, se desglosó en cinco subobjetivos. Por lo que iremos desarrollando como hemos conseguido cada uno de ellos.

En cuanto al primer subobjetivo **O1**, *establecer el significado institucional de referencia sobre la divisibilidad en el anillo de polinomios desarrollando uno de los temas que se incluyen en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Secundaria relacionados con este tema* nos ha permitido conocer la materia en profundidad para proponer ejercicios que ayuden al alumno a comprenderla mejor, a pesar de que puede suponer un alto nivel de complejidad y abstracción.

El siguiente subobjetivo propuesto fue el **O2**, *identificar las distintas configuraciones epistémicas según los distintos dominios de definición (DI, DFU, DIP, DE) para el máximo común divisor y mínimo común múltiplo y analizar las aplicaciones al estudio de las fracciones algebraicas*, a partir del significado institucional de referencia que se estableció en la parte epistemológica, en la que se estudia la divisibilidad para cada uno de los dominios. Se explica la importancia del M.C.D y m.c.m. en relación a las fracciones algebraicas. Aunque en los libros de texto no se dan explícitamente, nuestra propuesta didáctica incluye ejercicios en los que se pide calcularlos y otros en los que hay que utilizarlos para operar con fracciones algebraicas.

También, para alumnos con altas capacidades intelectuales se propone el algoritmo de Euclides (método para calcular el M.C.D.).

Respecto a **O3**, *analizar el significado institucional de la divisibilidad en polinomios implementado en dos libros de texto, identificando carencias y conflictos semióticos potenciales, y realizar una comparativa entre ellos, utilizando como herramienta las entidades primarias que proporciona el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. En la parte 6, fundamentación curricular, se ha realizado un análisis didáctico de dos manuales para concluir con una comparativa en la que se mostraron las carencias de cada uno de ellos, por ejemplo: los conceptos de M.C.D, m.c.m. o polinomio irreducible son muy importantes en este tema, pero no son tratados explícitamente lo que puede dar

lugar a conflictos semióticos potenciales. Teniéndolo en cuenta, se ha propuesto una unidad didáctica en la que solucionarlo.

El subobjetivo **O4**, *analizar varias investigaciones en Didáctica de las Matemáticas en las que se abordasen aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad, en particular, en el anillo de polinomios*, en la parte 4, se hizo un sondeo en el que se escogieron tres investigaciones que habían abordado aspectos relacionados con las dificultades, estrategias o errores sobre divisibilidad en el anillo de polinomios, los más frecuentes relacionados con los signos. Aunque también se debía a la motivación por la asignatura. Por lo que se incita a apostar por nuevas metodologías para facilitar el aprendizaje y obtener una mayor comprensión.

Por último, en relación al subobjetivo 5, *elaborar y desarrollar actividades relacionadas con la divisibilidad en polinomios en tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria*, se diseñaron y desarrollaron actividades atendiendo a diferentes metodologías (modelización matemática, IBL o gamificación) a parte de la tradicional. Ya que como habíamos observado en las investigaciones, esto era más productivo. Para conseguirlo, se han planteado actividades en grupo, para grupos bilingües, de investigación, y algún Kahoot para atraer su atención y conseguir los objetivos propuestos

Para concluir, podemos ver que es necesario que el docente esté continuamente formándose, en cuanto a la normativa vigente, nuevos modelos de enseñanza, etc. Ya que dicha profesión tiene una gran responsabilidad respecto a la sociedad.

Parte IX

Referencias bibliográficas

Bibliografía

- [1] Alcaide, F., Hernández, J. & Serrano, E. (2015). *Matemáticas 3º ESO*. Andalucía: SM
- [2] Arrondo, E. (17 de Mayo 2011). *Estructuras algebraicas*[Apuntes]. Recuperado de: <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/estructuras.pdf>
- [3] Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H., & Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios.
- [4] Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. & Colera, R. (2016). *Matemáticas 3º ESO*. Andalucía: ANAYA
- [5] Consejería de Educación (2016). Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, nº 144: 108-396. Recuperado de https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/BOJA16-144-00289-1350001_00095875.pdf
- [6] de Nápoli, P. (2014). *Polinomios*. Recuperado de: <http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/apuntes-algebraI/polinomios.pdf>
- [7] Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. (p. 27-45)
- [8] Decreto 327/2010, de 13 de julio, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria.
- [9] Del Pino-Ruiz, J. & Estepa, A. (2017). *Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de ESO*. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del*

- Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/delpino.pdf>
- [10] Godino, J. D. & Batanero C.(1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 3: 14, 334.
- [11] Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3), 237-284.
- [12] Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- [13] Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135
- [14] Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2012). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática*. En D. Inés Calderón (comp.), *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 53-54. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_onto
- [15] Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & de Castro C. (2009). *Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico*. Enseñanza de las Ciencias, 1: 24, 65.
- [16] Hausberger, T. (2018). Structuralist praxeologies as a research program on the teaching and learning of abstract algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 74-93.
- [17] IES Virgen del Carmen (2016). *Plan de Centro Curso 2015-2016*. Jaén.
- [18] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE)
- [19] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)
- [20] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, nº 3, pp.169-

546. Recuperado de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- [21] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, nº 25, pp.69867003. Recuperado de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>
- [22] Miranda, E. *Anillos de Polinomios*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: <http://www.ugr.es/bullejos/AlgI/polinomios.pdf>
- [23] Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.
- [24] Ordóñez, C. (2018). *La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en álgebra superior medida por un entorno informático* [Tesis doctoral]. Jaén: Universidad de Jaén. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_COrdones.pdf
- [25] Ordóñez, C., Ordóñez, L., & Contreras, Á. (2019). Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 16, 22-39.
- [26] Parra-Urrea, Y. & Pino-Fan, L. (2017). *Análisis Ontosemiótico de los libros de texto chilenos: el caso de la noción de función*. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/parra.pdf>
- [27] Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Parte X

Anexo 1: Análisis de los libros de texto

Capítulo 20

Análisis de la divisibilidad en editorial *Anaya*

En el libro de Colera et al., los contenidos que buscamos se encuentran en el tema 5: “El lenguaje algebraico”.

Dividido en seis partes: 1. Expresiones algebraicas 2. Monomios 3. Polinomios 4. Identidades 5. Cociente de polinomios 6. Fracciones algebraicas. Distinguimos las siguientes entidades elementales:

20.1. Situaciones-problemas

Siguiendo a Ordóñez (2018, pp. 74-75), analizaremos cuatro componentes: elementos introductorios, ejemplos, ejercicios y aplicaciones.

- Elementos introductorios: La unidad comienza con un poco de historia sobre la evolución del álgebra en distintas civilizaciones y cómo avanzó la notación. Resaltando a matemáticos como Diofanto de Alejandría, Al-Jwarizmi, Vieta y Descartes.
- Ejemplos: Contiene 31 ejemplos utilizados para aclarar los distintos conceptos y tres (problemas contextualizados) al final del tema.
- Ejercicios: Tiene 88 ejercicios, 26 de ellos distribuidos en las seis partes del tema y 62 en la parte final para afianzar todos los conceptos, vienen en tres apartados: PRACTICA, RESUELVE PROBLEMAS Y REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA. Por último, un taller de matemáticas y 8 actividades de autoevaluación cuya solución se encuentra en un enlace web.

- Aplicaciones: A menudo, suelen aparecer mensajes en los que invitan a los alumnos a buscar en la web para seguir aprendiendo. Y un apartado de “Investiga”, en el que proponen un ejercicio con la finalidad de aprender el triángulo de Pascal.

20.2. Lenguaje

Basándonos en Ordóñez (2018, pp. 54-56), los tipos de lenguajes puede ser: natural-vernáculo (es el lenguaje común), numérico (maneja números), tabular (recoge datos en una tabla), gráfico (interpretación de gráficos o dibujos), formal (utilizan símbolos de la Matemática) y también el lenguaje algorítmico.

Podemos observar diversos lenguajes para la división de polinomios y la regla de Ruffini.

Como ejemplo de lo anterior la figura 20.1 muestra diversos lenguajes utilizados para la división de polinomios.

Lenguaje algorítmico	Lenguaje gráfico/numérico
1. En el dividendo se dejan huecos por los términos que faltan. 2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor: $(7x^4) : x = 7x^3$. Este es el primer término del cociente. 3. El producto de $7x^3$ por $Q(x)$, cambiado de signo, se sitúa bajo del dividendo, y se suma. 4. El primer resto es $10x^3 - 94x + 7$. A partir de aquí, volvemos a proceder como en los pasos 2 y 3. El proceso se continúa mientras el resto parcial obtenido sea de grado mayor o igual que el grado de $Q(x)$.	The diagram illustrates the division of $7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$ by $x - 3$. On the left, the long division process is shown: $7x^4 - 11x^3$ is divided by $x - 3$ to get $7x^3$, which is then multiplied by $x - 3$ to get $7x^4 - 21x^3$. This is subtracted from the original polynomial to get $10x^3 - 94x + 7$. The process continues with $10x^3$ divided by $x - 3$ to get $10x^2$, which is multiplied by $x - 3$ to get $10x^3 - 30x^2$, and so on, resulting in a quotient of $7x^3 + 10x^2 + 30x - 4$ and a remainder of -5. On the right, the Ruffini's rule diagram is shown, with arrows indicating the multiplication and subtraction steps for each term of the quotient.

Figura 20.1: Lenguajes utilizados en la división de polinomios, (Colera et al., 2016, p. 90).

Análogamente, la figura 20.2 muestra la diversidad de lenguajes utilizados para la regla de Ruffini.

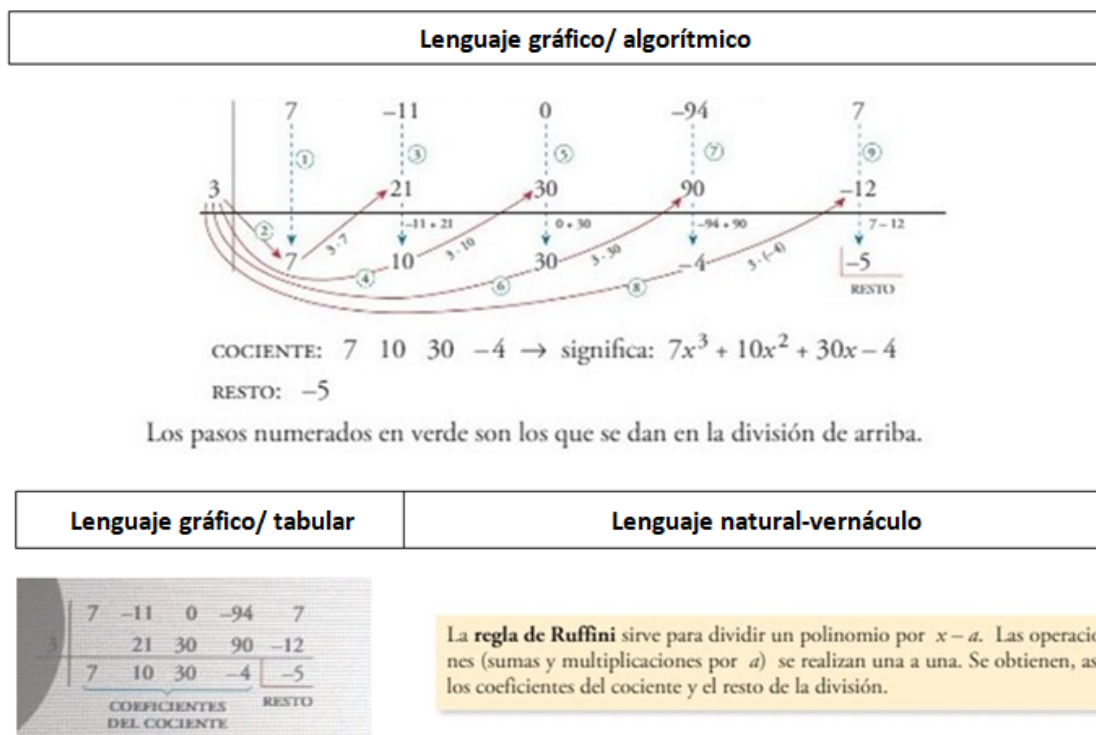


Figura 20.2: Lenguajes utilizados en Ruffini, (Colera et al., 2016, p. 90).

20.3. Conceptos

En esta entidad encontramos:

- “Monomio es el producto de un número por una o varias letras (variables)” (Colera et al., p. 85).
- “Las letras (parte literal) representan números de valor desconocido o indeterminado” (Colera et al., p. 85).
- “El coeficiente de un monomio es el número que multiplica a la parte literal” (Colera et al., p. 85).
- “Se llama grado de un monomio al número total de factores que forman su parte literal” (Colera et al., p. 85).
- “Los números son monomios de grado cero” (Colera et al., p. 85).
- “Dos monomios son semejantes cuando tienen idéntica parte literal” (Colera et al., p. 85).
- “Un polinomio es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama término” (Colera et al., p. 86).

- “El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio se ha puesto en su forma reducida” (Colera et al., p. 86).
- “El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a ” (Colera et al., p. 86).
- “Si el valor numérico de un polinomio para $x = a$ es 0, entonces se dice que a es una raíz de dicho polinomio” (Colera et al., p. 86).
- “Se llama opuesto de un polinomio al resultado de cambiar se signo todos sus términos” (Colera et al., p. 86).
- “ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ Cuadrado de una suma” (Colera et al., p. 87).
- “ $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ Cuadrado de una diferencia” (Colera et al., p. 87).
- “ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ Suma por diferencia ” (Colera et al., p. 87).
- “Una identidad es una igualdad algebraica que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen” (Colera et al., p. 88).
- “Se llama fracción algebraica al cociente indicado de dos polinomios” (Colera et al., p. 92).
- “Se llama inversa de una fracción algebraica a la que se obtiene intercambiando numerador y denominador” (Colera et al., p. 85).

Aunque, no presenta conceptos como el de polinomio irreducible, M.C.D o m.c.m., ni hace referencia a ninguno de ellos.

20.4. Proposiciones

Los resultados aparecen entremezclados en el texto y no resaltados como proposiciones o propiedades.

- “La suma de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes” (Colera et al., p. 85).
- “El grado del cociente es la diferencia entre los grados del dividendo y divisor” (Colera et al., p. 90).
- “El grado del resto es inferior al del divisor” (Colera et al., p. 90).
- “Si los coeficientes de un polinomio son números enteros, las raíces de dicho polinomio son divisores de su término independiente” (Colera et al., p. 91).

20.5. Procedimientos

A continuación, marcamos de forma literal los distintos procedimientos encontrados en el manual.

- “La suma de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes” (Colera et al., p. 85).
- “El producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores” (Colera et al., p. 85).
- “El cociente de dos monomios es el resultado de dividir sus coeficientes y sus partes literales.” (Colera et al., p. 85).
- “Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y sumamos los monomios semejantes” (Colera et al., p. 86).
- “Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos” (Colera et al., p. 87).
- Simplificar expresiones a través de sacar factor común. “Cuando un sumando coincide con el factor común, ten en cuenta que está multiplicado por 1” (Colera et al., p. 89).
- “La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales: al dividir dos polinomios se obtiene un cociente y un resto” (Colera et al., p. 90).
- “Una de las principales aplicaciones de la división de polinomios es la descomposición de un polinomio en producto de factores, lo que se conoce por factorización del polinomio” (Colera et al., p. 90).
- Cálculo de divisores a partir de divisiones exactas. “Cuando el resto es cero, decimos que el dividendo es divisible por el divisor” (Colera et al., p. 90).
- “La regla de Ruffini sirve para dividir un polinomio por $x - a$. Se obtienen, así, los coeficientes de cocientes y el resto de la división” (Colera et al., p. 90).
- “Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos. Se obtiene así otra fracción equivalente” (Colera et al., p. 92)

- “Para reducir varias fracciones a común denominador, se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador” (Colera et al., p. 92). Pero no hablan directamente del máximo común divisor de dos polinomios.
- “Para sumar fracciones algebraicas con el mismo denominador, se suman los numeradores y se mantiene el denominador común” (Colera et al., p. 92).
- “Para sumar fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman los numeradores, dejando el mismo denominador común” (Colera et al., p. 92).
- “El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores” (Colera et al., p. 93).
- “El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda” (Colera et al., p. 93)

No hacen referencia a procedimientos para el cálculo de polinomios irreducibles, M.C.D. o m.c.m.

20.6. Argumentos

Según Ordoñez (2018), los argumentos podemos clasificarlos en : deductivos (de forma directa), mediante el contra-recíproco (partiendo de la negación), por reducción al absurdo (partiendo de la negación hasta llegar a una contradicción), recurrentes (mediante los principios de inducción), constructivos (siguiendo un procedimiento) y por ensayo-error (se va ajustando según el error).

Por último, se puede observar algunos argumentos deductivos, aunque muy básicos, pero sin introducir ninguna demostración. Es más, las proposiciones y propiedades vienen enmascaradas en el texto.

Capítulo 21

Análisis de la divisibilidad en editorial *SM*

Siguiendo la misma clasificación que se ha utilizado en el manual anterior, se analiza el libro de texto de Alcaide et al., en este caso, se encuentran dos temas que tratan de polinomios, el tema 3: “Polinomios”, y el tema 4: “División de polinomios” (objeto de este estudio).

Está dividido en seis partes: 1. División de polinomios 2. Regla de Ruffini 3. Raíces de un polinomio. Teoremas del resto y del factor. 4. Factorización 5. Fracciones algebraicas 6. Operaciones con fracciones algebraicas.

Volvemos a analizar las entidades elementales que hemos visto anteriormente:

21.1. Situaciones-problemas

- Elementos introductorios: Esta unidad, comienza también con un poco de introducción histórica. Y habla sobre el zootropo de Horner.
- Ejemplos: 34 ejemplos distribuidos justo después de introducir un concepto y también entre ejercicios propuestos.
- Ejercicios: Además, 102 actividades de las cuales 52 se reparten entre las seis partes del tema y el resto, al final de este, clasificadas en: EJERCICIOS PARA PRACTICAR, PROBLEMAS PARA RESOLVER Y ACTIVIDADES PARA PENSAR MÁS. Y por último, la sección de PONTE A PRUEBA con ejercicios contextualizados (Lo presentan con una estantería), y una AUTOEVALUACIÓN de 10 ejercicios que pueden encontrar la solución en la web de la editorial.

- Aplicaciones: Durante el desarrollo del tema han incorporado algunos datos sobre aplicaciones de dichos conceptos (criptografía), invitaciones a recursos informáticos (GeoGebra)...

21.2. Lenguaje

En este manual también hacen uso de lenguajes variados en la explicación de cada objeto matemático, por ejemplo en la figura 21.1 se muestra el lenguaje formal.

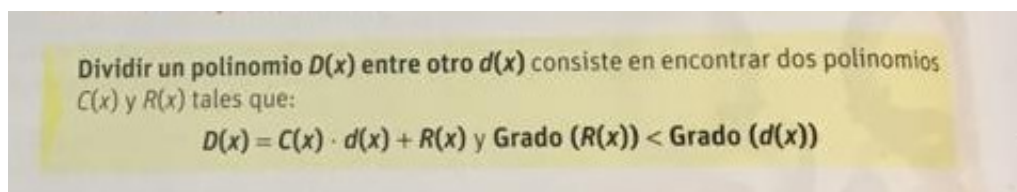


Figura 21.1: Lenguaje formal (Alcaide et al., p.72).

Análogamente, en la figura 21.2 se muestra el lenguaje algorítmico, numérico y gráfico.

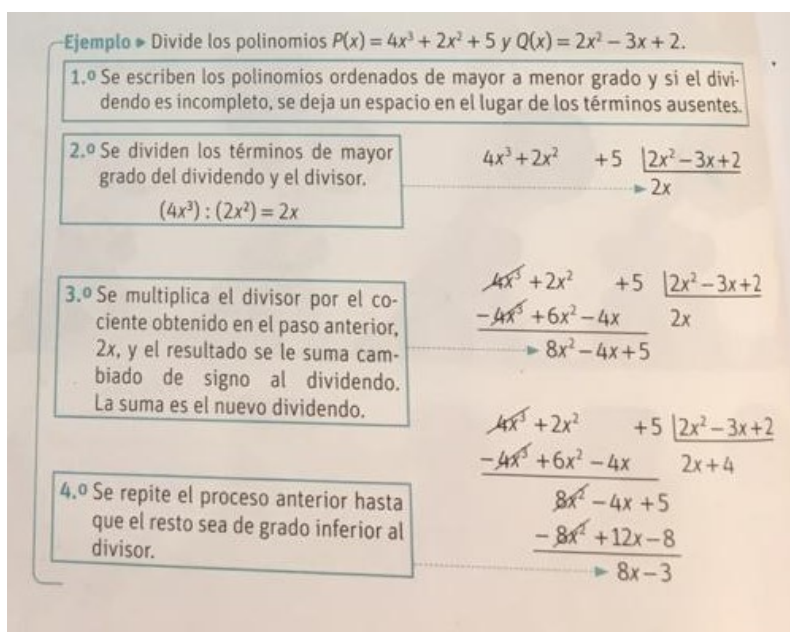


Figura 21.2: Lenguajes algorítmico/numérico/gráfico (Alcaide et al., p.72).

21.3. Conceptos

Se pueden encontrar los siguientes conceptos:

- “Se dice que $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$, si el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ es nulo, es decir, $x = a$ es raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$ ” (Alcaide et al., p. 76).
- “Un polinomio es irreducible si no se puede escribir como producto de dos o más polinomios de grado menor” (Alcaide et al., p. 78).
- “Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios irreducibles” (Alcaide et al., p. 78).
- “Una fracción algebraica es una fracción en la que el numerador es un polinomio y el denominador es otro polinomio no nulo” (Alcaide et al., p. 80).
- “Dos fracciones algebraicas $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $B(x) = \frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes cuando verifican que $P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Se escribe $A(x) = B(x)$ ” (Alcaide et al., p. 80).
- “Simplificar una fracción algebraica es encontrar otra fracción equivalente a ella más sencilla. Si una función algebraica no se puede simplificar, se dice que es irreducible” (Alcaide et al., p. 81).

Aunque, no presenta conceptos como el de M.C.D o m.c.m.

21.4. Proposiciones

- “Si $R(x)=0$, se dice que el polinomio $D(x)$ es divisible por $d(x)$, o es múltiplo de $d(x)$ ” (Alcaide et al., p. 72).
- “Un polinomio de grado n puede tener, como máximo, n raíces reales” (Alcaide et al., p. 76).
- “El resto, R , de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio $(x-a)$, coincide con el valor numérico del polinomio en $x=a$, es decir, $R=P(a)$ ” (Alcaide et al., p. 76).
- “Cualquier polinomio de grado mayor que dos se puede factorizar por lo que los polinomios irreducibles siempre son de grado menos o igual que dos” (Alcaide et al., p. 78).
- “El factor asociado a una raíz puede aparecer más de una vez en la factorización de un polinomio. Se habla de raíz doble, triple...” (Alcaide et al., p. 78).

21.5. Procedimientos

- Algoritmo de la división. “Dividir un polinomio $D(x)$ entre otro $d(x)$ consisten en encontrar dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que: $D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$ y $\text{Grado}(R(x)) < \text{Grado}(d(x))$ ” (Alcaide et al., p. 72).
- Regla de Ruffini, como procedimiento no conectado a otras aplicaciones.
- Detección de raíces a través del teorema del resto.
- “Si $P(a)=0$, entonces el polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$, es decir, $(x-a)$ es un factor de $P(x)$ ” (Alcaide et al., p. 77).
- Factorizar a partir de Ruffini.
- Factorizar mediante extracción de factor común.
- Factorizar utilizando las identidades notables.
- Operaciones elementales con fracciones algebraicas. Distinguiendo si tienen o no igual denominador.

Pero como en el manual 1, no tratan de forma explícita los procedimientos para el cálculo de M.C.D y m.c.m de polinomios.

21.6. Argumentos

Por último, podemos observar que en este libro están más recalcadas las propiedades y proposiciones que en el manual 1 y además como podemos ver en la figura 21.3, contiene una demostración para el teorema del resto. Las explicaciones son claras y concisas.

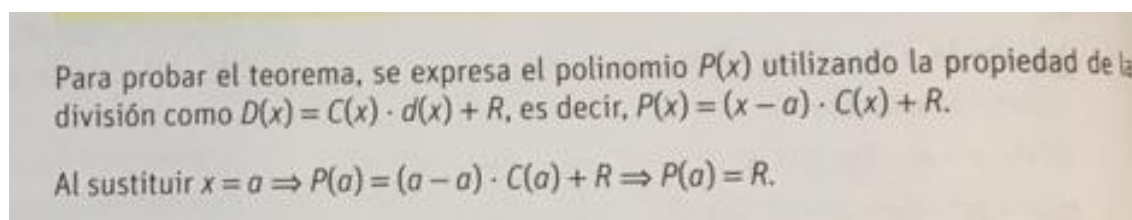


Figura 21.3: Demostración del teorema del resto (Alcaide et al., p.76).

Parte XI

Anexo 2: Objetivos

Capítulo 22

Objetivos de etapa

Según el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria son los siguientes (en negrita se resaltan los más propios de nuestra unidad didáctica):

1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2. **Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.**
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
5. **Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos.**

Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

6. **Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.**
7. **Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.**
8. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
9. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
10. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
11. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
12. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Capítulo 23

Objetivos de materia

Según la Orden de 14 de julio de 2016, los objetivos generales del área de matemáticas son:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para

realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Parte XII

Anexo 3: Actividades

Actividad 1 Indica los elementos para cada polinomio

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 6$			
$P(x) = x^2 + 3x^3 + 1$			
$P(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + xy + y$			
$P(x) = 3x^2 + x + 1 - 7$			
$P(x) = 7$			
$P(x) = 0$			

Actividad 2 Escribe un polinomio en su forma reducida de dos variables, de grado 5 y cuyo término independiente sea -3.

Actividad 3 Comprueba para cuáles de estos polinomios $x = 3$ es raíz del polinomio.

- a) $P(x) = x^2 - x - 2$
- b) $Q(x) = -x^2 + 2x + 3$
- c) $P(x) = 2x^2 - 5x - 2$
- d) $P(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + 7$

Actividad 4 Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^2 - kx - 2$ tenga una raíz en $x = 2$.

Actividad 5 Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ y $Q(x) = x + 5$, calcula $-P(x) + P(x) \cdot Q(x) - 2Q(x)$.

Actividad 6 Averigua el valor de k para que: $(3x - 4) \cdot (x - k) = 3x^2 + 2x - 8$.

Actividad 7: Kahoot! Haremos uso de dispositivos electrónicos con acceso a Internet para realizar la siguiente actividad: Kahoot!

1 - Verdadero o falso
¿Es $x^2 + x + 1$ un polinomio en su forma reducida?

20 segundos

True ☒

False ☐

2 - Prueba
¿Cuál es el grado de $P(x, y) = 2x^3 + x^2y^2 + y + 1$?

20 segundos

3 ☐

4 ☒

1 ☐

2 ☐

3 - Prueba
Calcular $P(x) - Q(x)$

$P(x) = x^3 + xy + 1$
 $Q(x) = xy + x$

20 segundos

$x^4y + x^2y + 1$ ☐

$x^3x + 1$ ☒

$x^2 + x + 1$ ☐

$x^3 + x^2y^2 + x + 1$ ☐

4 - Verdadero o falso
¿Es $P(x) * Q(x) = x + x^2y + x^4$?

$P(x) = x^3 + xy + 1$
 $Q(x) = xy + x$

30 segundos

True ☒

False ☐

5 - Prueba
¿Cuánto vale $P(0)$?

$P(x) = 10x^3 + \frac{7}{11}x^2 - 5x + 1$

20 segundos

58 ☐

0 ☐

1 ☒

$\frac{3}{4}$ ☐

Actividad 8: Rompecabezas Para esta actividad se necesitará recordar el área del cuadrado y del rectángulo. En grupos reducidos, les pediremos que intenten formar un cuadrado con las figuras de 23.2. Consiguiendo la forma que vemos a continuación. Seguidamente les pediremos que investiguen alguna expresión algebraica para dicho cuadrado. Lo que se pretende, es que sean ellos los que construyan la definición del cuadrado de una suma.

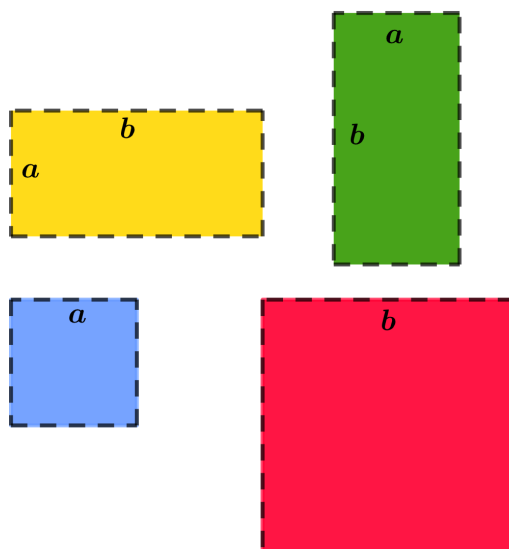
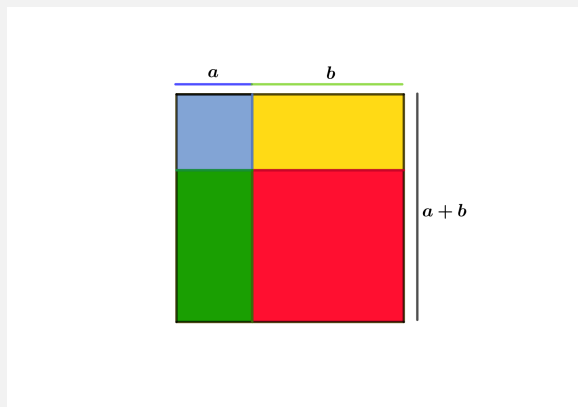


Figura 23.1: Figura 1.

Actividad 9 Realiza las siguientes divisiones.

- $(x^4 + x^3 + 3x^2 - x) : x$
- $(x^5 - 2x^3 - x - 8) : (x^2 - 2x + 1)$
- $(2x^6 + x^3 - 2) : (3x^3 + 1)$

Actividad 10 Calcula el resto de esta división sin realizarla.

Dividendo: $x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3$

Divisor: $x^3 + x - 1$

Cociente: x^2

Actividad 11 Calcula, en cada caso, el valor de k para que las siguientes divisiones de polinomios sean exactas.

- $\frac{6x^3 - 21x^2 + 21x + k}{3x^2 - 3x + 3}$
- $\frac{3x^4 + 5x^3 - kx + 15}{-x + 3}$

Actividad 12 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

- $(x^5 - x^3 + x^2 - 2x) : (x + 3)$
- $(x^6 - x^4 + 2x^2) : (x - 1)$
- $(x^2 - \frac{1}{2}x + 2) : (x - 2)$

Actividad 13 Calcula el valor de k para que las siguientes divisiones sean exactas.

- $(-2x^2 - x - k) : (x - 2)$
- $(x^4 - x^3 - x - k) : (x + 3)$
- $(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + k) : (x - 2)$
- $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{k}{2}) : (x + \frac{1}{2})$

Actividad 14 ¿Cuáles son los restos de las siguientes divisiones?

- $\frac{x^{10}-2}{x+3}$
- $\frac{x^{17}-x^{10}+x^5}{x+1}$

Actividad 15 Comprueba si los siguientes binomios son factores del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$.

- a) $x - 2$ c) $x + 1$ e) $x - 3$
 b) $x + 2$ d) $x - 1$ f) $x + 3$

¿Cuántos factores, como máximo, puede tener $P(x)$?

Actividad 16 Factoriza estos polinomios utilizando la regla de Ruffini.

- $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ■ $R(x) = x^3 - 7x + 6$
- $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 96$ ■ $Q(x) = x^4 - 1$

Actividad 17 Extrae factor común para factorizar los polinomios.

- $P(x) = x^3 - x^2$ ■ $R(x) = -2x^3 - 8x$
- $Q(x) = -x^3 + 3x^2$ ■ $Q(x) = 6x^4 - 8x^3$

Actividad 18 Usa las identidades notables y factoriza los polinomios.

- $P(x) = 4x^2 - 16x + 16$ ■ $R(x) = 9x^2 + 6x + 1$
- $Q(x) = -x^2 + \frac{4}{9}$ ■ $Q(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

Actividad 19 Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de cada pareja de polinomios.

- $P(x) = 4x(x+1)^5(2x-1)(x^2+x-1)^4$, $Q(x) = 5x^2(x+1)^3(2x+1)(x^2+x-1)^6$
- $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$, $Q(x) = 5x^2 - x$

Actividad 20 Simplifica las siguientes expresiones algebraicas.

- $\frac{x^2+8x+15}{x^2-x-12}$ ■ $\frac{x^2+2x+1}{x+1}$ ■ $\frac{x^3+8x^2+21x+18}{x^2+5x+6}$

Actividad 21 Dadas las fracciones algebraicas $A(x) = \frac{x+3}{x+2}$ y $B(x) = \frac{x+1}{x-1}$ calcula:

- $A(x) + 3B(x)$
- $-2A(x) + B(x)$
- $2A(x) - \frac{1}{2}B(x)$

Actividad 22 Opera las siguientes fracciones algebraicas y simplifica.

- $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1}$
- $\frac{x}{x+5} \cdot \frac{(x+5)^2}{x^3}$
- $\frac{3x+6}{x+4} : \frac{2x+1}{x(x+2)}$

- A continuación la siguiente actividad se propone para **programas bilingües**.

Actividad 23

Tarea de tipo StandardsUnits, una actividad de aprendizaje a través del diálogo y la discusión. La que hemos escogido se denomina “A11 Factorising cubics”. Con la que pretendemos desarrollar estrategias eficientes al factorizar funciones cúbicas.

Podemos empezar con ejemplos de funciones cuadráticas. Para que observen que sus soluciones serán los puntos de corte con el eje OX (raíces), nos podemos ayudar de gráficos. Podrán aplicar la fórmula directamente o la regla de Ruffini.

Les pediremos que trabajen por parejas. Entregamos el siguiente juego de cartas A-Factores (StandardsUnits A11, p.5-6), a cada par. Como vemos en las figuras 23.2 y 23.3.

Escribiremos una función cúbica en la pizarra, por ejemplo $y = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$ y pediremos a cada pareja que encuentren tantos factores como sea posible. Cogeremos algunos factores del juego A y preguntaremos si son útiles y por qué. Hasta que tengamos un factor para nuestra función. Y les daremos la opción de cambiar algunas de sus cartas escogidas. Hasta que todas las parejas tengamos los 3 factores correctos. Podemos repetir con otra.

Discutiremos las estrategias utilizadas y cuales pueden ser las más eficientes.

$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$
$(x - 4)$	$(x - 5)$	$(x - 6)$
$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 6)$
$(x - 7)$	$(x - 8)$	$(x - 9)$
$(x + 7)$	$(x + 8)$	$(x + 9)$
$(x - 10)$	$(x + 1)$	$(x + 2)$
$(x + 20)$	$(x + 1)$	$(x + 2)$
$(x - 12)$	$(x + 1)$	$(x - 2)$
$(x - 20)$	$(x + 1)$	$(x - 2)$

Figura 23.2: Cartas del juego A (StandardsUnits A11, p.5)

Ahora entregamos las cartas del juego B-Verdadero/Falso (StandardsUnits A11, p.7-8), en el que tendrán que elegir la verdadera y justificarlo. Son las que observamos en las figuras 23.4 y 23.5.

$(x - 24)$	$(x - 1)$	$(x + 3)$
$(x + 24)$	$(x - 1)$	$(x + 6)$
$(x + 10)$	$(x - 1)$	$(x + 5)$
$(x + 12)$	$(x - 1)$	$(x + 4)$
$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$
$(x - 4)$	$(x - 5)$	$(x - 6)$
$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 6)$
$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$
$(x - 4)$	$(x - 5)$	$(x - 6)$

Figura 23.3: Cartas del juego A (StandardsUnits A11, p.6)

A1	A2
$f(2) = 0 \Rightarrow$ $(x + 2)$ is a factor of $f(x)$	$f(2) = 0 \Rightarrow$ $(x - 2)$ is a factor of $f(x)$
B1	B2
$f(-3) = 0 \Rightarrow$ $(x + 3)$ is a factor of $f(x)$	$f(-3) = 0 \Rightarrow$ $(x - 3)$ is a factor of $f(x)$
C1	C2
$f(4) = 7 \Rightarrow$ $(x - 4)$ is a factor of $f(x)$	$f(4) = 7 \Rightarrow$ $(x - 4)$ is not a factor of $f(x)$
D1	D2
 Possible equation for this graph is: $f(x) = (x - 2)(x - 5)(x - 1)$	 Possible equation for this graph is: $f(x) = (x - 2)(x + 5)(x - 1)$
E1	E2
 Possible equation for this graph is: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 7x - 3$	 Possible equation for this graph is: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 3$

Figura 23.4: Cartas del juego B (StandardsUnits A11, p.7)

F1	F2
$(x - 3)$ is a factor of $f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$	$(x - 3)$ is not a factor of $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$
G1	G2
If $f(x)$ is a cubic function and if $f(1) = 0, f(3) = 0$ and $f(0) = 12$ then $f(4) = 0$	If $f(x)$ is a cubic function and if $f(1) = 0, f(3) = 0$ and $f(0) = 12$ then $f(-4) = 0$
H1	H2
If $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ and $f(6) = 0$ then it would be a good idea to test $f(3)$	If $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ and $f(6) = 0$ then it would be a silly idea to test $f(3)$

Figura 23.5: Cartas del juego B (StandardsUnits A11, p.8)