



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

**EL ESTUDIO DE LAS
SUCESIONES EN 3º DE ESO**

Alumno: Garzón Casado, Álvaro

Tutor: Prof. D. Francisco Javier García García
Dpto: Didáctica de las Ciencias

Junio, 2021



CENTRO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

TRABAJO FIN DE MÁSTER:

*El estudio de las sucesiones en 3º de ESO*¹

Realizado por:

Álvaro Garzón Casado

2021

Dirigido por:

Dr. D. Francisco Javier García García

¹Todas las citas y referencias empleadas en este trabajo han sido realizadas siguiendo los estándares establecidos en la 6ª edición de las normas de la American Psychological Association (APA).

Columna regni sapientia

- Cristina I de Suecia

Índice general

Capítulos	Página
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivos del trabajo	1
1.2 Motivación	2
1.3 Estructura del trabajo	3
2 FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	4
2.1 Análisis del currículo	4
2.2 Análisis de libros de texto	14
2.2.1 Estructura de los libros	15
2.2.2 Enfoque y estructura de las unidades	15
2.2.3 Análisis de los contenidos teóricos relacionados con sucesiones	19
2.2.4 Análisis de actividades	26
2.2.5 Consideraciones finales	28
3 FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA	30
3.1 Introducción	30
3.2 Sucesiones	31
3.2.1 Término general y forma recurrente	31
3.2.2 Operaciones con sucesiones	33
3.2.3 Tipos de sucesiones	34
3.3 Progresiones aritméticas	35
3.3.1 Definición. Término general	35
3.3.2 Propiedades de las progresiones aritméticas	36
3.3.3 Interpolación aritmética	38
3.3.4 Series aritméticas	38
3.4 Progresiones geométricas	40
3.4.1 Definición. Término general	40
3.4.2 Propiedades de las progresiones geométricas	41

3.4.3	Interpolación geométrica	43
3.4.4	Series geométricas	43
3.5	Otras progresiones	46
3.5.1	Progresiones armónicas	47
3.5.2	Progresiones aritmético-geométricas	47
3.5.3	Progresiones hipergeométricas	47
3.5.4	Progresiones aritméticas de orden superior	48
3.6	Aplicaciones	49
3.6.1	Cálculo de la fracción generatriz de un número decimal periódico	49
3.6.2	Matemática financiera	51
4	FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	54
5	UNIDAD DIDÁCTICA	60
5.1	Título	60
5.2	Justificación	60
5.2.1	Justificación curricular	60
5.2.2	Justificación social y/o profesional	61
5.2.3	Justificación interna	62
5.2.4	Justificación por su relación con otras disciplinas	62
5.2.5	Justificación estética	63
5.2.6	Justificación cultural	64
5.3	Contextualización del centro y el aula	65
5.4	Objetivos	67
5.4.1	Objetivos generales de etapa	67
5.4.2	Objetivos del área de matemáticas	69
5.4.3	Relación entre los objetivos generales de etapa y los objetivos del área de matemáticas	70
5.4.4	Objetivos concretos de la unidad	71
5.5	Competencias clave	72
5.6	Contenidos	73
5.7	Metodología	75

5.8	Actividades y recursos	77
5.8.1	Actividades	77
5.8.2	Recursos	79
5.9	Atención a la diversidad	80
5.10	Temporalización	81
5.11	Evaluación	89
5.11.1	Criterios de evaluación	90
5.11.2	Criterios de calificación	92
6	CONCLUSIONES	95
	Bibliografía	97
	Anexos	101
I	Actividades planteadas en la Unidad Didáctica	I-1
I.1	Ejercicios de consolidación	I-1
I.2	Problemas de desarrollo	I-7
I.3	Actividad TIC	I-11
I.4	Actividades de aprendizaje dialógico	I-11
I.4.1	Tarjetas numeradas recortables	I-15
I.4.2	Tabla en blanco	I-17
I.4.3	Cuestionario sobre progresiones aritméticas y geométricas . . .	I-18
I.5	Actividad IBL	I-19
I.5.1	Criterios de evaluación y objetivos de la actividad	I-20
I.5.2	Plan de clase	I-20
I.5.3	Posibles soluciones	I-27
II	Examen y rúbrica de evaluación	II-1
II.1	Examen de evaluación	II-1
II.2	Rúbrica del examen de evaluación	II-2

Índice de figuras

2.1	Bloque 1 <i>Procesos, métodos y actitudes en matemáticas</i> , Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 391-392).	8
2.2	Comparativa del planteamiento de las unidades en el primer punto (definiciones relacionadas con sucesiones) del tema de sucesiones entre los libros de Oxford y Bruño.	18
2.3	Segundo problema planteado por el libro de ABP en la situación de aprendizaje relacionada con la temática de sucesiones y series. Fuente: elaboración propia a partir de Martínez, Muñoz, de los Santos y Martínez (2019).	25
4.1	Enunciado del problema de las baldosas. Fuente: Cañadas, Castro y Castro (2008).	56
4.2	Diferentes formas de representación de los elementos de una sucesión. Fuente: Cañadas y Castro (2006).	57
4.3	Elaboración propia. Primeros términos de la sucesión de los números pares en un diagrama cartesiano.	57
4.4	Resolución de un estudiante. Fuente: Cañadas, Castro y Castro (2008).	58
5.1	Ejemplos de ejercicios de los test psicotécnicos en oposiciones de acceso a Policía Nacional.	61
5.2	Ejemplos de relación de la sucesión de Fibonacci con la naturaleza.	63
5.3	Ejemplos de relación del número áureo con la arquitectura.	64
5.4	Ejemplos del empleo de las sucesiones y las series a lo largo de la historia.	65
5.5	Información sobre la localización del centro de estudios.	65
I.1	Imagen auxiliar del problema D-1. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)	I-7
I.2	Imagen auxiliar del problema D-3. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)	I-7
I.3	Imagen auxiliar del problema D-5. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)	I-8

I.4	Imagen auxiliar del problema D-6. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)	I-8
I.5	Imagen auxiliar del problema D-9. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)	I-9
I.6	Cubos de madera empleados en la actividad.	I-20
I.7	Elaboración propia. Ejemplo de estructura interna para una pirámide de 5 metros de altura.	I-25
I.8	Elaboración propia. Dibujo que podría ser empleado para determinar la altura total real de la pirámide y el lado de la base.	I-28

Índice de tablas

2.1	Elaboración propia. Extracto del Bloque 2 <i>Números y álgebra</i> , Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 392-393).	8
2.2	Elaboración propia. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del Bloque 1 (Orden de 14 de julio de 2016 p. 192).	10
2.3	Elaboración propia. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del Bloque 2 (Orden de 14 de julio de 2016 p. 193).	10
2.4	Elaboración propia. Descripción de las siglas empleadas para la representación de las competencias clave.	11
2.5	Elaboración propia. Diferentes niveles de profundización para los conceptos vinculados a la UD estudiada.	13
2.6	Elaboración propia. Comparación del índice del temario en los diferentes libros analizados. Se muestra en rojo el tema donde se imparten los contenidos sobre los que tratan este TFM. Fuentes: (Arias y Maza, 2020; De Lucas, Peña y Rey, 2020; Martínez, Muñoz, de los Santos y Martínez, 2019)	16
2.7	Elaboración propia. Comparativa de la cantidad de ejercicios y problemas en cada uno de los libros de estructura tradicional. Entre corchetes los elementos encuadrados dentro de un apartado de <i>ampliar</i> y/o <i>profundizar</i> . Fuentes: (Arias y Maza, 2020; De Lucas, Peña y Rey, 2020).	26
4.1	Elaboración propia. Comparativa y equivalencia entre los pasos del razonamiento inductivo defendidos por distintos autores. Fuente: (Cañadas, Castro y Castro, 2008).	55
5.1	Elaboración propia. Nivel de estudios de los progenitores de los alumnos. Fuente: Plan de Centro del Colegio Pedro Poveda.	66
5.2	Elaboración propia. Relación entre los objetivos establecidos por el Real Decreto 1105/2014 para la ESO y los establecidos para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas por la Orden de 14 de julio de 2016. Fuentes: (Orden de 14 de julio de 2016; Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014).	71

5.3	Elaboración propia. Contenidos desarrollados en la UD en relación a los establecidos en el Real Decreto 1105/2014. Fuente: (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 391-393).	75
5.4	Elaboración propia. Recursos necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica.	80
5.5	Elaboración propia. Temporalización de la UD.	83
5.6	Elaboración propia. Contenidos, criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje evaluables aplicados a la UD <i>Sucesiones y series</i> . Fuente: basado en De Lucas, Peña y Rey (2020).	92
5.7	Elaboración propia. Ponderación relativa sobre el total de la unidad para cada una de las herramientas de evaluación.	93
I.2	Elaboración propia. Posibles incidencias en la fase de desarrollo de la tarea.	I-24
II.1	Elaboración propia. Rúbrica del examen de evaluación de la unidad.	II-3

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Objetivos del trabajo

Los principales objetivos que pueden establecerse para el presente trabajo son aquellos, derivados de los establecidos por la guía docente del Trabajo Fin de Máster (TFM) de la Universidad de Jaén, con los que se pretende ejercer la mejor labor docente posible, tanto desde el punto de vista de la rigurosidad matemática y la legalidad vigente como desde el punto de vista didáctico, que permita propiciar un ambiente adecuado para el desarrollo del aprendizaje de los alumnos.

Estos objetivos pueden clasificarse en dos bloques distintos, en función de los puntos de vista expuestos en el párrafo anterior. Ambos puntos de vista podrían nombrarse como el **punto de vista del docente**, que debe impartir unos contenidos con exactitud ateniéndose a una normativa concreta, y el **punto de vista del alumno**, que, a fin de cuentas, es el protagonista último de la labor docente y para el que se deben desarrollar situaciones de aprendizaje adecuadas a partir de los contenidos y la normativa estipulados.

Desde el punto de vista del docente, los objetivos que busca alcanzar la realización del presente TFM se alcanzarán a través del desarrollo de un triple análisis (curricular, epistemológico y didáctico) de los contenidos que van a ser estudiados. Estos objetivos son los siguientes:

- Conocer el currículo de la etapa, Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en este caso, aplicable al curso de 3º de ESO y a la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.
- Comprender y conocer el proceso de transposición didáctica, entre el *saber sabio* y el *saber escolar*, realizado en los libros de texto empleados en la docencia.
- Ampliar el proceso de transposición didáctica desde el *saber escolar* al *saber enseñado*.
- Analizar críticamente las bondades y limitaciones que aparecen en todo el proceso de transposición didáctica.
- Describir con rigurosidad la complejidad matemática de los contenidos a enseñar.
- Identificar dificultades o problemáticas asociadas al proceso de aprendizaje del alumnado en referencia a los contenidos a enseñar.

Por otro lado, enfocándonos en el punto de vista del alumno, los objetivos perseguidos se alcanzarán mediante el desarrollo de una unidad didáctica (UD), en este caso la referente a los contenidos relacionados con sucesiones, progresiones y series, extraídos de entre los contenidos determinados por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Estos objetivos buscan *aportar* a los alumnos, no solo conocimientos, sino capacidades y habilidades que puedan aplicarse fuera del contexto escolar. Mostramos los objetivos a continuación:

- Desarrollar las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.
- Aplicar tanto los conocimientos adquiridos como la capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.
- Comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
- Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.
- Analizar el poder educador de la escuela en continua relación e interacción con otros contextos educadores de los adolescentes.
- Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
- Fomentar el espíritu crítico, reflexivo y emprendedor.

1.2 Motivación

Este trabajo se enmarca dentro de los requerimientos oficialmente estipulados para la obtención del título de Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Como motivación fundamental cabe destacar el deseo propio del autor de la profundización en unos contenidos del currículo que, bajo su punto de vista, reciben un peso inferior al que deberían, teniendo en cuenta la relevancia que tienen algunos de ellos. Además, no existe unanimidad entre los agentes educativos en cuanto a la posición que esta unidad didáctica debe tener dentro del temario, por lo que se pretende ofrecer el punto de vista del autor respecto a esta problemática, partiendo de la tesis de que su posicionamiento tras el bloque de geometría beneficiaría a los alumnos, además de rentabilizar los contenidos en mayor medida.

1.3 Estructura del trabajo

El presente trabajo se organiza de la siguiente forma: en el [Capítulo 1](#) se han expuesto las secciones básicas de todo Trabajo Fin de Máster, incluyendo éstas los objetivos perseguidos en el trabajo y la motivación personal que lo conlleva.

El [Capítulo 2](#) nos presenta la fundamentación curricular para la unidad didáctica escogida. En ella se hará un análisis de la legislación vigente en referencia a dicha unidad, mostrando todo aquello que dicha legislación estipula como mínimo, además de una comparativa y análisis profundos del tema dedicado a las sucesiones en tres libros de texto diferentes.

El [Capítulo 3](#) corresponde con una fundamentación epistemológica de los contenidos a desarrollar en la unidad didáctica, desde un punto de vista riguroso y según la estructura lógica esperada en una fundamentación matemática profesional. Esta fundamentación busca ser la parte del *saber sabio* que debe ser transformado hasta convertirse en el *saber aprendido* por los alumnos.

El [Capítulo 4](#) mostrará al lector una fundamentación didáctica de la unidad, basada en el análisis de una breve revisión bibliográfica relacionada con el desarrollo en los adolescentes del razonamiento inductivo, íntimamente ligado con el estudio de las sucesiones.

El [Capítulo 5](#) representará el grueso del trabajo, desarrollando una unidad didáctica completa, basándose tanto en la legalidad vigente como en las fundamentaciones desarrolladas previamente en el trabajo.

El [Capítulo 6](#) finalizará el desarrollo principal del trabajo, presentando un resumen de las conclusiones y los objetivos alcanzados en el trabajo.

Para finalizar el documento se adjuntan dos anexos distintos. En el primero de ellos ([Anexo I](#)) se muestran las actividades a realizar con los alumnos a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica en el aula. En el segundo anexo ([Anexo II](#)) encontramos el examen de evaluación y su correspondiente rúbrica.

Capítulo 2

FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En la fundamentación curricular se pretenderá realizar, por un lado, un análisis del currículo escolar establecido en la legislación¹ vigente y, por el otro, un análisis de diferentes libros de texto, concretamente de la parte del temario referente a la unidad sobre la que se desarrolla el presente TFM.

Concretamente, se estudiará la temática referente a sucesiones, progresiones y series, orientada a discentes de 3º de ESO, en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

2.1 Análisis del currículo

Para realizar el análisis del currículo vigente nos remitiremos a los siguientes documentos, ambos dentro del marco normativo establecido por la **Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa**, popularmente conocida como **LOMCE**:

- **Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato**, donde podemos obtener la información referida a los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para cada una de las materias de ESO y Bachillerato.
- **Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado**, donde podemos obtener las competencias clave asociadas a cada uno de los criterios de evaluación establecidos en el Real Decreto anterior.

¹Ante la falta de información sobre la forma de citar legislación española se ha optado por emplear alias estéticos que no lleven a confusión a la hora de citas textuales, mientras que para la lista de referencias se ha empleado una estructura similar a la empleada en artículos.

La asignatura en la que se encuadra el presente trabajo es Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el curso de 3º de ESO. Según el Real Decreto 1105/2014, esta asignatura queda dividida en 5 bloques diferentes de contenidos:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Bloque 2. Números y álgebra.

Bloque 3. Geometría.

Bloque 4. Funciones.

Bloque 5. Estadística y probabilidad.

En este TFM nos centraremos en los dos primeros bloques antes mencionados:

- El primero de ellos, *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, ya que es un bloque transversal de competencias a desarrollar a lo largo de todo el curso escolar y simultáneamente al resto de bloques. Este bloque se sustenta sobre tres pilares básicos: la resolución de problemas, el uso sistemáticamente adecuado de los medios tecnológicos y la dimensión socio-cultural de las matemáticas.
- El segundo, *Números y álgebra*, por ser el bloque que incluye el contenido relacionado con la temática a desarrollar sobre sucesiones, progresiones y series.

Queremos destacar aquí los objetivos perseguidos por la Orden de 14 de julio de 2016 para ser alcanzados por los alumnos, durante el desarrollo de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan

estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

De entre los objetivos anteriores, aquellos que pueden relacionarse en mayor medida con el presente tema son los objetivos 1, 2, 6, 7, 8, 9 y 10.

A continuación, se muestran los distintos contenidos extraídos de la legislación vigente. Como se ha mencionado en la descripción de la legislación empleada, obtendremos los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del Real Decreto 1105/2014, mientras que las competencias clave asociadas a los criterios de evaluación se extraerán de la Orden de 14 de julio de 2016 de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Por motivos de resolución del formato mostramos figuras que representan el bloque 1 del currículo, mientras que para el bloque 2 se muestra una tabla con los contenidos exclusivos referentes a la temática tratada en este TFM.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: - la recogida ordenada y la organización de datos. - la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. - facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. - el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. - la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. - comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	- Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. - Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. - Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. - Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. - Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. - Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. - Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. - Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. - Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. - Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. - Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. - Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	- Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. - Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). - Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. - Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. - Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. - Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. - Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. - Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. - Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. - Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. - Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. - Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. - Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. - Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. - Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. - Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. - Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. - Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. - Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. - Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. - Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Figura 2.1: Bloque 1 *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 391-392).

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
■ Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico. ■ Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.	2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.	2.1. Calcula términos de una sucesión numérica recurrente usando la ley de formación a partir de términos anteriores. 2.2. Obtiene una ley de formación o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios. 2.3. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos y las emplea para resolver problemas. 2.4. Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas.

Tabla 2.1: Elaboración propia. Extracto del Bloque 2 *Números y álgebra*, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 392-393).

Mostramos a continuación los diferentes criterios de evaluación de cada bloque asociados a cada una de sus competencias clave:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Criterio de evaluación	Competencias clave
1. Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP

11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 2.2: Elaboración propia. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del Bloque 1 (Orden de 14 de julio de 2016 p. 192).

Bloque 2: Números y álgebra	
Criterio de evaluación	Competencias clave
2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.	CMCT

Tabla 2.3: Elaboración propia. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del Bloque 2 (Orden de 14 de julio de 2016 p. 193).

Por lo tanto, podemos afirmar que las competencias que deben haber sido desarrolladas durante el desarrollo de la unidad competente serán, como mínimo, las siguientes:

CCL	Competencia en comunicación lingüística.
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología.
CAA	Competencia de aprender a aprender.
CD	Competencia digital.
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
CSC	Competencias sociales y cívicas.

Tabla 2.4: Elaboración propia. Descripción de las siglas empleadas para la representación de las competencias clave.

Una vez plasmado todo aquello que la normativa vigente plantea para el estudio de la UD de sucesiones, progresiones y series, vamos a realizar una pequeña interpretación sobre ello. En primer lugar, podemos discernir en qué medida los contenidos establecidos para esta UD contribuirían a alcanzar los objetivos establecidos para la asignatura según la Orden de 14 de julio de 2016. En páginas anteriores sugerimos que los objetivos que más relacionados están con la presente UD son los numerados como 1, 2, 6, 7, 8, 9 y 10. Mostramos su numeración a continuación y su relación con los contenidos.

- **1:** el empleo, en general, de sucesiones implica el uso constante de expresiones algebraicas muy bien definidas, lo que impulsa la incorporación de formas de expresión matemáticas al lenguaje. En particular, la diferenciación, tanto en concepción como en uso, de las progresiones aritméticas y geométricas mejora las habilidades de pensamiento reflexivo del alumno.
- **2:** variadas situaciones de la vida cotidiana y el diseño, especialmente las relacionadas de alguna forma con la geometría, son modelables a través del empleo de progresiones, o bien pueden entenderse como modelos de funciones reales de variable real que pueden simplificarse a variable natural.
- **6:** la presencia de las sucesiones en la naturaleza, especialmente la de Fibonacci, es una temática susceptible de investigación por parte de los alumnos a través del empleo de la tecnología. De igual forma, un uso adecuado de la tecla **Ans** en la calculadora puede ser de gran ayuda en la comprensión y empleo de sucesiones con ley de recurrencia de primer grado.
- **7:** la resolución de problemas que incidan en la diferencia entre las progresiones aritméticas y geométricas, y en mayor medida, en sus series asociadas, imponen la necesidad de disponer de cierta flexibilidad a la hora de convertir un tipo concreto de situación en otro empleando diferentes puntos de vista.

- **8:** tanto o incluso más importante que la propia resolución de un problema es la comprobación de la coherencia de la solución alcanzada. En problemas relacionados con las progresiones y las series será muy importante comprender el problema para definir adecuadamente su proceso de resolución.
- **9:** este objetivo está muy relacionado con el número 2. Dado que muchas situaciones de la vida cotidiana pueden modelarse mediante sucesiones y series, la resolución de problemas sencillos puede influir en una mejora de la autoestima del alumno, mostrándole la practicidad y el utilitarismo de las matemáticas.
- **10:** diferentes tipos de sucesiones y progresiones son empleadas en diferentes campos de las matemáticas, como la topología (Munkres, 2000), el análisis (Pugh y Pugh, 2002) o la teoría de conjuntos.

Si bien, según la legislación vigente, sólo hemos extraído dos contenidos relacionados con la UD (tabla 2.1), éstos pueden desglosarse algo más atendiendo a los estándares de aprendizaje evaluables extraídos de la misma tabla. Teóricamente, los libros escolares que traten esta parte del temario deberían alcanzar, como mínimo, unos determinados niveles de profundización. Se muestra en la tabla 2.5 una comparativa entre el nivel de profundización exigido por la normativa y niveles de profundización extra que podrían alcanzarse, para cada uno de los contenidos desglosados.

Como resumen final de la legislación podemos establecer los siguientes puntos:

- La profundidad alcanzada en los contenidos puede considerarse buena, si bien deja de lado algunos contenidos puntuales que pueden ser de relevancia hoy en día, como la diferenciación entre conjuntos numéricos que pueden formar o no una sucesión, conocimiento de amplio uso en reconocimiento de patrones (Parncutt y Strasburger, 1994; Zhou, 2015), u otros como el cálculo de la serie infinita en progresiones geométricas convergentes, que resulta de trascendental importancia en campos como la geometría fractal (Li, 2000) o la aproximación de funciones, como los polinomios de Taylor (Sezer, 1994).
- Como hemos comentado al inicio de este epígrafe, el currículo sitúa esta UD en el bloque 2 *Números y álgebra*. Sin embargo, existen editoriales que en sus libros escolares colocan esta UD justo al inicio del bloque de funciones, antes de presentar las funciones reales de variable real. En el presente trabajo se seguirá el ejemplo de estas editoriales, dado que el manejo de sucesiones, y especialmente el trabajo con su término general, puede ser una gran introducción al trabajo con funciones reales de variable real.
- Siguiendo el razonamiento del apartado anterior, a esas alturas de curso académico ya debe haberse visto la parte del currículo referente a geometría,

que puede ser de gran ayuda en la explicación gráfica de las sucesiones (Araya y Alfaro, 2009), dada su relación con el razonamiento inductivo y el empleo de éste como estrategia de resolución de problemas. Según Cañadas, Castro y Castro (2008), considerando que la componente visual puede jugar un papel crucial en el desarrollo del razonamiento, existen investigaciones que muestran que el sistema de representación gráfico es una opción potente cuando se trata de identificar estrategias utilizadas por los estudiantes en tareas relacionadas con la generalización lineal.

Contenidos desglosados	Profundización según legislación	Profundización extra propuesta por el autor
Sucesiones	Calcular términos de una sucesión numérica, a partir tanto de su término general como de su ley de recurrencia, si la tiene.	Diferenciar entre conjuntos numéricos que efectivamente forman una sucesión y aquellos que no la forman.
Progresiones aritméticas	Identificarlas, expresar su término general y emplearlas para resolver problemas.	Expresar su ley de recurrencia e interpolar términos conocidos dos cualesquiera.
Suma de progresiones aritméticas	Calcular la suma de los “ n ” primeros términos.	Resolver problemas que involucren sumas de progresiones aritméticas.
Progresiones geométricas	Identificarlas, expresar su término general y emplearlas para resolver problemas.	Expresar su ley de recurrencia e interpolar términos conocidos dos cualesquiera.
Suma de progresiones geométricas	Calcular la suma de los “ n ” primeros términos.	Calcular el valor de la serie infinita en aquellas progresiones que lo permitan y resolver problemas que involucren sumas de progresiones geométricas.

Tabla 2.5: Elaboración propia. Diferentes niveles de profundización para los conceptos vinculados a la UD estudiada.

2.2 Análisis de libros de texto

Estemos de acuerdo o no, el empleo de libros de texto sigue siendo hoy en día el elemento vehicular en las clases de matemáticas durante cualquiera de las etapas escolares, especialmente en la secundaria, cuando la estructuración del conocimiento empieza a cobrar especial importancia. Estos libros tratan de adaptar el denominado *saber sabio*, aquel saber matemático, profundo, estructurado y riguroso, construido por matemáticos profesionales, en *saber escolar*. Este *saber escolar* será posteriormente adaptado por el docente, que lo convertirá en *saber enseñado*. Todo este proceso, que engloba todas las transformaciones realizadas desde el *saber sabio* al *saber enseñado*, es lo que Yves Chevallard enunció en Chevallard y Johsua (1985) como **transposición didáctica**.

Nosotros nos enfocaremos en la transformación realizada hasta llegar al *saber escolar*, que, básicamente, será aquel que encontramos al abrir un libro de texto. Se hace necesario por tanto realizar un análisis de las diferencias y similitudes que podemos encontrar entre libros enfocados en la misma etapa pero de distintas editoriales.

Para realizar dicho análisis hemos escogido tres libros diferentes, cada uno con sus propias características. Estos libros, y la justificación de su elección, son los mostrados a continuación:

- De Lucas, M., Peña, M., y Rey, M. J. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO*. San Fernando de Henares: Oxford University Press España. ISBN: 978-01-905-3512-4: este es el libro empleado en el Colegio Pedro Poveda² y todos aquellos dentro de la red de colegios a la que pertenece, para los grupos de 3º de ESO. Nos referiremos a él como Oxford.
- Arias, J. M., y Maza, I. (2020). *Matemáticas académicas, 3º ESO*. Madrid: Grupo Editorial Bruño. ISBN: 978-84-696-1958-2: este libro, además de estructurar la forma de introducir los contenidos de forma diferente al anterior, fue uno de los libros valorados para ser empleado durante el presente curso 2020/2021 en el Colegio Pedro Poveda. Nos referiremos a él como Bruño.
- Martínez, R. Á., Muñoz, M. C., de los Santos, M. I., y Martínez, P. (2019). *Matemáticas académicas. Aprendizaje Basado en Problemas. 3º ESO*. Barcelona: Editorial Casals. ISBN: 978-84-218-6628-3: diversos alumnos en 3º de ESO en el Colegio Pedro Poveda están diagnosticados con altas capacidades en Matemáticas, por lo que se les suministra material de este libro para complementar y profundizar en su aprendizaje. Nos referiremos a él como ABP (siglas en español de Aprendizaje Basado en Problemas).

²El Colegio Pedro Poveda es el centro donde el autor ha realizado las prácticas curriculares del presente Máster.

2.2.1. Estructura de los libros

La primera diferencia que encontramos entre los libros es la estructuración del temario (tabla 2.6). La estructura del libro de ABP es sustancialmente distinta a la de los demás, combinando contenidos de diversos bloques en el mismo tema.

Tanto Oxford como Bruño realizan una estructuración del temario que podríamos llamar tradicional. Por un lado, el libro de Oxford dedica 6 temas (del 1 al 6) al bloque de Números y álgebra, 4 temas (del 7 al 10) al bloque de geometría, 2 temas (11 y 12) al bloque de funciones y 2 temas más (13 y 14) al bloque de estadística y probabilidad. Por el otro lado, el libro de Bruño realiza una separación clara entre lo que llama el bloque de aritmética (números), al que dedica 4 temas (del 1 al 4), y el bloque de álgebra, al que dedica 3 temas (del 5 al 7). A continuación dedica 3 temas (del 8 al 10) al bloque de geometría, 2 temas (11 y 12) al bloque de funciones y 2 temas más (13 y 14) al bloque de estadística y probabilidad.

El libro de ABP es muy diferente a los anteriores. Se estructura en 9 unidades diferentes, contando cada una de ellas con diferentes situaciones problema que involucran diferentes bloques de contenido. A modo de ejemplo hablaremos de la segunda unidad, en la que se tratan las sucesiones. En esta unidad se presentan 4 situaciones distintas. Las 3 primeras emplean conocimientos del bloque de números y álgebra, mientras que la cuarta desarrolla conceptos de geometría. En este libro los contenidos de cada uno de los bloques temáticos se reparten a lo largo de las unidades de la siguiente forma:

- Bloque de números y álgebra: todas las unidades.
- Bloque de geometría: unidades 2, 3, 4, 6 y 8.
- Bloque de funciones: unidades 1, 3, 6, 7 y 8.
- Bloque de estadística y probabilidad: unidades 1, 4, 5, 6, 7 y 9.

2.2.2. Enfoque y estructura de las unidades

Tanto el libro de Oxford como el de Bruño presentan un enfoque didáctico principalmente transmisivo, mediante el cual los contenidos son explicados por el profesor, para posteriormente ser trabajados mediante la realización de actividades por los alumnos. Los libros tienen pequeñas partes en cada tema dedicadas a trabajo autónomo del alumno guiado por el profesor que demuestra un enfoque conductista. En el caso del libro de Oxford, al comienzo de cada tema se propone un proyecto de trabajo completamente autónomo por parte del alumno, que será validado por el profesor una vez entregado. Este tipo de proyectos denota un enfoque socio-constructivista, que no aparece en el libro de Bruño.

Oxford	Bruño	ABP
1. Números racionales e irracionales	1. Números racionales e irracionales	1. Campamento de verano
2. Potencias y raíces	2. Potencias y raíces	2. Naturaleza matemática
3. Polinomios	3. Problemas aritméticos	3. En movimiento
4. Ecuaciones	4. Sucesiones y progresiones	4. Historias matemáticas
5. Sistemas de ecuaciones	5. Polinomios	5. Tiempo libre y ocio
6. Sucesiones	6. Ecuaciones	6. El mundo de la publicidad
7. Geometría del plano. Movimientos	7. Sistemas de ecuaciones lineales	7. Los números te cuidan
8. Triángulos. Propiedades	8. Teoremas de Pitágoras y Thales	8. Arquitectura matemática
9. Geometría del espacio. Poliedros	9. Áreas y volúmenes	9. Comer con cabeza
10. Cuerpos de revolución	10. Movimientos, frisos y mosaicos	
11. Funciones	11. Características de las funciones. Rectas	
12. Funciones lineales y cuadráticas	12. Parábola e hipérbola	
13. Estadística	13. Estadística	
14. Probabilidad	14. Probabilidad	

Tabla 2.6: Elaboración propia. Comparación del índice del temario en los diferentes libros analizados. Se muestra en rojo el tema donde se imparten los contenidos sobre los que tratan este TFM. Fuentes: (Arias y Maza, 2020; De Lucas, Peña y Rey, 2020; Martínez, Muñoz, de los Santos y Martínez, 2019)

El libro de Oxford plantea una estructura inductivista en sus unidades, poniendo siempre en primer lugar ejemplos resueltos antes de proceder con la teoría (figura 2.2(a)). Cada una de las unidades se estructura aproximadamente de la siguiente manera: justo al inicio, durante la presentación de la unidad se nos muestra un resumen de los contenidos que se desarrollarán en la misma, así como los conceptos previos que deberían conocerse y el proyecto autónomo que deberá realizar el alumno. A lo largo de la unidad se exponen los contenidos organizados en epígrafes, introducidos a través de situaciones cotidianas y resaltando las ideas principales en recuadros. Todas las actividades propuestas están clasificadas por grado de dificultad. Al finalizar los puntos de contenido teórico encontramos una serie de secciones que permiten sintetizar e integrar los conocimientos adquiridos. En estas secciones se encuentra contenido muy variado, como formas de emplear la calculadora para resolver problemas de la unidad en cuestión o curiosidades relacionadas. Se adjuntan también varias páginas de actividades para reforzar lo aprendido, así como una rúbrica de evaluación para el proyecto que se introdujo al inicio de la unidad. Por último, se incorporará contenido de mayor nivel o incluso de cursos superiores, con algunas actividades que pretender servir de ampliación para alumnos con mayor facilidad.

Por su parte, cada unidad del libro de Bruño, que emplea una estructura deductivista (figura 2.2(b)), se estructura de la siguiente forma: tras una presentación de la unidad, donde se muestra un pequeño índice de contenidos y un breve texto introductorio, se realiza el desarrollo de los contenidos. En primer lugar se desarrollan los contenidos en dobles páginas, resaltando las partes más importantes. A continuación se realizan ejemplos sencillos para cada concepto o procedimiento estudiado y se proponen ejercicios para aplicar la teoría. Al finalizar los contenidos de la unidad encontramos una serie de ejercicios y problemas tipo resueltos de forma pormenorizada, continuando con una gran cantidad de ejercicios y problemas propuestos clasificados en distintas secciones y niveles de dificultad. Por último, el libro muestra una sección sobre matematización en contextos reales, proponiendo ejercicios con una aplicación real a la vida cotidiana, a la Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas (STEAM), y una sección de autoevaluación para el alumno.

Por su parte, el libro de ABP presenta un enfoque principalmente socio-constructivista dado que el libro se basa casi en su totalidad en la realización de proyectos y situaciones de aprendizaje. Cada trimestre es planteado como un proyecto principal, desarrollando cada unidad diversas situaciones de aprendizaje relacionadas de alguna forma con el proyecto.

1 Sucesiones

Pablo se ha entretenido jugando con unas fichas.



Ha construido triángulos empezando con una ficha y añadiendo cada vez una columna con una ficha más. El número de fichas que emplea cada vez es:

$$1 \quad 1+2=3 \quad 3+3=6 \quad 6+4=10 \quad 10+5=15$$

La lista de los números que indican la cantidad de fichas que utiliza para cada figura es una **sucesión**.

Una **sucesión** es una lista ordenada de números reales: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

Se llama **término** a cada uno de los números que forman la sucesión. El **subíndice** de cada término indica su posición en la lista.

¿Cuántas fichas necesitará para la siguiente figura? Pablo puede averiguar cuántas fichas necesitará sumando las que corresponden a la posición que va a ocupar el triángulo: $a_6 = 15 + 6 = 21$ fichas

Esta forma de definir la sucesión se denomina **por recurrencia**, a partir del término anterior se obtiene el siguiente. En este caso:

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n \text{ para } n > 1$$

Una **sucesión** se dice que es **recurrente** si podemos construir cada uno de sus términos mediante una expresión algebraica, llamada **ley de recurrencia**, a partir de los términos anteriores.

Pero Pablo no quiere tener que recurrir al término anterior para saber cuántas fichas va a necesitar. ¿Será posible averiguar cuántas fichas necesita para la figura número 20 sin hallar todas las anteriores?

Manipulando las fichas observa que dos figuras iguales forman un rectángulo y así puede hallar las que necesita. Organiza los datos en una tabla escribiendo la relación entre la posición que ocupa la figura y las fichas que necesita.

Posición	1	2	3	4	...	n
Número de fichas	$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$	$\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$	$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$	$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$	...	$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

El **término general** de la sucesión es: $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Así, para la posición número 20, Pablo necesitará $a_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$ fichas.

El **término general** de una sucesión es la expresión algebraica que permite averiguar el valor de cualquier término de la sucesión sabiendo qué posición ocupa en ella.

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales:
 $423,7 : 0,72$

Representación gráfica en unos ejes coordenados

Una **sucesión** se puede interpretar como una **función discreta**.

Números poligonales o figurados

Un **número figurado** es un número natural que, al ser representado por un conjunto de puntos equidistantes, puede formar una figura geométrica regular.

EJEMPLO
Número triangular de 8 puntos:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en tu cuaderno el siguiente elemento de estas series:

a) b)

1.1 Sucesiones de números reales

Una **sucesión de números reales** es un conjunto de números reales ordenados, es decir, cada número de la sucesión ocupa un lugar determinado.

EJEMPLO
Los números 2, 4, 6, 8, 10, 12... son un conjunto de números que están ordenados y forman una sucesión.

Lugar	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	...
Número	2	4	6	8	10	12	...

Se observa que son los números pares y que la regla que siguen es que cada número se obtiene sumándole 2 unidades al anterior. Se pueden seguir añadiendo indefinidamente los números que componen esta sucesión.

1.2 Términos de una sucesión

Los **términos de la sucesión** son cada uno de los números que forman la sucesión.

Los términos de una sucesión ocupan un lugar determinado en la sucesión. Para representarlo se utiliza una letra con un subíndice numérico, que indica el lugar que ocupa el término.

► **Evitar errores habituales**
No confundas nunca el subíndice que acompaña a la letra $a_1, a_2, \dots$ que indica el lugar que ocupa el término, con el valor del término.

EJEMPLO
La sucesión 3, 6, 10, 15, 21... se puede representar por:
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

donde:

- $a_1 = 3$ → Significa que el número 3 ocupa el primer lugar de la sucesión.
- $a_2 = 6$ → El número 6 ocupa el segundo lugar de la sucesión.
- $a_3 = 10$ → El número 10 ocupa el tercer lugar de la sucesión.
- $a_4 = 15$ → El número 15 ocupa el cuarto lugar de la sucesión, etcétera.

(a) Planteamiento inductivista del libro de (b) Planteamiento deductivista del libro de Bruño. Oxford. Fuente: versión web de De Lucas, Fuente: elaboración propia a partir de Arias y Maza Peña y Rey (2020). (2020).

Figura 2.2: Comparativa del planteamiento de las unidades en el primer punto (definiciones relacionadas con sucesiones) del tema de sucesiones entre los libros de Oxford y Bruño.

Cada unidad se estructura aproximadamente de la misma forma, que describimos a continuación. En la presentación de la unidad se muestran una serie de preguntas iniciales para cada situación y la relación entre los distintos bloques curriculares y las situaciones a desarrollar. En cada unidad se plantean 3 o 4 situaciones reales y de interés para el alumnado, a partir de las cuales se irán construyendo distintos conocimientos matemáticos, planteando retos que el alumnado podrá resolver mediante actividades dirigidas y orientadas. Planteada la situación se desarrollan los contenidos implicados en ella, alternando los conocimientos teóricos esenciales con ejemplos e ilustraciones. Tras los contenidos se plantean dos tipologías de actividades para asegurar la adquisición de las distintas competencias matemáticas: la primera de ellas se refiere a ejercicios de ejercitación, mientras que la segunda hace lo propio con problemas contextualizados que indican la gradación de los procesos matemáticos (PISA) y las habilidades de la competencia matemática.

Al finalizar todas las situaciones de una misma unidad nos encontramos con dos páginas que muestran los contenidos resumidos y organizados por bloques, mostrando también la relación que existe entre los mismos. Finalmente, cada unidad concluye con cuatro páginas que replican las dos tipologías de actividades comentadas anteriormente, pero en las que se entremezclan los contenidos desarrollados durante toda la unidad, y una pequeña autoevaluación con rúbrica para los alumnos.

2.2.3. Análisis de los contenidos teóricos relacionados con sucesiones

A continuación realizaremos el análisis de los contenidos teóricos de los libros de texto analizados. Compararemos el tema 6 del libro de Oxford, *Sucesiones*, con el tema 4 del libro de Bruño, *Sucesiones y progresiones*.

Para simplificar la estructuración de este contenido y facilitar la lectura vamos a separar la comparativa según el desglose realizado en la [tabla 2.5](#). En primer lugar mostraremos el contenido a analizar, con la profundización mínima requerida por el currículo y la posible profundización que propusimos en dicha tabla. Posteriormente analizaremos de qué forma tratan dicho contenido los libros de Oxford y Bruño, dado que no tiene mucho sentido comparar de esta forma ambos libros con el de ABP, debido a la particularidad de este último.

Una vez finalizada la comparación de contenidos entre Oxford y Bruño explicaremos la estructuración de la unidad relacionada con sucesiones en el libro de ABP.

Sucesiones

Profundización según legislación: calcular términos de una sucesión numérica, a partir tanto de su término general como de su ley de recurrencia, si la tiene.

Profundización propuesta: diferenciar entre conjuntos numéricos que efectivamente forman una sucesión y aquellos que no la forman.

Oxford: en este primer punto introductorio el libro se encarga de definir los términos de sucesión, término y subíndice. A continuación dedica una parte del espacio para definir y ejemplificar la ley de recurrencia de una sucesión, para finalmente mencionar, dedicándole mucho menos peso, el término general de una sucesión.

Bruño: este libro por su parte comienza definiendo el concepto de sucesión de números reales y término, omitiendo la definición de subíndice. En este apartado destaca que las sucesiones pueden verse como una función discreta, es decir, una función real de variable natural. Incorpora también el concepto de regularidad, mostrando las 3 formas en que pueden definirse las sucesiones:

- Enumerando los x primeros términos.
- Mediante una ley de formación. El libro en ningún punto del tema menciona la palabra recurrencia.
- Mediante un término general.

Finaliza el punto definiendo el término general de una sucesión, dejando en este caso mucho más espacio que a la ley de formación, sólo mencionada de pasada durante las regularidades.

Análisis: podríamos concluir que ambas editoriales cumplen con los contenidos mínimos del currículo. Si bien Oxford lo hace estrictamente, Bruño no presenta la exactitud quizás necesaria al hablar de ley de recurrencia, aunque sí que se acerca al concepto que hemos propuesto como profundización extra al tratar las regularidades.

Progresiones aritméticas

Profundización según legislación: identificarlas, expresar su término general y emplearlas para resolver problemas.

Profundización propuesta: expresar su ley de recurrencia e interpolar términos conocidos dos cualesquiera.

Oxford: tras un ejemplo sencillo este libro define el concepto de progresión aritmética, introduciendo el término de diferencia. A continuación, y tras otro ejemplo relacionado con el anterior, propone cuál sería el término general de la progresión.

Bruño: en el libro de Bruño se sigue una estructura muy similar a la de Oxford, pero realizando un enfoque deductivo, mostrando primero la teoría en lugar de los ejemplos de aplicación. Adicionalmente incorpora la forma del término general de la progresión con dos términos cualesquiera. Este libro tiene la particularidad de incluir el contenido relacionado con la suma de los “ n ” primeros términos en este punto.

Análisis: ambos libros cumplen con lo estipulado por el currículo para este contenido. Muestran la teoría apropiadamente y realizan ejercicios y problemas de ejemplo. Sin embargo, ninguno va más allá del currículo, con la salvedad de la inclusión por parte del libro de Bruño de la obtención de la forma del término general de la progresión con dos términos cualesquiera.

Suma de progresiones aritméticas

Profundización según legislación: calcular la suma de los “ n ” primeros términos.

Profundización propuesta: resolver problemas que involucren sumas de progresiones aritméticas.

Oxford: al igual que el punto anterior, tras un pequeño ejemplo se realiza una demostración de la fórmula empleada para el cálculo de los “ n ” primeros términos de una progresión aritmética, pero es una demostración distinta a la habitual.

Bruño: en este caso, como se menciona en el punto anterior, esta parte del contenido viene adjuntado con el punto previo sobre progresiones aritméticas. A diferencia del anterior, la demostración no se realiza en las mismas páginas, sino que se expresa directamente la fórmula final.

Análisis: ambos libros de nuevo cumplen con las exigencias del currículo, sin embargo, en ningún momento tratan a estas sumas como una nueva sucesión denominada serie. En las páginas del libro destinadas al desarrollo de este contenido ningún libro dedica espacio al desarrollo de problemas que empleen el uso de suma de términos de progresiones aritméticas.

Los últimos dos puntos de contenido teórico, relacionados con las progresiones geométricas, son una completa analogía a las aritméticas, con sus propias características.

Progresiones geométricas

Profundización según legislación: identificarlas, expresar su término general y emplearlas para resolver problemas.

Profundización propuesta: expresar su ley de recurrencia e interpolar términos conocidos dos cualesquiera.

Oxford: tras un ejemplo sencillo este libro define el concepto de progresión geométrica, introduciendo el término de razón. A continuación, y tras otro ejemplo relacionado con el anterior, propone cuál sería el término general de la progresión.

Bruño: en el libro de Bruño se sigue una estructura muy similar a la de Oxford. En este caso, al igual que con progresiones aritméticas, también incorpora la forma del término general de la progresión con dos términos cualesquiera.

Este libro tiene la particularidad de incluir el contenido relacionado con la suma de los “ n ” primeros términos en este punto, así como la suma infinita de términos para $|r| < 1$, donde r es la razón de la progresión geométrica

Análisis: ambos libros cumplen con lo estipulado por el currículo para este contenido. Sin embargo, al igual que ocurría con las progresiones aritméticas, no se va más allá, no mostrando ni la ley de recurrencia ni interpolando términos en la progresión.

Suma de progresiones geométricas

Profundización según legislación: calcular la suma de los “ n ” primeros términos.

Profundización propuesta: calcular el valor de la serie infinita en aquellas progresiones que lo permitan y resolver problemas que involucren sumas de progresiones geométricas.

Oxford: al igual que el punto anterior, tras un pequeño ejemplo se realiza una demostración de la fórmula empleada para el cálculo de los “ n ” primeros términos de una progresión geométrica que, por el contrario a lo que ocurría con las aritméticas, sí que es la demostración tradicional de dicha fórmula. A

partir de una modificación del ejemplo anterior se introduce la posibilidad de calcular la suma de infinitos términos, mostrando finalmente la expresión.

Bruño: en este caso, como se menciona en el punto anterior, esta parte del contenido viene adjuntado con el punto previo sobre progresiones geométricas. En este caso se muestra la fórmula para la suma de los primeros “ n ” términos de la progresión y un pequeño ejemplo a continuación. Finalmente muestra la fórmula para el cálculo de la suma infinita, pero sin ningún tipo de introducción o ejemplo.

Análisis: ambos libros de nuevo cumplen con las exigencias del currículo, además de añadir el concepto de suma infinita, aunque en el caso de Oxford está mucho más justificada. También es el libro de Oxford el único que muestra un pequeño problema resuelto de aplicación de la suma de los primeros “ n ” términos de la progresión, referido al cálculo de fracciones generatrices.

Podemos destacar que, como se menciona en el apartado de la suma de términos de las progresiones aritméticas, en ninguno de los libros se menciona el término de serie. Entendemos que se debe a que, para el alumnado al que va dirigido este contenido, puede ser complicado comprender cómo la suma de los términos de una sucesión forman en sí mismos una nueva sucesión, además de ser la primera y única vez que se tratan estos contenidos en el currículo de la educación secundaria, limitándose de esta forma a mostrar los contenidos que ya hemos mencionado en los cuadros anteriores.

Las demostraciones de las fórmulas mostradas en los temas suelen ser realizadas a través de ejemplos, con poca rigurosidad, a excepción de las fórmulas para la suma de los primeros “ n ” términos tanto de progresiones aritméticas como geométricas. En el caso del libro de Oxford estas demostraciones se realizan en el propio apartado teórico, mientras que en el caso de Bruño se reservan para una parte posterior, después de la finalización de la teoría y antes del inicio del bloque de ejercicios y problemas del final del tema.

En el caso de Bruño se dedica un último punto de teoría dedicado exclusivamente a aplicaciones financieras de las progresiones, concretamente las aplicaciones sobre interés simple y compuesto, en ambos casos con distintos periodos de capitalización.

Análisis de los contenidos teóricos en el libro sobre Aprendizaje Basado en Problemas

Describimos a continuación la estructuración del espacio dedicado a las sucesiones en el libro de ABP. Como ya se ha mencionado anteriormente, la estructura que sigue este libro está muy alejada de la estructura tradicional que siguen los libros comparados anteriormente.

El contenido relacionado con sucesiones se localiza en el primer trimestre, dentro de la segunda unidad, denominada *Naturaleza matemática*, representando concretamente la tercera situación de aprendizaje de la unidad.

Al inicio de la situación se plantean dos problemas diferentes, con 8 ejercicios de carácter socioconstructivista cada uno. En el primero de ellos se plantea un problema relacionado con el patrón regular que siguen las aves en su vuelo, y los ejercicios relacionados con dicho problema están enfocados a introducir los conceptos básicos de las sucesiones y todo lo relacionado con progresiones aritméticas, incluida la suma de los primeros “ n ” términos.

El segundo problema trata sobre los periodos de semidesintegración radiactiva de los materiales radiactivos, cuyos ejercicios relacionados están enfocados a introducir las progresiones geométricas, diferenciarlas adecuadamente de las aritméticas y sumar los primeros “ n ” términos de la progresión (figura 2.3).

Una vez finalizados los dos problemas el libro dedica dos páginas a la fase de institucionalización del aprendizaje, donde desarrolla toda la teoría que se ha introducido en los problemas del inicio de la situación. El esquema seguido es muy similar al de los otros libros, planteando al inicio las definiciones de sucesión, término, subíndice y término n -ésimo. Como elemento que se da únicamente en este libro encontramos una sección dedicada exclusivamente a tratar la sucesión de Fibonacci. A continuación se desarrollan los contenidos de progresiones aritméticas y geométricas de la misma forma que en el libro de Bruño, incluyendo la suma de los “ n ” primeros términos de la progresión. En este caso, sin embargo, no se muestra en este espacio la expresión para la suma infinita de términos en una progresión geométrica ni la demostración de las expresiones de la suma de los “ n ” primeros términos de la progresión.

Para reforzar el contenido desarrollado se plantean a continuación una serie de ejercicios independientes, además de dos nuevos problemas similares a los del inicio. Es en el espacio dedicado a los ejercicios independientes donde se incluye la teoría relativa a la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica.

2 | situación de aprendizaje

Ítem 3. Desintegración radiactiva

Los materiales radiactivos se van desintegrando con el paso del tiempo. Cada material tiene una **vida media** que, una vez conocida, permite calcular el tiempo que ha transcurrido desde que se inició el proceso de desintegración, ya que, por cada período de vida media, el material se va quedando en la **mitad**.

El carbono 14 forma parte de los tejidos de los seres vivos, pues se absorbe de la atmósfera de manera continua hasta la muerte del individuo. Tiene una vida media de 5568 años. Por eso, los paleontólogos miden la cantidad residual de carbono 14 para calcular el momento en el que se formó.



Ítem 4. Progresiones

Las progresiones son sucesiones de números entre los cuales existe una norma.

- **Progresión aritmética.** Cada término se obtiene del anterior sumando un número fijo llamado **diferencia**.
- **Progresión geométrica.** Cada término se obtiene del anterior multiplicando por un número fijo llamado **razón**.

Construye con lo que sabes

Interpreta 8 Lee atentamente la información del ítem 3. Luego, copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido (años)	0	5568			
Cantidad de carbono 14 residual	1	$\frac{1}{2}$			

Matematiza 9 Fíjate en el ítem 4 y observa la sucesión de números del tiempo transcurrido en la tabla anterior. ¿De qué tipo es? Escribe los seis primeros términos con la notación matemática que utilizaste en la página anterior.

10 Escribe cuánto valen a_6 , a_{10} y a_x .

11 Calcula la suma de los ocho primeros términos de esta sucesión empleando la fórmula que obtuviste para n filas en el ejercicio anterior.

12 Según el ítem 4, ¿de qué tipo es la sucesión de cantidad de carbono 14 residual? Escribe con notación matemática los seis primeros términos.

13 Escribe mediante una operación cómo se calcula a_x , a_y , a_z , a_w , a_v en función del término anterior. Escribe también cada uno de ellos en función de a_1 .

Simboliza 14 Observa la relación entre los términos de la sucesión y escribe:

a a_n en función de a_1

b a_n en función de a_2

c a_n en función de a_6

d a_n en función de a_m

Matematiza 15 ¿Cuánto suman los cinco primeros términos de la progresión cantidad de carbono 14 residual?

Simboliza 16 😊😊 Por parejas, buscad la fórmula que permite sumar los n primeros términos de la progresión anterior.

Lo que has construido

Reconoces la relación entre una **secuencia de números**.

Calculas el término general y la suma de los n primeros términos de una **progresión**.

Distíngues entre **progresiones aritméticas y geométricas**.

Figura 2.3: Segundo problema planteado por el libro de ABP en la situación de aprendizaje relacionada con la temática de sucesiones y series. Fuente: elaboración propia a partir de Martínez, Muñoz, de los Santos y Martínez (2019).

2.2.4. Análisis de actividades

En el punto anterior hemos tratado todo lo relacionado con el desarrollo de los contenidos teóricos en los tres libros. A continuación compararemos lo relacionado con el desarrollo práctico de los conocimientos impartidos, es decir, las actividades, los ejercicios y problemas, propuestas por cada uno de los libros.

En primer lugar debemos realizar una diferenciación entre lo que aquí llamaremos **ejercicio** y lo que llamaremos **problema**. Nieto (1993) propone una clasificación en hasta 8 categorías diferentes de actividades, que nosotros resumiremos en dos:

- **Ejercicio:** engloba las categorías denominadas 1) *Ejercicios de reconocimiento* y 2) *Ejercicios algorítmicos o de repetición* (Nieto, 1993, pp. 1-3). Estas actividades serán aquellas en las que se pretende resolver o recordar un conocimiento concreto, una definición o una proposición de un teorema, o bien reforzar alguna expresión matemática determinada o potenciar las habilidades de cálculo del alumnado.
- **Problema:** engloba el resto de categorías mencionadas por Nieto (1993, pp. 3-8), 3) *Problemas de traducción simple o compleja*, 4) *Problemas de procesos*, 5) *Problemas sobre situaciones reales*, 6) *Problemas de investigación matemática*, 7) *Problemas de puzzles* y 8) *Historias matemáticas*. Resumiendo, estos problemas son aquellas actividades formuladas de tal forma que requieren, como mínimo, la traducción de un enunciado en lenguaje verbal a lenguaje algebraico, numérico o incluso pictórico. Los enunciados de los problemas también pueden diferenciarse en función de si la estrategia de resolución viene implícitamente explicada en el enunciado o no, así como en función de su aproximación a situaciones de la vida real o no.

Mostramos una pequeña tabla (tabla 2.7) donde comprobamos numéricamente la totalidad de los ejercicios y problemas en cada uno de los dos libros de estructura tradicional.

Libro	Ejercicios	Problemas	Total
Oxford	81	25 [7]	106 [7]
Bruño	56 [9]	50 [15]	106 [24]

Tabla 2.7: Elaboración propia. Comparativa de la cantidad de ejercicios y problemas en cada uno de los libros de estructura tradicional. Entre corchetes los elementos encuadrados dentro de un apartado de *ampliar* y/o *profundizar*. Fuentes: (Arias y Maza, 2020; De Lucas, Peña y Rey, 2020).

En el libro de Oxford tenemos una totalidad de 106 actividades, desglosadas en 81 ejercicios (75,7 %) y 25 problemas (24,3 %). Acompañando al desarrollo de los contenidos teóricos el libro presenta un total de 44 ejercicios, pero sólo 6 problemas. Es ya en la parte final de la unidad, en la sección dedicada a reforzar lo aprendido, donde encontramos un total de 56 actividades, que podemos desglosar de la siguiente forma:

- **4 ejercicios** destinados a ser resueltos con **calculadora**.
- **33 ejercicios** similares a los propuestos durante el desarrollo del tema.
- **12 problemas**, similares también a los propuestos durante el tema.
- **7 problemas** en una sección denominada *Para profundizar*, de mayor nivel y habitualmente dedicada a introducir contenido de 4º de ESO. En este caso los problemas de profundización tratan sobre el interés compuesto.

Como vamos a poder comprobar a continuación, el libro de Bruño es mucho más prolífico en cuanto a problemas se refiere. En este caso tenemos, curiosamente al igual que en Oxford, un total de 106 actividades, desglosadas de forma diferente en este caso: 56 ejercicios (52,83 %) y 50 problemas (47,17 %). Tras el desarrollo de cada contenido teórico se proponen diferentes ejercicios, un total de 17. En el espacio dedicado al desarrollo teórico sólo se proponen 7 problemas, 1 de ellos junto a las progresiones geométricas y 6 destinados al punto referente a las aplicaciones de las sucesiones en el interés simple y compuesto.

Antes de pasar a la sección final de actividades el libro muestra dos páginas con 7 ejercicios y 2 problemas resueltos con detalle. Ya en dicha sección final el libro propone el siguiente desglose de actividades:

- **2 ejercicios** destinados a ser resueltos con **calculadora**.
- **21 ejercicios** similares a los propuestos durante el desarrollo del tema.
- **26 problemas**, de temática muy repartida entre todos los contenidos desarrollados teóricamente.
- Una última sección denominada *Para ampliar y profundizar*, donde encontramos **9 ejercicios y 15 problemas**.

Análisis de las actividades en el libro sobre Aprendizaje Basado en Problemas

Ya hemos comentado anteriormente la estructura de este libro, además de haber analizado la forma en que desarrolla los contenidos teóricos. Dada su naturaleza, este libro es mucho más prolífico en problemas, porcentualmente hablando, que los otros dos.

Como ya dijimos anteriormente se plantean un total de 4 problemas de gran dimensión, subdivididos en una serie de apartados de la siguiente forma:

- **Problema 1 (patrones en el vuelo de las aves):** se subdivide en 7 apartados diferentes.
- **Problema 2 (periodos de semidesintegración radiactiva):** se subdivide en 9 apartados diferentes.
- **Problema 3 (saltos de rana sobre una charca):** se subdivide en 11 apartados diferentes.
- **Problema 4 (crianza de conejos):** se subdivide en 9 apartados diferentes.

Previa a la propuesta de los problemas 3 y 4, el libro propone una totalidad de **18 ejercicios**, independientes entre sí, como refuerzo de lo aprendido.

2.2.5. Consideraciones finales

Hemos analizado con detalle en esta sección la adaptación del currículo por parte de tres libros diferentes, cada uno con sus propias características, así como el componente práctico que proponen, en forma de ejercicios y problemas.

Como resumen podríamos decir que los tres cumplen con los contenidos mínimos relacionados con sucesiones que exige el Real Decreto 1105/2014. En los tres podemos encontrar pinceladas de contenidos extras, ya sea la suma de infinitos términos de una progresión geométrica, presente en todos los libros analizados, o distintos contenidos presentes particularmente en cada libro, como la sucesión de Fibonacci en el libro de ABP o la determinación de progresiones a partir de dos términos cualesquiera en el libro de Bruño.

Atendiendo a su estructura, el libro de ABP se torna complejo de emplear en una clase promedio de la ESO española. Es muy difícil trabajar de la forma que propone el libro en clases con más de 25 alumnos de media y gran diversidad de niveles distintos. Sin embargo, puede ser muy útil para el desarrollo cognitivo de alumnos con un nivel alto en matemáticas. En cuanto a los libros de Oxford y Bruño, ambos presentan una estructura tradicional muy similar, con la salvedad de seguir el primero una estructura inductiva, mostrando primero ejemplos para expresar después la teoría, y una estructura deductiva en el caso de Bruño, pasando de la teoría a los ejemplos.

Hablando sólo de los libros de Oxford y Bruño, podríamos decir que el segundo adopta un planteamiento mucho más práctico que el primero, ofreciendo una mayor variedad de problemas para reforzar lo aprendido, tanto en cantidad como calidad

de los mismos. Además, este carácter práctico se ve muy reforzado con la inclusión de un punto completo de la teoría dedicada a las matemáticas financieras.

Con respecto a la relación que establecen los libros entre el temario y las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), en primer lugar debemos reconocer que nos encontramos ante un tema del bloque de números y álgebra, quizás no tan dado al empleo de software específicos como sí lo son los bloques de funciones, geometría o incluso estadística y probabilidad. Ni en el libro de Oxford ni en el de ABP aparece una sola mención a algún tipo de recurso TIC. En el caso del libro de Bruño, la última página del tema consiste en una pequeña autoevaluación para el alumno. En la misma, los dos primeros ejercicios responden a ser realizados con GeoGebra, pero con un aporte al conocimiento general del tema muy limitado.

Capítulo 3

FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Para la exposición de la fundamentación epistemológica se va a desarrollar el tema 8 del temario oficial de las oposiciones de Matemáticas, estipulado por la **Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio** (Ministerio de Educación y Ciencia, 1993, pp. 27414-27415), denominado oficialmente *8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones.*

3.1 Introducción

Ya en el álgebra babilónica aparecen problemas de progresiones: por ejemplo en una de las tablillas encontradas aparece el cálculo de la suma $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9$ y en otra incluso la suma de los 10 primeros cuadrados, que no es una progresión. Desconocemos si los babilonios conocían las fórmulas generales que dan tales sumas, aunque es muy posible que las conocieran e incluso se ha conjeturado que quizás supieran que la suma de los “ n ” primeros cubos es igual al cuadrado de la suma de los “ n ” primeros números naturales. No hay que olvidar, sin embargo, que tanto las tablillas mesopotámicas como los papiros egipcios contienen sólo casos concretos, sin ninguna formulación general.

Por otra parte, el libro VIII de los Elementos de Euclides contiene proposiciones acerca de números en proporción continua y en progresión geométrica. La proposición 35 del libro IX contiene una fórmula para hallar una suma de números en progresión geométrica, expresada de una manera elegante, pero poco usual: “Si tantos números como queramos están en proporción continua, y se restan del segundo y del último números iguales al primero, entonces así como el exceso del segundo es al primero, así será el exceso del último a todos los anteriores a él”.

La fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, cuando la razón es menor que la unidad, fue dada por Euler. Las restantes propiedades de las progresiones aparecen sistematizadas por primera vez en una obra sobre álgebra de Christoff Rudolff, matemático alemán de principios del siglo XVI.

Ejemplos de sucesiones famosas en la historia de las matemáticas existen bastantes: mencionemos desde la historia famosa del inventor del ajedrez en la India, hasta por ejemplo la famosa conjetura sobre la sucesión de los números de Fermat. Éste escribió en 1640 a uno de sus amigos que pensaba que todos los números de la forma:

$$F_n = 2^k + 1 \text{ con } k = 2^n,$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ eran primos, pero que no lo podía demostrar. Los 5 primeros son primos; sin embargo Euler comprobó en 1732 que $F_5 = 2^{32} + 1$ no es primo. Más adelante, se descubrió que F_6 , F_7 y F_8 también son compuestos. Es más, no se ha encontrado ninguno más que sea primo y se conjetura que no lo hay.

Algunas de las sucesiones más famosas, como la de Fibonacci, están fuertemente representadas en otros campos ajenos a las matemáticas, como la música (van Gend, 2014), la arquitectura (Bartoli, 2004) o la naturaleza (Grigas, 2013).

3.2 Sucesiones

3.2.1. Término general y forma recurrente

Definición 1

Llamaremos **sucesión de números reales** a cualquier aplicación del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en cualquier otro conjunto no vacío que, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, supondremos que es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

A cada número natural n le corresponde una única imagen $f(n)$. Como el conjunto inicial de todas las sucesiones es el mismo, $\mathbb{N}$, se suele identificar a la sucesión con la imagen de la aplicación:

$$Im(f) = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

A cada uno de los valores a_i de la sucesión se le denomina término i -ésimo, mientras que al término a_n se le denomina término n -ésimo de la sucesión. En lo que sigue la sucesión se escribirá $\{a_n\}$.

Al conjunto de todas las sucesiones de número reales se le representa por $\mathbb{R}^\infty$ o $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Una sucesión queda definida cuando es posible escribir sus términos hasta el último que se desee, es decir, no basta con dar algunos de sus primeros términos. Se torna muy conveniente la posibilidad de poder determinar cualquier término de una sucesión, si bien esto no siempre es posible. Teniendo esto en cuenta podemos establecer las siguientes definiciones.

Definición 2

El **término general** de una sucesión será una expresión mediante la que se calcula cada término de la sucesión en función del lugar que ocupa, y que se expresa bajo la forma del término n -ésimo de la sucesión.

Ejemplo 1

$$a_n = 1 + 2n \Rightarrow a_1 = 3; a_2 = 5; \dots$$

Definición 3

La **ley de recurrencia** de una sucesión será una expresión mediante la que se calcula cada término de la sucesión en función de k términos anteriores al que se quiere calcular.

Ejemplo 2

$$a_1 = 2; a_2 = 3; a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \Rightarrow a_1 = 2; a_2 = 3; a_3 = 1; a_4 = -2; \dots$$

Derivada de la definición 3, podemos establecer la siguiente:

Definición 4

Una sucesión será recurrente de orden k si conocemos los k primeros términos $a_1, a_2, \dots, a_k$, y cada término siguiente viene dado en función de los k anteriores:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \quad \forall n > k$$

Esta ecuación se llama **ecuación de recurrencia de orden k** .

Ejemplo 3

La sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... es una sucesión recurrente de orden 2, puesto que viene dada por la expresión:

$$a_1 = 1; a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n > 2$$

Otros ejemplos de sucesiones recurrentes son las llamadas **progresiones**, que estudiaremos posteriormente con más detalle.

Dentro de las sucesiones recurrentes podemos enfocarnos en las denominadas linealmente recurrentes, que definimos a continuación.

Definición 5

Una sucesión será linealmente recurrente de orden k si podemos expresarla como combinación lineal de los k términos anteriores:

$$a_n = \alpha_1 \cdot a_{n-1} + \alpha_2 \cdot a_{n-2} + \dots + \alpha_k \cdot a_{n-k} \quad \forall n > k,$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $a_1, \dots, a_k$ conocidos

En el caso de este tipo de sucesiones es posible obtener el término general de la sucesión a partir de la ley de recurrencia. Para profundizar en la temática se puede consultar (Brousseau, 1971).

No debemos olvidar que existen sucesiones para las que no se puede encontrar ni término general ni ley de recurrencia que permita encontrar cualquier término de la sucesión aunque esté perfectamente definida, como la sucesión de los números primos o la sucesión que forman los dígitos de la parte decimal de un número irracional.

3.2.2. Operaciones con sucesiones

En el conjunto de todas las sucesiones, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se puede definir una operación interna suma y una externa sobre el conjunto de los números reales, para dotarla de estructura de espacio vectorial.

Definición 6

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se define la **sucesión suma** como una nueva sucesión cuyos términos son el resultado de sumar, uno a uno, los términos correspondientes de cada sucesión:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposición 1

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ es un grupo abeliano.

Demostración 1

Se demuestra fácilmente que la suma de sucesiones verifica las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro y existencia de elemento simétrico.

Definición 7

Dadas una sucesión $\{a_n\}$ y un número real $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el **producto** de α por la sucesión como una nueva sucesión cuyos términos son los términos de $\{a_n\}$ multiplicados por α :

$$\alpha \cdot \{a_n\} = \{\alpha \cdot a_n\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposición 2

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Demostración 2

Se demuestra fácilmente que el producto por un escalar real definido previamente verifica las propiedades distributiva respecto de la suma de números reales (escalares), distributiva respecto de la suma de sucesiones (vectores), pseudoasociativa y de neutralidad del 1.

3.2.3. Tipos de sucesiones

Según el criterio elegido, se pueden realizar multitud de clasificaciones con las sucesiones. Algunas de las más conocidas son:

■ Monótonas:

- Una sucesión es monótona estrictamente creciente si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n-1}$.
- Una sucesión es monótona creciente o monótona no decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n-1}$.
- Una sucesión es monótona estrictamente decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n-1}$.
- Una sucesión es monótona decreciente o monótona no creciente si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n-1}$.

- Convergentes: son aquellas que tienen un límite finito p , es decir, aquellas que verifican que, para cualquier entorno de p , toda la sucesión, salvo a lo sumo un número finito de términos, está contenida en dicho entorno.
- Acotadas: sus términos alcanzan un valor máximo (acotadas superiormente), mínimo (acotadas inferiormente) o ambos (acotadas), distinto de $\pm\infty$. Es decir, si m y M son números reales, entonces la sucesión estará acotada inferiormente si $a_n \geq m$, superiormente si $a_n \leq M$ o simplemente acotada si se cumplen ambas condiciones, para todo $n \in \mathbb{N}$. Cabe aclarar que convergente implica acotada, pero no el recíproco necesariamente.
- Recurrentes de orden k : son las definidas por una ley de recurrencia en la que intervienen los k términos anteriores. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci es recurrente de orden 2.
- Alternadas: aquellas que alternan los signos de sus elementos sucesivamente.

3.3 Progresiones aritméticas

3.3.1. Definición. Término general

Definición 8

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión aritmética si la distancia entre un término de la sucesión y el inmediatamente anterior es un valor constante d , que llamaremos diferencia, es decir:

$$\{a_n\} \text{ es una progresión aritmética} \iff a_{k+1} - a_k = d, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Proposición 3

El término general de una progresión aritmética tiene la forma:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración 3

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética de diferencia d . Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\
a_5 &= a_1 + 4d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d
\end{aligned}$$

Proposición 4

Toda progresión aritmética $\{a_n\}$ es una sucesión recurrente de segundo orden.

Demostración 4

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética de diferencia d . Entonces tenemos lo siguiente:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y por tanto:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.3.2. Propiedades de las progresiones aritméticas

En este apartado enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de las progresiones aritméticas.

Proposición 5

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética. Entonces, ésta queda determinada si se conoce un término cualquiera a_k y la diferencia d . En concreto:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración 5

Para cada $n \geq 2$ tenemos $a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \dots = a_1 + (n-1) \cdot d$, y, en particular, $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$. Restando ambas igualdades tenemos $a_n - a_k = a_1 - a_1 + d \cdot (n-1-k+1)$, de donde obtenemos que $a_n = a_k + (n-k) \cdot d$.

Proposición 6

Si consideramos una progresión $\{a_i\}$, con valores extremos a_p y a_q , donde $p \leq i \leq q$, obtenida como subconjunto finito de una progresión aritmética $\{a_n\}$, entonces la suma de dos términos equidistantes de dichos extremos es igual a la suma de estos extremos.

Demostración 6

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética de diferencia d . Sea $\{a_i\}$ una progresión obtenida como subconjunto finito de $\{a_n\}$, con extremos a_p y a_q , donde $p \leq i \leq q$. Entonces, para cada $k \geq 0$ ocurre que:

$$\begin{aligned} a_{p+k} + a_{q-k} &= a_p + k \cdot d + a_p + (q - k + p) \cdot d \\ &= a_p + a_p + (q - p) \cdot d \\ &= a_p + a_q. \end{aligned}$$

Proposición 7

La suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión aritmética se puede expresar de la forma:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Demostración 7

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética. Si se suma término a término la sucesión a otra equivalente a sí misma pero en sentido inverso, es decir, se suman $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ y $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$, entonces el resultado es $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n+1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Se observa que en cada paréntesis aparece la suma de dos términos equidistantes de a_1 y a_n , por lo que el resultado de cada sumando es $a_1 + a_n$ según la proposición 6. Como hay n sumandos:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Corolario 1

La suma de k términos consecutivos cualesquiera de una progresión aritmética se puede expresar de la forma:

$$S_k = \frac{k \cdot (a_p + a_q)}{2},$$

donde $q > p$ y $q - p = k - 1$.

3.3.3. Interpolación aritmética**Proposición 8**

Se pueden intercalar n términos entre dos números cualesquiera, a y b , con $b > a$, de manera que la diferencia, d , entre cada dos términos consecutivos del conjunto resultante sea la misma, es decir, los $n + 2$ términos resultantes siguen una progresión aritmética. La expresión para dicha diferencia será:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Demostración 8

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética. Sean los términos $a_1 = a$ y $a_{n+2} = b$. Se debe cumplir que $a_{n+2} = a_1 + d \cdot (n + 1)$, por lo que:

$$d = \frac{b - a}{n + 1} = \frac{a_{n+2} - a_1}{n + 1} = \frac{a_1 + d \cdot (n + 1) - a_1}{n + 1} = \frac{d \cdot (n + 1)}{n + 1} = d$$

3.3.4. Series aritméticas**Definición 9**

Dada una sucesión aritmética $\{a_n\}$, llamaremos **serie aritmética** a una nueva sucesión, $\{S_n\}$, definida de la siguiente forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Proposición 9

Si $\{S_n\}$ es una serie aritmética (construida a partir de una sucesión aritmética $\{a_n\}$ de diferencia d), entonces su término general viene dado por la fórmula:

$$S_n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n.$$

Demostración 9

Sea $\{S_n\}$ una serie aritmética formada a partir de una progresión aritmética $\{a_n\}$. Sabemos que el término general de $\{a_n\}$ es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y que la suma de los primeros n términos consecutivos de $\{a_n\}$ se puede expresar de la forma $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n \cdot (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \\ &= n \cdot a_1 + \frac{n^2}{2} \cdot d - \frac{d \cdot n}{2} \\ &= \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n. \end{aligned}$$

Proposición 10

Si $\{S_n\}$ es una serie aritmética (construida a partir de una sucesión aritmética $\{a_n\}$ de diferencia d), se verifica que:

- Si $d > 0$, la serie no está acotada superiormente, es decir:
 $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / S_n > M, \forall n > n_0$.
- Si $d < 0$, la serie no está acotada inferiormente, es decir:
 $\forall M \in \mathbb{R}^-, \exists n_0 \in \mathbb{N} / S_n < M, \forall n > n_0$.

Demostración 10

Sea $\{S_n\}$ una serie aritmética. Entonces tenemos que:

$$S_n > M \iff \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n > M \iff \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n - M > 0.$$

Esta inecuación se resuelve mediante las soluciones de la ecuación de segundo grado asociada $\frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n - M = 0$, cuyo discriminante será

$$\Delta = \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + 2d \cdot M > 0, \text{ por ser } d \text{ y } M \text{ positivos. Además, por esto mismo,}$$

tenemos que $\Delta > \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow +\sqrt{\Delta} > \left|a_1 - \frac{d}{2}\right|$. Entonces, las soluciones de la ecuación serán:

$$n_1 = \frac{\frac{d}{2} - a_1 - \sqrt{\Delta}}{d}, \quad n_2 = \frac{\frac{d}{2} - a_1 + \sqrt{\Delta}}{d},$$

que son de tal modo que $n_1 < 0$ y $n_2 > 0$.

Por ser el coeficiente de n^2 positivo, sabemos que la inecuación se cumpliría si:

- $n < n_1 \rightarrow$ imposible por ser n natural y x_1 negativo.
- $n > n_2 \rightarrow$ siempre posible, por ser $\mathbb{R}$ un cuerpo arquimedeano.

En definitiva, si la diferencia de una progresión aritmética es positiva, y dado un número positivo arbitrariamente grande, siempre podremos encontrar un término de la serie aritmética mayor que el número dado. Además, todos los términos a partir de éste son mayores aún.

De manera semejante se puede demostrar que si la diferencia es negativa podemos encontrar un término de la serie a partir del cual todos los términos son menores que un número real negativo dado.

Podemos concluir que la única opción para que una serie aritmética sea convergente es que su diferencia $d = 0$.

3.4 Progresiones geométricas

3.4.1. Definición. Término general

Definición 10

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión geométrica si el cociente entre un término y el inmediatamente anterior es un valor constante r , que llamaremos razón, es decir:

$$\{a_n\} \text{ es una progresión geométrica} \iff \frac{a_{k+1}}{a_k} = r, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Proposición 11

El término general de una progresión geométrica tiene la forma

$$a_n = r^{n-1} \cdot a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración 11

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica de razón r . Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_2 &= r \cdot a_1 \\ a_3 &= r \cdot a_2 = r \cdot r \cdot a_1 = r^2 \cdot a_1 \\ a_4 &= r \cdot a_3 = r^3 \cdot a_1 \\ a_5 &= r^4 \cdot a_1 \\ &\vdots \\ a_n &= r \cdot a_{n-1} = r^{n-1} \cdot a_1 \end{aligned}$$

Proposición 12

Toda progresión geométrica $\{a_n\}$ es una sucesión recurrente de segundo orden.

Demostración 12

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica de razón r . Entonces tenemos lo siguiente:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y por tanto:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.4.2. Propiedades de las progresiones geométricas

En este apartado enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de las progresiones geométricas. No se muestran las demostraciones de las tres primeras propiedades por ser análogas a las de las progresiones aritméticas.

Proposición 13

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica. Entonces, ésta queda determinada si se conoce un término cualquiera a_k y la razón r . En concreto:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 14

Si consideramos una progresión $\{a_i\}$, con valores extremos a_p y a_q , donde $p \leq i \leq q$, obtenida como subconjunto finito de una progresión geométrica $\{a_n\}$, entonces el producto de dos términos equidistantes de dichos extremos es igual al producto de estos extremos.

Proposición 15

El producto de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica se puede expresar de la forma:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}.$$

Proposición 16

La suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica de razón $r \neq 1$ se puede expresar de la forma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Demostración 13

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica. Si se resta la progresión a otra equivalente a si misma multiplicada por r tenemos:

$$\begin{aligned} (r - 1) \cdot S_n &= r \cdot S_n - S_n \\ &= (r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \dots + r \cdot a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= (a_2 + a_3 + \dots + a_n + r \cdot a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= r \cdot a_n - a_1 \\ &= r^n \cdot a_1 - a_1 \\ &= a_1 \cdot (r^n - 1). \end{aligned}$$

Despejando de la expresión anterior obtenemos $S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

3.4.3. Interpolación geométrica

Proposición 17

Se pueden intercalar n términos entre dos números cualesquiera, a y b , con $b > a$, de manera que la razón, r , entre cada dos términos consecutivos del conjunto resultante sea la misma, es decir, los $n+2$ términos resultantes siguen una progresión geométrica. La expresión para dicha razón será:

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

Demostración 14

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica. Sean los términos $a_1 = a$ y $a_{n+2} = b$. Se debe cumplir que $a_{n+2} = a_1 r^{n+1}$, por lo que:

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n+1]{\frac{a_{n+2}}{a_1}} = \sqrt[n+1]{\frac{a_1 r^{n+1}}{a_1}} = \sqrt[n+1]{r^{n+1}} = r$$

3.4.4. Series geométricas

Definición 11

Dada una sucesión geométrica $\{a_n\}$, llamaremos **serie geométrica** a una nueva sucesión, $\{S_n\}$, definida de la siguiente forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

En el caso que $r = 1$, la serie geométrica tiene como término general $S_n = n \cdot a_1$, y si $r = -1$, éste término general es $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos a estudiar la variación de los términos de S_n en función de la razón de la progresión, tal como hicimos con la serie aritmética y su diferencia. En primer lugar, estableceremos una serie de proposiciones sobre las series geométricas.

Proposición 18

Dado $r \in \mathbb{R}, r > 1$, si $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ y $n_1 > n_0 \rightarrow r^{n_1} > r^{n_0}$.

Demostración 15

Como $r > 1$, debido a la compatibilidad del producto con la relación de orden, podemos multiplicar los dos miembros de la desigualdad por r tantas veces como deseemos, con lo que se obtiene:

$$r > 1, r^2 > r, r^3 > r^2, \dots, r^{n_0+1} > r^{n_0}, \dots, r^{n_1} > r^{n_1-1}.$$

Uniando las desigualdades obtenemos $r^{n_1} > r^{n_1-1} > \dots > r^{n_0+1} > r^{n_0}$.

Proposición 19

Dado $r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1$, si $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ y $n_1 > n_0 \rightarrow 1 > r^{n_0} > r^{n_1} > 0$.

Demostración 16

Consideramos $r' = \frac{1}{r} > 1 \rightarrow r'^{n_1} > r'^{n_0} > 1$, aplicando la proposición anterior. Pero esto es equivalente a que $1 > r^{n_0} > r^{n_1} > 0$.

Proposición 20

Dado $r \in \mathbb{R}, |r| > 1$, y $M \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / |r|^n > M \quad \forall n \geq n_0$.

Demostración 17

Sean $r \in \mathbb{R}, |r| = \alpha > 1$, y $M \in \mathbb{R}^+$. Entonces $\exists \beta \in \mathbb{R}, 0 < \beta/\alpha = 1 + \beta$. En ese caso, si calculamos $|r|^n = (1 + \beta)^n, n \in \mathbb{N}$, aplicando el binomio de Newton:

$$|r|^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\beta + \binom{n}{2}\beta^2 + \dots + \binom{n}{n}\beta^n = 1 + n\beta + K, \quad K \in \mathbb{R}^+.$$

Por tanto, $|r|^n > 1 + n\beta$. Si exigimos que $1 + n\beta > M$ tenemos una inecuación que se cumple con seguridad si $n > \frac{M-1}{\beta} \in \mathbb{R}$. Por ser $\mathbb{R}$ arquimediano, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ que cumplirá esta condición, y entonces tendremos que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n > n_0 \rightarrow |r|^n > |r|^{n_0} > 1 + n\beta > M$.

Proposición 21

Dado $r \in \mathbb{R}, |r| < 1$, y $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / |r|^n < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Demostración 18

Sean $r \in \mathbb{R}$, $|r|^n = \frac{1}{\alpha} < 1$, y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $\alpha > 1$ y $\frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$, por lo que, según la proposición anterior, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\alpha^n > \frac{1}{\epsilon}$ si $n \in \mathbb{N}$ y $n > n_0$. Pero esto es equivalente a decir que $\epsilon > |r|^n = \frac{1}{\alpha^n}$.

A la vista de los resultados anteriores podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1

Si $\{S_n\}$ es una serie geométrica, obtenida a partir de una progresión geométrica $\{a_n\}$ de razón r , su término general dependerá del valor de r , siendo de la siguiente forma:

- Si $|r| \neq 1$: $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$.
- Si $r = 1$: $S_n = n \cdot a_1$.
- Si $r = -1$: $S_{2n} = 0$, $S_{2n+1} = a_1$.

Demostración 19

Sea $\{S_n\}$ una serie geométrica, cuyo término general, si $|r| \neq 1$, es de la siguiente forma:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

donde la fracción $\frac{a_1}{r-1} = k$ es una constante. En definitiva, $S_n = k(r^n - 1)$, siempre que $r \neq \pm 1$. Supongamos que $a_1 > 0$. Distinguiremos entonces tres casos, dependiendo de la razón r :

1. $|r| > 1$

- 1.1. Si r es positivo sabemos, por la primera de las proposiciones anteriores que el valor de r^n se hace arbitrariamente grande, mayor que cualquier número positivo, M , que deseemos. Si deseamos que $S_n > M'$, $M' \in \mathbb{R}^+$ tenemos:

$$k(r^n - 1) > M' \iff r^n > \frac{M'}{k} + 1.$$

Aplicando la tercera proposición con $M = \frac{M'}{k} + 1$, tendremos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/|r|^n > M \iff S_n > M' \quad \forall n > n_0$.

- 1.2. Si r es negativo sus potencias cumplirán que $r^{2n} > 0$ y $r^{2n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, como $k = \frac{a_1}{r-1} < 0$, y $|r|^n > 1$, tendremos que $S_{2n+1} > 0$ y $S_{2n} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces, la subsucesión S_{2n+1} tiene términos que se hacen mayores que cualquier número positivo que se desee, aplicando el apartado

anterior. Es fácil ver, de manera semejante, que la subsucesión S_{2n} tiene términos menores que cualquier número negativo que se quiera.

2. $|r| < 1$

En este caso sabemos que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{ si } n \geq n_0 \rightarrow \epsilon > |r|^n$. Como $S_n = k(r^n - 1)$ y el término r^n está tan cerca de 0 como queramos en valor absoluto, será lógico suponer que S_n se acerca tanto como queramos a $-k$, en valor absoluto. Veámoslo:

$$|S_n - (-k)| = |S_n + k| = |k(r^n - 1) + k| = |kr^n| = |k||r|^n.$$

Si deseamos que $|k||r|^n < \epsilon'$ donde $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$, basta con que $|r|^n < \frac{\epsilon'}{|k|} = \epsilon$, cosa que sabemos que se cumple a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$.

En resumen, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{ si } n > n_0 \rightarrow |S_n - (-k)| < \epsilon$. De donde podemos asumir con toda lógica que la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón r , tal que $|r| < 1$, es $S = -k$, es decir:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

3. $|r| = 1$

Si $r = 1$, tenemos una sucesión constante $a_n = a_1$, que coincide con una progresión aritmética de diferencia 0. En este caso, $S_n = na_1$, que se hace tan grande como queramos si $a_1 > 0$ y tan negativa como queramos si $a_1 < 0$.

Si $r = -1$, tenemos una sucesión $a_n = (-1)^{n-1}a_1$, con lo que $a_{2n} = -a_1$ y $a_{2n+1} = a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $S_{2n} = 0$ y $S_{2n+1} = a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3.5 Otras progresiones

Existen muchos tipos de sucesiones. En este apartado presentaremos algunos otros tipos, aparte de las progresiones aritméticas y geométricas ya vistas en apartados anteriores.

3.5.1. Progresiones armónicas

Definición 12

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión armónica si su término general viene definido por la siguiente expresión algebraica:

$$a_n = \frac{1}{a \cdot n + b}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Para el caso particular en que $a = 1$ y $b = 0$ se obtiene una progresión armónica que da lugar a la famosa serie armónica: $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, cuyos términos son conocidos por su relación con los sonidos armónicos que producen las cuerdas sometidas a la misma tensión y de longitudes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, relación descubierta por Pitágoras. Esta serie es divergente y se suele usar para estudiar otras series por comparación con ésta.

3.5.2. Progresiones aritmético-geométricas

Definición 13

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión aritmético-geométrica si su término general viene definido por la siguiente expresión algebraica:

$$a_n = (a \cdot n + b) \cdot c^n, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ donde } a \text{ y } c \text{ no se anulan simultáneamente.}$$

Observamos que si $c = 1$ se obtiene una progresión aritmética y si $a = 0$ una progresión geométrica.

3.5.3. Progresiones hipergeométricas

Definición 14

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión hipergeométrica si el cociente entre un término y el inmediatamente anterior es una función que depende de la posición de esos términos dentro de la sucesión, es decir:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ donde } \alpha \text{ y } \gamma \text{ no se anulan a la vez.}$$

Observamos que si $\alpha = 0$ se obtiene una progresión geométrica de razón $r = \frac{\beta}{\gamma}$.

3.5.4. Progresiones aritméticas de orden superior

Definición 15

Dada una sucesión $\{a_n\}$ llamaremos **diferencia de orden 1** de $\{a_n\}$ a la sucesión $\{\Delta a_n\}$, donde:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Definición 16

Dada una sucesión $\{a_n\}$ definiremos por recurrencia la **diferencia de orden k**, con $k > 1$, de $\{a_n\}$ a la sucesión $\{\Delta^k a_n\}$, como:

$$\Delta^k \{a_n\}_n = \Delta \Delta^{k-1} \{a_n\}_n.$$

Ejemplo 4

Según la definición de diferencia de orden k, la diferencia de orden 2 para la sucesión $\{a_n\}$ adoptaría la siguiente forma:

$$\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Ejemplo 5

Según la definición de diferencia de orden k, la diferencia de orden 3 para la sucesión $\{a_n\}$ adoptaría la siguiente forma:

$$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n.$$

Teorema 2

Dada una sucesión $\{a_n\}$ llamaremos **diferencia de orden k** de $\{a_n\}$ a la sucesión $\{\Delta^k a_n\}$, donde:

$$\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+k-i}.$$

3.6 Aplicaciones

Vamos a hacer referencia a dos de las múltiples aplicaciones de las sucesiones y las series.

3.6.1. Cálculo de la fracción generatriz de un número decimal periódico

Sea el número decimal $N = e_1e_2...e_m, c_1c_2...c_qd_1d_2...d_p...$ que tiene infinitas cifras decimales formadas por una parte no periódica ($c_1...c_q$), y otra periódica ($d_1...d_p...$).

Al número $e_1e_2...e_m$ lo llamaremos E_m , el número $c_1...c_q$ será D_q , mientras que el número $d_1...d_p$ será D_p . Definidas estas variables podemos representar el número decimal, N , completo de la siguiente forma:

$$N = E_m + D_q10^{-q} + \sum_{i=1}^{\infty} D_p10^{-(q+ip)}.$$

Así mismo, podemos definir un número entero N' de la siguiente forma:

$$N' = E_m10^{q+p} + D_q10^p + D_p,$$

que no será más que el número obtenido de juntar la parte entera de N con la parte decimal hasta el punto anterior a que el periodo comience a repetirse. De forma análoga podemos definir otro número N'' similar a N' pero contando sólo con la parte decimal no periódica:

$$N'' = E_m10^q + D_q.$$

Si nos fijamos, el sumando del sumatorio en la expresión de N corresponde con una serie geométrica, cuya progresión asociada tiene un valor inicial $a_1 = D_p10^{-(q+p)}$ y razón de la forma $r = 10^{-p}$. Dado el valor de la razón, sabemos que esta serie será convergente, y podremos expresarla de la siguiente forma:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{D_p10^{-(q+p)}}{1-10^{-p}} = \frac{D_p}{10^q(10^p-1)}.$$

Aplicando el valor de la serie a la expresión original del número N obtenemos:

$$N = \frac{E_m10^{q+p} - E_m10^q + D_q10^p - D_q + D_p}{10^q(10^p-1)} = \frac{N' - N''}{10^q(10^p-1)}.$$

Ejemplo 6

Sea $N = 24,87197197197\dots$. Según las expresiones anteriores, su fracción generatriz sería de la forma:

$$N = \frac{2487197 - 2487}{10^2(10^3 - 1)} = \frac{2484710}{99900} = \frac{248471}{9990} \quad (\text{fracción irreducible}).$$

Podemos realizar dos particularizaciones a la expresión anterior:

1. Si N es un número decimal periódico puro tendríamos tanto que $q = 0$ como que $D_q = 0$, por lo que las expresiones de N' , N'' y N quedarían de la siguiente forma:

$$N' = E_m 10^p + D_p,$$

$$N'' = E_m,$$

$$N = \frac{N' - E_m}{10^p - 1}.$$

Ejemplo 7

Sea $N = 24,197197197\dots$. Según las expresiones anteriores, su fracción generatriz sería de la forma:

$$N = \frac{24197 - 24}{10^3 - 1} = \frac{24173}{999} (\text{fracción irreducible}).$$

2. Si N es un número decimal periódico puro, con $p = 1$ y $D_p = 9$, las expresiones resultantes serían las siguientes:

$$N' = 10E_m + 9,$$

$$N'' = E_m,$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{N' - E_m}{10 - 1} \\ &= \frac{10E_m + 9 - E_m}{9} \\ &= \frac{E_m(10 - 1) + 9}{9} \\ &= E_m + 1, \end{aligned}$$

demostrando de esta forma que cualquier número decimal periódico puro, con periodo de 9 es en realidad el siguiente número entero.

Ejemplo 8

Sea $N = 24,999\dots$. Según las expresiones anteriores, este número decimal sería en realidad:

$$N = 24 + 1 = 25.$$

3.6.2. Matemática financiera

Veamos algunos ejemplos de operaciones económicas comunes en las que intervienen progresiones aritméticas y geométricas.

Interés simple

Un capital está colocado a interés simple cuando las ganancias del capital se retiran y no se acumulan al capital para continuar generando beneficios. Si un capital C_0 se coloca con un interés anual simple $r\%$ anual, durante t años el interés generado es:

$$i = C_0 \cdot r \cdot t,$$

y el capital acumulado al final del periodo:

$$C_t = C_0 + i = C_0 \cdot (1 + r \cdot t).$$

Por tanto, cada año el capital aumenta en $C_0 \cdot r$ unidades, es decir, el capital acumulado forma una progresión aritmética de diferencia $C_0 \cdot r$.

Ejemplo 9

Si colocamos un capital $C_0 = 10000 \text{ €}$ a un interés anual simple $r = 3\%$, durante 7 años, obtendremos un capital acumulado total de:

$$C = 10000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 7) = 12100 \text{ €}.$$

Interés compuesto

Si las ganancias de capital generadas por los intereses se acumulan al capital para seguir generando beneficios, entonces hablamos de interés compuesto. Cuando un capital C_0 se coloca a un interés anual del $r\%$ durante t años, el capital acumulado al final del primer año es:

$$C_1 = C_0(1 + r).$$

Si dejamos todo el capital durante el segundo año, acumularemos:

$$C_2 = C_1(1 + r) = C_0(1 + r)^2.$$

Y al cabo de t años:

$$C_t = C_0(1 + r)^t.$$

Observamos que se trata de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$.

Ejemplo 10

Si colocamos el mismo capital del ejemplo anterior, durante los mismos años, pero a un interés compuesto de $r = 3\%$, obtendremos un capital acumulado total de:

$$C = 10000 \cdot (1 + 0,03)^7 = 12298,74 \text{ €}.$$

Anualidades de amortización

Supongamos que recibimos un préstamo de capital C_0 a un interés anual fijo $r\%$ a devolver en t años. Tendremos que calcular la cantidad fija C a devolver anualmente.

Si la deuda se amortiza en t años, ésta se acaba convirtiendo en $C_t = C_0(1 + r)^t$. Las anualidades pagadas C también producen intereses que hay que descontar:

- La primera anualidad se convierte en $C(1 + r)^{t-1}$.
- La segunda anualidad se convierte en $C(1 + r)^{t-2}$.
- La última anualidad no genera intereses, por lo que permanece siendo C .

Se debe cumplir que la cantidad a pagar es igual a las cantidades amortizadas, es decir:

$$C_0(1 + r)^t = C + C(1 + r) + \dots + C(1 + r)^{t-2} + C(1 + r)^{t-1}.$$

El segundo miembro es la suma de t términos de una progresión geométrica cuyo primer término es C y de razón $1 + r$, por tanto:

$$C_0(1 + r)^t = C \frac{(1 + r)^t - 1}{(1 + r) - 1} \Rightarrow C = C_0 \frac{r(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}.$$

Ejemplo 11

Si recibimos un préstamo de $C_0 = 10000 \text{ €}$ a un interés fijo $r = 2 \%$, a devolver en 10 años, tendremos que devolver una cantidad fija anual de:

$$C = 10000 \cdot \frac{0,02(1 + 0,02)^{10}}{(1 + 0,02)^{10} - 1} = 1113,27 \text{ €}.$$

Capítulo 4

FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

La investigación en el área de la didáctica de las matemáticas es un pilar fundamental de cara a la mejora continua de la labor pedagógica del profesorado. Esta investigación debe tener un claro componente de transferencia hacia los docentes, de forma que se les ayude en su labor de educación de los alumnos, no sólo desde un punto de vista del profesor (cómo enseñar mejor), sino desde un punto de vista del alumno (cómo aprender mejor).

Para la realización de este capítulo nos hemos centrado en el estudio del trabajo de la tesis doctoral de la profesora María Consuelo Cañadas Santiago, de la Universidad de Granada, basado principalmente en las características y problemas surgidos durante el empleo del proceso de razonamiento inductivo durante la resolución de problemas sobre sucesiones por parte de alumnos de 3º y 4º de ESO. Para el desarrollo de la investigación se analizan las producciones realizadas en la resolución de 6 problemas distintos para una muestra de alumnos pertenecientes a los cursos anteriores en distintos centros públicos españoles. Uno de los problemas empleados en el estudio, y que más trabajos adicionales ha generado posteriormente, es el denominado *Problema de las baldosas*, del que trataremos más adelante.

Además, dicho estudio reforzará nuestra tesis de los beneficios de impartir los conocimientos de sucesiones posteriormente a los de geometría. Concretamente, las producciones principales en las que nos vamos a centrar serán las siguientes, aunque varias más han sido tenidas en cuenta y se citarán durante el capítulo:

- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. (Tesis Doctoral, Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada).
- Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2011). Graphical representation and generalization in sequences problems. En M. Pytlak, R. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 460-469). Rzeszów, Polonia: Universidad de Rzeszów.

Según Cañadas (2007) el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información de la que aportan los datos iniciales con los que se inicia el proceso. Podríamos decir que el razonamiento inductivo es el proceso que finaliza en la obtención de un caso general partiendo de casos particulares, válido para cualquier otro caso particular. Diferentes autores relacionan el razonamiento inductivo con el incremento del conocimiento científico y matemático (Mill, 1869; Neubert y Binko, 1992), además de ser considerado como una potente herramienta heurística para la resolución de problemas (Polya, 1965).

Las sucesiones son un contenido matemático idóneo para el trabajo y estudio del razonamiento inductivo. Polya (1996) destaca una serie de contenidos matemáticos adecuados para dicho estudio, divididos principalmente entre los campos de la Geometría Sólida y la Teoría de Números. Se considera que esta última rama de las matemáticas posee unas características especiales que hacen que sus propiedades, teoremas y problemas sean altamente propensos a ser demostrados mediante inducción. Además, existen diversos estudios sobre razonamiento inductivo en años recientes que emplean las sucesiones para estudiar el comportamiento de los alumnos de cara al razonamiento inductivo (Castro, 1999; García, 1998; Orton y Orton, 1994).

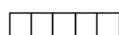
Según Pólya, el razonamiento inductivo se compone de tres pasos, o elementos individuales bien diferenciados, mientras que estudios más recientes amplían dicha teoría a siete pasos distintos (Cañadas y Castro, 2007). Una comparativa de estos pasos puede encontrarse en la tabla 4.1.

Pasos según Pólya	Pasos según Cañadas y Castro (2007)
1. Estudio de casos particulares. 2. Formulación de una conjetura. 3. Comprobación de conjetura con nuevos casos particulares.	1. Estudio de casos particulares. 2. Organización de casos particulares. 3. Identificación de un patrón. 4. Formulación de una conjetura. 5. Justificación de la conjetura en base a los casos particulares. 6. Generalización. 7. Demostración de la generalización con nuevos casos particulares.

Tabla 4.1: Elaboración propia. Comparativa y equivalencia entre los pasos del razonamiento inductivo defendidos por distintos autores. Fuente: (Cañadas, Castro y Castro, 2008).

Los dos pasos que pueden considerarse primordiales en este proceso, sin menoscabar la importancia de los demás, son la identificación de un patrón, o una regularidad, presente en los casos particulares y la generalización de dichos casos. La generalización se alcanza cuando los estudiantes son capaces de identificar un patrón subyacente en una serie de casos particulares y lo aplican correctamente a otros casos particulares distintos (Cañadas, Castro y Castro, 2011). El estudio de estos pasos se realiza, como ya se ha mencionado anteriormente, a través de las producciones de los alumnos, concretamente con las del problema de las baldosas (figura 4.1), que no dejan de ser la representación externa de las ideas matemáticas que ellos deben, en primer lugar, haber representado internamente.

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?

- Justifica tu respuesta.

Figura 4.1: Enunciado del problema de las baldosas. Fuente: Cañadas, Castro y Castro (2008).

Para la posterior generalización, tan importante como la simple identificación de un patrón es que dicho patrón sea adecuado y coherente con los casos particulares que se suministran en el problema. Sin embargo, en Cañadas et al. (2008) se comprueba que estas dos variables (detección de patrón - creación de generalización) tienen una fuerte dependencia, siendo el porcentaje de alumnos que generalizan tras identificar un patrón adecuado del 85 %.

La representación externa de las ideas matemáticas de la que hablábamos anteriormente es otro de los elementos fuertemente relacionado con el razonamiento inductivo (Stenning y Monaghan, 2005). Las cuatro formas distintas de representación que se pueden realizar en un proceso de generalización de patrones son las mostradas en la figura 4.2.

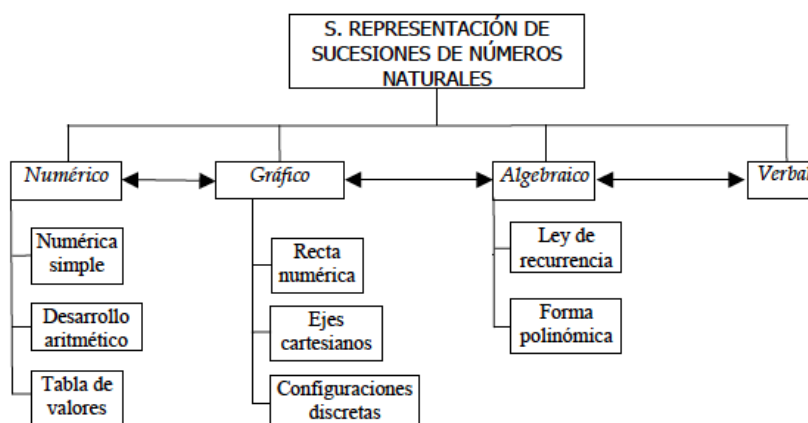


Figura 4.2: Diferentes formas de representación de los elementos de una sucesión. Fuente: Cañadas y Castro (2006).

Algunos ejemplos de los sistemas de representación se muestran a continuación, empleando como ejemplo la sucesión de los números pares:

- **Numérica simple:** 2, 4, 6, 8, ...
- **Desarrollo aritmético:** 2, 2+2, 2+2+2, 2+2+2+2,...
- **Ejes cartesianos:**

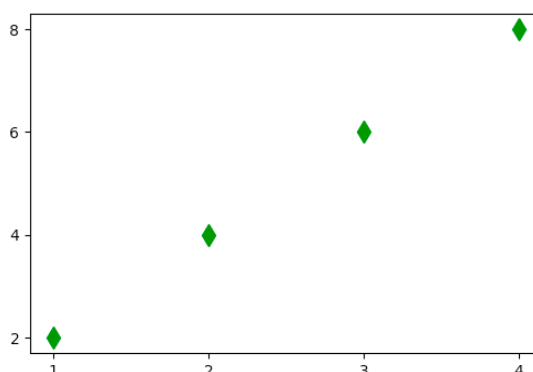


Figura 4.3: Elaboración propia. Primeros términos de la sucesión de los números pares en un diagrama cartesiano.

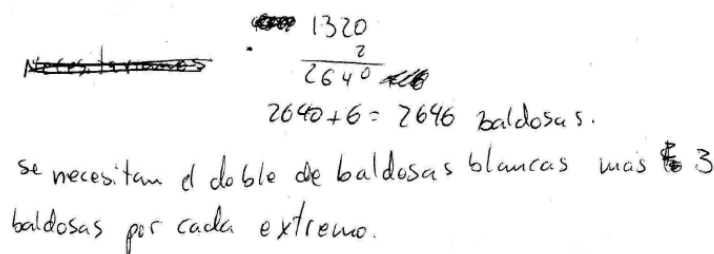
- **Ley de recurrencia:** $a_n = a_{n-1} + 2, \quad \forall n > 1 \text{ con } a_1 = 2.$
- **Verbal:** bastaría con expresar *sucesión de los números pares*.

Como también se comprueba fácilmente, los términos k-ésimos de una sucesión se podrán representar de todas las formas excepto de la algebraica, mientras que los términos generales se podrán expresar tanto algebraica como verbalmente.

Hemos mencionado previamente la potencia del razonamiento inductivo como herramienta para la resolución de problemas. Esta herramienta, que adopta el

nombre genérico de estrategias inductivas, se compone de tres partes fundamentales. Las dos primeras ya las hemos mencionado: los elementos implicados en el proceso inductivo (términos k -ésimos y término general) y los sistemas de representación (numérico, gráfico, algebraico y verbal). La tercera de ellas será las transformaciones que los alumnos pueden realizar entre los distintos sistemas de representación durante la resolución del problema (Cañadas et al., 2008).

Se pueden realizar transformaciones del sistema de representación dentro de un mismo elemento implicado y transformaciones al pasar de un elemento a otro de tipo diferente, es decir, transformaciones al tratar los términos k -ésimos, al tratar el término general y al pasar de un término k -ésimo al general o viceversa. Todas las posibles transformaciones pueden ser consultadas en la Tabla 1 de (Cañadas et al., 2008). A modo de ejemplo mostramos a continuación la solución al problema de las baldosas realizada por un estudiante (figura 4.4).



Handwritten student work showing a multiplication of 1320 by 2, a calculation of 2640 + 6 = 2646, and a verbal conclusion about tiles.

$$\begin{array}{r} 1320 \\ \times 2 \\ \hline 2640 \end{array}$$

$2640 + 6 = 2646$ baldosas.

se necesitan el doble de baldosas blancas más 3 baldosas por cada extremo.

Figura 4.4: Resolución de un estudiante. Fuente: Cañadas, Castro y Castro (2008).

Podemos comprobar que el estudiante realiza una primera transformación del sistema gráfico (sistema en el que viene dado el enunciado) al sistema numérico (en el producto de 1320 y 2). A continuación realiza una transformación sintáctica dentro del sistema numérico (al pasar de la solución del producto previo a la solución de la suma por la que obtiene 2646 baldosas), mientras que alcanza la generalización mediante una transformación del sistema numérico al sistema verbal (al pasar de la solución numérica previa a enunciar la solución final de forma verbal).

De estos estudios también se deduce que el trabajo de razonamiento inductivo, y más concretamente del paso de la generalización, se considera una de las mejores puertas de entrada a la introducción de los estudiantes al álgebra (Radford, 2010). Además, los autores destacan que el 95 % de los alumnos que generalizan en el estudio sobre el problema de las baldosas lo hacen de forma verbal, obviando el resto de posibilidades de representación.

Parte de este estudio se centra en qué papel tiene la representación gráfica en el proceso de generalización, llegándose a la conclusión de que dicha representación gráfica parece ayudar a los estudiantes a generalizar algebraica o verbalmente y de

esta forma obtener casos particulares para las sucesiones. De esta forma, el estudio concluye que se puede considerar a la representación gráfica como una forma de desarrollar el pensamiento algebraico y la expresión de la generalización verbal o algebraicamente (Cañadas et al., 2011).

Además, una consecuencia práctica de estos estudios es que sería deseable realizar tareas en diferentes contextos para mostrar a los estudiantes el álgebra como una forma de generalización. Trabajar con tareas de generalización comenzando con casos particulares expresados en diferentes formas de representación sería muy enriquecedor y mejoraría las capacidades de razonamiento inductivo, dado que ayudaría a los estudiantes a relacionar el álgebra con otras representaciones aparte de la numérica o la verbal.

Como se desprende de este análisis las sucesiones representan un concepto matemático verdaderamente rico de cara al alumnado, no sólo desde el punto de vista puramente curricular, sino de cara al reforzamiento del razonamiento inductivo. Algunas de las conclusiones que podemos extraer del análisis de estos estudios son las siguientes:

- El trabajo previo con geometría ayuda al trabajo con sucesiones, dado que el empleo de representaciones gráficas tanto en los enunciados como en la generalización de patrones es bastante común.
- El trabajo con sucesiones beneficia el desarrollo del razonamiento inductivo.
- El razonamiento inductivo resulta ser una buena estrategia de resolución de problemas, además de considerarse una forma de hacer más accesible el álgebra a los alumnos.

Capítulo 5

UNIDAD DIDÁCTICA

5.1 Título

La unidad didáctica (UD) que será objeto de estudio en el presente TFM, y cuya programación vamos a desarrollar a lo largo de este capítulo, llevará el nombre de *Sucesiones*, incluyéndose en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, correspondiente al nivel de 3º de ESO.

5.2 Justificación

En la presente sección defenderemos, desde varios puntos de vista, la necesidad de la inclusión en el temario de una UD referente a sucesiones, que abordará también el concepto de serie.

5.2.1. Justificación curricular

Según el Real Decreto 1105/2014, en el curso de 3º de ESO de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se deben estudiar una serie de contenidos relacionados con el manejo de sucesiones y progresiones. En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 p. 392, podemos encontrar los siguientes contenidos:

Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico. Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.

Dada la limitada extensión de los contenidos referentes a sucesiones, todos ellos pueden integrarse en una única UD. Sin embargo, tal y como ya se ha mencionado anteriormente durante el análisis de los libros de texto, optaremos por colocar esta UD tras el bloque de geometría, justo antes del inicio de las unidades referentes a funciones reales de variable real, en lugar de al final del bloque de números y álgebra.

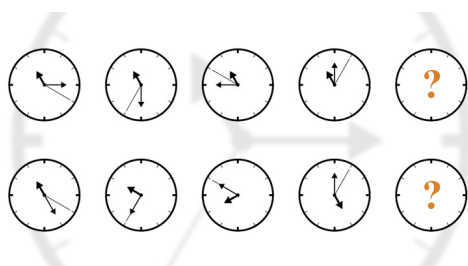
Este cambio se debe a nuestra consideración de que, por un lado, haber visto la parte del currículo referente a geometría puede ser de gran ayuda en la explicación

gráfica de las sucesiones y las series (Cañadas et al., 2011), mientras que por otro lado, el manejo de sucesiones, y especialmente el trabajo con su término general, puede ser una gran introducción al trabajo con funciones reales de variable real.

5.2.2. Justificación social y/o profesional

Las sucesiones en sí mismas no son el concepto matemático más utilizado en la vida cotidiana, sin embargo, el manejo de las mismas está íntimamente relacionado con el desarrollo de las capacidades de razonamiento inductivo de los alumnos. Este tipo de razonamiento, en el que se va de lo concreto a lo general, sí que es ampliamente empleado en el día a día de cada persona (García y Carretero, 1986).

Uno de los ámbitos donde sí que se emplean las sucesiones, tanto numéricas como pictóricas, es el de los exámenes de oposiciones, especialmente aquellas relacionadas con las Fuerzas y Cuerpos de Seguridad del Estado. En este tipo de oposiciones siempre está presente una fase de test psicotécnicos, los cuales incluyen pruebas relacionadas con las sucesiones, como las mostradas en la figura 5.1(a) y la figura 5.1(b).



(a) Ejercicio clásico de razonamiento sobre la posición de las manecillas del reloj. Fuente: (Rivera, 2017).



(b) Ejercicio de elección para completar la sucesión de figuras. Fuente: (Kevinrm40, 2015).

Figura 5.1: Ejemplos de ejercicios de los test psicotécnicos en oposiciones de acceso a Policía Nacional.

Otra utilidad importante, esta vez del concepto de serie, es el del ámbito financiero, donde los cálculos de intereses o amortizaciones con interés simple o compuesto siempre han sido realizados empleando series aritméticas o geométricas, respectivamente. Sin embargo, su empleo directo ha caído en desuso ante la aparición de herramientas ofimáticas que “camuflan” su manejo.

5.2.3. Justificación interna

El manejo adecuado de las sucesiones y las series, y especialmente de su término general, puede ser una introducción muy conveniente a las unidades didácticas que se impartirían a continuación de esta, siempre según nuestro criterio. Según el currículo establecido, las unidades didácticas que se impartirían a continuación serían todas aquellas relacionadas con las funciones reales de variable real.

Si consideramos las sucesiones como funciones reales de variable natural, éstas pueden ser asemejadas a los alumnos como un caso particular de las funciones de variable real, realizando una analogía similar a cuando se introducen los números reales como una ampliación de los números enteros.

Si bien el estudio de las sucesiones no es tan crucial en el resto de la trayectoria educativa obligatoria de los alumnos como sí lo son otros contenidos o ramas de las matemáticas, el estudio de las series particularmente se torna de trascendental importancia en muchas ramas de la ingeniería, como puede ser el caso de las series de Fourier (Cárdenas, Gómez, Jiménez y Sánchez, 2013). Este tipo de series nos permiten aproximar una función arbitraria mediante una función periódica obtenida como sumatorio de sinusoides, y es de amplia utilización en ingeniería eléctrica, análisis de vibraciones o procesamiento de señales. Fuera del ámbito de la ingeniería también son empleadas en campos como la econometría, tal y como puede comprobarse en el capítulo 10 de Fishman (2013).

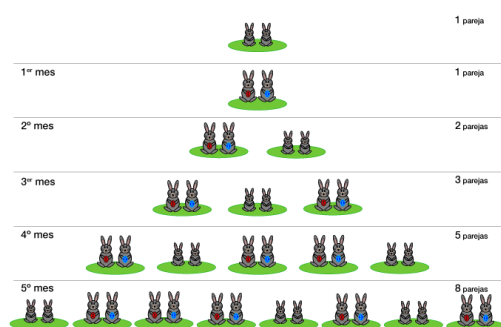
Un análisis más detallado de las series de Fourier pueden encontrarse en Bracewell (1986) o en Meikle (2004).

5.2.4. Justificación por su relación con otras disciplinas

Tal y como se menciona en Báez (2008), es muy interesante comprobar cómo, pese a ser desconocido para la población en general, en ciertos campos de la ciencia aparentemente alejados de la rigurosidad matemática, como la botánica o la música, resulta perceptible un comportamiento matemático definido por elementos de las sucesiones. Especialmente relevante en esta situación es la sucesión de Fibonacci.

La zoología fue uno de los primeros campos en los que se pudo advertir la presencia de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza. La propia sucesión surgió como respuesta a un problema sobre la cría de conejos (figura 5.2(a)), donde se determinó que, a partir de una pareja de conejos jóvenes, éstos se irán reproduciendo cuando alcancen la edad mínima para ello, siguiendo reproduciéndose tanto ellos como su descendencia, cuando tengan la edad necesaria, cada mes. La cantidad de parejas de conejos en cada mes determina la sucesión de Fibonacci (Bortner y Peterson, 2016).

Si nos desplazamos al campo de la botánica podemos encontrar la sucesión de Fibonacci en multitud de elementos. Concretamente, la estructura de las semillas de girasol (figura 5.2(b)) siguen una sucesión de Fibonacci, de forma que cada vez que nace una nueva semilla empuja a las anteriores, formando una estructura en espiral. Un estudio detallado, además de más imágenes relacionados, puede encontrarse en Swinton, Ochu y Consortium (2016).



(a) Representación gráfica de la cría de conejos durante 6 meses. Fuente: (Junta de Andalucía, 2019).



(b) Detalle de la estructura de las semillas de un girasol. Fuente: (@simonmaz, 2018).

Figura 5.2: Ejemplos de relación de la sucesión de Fibonacci con la naturaleza.

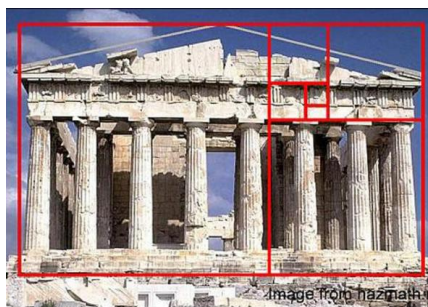
5.2.5. Justificación estética

El arte es un campo que, por supuesto, no podía ser ajeno a las matemáticas, ni concretamente a las sucesiones. Podemos encontrar la sucesión de Fibonacci, en la forma de la espiral de Fibonacci, muy presente en la pintura. Claros ejemplos de ello son *La gran ola de Kanagawa*, de Katsushika Hokusai (Lehnert et al., 2015), y *Virgen Aldobrandini*, de Rafael Sanzio (Power y Shannon, 2019).

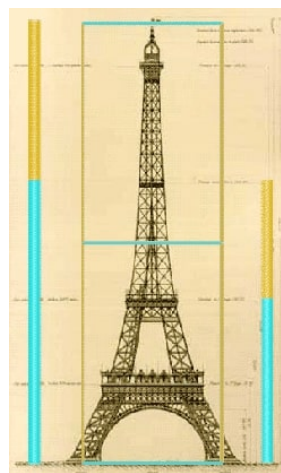
Por último, la arquitectura es una rama artística que ha explotado el empleo del famoso número áureo (φ), denominado como *aquel que guarda el secreto de la belleza* (Green, 1995). Es sabido que podemos determinar este número según la expresión (5.1):

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad (5.1)$$

donde F_n representa el elemento n -ésimo de la sucesión de Fibonacci. Este valor puede ser encontrado en obras de arquitectura desde los tiempos de los griegos hasta el siglo XIX (Green, 1995).



(a) Partenón griego, consagrado a la diosa Atenea. Fuente: (Noticias de Arquitectura, 2018).



(b) Torre Eiffel, París. Fuente: (Castor, 2016).

Figura 5.3: Ejemplos de relación del número áureo con la arquitectura.

5.2.6. Justificación cultural

Las sucesiones han estado presentes en las diferentes culturas desde el comienzo de la civilización. Ya desde tiempos de los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.) las sucesiones fueron estudiadas por la necesidad de saber cuánto tiempo se requeriría para doblar una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto.

Sería en Grecia cuando se comenzaran a usar los números figurados. De esta forma, mediante un enfoque geométrico, representaban las cantidades aludiendo a regularidades como las mostradas en la [figura 5.4\(a\)](#), que coinciden precisamente con la sucesión de los números triangulares.

Más adelante, en la Edad Media, sería cuando encontraríamos algunas de las mayores aportaciones culturales gracias al estudio de las sucesiones. En India, el matemático Bhaskara II (1114 - 1185) ya planteó diferentes problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas. Pocos años después Leonardo de Pisa (1170 - 1250), más conocido como Fibonacci, descubriría la sucesión que toma su nombre durante el estudio de la cría de conejos.

Por último, el Renacimiento sería una época en la que las sucesiones y las series serían ampliamente utilizadas por importantes matemáticos como Isaac Newton (1642 - 1727), que empleó las sucesiones para el desarrollo de su *binomio de Newton*, o Gottfried Leibniz (1646 - 1716), que descubrió la serie infinita que permite relacionar los números fraccionarios con π ([figura 5.4\(b\)](#)).

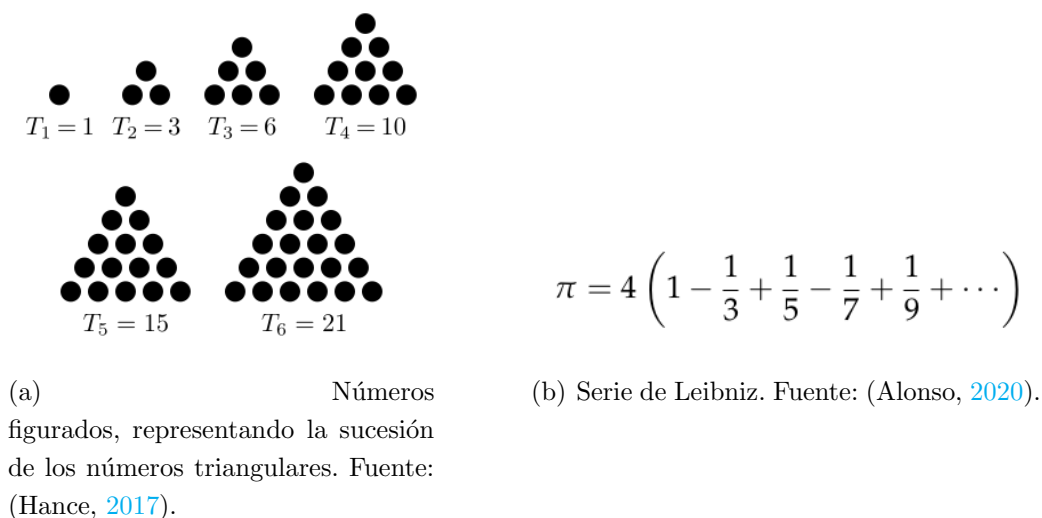


Figura 5.4: Ejemplos del empleo de las sucesiones y las series a lo largo de la historia.

5.3 Contextualización del centro y el aula

El Colegio Pedro Poveda, situado en la ciudad de Jaén, es un centro educativo concertado cuya Entidad Titular es la Institución Teresiana, una Asociación Internacional de Laicos de la Iglesia Católica. El centro se ubica en el Distrito Centro de Jaén, concretamente en el Barrio de San Ildefonso, muy cerca de edificios notables de la capital, como la Catedral o la Diputación Provincial (figura 5.5(b)).



(a) Elaboración propia. Fachada del Colegio Pedro Poveda. (b) Elaboración propia. Plano de localización del centro en relación a su entorno.

Figura 5.5: Información sobre la localización del centro de estudios.

El centro cuenta con un concierto de 6 unidades para educación infantil, 12 para primaria y 8 para ESO, además de 1 más para apoyo a la integración. Cada una

Nivel de estudios	Padres	Madres
Primarios	20 %	35 %
Medios	50 %	45 %
Superiores	30 %	20 %

Tabla 5.1: Elaboración propia. Nivel de estudios de los progenitores de los alumnos. Fuente: Plan de Centro del Colegio Pedro Poveda.

de las unidades cuenta con aproximadamente 25 alumnos, teniendo matriculados un total de 651 alumnos, de los cuales 210 pertenecen a ESO.

El barrio en el que se ubica el colegio está situado en el casco antiguo de Jaén. Tiene una zona de calles estrechas y casas antiguas que van siendo remodeladas, y otra parte de ensanche de la ciudad con vías nuevas y barriadas diseminadas.

La zona que circunda el colegio se caracteriza por un ambiente familiar y en las calles se pueden ver grupos de niños y jóvenes que hacen de este medio su lugar de reunión y de juegos, a pesar de la práctica inexistencia de plazoletas o parques adecuados. La asociación de vecinos más cercana al colegio está ubicada en los bajos y sótano de un edificio y valora positivamente el establecimiento de los cauces de relación con el centro escolar.

Para la elaboración del Proyecto Educativo del centro se realizó un estudio del nivel socioeconómico de las familias, obteniendo una valoración media de las mismas. El perfil socioeconómico de las familias del alumnado puede analizarse conociendo el nivel de estudios de los padres, que vemos resumidos en la [tabla 5.1](#). Si bien en el centro se hayan matriculados todos los alumnos inmigrantes que lo han solicitado, no aparece en el Plan de Centro la cifra exacta de dichos alumnos.

La mayoría de padres de los alumnos del centro se dedican a empleos administrativos y comerciales (26,16 %), empleos no cualificados (19,96 %) y profesiones liberales (16,19 %), mientras que las madres se desempeñan principalmente como amas de casa (25,75 %), empleadas administrativas y comerciales (22,32 %) y profesiones liberales (16,95 %).

La clase concreta a la que va dirigida esta UD tiene, durante el curso 2020/2021, un total de 27 estudiantes: 12 alumnos y 15 alumnas. Es un grupo mucho más dinámico que la media de grupos del centro, aunque por ende más alborotadores. En la clase existen dos alumnos catalogados como alumnos con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE). En primer lugar tenemos una alumna diagnosticada con altas capacidades para Matemáticas, mientras que en segundo lugar tenemos a un alumno que presenta un caso extremo de daltonismo.

Para el primer caso se realizarán ligeras adaptaciones curriculares para la ampliación de los contenidos, mientras que para el segundo caso nos limitaremos a emplear una pizarra blanca con rotulador negro, debido a la naturaleza de la presente UD.

En principio todos los alumnos tienen una buena predisposición ante el aprendizaje, destacando algunos de ellos por un gran rendimiento académico, aunque hay algunos alumnos con bastantes asignaturas suspensas de cursos anteriores.

5.4 Objetivos

En esta sección mostraremos los objetivos perseguidos por el Real Decreto 1105/2014 para el currículo general en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), así como los objetivos concretos que se persiguen, según la Orden de 14 de julio de 2016, para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Relacionaremos los objetivos establecidos para ambos ámbitos y, por último, estableceremos también unos objetivos mínimos a cumplir para la correcta superación y aprovechamiento por parte de los alumnos de la presente UD.

5.4.1. Objetivos generales de etapa

Según el Real Decreto 1105/2014, la ESO pretende que los alumnos adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanístico, artístico, científico y tecnológico, prestando especial atención a la orientación educativa y profesional del alumnado (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 p. 176).

En el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014 (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 176-177) podemos encontrar los objetivos generales que se establecen para la ESO, que buscan contribuir a que los alumnos desarrollen las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Se considera que, a la vista de todos los objetivos propuestos por el Real Decreto 1105/2014, los enumerados como b), d), f) y j) son los más relacionados con la presente UD, los cuales convendría trabajar y perfeccionar durante el desarrollo de la misma.

5.4.2. Objetivos del área de matemáticas

De forma equivalente a los objetivos generales de la etapa, en la Orden de 14 de julio de 2016 podemos encontrar los objetivos particulares que se establecen para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (Orden de 14 de julio de 2016 p. 190). Estos objetivos están establecidos tanto para 3º como para 4º de ESO, y están basados en el carácter propedéutico necesario para el alumnado que tiene intención de acceder a Bachillerato una vez finalizada su etapa obligatoria.

Paralelamente a la contribución buscada para la etapa de la ESO por parte del Real Decreto 1105/2014, la Orden de 14 de julio de 2016 establece que esta asignatura busca contribuir a desarrollar en los alumnos las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como

la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

En este caso consideramos que los objetivos 1, 2, 6, 7, 8, 9 y 10 son los más afines a aquellos buscados durante el desarrollo de la presente UD.

5.4.3. Relación entre los objetivos generales de etapa y los objetivos del área de matemáticas

En la [tabla 5.2](#) mostramos la relación que se puede establecer entre los objetivos generales de la ESO, establecidos por el Real Decreto 1105/2014, y los objetivos particulares asignados a la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas por la Orden de 14 de julio de 2016.

Objetivos generales de etapa (Real Decreto 1105/2014)	Objetivos del área (Orden de 14 de julio de 2016)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a											✓
b									✓		
c											✓
d											✓
e				✓		✓		✓			
f	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
g	✓	✓					✓	✓		✓	
h	✓										
i											
j											✓
k											
l					✓						✓

Tabla 5.2: Elaboración propia. Relación entre los objetivos establecidos por el Real Decreto 1105/2014 para la ESO y los establecidos para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas por la Orden de 14 de julio de 2016. Fuentes: (Orden de 14 de julio de 2016; Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014).

5.4.4. Objetivos concretos de la unidad

La UD *Sucesiones* presenta sus propios objetivos, los cuales, en teoría, deben haber sido alcanzados por los alumnos al superar la unidad. Estos objetivos son los mostrados a continuación:

1. Reconocer la regularidad implícita que sigue una sucesión determinada.
2. Conocer e identificar los conceptos de progresión aritmética, su diferencia, su término general y su forma recurrente.
3. Resolver problemas que requieran el empleo de progresiones aritméticas, reflexionando sobre si la solución es coherente con el enunciado.
4. Saber interpretar el significado de la suma de los “ n ” primeros términos de una progresión aritmética y resolver problemas que requieran su empleo.

5. Conocer e identificar los conceptos de progresión geométrica, su razón, su término general y su forma recurrente.
6. Resolver problemas que requieran el empleo de progresiones geométricas, reflexionando sobre si la solución es coherente con el enunciado.
7. Saber interpretar el significado de la suma de los “ n ” primeros términos de una progresión geométrica y resolver problemas que requieran su empleo.
8. Comprender el concepto de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.

5.5 Competencias clave

En el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014 podemos encontrar cuales serán las competencias clave que deben buscar desarrollarse en el currículo. Estas competencias son las siguientes:

- a) **Comunicación lingüística (CCL):** esta competencia debe estar presente en la mayoría de las actividades, dada la especial importancia de la comprensión lectora y el razonamiento verbal para la correcta realización de dichas actividades y del desarrollo personal del alumno en general.
- b) **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT):** esta es una competencia troncal en el desarrollo cognitivo de los alumnos, pero más especialmente aún cuando se trata de una asignatura de matemáticas.
- c) **Competencia digital (CD):** el conocimiento y el funcionamiento de los recursos digitales es fundamental hoy en día para casi cualquier tipo de actividad cotidiana. En la presente unidad se pretenderá desarrollarla a través de actividades que requieran el empleo de calculadora y de investigación en fuentes digitales.
- d) **Aprender a aprender (CAA):** el alumno debe ser capaz de comprender las cosas que conoce y que desconoce, proporcionándole herramientas que le permitan poder desarrollar un aprendizaje autónomo.
- e) **Competencias sociales y cívicas (CSC):** la interacción social es esencial en la vida de cualquier persona, por lo que valores cívicos deben intentar ser transmitidos en el día a día de la clase.
- f) **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP):** con esta competencia se pretende desarrollar la capacidad de decisión y de confianza en sí mismo de los alumnos, esenciales en su vida futura, tanto laboral como personal.

- g) **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** pese a encontrarnos en una asignatura técnica, la cultura es un pilar fundamental de la sociedad y debe ser transmitida a los alumnos siempre que sea posible.

De entre las siete competencias anteriores existen dos que deben ser desarrolladas con especial ahínco: la comunicación lingüística (CCL) y la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). En esta unidad didáctica se han desarrollado actividades que permiten trabajar simultáneamente varias de estas competencias simultáneamente.

5.6 Contenidos

Los contenidos desarrollados en la UD, diseñados en base a los contenidos oficiales del Real Decreto 1105/2014, serán los mostrados en la tabla a continuación. Se muestran conjuntamente los contenidos que se desarrollarán concernientes a los bloques 1 y 2. Cabe mencionar que los contenidos desarrollados en la UD (segunda columna de la [tabla 5.3](#)) aparecen ligeramente desglosados en el caso del bloque 1, mientras que para el bloque 2 se muestran los títulos de los contenidos a desarrollar realmente, que supondrán una ampliación desglosada con respecto a los contenidos mínimos establecidos por el Real Decreto 1105/2014, como podrá comprobarse con mayor detalle en la [Sección 5.11.1](#).

Contenidos según Real Decreto 1105/2014	Contenidos desarrollados en la UD
1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.	• Planificación de los pasos a seguir en la resolución de un problema tras la lectura y comprensión del enunciado del mismo.
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	• Uso adecuado de la notación algebraica. • Búsqueda del término general de una sucesión mediante la experimentación.

1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	• Uso adecuado de unidades de medida y cambio entre ellas. • Uso adecuado de órdenes de magnitud.
1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	• Investigación histórica en cuanto al desarrollo de sucesiones famosas.
1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	• Construcción, aplicación e interpretación de modelos en situaciones modelizables mediante sucesiones y/o series.
1.7. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	• Búsqueda de información web sobre la presencia de sucesiones en la naturaleza y el desarrollo humano. • Empleo de software especializado como Geogebra.
2.7. Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.	• Sucesiones.

2.8. Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.	• Progresiones aritméticas. • Suma de una progresión aritmética. • Progresiones geométricas. • Suma de una progresión geométrica.
--	--

Tabla 5.3: Elaboración propia. Contenidos desarrollados en la UD en relación a los establecidos en el Real Decreto 1105/2014. Fuente: (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014 pp. 391-393).

5.7 Metodología

Tal y como cada vez es más habitual en las aulas, esta UD no presenta una única metodología, sino que se enriquece bebiendo de diversas fuentes metodológicas, de forma que los alumnos no se vean abocados a la rutina habitual de clase.

En primer lugar, y como no puede ser de otra forma, se empleará una **metodología transmisiva**, siendo esta la metodología tradicional empleada en los centros educativos desde el nacimiento de la escuela. Esta metodología consiste en la explicación en pizarra de los contenidos por parte del profesor, con los alumnos sentados tomando notas sobre dicha explicación o subrayando determinadas partes del libro de texto.

La transmisiva se trata de una metodología que puede resultar muy tediosa y pesada tanto para el profesor como para los alumnos, por lo que el primero debe tratar de dinamizar la explicación de la mejor forma posible, interpellando a diferentes alumnos, tanto para comprobar que la explicación se va comprendiendo como para realizar preguntas que resulten de interés para los alumnos. Para la presente UD se tratará de reducir al máximo el empleo de esta metodología, empleándose para presentar el concepto de sucesión y los conceptos de suma de términos en progresiones. También se empleará como repaso de los conceptos de progresiones aritméticas y geométricas, dado que la propia explicación se realizará mediante otra metodología que veremos más adelante.

Seguidas a las explicaciones de los contenidos siempre se realizarán ejercicios y problemas que permitan a los alumnos reforzar lo aprendido, empleando una **metodología activa**. Se pretenderá que los alumnos realicen las actividades consideraras como ejercicios de forma individual, mientras que, en el caso de algunos

de los problemas, se permitirá que los realicen por parejas. Será conveniente que las parejas que se formen incluyan alumnos con facilidad para la asignatura y alumnos con mayor dificultad, pudiendo establecerse un proceso de **enseñanza entre iguales**.

Dada la importancia de las TIC en nuestros días, seguiremos empleando la metodología activa para desarrollar la capacidad de los alumnos consistente en la búsqueda y filtrado de información. En muchas ocasiones, dada la ingente cantidad de información disponible hoy en día, se torna muy difícil realizar una selección adecuada de las fuentes de información y alcanzar un equilibrio adecuado entre cantidad y calidad de la misma. Para reforzar dicha capacidad, intrínsecamente ligada con la competencia clave de Competencia Digital, se realizará un pequeño trabajo en grupo en la primera sesión de la UD, que servirá también para que los alumnos descubran conceptos que serán explicados en sesiones posteriores.

Otra de las metodologías empleadas, muy relacionada con la activa, es la que se basa en herramientas de **aprendizaje dialógico**. Mediante este tipo de actividades, que alternan trabajo autónomo del alumno con pequeñas ayudas del profesor y trabajo en parejas o grupos, se pretende aportar un enfoque constructivista al proceso de aprendizaje. Los alumnos realizan una serie de actividades encaminadas al descubrimiento de, en el caso de esta UD, los conceptos de termino general, ley de recurrencia y progresiones aritméticas y geométricas. El trabajo en grupos potencia las capacidades sociales de los alumnos, además de fomentar el debate entre ellos y la capacidad de oratoria para convencer del trabajo propio.

Como última metodología a emplear en la unidad tenemos la **metodología de modelización matemática**. Esta metodología se aplica a través del desarrollo de una sesión en la que se realizará una actividad de aprendizaje por indagación (IBL por sus siglas en inglés: *inquiry based learning*). Básicamente se trata de una metodología activa que plantea una serie de preguntas de investigación a los alumnos. Las diferentes preguntas o problemas se plantean ad hoc de forma que se facilite el aprendizaje autónomo de los alumnos gracias a su proceso de investigación e indagación. En este tipo de actividades el papel de profesor se reduce a la introducción de la actividad y a *moderar* un pequeño debate al finalizar y comparar los resultados logrados por los diferentes grupos. También debe realizarse un proceso de institucionalización del nuevo conocimiento obtenido o de los procesos desarrollados. En esta unidad emplearemos esta metodología a modo de refuerzo cuando la mayoría de los conceptos ya han sido introducidos, mediante una actividad donde los alumnos deberán modelar la construcción de una pirámide.

5.8 Actividades y recursos

En esta sección se mostrarán todas las actividades que se llevarán a cabo a lo largo de la UD. Podremos distinguir 4 tipos diferentes de actividades, que serán descritos a continuación. Con el desarrollo de las actividades se pretenderá reforzar el aprendizaje de los alumnos desde distintos puntos de vista y de manera coordinada, ayudando a reforzar a aquellos con mayor problema de comprensión y permitiendo la ampliación a aquellos con mayor facilidad. Estas actividades, además, deben ser coherentes con las metodologías explicadas en la sección anterior.

5.8.1. Actividades

La mayor parte de las actividades desarrolladas serán ejercicios y problemas, que buscarán, por un lado, superar las dificultades y errores en los que con más frecuencia incurren los alumnos, especialmente al emplear el lenguaje algebraico, asentando el nuevo conocimiento. Por otro lado, los problemas tienen el objetivo de desarrollar la capacidad de resolución de los alumnos, buscando fomentar la confianza en sí mismos y la aplicación práctica de los conocimientos adquiridos.

Una parte menor, hablando en términos de cantidad, de las actividades se dedica a las actividades de refuerzo del uso de las TIC, el aprendizaje dialógico y las actividades IBL. Todas las actividades tratadas en este apartado están disponibles en el [Anexo I](#). A continuación realizamos un pequeño desglose de las actividades que se desarrollarán.

Ejercicios de consolidación

Estos ejercicios son las clásicas actividades en las que se aplica directamente el nuevo contenido impartido en clase, o bien con muy ligeras modificaciones con respecto a la formulación original. Los ejercicios servirán, principalmente, para afianzar y asentar los conceptos explicados previamente.

Algunos de estos ejercicios pueden ser empleados al inicio de la unidad para comprobar el conocimiento previo que tienen los alumnos sobre unidades anteriores, para localizar de esta forma posibles carencias que pueden suponer un problema conforme se avanza en el desarrollo de la unidad.

Problemas de desarrollo

Los problemas supondrán un nivel más en la dificultad que representan los ejercicios. La realización de problemas permite que los alumnos aborden el nuevo conocimiento adquirido relacionándolo con situaciones de la vida real. Se considera, y cada vez más, que la realización de problemas debería ser la base de la parte práctica del aprendizaje del alumno, al poder relacionar el alumno los conceptos abstractos que componen los objetos matemáticos con situaciones de aplicación real.

Actividades TIC

En la unidad se desarrollan dos actividades relacionadas con las TIC, en ambos casos vinculadas a la búsqueda de información. En el primer caso esta búsqueda de información y su posterior análisis y presentación representa el objetivo fundamental de la actividad, mientras que en el segundo caso será una parte auxiliar que ayudará a la realización del resto de la actividad de IBL, por lo que no aparecerá directamente explicada en el [Anexo I](#) como una actividad TIC.

Actividades de aprendizaje dialógico

En la unidad se planteará una clase enfocada a actividades de aprendizaje dialógico, destinadas al desarrollo de algunos de los conceptos ya estudiados y a la presentación de otros nuevos que se desarrollarán más adelante. Mediante este tipo de actividades los estudiantes se ven forzados a discutir en voz alta sobre un problema complejo que requiere colaboración, cuestionándose resultados no esperados o explicando y razonando con sus compañeros sobre su propia solución al problema (Resnick, Asterhan, Clarke y Schantz, 2018).

Actividad IBL

Otra de las sesiones se desarrollará a través de una actividad de modelización matemática. Esta actividad se basará en la metodología de aprendizaje por indagación (IBL), donde se pretende que los alumnos se enfrenten a una situación en un contexto realista y vean la aplicabilidad del conocimiento adquirido. Además, este tipo de actividades pueden emplearse para introducir conceptos que se tornan necesarios bajo determinadas circunstancias de la situación que está siendo modelizada.

5.8.2. Recursos

Para el correcto desarrollo de la unidad didáctica y todas sus actividades será necesaria una serie de recursos de distinto tipo. Estos recursos serán los mostrados en la siguiente tabla:

Tipo de recurso	Recursos
Específico	• Libro de texto: De Lucas, M., Peña, M., y Rey, M. J. (2020). <i>Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO</i>. San Fernando de Henares: Oxford University Press España. ISBN: 978-01-905-3512-4. • Pizarra.
Impreso	• Fichas de enunciados para actividades de aprendizaje dialógico y de modelización. • Apuntes de los estudiantes.
Informático	• Ordenadores con conexión a internet. • Procesador de texto.
Tecnológico	• Calculadora científica.
Ambiental	• Aula. • Aula con ordenadores (de no disponer de ordenadores portátiles).

Humano	• Profesor de matemáticas. • Departamento de orientación. • Familias de los alumnos.
Otros	• Hojas de papel. • Cartulinas. • Rotuladores.

Tabla 5.4: Elaboración propia. Recursos necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica.

5.9 Atención a la diversidad

Todo el alumnado debe alcanzar los objetivos mínimos establecidos para la unidad independientemente de las necesidades educativas de cada uno, por lo que, como docentes, debemos plantear programas de atención a la diversidad disponibles para ser utilizados con los alumnos que lo requieran.

El profesor necesita conocer el nivel inicial de cada alumno, cosa que conseguirá teniendo en cuenta tanto las consideraciones pertinentes en unidades previas como los ejercicios de evaluación inicial de esta unidad (ejercicios tipo **P** en el [Anexo I](#)).

El principal grupo de alumnos que pueden requerir atención a la diversidad son aquellos que simplemente requieran refuerzo o ampliación. Para ellos bastará con adaptar algunos de los ejercicios y problemas de desarrollo a su nivel concreto, intentando por un lado nivelar al máximo posible a los alumnos con necesidades de refuerzo para unirlos al resto de la clase y, por el otro lado, permitiendo que los alumnos con necesidades de ampliación no se aburran en clase, sin desligarse de la misma a la vez.

Las adaptaciones a realizar por la atención a la diversidad no sólo derivarán en ejercicios de refuerzo o de ampliación, sino que habrá que tener en cuenta otras casuísticas de alumnos, como repetidores o alumnos con la asignatura suspensa en cursos anteriores. Este tipo de actividades podrán ser suministradas tanto por el propio docente como por el departamento de matemáticas o de orientación.

Como ya se mencionó en las metodologías a desarrollar en la presente unidad, se fomentará el trabajo en equipo y el apoyo entre iguales, por lo que una medida de apoyo a tener en cuenta es la realización de parejas en las que unamos a alumnos con mayor facilidad para la materia con aquellos que cuentan con mayores dificultades.

5.10 Temporalización

Para el desarrollo de la presente UD se emplearán un total de siete sesiones, entre las que se encuentran las dedicadas a la introducción del tema y la evaluación del mismo. Cada una de estas sesiones estará programada para una duración de una hora. Por lo tanto el tiempo requerido para el desarrollo de la unidad será de siete horas.

La temporalización desarrollada se estructura aproximadamente de la siguiente forma. En primer lugar se introducirá el tema, mostrando un pequeño índice de los contenidos a desarrollar e introduciendo el concepto de sucesión. Con el objetivo de motivar al alumnado y reforzar sus competencias digitales y de emprendimiento realizarán un trabajo sobre sucesiones famosas, que les permitirá comprobar la existencia de término general y ley de recurrencia previamente a ser explicados. Posteriormente se pondrá en común el resultado de la investigación.

En la segunda sesión se plantea una actividad de aprendizaje dialógico, donde los alumnos descubrirán a través de una serie de actividades los conceptos de término general, ley de recurrencia y progresiones aritméticas y geométricas. Muy ligeramente se introducirá el concepto de serie.

Seguidamente, en la tercera sesión, se realizará un repaso profundo de los conceptos aprendidos sobre progresiones en la clase anterior, introduciendo al final la sesión cuarta, tratante sobre modelización y aprendizaje por indagación (IBL), donde se descubrirá la utilidad del concepto de serie.

En la quinta sesión se explican con mayor detalle todo lo referente a las series aritméticas y geométricas, con una síntesis del tema previa al examen.

La sexta sesión corresponderá con el examen de evaluación de la UD, mientras que la séptima y última sesión será empleada en la revisión del examen y puesta en común de los errores más frecuentes, así como, de disponer del tiempo necesario, actividades de ampliación y refuerzo.

La presencia de examen de evaluación en esta UD se justifica debido a las inherentes diferencias presentes entre esta unidad y las que a continuación se desarrollarían (dominio, crecimiento/decrecimiento, simetría, continuidad...) dentro del mismo bloque del temario. Por lo tanto, éste debería ser un examen con un menor

peso proporcional sobre el total de la evaluación. Derivado de ello, no se realizará examen de recuperación de contenidos, proponiéndose la recuperación como una adhesión a la recuperación completa del bloque temático.

El cuadro resumen de la temporalización completa de la UD se muestra a continuación.

Sesiones	Contenido de la sesión
1 ^a	• Presentación del índice del tema (5 min). • Realización de prueba inicial (7 min). • Concepto de sucesión (8 min). • Explicación trabajo: investigación grupal sobre sucesiones famosas. El trabajo consistirá en breve descripción y características de una sucesión elegida de entre las que se aportan en una lista (25 min). • Puesta en común del trabajo de investigación (15 min).
2 ^a	• Actividades de aprendizaje dialógico (55 min): donde se incluiría el conocimiento de término general, ley de recurrencia y se introducirían las progresiones aritméticas y geométricas. • Ejercicios sobre término general y ley de recurrencia (5 min).
3 ^a	• Corrección de ejercicios (10 min). • Repaso sobre progresiones aritméticas y geométricas (15 min). • Ejercicios y corrección (25 min). • Introducción a la actividad de IBL de la sesión siguiente (10 min).
4 ^a	• Actividad de IBL: diseño y caracterización de una pirámide, relación con la geometría estudiada en el 2^o trimestre de la asignatura e introducción conceptual del límite. Descubrimiento del alumno de la necesidad de las series (60 min).

5 ^a	• Explicación de las series aritméticas. Aplicación al interés simple (15 min). • Ejercicios y corrección (10 min). • Explicación de las series geométricas. Aplicación al interés compuesto (10 min). • Ejercicios y corrección (5 min). • Suma de infinitos términos (10 min). • Ejercicios y corrección (5 min). • Síntesis del tema (5 min).
6 ^a	Examen de evaluación (60 min).
7 ^a	• Corrección del examen de evaluación y puesta en común de errores (30 min). • Actividades de ampliación y refuerzo (30 min).

Tabla 5.5: Elaboración propia. Temporalización de la UD.

A continuación mostramos el desarrollo de cada una de las sesiones propuestas en la tabla anterior. La numeración de contenidos y criterios de evaluación será de la siguiente forma:

- **Contenidos:** *bloque.contenido*
- **Criterios de evaluación:** *bloque.criterio*

Se debe mencionar que si la cantidad de actividades mandadas a los alumnos en una sesión se considera demasiada dicha cantidad se puede reducir, dejando que el resto de actividades sean opcionales para que los alumnos practiquen para la sesión de evaluación.

Sesión 1: Presentación del tema, prueba inicial y trabajo de investigación.

Contenidos: 1.2., 1.4., 1.7., 2.1.

Criterios de evaluación: 1.2., 1.5., 1.12., 2.1.

Metodologías: se emplea una metodología transmisiva para la explicación del

concepto de sucesión y la explicación del trabajo de investigación. También se pone el foco en el desarrollo de las competencias TIC de los alumnos mediante el trabajo de investigación.

Recursos: para el desarrollo de la sesión se emplearán los siguientes recursos:

- Pizarra del aula.
- Ordenador con conexión a internet.
- Procesador de texto.

Desarrollo de la sesión:

- Dado que esta es la sesión inicial del tema, en primer lugar se escribirá en la pizarra el índice de los contenidos que vamos a aprender en la unidad (5 min):

- 1) Sucesiones.
- 2) Progresiones aritméticas.
- 3) Progresiones geométricas.
- 4) Suma de una progresión aritmética.
- 5) Suma de una progresión geométrica.

- A continuación se permitirá que los alumnos realicen los ejercicios de la prueba inicial (**P-1**, **P-2**, **P-3** y **P-4**). Estos ejercicios serán recogidos por el profesor una vez se hayan finalizado y serán evaluados posteriormente para determinar si existe alguna dificultad derivada de la falta de algún conocimiento previo que pueda ser necesario para el correcto desarrollo del tema (7 min).

- Posteriormente se procederá a explicar el concepto de sucesión, fomentando el razonamiento lógico que permita distinguir entre secuencias de números que forman una sucesión y los que no, a través de ejercicios de ejemplo (**E-1**, **E-2** **E-3**) en la pizarra (8 min).

- Una vez explicado el concepto de sucesión se pasará a explicar la actividad de investigación sobre sucesiones (**T-1**). Una descripción más exhaustiva de esta actividad se encuentra en el **Anexo I.3** (25 min).

- Para finalizar la clase se emplearán los últimos 15 min para la puesta en común del trabajo de investigación previo (15 min).

Sesión 2: Actividades de aprendizaje dialógico. Término general, ley de recurrencia y progresiones aritméticas y geométricas.

Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5.

Criterios y de evaluación: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 2.1., 2.2., 2.3., 2.5., 2.6., 2.8.

Metodologías: para las actividades de aprendizaje dialógico se emplea principalmente una metodología cooperativa, mediante la que los alumnos cooperarán, ya sea por parejas o en el grupo completo de clase. Una mínima parte de las actividades se llevarán a cabo mediante metodología transmisiva, indispensable para la explicación de los conceptos de progresiones aritméticas y geométricas.

Recursos: para las actividades de aprendizaje dialógico se emplean los siguientes recursos:

- Pizarra del aula.
- Tarjetas numeradas recortables ([Anexo I.4.1](#)).
- Tabla en blanco ([Anexo I.4.2](#)).
- Cuestionario sobre progresiones aritméticas y geométricas ([Anexo I.4.3](#)).

Desarrollo de la sesión:

• El eje central de la sesión será el desarrollo de una serie de actividades de aprendizaje dialógico, exhaustivamente desarrolladas en el [Anexo I.4](#), que tendrán como objetivo principal que los alumnos asienten el concepto de sucesión, así como descubrir los conceptos de término general, ley de recurrencia y progresión aritmética y geométrica. En estas actividades el profesor intervendrá lo mínimo posible, sólo lo necesario para dirigir la estructura de la clase y, en un momento concreto, para una breve explicación sobre progresiones. Estas actividades tendrán una duración total de 55 min.

Como síntesis de las actividades se espera que los alumnos:

- definan una sucesión mediante su término general.
 - definan una sucesión mediante su ley de recurrencia.
 - reconozcan y definan una progresión aritmética.
 - reconozcan y definan una progresión geométrica.
 - intuyan la necesidad del concepto de serie.
- Inicio de la realización de ejercicios de consolidación ([E-4](#), [E-5](#), [E-6](#) y [E-7](#)) y problemas de desarrollo ([D-1](#)) sobre término general y ley de recurrencia de

sucesiones, empleando para ello diversas sucesiones, entre las que se pueden encontrar progresiones aritméticas y geométricas, pero sin ser éstas la finalidad de los ejercicios. El trabajo que no de tiempo a realizar en clase se realizará en casa (5 min).

Sesión 3: Repaso sobre progresiones aritméticas y geométricas.

Introducción a actividad IBL.

Contenidos: 1.1., 1.2., 2.2., 2.4.

Criterios de evaluación: 1.1., 1.2., 2.3., 2.4., 2.6., 2.7.

Metodologías: en esta sesión sólo se emplea una metodología transmisiva para el repaso de los conceptos relacionados con las progresiones aritméticas y geométricas.

Recursos: para el desarrollo de la sesión se emplearán los siguientes recursos:

- Pizarra del aula.

Desarrollo de la sesión:

- En primer lugar se procede a la corrección de los ejercicios realizados al final de la sesión anterior y en la casa de cada alumno (10 min).
- Dado que las progresiones aritméticas y geométricas han sido simplemente introducidas en la sesión anterior, mostrando cómo se forman en función de su diferencia o razón, dedicamos un tiempo a explicar con mayor detalle su término general, ley de recurrencia y la interpolación de términos. Para la explicación nos podremos apoyar en ejercicios a modo de ejemplo (**E-8**, **E-9** y **E-15**) (15 min).
- Realización de ejercicios de consolidación (desde **E-10** hasta **E-14** y desde **E-16** hasta **E-20**) y problemas de desarrollo (**D-4** y **D-8**). Tras aproximadamente 20 minutos para la realización de los mismos se procederá a su corrección (30 min).
- Los últimos 5 minutos de clase se emplearán en describir a los alumnos la actividad sobre modelización IBL que se realizará en la siguiente sesión (5 min).

Sesión 4: Actividad IBL sobre modelización matemática.

Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 1.5., 1.7., 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5.

Criterios de evaluación: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.6., 1.7., 1.11., 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5., 2.6., 2.7., 2.8.

Metodologías: la principal metodología a seguir durante la sesión es la de modelización matemática, donde buscaremos que los alumnos se enfrenten a una situación realista, sin saber qué conocimientos deben emplear a priori para alcanzar algún tipo de resolución del problema. Parte de la actividad implicará búsqueda de información en internet, por lo que también se emplea una metodología de refuerzo del uso de las TIC.

Recursos: para el desarrollo de la sesión se emplearán los siguientes recursos:

- Hojas de papel A4.
- Cartulinas.
- Ordenador con conexión a internet.

Desarrollo de la sesión: la sesión al completo consistirá en la realización de una actividad de modelización matemática basada en la creación de un presupuesto para la construcción de una pirámide. El desarrollo completo de la actividad puede encontrarse en el [Anexo I.5](#). Durante la sesión se planteará, aunque no se explicará, el concepto de serie a través de la suma de términos de progresiones (60 min).

Sesión 5: Introducción a las series.

Contenidos: 1.2., 2.3., 2.5.

Criterios de evaluación: 1.2., 1.3., 2.5., 2.8.

Metodologías: en esta sesión sólo se emplea una metodología transmisiva para la explicación de las series aritméticas y geométricas, enfocándonos en su relación con las progresiones aritméticas y geométricas a través de la suma de términos y las aplicaciones económicas.

Recursos: para el desarrollo de la sesión se emplearán los siguientes recursos:

- Pizarra del aula.

Desarrollo de la sesión:

- La sesión comenzará recordando la forma en que fue necesario el empleo de

la suma de términos durante la sesión anterior en la actividad IBL. Se explicará el concepto de serie y se introducirán las series aritméticas, explicando la suma de términos y su aplicación al interés simple. Se podrán emplear los ejercicios **E-21** y **E-22** como ejemplos (15 min).

- Realización y posterior corrección de ejercicios (desde **E-23** hasta **E-25**) y problemas de desarrollo (**D-11** y **D-13**) (10 min).
- De forma análoga, explicamos lo relacionado con las series geométricas y su aplicación al interés compuesto, empleando como ejemplo el ejercicio **E-23** (10 min).
- Realización y posterior corrección de ejercicios (desde **E-27** hasta **E-29**) y problemas de desarrollo (**D-16**) (10 min).
- Explicamos el concepto de suma de infinitos términos de una progresión geométrica cuando el valor absoluto de su razón es menor que 1 (5 min).
- Realización y posterior corrección del problema de desarrollo **D-15** (5 min).
- Síntesis de los conocimientos adquiridos en la unidad de cara a la sesión de evaluación (5 min).

Sesión 6: Evaluación de la unidad.

Contenidos: 1.1., 1.2., 1.3., 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5.

Criterios de evaluación: 1.1., 1.2., 1.4., 2.1., 2.3., 2.4., 2.5., 2.6., 2.7., 2.8.

Metodologías: en esta sesión no se desarrolla ninguna metodología dado que corresponde con el examen de evaluación de la unidad.

Recursos: para el desarrollo de la sesión se emplearán los siguientes recursos:

- Hojas de papel A4.

Desarrollo de la sesión: la sesión al completo consistirá en la realización de una prueba escrita como evaluación de la unidad, que debe realizarse individualmente. El examen propuesto puede encontrarse en el [Anexo II.1](#) (60 min).

Sesión 7: Corrección del examen y ejercicios de refuerzo y/o ampliación.

Contenidos: 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5.

Criterios de evaluación: 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5., 2.6., 2.7., 2.8.

Metodologías: en esta sesión se desarrolla una metodología transmisiva por el hecho de realizar la corrección del examen en pizarra resaltando los principales fallos encontrados. También se fomentará la metodología activa por parte del alumnado al fomentar su participación en la propia corrección.

Recursos: para el desarrollo de la sesión se emplearán los siguientes recursos:

- Pizarra del aula.

Desarrollo de la sesión:

- Durante la primera mitad de la sesión se realizará la corrección del examen de la sesión anterior en la pizarra, una vez se hayan repartido los exámenes corregidos a los alumnos (30 min).
- Si la parte anterior no se sale de la temporalización propuesta se realizarán actividades de repaso para los alumnos que no hayan superado la evaluación, o aquellos que el profesor considere conveniente, y de ampliación para aquellos que hayan superado la evaluación con relativa facilidad. Estas actividades pueden ser algunas de las que no se han realizado en clase de entre los ejercicios del [Anexo I.1](#), los problemas del [Anexo I.2](#) u otros adaptados por el profesor (30 min).

De disponer de tiempo suficiente sería muy interesante poder introducir una sesión extra antes de la sesión 6 para dedicarla exclusivamente a resolución de dudas y de problemas similares a los que podrían aparecer en el examen de evaluación de la unidad.

5.11 Evaluación

Para desarrollar la evaluación de la presente UD debemos tener en cuenta una serie de consideraciones, dependientes tanto de la UD que estamos tratando en sí misma en relación al resto del currículo como entre los propios contenidos de la unidad.

En primer lugar hay que considerar que la temática sobre sucesiones y series tiene un peso muy pequeño dentro de las exigencias mínimas planteadas por el Real Decreto 1105/2014. Además, este contenido no vuelve a ser impartido en ningún curso superior a 3º de ESO dentro de la Educación Secundaria, por lo que, pese a considerar que sería conveniente dedicarle más tiempo del que se le dedica, hacer esto incurriría en el detrimento de otros contenidos que sí que seguirán viéndose en cursos superiores, por lo que se requiere una base más sólida de los mismos. Debido

a estas cuestiones el peso que esta unidad didáctica debería tener sobre el total del curso, o del trimestre en el que se imparte, debería ser proporcionalmente menor que los de las demás.

Por otro lado, tratando ya a la propia UD específicamente, es difícil que el concepto de serie quede asentado adecuadamente con el breve tiempo que se le dedica, por lo que, pese que en el desarrollo de las sesiones explicado en la sección anterior se haga hincapié en este término, no se debería esperar que los alumnos alcancen a comprender el concepto, limitándonos a que comprendan y realicen adecuadamente la suma de términos de una sucesión. Esta consideración se ve reforzada con el hecho de que el examen se realizaría en la sesión siguiente a la explicación y corrección de ejercicios sobre series. Debido a ello, la ponderación aplicada a este concepto debería ser mucho menor que al resto de los contenidos de la unidad, como el concepto de sucesión o el trabajo con problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

5.11.1. Criterios de evaluación

Ya hemos visto en capítulos previos que tanto los contenidos como los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables pueden encontrarse en el Real Decreto 1105/2014. Así mismo, las competencias clave asociadas a los criterios de evaluación pueden ser encontradas en la Orden de 14 de julio de 2016. Todos estos parámetros son unos postulados mínimos que se deben cumplir, pudiendo ser ampliados por el docente si lo cree conveniente.

El contenido de nuestra unidad viene encuadrado dentro del bloque 2 del currículo, *Números y álgebra*. Sin embargo, el bloque 1, *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, debe ser tratado como un bloque transversal a lo largo de todo el curso. Toda la información referente a este primer bloque puede ser encontrada en la [figura 2.1](#) (contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables) y en la [tabla 2.2](#) (competencias clave asociadas a los criterios de evaluación). De entre los contenidos mostrados en las anteriores referencias, aquellos que se desarrollarán en la presente UD son los mostrados en la [tabla 5.3](#).

Por su parte, toda la información referente a los contenidos establecidos por el currículo para el tema de sucesiones y series se puede encontrar en la [tabla 2.1](#) (contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables) y en la [tabla 2.3](#) (competencias clave asociadas a los criterios de evaluación). Sin embargo, salta a la vista que los contenidos mínimos establecidos son francamente escuetos, por lo que la información no está demasiado detallada ni desglosada. Por lo tanto, para la elaboración de esta UD vamos a ampliar dicha información, empleando como

contenidos los que ya establecimos en la [tabla 2.5](#) y basándonos en los criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje establecidos en De Lucas, Peña y Rey (2020).

Contenidos	Criterios de evaluación y competencias clave	Estándares de aprendizaje evaluables
1. Sucesiones	1. Encontrar regularidades en secuencias numéricas y geométricas (CCL, CMCT, CSC, CAA, SIEP, CEC). 2. Obtener e interpretar en el contexto de la resolución de problemas los términos generales representativos de una sucesión (CCL, CMCT, CSC, CAA, SIEP, CEC).	1.1. Obtiene términos de una sucesión conocido su término general o su ley de recurrencia. 1.2. Encuentra el término general de sucesiones. 2.1. Emplea las sucesiones para describir patrones numéricos y geométricos, así como para la resolución de problemas.
2. Progresiones aritméticas	3. Calcular el término general o un término determinado de una progresión aritmética (CCL, CMCT, CSC, CAA, SIEP). 4. Reconocer las progresiones aritméticas tomando conciencia de las situaciones problemáticas a las que se pueden aplicar (CCL, CMCT, CSC, CAA, SIEP).	3.1. Identifica aquellas sucesiones que son progresiones aritméticas y calcula su diferencia y su término general. 3.2. Interpola aritméticamente “ n ” términos entre dos términos dados. 4.1. Reconoce la presencia de las progresiones aritméticas en contextos reales y se sirve de ellas para la resolución de problemas.
3. Suma de una progresión aritmética	5. Calcular la suma de los primeros términos de una progresión aritmética (CCL, CMCT, CSC, CAA, SIEP).	5.1. Aplica la fórmula de la suma de los “ n ” primeros términos de una progresión aritmética. 5.2. Resuelve problemas en los que interviene la suma de los “ n ” primeros términos de una progresión aritmética.

4. Progresiones geométricas	6. Calcular el término general de una progresión geométrica conocidos dos de sus términos (CCL, CMCT, CD, CSC, CAA, SIEP). 7. Reconocer las progresiones geométricas tomando conciencia de las situaciones problemáticas a las que se pueden aplicar (CCL, CMCT, CD, CSC, CAA, SIEP).	6.1. Identifica aquellas sucesiones que son progresiones geométricas y calcula su razón y su término general. 6.2. Interpola geoméricamente “n” términos entre dos términos dados. 7.1. Reconoce la presencia de las progresiones geométricas en contextos reales y se sirve de ellas para la resolución de problemas.
5. Suma de una progresión geométrica	8. Calcular la suma de los primeros términos de una progresión geométrica y de todos cuando el valor absoluto de la razón es menor que uno (CCL, CMCT, CD, CSC, CAA, SIEP).	8.1. Deduce y aplica la fórmula de la suma de los “n” primeros términos de una progresión geométrica y de todos cuando es posible. 8.2. Resuelve problemas en los que interviene la suma de los “n” primeros términos de una progresión geométrica y de todos si es posible.

Tabla 5.6: Elaboración propia. Contenidos, criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje evaluables aplicados a la UD *Sucesiones y series*. Fuente: basado en De Lucas et al. (2020).

El Departamento de Matemáticas del centro habrá realizado una ponderación de todos los criterios de evaluación que se trabajan en el curso, dentro de su programación anual. Sin embargo, en una hipotética programación en la que el segundo trimestre del curso se cerrase con esta UD, habiendo cursado el bloque de geometría en el resto del trimestre, la ponderación de los criterios de evaluación de esta UD en su conjunto no debería superar el 15 % con respecto al trimestre completo.

5.11.2. Criterios de calificación

Finalmente veremos las herramientas que vamos a emplear para evaluar a los alumnos. Estas herramientas deben estar basadas en los criterios de evaluación mostrados tanto en la [figura 2.1](#) (seleccionando aquellos referentes a los contenidos referidos en la [tabla 5.3](#)) como en la [tabla 5.6](#).

Dada la no muy amplia extensión de la unidad emplearemos tres herramientas de evaluación distintas, empleando para cada una de las cuales una rúbrica de evaluación distinta. Vemos a continuación las ponderaciones de cada una de las herramientas de evaluación ([tabla 5.7](#)).

Rúbrica	Herramienta de evaluación	Ponderación
1	Examen escrito	70 %
2	Plan de clase	20 %
3	Actividad IBL	10 %

Tabla 5.7: Elaboración propia. Ponderación relativa sobre el total de la unidad para cada una de las herramientas de evaluación.

En el artículo 18 de la Orden de 14 de julio de 2016 (Orden de 14 de julio de 2016 pp. 115-116) se recogen determinados criterios a seguir en los procesos de evaluación trimestrales de los equipos docentes de cada grupo, sin embargo, no especifica criterio alguno sobre la forma de evaluar de las herramientas de evaluación. Debido a ello la puntuación que se aplicará a cada una de ellas, o a cualquier subapartado de las mismas, contará con hasta dos decimales, pudiendo ampliarse a tres decimales de ser necesario dadas las ponderaciones aplicadas internamente en cada herramienta.

Examen escrito

El examen escrito ([Anexo II.1](#)) recogerá la mayor parte de la puntuación de la unidad. Se pretende dar un enfoque lo más competencial posible, intentando alejarnos todo lo que podamos de los ejercicios clásicos de la literatura. Sin embargo, hay que tener en cuenta las pocas clases dedicadas a impartir el tema, por lo que la dificultad del examen debe adecuarse a estas consideraciones.

Una descripción de la rúbrica del examen de evaluación puede encontrarse en el [Anexo II.2](#), mientras que la propia rúbrica, organizada de forma más visual para su mejor comprensión, puede encontrarse en la [tabla II.1](#).

Plan de clase

El plan de clase consistirá en un documento entregado por los alumnos a través del medio que considere el profesor (correo electrónico, Google Classroom, ...). Este

documento contendrá tanto los apuntes como las actividades realizadas en clase, convenientemente corregidas en caso de estar mal realizadas. La evaluación de este documento se desglosará en un 30 % para la presentación y estética del documento y un 70 % para la completitud del mismo.

La puntuación asignada a cada parte se dejará a criterio del profesor, pero se recomienda restar aproximadamente 0.5 puntos sobre 10 por cada actividad que falte y 0.1 puntos por faltas de ortografía.

Actividad IBL

Dada la complejidad de la actividad IBL desarrollada se propondrá como parte directa de la evaluación. Sin embargo, sólo se evaluará la presentación final y el esfuerzo demostrado por el grupo, dado que por la naturaleza de la actividad se comprende que no todos llegarán a una solución aceptable.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

A través de la realización del presente TFM se ha pretendido alcanzar los objetivos que se mencionaron en el [Capítulo 1](#), además de fundamentar nuestra tesis inicial respecto al posicionamiento de los contenidos referentes a sucesiones dentro del currículo.

Dentro de las posibilidades que brinda la realización del TFM se ha intentado emplear los conocimientos adquiridos a lo largo del Máster, especialmente de las asignaturas directamente relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas.

Durante la fundamentación curricular de los contenidos hemos podido constatar que el currículo sólo hace referencia a las sucesiones en el curso de 3º de ESO, relegándolas a un papel muy secundario con respecto al resto de contenidos, si bien la transposición didáctica con respecto al *saber sabio* mostrado en la fundamentación epistemológica se considera adecuada para la edad de los alumnos. Además, el currículo no trata de forma directa en ningún momento el razonamiento inductivo, pieza que consideramos clave como parte del desarrollo del contenido de sucesiones. Sin embargo, los libros de texto analizados expanden estos contenidos de manera adecuada, dedicando un tema completo a los contenidos de sucesiones y series, si bien en ningún momento se nombra directamente el concepto de serie. En cuanto a los ejemplos prácticos reales sólo uno de ellos los muestra, aplicando el uso de la suma de términos de sucesiones a la matemática financiera.

Un porcentaje muy amplio de las actividades que desarrollan son ejercicios muy mecánicos, donde los alumnos tienen poco que pensar más allá de aplicar directamente alguna fórmula o procedimiento, casi sin ningún tipo de variación. Este hecho ha intentado ser solventado en el desarrollo de la Unidad Didáctica, aumentando el porcentaje de problemas en relación al de ejercicios.

En la fundamentación didáctica hemos podido comprobar cómo se puede establecer una línea de conexión entre el estudio de la geometría, las sucesiones, el razonamiento inductivo y la resolución de problemas, que aporta peso a nuestra tesis inicial del posicionamiento de los contenidos de sucesiones. Además, aportar herramientas al alumnado para la resolución de problemas es vital hoy en día, dada la continua necesidad diaria de la resolución de cualquier tipología de problema, no sólo matemático, o del análisis de series de datos.

Una conclusión a la que se puede llegar analizando la información mostrada en las fundamentaciones curricular y didáctica es que es interesante establecer un debate sobre el posicionamiento de los contenidos relacionados con sucesiones dentro del temario completo de 3º de ESO. Desde el punto de vista del autor, queda confirmada la tesis inicial, consistente en que se puede obtener un mayor aprovechamiento de dichos contenidos si se desarrollan posteriormente al bloque de geometría, pudiendo ser también grandes introductores al resto del bloque de funciones.

Durante el desarrollo de la Unidad Didáctica se ha pretendido incluir una serie de metodologías afines al contenido, intentando emplear la metodología tradicional transmisiva sólo lo necesario. Parte de los contenidos centrales de la unidad son descubiertos por los alumnos a través de actividades de aprendizaje dialógico, fomentándose de esta forma el debate y la defensa de ideas entre ellos. Para reforzar las partes más importantes del tema también se realiza una sesión de modelización matemática, basada en la metodología IBL, que alentará a los alumnos a aplicar lo aprendido en el contexto de un problema real, que implica tanto actividades TIC como procesos transversales (síntesis de información, debate, exposición...).

Con la estructuración dada a la unidad se pretende que los alumnos descubran por sí mismos gran parte de los contenidos a impartir, siendo sistematizados posteriormente por el profesor, en un ambiente de trabajo en grupo y potenciación de las competencias transversales, especialmente la capacidad de debatir y defender sus propias ideas y razonamientos, siempre desde un punto de vista respetuoso hacia el resto del alumnado y el profesor.

Bibliografía

- @simonmaz. (2018). Naturaleza y matemáticas IV: girasol. Recuperado de <https://cutt.ly/Pv4TcT6>. Acceso: 2021-04-26.
- Alonso, J. A. (2020). Cálculo de pi mediante los métodos de Gregory-Leibniz y de Beeler. Recuperado de <https://cutt.ly/rbdHDbp>. Acceso: 2021-04-29.
- Araya, R. G. & Alfaro, E. B. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(5), 113-136.
- Arias, J. M. & Maza, I. (2020). *Matemáticas Académicas, 3º ESO*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.
- Báez, S. M. E. (2008). La sucesión de Fibonacci en la naturaleza de las plantas. *Isagogé*, 1(5), 9.
- Bartoli, M. T. (2004). The sequence of Fibonacci and the Palazzo della Signoria in Florence. *Nexus V: Architecture and Mathematics*, Kim Williams Books, Fucecchio (Florence), 31-42.
- Bortner, C. W. & Peterson, A. C. (2016). The History and Applications of Fibonacci Numbers. Recuperado de <https://cutt.ly/3nH366l>. Acceso: 2021-04-27.
- Bracewell, R. N. (1986). *The Fourier transform and its applications*. Nueva York: McGraw-Hill.
- Brousseau, A. (1971). *Linear recursion and Fibonacci sequences*. San José, EE.UU.: Fibonacci Assoc.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral, Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada).
- Cañadas, M. C. & Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa*, 4, 13-24.
- Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Cañadas, M. C., Castro, E. & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Cañadas, M. C., Castro, E. & Castro, E. (2011). Graphical representation and generalization in sequences problems. En M. Pytlak, R. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 460-469). Rzeszów, Polonia: Universidad de Rzeszów.

- Cárdenas, D., Gómez, S., Jiménez, F. & Sánchez, F. T. (2013). *Análisis numérico: Primeros pasos*. Barcelona: Reverté.
- Castor. (2016). La divina proporción en la arquitectura. Recuperado de <https://cutt.ly/3brzxqv>. Acceso: 2021-04-27.
- Castro, E. (1999). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. En *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-116). Valladolid, España: Universidad de Valladolid.
- Chevallard, Y. & Johsua, M.-A. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.
- Consejería de Educación. (2016). Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 144, 108-396. Publicado el 28-7-2016.
- De Lucas, M., Peña, M. & Rey, M. J. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO*. San Fernando de Henares, España: Oxford University Press.
- Fishman, G. S. (2013). *Spectral methods in econometrics*. Londres: Harvard University Press.
- García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal* (Tesis doctoral, Tenerife: Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna).
- García, J. & Carretero, M. (1986). Estrategias en el razonamiento humano: tareas lógicas y probabilísticas. En H. Peraita (Ed.), *Psicología cognitiva y ciencia cognitiva*. Madrid: UNED.
- Green, C. D. (1995). All that glitters: A review of psychological research on the aesthetics of the golden section. *Perception*, 24(8), 937-968.
- Grigas, A. (2013). *The Fibonacci Sequence: Its history, significance, and manifestations in nature*. Lynchburg, EE.UU.: Liberty University.
- Hance, E. (2017). What are figurate numbers? Recuperado de <https://cutt.ly/QnH6yOT>. Acceso: 2021-04-27.
- Junta de Andalucía. (2019). Los conejos, la sucesión de Fibonacci y el número de oro. Recuperado de <https://cutt.ly/WbeGZYc>. Acceso: 2021-04-27.
- Kevinrm40. (2015). Razonamiento abstracto con sucesiones gráficas. Recuperado de <https://cutt.ly/yb0ZafN>. Acceso: 2021-05-19.
- Lehnert, M. S., Brown, E., Lehnert, M. P., Gerard, P. D., Yan, H. & Kim, C. (2015). The Golden Ratio reveals geometric differences in proboscis coiling

- among butterflies of different feeding habits. *American Entomologist*, 61(1), 18-26.
- Li, B.-L. (2000). Fractal geometry applications in description and analysis of patch patterns and patch dynamics. *Ecological Modelling*, 132(1-2), 33-50.
- Martínez, R. Á., Muñoz, M. C., de los Santos, M. I. & Martínez, P. (2019). *Matemáticas académicas. Aprendizaje basado en problemas. 3º ESO*. Barcelona: Editorial Casals.
- Meikle, H. D. (2004). *A new twist to Fourier transforms*. Hoboken, EE.UU.: Wiley Online Library.
- Mill, J. S. (1869). *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*. Nueva York: Harper y brothers.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1993). Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. *Boletín Oficial del Estado*, 226, 27400-27438. Publicado el 21-9-1993.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado*. Publicado el 10-12-2013.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, 169-546. Publicado el 3-1-2015.
- Munkres, J. R. (2000). *Topology*. Upper Saddle River, EEUU: Prentice Hall.
- Neubert, G. A. & Binko, J. B. (1992). *Inductive Reasoning in the Secondary Classroom*. Washington D.C.: National Education Association of the United States.
- Nieto, L. B. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales*, 25, 49-60.
- Noticias de Arquitectura. (2018). La proporción áurea en la arquitectura contemporánea. Recuperado de <https://cutt.ly/Tbrfifz>. Acceso: 2021-04-27.
- Orton, A. & Orton, J. (1994). Students' perception and use of pattern and generalization. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 407-414).

- Parncutt, R. & Strasburger, H. (1994). Applying psychoacoustics in composition: harmonic progressions of nonharmonic sonorities. *Perspectives of new music*, 32(2), 88-129.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zugazagoitia, Trad.). Ciudad de México: Trillas.
- Polya, G. (1996). *Matemáticas y razonamiento plausible* (J. L. Avellán, Trad.). Madrid: Tecnos.
- Power, S. A. & Shannon, A. G. (2019). Natural Mathematics, the Fibonacci Numbers and Aesthetics in Art. *Journal of advances in mathematics*, 17, 248-254.
- Pugh, C. C. [Charles Chapman] & Pugh, C. (2002). *Real mathematical analysis*. Nueva York: Springer.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Resnick, L. B., Asterhan, C. S., Clarke, S. N. & Schantz, F. (2018). Next generation research in dialogic learning. En G. E. Hall, L. F. Quinn y D. M. Gollnick (Eds.), *Handbook of Teaching and Learning* (pp. 323-338). Wiley-Blackwell.
- Rivera, M. (2017). Cómo resolver una sucesión de relojes. Ejercicio guiado 2. Recuperado de <https://cutt.ly/5b0LQ7y>. Acceso: 2021-05-19.
- Sezer, M. (1994). Taylor polynomial solutions of Volterra integral equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(5), 625-633.
- Stenning, K. & Monaghan, P. (2005). Strategies and Knowledge Representation. En J. P. Leighton y R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning* (pp. 129-168). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*. Londres: Department for Education y Skills.
- Swinton, J., Ochu, E. & Consortium, M. T. S. (2016). Novel Fibonacci and non-Fibonacci structure in the sunflower: results of a citizen science experiment. *Royal Society open science*, 3(5), 160091.
- van Gend, R. (2014). The Fibonacci sequence and the golden ratio in music. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 20(1), 72-77.
- Zhou, J. (2015). *Computer vision and pattern recognition in environmental informatics*. Hershey, EE.UU.: IGI Global.

Anexos

Anexo I

Actividades planteadas en la Unidad Didáctica

En este anexo vamos a desarrollar todas las actividades que se presentarán a lo largo de la unidad didáctica. Junto al enunciado de cada actividad se mostrarán los criterios de evaluación relacionados con dicha actividad. Los criterios de evaluación se nombrarán con dos números separados por punto, donde el primer número podrá valer 1 o 2 y representará el bloque temático al que hace referencia y el segundo número apuntará al criterio de evaluación dentro de dicho bloque. Como ya se explicó en el desarrollo de la unidad didáctica los criterios de evaluación serán aquellos especificados en la [Sección 5.11.1](#).

Tanto las actividades de asentamiento como los problemas de desarrollo representan una selección hecha por el autor de entre la totalidad de actividades presentes en De Lucas et al. (2020) y en Arias y Maza (2020). Todas aquellas actividades que no llegan a ser mandadas como trabajo directamente por el profesor serán optativas que los alumnos podrán realizar como práctica para el examen.

I.1 Ejercicios de consolidación

Preevaluación

P-1: Calcula el resultado de estas potencias.

- a) 2^{-3}
- b) $(-2)^{-3}$
- c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
- d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

P-2: Traduce al lenguaje algebraico.

- a) El siguiente a un número n .
- b) El anterior a un número n .
- c) La semisuma de dos números a y b .

P-3: Calcula el valor numérico de estas expresiones en cada caso.

- a) $\frac{a-1}{a+1}$, para $a = 1$, $a = 6$, $a = 100$
- b) $(-2)^n$, para $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$

P-4: Averigua la solución de estas ecuaciones.

- a) $15 + 3(x - 1) = 27$
- b) $27 = 3x^2$
- c) $5x^3 = 40$

Sucesiones

E-1: (CE: 2.1.) Copia en tu cuaderno los términos que se indican en cada caso de estas sucesiones.

- a) a_1 , a_3 y a_5 en la sucesión a : 5, 15, 20, 25, 30, 35...
- b) b_2 , b_4 y b_7 en la sucesión b : 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7...
- c) c_1 , c_4 y c_6 en la sucesión c : $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$...

E-2: (CE: 2.1.) Escribe en tu cuaderno los cuatro términos siguientes de las sucesiones siguientes explicando cómo los has hallado.

- a) 7, 5, 3, 1, -1...
- b) 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001...
- c) 1, 4, 9, 16, 25...
- d) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$...

E-3: (CE: 2.1.) Escribe los cinco primeros términos de estas sucesiones.

- a) $a_n = 5 - n$
- b) $b_n = \frac{3}{n}$
- c) $c_n = n^2 - 1$
- d) $d_n = (-2)^n$

E-4: (CE: 2.1.) Observa los términos de estas sucesiones, escribe su término general y halla el décimo término en cada caso.

- a) 17, 13, 9, 5, 1, -3...
- b) 0, 1, 8, 27, 64, 125...
- c) 8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25...
- d) 1 , $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$...

E-5: (CE: 2.1.) Calcula los tres términos siguientes de las sucesiones y escribe su ley de recurrencia.

- a) -5, .3, 0, 4, 9, 15, 22...
- b) 3, 4, 1, -3, -4, -1, 3...
- c) 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85...
- d) 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37...

E-6: (CE: 2.1.) Para la sucesión a : 0, 3, 8, 15, 24...

- a) Escribe los términos a_{10} y a_{15} .
- b) ¿En qué posición está el término que vale 120?
- c) Escribe, si es posible, el término general.

E-7: (CE: 2.1.) Escribe una ley de recurrencia para describir estas sucesiones.

- a) 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43...
- b) $3, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3...$
- c) 10, 9, 7, 4, 0, -5, -11...
- d) 12, 26, 55, 114, 233, 472, 951...

Progresiones aritméticas

E-8: (CE: 2.3.) Justifica cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas.

- a) 2, 6, 10, 14, 18...
- b) 1, 3, 6, 10, 15...
- c) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3...$
- d) 2.5, 2.25, 2, 1.75...
- e) 1, 3, 9, 27, 81...
- f) $\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}...$

E-9: (CE: 2.3.) Calcula el valor de la diferencia en estas progresiones y halla su término general.

- a) 6, 9, 12, 15, 18...
- b) 11, 66, 121, 176, 231...
- c) 1, -4, -9, -14, -19...
- d) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}...$

E-10: (CE: 2.3.) El primer término de una progresión aritmética es 5 y su diferencia es 6.

- a) Halla el término general.
- b) ¿Qué posición ocupa el término que vale 101?

E-11: (CE: 2.3.) Encuentra el quinto término de una progresión aritmética si el tercero vale 3 y el décimo es 38.

E-12: (CE: 2.3.) Determina el primer término de una progresión aritmética de diferencia 5 si $a_{12} = 32$. Escribe su término general y halla el término que ocupa la posición 81.

E-13: (CE: 2.3.) Averigua cuántos términos tiene esta progresión: 4, 10, 16..., 436.

E-14: (CE: 2.3.) Interpola el número de términos que se indica de modo que formen una progresión aritmética.

- a) Tres términos entre 5 y 17.
- b) Cinco términos entre 12 y -18.
- c) Cuatro términos entre -7 y -5.75.
- d) Dos términos entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{3}$.

Progresiones geométricas

E-15: (CE: 2.6.) Justifica cuáles de estas sucesiones son progresiones geométricas.

- a) 2, 6, 18, 54, 162...
- b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \dots$
- c) 25, 20, 16, 12.8, 10.24...
- d) -1, 1, -1, 1, -1...
- e) 5, 10, 15, 20, 25...
- f) $\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{25}{16}, \frac{125}{32} \dots$

E-16: (CE: 2.6.) Calcula el valor de la razón en cada una de estas progresiones y halla su término general.

- a) -3, -6, -12, -24, -48...
- b) 4, 2, 1, 0.5, 0.25...
- c) 0.03, -0.3, 3, -30, 300...
- d) $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}, -\frac{16}{9}, \frac{64}{27} \dots$

E-17: (CE: 2.6.) El tercer término de una progresión geométrica es 24 y su razón es -0.2.

- a) Escribe su término general
- b) ¿Cuánto vale a_{15} ?

E-18: (CE: 2.6.) Escribe los cuatro primeros términos de estas progresiones geométricas y determina su término general.

- a) $a_1 = 3, r = 5$
- b) $b_1 = -256, r = -\frac{1}{2}$
- c) $c_1 = 25, r = -1,4$
- d) $d_1 = -1, r = \frac{5}{2}$

E-19: (CE: 2.6.) Calcula el término general de una progresión geométrica en la que el tercer término es 18, el quinto es 162 y cuya razón es negativa. Averigua el décimo término.

E-20: (CE: 2.6.) Interpola tres términos en progresión geométrica que sean:

- a) positivos entre 12 y $\frac{3}{4}$.
- b) alternados entre 0.04 y 25.
- c) negativos entre -1 y -2401.
- d) alternados entre -54 y $-\frac{2}{3}$.

Suma de una progresión aritmética

E-21: (CE: 2.5.) Averigua el valor de la suma de los 50 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas

- a) $a_n = 73 - 4n$
- b) $b_n = 23 + 11n$
- c) $c_n = -1 - \frac{2}{5}n$
- d) $d_n = 6 - 0,7n$.

E-22: (CE: 2.5.) Calcula la suma de:

- a) los veinte primeros números pares.
- b) los números naturales del 1 al 1000.
- c) los 10 primeros múltiplos positivos de 11.

E-23: (CE: 2.5.) Halla la suma de los 25 primeros términos de las progresiones aritméticas que verifican:

- a) $a_1 = 85$ y $d = -10$
- b) $a_3 = 24$ y $d = 0,5$
- c) $a_1 = 9$ y $a_3 = 17$.

E-24: (CE: 2.5.) Halla la suma de los 30 primeros múltiplos positivos de 7.

E-25: (CE: 2.5.) Calcula cuántos números naturales consecutivos tengo que sumar a partir del 23 para obtener 782.

Suma de una progresión geométrica

E-26: (CE: 2.8.) Calcula la suma de los 10 primeros términos de estas progresiones geométricas.

- a) $a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- b) $b_n = 2^n$
- c) $c_n = (-3)^{n-1}$
- d) $d_n = 486 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{n-1}$

E-27: (CE: 2.8.) Averigua la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término vale 20 si su razón es -5.

E-28: (CE: 2.8.) Determina el valor de estas sumas infinitas.

- a) $1 + 0,2 + 0,04 + 0,008 + 0,0016 + \dots$
- b) $2000 + 1000 + 500 + 250 + 125 + \dots$
- c) $75 - 7,5 + 0,75 - 0,075 + 0,0075 + \dots$
- d) $-1 - \frac{3}{5} - \frac{9}{25} - \frac{27}{125} - \frac{81}{625} - \dots$

E-29: (CE: 2.8.) Calcula, si es posible, la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.

- a) 96, 48, 24, 12, 6, 3...
- b) $-\frac{1}{5}, -1, -5, -25, -125, -625, \dots$
- c) 7, -4, 9, 3, 43, -2, 401, 1, 6807, -1, 17649...

I.2 Problemas de desarrollo

Sucesiones

D-1: (CE: 1.2., 2.2.) Fíjate en estas construcciones hechas con cubos. Analiza cómo se ha realizado cada una.

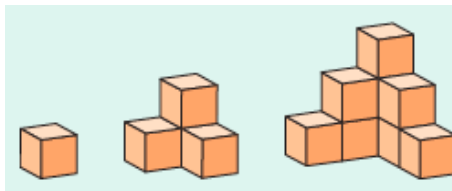


Figura I.1: Imagen auxiliar del problema D-1. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)

- ¿Cuántos cubos se necesitan para la siguiente construcción?
- ¿Y para la siguiente?
- ¿Cuántos cubos se necesitan para la centésima construcción?

D-2: (CE: 1.3, 2.2.) En una colmena, los zánganos no tienen padre, son hijos sólo de la reina de la colmena. Sin embargo, la reina sí tiene padre y madre, un zángano y una reina. Describe la sucesión que indica el árbol genealógico de un zángano indicando el número de padres, abuelos y bisabuelos.

D-3: (CE: 1.2., 1.3., 2.2.) Fede esta construyendo figuras con palillos siguiendo este patrón.



Figura I.2: Imagen auxiliar del problema D-3. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)

- Escribe los 5 primeros términos de la sucesión que describe el número de palillos necesarios para realizar cada figura.
- Escribe, si es posible, una ley de recurrencia para esta sucesión. ¿Cuál es su término general?
- ¿Cuántos palillos necesita Fede para construir una figura con 30 cuadrados?
- ¿Cuántos cuadrados tendrá una figura para la que Fede emplee 150 palillos?

Progresiones aritméticas

D-4: (CE: 1.1., 1.2., 2.4.) En un aula han colocado sillas para una conferencia. La primera fila está a 2.5 m del orador y han dejado medio metro entre cada fila y la siguiente. Si cada silla ocupa 0.75 m, ¿a qué distancia se encuentra la séptima fila?

D-5: (CE: 1.2., 1.4., 2.4.) Los alumnos de Botánica están elaborando un proyecto para reacondicionar una parte del patio plantando 10 ejemplares de especies autóctonas. Para decorar el espacio deciden reservar para cada planta un espacio hexagonal de 50 cm de lado y rodearlo con losetas de la misma forma con la disposición que se muestra en el dibujo.

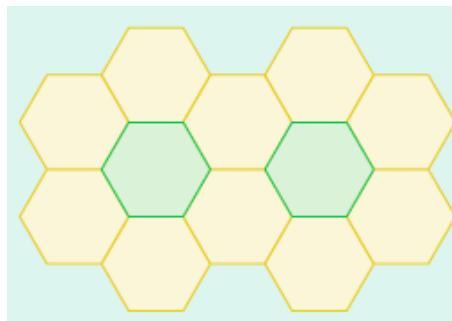


Figura I.3: Imagen auxiliar del problema D-5. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)

- ¿Cuántas losetas necesitan colocar?
- ¿Cuánto medirá de largo el espacio total ocupado? ¿Y si son finalmente quince plantas?

D-6: (CE: 1.3., 1.4., 2.4.) Observa el coste del alquiler de un par de patines en la pista de hielo.



Figura I.4: Imagen auxiliar del problema D-6. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)

- Escribe una expresión algebraica que determine el precio según el número de horas de alquiler.
- ¿Cuánto costará el alquiler por 6 h?

D-7: (CE: 1.1., 1.2., 2.4.) Averigua el número de plantas de un rascacielos de 89 m de altura si el piso bajo mide 6.5 m de alto y cada uno de los pisos siguientes, 2.75 m más.

Progresiones geométricas

D-8: (CE: 1.1., 1.2., 2.7.) La población de una cierta región ha crecido en progresión geométrica entre 2016 y 2020 pasando de 150 000 a 219 615 habitantes.

- ¿Cuál es la razón de crecimiento?
- ¿En qué porcentaje se incrementa la población cada año?

D-9: (CE: 1.2., 1.3., 1.4., 2.7.) A Estefanía le han propuesto diseñar un logo para el Club de Mates y ha dibujado estas figuras. Sergio ha propuesto hacer, con ese diseño y empleando material reutilizado, una construcción de 1 m de altura para exponerla en el club.

Observa el diseño y calcula qué área tiene cada uno de los triángulos y cuáles son las longitudes de sus lados

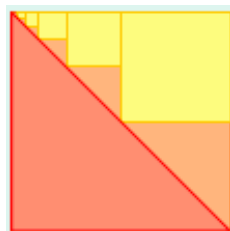


Figura I.5: Imagen auxiliar del problema D-9. Fuente: elaboración propia a partir de (De Lucas, Peña y Rey, 2020)

D-10: (CE: 1.2., 2.7.) En un estanque de 400 m^2 los nenúfares crecen ocupando cada semana el doble de la superficie que ocupaban la semana anterior. Si esta semana ha llegado a estar completamente cubierto, ¿hace cuánto tiempo estaba ocupada sólo la mitad de su superficie?

Suma de una progresión aritmética

D-11: (CE: 1.2., 1.3., 1.4., 2.5.) Una localidad ha reservado un terreno para dedicarlo a la silvicultura. A principios de año comenzaron a transplantar árboles colocando cada semana 5 más que en la semana anterior. En la cuarta semana colocaron 40 plantones.

- a) ¿Cuántos árboles plantaron la primera semana? ¿Y la décima?
- b) ¿En qué semana transplantaron 105 árboles?
- c) Averigua cuántos plantones se han colocado a lo largo de los seis primeros meses del año.

D-12: (CE: 1.1., 1.3., 2.5.) Las amplitudes de los cuatro ángulos de un cuadrilátero forman una progresión aritmética. Si el primer término vale 15° , ¿cuál es la amplitud de cada uno de los ángulos?

D-13: (CE: 1.2., 1.3., 2.5.) Calcula los años que ha estado depositado un capital de 45000€ al 2 % de interés simple si, una vez hecha la retención del 21 % de Hacienda, se han generado 2133 €.

D-14: (CE: 1.2., 1.3., 2.5.) Calcula el rédito al que se han depositado 12000 € a interés simple durante 18 meses si los intereses generados, con la retención de Hacienda descontada, han sido 213.3 €.

Suma de una progresión geométrica

D-15: (CE: 1.1., 1.3., 2.8.) Nayla lanza una pelota a lo largo del patio de manera que en el primer bote avanza 3 m y en cada uno de los rebotes siguientes avanza dos tercios de lo que avanzó en el rebote anterior.

- a) ¿Cuánto avanza en el tercer rebote? ¿Y en el sexto?
- b) Determina una expresión algebraica que permita averiguar la longitud recorrida en cada rebote.
- c) Si se detiene contra la pared tras recorrer 5 m, ¿cuántos rebotes ha dado?
- d) ¿Qué distancia recorrería si no se parase nunca?

D-16: (CE: 1.2., 1.3., 2.8.) Una entidad financiera paga el 2.5 % del dinero depositado si éste se mantiene 3 años. Calcula, en los siguientes casos, cuánto se ganará al finalizar los tres años por una imposición de 10000 € si Hacienda retiene el 21 %:

- a) Los intereses se ingresan en una cuenta distinta.
- b) Los intereses se ingresan en la misma cuenta.

I.3 Actividad TIC

La actividad que se realizará es una búsqueda de información sobre sucesiones famosas en grupos de alumnos, durante la primera sesión de la unidad.

T-1: (CE: 1.2., 1.5., 1.12.) Conoce las sucesiones.

El objetivo de la actividad es reforzar el concepto de sucesión regular en los alumnos, después de habérselo explicado en la introducción del tema. Además, se persigue que los alumnos, durante su investigación, descubran conceptos como término general o ley de recurrencia.

Se realizarán grupos de no más de 4 alumnos, suministrándoles un ordenador, o dispositivo electrónico que pueda servir para buscar información, a cada grupo. Deberán seleccionar una de entre las cinco sucesiones de números siguientes:

- a) Fibonacci.
- b) Farey.
- c) Padovan.
- d) Números oblongos.
- e) Números de Perrin.

El grupo deberá buscar información sobre la sucesión escogida y plasmar en un documento una breve descripción de dicha sucesión y sus características, así como escribir una pequeña parte de ella. Se permitirá un total de 25 minutos para que los alumnos realicen la investigación y preparen sus resultados. A continuación, durante 15 minutos se permitirá que un representante de cada equipo exponga ante toda la clase un resumen de su investigación.

El material será enviado por correo electrónico al profesor o subido a la plataforma digital que emplee el centro para una posterior evaluación más detallada por parte del profesor.

I.4 Actividades de aprendizaje dialógico

Las actividades de aprendizaje dialógico se desarrollarán en una única sesión, pudiendo variar su número entre 4 y 6 en función del tiempo disponible o el propio desarrollo de la sesión. Las actividades se dividen en actividades individuales, por parejas y en grupo completo de clase. En cada una de ellas se desarrolla o refuerza algún concepto nuevo o ya conocido, respectivamente. Las actividades aquí desarrolladas están basadas en una *Standard Unit* desarrollada en Swan (2005). Al finalizar esta sección encontramos los recursos empleados para su desarrollo.

Los objetivos principales perseguidos mediante estas actividades son capacitar a los alumnos para:

- Definir una sucesión usando su término general.
- Definir una sucesión usando su ley de recurrencia.
- Reconocer y definir una progresión aritmética.
- Reconocer y definir una progresión geométrica.
- Ser capaces de exponer adecuadamente sus resultados y el proceso seguido y discutir sobre ello con el resto de sus compañeros.

En su conjunto, los criterios de evaluación correspondientes a estas actividades serían **CE: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 2.1., 2.2., 2.3., 2.5., 2.6., 2.8.**

A-1: Trabajo en parejas 1.

- A cada pareja se le proporcionará una copia de cada una de las páginas de tarjetas de números ([Anexo I.4.1](#)).
- Los alumnos deberán crear tantas sucesiones como puedan, animando al profesor a aquellos con más facilidades a realizar sucesiones más complejas.
- Cuando aproximadamente todos los grupos tengan sucesiones realizadas se les pedirá que escriban algunas de ellas en una copia de la tabla que aparece en el [Anexo I.4.2](#) y añadan una descripción del patrón que sigue la sucesión, expresada verbalmente.

A-2: Trabajo en grupo completo 1.

- El profesor escribirá en la pizarra algunas de las sucesiones de las parejas de alumnos.
- Se propone a los alumnos que encuentren una forma de expresar el término n -ésimo de la sucesión, ya sea con término general o con ley de recurrencia.
- A continuación se practicará el trabajo con los términos generales y las leyes de recurrencia. El profesor escribirá en la pizarra diferentes términos generales o leyes de recurrencia y las parejas, en un folio en blanco, tendrán que escribir los x primeros términos o el término k -ésimo que el profesor proponga. Es interesante que, para las leyes de recurrencia, el profesor no diga en alguna de ellas los primeros términos, de forma que los alumnos tengan que darse cuenta de su necesidad.

A-3: Trabajo en parejas 2.

- Se dará tiempo a las parejas para que, una vez practicada la actividad anterior, escriban el término general o la ley de recurrencia de las sucesiones que escribieron en la primera actividad.

- Es probable que, cuando se pueda, la mayoría de las parejas intenten hacer la ley de recurrencia en lugar del término general, por lo que habrá que motivarlos para que también obtengan el término general.

A-4: Trabajo en grupo completo 2.

- El profesor seleccionará parejas de alumnos que hayan escrito progresiones aritméticas y geométricas en las actividades anteriores, aunque, como éstas aún no han sido explicadas, los alumnos desconocen ese hecho.
- Estas parejas escribirán en la pizarra, por turnos, el término general y/o la ley de recurrencia que les permite obtener la progresión que han creado.
- El resto de compañeros debe tratar de escribir la sucesión a partir de dicha información, de forma que podamos comprobar si estas sucesiones que escriben se corresponden con la progresión que la pareja originalmente había creado, comprobando así si el término general o la ley de recurrencia están bien definidos.
- A continuación introduciríamos los conceptos de progresión aritmética y geométrica, explicando simplemente su principal característica (formación en función de diferencia y razón), sin entrar en escribir ni su término general ni su ley de recurrencia.
- Una vez los alumnos conocen los conceptos, se les pedirá que creen determinadas sucesiones que contengan unos términos concretos, por ejemplo:
 - Crea una progresión aritmética que contenga el número 100.
 - Crea una progresión geométrica que contenga el número $\frac{3}{2}$.
 - Crea una progresión aritmética cuyo quinto término sea -3.
 - Crea una progresión geométrica cuyo segundo elemento sea 10.
- Seleccionaremos algunas de las progresiones desarrolladas por los alumnos en el apartado anterior y las escribiremos en la pizarra.
- Los alumnos tendrán que intentar escribir el término general y la ley de recurrencia de esas progresiones.
- A través de los términos generales escritos por los alumnos se les inducirá a comprobar el término general para una progresión aritmética (geométrica) dada en función del término inicial y su diferencia (razón).

A-5: Trabajo individual y en parejas 3.

- Cada alumno completará el cuestionario del [Anexo I.4.3](#).
- Cuando una pareja termine de rellenar los dos cuestionarios, ambos miembros se los intercambiarán y tendrán que comentar los resultados de su compañero.

A-6: Trabajo en grupos completo 3.

Esta actividad se dividirá en dos partes distintas. En la primera de ellas se mostrarán diferentes sucesiones, tratando de establecer un debate con los alumnos.

Mostramos a continuación el enunciado que se presentaría a los alumnos referente a la primera parte de la actividad (exceptuando los términos generales y leyes de recurrencia entre paréntesis).

La impostora oculta

A continuación tenéis una lista con 6 sucesiones distintas, parecidas a aquellas con las que hemos estado trabajando durante toda la clase. Hay una sucesión impostora, que no comparte las características del resto. ¿Podrías decirme cuál es la impostora y por qué?

- a) 1, 3, 5, 7, 9... ($a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1)$)
- b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11} \dots$ ($a_n = \frac{n}{2 \cdot n + 1}$)
- c) 2, 6, 8, 6, 2... ($a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + 4$, con $a_1 = 2$ y $a_2 = 6$)
- d) 3, -3, 3, -3, 3... ($a_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$)
- e) 2, 1, 0, 5, 0, 25... ($a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$)
- f) -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1... ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, con $a_1 = -3$ y $a_2 = 2$)

Evidentemente, no hay una única respuesta válida, dado que todas podrían ser elegidas por motivos distintos, por lo que se establecerá un debate con las argumentaciones de los alumnos que defiendan su opción elegida.

En la segunda parte de la actividad se suscitaría la necesidad del concepto de serie, concretamente tratando las series aritméticas de forma indirecta. El enunciado que se propone a los alumnos es el siguiente.

¿Cuándo se acaba la suma?

Crea la progresión aritmética que tú elijas, pero ten en cuenta la limitación que te voy a poner: si sumas los 4 primeros números, el resultado debe ser 100.

Si consigues crearla, quiero que también me digas cuánto valdría la suma de los 6 primeros términos. ¿Y de los 20 primeros términos?

El objetivo de esta segunda parte de la actividad es mostrar, de forma indirecta, la necesidad del empleo de las series. No se pretende llegar a explicar dichos conceptos, sino ir planteando la necesidad de los mismos de cara a la actividad de IBL que se desarrolla en la 4ª sesión.

I.4.1. Tarjetas numeradas recortables

40	0.7	12	$1\frac{1}{2}$
-2	18	12.5	27
0.9	6	54	25
1	15	4	3
-0.1	-3	20	8

9	60	$1\frac{1}{3}$	-6	$3\frac{1}{2}$
0.1	$1\frac{1}{8}$	-10	0.2	$1\frac{1}{4}$
51	37.5	$1\frac{1}{6}$	-20	36
0.3	17	$3\frac{3}{4}$	-0.5	$2\frac{2}{3}$

I.4.2. Tabla en blanco

I.4.3. Cuestionario sobre progresiones aritméticas y geométricas

Apellidos y nombre:

Escribe los primeros cuatro términos de una progresión aritmética cuyo segundo término valga 100.

Explica por qué la anterior es una progresión aritmética.

Escribe una ley de recurrencia para la anterior progresión.

Escribe el término general de la anterior progresión.

Escribe los primeros cuatro términos de una progresión aritmética cuyo tercer término valga 100.

Explica por qué la anterior es una progresión geométrica.

Escribe una ley de recurrencia para la anterior progresión.

Escribe el término general de la anterior progresión.

I.5 Actividad IBL

La tarea que se propondrá a los alumnos es el cálculo de un presupuesto para el diseño y construcción de una pirámide de base cuadrada. La pirámide se construirá con bloques cúbicos e irá revestida para dar la forma de pirámide perfecta.

La tarea cumplirá con la estructura tradicional de las clases IBL. En un principio se desarrollarán las fases de introducción a la tarea y desarrollo de la misma, tras lo que pasaremos a una síntesis de los resultados, donde se realizarán algunas preguntas de reflexión, y finalizaremos con una fase de sistematización del aprendizaje matemático.

Durante la fase de desarrollo de la tarea es posible que algunos alumnos descubran el concepto de serie y entiendan su potencial para la eficiente resolución de la clase. En tal caso el profesor debería ayudar a dicho grupo de alumnos suministrándole la fórmula correspondiente, dado que la inducción de la misma se considera de un nivel demasiado avanzado para los alumnos a los que esta tarea está dirigida.

Esta tarea dispone de elementos que la hacen potencialmente escalable para ser empleada en cursos de nivel superior. Los conocimientos mínimos de los que deben disponer los alumnos son los siguientes: teorema de Pitágoras, volumen de una pirámide, término general de una sucesión y densidad de un material¹, aunque con determinadas suposiciones, o trabajo más tedioso, por parte de los alumnos algunas de éstas no serían necesarias.

Disponer de conocimientos de semejanza de triángulos, inecuaciones y optimización de funciones² permitiría aumentar el nivel de dificultad de la tarea.

¹Contenido desarrollado en Física y Química en 2º de ESO, según el criterio de evaluación 1 del bloque 2 (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014p. 259).

²Como se podrá comprobar más adelante al leer el enunciado del problema, emplear una función *precio del bloque de construcción* dependiente del tamaño del mismo, permitiría desarrollar los conocimientos de optimización de funciones.

I.5.1. Criterios de evaluación y objetivos de la actividad

Los criterios de evaluación correspondientes a estas actividades serían **CE: 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.6., 1.7., 1.11., 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5., 2.6., 2.7., 2.8.**, mientras que los objetivos perseguidos serán:

- Ser capaz de estructurar un problema poco estructurado.
- Emplear adecuadamente la notación algebraica, tanto en contextos geométricos como numéricos.
- Emplear adecuadamente las unidades de medida métricas.
- Obtener términos generales de sucesiones distintas a las progresiones aritméticas y geométricas vistas en clase.
- Vincular diferentes áreas de las matemáticas.
- Trabajar con términos generales de una serie.

I.5.2. Plan de clase

Enunciado inicial y materiales

Mostramos en la página siguiente el enunciado que se suministraría a los alumnos individualmente.

Los materiales disponibles para la tarea serían los siguientes:

- Hojas de papel tamaño A4.
- Cartulinas para hacer pósteres y rotuladores.
- Bolsas con 55 cubos de madera de 1 cm de lado ([figura I.6](#)).
- Ordenador con conexión a Internet.

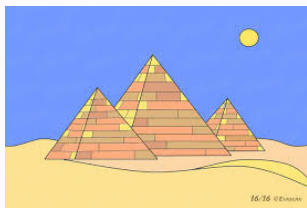


(a) Cubo individual.

(b) Bolsas disponibles para los alumnos.

Figura I.6: Cubos de madera empleados en la actividad.

El arquitecto de pirámides.



El reputado arquitecto Óscar Calatrava ha recibido un extraño pedido de un cliente. Este cliente quiere que se le diseñe y construya una pirámide maciza en el patio de su casa. Al cliente le da igual el tipo de pirámide que sea, pero quiere que la estructura interna se construya con bloques cúbicos y que, antes de empezar a construir, Óscar le de un presupuesto de los materiales que va a necesitar.

El pobre Óscar se está viendo superado por el pedido, por lo que solicita vuestra ayuda para diseñar la pirámide del cliente. La única restricción del cliente es que la pirámide debe medir entre 8 y 9 metros de altura.

¿Puedes ayudar a Óscar a diseñar una pirámide lo más barata posible?

- Busca información sobre diferentes tipos de pirámides.
- Intenta diseñar la estructura de la pirámide con bloques cúbicos.
- Piensa en cómo revestir la estructura de bloques para formar la pirámide.
- Crea el presupuesto para el cliente, teniendo en cuenta que los bloques de la estructura interna cuestan $100 \frac{\text{€}}{\text{m}^3}$ y el material del revestimiento es plata, a un precio de $6,67 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.



Fase de introducción de la tarea

Primero anunciamos a la clase que hoy realizaremos una actividad diferente:

Buenos días. La clase de hoy va a ser algo diferente. Hoy yo voy a intentar hablar lo mínimo posible, mientras que vosotros vais a tener que realizar una tarea de la vida real.

En unos momentos os voy a entregar el enunciado de la tarea a cada uno individualmente, y quiero que lo leáis despacio para entender muy bien lo que se os está pidiendo. No va a haber una única forma de resolver el problema, por lo que podéis emplear todos los conocimientos matemáticos que tenéis para resolverla. Si no os acordáis de algo podéis usar el libro de clase, consultar en Internet o, como último recurso, preguntarme a mí.

Les entregamos una copia del enunciado a cada uno y les dejamos un par de minutos para que lo lean tranquilamente y piensen en cómo resolverlo.

En mi mesa os he dejado preparados folios y unas bolsas con pequeños cubos de madera de 1 cm^3 que podéis emplear para facilitar vuestro cálculos. También tenéis cartulinas con las que quiero que preparéis un póster final donde mostréis la pirámide que habéis diseñado y los cálculos más relevantes que habéis empleado.

Fase de desarrollo

Colocamos a los alumnos en grupos de 4, con un ordenador por grupo, para que investiguen sobre la forma de las pirámides y su estructura. Tras unos 5 minutos aproximadamente, llamamos la atención de la clase para poner en común los tipos de pirámides que han encontrado.

Una vez acotados los resultados de las diferentes investigaciones los alumnos comenzarán a trabajar en la creación de la pirámide con los bloques de madera. Hay varias disposiciones diferentes que pueden plantearse, pero para que la pirámide se pueda diseñar bien la sucesión que rige el número de bloques por cada piso de la pirámide debe ser estrictamente creciente.

Cuando determinen que tienen que emplear una sucesión necesitarán saber cuántos pisos deben emplear para cumplir con el requerimiento de altura, por lo que tendrán que suponer el tamaño que debe tener el cubo de construcción en la realidad.

Llegados a este punto pueden ocurrir dos situaciones distintas. En la primera, el grupo de alumnos simplemente determina que la altura de la pirámide ($\approx 8m$) se obtiene multiplicando la longitud de un cubo por el número de pisos, sin tener en cuenta la altura alcanzada por el revestimiento necesario para completar la punta de la pirámide. En la segunda, los alumnos emplean geometría o simplemente un dibujo para determinar los pisos necesarios teniendo en cuenta el revestimiento de la punta.

No se plantea esta decisión como una incidencia, dado que si la longitud del lado del cubo se ha seleccionado coherentemente los resultados no variarán en demasía.

En el momento en que los alumnos obtengan los pisos necesarios en función del tamaño de los cubos que han elegido deberían intentar obtener la cantidad de cubos totales en la pirámide. Pueden intentar hacer la suma de la sucesión que obtengan a mano, pero puede haber grupos que comprendan la necesidad de emplear una serie³, concepto que aún no se habría visto en clase, por lo que, si llegan a plantear dicho problema, el profesor les proporcionaría el valor de la serie correspondiente.

Conocidos los cubos necesarios para la estructura interna de la pirámide sólo restaría calcular el volumen total de la pirámide para obtener, mediante una resta, el volumen del revestimiento. Restaría obtener, a través de internet, el valor de la densidad de la plata para calcular el precio final de la pirámide.

Possible incidencia	Ayuda propuesta
No entienden qué es un presupuesto.	Se les asimila un presupuesto a una lista de la compra.
No encuentran suficientes tipos de pirámides distintas.	Les hablamos de las pirámides egipcias.
Encuentran demasiados tipos diferentes de pirámides.	Acotamos los resultados a pirámides egipcias y mayas.
No diseñan la pirámide como una sucesión estrictamente creciente.	Les preguntamos si creen que podrán obtener la forma de una pirámide con la disposición que están haciendo.
Suponen longitud del lado del cubo de construcción inverosímil: mayor de 2 m o menor de 1 cm.	Les preguntamos si creen que, empleando el tamaño de cubo que han elegido, se podría manipular adecuadamente a mano o con alguna máquina.

³Especialmente si eligen un lado del cubo lo suficientemente pequeño.

Se dan cuenta de que obtienen datos incoherentes respecto a los volúmenes calculados.	Les sugerimos que dibujen todo lo que necesiten.
No comprenden que la diferencia entre el volumen de la pirámide y de los bloques es el volumen del revestimiento, o no saben cómo calcular el volumen del revestimiento.	Les preguntamos cómo calcularían el volumen de los hielos en un vaso enrasado con refresco.

Tabla I.2: Elaboración propia. Posibles incidencias en la fase de desarrollo de la tarea.

Fase de síntesis de los resultados y preguntas de reflexión

Cuando los alumnos completen el diseño de la pirámide y su presupuesto podrán realizar el póster donde plasmen sus resultados, para pasar a continuación a mostrar las diferencias entre algunos de los diseños.

Las principales diferencias que se esperan observar son:

- La sucesión que rige la cantidad de bloques en cada piso de la estructura.
- La consideración o no del revestimiento para el cálculo de la altura de la pirámide.
- La forma de recubrir la estructura con el revestimiento.

Intentaremos que los alumnos expliquen las hipótesis que han tenido que asumir para el desarrollo de la tarea:

- *¿Que información habéis tenido que suponer cuando no se os daba algún dato en el enunciado?*
- *¿Por qué habéis supuesto (un dato concreto) en lugar de (otro valor para el mismo dato)?*
- *¿Alguién ha tomado una hipótesis diferente para (el dato de la pregunta anterior)?*

A continuación se harían una serie de preguntas para establecer un debate reflexivo entre los alumnos:

- *¿Cuál creéis que es la pirámide más barata? ¿Y la más rentable?*
- Intentar que algún alumno explique con sus palabras la respuesta que ha dado algún otro alumno a las preguntas anteriores.
- *¿Que hubiérais tenido en cuenta si se os hubiese dado las dimensiones del patio del cliente?*

- *¿Y si, cuando ya tuviérais la pirámide diseñada, el cliente quiere que tenga otra altura diferente?*
- Preguntar a algún alumno si cree que algún grupo tendría menos problemas en el caso anterior. Esto será posible si algún grupo ha inducido la fórmula de, al menos, la serie de la estructura de bloques.
- *¿Creéis que vuestros diseños habrían cambiado si el revestimiento fuese más barato que los bloques internos?*
- *¿Qué ocurre si elegimos un tamaño de bloque muy pequeño?* Para esta pregunta puede ser recomendable realizar unos dibujos en la pizarra como los de la [figura I.7](#).

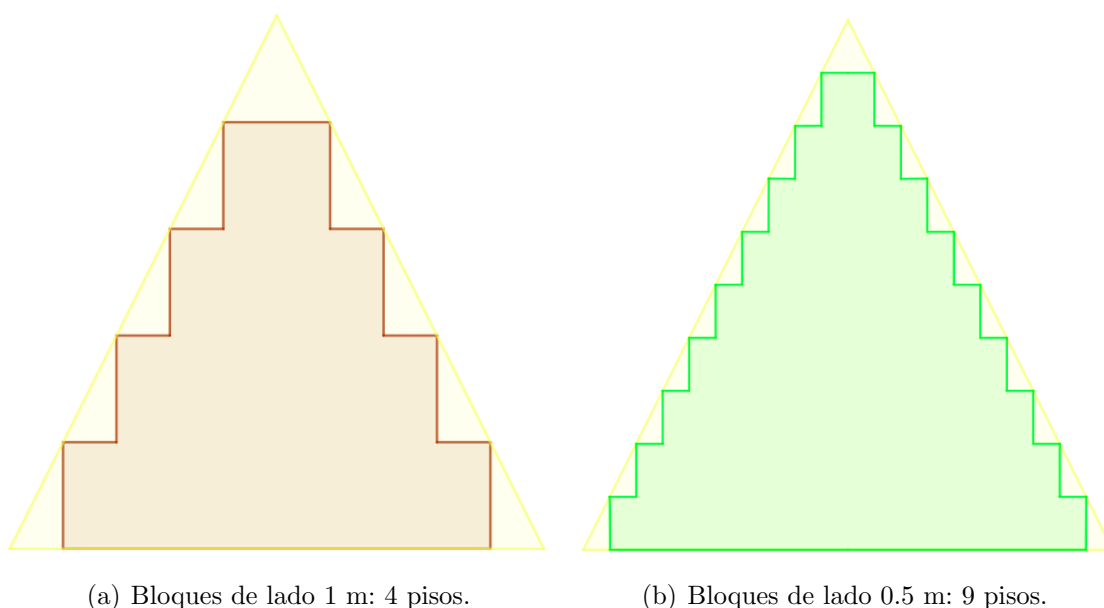


Figura I.7: Elaboración propia. Ejemplo de estructura interna para una pirámide de 5 metros de altura.

Fase de sistematización del aprendizaje matemático

En esta fase apuntamos en la pizarra las respuestas de los alumnos a la pregunta de cuáles son los conocimientos matemáticos que han ido empleando para la realización de su presupuesto. Aquellos que no aparezcan, pero que podrían haber aparecido, los aporta el profesor. Si han empleado algún tipo de recurso que aún está por encima de su nivel podemos destacarlo contándoles cómo se llama, de forma que se motiven por haber logrado algo así.

Los principales conocimientos empleados en la tarea son:

- Término general de una sucesión.
- Teorema de Pitágoras.
- Volumen de una pirámide.
- Semejanza de triángulos.
- Inecuaciones.
- Formulación de expresiones algebraicas.

Entre los procesos que se desarrollarán en la tarea estarán:

- Simplificación y estructuración de una situación compleja.
- Formulación de hipótesis.
- Manejo de órdenes de magnitud.
- Conversión de unidades.
- Búsqueda de información.
- Argumentación y prueba.
- Comunicación.

I.5.3. Posibles soluciones

Mostramos a continuación algunas de las posibles soluciones a las que podrían llegar los alumnos, mostrando las hipótesis aproximadas que habrían tenido que asumir y los cálculos que pueden haber realizado, aunque algunos puedan estar mal por asumir hipótesis erróneas. Los textos recuadrados son simulaciones de posibles razonamientos (muy simplificados) que podrían desarrollar los alumnos.

Solución 1

Hipótesis asumidas:

- Cubos de 1 m de lado.
- En cada piso tenemos un cubo más en el lado que en el piso anterior ($a_n = n^2$).
- La pirámide tiene tanta altura como pisos de cubos tenemos.
- La base de la pirámide tendrá tanta longitud como los cubos en línea que haya en la base.

Si la pirámide mide 8 m de alto, y nuestros cubos van a medir 1 m, necesitamos 8 pisos de cubos. La base medirá 8 m de lado.

En el primer piso (la punta) tenemos 1 cubo, en el segundo piso 4 cubos, en el tercero 9, ..., y así hasta 64 cubos en la base. Si los sumamos todos tenemos 204 cubos en la estructura interna. Cada cubo mide 1 m^3 , por lo que la estructura medirá 204 m^3 .

El volumen de la pirámide total será de $V = \frac{1}{3} \cdot (8\text{m})^2 \cdot 8\text{m} = 170,67\text{m}^3$.

Un grupo de alumnos que siguiese el anterior desarrollo debería darse cuenta de que hay alguna hipótesis errónea al tener un volumen de la pirámide total más pequeño que el de su estructura interna. Realizando un dibujo como el de la [figura I.8](#) podrían obtener que, con la sucesión elegida para los pisos y el lado elegido para el cubo, la altura y el lado de la base serán en realidad:

$$\text{Altura total} = n \cdot L + L = L(n + 1),$$

$$\text{Lado de la base} = n \cdot L + 2 \cdot \frac{L}{2} = L(n + 1),$$

donde n es el número de pisos de la pirámide y L es el lado elegido para los cubos.

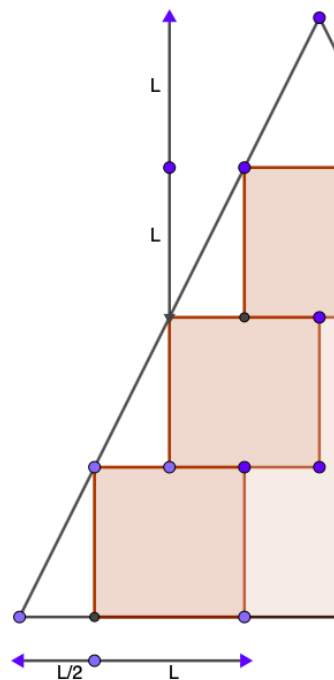


Figura I.8: Elaboración propia. Dibujo que podría ser empleado para determinar la altura total real de la pirámide y el lado de la base.

En este punto, este grupo de alumnos podría replantearse algunas de su hipótesis para finalizar los cálculos:

1. Si se replantean las hipótesis de altura y lado de la base podrían emplear las expresiones anteriores para obtener un nuevo volumen de la pirámide (243m^3), que esta vez sí será mayor que el de su estructura interna.
2. Si desean recalcular los pisos necesarios para ajustarse a los 8 m de altura, tendrían que volver a recalcular el volumen de la estructura interna, que esta vez valdría 140m^3 .

Una vez obtenidos datos válidos sólo tendrían que multiplicar por los precios de cada uno de los materiales, habiendo obtenido previamente el valor de la densidad de la plata, para calcular el presupuesto (muestro el ejemplo con la primera de las opciones anteriores):

$$P = 100 \frac{\text{€}}{\text{m}^3} \cdot 204\text{m}^3 + 700 \frac{\text{€}}{\text{m}^3} \cdot (243 - 204)\text{m}^3 = 47700\text{€}$$

Solución 2

Hipótesis asumidas:

- Cubos de 0.5 m de lado.
- En cada piso tenemos dos cubos más en el lado que en el piso anterior ($a_n = (2n - 1)^2$).
- La pirámide tiene 16 pisos de altura.

En el primer piso (la punta) tenemos 1 cubo, en el segundo piso 9 cubos, en el tercero 25, ... El número cada vez es más grande, pero parece que siempre tenemos el cuadrado de los números impares, entonces en el piso 16 tendremos $(2 \cdot 16 - 1)^2 = 961$ cubos. Son muchos números para calcularlos todos a mano...

Esta es una situación en la que podrían pedir ayuda al profesor porque se dan cuenta de que es muy difícil continuar si no emplean una serie. Esta es la única circunstancia en la que el profesor ayuda dando conocimiento nuevo a los alumnos. La serie correspondiente a este ejemplo sería:

$$S_n = \frac{n(2n + 1)(2n - 1)}{3}.$$

Se les tendría que explicar que si en lugar de n usan la cantidad de pisos que tienen van a obtener el número de bloques totales en la estructura interna.

Según nos ha contado el profesor, usando esta fórmula obtenemos que hacen falta 5456 cubos. Cada cubo tendrá un volumen de 0.125 m^3 , por lo que toda la estructura interna tendrá 682 m^3 .

Con el dibujo que hemos hecho sabemos que la base de la pirámide mide como si pusiéramos un cubo más a cada lado, y en el caso de la altura como si pusiéramos medio cubo más. Entonces el lado de la base será de 32 m, mientras que la altura final valdrá 8.25 m.

Con esos datos, el volumen total de la pirámide será de $748,69 \text{ m}^3$. Entonces el presupuesto de la pirámide será de $183081,25 \text{ €}$.

Anexo II

Examen y rúbrica de evaluación

II.1 Examen de evaluación

EVALUACIÓN UNIDAD DIDÁCTICA: SUCESIONES

Apellidos y nombre:

Curso: Grupo: Número: Fecha:

Actividad 1 (hasta 4 puntos):

- $a_n : \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \dots$
- $b_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$

Para las anteriores sucesiones:

- a) Da su término general o su ley de recurrencia, razonando cómo los has obtenido (hasta 3 puntos).
- b) Da los dos términos siguientes a los mostrados (hasta 1 punto).

Actividad 2 (hasta 4 puntos): a Mario le han ofrecido un contrato en una empresa, donde le pagarán semanalmente. Le han ofrecido pagarle de dos formas distintas, a su elección:

Forma 1: 60   el primer día y 10   más cada día de la semana.

Forma 2: 50   el primer día y un 30 % más cada día de la semana.

Teniendo en cuenta que Mario trabajar  de lunes a viernes, calcula:

- a) El dinero que ganaría el viernes si elige la forma 1 (hasta 1 punto).
- b) El dinero que ganaría el jueves si elige la forma 2 (hasta 1 punto).
- c)  Con cuál de las dos formas ganar  más dinero a lo largo de la semana? (hasta 2 puntos)

Actividad 3 (hasta 1 punto): justifica si puedes calcular la suma infinita de las siguientes progresiones. En caso afirmativo, calcúlalas.

- a) $a_n : 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (hasta 1 punto)
b) $b_n : 8, 6, 4, 2, 0, \dots$ (hasta 1 punto)

II.2 Rúbrica del examen de evaluación

La rubrica del examen se desarrolla en función de los criterios de evaluación que empleamos en el propio examen. De cara al alumnado se asignará una puntuación determinada a cada uno de los apartados de cada una de las actividades del examen (tal y como se observa en los propios enunciados del examen), desglosando posteriormente la nota entre los diferentes criterios de evaluación como mostraremos a continuación.

La nota asignada a cada uno de los criterios de evaluación dependerá del criterio del profesor, pudiendo variar ésta entre 0 y 10, sin empleo de decimales salvo en caso muy necesario.

Mostramos a continuación un listado con los conceptos y criterios de evaluación a lo largo del examen junto con la nota máxima que tendrá dicho criterio en el apartado.

■ Actividad 1:

- Apartado a):

- a: 1.2.: Razona la obtención del término general de a_n (1 pt).
 - b: 2.1.: Obtiene el término general de a_n (0.5 pts).
 - c: 1.2.: Razona la obtención de la ley de recurrencia de b_n (1 pt).
 - d: 2.1.: Obtiene la ley de recurrencia de b_n (0.5 pts).

- Apartado b):

- e: 1.4.: Emplea la expresión del término general de a_n (0.1 pts).
 - f: 2.1.: Obtiene los términos solicitados de a_n (0.4 pts).
 - g: 1.4.: Emplea la expresión de la ley de recurrencia de b_n (0.1 pts).
 - h: 2.1.: Obtiene los términos solicitados de b_n (0.4 pts).

■ Actividad 2:

- Apartado a):

- j: 1.2.: Razona la obtención del término de la progresión aritmética (0.4 pts).

k : 2.3.: Calcula el término de la progresión aritmética (0.3 pts).

l : 2.4.: Reconoce que debe utilizar una progresión aritmética (0.3 pts).

- Apartado b):

m : 1.2.: Razona la obtención del término de la progresión geométrica (0.4 pts).

n : 2.6.: Calcula el término de la progresión geométrica (0.3 pts).

$\tilde{n}$: 2.6.: Reconoce que debe utilizar una progresión geométrica (0.3 pts).

- Apartado c):

o : 1.1.: Expresa verbalmente la solución al apartado (0.6 pts).

p : 2.5.: Calcula la suma de términos de la progresión aritmética (0.7 pts).

q : 2.8.: Calcula la suma de términos de la progresión geométrica (0.7 pts).

■ Actividad 3:

- Apartado a):

r : 1.1. Justifica la posibilidad de calcular la suma infinita (0.5 pts).

s : 2.8. Calcula la suma infinita de términos (0.5 pts).

- Apartado b):

t : 1.1. Justifica la imposibilidad de calcular la suma infinita (1 pt).

CE	1 a)	1 b)	2 a)	2 b)	2 c)	3 a)	3 b)	Total
1.1.					o	r	t	
1.2.	a, c		j	m				
1.4.		e, g						
2.1.	b, d	f, h						
2.3.			k					
2.4.			l					
2.5.					p			
2.6.				n				
2.7.				$\tilde{n}$				
2.8.					q	s		
Total								

Tabla II.1: Elaboración propia. Rúbrica del examen de evaluación de la unidad.

En la rúbrica anterior podemos comprobar la relación entre los distintos apartados (columnas) y los criterios de evaluación (filas). Podemos realizar un desglose de la nota en función tanto de cada uno de los apartados como de cada uno de los criterios de evaluación. En cada casilla sombreada se colocaría la nota correspondiente, a criterio del profesor, entre 0 y 10 para los conceptos indicados.