



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

DERIVADAS: PROPUESTA DIDÁCTICA PARA 1º DE BACHILLERATO

Alumno/a: Ortega Muñoz, Isabel María

Tutores: Prof. D. Jesús María Navarro Moreno
Prof. D. José Domingo Jiménez López

Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2021

RESUMEN

Este trabajo titulado “Derivadas: Propuesta didáctica para 1º de Bachillerato”, tiene como objetivo principal describir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas en Bachillerato.

Con su realización se finaliza el Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas.

El presente Trabajo de Fin de Máster se divide en cuatro partes: la fundamentación curricular, en la que se realizará un análisis del currículo vigente y el análisis de dos libros de texto; la fundamentación epistemológica, en ella se desarrollará un tema de oposiciones para acceder al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria; la fundamentación didáctica, en la que se analizarán varias investigaciones didácticas relacionadas con las derivadas; y la unidad didáctica, en la que se trabajarán diferentes aspectos para conseguir un aprendizaje significativo con el que los estudiantes puedan alcanzar los objetivos propuestos.

Palabras clave: Derivadas, Didáctica de las Matemáticas, Bachillerato, unidad didáctica

ABSTRACT

This TFM called “Derivatives: Didactic proposal for 1st course Baccalaureate” aims to describe the teaching and learning process of derivatives in first Baccalaureate’s course in high school.

With the realization of this task the Master’s Degree in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, is completed.

The present TFM is divided into four parts: the curricular foundation, where we will made an analysis of the current curriculum and the analysis of two textbooks. A second part deals with the epistemological foundation, where we will develop subject of the opposition’s agenda for teachers in Secondary Education. The next section is about the didactic foundation, where it will be analyzed several didactic investigations related to the derivatives topic. At the last part, we develop the unit of work, where we will be worked in different aspects to achieve meaningful learning with which students can achieve the proposed objectives.

Keywords: Derivatives, mathematics didactics, baccalaureate, unit of work.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	5
2. OBJETIVOS	7
3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	9
3.1. Análisis del currículo escolar	9
3.2. Análisis de libros de texto	16
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA	21
4.1. Contexto histórico	21
4.2. Introducción	23
4.2.1. Tasa de variación instantánea de una función	23
4.2.2. Problema de la recta tangente a una gráfica en un punto	23
4.3. Derivada de una función	25
4.4. Reglas de derivación	28
4.4.1. Álgebra de derivadas	28
4.4.2. Derivadas de funciones elementales	32
4.5. Derivadas sucesivas	40
4.5.1. Fórmula de Leibniz	40
4.6. Aplicaciones de las derivadas	41
4.6.1. Monotonía.	42
4.6.2. Extremos absolutos y extremos relativos.	42
4.6.3. Regla de L'Hôpital	46
4.6.4. Otras aplicaciones	47
5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	49
5.1. Comprensión del alumnado	50
5.2. Perspectiva de la práctica del profesor	55
5.3. Análisis de las tareas	57

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA	61
6.1. Título	61
6.2. Justificación	61
6.3. Contextualización del centro y del aula	63
6.4. Objetivos	64
6.4.1. Objetivos generales de etapa	64
6.4.2. Objetivos del área de matemáticas	65
6.4.3. Objetivos concretos de la unidad	66
6.5. Competencias Clave	67
6.6. Contenidos	69
6.7. Metodología	70
6.8. Actividades y recursos	72
6.8.1. Actividades:	73
6.9. Atención a la diversidad	82
6.10. Temporalización	84
6.11. Evaluación	93
6.11.1. Criterios de evaluación	94
6.11.2. Criterios de calificación	96
6.11.3. Examen	96
7. CONCLUSIÓN	99
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Este documento presenta el Trabajo Fin de Máster con el que se culmina el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato formación profesional y enseñanza de idiomas del curso 2020/2021, concretamente en la especialidad de Matemáticas.

En él, se pone en práctica todo lo aprendido a lo largo del curso académico con el objetivo de realizar una unidad didáctica sobre derivadas para llevarla a la práctica en el curso de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales.

Para ello, antes de centrarnos en la unidad didáctica, realizaremos un análisis del currículum escolar vigente tanto a nivel nacional como autonómico y además, se analizarán algunos libros de texto de diferentes editoriales, correspondiente al nivel académico de 1º de Bachillerato. Esta parte se llama fundamentación curricular y nos servirá como una primera aproximación a los conocimientos matemáticos que debemos enseñar en la unidad didáctica, los cuales se utilizarán como punto de partida para realizar dos tareas esenciales en la elaboración de la unidad. Estas dos tareas son:

La fundamentación epistemológica, en la que se presentará la elaboración del “Tema 26: Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivada sucesiva. Aplicaciones.” del temario de oposiciones relacionado con los contenidos que ofrece la unidad didáctica, el cual debe desarrollarse con cierto rigor matemático.

La fundamentación didáctica, donde se analizarán algunas investigaciones didácticas en las que se hayan abordado aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas.

Por último se diseñará la unidad didáctica sobre derivadas, en la cual se debe emplear todo lo aprendido en las partes mencionadas anteriormente. En ella se emplearán diferentes metodologías con el objetivo de fomentar la motivación del alumnado y de una correcta comprensión de los contenidos del

tema, haciendo que el alumnado adquiriera un pensamiento crítico. Se fomentará el uso de la tecnología y de los recursos TIC al igual que el aprendizaje colaborativo para motivar al alumnado y favorecer un buen clima en el aula.

Capítulo 2

OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo es analizar y describir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas en Bachillerato, haciendo uso de todas las herramientas y los conocimientos adquiridos durante el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Por ello se pretende conseguir los siguientes objetivos:

- Establecer el significado de las derivadas desarrollando los contenidos de uno de los temas pertenecientes al temario de oposiciones del Cuerpo de Profesores de Secundaria.
- Adquirir cierto rigor matemático y consolidar los conocimientos como docente para poder aplicarlos en la enseñanza.
- Conocer la normativa tanto a nivel nacional como autonómico del sistema educativo.
- Conocer los contenidos curriculares relacionados con las derivadas.
- Analizar el significado de las derivadas en los libros de texto, realizando una comparación entre ellos.
- Analizar, investigar y explorar las investigaciones en Didáctica de la Matemáticas en donde se muestren aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas.
- Planificar y desarrollar una unidad didáctica detallando los contenidos, los objetivos, las competencias clave, la metodología, la temporalización, la atención a la diversidad y el proceso de evaluación del alumnado.

- Desarrollar y elaborar actividades que junto con la teoría, aporten una base sólida del concepto de derivada al alumnado.

Tras alcanzar estos objetivos, podremos decir que se han adquirido los conocimientos necesarios para superar el máster, por lo que contaremos con los conceptos y herramientas necesarias para poder llegar a ser buenos docentes en un futuro.

Capítulo 3

FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En este capítulo, nos vamos a centrar en analizar, por un lado, el currículo escolar correspondiente a la asignatura de “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I” de 1º de Bachillerato y, por otro lado, los libros de texto correspondientes a dicha asignatura. Este análisis, se hará en referencia al tema que estamos estudiando en el presente TFM, las derivadas.

3.1. Análisis del currículo escolar

Para realizar un análisis del currículo en referencia a las derivadas, debemos consultar los documentos oficiales vigentes tanto a nivel nacional como autonómico. Es decir,

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

En ellos, podemos encontrar los contenidos que se han de impartir, los objetivos y las competencias clave que debe adquirir el alumnado y, los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se han de evaluar en todas las materias de ESO y Bachillerato.

Como hemos mencionado, nos vamos a centrar en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I del curso de 1º de bachillerato. Como vemos en el Real Decreto 1105/2014, esta asignatura se estructura en cuatro bloques:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Bloque 2. Números y álgebra.
- Bloque 3. Análisis.
- Bloque 4. Estadística y Probabilidad.

siendo el primero, un bloque transversal que debe desarrollarse junto con el resto de bloques simultáneamente y, es común en 1º y 2º de Bachillerato.

Concretamente, para realizar el análisis nos centraremos en el bloque 3, el cual recoge el contenido referente a las derivadas y, el bloque uno, que como hemos dicho es complementario a todos los otros bloques.

A continuación, se muestran los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables asociados a dichos contenidos, que según el Real Decreto 1105/2014 deben desarrollarse en los bloques mencionados.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. 1º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto, etc. Análisis de los resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos escritos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidas. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 4. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 7. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 8. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 9. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 10. Superar bloques e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 13. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. 2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso seguido. 3.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 3.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 3.3. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar. 4.1. Conoce y describe la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc. 4.2. Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5.1. Profundiza en la resolución de algunos problemas planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 5.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; ciencias sociales y matemáticas, etc.) 6.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 6.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 6.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 6.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación, tanto en la búsqueda de soluciones como para mejorar la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas. 6.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 6.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 7.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 7.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando del problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 7.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

Figura 3.1.: Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		7.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 8.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc. 9.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, etc. 9.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 9.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 10.1. Toma decisiones en los procesos (de resolución de problemas, de investigación, de matematización o de modelización) valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc. 12.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 12.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 12.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 12.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 13.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 13.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 13.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Figura 3.2.: Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Bloque 3. Análisis		
Resolución de problemas e interpretación de fenómenos sociales y económicos mediante funciones. Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Características de una función. Interpolación y extrapolación lineal y cuadrática. Aplicación a problemas reales. Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones reales de variable real: polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera, y racionales e irracionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos. Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Aplicación al estudio de las asíntotas. Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto. Función derivada. Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.	1. Interpretar y representar gráficas de funciones reales teniendo en cuenta sus características y su relación con fenómenos sociales. 2. Interpoliar y extrapolar valores de funciones a partir de tablas y conocer la utilidad en casos reales. 3. Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias. 4. Conocer el concepto de continuidad y estudiar la continuidad en un punto en funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales. 5. Conocer e interpretar geoméricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones.	1.1. Analiza funciones expresadas en forma algebraica, por medio de tablas o gráficamente, y las relaciona con fenómenos cotidianos, económicos, sociales y científicos extrayendo y replicando modelos. 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonadamente ejes, unidades y escalas reconociendo e identificando los errores de interpretación derivados de una mala elección, para realizar representaciones gráficas de funciones. 1.3. Estudia e interpreta gráficamente las características de una función comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 2.1. Obtiene valores desconocidos mediante interpolación o extrapolación a partir de tablas o datos y los interpreta en un contexto. 3.1. Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función. 3.2. Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales. 4.1. Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales. 5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geoméricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real. 5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.

Figura 3.3.: Bloque 3: Análisis; Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Si nos fijamos en la Orden de 14 de julio de 2016, observamos que se asocia a cada criterio de evaluación su respectiva competencia. Los criterios mencionados anteriormente, correspondientes a los bloques uno y tres, trabajan las siguientes competencias:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Criterios de evaluación	Competencias
1.	CCL, CMCT
2.	CMCT, CAA
3.	CCL, CMCT, CD, CAA, SIEP
4.	CCL, CMCT, CSC
5.	CMCT, CSC, CEC
6.	CCL, CMCT
7.	CMCT, CAA, SIEP
8.	CMCT, CAA
9.	CMCT, CSC, SIEP, CEC
10.	SIEP, CAA
11.	CAA, CSC, CEC
12.	CMCT, CD, CAA
13.	CMCT, CD, SIEP
Bloque 3: Análisis	
Criterios de evaluación	Competencias
1.	CMCT, CSC
2.	CMCT, CAA
3.	CMCT
4.	CMCT, CAA
5.	CMCT, CAA

Tabla 3.1.: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 1 y 3.
Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia

Es decir, las competencias que se deben desarrollar al estudiar estos dos bloques son:

CCL	Comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
CD	Competencia digital
CAA	Aprender a aprender
CSC	Competencias sociales y cívicas
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CEC	Conciencia y expresiones culturales

Tabla 3.2.: Competencias adquiridas en los bloques 1 y 3. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

Concretamente, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque 3, que estudiaremos en nuestra unidad didáctica son los siguientes:

■ **Contenidos:**

- Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.
- Función derivada. Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

■ **Criterios de evaluación:**

5. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones.

■ **Estándares de aprendizaje evaluables:**

5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real.

5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.

3.2. Análisis de libros de texto

Los libros de texto tienen un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que son habitualmente utilizados como una herramienta esencial en el aula, ya sea como material de consulta o propuesta de ejercicios, actividades y problemas (González y Sierra, 2004). Por ello, han tomado un papel muy importante en las investigaciones didácticas de los últimos años.

Para realizar el análisis, nos vamos a centrar en dos libros de texto de diferentes editoriales de la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1º de Bachillerato. Consideraremos los libros de texto de las editoriales Anaya y SM, en los que estudiaremos las similitudes y diferencias de sus contenidos, así como el contenido mínimo exigido por la normativa, comprobando así, si cumplen lo establecido en el Real Decreto 1105/2014 y en la Orden de 14 de julio de 2016.

La elección de estos libros de texto se basa en que han sido las editoriales más destacadas en el centro donde hacía las prácticas correspondientes al Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas; el cual concluirá con la realización del presente TFM.

En primer lugar, analizaremos la extensión de los libros de texto de ambas editoriales. El libro de Anaya tiene 287 páginas de las cuales, el tema de derivadas se localiza entre las páginas 182-209. El libro de SM cuenta con 352 páginas y el tema de derivadas se encuentra entre las páginas 194-223.

En cuanto a la estructura que siguen, observamos que los dos libros coinciden a la hora de ordenar los diferentes temas en tres bloques: aritmética y álgebra, análisis (en SM se llama análisis y funciones) y, estadística y probabilidad. Aquí, encontramos la primera diferencia, pues no presentan el mismo número de temas. En dichos temas, se presentan definiciones, propiedades, ejemplos y ejercicios de forma clara y organizada.

A continuación, presentamos la estructura que sigue cada editorial:

Anaya	SM
1. Números reales	1. Números reales
2. Aritmética mercantil	2. Matemática financiera
3. Álgebra	3. Expresiones algebraicas
4. Funciones elementales	4. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones
5. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas	5. Inecuaciones y sistema de inecuaciones
6. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas	6. Funciones
7. Derivadas	7. Interpolación
8. Distribuciones bidimensionales	8. Límites y continuidad
9. Distribuciones de probabilidad de variable discreta	9. Funciones elementales
10. Distribuciones de probabilidad de variable continua	10. Derivadas
	11. Análisis estadístico de una variable
	12. Distribuciones bidimensionales
	13. Cálculo de probabilidades
	14. Distribuciones discretas. La distribución binomial
	15. Distribuciones continuas. La distribución normal

Tabla 3.3.: Comparación de los temas de las editoriales Anaya y SM.

Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia

Nuestro análisis se centrará en el tema de las derivadas. Como podemos

observar, ambos libros de texto dedican un tema a las derivadas y también vemos como en ellos, antes de introducir dicho tema se presentan primero las funciones, los límites y la continuidad, lo cual es muy adecuado, ya que los alumnos necesitan tener un conocimiento previo de estos conceptos para estudiar las derivadas.

En el libro de Anaya, el tema 7 “Derivadas” se divide de la siguiente manera:

1. Medida del crecimiento de una función.
2. Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica.
3. Función derivada de otra.
4. Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones.
5. Utilidad de la función derivada.
6. Representación de funciones.

En el libro de SM, el tema 10 “Derivadas” se divide de la siguiente manera:

1. Tasa de variación.
2. Derivada de una función en un punto.
3. Función derivada.
4. Interpretación geométrica.
5. Cálculo de derivadas.
6. Derivada de operaciones.
7. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.
8. Aplicación de las derivadas a la representación de funciones polinómicas.
9. Problemas de optimización.

A continuación, estudiaremos y compararemos estos dos temas, por lo que veremos en detalle los contenidos y la estructura que presentan.

Empezaremos viendo sus similitudes y diferencias. Los dos libros de texto introducen el concepto de derivada de una función en un punto a través, de

la expresión del límite del cociente incremental, pero antes se introducen los conceptos de tasa de variación media e instantánea en SM y, la tasa de variación media y pendiente de la recta tangente en Anaya. A continuación, ambos libros explican la definición de función derivada y en SM se mencionan también las derivadas sucesivas. Luego siguen con las reglas de derivación para finalizar, con el estudio de funciones y su representación.

En el libro de Anaya, encontramos una regla práctica para calcular $f'(a)$, algo que no se ve en el libro de SM. Para explicar las reglas de derivación, el libro de SM introduce dichas reglas mostrando a su vez, tanto la representación gráfica de la función como la de la derivada. Por el contrario, el libro de Anaya da algunos ejemplos de la derivada de distintas funciones y también, hace la demostración de una de ellas. En cuanto a la derivada de operaciones, el libro SM realiza la demostración de todas ellas y, para explicar la regla de la cadena, en vez de hacer la demostración, realiza un ejemplo. Sin embargo, en el libro de Anaya, solo se muestra un ejemplo con cada operación. Para finalizar, en SM se introduce el concepto de crecimiento y decrecimiento de una función a través de la función derivada y los extremos relativos, así como la representación de funciones polinómicas, terminando con el estudio de problemas de optimización. La editorial Anaya termina estudiando la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función, los puntos singulares de la función derivada y los valores máximos y mínimos de una función y, por último, al igual que en SM estudia la representación de funciones polinómicas pero añadiendo también la representación de funciones racionales.

Como podemos observar, los contenidos que aparecen en ambos libros de texto se adaptan a los contenidos mínimos exigidos en el Real Decreto 1105/2014. Además, en ambas editoriales se amplían los contenidos realizando un estudio de las funciones y su representación gráfica.

A continuación, vamos a estudiar la estructura de los contenidos ofrecidos en ambas editoriales. Lo primero que encontramos en los dos temas es una introducción en la que se presenta el tema de derivadas, pero vemos una gran diferencia, ya que el libro de Anaya contiene una introducción histórica, mientras que en el libro de SM, se explican algunos conceptos que se utilizarán en el tema (pendiente de una recta tangente, potencias y logaritmos). Después, se desarrollan los diferentes contenidos pertenecientes a la unidad. Por un lado, encontramos que en el libro de Anaya primero aparecen los conceptos teóricos y las explicaciones y, a continuación, se muestran algunos ejercicios resueltos sobre la explicación teórica realizada y se dejan propuestos otros ejercicios para que los realice el alumnado. Por el contrario, en el libro de SM, primero se realiza una breve explicación o un ejemplo mediante los cuales hacen razonar a los alumnos para luego introducir las definiciones teóricas, y después, se realizan unos ejemplos y se dejan propuestos algunos

ejercicios para que el alumnado practique los contenidos explicados.

En ambas editoriales se puede observar que trabajan con una metodología transmisiva, en donde el docente realizará las explicaciones de los contenidos y, los alumnos podrán poner en práctica estos nuevos conceptos adquiridos realizando los ejercicios propuestos.

Como hemos mencionado anteriormente, ambas editoriales presentan ejemplos y ejercicios resueltos en relación a los contenidos explicados pero podemos ver, como la editorial Anaya utiliza ejemplos enfocados a la resolución y la aplicación de forma mecánica de las definiciones y los procedimientos vistos en clase, mientras que la editorial SM está más enfocada a resolver problemas en los que haya que razonar para obtener la solución.

También observamos que en el libro de Anaya, al finalizar la explicación de los contenidos, aparece una sección al final del tema en la que encontramos ejercicios y problemas resueltos, otros con pequeñas indicaciones y una gran batería de ejercicios propuestos que servirán de gran ayuda al alumnado para aplicar todo lo estudiado a lo largo de la unidad. Además, aparece una pequeña autoevaluación con la que el alumnado podrá comprobar si realmente ha comprendido el significado de todas estos conceptos.

En el libro de SM ocurre lo mismo, al finalizar la explicación de los contenidos encontramos una sección en la que aparecen ejercicios resueltos, otra con ejercicios y problemas para realizar y profundizar en los contenidos y, un breve resumen de todo lo estudiado a lo largo de la unidad. En este libro encontramos una mayor diversidad en el contexto de los problemas. Además, cabe destacar, que para finalizar el tema, dedica las últimas cuatro páginas a las TIC, explicando detalladamente cómo podríamos utilizar la herramienta “Derive” para calcular la tabla de valores de una función, su gráfica, los límites, la derivada, la tangente a la función en un punto y también, cómo podemos realizar el estudio de una función a través de este programa.

En definitiva, podemos decir que aunque presentan algunas diferencias, los dos libros son muy similares, la estructura y los contenidos son prácticamente los mismos y, la mayoría de los ejercicios son muy parecidos. Aunque en la editorial SM, vemos que intentan relacionar más los contenidos expuestos y le dan más importancia a los problemas. Por lo general, como hemos mencionado, encontramos ejercicios para realizar de forma mecánica e individual, sin necesidad de realizar un gran razonamiento. Además, encontramos que las herramientas TIC son inexistentes a lo largo del estudio de todo el tema, exceptuando SM que realiza una introducción a la herramienta “Derive” al finalizar el tema.

Capítulo 4

FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En este capítulo, se desarrollará con cierto rigor matemático los contenidos correspondientes con el TEMA 26: “Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones” del temario de oposiciones de la especialidad de Matemáticas. Este contenido es determinado por la Orden de 9 de septiembre de 1993 del BOE por la que se aprueban los temarios que han de regir los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio.

4.1. Contexto histórico

Los problemas que dieron origen al cálculo infinitesimal comenzaron a plantearse en la antigua Grecia (siglo III a.C.), con conceptos de tipo geométrico, pero no se encontraron métodos de resolución hasta diecinueve siglos después, en el siglo XVII, gracias a los trabajos de Isaac Newton y Gottfried Leibnitz.

Los conceptos de tipo geométrico que dieron origen a las derivadas fueron el problema de la tangente a una curva de Apolonio de Perge, y el teorema de los extremos: máximos y mínimos de Pierre de Fermat. Esto dio origen a lo que actualmente conocemos como cálculo diferencial.

Los intentos de Fermat por resolver el problema de la determinación de la dirección de la tangente en un punto arbitrario de la curva fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las ideas rudimentarias relacionadas con el concepto de derivada. Estas ideas se aproximan tanto al concepto de derivada, que casi llegan a definirla, sin embargo, no pensó en un método

para resolverlos ni tampoco se percató de que los problemas del cálculo del área bajo una curva y el cálculo de la pendiente de la recta tangente son inversos.

Isaac Newton y Gottfried Leibnitz, independientemente el uno del otro, desarrollaron las ideas básicas del concepto de derivada, elaboraron reglas para manipular las derivadas, y fueron los primeros en desarrollar la relación entre el cálculo diferencial (cuya idea central es la noción de derivada) y el cálculo integral.

Newton desarrolló su propio método para el cálculo de tangentes. En 1665 encontró un algoritmo para derivar funciones algebraicas que coincidía con el que Fermat descubrió. Después, se dedicó a reestructurar las bases de su cálculo, intentando desligarse de los infinitesimales, e introdujo el concepto de *fluxión*, es decir, la velocidad con la que una variable fluye (varía) con el tiempo.

Leibnitz formuló y desarrolló el cálculo diferencial en 1675. Descubrió los mismos resultados que Newton había descubierto 10 años antes, pero Leibnitz fue el primero en publicar estos resultados. Sus investigaciones conservaron un carácter geométrico y trató a la derivada como un cociente incremental en vez de como una velocidad, viendo el sentido de su correspondencia con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Inicialmente la derivada se introdujo para el estudio del problema de la tangente, pero pronto se observó que también era de gran utilidad en el cálculo de velocidades y en general, en el estudio de la variación de una función.

Desde el siglo XVII, muchos matemáticos han contribuido al cálculo diferencial. En el siglo XIX, se logró un mayor rigor gracias a matemáticos como Cauchy, Riemann, y Weierstrass. Durante este periodo se generalizó el cálculo diferencial al espacio euclídeo y al plano complejo.

En el cálculo diferencial se han empleado diferentes notaciones para las derivadas. La notación actual es obra fundamentalmente de Leibnitz y Lagrange. En concreto, las comas (f', f'', f''') y los números romanos ($f^{(iv)}, f^{(v)}, \dots$) para las derivadas fue introducida por Lagrange, y la notación $\frac{dy}{dx}$ se debe a Leibnitz. Otra notación muy utilizada es Df y fue introducida por L. Arbogast.

La notación que se utilizará en el resto del capítulo para denotar la derivada de una función es $f'(x)$. La derivada de orden n la denotaremos por $f^{(n)}$, aunque también se pueden encontrar otras notaciones como $D^n f$ o $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

4.2. Introducción

Existen diferentes formas de aproximarse al concepto de derivada de una función en un punto. Vamos a estudiarlo a con ayuda de la tasa de variación instantánea y a través del problema de la recta tangente.

4.2.1. Tasa de variación instantánea de una función

En Física, la velocidad media de un móvil se estudia como el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en ello. Por ello, el concepto de velocidad instantánea se entiende como un paso al límite, es decir, el resultado del espacio que recorre el vehículo en un tiempo pequeño h , dividido entre dicho tiempo, es próximo a la idea de velocidad instantánea. Cuanto más pequeño sea h , más próximo será el resultado a la velocidad instantánea.

Luego la velocidad $v(t)$ en un instante t_0 es

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(t_0 + h) - e(t_0)}{h}$$

donde $e(t)$ es el espacio recorrido en función del tiempo t . Si dicho límite existe, entonces se llama derivada de $e(t)$ en t_0 .

En general, la derivada representa la tasa instantánea de cambio de una magnitud. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto A . Llamamos tasa de variación media de f en $[a, b] \subset A$ a:

$$TVM(f, [a, b]) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para obtener la tasa de variación instantánea de f en un punto concreto $a \in A$, debemos calcular tasas de variación media en intervalos de la siguiente forma $[a, a + h]$ siendo h cada vez más pequeño.

$$TVI(f, a) = \lim_{h \rightarrow 0} TVM(f, [a, a + h]) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Cuando existe este límite se llama derivada de $f(x)$ en a .

4.2.2. Problema de la recta tangente a una gráfica en un punto

La recta tangente a una curva C en un punto $p \in C$, es una recta R que se aproxima a C alrededor de p . El problema de la recta tangente consiste en

encontrar condiciones para que la curva C tenga recta tangente en el punto p y calcular dicha recta en función de C y p .

Estudiando el problema de la recta tangente a la gráfica de una función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $(a, f(a))$ con $a \in A$ vemos que la recta que buscamos, si existe, tendrá la ecuación

$$y = f(a) + m(x - a), \quad (4.1)$$

donde m es la pendiente de la recta, que hay que hallar a partir de $f(x)$ y a . Para calcular la pendiente m , aproximaremos la recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ por las rectas secantes que pasan por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ con h cada vez más pequeño. Entonces si la recta tangente existe, $\lim_{h \rightarrow 0} m_h = m$, donde m_h son las pendientes de las rectas secantes.

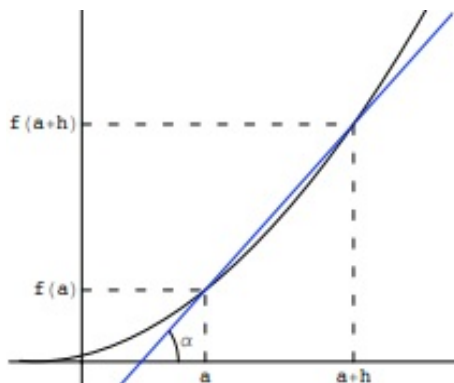


Figura 4.1: Recta secante a la curva $y = f(x)$. Fuente: Payá, R. (2014)

Por otro lado, como vemos en la figura anterior, es sencillo comprobar que las pendientes de las rectas secantes se calculan de la siguiente manera,

$$m_h = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Así, tenemos que

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

es la definición de derivada de f en a . Luego la derivada de f en un punto a , cuando existe, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La derivada es igual a la tangente del ángulo que se muestra en la siguiente figura.

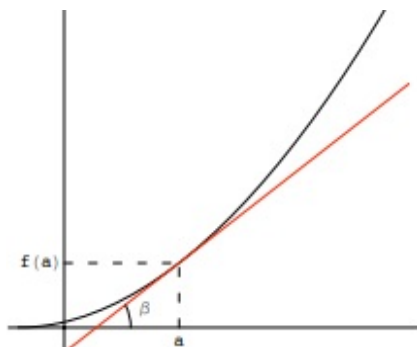


Figura 4.2: Recta tangente a la curva $y = f(x)$. Fuente: Payá, R. (2014)

La ecuación de la recta tangente a la función f en el punto $(a, f(a))$ dada en (4.1) vendrá dada por:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

En particular, la recta tangente es horizontal si y sólo si $f'(a) = 0$. Si $f'(a) \neq 0$, entonces la recta normal a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ no es vertical y su ecuación es

$$y = f(a) - \left(\frac{1}{f'(a)}\right)(x - a).$$

4.3. Derivada de una función

En esta sección, vamos a estudiar el concepto de derivada de una función real de variable real en un punto dado, las derivadas laterales, analizaremos la relación entre continuidad y derivabilidad y por último, proporcionaremos la definición de función derivada.

Comenzaremos explicando qué es la derivada de una función en un punto.

Definición 1. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea el punto $a \in A \cap A'$, donde A es un abierto de $\mathbb{R}$ y A' representa el conjunto de los puntos de acumulación de A . Diremos que f es derivable en el punto a si existe el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En caso de existir, notaremos $f'(a)$ a dicho límite y el valor de este límite se denomina derivada de $f(x)$ en el punto a .

Equivalentemente, encontramos la definición de la derivada de una función en un punto como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en donde se realiza el cambio de variable $h = x - a$.

Cuando estudiamos la derivabilidad de una función en un punto, a veces nos encontramos con una función que tiene diferentes expresiones analíticas a ambos lados de dicho punto. En este caso, debemos estudiar los límites laterales de la función en este punto. Para ello, vamos a estudiar el siguiente concepto.

Definición 2. *Derivadas laterales*

Si el cociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tiene límite cuando $h \rightarrow 0$, con $h > 0$, es decir,

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

diremos que la función f tiene derivada por la derecha en el punto a y lo denotaremos por $f'(a^+)$.

Análogamente, si el cociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tiene límite cuando $h \rightarrow 0$, con $h < 0$, es decir,

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

la función f tiene derivada por la izquierda en el punto a y lo denotaremos por $f'(a^-)$.

La función f es derivable en el punto a si, y sólo si, existen las dos derivadas laterales y coinciden. En este caso,

$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-).$$

Esto se ve fácilmente con el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$.

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 0$. Para ello, calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vemos que dichas derivadas existen pero no coinciden, por lo tanto, la función f no es derivable en $x = 0$.

A continuación, vamos a estudiar si existe alguna relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función en un punto.

Proposición 1. (Condición necesaria) Si una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ es derivable en el punto $a \in A$, entonces f es continua en a .

Demostración.

Para que la función f sea continua en el punto a se ha de verificar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a) + f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a) \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado que, si una función es derivable en un punto, entonces dicha función es continua en dicho punto. □

Por el contrario, si una función f es continua en un punto no implica que f sea una función derivable. Esto lo podemos ver con el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$.

- Estudiamos la continuidad de f en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ entonces f es continua en $x = 0$.

- La derivabilidad de esta función ya la hemos estudiado en (4.2). Por lo que sabemos que f no es derivable en $x = 0$, ya que, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Para finalizar esta sección, vamos a extender el resultado de derivada en un punto a una función.

Definición 3. Sea una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto $A \subseteq \mathbb{R}$, si f es derivable en todos los puntos del intervalo A (f es derivable $\forall x \in A$), la derivada en cada punto x perteneciente a dicho intervalo A viene dada por una función denominada función derivada de f y se denota por f' o Df . La función derivada $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La función derivada no debe confundirse con la derivada de una función en un punto, ya que ésta es un número y la función derivada es una función.

4.4. Reglas de derivación

En esta sección, se introducen algunas reglas que nos permitirán calcular la derivada de cualquier función de una variable. La definición de derivada no es práctica a la hora de calcular derivadas de funciones complicadas. Por ello, vamos a calcular las derivadas de dichas funciones de una forma mucho más fácil, utilizando las reglas de derivación. Las reglas de derivación están basadas en dos herramientas fundamentales: la primera es el álgebra de derivadas (comportamiento de las derivadas ante las operaciones de suma, producto, cociente, composición e inversa) y la segunda es el calculo de derivadas de funciones elementales.

4.4.1. Álgebra de derivadas

Dadas dos funciones $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en el mismo punto $a \in A \cap A'$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Derivada del producto de una constante c por una función

La función $c \cdot f$ es derivable $\forall c \in \mathbb{R}$, y su derivada es

$$(cf)' = cf'$$

2. Derivada de la suma de funciones

La derivada de la función $f + g$ es

$$(f + g)' = f' + g'$$

3. Derivada del producto de funciones

La derivada de la función $f \cdot g$ es

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

4. Derivada del inverso de una función

Si $g(a) \neq 0$, $\forall a \in A$, la derivada de la función $\frac{1}{g}$ es

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

5. Derivada del cociente de funciones

Si $g(a) \neq 0$, $\forall a \in A$, la derivada de la función $\frac{f}{g}$ es

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Demostración.

1. Sea $a \in A$, aplicando la definición de derivada tenemos

$$\begin{aligned} (cf)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \\ &= c \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a) \end{aligned}$$

2. Sea $a \in A$, tenemos aplicando la definición de derivada que

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

3. Sea $a \in A$, aplicando la definición de derivada y que f y g son funciones continuas en el punto a tenemos que

$$\begin{aligned}
 (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\
 &= g(a)f'(a) + f(a)g'(a)
 \end{aligned}$$

4. Si $g(a) \neq 0$, aplicando la definición de derivada y que f y g son funciones continuas en el punto a tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1/g)(x) - (1/g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{x - a} \frac{1}{g(x)g(a)} = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}
 \end{aligned}$$

5. Si $g(a) \neq 0$, aplicando la definición de derivada y las dos propiedades anteriores, tenemos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \frac{1}{g})(x) - (f \frac{1}{g})(a)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \frac{1}{g(x)} - f(a) \frac{1}{g(x)} + f(a) \frac{1}{g(x)} - f(a) \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \\
 &= \frac{1}{g(a)} f'(a) + f(a) \frac{-g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}
 \end{aligned}$$

□

Para finalizar, vamos a estudiar las últimas reglas básicas para el cálculo de derivadas. Por ello, presentaremos a continuación dos teoremas con los que obtendremos la derivada de la función compuesta y la función inversa.

Teorema 1. Regla de la cadena

Sea una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A \cap A'$, donde A es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y A' son los puntos de acumulación de A . Sea $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ otra función con $f(A) \subseteq B$ siendo B un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y supongamos que g es derivable en $b = f(a) \in B \cap B'$ siendo B' los puntos de acumulación de B . Entonces $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a y se tiene que

$$(g \circ f)'(a) = (g(f(a)))' = g'(f(a))f'(a).$$

Demostración.

Consideramos la función $\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

Como g es derivable en b (donde $b = f(a)$) se tiene que

$$\lim_{y \rightarrow b} \Phi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = g'(b) = \Phi(b)$$

luego Φ es continua en b . Al ser f continua en a (por ser derivable en a), la función $\Phi \circ f$ es continua en a (por ser la composición de funciones continuas), siendo

$$\lim_{x \rightarrow a} (\Phi \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \Phi(f(x)) = \Phi(f(a)) = \Phi(b) = g'(b).$$

Además $\Phi(y)(y - b) = g(y) - g(b)$, $\forall y \in B$.

Para $x \in A \setminus \{a\}$, donde $A \setminus \{a\}$ es el conjunto de puntos de A distintos de a , tomando $y = f(x) \in f(A) \subset B$ y $b = f(a)$ tenemos aplicando la definición de derivada que

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Phi(f(x))(f(x) - f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \Phi(f(x)) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a) \end{aligned}$$

□

Teorema 2. Función inversa

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Sea $B = f(A)$ y consideramos la función inversa $f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ entonces $b = f(a) \in B \cap B'$ y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en b

2. f^{-1} es derivable en b

En el caso de que sean ciertas dichas afirmaciones, se tiene

$$(f^{-1})' \cdot (f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Demostración.

Primero comprobaremos que $f(a) = b \in B \cap B'$.

Para ello, tomaremos una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y $a_n \neq a$ tal que $\{a_n\} \rightarrow a$. Entonces por la continuidad de la función f en a tenemos que $\{f(a_n)\} \rightarrow f(a)$, $f(a_n) \in B$ y por ser f inyectiva tenemos que $f(a_n) \neq f(a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos una sucesión de puntos de B distintos de b que converge a b , es decir, $f(a) = b \in B \cap B'$.

Ahora vamos a probar la equivalencia.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos de B distintos de b , tal que $\{y_n\} \rightarrow b$. Tomando $x_n = f^{-1}(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de a , por la continuidad de f^{-1} en el punto b tenemos que $\{x_n\} \rightarrow f^{-1}(b) = a$ y por la derivabilidad de f en a obtenemos

$$\left\{ \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right\} = \left\{ \frac{y_n - b}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)} \right\} \rightarrow f'(a).$$

Como $f'(a) \neq 0$, tenemos

$$\left\{ \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} \right\} \rightarrow \frac{1}{f'(a)}$$

entonces f^{-1} es derivable en b .

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponemos que f^{-1} es derivable en b , entonces f^{-1} es continua en b . Para probar que $f'(a) \neq 0$, aplicamos la regla de la cadena a $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x \in A$. Entonces, $(f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$, por lo que $f'(a) \neq 0$.

□

4.4.2. Derivadas de funciones elementales

A continuación, se muestran las derivadas de las funciones elementales.

	$f(x)$	$f'(x)$	
Función constante	k	0	$k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
Función identidad	x	1	$\forall x \in \mathbb{R}$
Función potencia	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Función radical	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\forall x \in \mathbb{R}_0^+$
Función logarítmica	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\forall x \in \mathbb{R}^+$
	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$a > 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$
Función exponencial	e^x	e^x	$\forall x \in \mathbb{R}$
	a^x	$a^x \ln(a)$	$a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Función seno	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Función coseno	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Función tangente	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Función arcoseno	$\arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in [-1, 1]$
Función arcocoseno	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in [-1, 1]$
Función arcotangente	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Función seno hiperbólico	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Función coseno hiperbólico	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Función tangente hiperbólica	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Función arcoseno hiperbólico	$\text{arcsenh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\forall x \in [-1, 1]$
Función arcocoseno hiperbólico	$\text{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\forall x > 1$
Función arcotangente hiperbólico	$\text{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in (-1, 1)$

Tabla 4.1.: Tabla de derivadas. Fuente: Elaboración propia

Demostración.

■ **Derivada de la función constante**

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = k \longrightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función identidad**

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = x \longrightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función potencia**

$$1. f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, demostramos por inducción sobre n

- i) Para $n = 1 \longrightarrow f(x) = x^1 = x \implies f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$
- ii) Suponemos cierto para $n - 1 \longrightarrow f(x) = x^{n-1} \implies f'(x) = (n-1)x^{n-2}$
- iii) Para $n \longrightarrow f(x) = x^n = x \cdot x^{n-1} \implies$ aplicando la derivada del producto $f'(x) = 1 \cdot x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$

$$2. f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \\ &= \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función radical**

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \frac{1}{n}x^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} = \frac{1}{n}x^{(n-1)\left(\frac{-1}{n}\right)} = \frac{1}{n}[x^{(n-1)}]^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

■ **Derivada de la función logarítmica**

$$1. \quad f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \end{aligned}$$

$$\text{Sea } n = \frac{h}{x} \implies h = nx \quad \text{y} \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \frac{1}{x}, \text{ si } h \rightarrow 0, n \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow 0} \ln\left((1+n)^{\frac{1}{n} \frac{1}{x}}\right) = \lim_{n \rightarrow 0} \ln\left(\left((1+n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow 0} \ln\left((1+n)^{\frac{1}{n}}\right) = \\ &= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{x} \ln(e) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$2. \quad f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

■ **Derivada de la función exponencial**

$$1. \quad f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \end{aligned}$$

Sea $n = e^h - 1 \implies n + 1 = e^h \implies \ln(n + 1) = \ln(e^h) \implies \ln(n + 1) = h$, si $h \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= e^x \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{\ln(n + 1)} = e^x \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n}n}{\frac{1}{n}\ln(n + 1)} = e^x \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{n}\ln(n + 1)} = \\ &= e^x \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + n)^{\frac{1}{n}}} = e^x \frac{1}{\ln(\lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}})} = e^x \frac{1}{\ln(e)} = e^x \end{aligned}$$

$$2. f(x) = a^x = e^{x \ln(a)} \longrightarrow f'(x) = a^x \ln(a), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x \ln(a)})' = e^{x \ln(a)} (x \ln(a))' = e^{x \ln(a)} \ln(a) = \\ &= e^{\ln(a^x)} \ln(a) = a^x \ln(a) \end{aligned}$$

■ Derivada de la función seno

$$f(x) = \text{sen}(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen}(x)}{h} =$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica,

$\text{sen}A - \text{sen}B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\text{sen}(\frac{A-B}{2})$ y que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos(\frac{x+h+x}{2})\text{sen}(\frac{x+h-x}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\text{sen}(\frac{h}{2})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \frac{\text{sen}(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

■ Derivada de la función coseno

$$f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h} =$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

y que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} -\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right) = -\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función tangente**

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aplicando la regla de la derivada del cociente de dos funciones y la identidad trigonométrica $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función arcoseno**

$$f(x) = \arcsen(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

Aplicando la regla de la derivada de una función inversa y la identidad trigonométrica $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, tenemos

$$y = f(x) = \arcsen(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = \operatorname{sen}(y) \implies$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\operatorname{sen}(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

■ **Derivada de la función arcocoseno**

$$f(x) = \arccos(x) \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

Aplicando la regla de la derivada de una función inversa y la identidad trigonométrica $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, tenemos

$$y = f(x) = \arccos(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = \cos(y) \implies$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos(y))'} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

■ **Derivada de la función arcotangente**

$$f(x) = \arctan(x) \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Aplicando la regla de la derivada de una función inversa y la identidad trigonométrica $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, tenemos

$$y = f(x) = \arctan(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = \tan(y) \implies$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(\tan(y))'} = \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}\right)'} = \frac{1}{\frac{\cos^2(y) + \operatorname{sen}^2(y)}{\cos^2(y)}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(y)}{\cos^2(y)} + \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{\cos^2(y)}} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función seno hiperbólico**

$$f(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \longrightarrow f'(x) = \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ &= \cosh(x) \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función coseno hiperbólico**

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \longrightarrow f'(x) = \operatorname{senh}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \\ &= \operatorname{senh}(x) \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función tangente hiperbólica**

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)}{\cosh^2(x)} = \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \end{aligned}$$

■ **Derivada de la función arcoseno hiperbólica**

$f(x) = \operatorname{arcsenh}(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in [-1, 1]$ Aplicando la regla de la derivada de una función inversa y la identidad trigonométrica $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, tenemos

$$y = f(x) = \operatorname{arcsenh}(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = \sinh(y) \implies$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sinh(y))'} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

■ **Derivada de la función arcocoseno hiperbólica**

$$f(x) = \operatorname{arccosh}(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$$

Aplicando la regla de la derivada de una función inversa y la identidad trigonométrica $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, tenemos

$$y = f(x) = \operatorname{arccosh}(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = \cosh(y) \implies$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\cosh(y))'} = \frac{1}{\sinh(y)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(y) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

■ **Derivada de la función arcotangente hiperbólica**

$$f(x) = \operatorname{arctanh}(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$$

Aplicando la regla de la derivada de una función inversa y la identidad trigonométrica $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, tenemos

$$y = f(x) = \operatorname{arctanh}(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) = \tanh(y) \implies$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(\tanh(y))'} = \frac{1}{\left(\frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}\right)'} = \frac{1}{\frac{\cosh^2(y) - \sinh^2(y)}{\cosh^2(y)}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\cosh^2(y)}{\cosh^2(y)} - \frac{\sinh^2(y)}{\cosh^2(y)}} = \frac{1}{1 - \tanh^2(y)} = \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

□

4.5. Derivadas sucesivas

En esta sección, vamos a proponer una forma de calcular iteradamente las derivadas sucesivas $(f', f'', f''', \dots)$. Para ello, partiremos de una función que sea n -veces derivable.

Definición 4. Sea una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en cada punto del intervalo abierto A . Si la función derivada $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en cada punto del intervalo A , diremos que f es dos veces derivable en $a \in A$. A la derivada $(f')'$ se le llama derivada segunda de f o derivada de segundo orden de f y lo denotaremos por f'' .

De esta forma, podemos definir sucesivamente, la derivada tercera, la derivada cuarta, $\dots$, la derivada n -ésima de f (derivada de orden n).

4.5.1. Fórmula de Leibniz

Para el cálculo de derivadas n -ésimas es de gran utilidad la fórmula de Leibniz, la cual nos permite obtener la derivada de orden n de un producto de dos funciones mediante las derivadas sucesivas de los factores.

Teorema 3. Sean f y g dos funciones que admiten derivada de orden n en un cierto intervalo abierto A , entonces $(f \cdot g)$ admite también derivada de orden n en dicho intervalo A , y su derivada n -ésima viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} = \\ &= \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n)} \end{aligned}$$

Demostración.

Hacemos la demostración por inducción sobre n .

■ Para $n = 1$:

$$(f \cdot g)' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(1-k)} g^{(k)} = \binom{1}{0} f' g + \binom{1}{1} f g' = f' g + f g'$$

- Suponemos cierto para $n - 1$:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n-1)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(n-1-k)} g^{(k)} = \\ &= \binom{n-1}{0} f^{(n-1)} g + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)} g' + \dots + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n-1)}\end{aligned}$$

- Demostramos que es cierto para n :

$$\begin{aligned}((f \cdot g)^{(n-1)})' &= (f \cdot g)^{(n)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [f^{(n-k)} g^{(k)} + f^{(n-1-k)} g^{(k+1)}] = \\ &= \binom{n-1}{0} f^{(n)} g + \binom{n-1}{0} f^{(n-1)} g' + \binom{n-1}{1} f^{(n-1)} g' + \\ &+ \binom{n-1}{1} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n-1}{n-1} f' g^{(n-1)} + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n)} = \\ &= \binom{n-1}{0} f^{(n)} g + \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right) f^{(n-1)} g' + \\ &+ \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right) f^{(n-2)} g'' + \dots + \\ &+ \left(\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right) f' g^{(n-1)} + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n)} =\end{aligned}$$

Utilizando las siguientes propiedades $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ y $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1$ finalmente tenemos

$$\begin{aligned}&= \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \\ &+ \binom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f g^{(n)}\end{aligned}$$

□

4.6. Aplicaciones de las derivadas

Las aplicaciones de las derivadas son muy numerosas. En este apartado se expondrán algunos ejemplos del uso de las derivadas tanto dentro del área de las Matemáticas como en otras disciplinas relacionadas.

Comenzaremos estudiando algunos resultados relacionados con los conceptos de monotonía, máximos y mínimos y la regla de l'Hôpital. Finalmente, se proporcionaran diversas utilidades de las derivadas en áreas como Física, Biología, etc.

4.6.1. Monotonía.

El estudio de la monotonía de una función nos dice en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. Esto es algo que se puede ver fácilmente si la función es derivable.

Proposición 2. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en A , donde A es un intervalo abierto.*

1. f es creciente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in A$
2. f es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in A$
3. f es constante $\Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in A$
4. Si $f'(x) > 0, \forall x \in A \Rightarrow f$ es estrictamente creciente
5. Si $f'(x) < 0, \forall x \in A \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Proposición 3. *Sea A un intervalo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en A . Supongamos que $f'(x) \neq 0, \forall x \in A$, entonces f es estrictamente monótona y $f'(x) > 0, \forall x \in A$ o $f'(x) < 0, \forall x \in A$.*

4.6.2. Extremos absolutos y extremos relativos.

Ahora vamos a estudiar los puntos en los que cambia la monotonía de una función. La derivada de una función nos es de gran ayuda a la hora de estudiar los extremos relativos de una función.

Definición 5. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, con A un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Entonces:*

- Diremos que f tiene un máximo absoluto en $a \in A$ si $f(a) \geq f(x)$, para cualquier $x \in A$.
- Diremos que f tiene un mínimo absoluto en $a \in A$ si $f(a) \leq f(x)$, para cualquier $x \in A$.

Definición 6. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

- Diremos que f tiene un máximo relativo en $a \in A$ si existe un $r > 0$ tal que
 - $]a - r, a + r[\subseteq A$
 - $f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in]a - r, a + r[$
- Diremos que f tiene un mínimo relativo en $a \in A$ si existe un $r > 0$ tal que
 - $]a - r, a + r[\subseteq A$
 - $f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in]a - r, a + r[$

Utilizaremos la expresión de extremo relativo para referirnos tanto a un máximo relativo como a un mínimo relativo.

Si una función tiene un extremo relativo en un punto donde es derivable, intuitivamente podemos decir que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente debe ser horizontal. Esta idea nos lleva a la siguiente proposición, que nos da una condición necesaria para que una función derivable en un punto alcance un extremo relativo en dicho punto:

Proposición 4. (Condición necesaria de extremo relativo)

Sea una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y sea el punto $a \in A$. Supongamos que f alcanza un extremo relativo en a y que f es derivable en a , entonces $f'(a) = 0$ (punto crítico).

Demostración.

Supongamos que f tiene un máximo relativo en a . Entonces hay un número $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subseteq A$ y $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in]a - r, a + r[$. Como f es derivable en a y el punto a no es un extremo del intervalo A , se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Entonces,

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \end{aligned} \right\} \implies f'(a) = 0$$

Si por el contrario suponemos que f tiene un mínimo relativo en el punto a , usamos que $-f$ tiene un máximo relativo en a y es derivable en a , obteniendo que $0 = (-f)'(a) = -f'(a)$, es decir, $f'(a) = 0$.

□

Esta condición nos dice que hay que buscar los extremos relativos de una función derivable en un intervalo abierto, entre los puntos críticos de la función dentro de dicho intervalo. Cabe destacar, que un punto crítico no siempre es extremo local.

Para aprovechar esta condición necesaria de extremo relativo, vamos a estudiar la existencia de extremos relativos con el Teorema de Rolle.

Teorema 4. Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, continua en dicho intervalo y derivable en $]a, b[$. Supongamos que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración.

Por el Teorema de Weierstrass, al ser f una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, tenemos que f alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en dicho intervalo. Es decir, $f([a, b]) = [\min(f), \max(f)]$, siendo $\min(f) = f(\alpha)$ y $\max(f) = f(\beta)$ con $\alpha, \beta \in [a, b]$.

1. Si $\alpha \in]a, b[$ entonces f tiene un mínimo relativo en α y es derivable en α , por lo que $f'(\alpha) = 0$.
2. Si $\beta \in]a, b[$, entonces f tiene un máximo relativo en β y es derivable en β , por lo que $f'(\beta) = 0$.
3. Si $\alpha, \beta \in \{a, b\}$, por la hipótesis del teorema $f(a) = f(b)$ tenemos que el $\min(f) = \max(f)$, entonces f es constante y por lo tanto $f'(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.

□

El Teorema de Rolle se utiliza para encontrar las raíces de una ecuación, ya que relaciona los ceros de una función derivable con los de su derivada. Es decir, si tenemos dos ceros de la función, entonces el Teorema de Rolle nos asegura que existe algún cero de la derivada entre ellos. Por lo que, entre dos ceros consecutivos de la derivada, únicamente puede haber un cero de la función o ninguno. Si encontramos los ceros de la derivada entonces la función tiene, como mucho un cero más.

Con ayuda de los resultados anteriores podemos demostrar fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 5. Teorema del Valor Medio

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe un punto $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

es decir,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}.$$

Demostración.

Consideramos la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b - a), \quad \forall x \in [a, b].$$

Como vemos, g es una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ con

$$g'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b - a), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Es inmediato ver que

$$\left. \begin{aligned} g(a) &= (f(b) - f(a))a - f(a)(b - a) \\ g(b) &= (f(b) - f(a))b - f(b)(b - a) \end{aligned} \right\} \implies g(a) = g(b)$$

Luego, aplicando el Teorema de Rolle a la función g tenemos que existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$, es decir, $0 = f(b) - f(a) - f'(c)(b - a) \implies f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

□

Este teorema afirma que el incremento medio de una función en un intervalo es igual a su derivada en algún punto de la misma. La interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio nos dice que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ (estando c comprendido entre a y b), es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Podemos ver que el teorema de Rolle y el teorema del Valor Medio son resultados equivalentes. El Teorema del Valor Medio lo hemos deducido del Teorema de Rolle, pero el Teorema de Rolle se puede incluir como un caso particular del Teorema del Valor Medio, es decir, si se supone $f(a) = f(b)$ la igualdad $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ implica obviamente que $f'(c) = 0$.

Obtenemos una generalización del Teorema del Valor Medio con el siguiente teorema.

Teorema 6. Teorema del Valor Medio generalizado (Cauchy)

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Entonces existe al menos un punto $c \in]a, b[$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Demostración.

Definimos la función $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siendo

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

La función h es continua en $[a, b]$ por serlo las funciones f y g , y también es derivable en $]a, b[$ por serlo f y g , siendo

$$h'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) - [f(b) - f(a)]g'(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Vemos que $h(a) = h(b)$,

$$\begin{aligned} h(a) &= [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) = \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) \\ h(b) &= [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) = \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) = -f(b)g(a) + g(b)f(a) \end{aligned}$$

Por el Teorema de Rolle, sabemos que existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} h'(c) &= [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c) \\ [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c) &= 0 \\ [f(b) - f(a)]g'(c) &= [g(b) - g(a)]f'(c) \end{aligned}$$

□

4.6.3. Regla de L'Hôpital

Una aplicación de la derivada al cálculo de límites es la regla de L'Hôpital, la cual se puede demostrar a partir del teorema anterior. Esta regla es de gran utilidad, pues nos permite calcular límites que presentan indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Primera regla de L'Hôpital

Sea A un intervalo y $a \in A$. Sean $f, g : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $A \setminus \{a\}$, es decir, en un entorno reducido del punto $a \in A$. Supongamos que

- $g'(x) \neq 0, \forall x \in A \setminus \{a\}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

entonces $g(x) \neq 0, \forall x \in A \setminus \{a\}$.

Además, si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, -\infty$, entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L, +\infty, -\infty$.

Segunda regla de L'Hôpital

Sea A un intervalo y $a \in A$. Sean $f, g : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables. Supongamos que

- $g'(x) \neq 0, \forall x \in A \setminus \{a\}$
- $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$

entonces existe $\rho > 0$ tal que, para $0 < |x - a| < \rho$, se tiene $g(x) \neq 0, x \in A$.

Además, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, -\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L, +\infty, -\infty$.

4.6.4. Otras aplicaciones

Las derivadas se pueden aplicar en muchos otros campos de la ciencia fuera de las Matemáticas. Por ejemplo:

- En Física, se define la velocidad como la derivada del espacio con relación al tiempo $v = e'(t)$ y la aceleración como la derivada de la velocidad con relación al tiempo, o la derivada segunda del espacio con relación al tiempo $a = v'(t) = e''(t)$.
- En Biología, se define la tasa instantánea de crecimiento como la derivada del número de individuos de una población en relación al tiempo $TIC = \frac{dn}{dt}$, es decir la rapidez con que crece o disminuye una población en un momento específico.
- En Termodinámica, se define la capacidad calorífica C de un cuerpo como la derivada de la cantidad de calor Q aplicada a un cuerpo respecto a la variación de temperatura T , $C = \frac{dQ}{dT}$.
- En Óptica, se define la iluminación como la derivada del flujo luminoso incidente con respecto al área $E = \frac{dL}{dA}$.

- En Electricidad, se define la corriente eléctrica instantánea i en un circuito como la derivada de la carga que circula con respecto al tiempo, $i = \frac{dq}{dt}$.
- En Economía, se define el costo marginal como la razón instantánea de cambio del costo respecto al número de artículos producidos o bienes ofrecidos, $C_{mg} = \frac{dC}{dx}$.
- En Hidrostática, se define la presión como la derivada de la fuerza normal que se ejerce con respecto al área de un fluido $p = \frac{dF}{dA}$.

Capítulo 5

FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

En este capítulo, vamos a hacer un breve análisis de algunos artículos de investigaciones en didáctica de las Matemáticas que están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las derivadas. Estos artículos nos pueden ser de gran ayuda a la hora de realizar la unidad didáctica, ya que lograremos obtener un conocimiento más profundo sobre este tema.

Concretamente, vamos a analizar varios artículos en dónde se estudia la dificultad de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada, así como el estudio de las tareas que se proponen en los libros de texto relacionadas con este tema. Esto es importante, ya que podremos hacer hincapié en ello a la hora de desarrollar nuestra unidad didáctica con el fin de reducir dichas dificultades en el alumnado. Con el estudio de estos artículos no se pretende elaborar un estado de la cuestión, sino hacer un breve análisis en el que se destaquen las partes más importantes de estos trabajos.

Para realizar este estudio nos hemos centrado en los siguientes tres artículos:

- Sánchez–Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.
- García, M., Gavilán, J.M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. *Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 219-235.
- Vargas, M.F., Fernández-Plaza, J.A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2020). La

derivada en los libros de texto de 1° de bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. AIEM, 18, 87-102.

Principalmente, los tres artículos centran su investigación en Bachillerato, lo cual es muy beneficioso para el presente TFM, ya que la unidad didáctica está enfocada a estudiantes de Bachillerato. La razón por la que se han seleccionado estos artículos es porque la investigación realizada en cada uno de ellos está relacionada con el tema que estamos tratando a lo largo de todo este trabajo: las derivadas.

En el primer artículo, Sánchez–Matamoros et al. (2008), se hace una recopilación de diferentes investigaciones en Matemática Educativa para identificar las dificultades que presentan los estudiantes de Bachillerato y primeros años de universidad en la comprensión del concepto de derivada. En el segundo artículo, García et al. (2012), se describe la perspectiva y la práctica del profesor a la hora de introducir el concepto de derivada a los alumnos de Bachillerato. Y el último artículo, Vargas et al. (2020), se estudia el significado atribuido al concepto de derivada en los libros de texto de 1° de Bachillerato, a través del análisis de las tareas que se proponen en ellos.

Las diferentes investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, verifican las dificultades que se presentan a la hora de enseñar y aprender dichos conceptos. Por ello, vamos a analizar la comprensión que tienen los alumnos sobre el concepto de derivada, la perspectiva de la práctica del profesor y las tareas propuestas en los libros de texto.

5.1. Comprensión del alumnado sobre el concepto de derivada

Sánchez–Matamoros et al. (2008) muestran que la complejidad que representa el concepto de derivada, hace que las diversas investigaciones sobre su comprensión hayan sido abordadas desde diferentes perspectivas. Por ello, tratan de hacer una recopilación de las investigaciones realizadas sobre este tema.

Estos investigadores buscan aportar información útil con el objetivo de aumentar la comprensión de cómo los estudiantes de secundaria y primeros años de universidad dan significado y utilizan el concepto de derivada.

Según Artigue (1995), aunque los estudiantes puedan aprender a realizar de forma mecánica ciertos cálculos de derivadas y a resolver problemas básicos, éstos presentan dificultades para lograr una buena comprensión de los conceptos. Estas dificultades para manejar el significado de derivada, tanto a través de su interpretación geométrica como de su expresión analítica, nos

indican que estos alumnos han construido un significado parcial de este concepto. Es importante adquirir un buen significado del concepto de derivada en los primeros cursos, si no en cursos superiores se podrían generar mayores dificultades, ya que es complicado cambiar estas nociones una vez establecidas unas ideas previas. Por ello, es necesario entender los procesos mediante los cuales los estudiantes dan significado al concepto de derivada.

Los autores en base a las diversas perspectivas teóricas que adoptan las investigaciones didácticas, se centran en las aproximaciones de elementos de cognición (como el esquema conceptual, las teorías de la reificación, las ideas de una aproximación piagetiana sobre el conocimiento y su desarrollo y el papel de las representaciones y, actividades en el desarrollo de significados) y en la aproximación teórica llamada socioepistemología (la cual “considera al concepto de derivada como un complejo de prácticas de naturaleza social que le den sentido y significado”) para analizar la información según los siguientes aspectos:

- “Errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada: la noción de razón de cambio.”

Según Orton (1983), los alumnos cometían tres tipos de errores a la hora de realizar las tareas. Éstos son los relacionados con los conceptos, cuando no tenían en cuenta los datos presentados en el problema, y si los conceptos a utilizar eran comprendidos. También se observa cómo la comprensión de la razón de cambio depende del tipo de función empleada, ya que los alumnos responden correctamente cuando las funciones son lineales pero no ocurre lo mismo con funciones no lineales. En consecuencia, Orton concluyó que las dificultades con la idea de razón de cambio podían tener origen en una débil comprensión del concepto de función.

Este estudio, destaca la importancia de analizar el siguiente aspecto.

- “Relación entre la razón de cambio y el cociente incremental. La tasa de variación.”

Esta relación se ha estudiado con la noción de esquema conceptual (Tall, 1989) y la teoría de la reificación (Sfard, 1992).

- Siguiendo la perspectiva de Tall (1989), Azcárate (1990) estudió el concepto de derivada de una función en un punto a través de la idea de recta tangente. Durante este estudio se observó que los estudiantes cometían dos errores, confundían “la pendiente de una recta con su ordenada en el origen” y daban “el valor de la ordenada en el origen como el valor de la pendiente de la recta”.

- La teoría de la reificación (“habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva”) plantea dos enfoques de un concepto, uno operacional (procesos, algoritmos, etc.) y otro estructural (se entienden los conceptos como objetos abstractos). De acuerdo con esta teoría, Zandieh (1997, 2000) realizó un estudio teniendo en cuenta diferentes representaciones del concepto de derivada (gráfica, verbal, física y simbólica) y observó que los estudiantes parten de una comprensión parcial, la cual van completando pero no logran llegar a una comprensión completa del concepto de derivada debido a que no relacionan este concepto en diferentes contextos.

La comprensión de un concepto se refleja en la capacidad de comparar definiciones equivalentes de dicho concepto y sus diferentes representaciones y propiedades.

- “Sistemas de representación como herramientas para pensar sobre la derivada.”

Vamos a analizar el papel que desempeñan las representaciones en la construcción e introducción del concepto de derivada.

Ferrini-Mundy y Graham (1994) analizaron las dificultades que presentaban los estudiantes a la hora de relacionar las gráficas de una función y la gráfica de su derivada. Este estudio mostró que los estudiantes son buenos a la hora de aplicar reglas para determinar derivadas pero confirmó que apenas establecían relación entre sus conocimientos conceptuales y procedimentales y también, que tenían diferentes ideas del concepto de derivada en el contexto gráfico y en el analítico.

A partir de este estudio, surgieron diferentes perspectivas teóricas para analizar la relación entre las gráficas de la función y su derivada. Algunas investigaciones siguen un modelo de cognición neopiagetiano, el cual entiende por acción a aquella “transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo”. Otra perspectiva que contrasta con la mencionada anteriormente, entiende que el “individuo percibe a un proceso como algo interno y bajo su control”. En base a esto, Asiala et al. (1997) analizaron la comprensión de los estudiantes a la hora de relacionar las gráficas de una función y su derivada. Para ello, siguieron según el modelo APOE una “descomposición genética del concepto” de derivada. Los resultados de la investigación, concluyeron que una coordinación en la enseñanza entre las representaciones gráficas y analíticas, y la relación entre los significados gráficos de una función y su derivada,

ayudan a los estudiantes a relacionar ambos modos de representación. En este sentido, Font (2000) hizo un estudio en el que diseñó una unidad didáctica dirigida a alumnos de primer año de Bachillerato, en la que los alumnos podían coordinar diferentes sistemas de representación. Como resultado, no sólo se mostró la dificultad con los conocimientos previos que tenían los alumnos, sino la considerable complejidad semiótica que presenta la definición de función derivada. También se muestra que para facilitar la comprensión del concepto de derivada al alumnado, la enseñanza de este concepto debe ir combinada con las aproximaciones de pendiente de la recta tangente, el límite del cociente incremental y la tabla de valores.

- “Lo local y lo global: la relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$.”

Éste es otro aspecto importante en la comprensión del concepto de derivada. Badillo (2003) dio a conocer con su estudio los diferentes significados de la idea de derivada en un punto y la función derivada. Como resultado de su trabajo, señaló que entender el concepto de función derivada en un punto, no implica entender el concepto de función derivada, sin embargo, el proceso contrario sí se daba. También se percató de que la comprensión del esquema de la derivada lleva a la relación entre la derivada de una función en un punto (lo local) y la función derivada (lo global).

- “El desarrollo de la comprensión del esquema de derivada.”

Otro aspecto a tener en cuenta en la comprensión de la definición de derivada es su desarrollo desde la idea de esquema. Para ello, se ha utilizado la teoría piagetiana. En la aproximación sobre el desarrollo de un esquema mediante las fases intra, inter y trans se define un esquema como “la estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema”.

Siguiendo esta aproximación piagetiana, Baker et al. (2000) realizó un estudio sobre la comprensión gráfica de la relación entre una función y su derivada. Se observó que el esquema gráfico (combinación de conceptos como derivada, continuidad, límites, etc.) varía de una persona a otra pero que todos pasan por los niveles de desarrollo del modelo de Piaget y García. Las dificultades que encontraron los estudiantes durante la realización de este estudio fueron las siguientes: existencia de

tangentes verticales y su significado, puntos cúspide en las gráficas de la función y su derivada y la eliminación de la condición de continuidad. Los resultados de la investigación de Backer revelaron que pocos alumnos entendían el concepto de segunda derivada, ya que no concebían las derivadas como una función. También se observó que algunos estudiantes trabajaban mediante la memorización de los conceptos sin entender su significado.

Sánchez-Matamoros (2004) realizó una investigación para explicar el desarrollo del esquema de derivada según la perspectiva piagetiana de los niveles intra, inter y trans. Para ello seleccionó a estudiantes de primero y segundo de bachillerato y a alumnos del primer año de la licenciatura de Matemáticas. Con esto pretendió analizar cómo resolvían problemas considerando el concepto de derivada, los modos de representación analítico y gráfico y el carácter global y puntual. Los niveles de desarrollo del esquema de derivada se realizaron tomando en cuenta las relaciones que establecían entre los elementos matemáticos y el uso que le daban los estudiantes al realizar los problemas. Los resultados del estudio indicaron que el desarrollo del esquema está vinculado a la capacidad de coordinar los conceptos para resolver problemas. Los resultados también destacaron que tras tres años de enseñanza del concepto de derivada, el 31 % de los alumnos solo son capaces de recordar de manera aislada el concepto de derivada.

Estos últimos dos estudios coinciden en que hay una construcción progresiva del esquema de derivada y que los modos de representación ayudan a la construcción de mecanismos de cambio de un nivel al siguiente.

- “Aplicación del concepto de derivada: el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.”

Un ejemplo de investigación en este campo es el estudio realizado por Clark et al. (1997) en el cual se siguió el marco teórico de APOE para desarrollar el esquema de la regla de la cadena. En él, se obtuvo información sobre como los estudiantes entendían el esquema de la regla de la cadena. Con estos datos Clark y sus colaboradores realizaron una descomposición genética de la regla de la cadena con la cual, se comprueba que los estudiantes pueden seguir unas pautas para construir esta aplicación.

Como podemos observar, todas estas investigaciones se centran en dos formas en la que los estudiantes llegan a comprender el concepto de derivada. La primera son las características que elaboran de los significados de

derivada y la segunda es cómo desarrollan estos significados. En cuanto al primero, vemos que los estudiantes no relacionan un proceso que está vinculado con la idea de derivada dado un contexto con el mismo proceso en otro contexto. Se cree que alcanzarán una comprensión completa cuando entiendan los significados en los diferentes contextos de razón, límite y función. También se observa que en la construcción que hacen los alumnos de los significados influyen los modos de representación gráfico y analítico. En cuanto al segundo aspecto, estas investigaciones muestran que el desarrollo de la idea de derivada está relacionada con la idea de derivada en un punto y la función derivada, al igual que ocurre con las relaciones entre los modos gráfico y analítico. También se observa que la construcción del esquema de derivada es progresiva y que los modos de representación contribuyen a crear relaciones entre los elementos matemáticos a la hora de resolver problemas o para utilizarlos en determinadas situaciones. Estos dos aspectos que se identificaron en la comprensión del concepto de derivada, las características del significado de este concepto y el esquema de derivada nos llevan a concluir que una forma para empezar a conocer el concepto de derivada es mediante las conexiones con otros conceptos como límite o función, los modos de representación gráfico y analítico y finalmente, a través de sus propiedades.

5.2. Perspectiva de la práctica del profesor de Matemáticas

Un docente debe tener los suficientes conocimientos didácticos-matemáticos para ser capaz de transmitir de manera adecuada los conceptos matemáticos que han de adquirir sus alumnos. A partir de las enseñanzas realizadas por el profesor se pueden explicar ciertos aspectos del aprendizaje de los estudiantes.

En este apartado trataremos de describir y explicar la práctica del profesor en la enseñanza de las derivadas considerando las condiciones de aprendizaje que el profesor crea para sus estudiantes.

García et al. (2012) utilizan como base la idea de la teoría APOS en la que el aprendizaje se apoya en el desarrollo de la idea piagetiana de abstracción reflexiva (meditar el significado de comprender un concepto y cómo lo pueden construir los alumnos), para considerar que la descripción y caracterización de las acciones, los discursos en el aula, las actividades y justificaciones que el profesor hace para explicar cómo sus enseñanzas pueden ayudar a sus estudiantes a generar de los mecanismos cognitivos de construcción de conocimiento nos pueden ayudar a entender la relación entre las perspectivas

y enseñanzas realizadas por los profesores. Para estudiar la perspectiva del profesor los autores de este estudio consideran la concepción del profesor sobre el aprendizaje matemático y su visión de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En esta investigación se siguió una metodología de corte cualitativo, haciendo un estudio de casos. El estudio se centra en la unidad didáctica que introduce el concepto de derivada. Esta organizada alrededor de los conceptos de derivada de una función en un punto, función derivada y operador derivada. Para introducir estos conceptos a partir de una función se generaliza un proceso para obtener la derivada de la función en un punto, variando los valores del punto se obtiene la función derivada y para finalizar, se generaliza lo anterior a diferentes funciones para obtener el operador derivada.

Para analizar los datos recogidos a través de varias entrevistas con el profesor en las que se recogían las reflexiones y el desarrollo de las clases, se establecen dos fases, una en la que se recogen informes sobre la planificación y la gestión del profesor; y otra, en la que se identifican segmentos de enseñanza en la que es posible identificar la modelización de un mecanismo de construcción por parte del profesor, de donde obtenemos una secuencia de segmentos de enseñanza que al agruparlos, modelan los mecanismos de construcción de los elementos del concepto de derivada y sus relaciones.

Estos resultados se muestran como un estudio de casos y señalan la relación entre la perspectiva de acción y la modelación de la descomposición genética del profesor para explicar su práctica. En ellos, se observa como el profesor pone los medios necesarios para que los estudiantes repitan acciones y reflexionen sobre sus resultados, con lo que está modelando el mecanismo de interiorización de los conceptos. De la misma manera, modeliza mecanismos de encapsulación, desencapsulación e inversión de conceptos como se puede ver en la figura, consiguiendo así que los estudiantes puedan organizar los diferentes procesos y objetos que forman el esquema de derivada.

Concluimos este estudio, identificando que la perspectiva de la práctica del profesor y la forma en que modeliza los mecanismos de construcción del conocimiento indican que la imagen que tienen los profesores sobre las matemáticas escolares y el aprendizaje tienen un papel fundamental en su práctica.

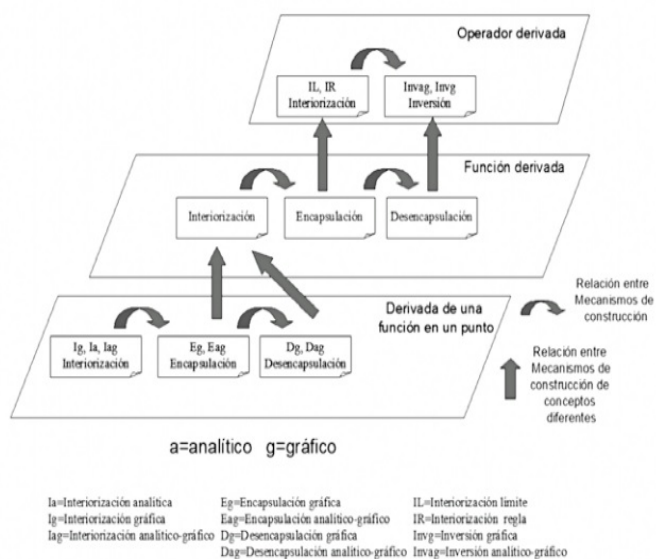


Figura 5.1: Modelación de la descomposición genética de la noción de derivada, identificada en la práctica del profesor. Fuente: García et al. (2012)

5.3. Análisis de las tareas propuestas en los libros de texto

Los libros de texto siempre han estado presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe a la gran empleabilidad que le dan los docentes, tanto como para plantear sus clases, como material de consulta, así como para usar las actividades, ejercicios y problemas que contienen.

Las investigaciones sobre los libros de texto se agrupan en tres categorías: análisis de diferentes libros, comparación de libros y el uso que le dan los estudiantes y profesores.

En Vargas et al. (2020) se describe el significado sobre el concepto de derivada que presentan cinco libros (editorial Anaya, Bruño, Edelvivies, Santillana y SM) de 1° de Bachillerato a través de las tareas que se proponen en ellos. Las tareas determinan la forma en la que los estudiantes piensan, desarrollan y usan los contenidos matemáticos. El objetivo de esta investigación es estudiar los aspectos sintácticos (forma), semánticos (significado) y cognitivos de las tareas propuestas sobre derivadas. Para ello, se realiza un análisis didáctico de los datos. Hay cuatro tipos de análisis didáctico, este trabajo se centra en dos de ellas: análisis de instrucción (estudio y diseño de

tareas) y análisis de significado de derivada.

Los autores de este artículo señalan que básicamente los cinco libros presentan los mismos contenidos exceptuando algunas diferencias entre ellos como por el ejemplo la forma de introducir el concepto de derivada. A la hora de analizar las tareas se sigue el sistema de categorías y subcategorías (p. 90-92) que ofrece el marco teórico mencionado anteriormente. En concreto, para el tema de derivadas, se crea una nueva clasificación por categorías complementaria a la anterior (p. 92). Según esta clasificación se muestran los siguientes resultados:

- Aspectos sintácticos: Respecto a la estructura de la tarea, encontramos pocos ítems abiertos. SM propone un proyecto final, Santillana y Anaya propone dos ítems y Edelvives uno. En cuanto al planteamiento inverso y directo, encontramos un predominio de las tareas directas, lo que nos sugiere que el objetivo es el aprender y aplicar procedimientos. En Anaya y Santillana encontramos 19 ítems de forma inversa, 12 en SM, 11 en Edelvives y 2 en Bruño. En lo referente a materiales, ningún libro emplea otro recurso que no sea papel y lápiz, exceptuando el caso de SM que precisa el uso de calculadora en 16 ítems. También destaca Bruño porque explica cómo utilizar el programa Wiris y el libro de Edelvives, que aparte de explicar Wiris también enseña Geogebra.
- Aspectos semánticos: El contenido planteado en los cinco libros es básicamente el mismo, exceptuando las representaciones de funciones que no aparecen en todos los libros. El contenido más abordado en general en todos los libros son las reglas de derivación y los extremos relativos. Los sistemas de representación más destacados son el simbólico y el verbal, sin embargo el menos empleado es el gráfico, que además coincide con las tareas que son más enriquecedoras para la comprensión del concepto de derivada. La situación en la que tienen aplicaciones las derivadas son muy diversas pero al analizar los libros se comprueba que predomina la aplicada dentro del campo de las matemáticas. Los libros de Anaya y Bruño son los que plantean menos diversidad de situaciones. El contexto permite ahondar en el significado del concepto de derivada. Se detectaron tres contextos al analizar las tareas, el algebraico-numérico, el geométrico y el aplicado. En los libros SM, Edelvives y Santillana el escaso contexto aplicado y el predominio del contexto algebraico. En cuanto al tipo de funciones encontramos de todo tipo aunque hay pocas funciones trigonométricas inversas y funciones definidas a trozos.
- Aspectos cognitivos: Las principales demandas son las del cálculo directo y el indirecto, lo que destaca la importancia que le dan a los

algoritmos y procedimientos. En cuanto a las representaciones encontramos que solo Anaya y Santillana las incluyen como aplicaciones de la derivada. SM, Edelvives y Bruño aplican las representaciones gráficas como apoyo visual.

Este sistema de categorías permite realizar un análisis de una forma más exhaustiva las tareas propuestas en los libros de texto, debido a que responden al objetivo principal de esta investigación que era identificar el significado de derivada a través de las tareas.

Como muestran los resultados, los libros de texto refuerzan el manejo de procedimientos y algoritmos matemáticos y le dan poca importancia al diseño de estrategias y el uso de herramientas matemáticas. También destaca que no se fomente el uso de las nuevas tecnologías.

Los libros de texto muestran el significado del concepto de derivada de una forma simbólica, dando a entender que la derivada consiste esencialmente en el cálculo de la función derivada.

Este análisis muestra como las tareas forman parte del aprendizaje de estudiante, pero son mayormente para reproducir algoritmos y memorizar. Sería conveniente que se incluyeran tareas en las que los alumnos tuvieran que razonar y pensar para obtener así un mayor rendimiento académico. Este análisis puede ser de gran utilidad para los docentes ya que pueden seleccionar un libro de texto para utilizarlo en sus clases teniendo en cuenta las características de las tareas que aparecen en él.

Capítulo 6

PROYECCIÓN DIDÁCTICA

6.1. Título

La unidad didáctica que vamos a desarrollar a continuación se titula “Derivadas” y se incluye, según los criterios establecidos en el Real Decreto 1105/2014, del 26 de Diciembre, en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I del curso académico de 1º de Bachillerato, correspondiente a la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Concretamente, la unidad didáctica se centra en los contenidos de la última parte del bloque 3: análisis.

6.2. Justificación

En este apartado, se explica el por qué se deben trabajar los contenidos de la presente unidad didáctica sobre derivadas.

La derivada de una función en un punto es una herramienta muy utilizada en diferentes ámbitos de la ciencia como pudimos ver al final del Capítulo 4. Por ello, es muy importante que los alumnos empiecen a conocer este concepto y tengan una idea clara de su significado de cara a su futuro profesional.

Como hemos visto en el Capítulo 5, los alumnos no suelen tener problemas a la hora de resolver o aplicar las reglas de derivación pero presentan grandes dificultades para comprender su significado. Por ello, en esta unidad didáctica se intentará hacer frente a este problema, pero siempre siguiendo los contenidos establecidos por el Real Decreto 1105/2014.

La presente unidad didáctica contiene los contenidos que se estudian en el bloque de análisis y, también, en el primer bloque sobre procesos, métodos y actitudes en matemáticas, que debe ser complementario al resto de bloques. En este apartado, nos vamos a centrar únicamente en el bloque de análisis,

del cual obtendremos los conceptos que vamos a estudiar en esta unidad didáctica. Dentro del bloque de análisis, nos vamos a centrar en los últimos contenidos, los cuales se corresponden con el presente tema sobre derivadas.

Estos contenidos se estudian en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I del curso de 1º de Bachillerato y se establecen tanto en la Orden de 14 de julio de 2016, como en el Real Decreto 1105/14, de 26 de diciembre. En concreto, los contenidos sobre este tema, según la Orden de 14 de julio de 2016 son los siguientes:

“Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto. Función derivada. Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.”

Asociados a estos contenidos encontramos el siguiente criterio de evaluación:

3.5. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones. CMCT, CAA.

Y por último, encontramos en el Real Decreto 1105/14, de 26 de diciembre, los estándares de aprendizaje evaluables asociados a los criterios de evaluación de los contenidos a estudiar:

3.5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real.

3.5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.

En relación con los criterios de evaluación que hemos mencionado anteriormente, observamos que los alumnos y las alumnas van a desarrollar con el estudio de los contenidos de esta unidad didáctica las siguientes competencias: CMCT y CAA.

Además de estas competencias, también se desarrollaran otras competencias como la competencia lingüística o la competencia digital. Las cuales son de gran ayuda para el desarrollo de la vida cotidiana del alumnado, ya que, fomentan ciertas habilidades que pueden serles útiles para otras materias y para el futuro. De esto hablaremos detenidamente más adelante.

6.3. Contextualización del centro y del aula

Esta unidad didáctica está contextualizada en el centro I.E.S. Auringis, en el cual he realizado las prácticas docentes correspondientes al Máster para el que estoy realizando como trabajo final este proyecto. Toda la información acerca del centro ha sido extraída de la página web oficial del I.E.S. Auringis.

El I.E.S. Auringis se encuentra ubicado en la zona oeste de Jaén capital, próximo a la parte final de la avenida de Andalucía, más concretamente, en la calle Cerro de los Lirios.

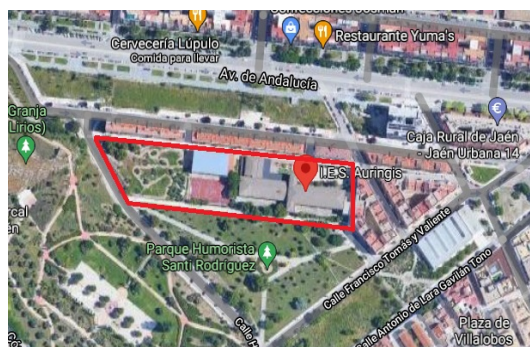


Figura 6.1: Ubicación I.E.S. Auringis (Jaén). Fuente: Google Maps. Elaboración propia

En el centro se imparten los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), dos bachilleratos (en las modalidades de Ciencias, y de Humanidades y Ciencias Sociales) y cuatro cursos formativos: Grado Medio: Atención a persona en situación de dependencia, Grado Superior: Iluminación, captación y tratamiento de imagen, Grado Superior: Educación Infantil y Grado Superior: Sonido para audiovisuales y espectáculos.

A este centro acuden alrededor de 800 alumnos y alumnas cada año y el profesorado está compuesto por 77 profesores y una orientadora. El equipo directivo está formado por el director, el vicedirector, el secretario, la feja de estudios y dos jefes de estudios adjuntos. Por otro lado, también trabajan en el centro dos administrativas, dos ordenanzas y cuatro personas encargadas de la limpieza.

En cuanto a las características de las familias de los alumnos y las alumnas del centro, a nivel social, encontramos mayoritariamente familias tradicionales con una media de hijos/as, sin embargo, cada vez es más frecuente la presencia de situaciones familiares complejas que condicionan la convivencia en los hogares y, por tanto, el rendimiento del alumnado en el centro escolar; a nivel económico, encontramos una gran disparidad en los ingresos económicos, por un lado, encontramos familias con rentas bajas, y por otro lado,

familias que poseen un nivel económico medio alto; a nivel cultural, encontramos familias con estudios universitarios y otras con escasos conocimientos de carácter cultural. Asimismo, la relación de las familias con el centro es buena y encontramos una gran implicación por parte de las familias en la educación de sus hijos e hijas, también cabe destacar, la participación activa de la asociación de Madres y Padres del Alumnado en la vida del centro.

Esta unidad didáctica va dirigida al curso de 1º de Bachillerato, más concretamente, a la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. Durante el curso escolar 2020/2021, encontramos en las clases de este grupo alrededor de 12 estudiantes, esto se debe a que este curso junto con otros, están en modalidad semipresencial debido al Covid, es decir, el grupo se divide en dos subgrupos que se van alternando día a día para estar uno de ellos de forma presencial en el centro y el otro de manera sincrónica desde casa. Ante esta situación, el centro cuenta con todos los medios y recursos necesarios para intentar llevar las clases con la máxima normalidad posible.

En principio, todo el alumnado de este grupo, está suficientemente capacitado para seguir el ritmo de las clases y también se observa que la mayoría del alumnado está centrado durante las clases y comprometido con la asignatura.

6.4. Objetivos

Los objetivos que se pretenden lograr con la elaboración y el estudio de la presente unidad didáctica, se pueden clasificar en los siguientes grupos: los objetivos de etapa, los objetivos de área (correspondientes con los propios de la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I) y los objetivos de la unidad (correspondientes a la unidad que estamos presentando).

6.4.1. Objetivos generales de etapa

Los objetivos generales de etapa son aquellos objetivos que los estudiantes deben haber trabajado a lo largo de todo el periodo de Bachillerato y que deben haber alcanzado tras finalizar el mismo. Podemos encontrar estos objetivos en el Artículo 25 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Dicho artículo, nos dice que el Bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.

b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.

d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.

f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.

g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.

j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.

m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.

n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

6.4.2. Objetivos del área de matemáticas

Los objetivos del área correspondientes a la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, impartida en 1º Bachillerato, los podemos encontrar en la Orden del 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla

el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía:

1. Aplicar a situaciones diversas los contenidos matemáticos para analizar, interpretar y valorar fenómenos sociales, con objeto de comprender los retos que plantea la sociedad actual.

2. Adoptar actitudes propias de la actividad matemática como la visión analítica o la necesidad de verificación. Asumir la precisión como un criterio subordinado al contexto, las apreciaciones intuitivas como un argumento a contrastar y la apertura a nuevas ideas como un reto.

3. Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos. Expresar e interpretar datos y mensajes, argumentando con precisión y rigor, aceptando discrepancias y puntos de vista diferentes como un factor de enriquecimiento.

4. Formular hipótesis, diseñar, utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas que permitan enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia, confianza en sí mismo y creatividad.

5. Utilizar un discurso racional como método para abordar los problemas: justificar procedimientos, encadenar una correcta línea argumental, aportar rigor a los razonamientos y detectar inconsistencias lógicas.

6. Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.

7. Adquirir y manejar con fluidez un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos. Incorporar con naturalidad el lenguaje técnico y gráfico a situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente.

8. Utilizar el conocimiento matemático para interpretar y comprender la realidad, estableciendo relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural o económico y apreciando su lugar, actual e histórico, como parte de nuestra cultura.

6.4.3. Objetivos concretos de la unidad

De acuerdo con la normativa expuesta en los apartados anteriores, los objetivos propios que presenta esta unidad sobre derivadas y que el alumnado debe alcanzar al finalizar la misma son los siguientes:

- I) Comprender y calcular el concepto de tasa de variación, así como entender su interpretación geométrica.
- II) Conocer, aplicar e interpretar analítica y gráficamente la definición de derivada de una función en un punto.

- III) Conocer, aplicar e interpretar analítica y gráficamente la definición de función derivada.
- IV) Conocer las reglas de derivación para calcular derivadas.
- V) Calcular la derivada de funciones compuesta usando la regla de la cadena.
- VI) Aplicar la derivada para estudiar y representar gráficamente una función (crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos).
- VII) Fomentar el uso de las herramientas TIC para obtener información, elaborar informes y mejorar el aprendizaje del alumnado mediante el uso de programas y aplicaciones.
- VIII) Adquirir destreza en el cálculo de la derivada de una función para aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas de la vida real.

6.5. Competencias Clave

Según el Artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se definen las competencias como las “capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.”

El alumnado debe adquirir las siguientes siete competencias clave:

- a) Comunicación lingüística.
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- c) Competencia digital.
- d) Aprender a aprender.
- e) Competencias sociales y cívicas.
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- g) Conciencia y expresiones culturales.

A lo largo de esta unidad didáctica, dichas competencias se alcanzaran con el diseño de actividades de aprendizaje integrado, mediante las cuales el alumnado pueda desarrollar más de una competencia al mismo tiempo. Es

importante potenciar sobretodo el desarrollo de las competencias de Comunicación lingüística, y Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

- Comunicación lingüística:

Esta competencia se desarrollará a lo largo de toda la unidad, ya que es necesario saber expresarse mediante el uso de un lenguaje adecuado. De esta manera, se favorecerá la comprensión de los contenidos, así como la interpretación y la resolución de ejercicios y problemas. Se podrá desarrollar mediante las explicaciones por parte de la profesora de los contenidos, mediante la lectura de textos o enunciados de ejercicios y problemas, los debates realizados en clase, durante la realización de trabajos o actividades en grupo, etc. En definitiva, se desarrollará en todos aquellos procesos en los que el alumnado o la profesora tengan que explicar, razonar, cuestionar, argumentar u opinar.

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología:

Esta competencia es esencial en cualquier ámbito del conocimiento, pero sobretodo en el ámbito matemático. Se adquirirá a lo largo de diferentes momentos de aprendizaje durante toda la unidad, como por ejemplo, a la hora de comprender y expresar conceptos o ideas matemáticas de manera clara; al comprender, analizar o representar una función o una gráfica; al resolver un problema o al aplicar sus conocimientos matemáticos y tecnológicos a situaciones de la vida cotidiana.

- Competencia digital:

Esta competencia se integrará en la unidad didáctica mediante la utilización de programas, aplicaciones y otras herramientas TIC. Su utilización será de gran ayuda para que los estudiantes comprendan mejor los conceptos estudiados durante la unidad, para representar gráficas a través del programa Geogebra, para realizar cálculos de derivadas o simplemente para buscar información en internet.

- Aprender a aprender:

El alumnado debe ser capaz de comprender los conceptos explicados por la profesora para poder así razonar y realizar las actividades y problemas propuestos en el aula de forma autónoma, y comprobar si los resultados obtenidos son coherentes, así como detectar las posibles dificultades que puedan tener. Esta competencia está relacionada con la

competencia digital, ya que las TIC ayudarán a que los alumnos adquieran cierta autonomía a la hora de entender conceptos y desarrollar actividades.

- Competencias sociales y cívicas:

Esta competencia es imprescindible para el desarrollo personal del alumnado, ya que favorece la capacidad de relacionarse y sociabilizar con los demás. Los alumnos desarrollarán esta competencia mediante la realización de trabajos colaborativos, al relacionarse con sus compañeros y con la profesora, al desarrollar un diálogo con sus compañeros a la hora de realizar una actividad o al realizar un debate en el que se dialogue, se argumenten y se escuchen y acepten las opiniones de todos.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:

Esta competencia se desarrollará al potenciar la motivación y la capacidad del alumnado para decidir y tomar decisiones que le ayuden en su vida diaria. En esta unidad, se fomentará mediante la modelización de funciones o la realización de actividades y problemas, en donde la profesora dará autonomía a los alumnos para fomentar su participación y discusión en el planteamiento y resolución de problemas, buscar soluciones, desarrollar sus ideas y el pensamiento autocrítico, así como fomentar la perseverancia y la superación de situaciones difíciles.

- Conciencia y expresiones culturales:

Esta competencia se fomentará al principio de la unidad mediante la investigación que realizarán los alumnos para conocer cómo surgió la derivada, qué matemáticos contribuyeron a lo largo de la historia a su desarrollo, su forma de representarla y las aplicaciones que tiene en la vida diaria.

6.6. Contenidos

Los contenidos se definen según el Artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, como “conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.”

Los contenidos correspondientes al bloque 1: “procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, asociados a esta unidad didáctica, los cuales aparecen

tanto en el Real Decreto mencionado anteriormente como en la Orden de 14 de julio de 2016 son los siguientes:

- 1.8. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- 1.9. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para las siguientes cuestiones:
 - a) La recogida ordenada y la organización de datos.
 - b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.
 - c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.
 - d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.
 - e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidas.
 - f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Los contenidos correspondientes al bloque 3: “análisis” se mencionaron anteriormente en la sección 6.2.

6.7. Metodología

Según el Real Decreto 1105/2014 la metodología didáctica como “conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.”

Por ello, es importante que el docente reflexione sobre cómo planificar la unidad didáctica y plantee qué estrategias va a seguir con el alumnado para que este logre alcanzar los objetivos de la unidad.

En la presente unidad didáctica no se va a utilizar una única metodología, sino que vamos a combinar varias con el fin de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, favorecer la asimilación de los conceptos matemáticos, así como para motivar al alumnado para que no pierdan el interés por la asignatura y fomentar su integración en el grupo.

En primer lugar, una de las metodologías que se usarán a lo largo de todas las sesiones es la metodología tradicional de transmisión-recepción.

Esta metodología es la más común y ofrece un acelerado ritmo en el proceso de la enseñanza-aprendizaje pues consiste en la explicación por parte de la profesora de los contenidos del tema, exponiendo a los alumnos los conceptos y propiedades fundamentales que deben aprender y entender en un corto periodo de tiempo. Sin embargo, aunque esta metodología no es muy eficiente, pues no da tiempo suficiente a que los alumnos afiancen los conceptos y resulta generalmente muy pesada para el alumnado es, fundamental su uso, pues no se podrán utilizar otras metodologías sin que los estudiantes conozcan los conceptos teóricos necesarios para el estudio de la unidad.

Para que los alumnos aprendan a desenvolverse con las explicaciones dadas por la profesora, se complementará la metodología tradicional, con la realización de actividades llamadas de desarrollo, mediante las cuales, se afianzarán los conocimientos.

Los alumnos tendrán un papel pasivo en el desarrollo de dichas actividades ya que será la profesora la que se encargue de realizarlas para mostrarles cómo aplicar los conceptos y conocimientos adquiridos mediante la metodología tradicional. Así mismo, los alumnos tendrán que tomar apuntes y las ideas más importantes sobre estas actividades. La profesora deberá encargarse de motivar y llamar la atención del alumnado para que presten atención y vayan cogiendo las ideas esenciales para que puedan desenvolverse. Por ello, la profesora puede realizar preguntas o establecer debates para hacer que se interesen por la asignatura y reflexionen.

También se le da mucha importancia a lo largo de toda la unidad didáctica al trabajo colaborativo, por ello se realizarán varias sesiones en donde los alumnos formaran grupos de tres o cuatro personas para realizar ciertas actividades. La profesora será la encargada de realizar los grupos, de esta manera se crearán grupos heterogéneos, con lo cual habrá una gran diversidad de alumnos en cada grupo.

Estas actividades estarán relacionadas con la metodología tradicional o también, vendrán dadas de la mano de otras metodologías. Esto es muy beneficioso para el alumno ya que aprenderán a trabajar en grupo y del mismo modo desarrollarán y expresarán sus ideas, de la misma forma en la aprenderán a valorar y respetarán las opiniones del resto de los compañeros del grupo.

Las actividades en grupos colaborativos se empezarán a realizar desde la primera sesión en la cual los alumnos formarán grupos para buscar información sobre la historia de las derivadas y sobre aquellos matemáticos que contribuyeron a su desarrollo. Para esta actividad se empleará una metodología de indagación e investigación sobre el concepto de derivada con el objetivo de que el alumnado pueda investigar sobre este concepto y al mismo tiempo se vaya familiarizando con él. De esta manera, irán creando sus

propias ideas sobre el concepto de derivada y se irán interesando en él y en las aplicaciones que tienen en la vida real. Además, para realizar esta actividad, al igual que en el resto de la unidad didáctica se empleará el uso de la tecnología y las herramientas TIC, pues para realizarla necesitarán el uso de ordenadores, acceso a Internet y otros programas.

El uso de recursos web y otras aplicaciones es de gran utilidad para el alumnado, ya que puede servir tanto para buscar información como para facilitar el aprendizaje y ayudarle en la comprensión de los conceptos teóricos visto durante la unidad didáctica, al igual que se pueden emplear para otras unidades. Su empleo puede ser muy interesante, ya que al ser una metodología diferente a la tradicional puede hacer que llame la atención de los alumnos y los motive y entusiasme más a la hora de implicarse en el aprendizaje de estos conocimientos. Con el empleo de los trabajos colaborativos también se pretende que los estudiantes alcancen un aprendizaje basado en la igualdad. En donde todos los alumnos a través del diálogo, puedan expresarse libremente desde el respeto y acepten las diferentes opiniones, llegando a una conclusión común en cuanto a la realización de actividades se refiere.

Otra metodología que también se emplearán es la metodología de gamificación esta es una técnica en la cual se aprende a través de juegos, lo cual facilita el aprendizaje y hace que sea más dinámico y entretenido para el alumnado.

Por último también se hablará sobre las actividades de tipo IBL, mediante las cuales los alumnos a través de una investigación y con ayuda de sus conocimientos previos, construirán nuevos conocimientos, desarrollando así su pensamiento crítico y concediéndoles una mayor autonomía. Este tipo de actividades busca también la cooperación y la colaboración entre los estudiantes para llegar a una solución válida para todos los miembros del grupo, por lo cual, deben dialogar y participar activamente en el desarrollo de la actividad para llegar a la misma solución. También hará que los estudiantes se interesen y se motiven más por el estudio de estas asignaturas como son las matemáticas y las ciencias, y se den cuenta de que están presentes en nuestra vida diaria más de lo que ellos creen.

6.8. Actividades y recursos

En este apartado mencionaremos las actividades y recursos que se emplearán a lo largo de la presente unidad didáctica. La finalidad de estos recursos y actividades es que los alumnos logren adquirir los objetivos planteados en esta unidad, comprendan los contenidos y desarrollen las competencias clave que hemos mencionado anteriormente. A continuación, vamos a enunciar

las actividades que junto con la teoría harán que los estudiantes construyan y relacionen los conceptos que se han estudiado y mejore su aprendizaje. Dichas actividades aparecerán al final de este apartado.

Entre las tareas y actividades desarrolladas a lo largo de esta unidad didáctica encontramos actividades de investigación, actividades para afianzar los contenidos estudiados (cálculo de derivadas de funciones, interpretación de gráficas y optimización de funciones), para fomentar el uso de las TIC, actividades de tipo IBL (aprendizaje basado en investigación), actividades de aprendizaje a través de diálogo, la discusión y argumentación.

Para poder llevar a cabo las actividades, se necesitarán una serie de recursos los cuales se mencionarán a continuación:

Libro de texto, pizarra, cuaderno de trabajo del estudiante, lápiz y bolígrafo, fichas de actividades propuestas por el profesor, fichas con las reglas de derivación, proyector o pizarra digital, ordenadores con conexión a internet, software Geogebra, aplicación Kahoot! y procesador de texto.

6.8.1. Actividades:

Actividad 1: Investigación histórica

El objetivo de esta actividad es conocer un poco la historia de las matemáticas, más concretamente sobre derivadas. Para trabajar en esta actividad, los alumnos formarán grupos de tres o cuatro personas (según el número de alumnos que formen la clase). Como el tema que vamos a estudiar son las derivadas, cada grupo deberá buscar información sobre cómo y cuándo surgieron, quién o quiénes las descubrieron, cuáles fueron los matemáticos más destacados en el campo del cálculo diferencial a lo largo de la historia, para qué se utilizan las derivada y qué aplicaciones tiene en la vida cotidiana. A continuación, cada grupo deberá redactar un breve informe con los datos obtenidos de esta pequeña investigación y tendrán que enviárselo a la profesora a través de un correo electrónico.

Actividad 2: Hallar la tasa de variación media de la función $f(x) = x^5 - 3x^3 - 4x + 3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Actividad 3: Hallar la tasa de variación media de la función $f(x) = x^3 - 8x$ en el intervalo $[-4, -3]$, $[0, 2]$ y $[-1, 1]$.

Actividad 4: La distancia que recorre un móvil en los 6 primeros segundos tras ponerse en marcha viene dada por la siguiente función: $f(t) = t^2 + 3t$. Halla la TVM de la función en el intervalo $[1, 4]$ y en $[5, 6]$. ¿Cuál es su significado físico?.

Actividad 5: Responde las siguientes cuestiones considerando la gráfica.

- ¿En qué puntos la TVM es negativa?
- ¿En qué puntos la TVM es máxima?
- ¿En qué puntos la TVM es próxima a 0?

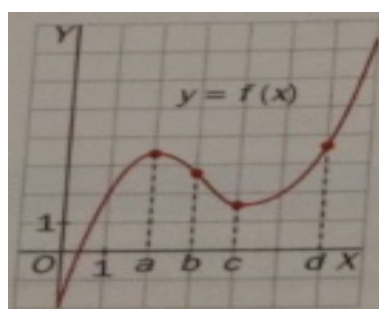


Figura 6.2: Fuente: Libro de texto editorial SM. Página 212. Ejercicio 27

Actividad 6: Según una estimación, dentro de t años una revista local publicará $C(t) = 20t^2 + 40t + 800$ ejemplares.

- Calcula la TVM en los próximos 4 años.
- Calcula la TVI en el cuarto año.

Actividad 7: Hallar la tasa de variación media de la función $f(x) = 3x^3 - 4x + 3$ en el punto $x = 1$.

Actividad 8: Hallar la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{5}$ en el punto $x = 3$.

Actividad 9: Hallar la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = x^3 - 8x$ en el punto $x = -3$ y $x = 1$. ¿Cuál es su significado geométrico?

Actividad 10: Calcula la velocidad que recorre un móvil en el instante $t = 8$ cuya ecuación de movimiento viene dada por $s(t) = 3t + t^2/2$.

Actividad 11: La siguiente gráfica muestra la trayectoria que ha recorrido un coche desde una ciudad A hasta la ciudad B, la distancia viene dada en kilómetros y el tiempo en minutos.

Según los datos presentados en la tabla

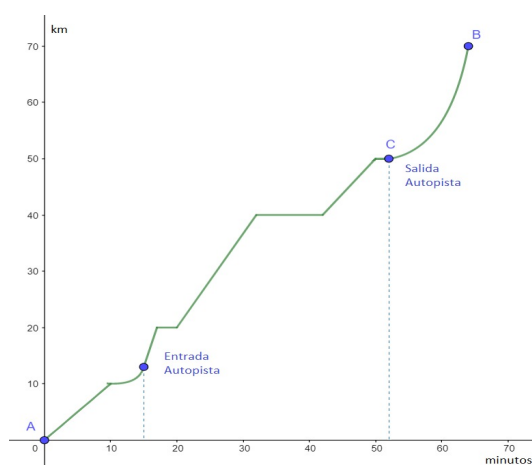


Figura 6.3: Fuente: Elaboración propia

- ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante este trayecto?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche en los tramos de autopista?
- ¿Cuál es la velocidad media del coche entre las ciudades C y B?
- ¿Cuál es la velocidad media entre el instante $t = 52$ y $t = 64$?
- ¿A qué velocidad irá el coche a los 45 minutos de salir de la ciudad A?
- ¿Qué velocidad llevará el coche justo a los 58 minutos?

Actividad 12: Dada la función $f(x) = 3x^3 - 5$, averigua $f'(2)$ aplicando la definición.

Actividad 13: Halla la derivada de $f(x) = \frac{1 + 5x^2}{x}$ en el punto $x = -3$.

Actividad 14: Dada la función $f(x) = -2x + 5$, calcula la derivada en los puntos de abscisas $-4, 0$ y 3 . ¿Por qué se obtiene el mismo resultado en todos los casos?

Actividad 15: Aplicando la definición de derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5x - 2$ en $x = -2$
- $f(x) = x^2 + 3$ en $x = 4$
- $f(x) = \frac{x^5 + 3}{4}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x}$ en $x = 6$

Actividad 16: Calcula la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^3 - 3x + 5$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Actividad 17: Calcula la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{2}$ en el punto de abscisa $x = -2$.

Actividad 18: Halla el punto de la función $f(x) = x^3 - x + 3$ para que la recta de la gráfica de f en ese punto sea $y = 2x + 5$.

Actividad 19: Aplicando la definición de derivada, calcula:

- a) la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto $x = 2$
- b) la ecuación de la recta tangente en $x = 1$
- c) representa la función $f(x)$ y la ecuación de la recta tangente utilizando el programa Geogebra

Actividad 20: Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones aplicando la definición:

- a) $f(x) = 3x^2$
- b) $f(x) = \frac{1}{x}$
- c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + x$
- d) $f(x) = (x - 3)^2$

Actividad 21: Calcula la derivada primera y segunda de la función $f(x) = 5x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 8$.

Actividad 22: Verifica que la TVM de la función $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ en el intervalo $[1, 2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$. ¿Qué ocurre con la TVI de la función en el punto $(1, f(1))$?

Actividad 23: Dada la siguiente gráfica

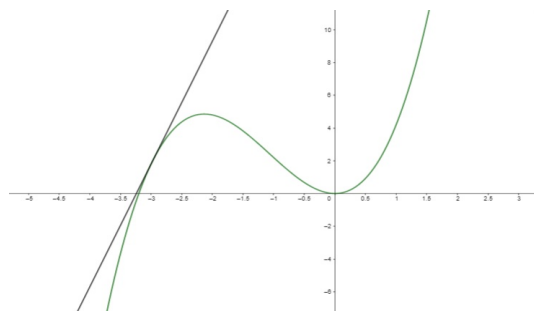


Figura 6.4: Fuente: Elaboración propia

en la que se supone que la recta L es tangente a la gráfica de la función f en el punto $(-3, 2)$, como aparece en la imagen. Encuentra $f(-3)$ y $f'(-3)$ y explica cómo lo has realizado.

Actividad 24: Calcula las derivadas de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

- a) $f(x) = 5x^3$
- b) $f(x) = \frac{1}{x}$
- c) $f(x) = x$
- d) $f(x) = -6x^2$
- e) $f(x) = \sqrt{x^3}$

Actividad 25: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 8$
- b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + x - 2$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{3}x - 2$
- d) $f(x) = 9x^3 - 2\sqrt{x} - 5$
- e) $f(x) = (x + 3)(x - 5)$
- f) $f(x) = (\text{sen}(x) + 6)(x - x^2)$
- g) $f(x) = (x^3 + x - 6)(x - x^2)$

h) $f(x) = \frac{5x + 3}{2x - 3}$

i) $f(x) = \frac{5x^2 - x + 1}{x + 7}$

Actividad 26: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5(3x^2 - 8)^2$

b) $f(x) = 2\sqrt{x^3 - 5x + 7}$

c) $f(x) = \left(\frac{x + 3}{x - 5}\right)^3$

d) $f(x) = x^2 e^{5x}$

e) $f(x) = 5^{8x-7}$

f) $f(x) = \cos(7x + 2)$

g) $f(x) = \tan(-5 + 8x^2)$

h) $f(x) = \arcsen(9x)$

i) $f(x) = 4x \cdot \arcsen(3x)$

j) $f(x) = \ln(5x^3 - 4x + 7)$

Actividad 27: Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^2 + 3x - 92$

b) $f(x) = 2x^3 + 9$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{5}{8}x - 9$

Actividad 28: Calcula los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^2 + 3x - 5$

b) $f(x) = x^5 - 5$

c) $f(x) = \frac{6x - 3}{2}$

Actividad 29: Representa de manera aproximada la gráfica de la función $f(x) = 5x^3 - 5x + 7$ a partir de sus máximos y mínimos relativos y su comportamiento en el infinito. Comprobar la representación gráfica con Geogebra.

Actividad 30: Estudia y representa las siguientes funciones (comprueba la representación gráfica con Geogebra.):

a) $y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$

b) $y = \frac{(x+2)^2}{x}$

Actividad 31:

1. Considere la siguiente gráfica de una función, $f(x)$. Seleccione de entre las opciones que hay debajo de la gráfica (de a) a l)), las que describan la función, $f(x)$. Intente seleccionar las opciones de a) hasta i), sin utilizar las gráficas de las opciones presentadas en j, k, y l.

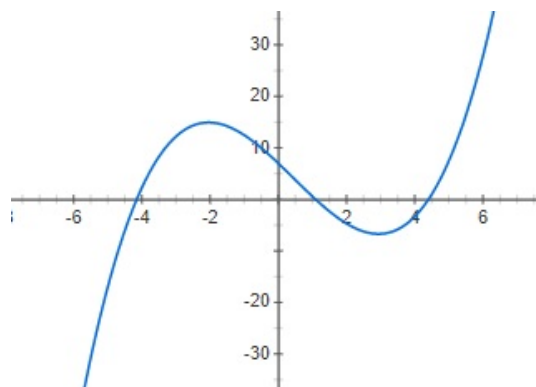


Figura 6.5: Fuente: Elaboración propia

- a) La gráfica de $f(x)$ cambia de concavidad en $x = 3$
- b) $f'(0) = 7$
- c) $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = 3$
- d) $f'(x)$ es creciente en $-6 < x < -2$
- e) $f'(x) > 0$ para $-6 < x < -2$
- f) La ecuación de la recta tangente de $f(x)$ en $x = 4$ es $y = 6x + 10$
- g) $f'(-4, 115) = 0$

- h) La tasa instantánea de cambio de f es 0 en $x = -2$
- i) $f''(-3) = -7$
- j) Gráfica de $f'(x)$

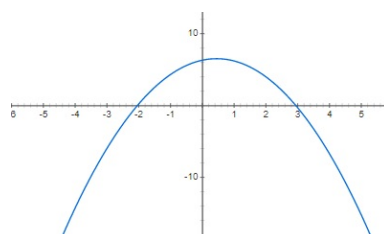


Figura 6.6: Fuente: Elaboración propia

- k) Gráfica de $f'(x)$

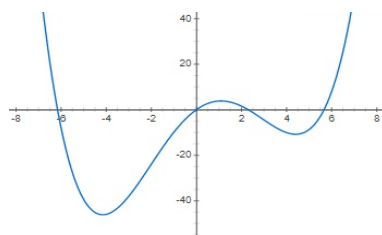


Figura 6.7: Fuente: Elaboración propia

- l) Gráfica de $f'(x)$

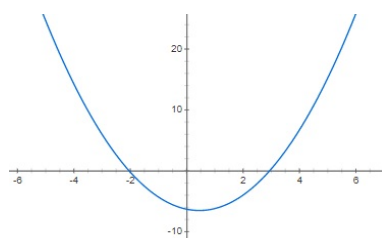


Figura 6.8: Fuente: Elaboración propia

2. Diseña una tarea como la anterior. Deberás crear la gráfica de una función, como la representada anteriormente y selecciona varias opciones que describan dicha función y otras opciones que no la describan. Después un compañero o una compañera deberá hacer dicha actividad tal y como habéis hecho en el apartado anterior.

Actividad 32: Representa la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

- f es continua
- $f(0) = 2$
- $f'(3) = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \infty$
- $\lim_{h \rightarrow 0} f'(x) = \infty$
- $f'(x) > 0$ en $-4 < x < -2$ y $-2 < x < 3$
- $f'(x) < 0$ en $x < -4$ y en $x > 3$
- $f''(x) < 0$ en $x < -4$, $-4 < x < -2$ y $0 < x < 5$
- $f''(x) > 0$ en $x > 5$ y en $-2 < x < 0$

Actividad 33: Una empresa de bicicletas ha calculado los beneficios mensuales con la siguiente función, donde x es el número de bicicletas vendidas y $B(x) = \frac{5x}{x^2 + 125}$ indica los beneficios.

- a) Para obtener el beneficio máximo ¿cuántas bicicletas tiene que vender al mes?
- b) ¿La empresa perderá dinero en algún momento?

Notas Cornell

Es un método en el que se organizan visualmente los apuntes, condensando mucha información en un solo folio. Con ellas, los alumnos podrán crear sus propias ideas sobre los conceptos matemáticos y tener un resumen para estudiar. Las Notas Cornell tienen la siguiente estructura:

Título:	
Preguntas o palabras clave:	Descripción (ideas importantes, esquemas, explicación de la profesora, etc.):
Resumen:	

Figura 6.9: Notas Cornell. Fuente: Elaboración propia

6.9. Atención a la diversidad

A la hora de programar una unidad didáctica, los docentes tienen que atender las necesidades educativas de todos y cada uno de los alumnos, de forma que todos tengan las mismas oportunidades educativas en la mayor medida posible. Para ello, se deben establecer unas medidas de atención a

la diversidad que estén orientadas a responder a las necesidades educativas de los alumnos, conseguir que todos logren los objetivos establecidos en la unidad didáctica y la adquisición de las competencias correspondientes. Esto se logrará gracias a actividades de refuerzo o de ampliación que adapten las necesidades educativas de dichos alumnos.

Tenemos que tener en cuenta a la hora de atender a la diversidad que los alumnos que presentan necesidades específicas de apoyo educativo es porque o bien requieren necesidades educativas especiales, porque presentan trastornos de déficit de atención (TDA) o trastornos de déficit de atención e hiperactividad (TDAH), por una incorporación tardía al sistema educativos, por problemas personales o porque presentan altas capacidades.

Si en nuestra clase hay algún alumno con alguna necesidad, la profesora deberá de conocer el nivel inicial que presenta cada alumno, para ello la profesora observará con detenimiento cómo se desenvuelve este alumno en la primera sesión de la unidad. Esto nos dará una idea de qué tipo de actividades necesitamos adaptar a cada alumno. A medida que se desarrolle la unidad didáctica se irá viendo un progreso en el alumno de manera que deberemos de ir cambiando y adaptando el desarrollo de las clases y las actividades.

La adaptación de estas actividades ya sean de refuerzo o de ampliación, las llevará a cabo la profesora realizando una modificación de las actividades propuestas en esta unidad didáctica según las necesidades y nivel de cada alumno. Esta adaptación debe llevarse a cabo de un modo en que el contenido a estudiar sea el mismo para todos los alumnos, garantizando la misma oportunidad de aprendizaje entre los alumnos que presentan necesidades y los que no. Por lo tanto, estos alumnos estudiarán los mismos contenidos que sus compañeros pero desde un punto de vista más sencillo. Además, se les facilitará un examen más sencillo con instrucciones simples y claras y, se les dará más tiempo para poder hacerlo. También sería conveniente que para aquellos alumnos con necesidades educativas haya profesores de refuerzo que los ayuden a lo largo de cada sesión.

Por ejemplo, a la hora de estudiar la regla de la cadena, a estos alumnos se les explicará y se les facilitará actividades con funciones sencillas. De esta manera, presentarán un menor grado de dificultad y al mismo tiempo, estudiarán y aprenderán el método de la regla de la cadena al igual que sus compañeros. Al mismo tiempo, estas actividades de refuerzo estarán mejor detalladas y más explicadas para que le sea más fácil de entender al alumnado.

Por el contrario, a aquellos alumnos que presenten altas capacidades les debemos realizar actividades de ampliación con un mayor grado de dificultad, en las que tengan que reflexionar y utilizar todos los conocimientos adquiridos hasta ese momento. También se puede contemplar la posibilidad de ampliar los contenidos siempre que el alumno esté dispuesto a realizarlo de forma

autónoma y con ayuda de material o apuntes proporcionados por la profesora. Es importante ver las necesidades que presentan estos alumnos, pues debemos de intentar que no pierdan el interés por esta asignatura, no sé desmotiven ni se aburran durante las clases, del mismo modo, tampoco debemos de sobrecargar con actividades a estos alumnos para que no se agobien. Algo que podría ser enriquecedor para este alumno sería que a la hora de realizar las actividades en grupos los trabajos, estos alumnos ayudarse a los otros alumnos que tienen más dificultades.

También debemos tener en cuenta aquellos alumnos que sean repetidores y los que tengan la asignatura pendiente de cursos anteriores y tengan que aprobarla. Para estos alumnos deberemos hacer unas actividades específicas para reforzar los conocimientos.

6.10. Temporalización

En este apartado, vamos a desarrollar una por una la programación de las sesiones contenidas en nuestra unidad didáctica. En ella, se indicarán los contenidos estudiados en cada sesión, así como las actividades que se realizarán. También se mostrarán los objetivos estudiados en cada una de ellas, las competencias clave desarrolladas y los criterios de evaluación (los correspondientes al bloque 3 ya se han mencionado anteriormente, solo falta mencionar los criterios de evaluación del bloque 1 que se nombrarán en el siguiente apartado dedicado a la evaluación).

Para el desarrollo de la presente unidad didáctica se necesitarán 12 sesiones de una hora de duración cada una, de las cuales, la última estará dedicada a la evaluación del alumnado. Es decir, se le dedicará 3 semanas a dicha unidad.

Como hemos visto en el capítulo 5, los estudiantes presentan grandes dificultades a la hora de entender correctamente el significado del concepto de derivada. Esto se debe a que construyen su idea como el límite del cociente incremental, o como la pendiente de la recta tangente, pero la gran mayoría no relacionan estas ideas. Por ello, vamos a estructurar nuestra unidad didáctica de la siguiente manera, pensando que así los alumnos podrán comprender mejor dicho concepto.

Sesión 1:
Contenidos: 1.8., 1.9., 3.6.
Criterios de evaluación: 1.9., 1.13., 3.5.
Objetivos: i), vii)
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP, CEC
Desarrollo: La profesora iniciará la sesión presentando la unidad didáctica que vamos a estudiar durante 12 sesiones. A continuación, la profesora les indicará a los alumnos que realicen una investigación (Actividad 1) con el objetivo de conocer un poco la historia de la derivada y así empezarán a familiarizarse con este concepto. La investigación se realizará en grupo de tres o cuatro personas dependiendo del número de alumnos que formen el grupo. Será la profesora la encargada de realizar estos grupos para que sean heterogéneos. Para realizar esta sesión, la clase se llevará a cabo en el aula de informática, de esta manera podrán realizar los trabajos. A cada grupo se le asignaran dos ordenadores y será el mismo grupo el que se encargue de organizarse para realizar esta tarea. Los resultados obtenidos de esta investigación deberán enviárselos a la profesora por correo electrónico. La profesora mientras tanto, se paseará por el aula por si les surgiera alguna duda, aunque lo más conveniente sería que la profesora intervenga lo menos posible para favorecer así la autonomía del alumnado. Al finalizar, se realizará un pequeño debate en clase sobre los datos obtenidos y así los alumnos compartirán las ideas que han obtenido al realizar el trabajo y entre todos sacaremos unas conclusiones generales de esta actividad. Para finalizar la sesión, la profesora explicará el concepto de tasa de variación media para ello se ayudará del programa GeoGebra para que los alumnos vean visualmente el significado de este concepto. Durante la explicación irá formulando preguntas para que los alumnos vayan cogiendo las ideas más importantes y construyendo el significado de este concepto. La profesora les mandará como tarea para casa a los alumnos que vean un vídeo, qué será proporcionado por ella, en el que se explique el concepto de tasa de variación instantánea y realicen unas Notas Cornell para la siguiente sesión. Con esto se pretende realizar una clase invertida o flipped classroom, de esta manera este concepto se irá trabajando en casa antes de ser explicado y desarrollado en clase.

Sesión 2:
Contenidos: 1.8., 1.9., 3.6.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: i), vii)
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, SIEP
Desarrollo: Iniciaremos la sesión realizando un breve repaso sobre el concepto de tasa de variación media visto en la sesión anterior. (5 min) A continuación, la profesora realizará unos ejemplos (Actividad 2 y 4) para que los alumnos puedan trabajar después individualmente en las actividades (Actividad 3 y 5). (20 min) Cuando terminen, la profesora recogerá la tarea mandada para casa del día anterior y realizará unas preguntas para ver qué ideas han obtenido después de ver el vídeo. Seguidamente, explicará el concepto de tasa de variación instantánea relacionándolo con el concepto de TVM y llegando así a la definición de derivada, la cual veremos más detalladamente en la siguiente sesión. Para ello, se utilizará el programa GeoGebra, así los alumnos podrán verlo gráficamente y esto le ayudará a hacerse una idea de su significado. (15 min) Para finalizar la clase, la profesora realizará unos ejercicios en la pizarra (Actividad 6) y después los alumnos realizarán otras actividades parecidas a las que ha realizado la profesora (Actividad 7, 8 y 9). Los alumnos deberán terminar estas actividades en casa. (20 min)

Sesión 3:.
Contenidos: 1.8., 3.6.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: i)
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEP
Desarrollo: La profesora iniciará la sesión resolviendo las dudas planteadas de la clase anterior y corrigiendo los ejercicios. (15 min) Seguidamente, los alumnos realizarán unas actividades sobre la TVM y TVI utilizando dinámicas de trabajo cooperativo (Actividad 10 y 11). La profesora formará grupos heterogéneos, les proporcionará una ficha con las actividades y les explicará cómo tienen que resolverlas. Durante su realización, la profesora se irá paseando por la clase por si algún grupo necesita ayuda, pero procurando siempre intervenir lo menos posible y sin decirles qué es lo que tienen que hacer si no dándole pequeñas pistas y ayudas para que reflexionen sobre ello. (45 min)

Sesión 4:
Contenidos: 1.8., 3.6.
Criterios de evaluación: 1.9., 1.12., 3.5
Objetivos: ii)
Competencias: CCL, CMCT
Desarrollo: La profesora resolverá las dudas de la última sesión y a continuación, explicará el concepto de derivada de una función en un punto a partir de la definición de límite y, realizará algunos ejemplos para que los alumnos vean cómo se aplica este concepto. (20 min) El resto de la clase, los alumnos realizarán de manera individual actividades parecidas a las que ha explicado la profesora, en los que aparecerán funciones sencillas y tendrán que calcular la derivada utilizando la definición. Si da tiempo se irán corrigiendo dichos ejercicios en la pizarra, si no se corregirán en la siguiente sesión. (Actividad 12, 13, 14 y 15) (40 min)

Sesión 5:
Contenidos: 1.8., 1.9., 3.6.
Criterios de evaluación: 1.9., 1.12. y 3.5
Objetivos: ii), vii)
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA
Desarrollo: La profesora explica el concepto de derivada de una función en un punto gráficamente utilizando el programa GeoGebra para que los alumnos entiendan mejor su interpretación. Además, les enseñará a aplicar el concepto de derivada para calcular la ecuación de la recta tangente. Mientras realiza la explicación, irá haciendo preguntas a los alumnos para ver si están entendiendo el significado de este concepto. (Actividad 16) (20 min) Después, los alumnos realizarán actividades para hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente de diferentes funciones. (Actividad 17, 18 y 19) (15 min) Luego, la profesora explicará cómo funciona el programa Geogebra para que los alumnos lo utilicen para hacer actividades y comprobar los resultados. (15 min). Para finalizar la sesión, la profesora dará libertad a sus alumnos para que practiquen e investiguen este programa. (10 min) Como tarea para casa, los alumnos deberán realizar unas Notas Cornell para el próximo día, explicando los contenidos vistos en las últimas dos sesiones.

Sesión 6:
Contenidos: 1.8., 3.6., 3.7.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: i), ii), iii), viii)
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEP
Desarrollo: La profesora empezará resolviendo las dudas que tengan los alumnos y a continuación, explicará el concepto de función derivada y derivadas sucesivas y, realizará unos ejemplos. (Actividad 20) (15 min) Después, indicará cómo realizar unas actividades en las que se estudia todo lo visto hasta ahora. Los alumnos deberán realizarlas en grupos cooperativos. De esta forma verán que las derivadas tienen múltiples representaciones y, compartirán y argumentarán sus ideas con el resto de compañeros del grupo, construyendo así relaciones entre los conceptos estudiados. (Actividad 21, 22 y 23) (45 min)

Sesión 7:
Contenidos: 1.8., 3.7.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: iv)
Competencias: CCL, CMCT
Desarrollo: En esta sesión se explicarán las reglas de derivación y la derivada de la operación suma, el producto, función inversa y el cociente de funciones. Se les proporcionará la tabla con las reglas de derivadas (introducida en el Capítulo 4) y se explicará cómo utilizarla, aunque se hará hincapié en las demostraciones de al menos las funciones más sencillas, para que razonen y no memoricen. También, se explicará una por una cada operación y se irán realizando al mismo tiempo actividades, las cuales se corregirán al final de la clase. (Actividad 24 y 25) (1 hora) Para la siguiente sesión se les pedirá a los alumnos que vean un vídeo en el que se explica la regla de la cadena para derivar funciones compuestas y que realicen unas Notas Cornell sobre ello.

Sesión 8:
Contenidos: 1.8., 1.9., 3.7.
Criterios de evaluación: 1.9., 1.12., 3.5.
Objetivos: i), ii), iii), iv), v), vii)
Competencias: CCL, CMCT, CD
Desarrollo: La profesora iniciará la sesión resolviendo las dudas de los alumnos y les preguntará si han visto el vídeo que se les mandó en la clase anterior. Luego les hará diferentes preguntas para ver qué es lo que han entendido de ese vídeo. (10 min) A continuación, empezará a explicar cómo derivar funciones compuestas. Para ello, explicará el método de la regla de la cadena y realizará unos ejemplos. (10 min) Seguidamente, los alumnos deberán realizar una serie de actividades para afianzar este método. Estas actividades se irán corrigiendo con la ayuda de los estudiantes. (Actividad 26) (15 min) Para finalizar la sesión se realizará un test con la plataforma Kahoot!, por lo que necesitaremos ordenadores portátiles para realizarlo. Con este test los alumnos repasarán los contenidos estudiados hasta ahora de una forma más dinámica y entretenida y, al mismo tiempo este test le servirá de guía a la profesora para saber cómo van los alumnos y si están entendiendo los conceptos. (25 min)

Sesión 9:
Contenidos: 1.8., 3.6.
Criterios de evaluación: 1.9., 1.12., 3.5.
Objetivos: vi), vii), viii)
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CD
Desarrollo: La profesora preguntará si los alumnos tienen dudas y seguidamente explicará cómo optimizar una función, es decir, cómo hallar el valor máximo y mínimo de una función utilizando la función derivada. Además, se estudiará el crecimiento y decrecimiento de una función, así como sus puntos singulares. También mostrará cómo representar funciones de manera manual y utilizando el programa Geogebra. (20 min) El resto de la clase los alumnos se dedicarán a realizar actividades en donde se apliquen estos contenidos. (Actividad 27, 28, 29 y 30) (40 min)

Sesión 10:
Contenidos: 1.8., 3.6., 3.7.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: i), ii), iii), iv), v), vi), viii)
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEP
Desarrollo: En esta sesión los alumnos realizarán una actividad tipo IBL (Actividad 31). Para ello, la profesora formará grupos heterogéneos y empezará presentando la actividad. Después los alumnos deberán recoger los datos presentados para resolver la actividad. Para finalizar, se realizará un debate en el que participará toda la clase, en él se explicará qué ha hecho cada grupo, las dificultades que han encontrado, si han intentado varias formas para resolverla, etc. Para terminar se obtendrán unas conclusiones generales. Además, cada grupo deberá realizar un informe en el que se explique detalladamente lo que han realizado a lo largo de esta actividad. (1 hora)

Sesión 11:
Contenidos: 1.8., 3.6., 3.7.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: i), ii), iii), iv), v), vi), viii)
Competencias: CCL, CMCT
Desarrollo: En esta sesión se realizarán las actividades 32 y 33 y se terminará haciendo un repaso general de toda la unidad y resolviendo las dudas del alumnado. (1 hora)

Sesión 12:
Contenidos: 1.8., 3.6., 3.7.
Criterios de evaluación: 1.9., 3.5.
Objetivos: i), ii), iii), iv), v), vi), viii)
Competencias: CCL, CMCT, SEIP
Desarrollo: Para finalizar la unidad didáctica, se realizará una prueba escrita a los alumnos en la que se valorará si han alcanzado los objetivos a desarrollar en esta unidad. Al inicio de la misma, la profesora leerá las preguntas en voz alta y responderá a todas las dudas que tengan en ese momento los alumnos, (5 min) después dispondrán de toda la sesión para realizar individualmente la prueba. (1 hora)

6.11. Evaluación

La evaluación es importante a la hora de valorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. No solo nos muestra la evolución del alumnado y los conocimientos que han adquirido, sino que también, nos ayuda a nosotros como docentes para mejorar el proceso de tanto de la enseñanza como del aprendizaje.

Esta evaluación será de carácter formativo y deberá de ser continuada y diferenciada según las diferentes materias.

Para realizar la evaluación, debemos de tener en cuenta qué es lo que queremos evaluar y cómo lo vamos a hacer, es decir, nuestros referentes para

llevar a cabo la evaluación serán los criterios de evaluación junto con su concreción en estándares de aprendizaje evaluables y las herramientas utilizadas para la evaluación de la presente unidad didáctica.

6.11.1. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación según el Real Decreto 1105/2014 “son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.”

Aunque el contenido específico de nuestra unidad, pertenece a bloque tres llamado análisis, también debemos tratar de manera transversal el bloque uno, en el que se desarrollan procesos, métodos y actitudes matemáticas. A continuación, se enumeran los criterios de evaluación de nuestra unidad correspondientes con el bloque uno, (los contenidos del bloque tres ya se mencionaron anteriormente en la sección 6.2):

- 1.9. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
- 1.12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
- 1.13. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Estos criterios de evaluación llevan asociados unos estándares de aprendizaje evaluable. Dichos estándares de aprendizaje se definen según Real Decreto 1105/2014 como las “especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o

logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.”

Los estándares de aprendizaje evaluables asociados a esta unidad didáctica son los siguientes:

- 1.9.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, etc.
- 1.9.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.
- 1.9.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc.
- 1.12.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.
- 1.12.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.
- 1.12.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos
- 1.12.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
- 1.13.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido, . . .), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.
- 1.13.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

- 1.13.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

6.11.2. Criterios de calificación

A continuación, veremos las herramientas que vamos a utilizar para la evaluación, es decir veremos cómo vamos a evaluar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje mencionados anteriormente.

A la hora de realizar la evaluación, tendremos en cuenta el seguimiento y la observación que ha realizado el docente a lo largo de toda la unidad didáctica sobre los alumnos, teniendo en cuenta la participación y el comportamiento del alumnado durante la sesiones; la revisión del cuaderno en el que deben aparecer todas las actividades realizadas durante la unidad; las tareas y trabajos realizados tanto en el aula como en casa; y la prueba escrita. Todo esto tendrá la siguiente ponderación:

- Prueba escrita: 60 %.
- Trabajos en grupo y tareas: 25 %.
- Revisión del cuaderno: 5 %.
- Comportamiento y participación: 10 %.

6.11.3. Examen

Razona y justifica todos los cálculos realizados.

1. Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$ en el punto $x = 2$ y la tasa de variación media en el intervalo $[-8, -4]$.
2. Utiliza la definición de derivada para calcular la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x + 6$. ¿Cuál es la recta tangente en el punto $x = 1$?
3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 - a) $f(x) = 5\cos(3x)\ln(x^3 + 5)$
 - b) $f(x) = 4e^{8x-3}(x^2 - 9)$
 - c) $f(x) = \sqrt{x \cdot \ln(9x^2 - 7x + 3)}$

4. Estudia la función $f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 - 7}{x + 3}$ y represéntala gráficamente.
5. El número de individuos (millones) de una población viene dado por la función $I(t) = \frac{16 + t^2}{(t + 2)^2}$, donde t son los años transcurridos desde $t = 0$.
 - a) Calcula la población inicial.
 - b) Calcula el año en el que se alcanzará la mínima población y su tamaño en ese momento.
 - c) Calcula el tamaño a largo plazo de la población.

Capítulo 7

CONCLUSIÓN

Con la realización del presente trabajo fin de máster se logran todos los objetivos que se han nombrado en el Capítulo 2 de este trabajo y además, se afianza todo lo estudiado a lo largo del máster.

En el análisis del capítulo 3 vimos como los libros de texto ocupan un lugar fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. También vimos que a pesar de encontrar algunas pequeñas diferencias, ambos libros eran prácticamente similares y cubrían todos los contenidos establecidos por la normativa, aunque podríamos decir como aspecto negativo, que se presta más atención al estudio de mecanismos y procedimientos matemáticos en vez de la profundización y el entendimiento del significado de los conceptos.

El capítulo 4 nos ha permitido profundizar y establecer los contenidos y significados relacionados con las derivadas. Construyendo así una base sólida de los conceptos matemáticos, lo que nos permitirá como docente obtener una visión global del contenido para posteriormente adaptarlo al nivel acorde con el currículo del curso de 1º de Bachillerato.

En el capítulo 5 se realizó un estudio para escoger las investigaciones a analizar, que se creyeron más convenientes y adecuadas en relación con este TFM. En el análisis de dichas investigaciones observamos algunas dificultades y errores que encuentran los estudiantes a la hora de comprender el significado de derivada, la perspectiva de la práctica del profesor y el papel que representan los libros de texto en la enseñanza educativa. De ello, se obtienen algunas conclusiones que se emplean a lo largo de la unidad con el objetivo de establecer un proceso de enseñanza óptimo.

El capítulo 6 se ha desarrollado en relación a toda la información obtenida en los capítulos anteriores, diseñando una unidad didáctica en la que se integra diferentes metodologías y una serie de actividades que pueden resultar llamativas y motivadoras, ya que se realizan en grupos colaborativos y en algunas también se utilizan herramientas TIC. Además, muchas de ellas están

enfocadas al razonamiento y cuestionamiento de los contenidos estudiados en el aula, lo que favorece la realización de debates en donde los alumnos pueden expresar su opinión libremente fomentando así la tolerancia y el respeto entre el alumnado. De este modo, intentamos propiciar el interés del alumnado por las matemáticas.

Capítulo 8

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Alaminos, J. (2015) *Apuntes asignatura Cálculo II*. Universidad de Granada.

[2] Aparicio, C. y Payá, R. (1999). *Análisis matemático I*. Granada: Universidad de Granada. Payá

[3] Apostol, T.M. (1976). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.

[4] Colera, J., Oliveira, M.J. y Colera, R. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. 1º Bachillerato. Editorial Anaya.

[5] Consejería de Educación (2016). Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación por el proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA. núm. 145

[6] García, M., Gavilán, J.M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 219-235.

[7] IES Auringis. *Plan de Centro, Curso 2020/2021*. Jaén

[8] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE, núm. 3

- [9] Payá, R. (2014) *Apuntes asignatura Cálculo II*. Universidad de Granada
- [10] Ramón, J., Hernández, J. y Alcaide, F. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1. 1º Bachillerato*. Editorial SM.
- [11] Sánchez–Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.
- [12] Vargas, M.F., Fernández-Plaza, J.A. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *AIEM*, 18, 87-102.