Centro de Estudios de Postgrado

Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL, FUNCIONES ELEMENTALES

Alumno/a: **Avilés Coca, Carlos**

Tutor/a: Prof. Dña. Ana María Lerma Fernández
Dpto: Didáctica de las Ciencias

Septiembre, 2022

RESUMEN

Resumen

El objeto del presente documento es recoger la elaboración del trabajo final del *Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*. La temática central sobre la que se articula el trabajo trata sobre las funciones de la asignatura Matemáticas para alumnado de 2º de la ESO. A lo largo del documento se analiza la normativa vigente y libros de texto (como recurso usualmente utilizado por el profesorado), información relevante para el desarrollo de una unidad didáctica sobre el bloque de funciones. Previo al desarrollo de la proyección didáctica, se evalúan los posibles problemas y acciones a tomar detectadas en el aula y recogidas en la literatura. Además, se expone el tema 21 de la fase de oposición al cuerpo de profesores de la Junta de Andalucía.

Palabras clave: funciones, Matemáticas, unidad didáctica, ESO, Andalucía.

Abstract

The goal of the present document is to collect the manufacture of the final thesis for teaching‘s master (*Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*). The main document‘s thematic regards functions topic within second grade high school students (2º ESO). Along the document, the current regulation is reviewed as well as text books, well valued information for the didactic unit. Before the didactic unit, possible issues and actions to be taken in classes are evaluated based on science‘s papers. In addition, topic 21st of Andalucía public examination for professor is written.

Key words: functions, Mathematics, didactic unit, ESO, Andalucía.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente documento recoge la elaboración del trabajo final de máster realizado por Carlos Avilés Coca, donde se pone el culmen del *Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*. En concreto, en la especialidad docente de Matemáticas. La temática central del trabajo es el bloque didáctico de las funciones y está dividido en distintos capítulos.

El primer capítulo contiene el análisis del currículo vigente, poniendo la atención en los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje necesarios para el desarrollo de la docencia del bloque asociado a las funciones en un grupo de segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura de Matemáticas. Además, establece los objetivos a alcanzar y la comparativa entre libros de texto.

El segundo capítulo desarrolla un tema del proceso de selección del profesorado público, en este caso coincide con el tema veintiuno (*funciones reales de variable real, funciones elementales, situaciones en la que aparece y función compuesta*, (BOE, 1993)) y contiene una breve contextualización histórica sobre las funciones, dos teoremas, numerosas definiciones y ejemplos acerca de las funciones.

El tercer capítulo explica los problemas detectados en el aula por falta de adecuación de los recursos al alumnado y el deterioro de la enseñanza y las posibles acciones a realizar para minimizar el impacto de los problemas detectados. Tanto los problemas detectados como las acciones se establecen gracias a la información presente en la literatura.

El cuarto capítulo recoge la realización de una unidad didáctica, enfocada en el cuarto bloque del currículo de la asignatura Matemáticas del segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En la proyección didáctica se justifica su realización, se contextualiza el centro y el aula, se presentan sus objetivos, competencias clave, contenidos, metodología seguida y la evaluación de los criterios. Además, se propone una serie de recursos a realizar durante la temporalización de las distintas sesiones docentes junto con alternativas posibles para la atención a la diversidad.

Finalmente, el quinto capítulo recoge las conclusiones de trabajo final de máster y propuestas de mejora de la unidad didáctica.

Objetivos

Los objetivos generales establecidos para el trabajo final de máster se basan en el desarrollo de las competencias y resultados de aprendizaje recogidos en la guía docente de la titulación en relación al trabajo final de máster (Universidad de Jaén, 2021), destacando los siguientes:

- Conocer los agentes y factores influyentes en la docencia para la realización de una unidad didáctica.
- Conocer y aplicar una metodología de trabajo basada en la mejora continua.
- Buscar recursos alternativos a los usualmente utilizados en el aula.
- Conocer los requerimientos necesarios en un proceso de selección pública.
- Conocer problemas ocasionados en el aula y soluciones correctivas y/o preventivas.
- Realizar una proyección didáctica para ganar experiencia en la programación y evaluación de la asignatura Matemáticas.

El trabajo final de máster debe dar una visión general de los agentes y aspectos que influyen de manera directa e indirecta en la docencia y que el docente debe conocer previo al desarrollo de una unidad didáctica. El contexto debe condicionar al docente en la forma de proceder.

Por un lado, la revisión de la normativa en cambio constante debe generar en el docente una metodología de trabajo ajustable a ella y por tanto, la forma de trabajar tiene que integrar un proceso de mejora continua. De esta forma, se consigue una visión crítica del docente hacia el trabajo desarrollado.

Por otro lado, el estudio comparativo de libros de texto debe ampliar la perspectiva del docente hacia la búsqueda de recursos alternativos sobre los que el alumnado pueda conseguir las diferentes competencias. La consecución de las competencias se debe basar en actividades abiertas que fomenten el pensamiento, razonamiento matemático y sean útiles en la vida real.

El enfrentamiento del futuro docente al desarrollo de un tema del proceso de oposición debe suponer un acercamiento al temario de la prueba de selección y un análisis del resto del temario, realizado de forma implícita a la hora de elección del tema.

El análisis de estudios en educación debe servir para conocer los posibles problemas en el aula y aplicar acciones con un fin preventivo. Además, el estudio de diferentes metodologías didácticas debe permitir la elección de la más adecuada al contexto del aula.

Así, tras un análisis de los aspectos que influyen en la docencia, se pretende facilitar el desarrollo de una unidad didáctica que contenga todos los factores citados y permita la consecución de las competencias por parte del alumnado.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

Este capítulo centra su atención en el análisis del currículo asociado a la asignatura de Matemáticas localizada en el segundo curso de ESO en la Comunidad Autónoma de Andalucía. En concreto sobre el bloque 4, dedicado a funciones. Además, se establece una comparativa entre dos libros de texto con el objetivo de detectar diferencias, similitudes y carencias respecto al currículo vigente.

Se considera la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) donde se establecen los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de este bloque y curso académico.

1.1. Contenidos

Contenidos según la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021):

- El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta.
- Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

1.2. Criterios de evaluación

Competencias a desarrollar según la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) para los criterios de evaluación aplicables:

- CCL, competencia de comunicación lingüística.
- CMCT, competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- CAA, competencia de aprender a aprender.
- SIEP, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

La tabla 1.1 recoge a modo de resumen los criterios de evaluación, asociándolos con las respectivas competencias transversales que son compartidas por las distintas áreas de conocimiento. Estas competencias transversales se aplican tanto en el área científico-tecnológico, en el área social-humanístico como en el área artística.

Criterios de evaluación	**Competencias**
2. Manejar las distintas formas de representación de una función, pasando de unas formas a otras y eligiendo la más conveniente según el contexto.	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
3. Comprender el concepto de función, reconociendo, interpretando y analizando las gráficas funcionales.	CMCT, CAA.
4. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.	CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Tabla 1.1: Competencias adquiridas y criterios de evaluación en el Bloque 4, funciones para 2º de ESO.

1.3. Estándares de aprendizaje evaluables

Estándares de aprendizaje evaluables según la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021):

2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.

3.1. Reconoce si una gráfica representa una función.

3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.

4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

4.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.

1.4. Objetivos

El bloque 4 asociado a funciones, junto con el resto de bloques de la asignatura Matemáticas desarrollada en segundo de la ESO, contribuyen a que el alumnado culmine los siguientes objetivos (BOJA, 2021):

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor; utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, la salud, el consumo, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de nuestra sociedad y al conocimiento matemático acumulado por la humanidad, la aportación al crecimiento económico desde los principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social o la convivencia pacífica.

1.5. Comparativa de libros de texto

En esta sección se comparan dos libros de texto, Matemáticas 2: ESO de la editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2016) y Matemáticas, 2 ESO: serie resuelve (Almodóvar, 2016) de la editorial Santillana.

En primer lugar se analizan los contenidos sobre funciones en ambos libros, siendo identificados según su editorial para hacer referencia a ellos. La tabla 1.2 recoge los contenidos del tema que dedican al bloque de funciones ambas editoriales.

Anaya	**Santillana**
Concepto de función.	Características de una función.
	Continuidad, discontinuidad,
Crecimiento, decrecimiento	crecimiento, decrecimiento,
máximos y mínimos.	máximos, mínimos,
	simetría y periocidad.
Funciones de proporcionalidad.	Función de proporcionalidad directa.
Funciones lineales.	Función afines.
Funciones constantes.	Función constante.

Tabla 1.2: Contenidos de Anaya y Santillana

Ambas editoriales definen los conceptos de función, crecimiento y decrecimiento de funciones en un dominio y máximos y mínimos de una función. Sin embargo, Santillana amplia el contenido añadiendo los conceptos de función continua, discontinua, simétrica y periódica. Ambos libros de texto desarrollan los conceptos de función de proporcionalidad y funciones lineales o afines, extendiendo a la función lineal de pendiente nula, función constante. Los contenidos se ajustan con los de la Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) a excepción de la utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas. Los libros de texto no están preparados para la utilización de otros recursos ajenos al libro de texto y por ende este contenido queda relevado al profesorado para desarrollarlo.

Anaya combina definiciones, ejemplos, ejercicios resueltos y propone actividades a realizar relacionadas con definiciones descritas previamente. Los ejemplos están enfocados a operaciones cotidianas. Al final de la unidad de funciones presenta una batería de ejercicios y problemas con el fin de consolidar los conceptos a través de las competencias adquiridas. La estructura en la que presenta sus contenidos dentro del tema sigue un patrón repetitivo. En primer lugar, Anaya introduce el contenido a partir de ejemplos. En segundo lugar, dispone un apartado dedicado a la definición del concepto. Finalizando con un ejercicio resuelto y proponiendo actividades relacionadas con el concepto. La figura 1.2 recoge un ejemplo del patrón repetitivo.

El libro de Santillana se incluye dentro del conjunto de libros englobados en el *proyecto saber hacer* de la editorial. Este libro contiene numerosos ejemplos y ejercicios resueltos de diferentes grados de dificultad, orientados al procedimiento de resolución y dentro de un contexto cotidiano. Al inicio de la unidad presenta ejercicios de auto evaluación para conocer el nivel inicial del alumnado, continua intercalando definiciones, ejemplos y actividades a realizar, finalizando con un listado de actividades para evaluar si se han obtenido las competencias de la unidad. Cabe destacar que cada unidad de este libro está relacionada con un objetivo de desarrollo sostenible establecidos por la Organización de las Naciones Unidas (ONU). Este libro sigue la estructura definida por Anaya previamente pero la intercala con baterías de actividades.

Tanto Anaya como Santillana sustituyen la letra como variable por magnitudes físicas para facilitar la comprensión del significado del grafo de funciones. Este cambio de las variables habituales por variables asociadas a magnitudes físicas puede incurrir en una confusión entre la variable y la unidad de medida (Amaya, 2020).

Anaya en su tema once sobre funciones integra un total de veintidós actividades para desarrollar por parte del alumnado. Sin embargo, Santillana en su tema trece contiene ciento siete actividades sin resolver en el bloque de funciones. La tabla 1.3 recoge cuantitativamente la dedicación de las editoriales a cada uno de los contenidos en sus actividades. Así, se pueden comparar los porcentajes relativos que cada editorial establece en actividades relacionadas con dichos contenidos.

	Anaya		Santillana	
Contenido	Número de actividades	Porcentaje relativo (%)	Número de actividades	Porcentaje relativo (%)
Concepto de función	4	18,2	44	41,1
Propiedades de funciones	6	27,3	25	23,4
Función de prop. directa	1	4,5	11	10,3
Función lineal	8	36,4	22	20,6
Función constante	3	13,6	5	4,7
Total	22	100	107	100

Tabla 1.3: Número de actividades y porcentajes relativos relacionados con un contenido

Ambas editoriales muestran una semejanza porcentual en actividades dedicadas a contenidos sobre las propiedades de las funciones y la función de proporcionalidad directa. No obstante, el contenido más frecuente en actividades de las editoriales difiere, mientras que Santillana dedica gran parte de sus actividades a reforzar el concepto de función, Anaya aboga por la función lineal como el contenido más recurrente en sus actividades. La figura 1.1 muestra esta comparativa gráficamente.

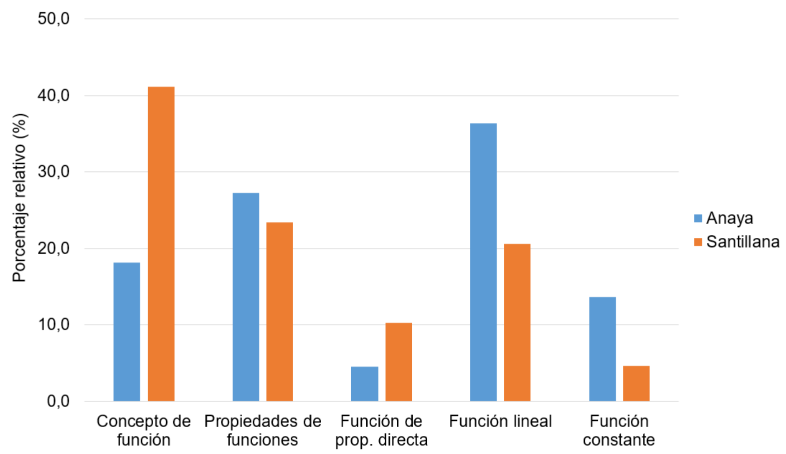


Figura 1.1: Porcentajes relativos relacionados con un contenido, comparativa entre editoriales

Dentro del número de actividades sin resolver que desarrolla cada editorial se encuentran distintas tipologías.

Anaya divide sus recursos según la extensión y la finalidad de los mismos:

- *Actividades*, se localizan debajo de definiciones y ejemplos resueltos con lo que estos recursos tienen un carácter reforzador de la definición dada y aplicabilidad limitada.
- *Ejercicios*, relacionan conceptos y contenidos, mejoran su aplicabilidad pero tienen una extensión limitada.
- *Problemas*, integran un conjunto de Ejercicios interrelacionados, destaca por ser el recurso de mayor extensión y dedicación temporal.

Santillana clasifica sus actividades en distintas categorías según para lo que hayan sido diseñadas:

- *Claves para empezar*, actividades para recordar conceptos previos necesarios.
- *Vida cotidiana*, actividades para recordar conceptos previos necesarios relacionados con la vida cotidiana.
- *Resuelve el reto*, actividades para introducir el contenido nuevo.
- *Actividades*, recursos de limitada extensión utilizados para reforzar definiciones y contenidos.
- *Debes hacer*, actividades recomendadas para hacer como mínimo.
- *Actividades finales*, recursos para la auto-evaluación del alumno, tienen una extensión mayor y combinan diferentes contenidos en un mismos ejercicio.
- *Competencia matemática*, actividades diseñadas para el desarrollo de la habilidad matemática adquerida en la vida cotidiana.
- *Formas de pensar*, actividades originadas para fomentar el razonamiento matemático.
- *Pruebas PISA*, actividades análogas a las que aparecen en las prueba PISA.

Sin embargo, las actividades presentes en ambos libros limitan la aplicabilidad de las mismas en la realidad. Además, no se hace referencia al uso de la modelización matemática de forma implícita y, por tanto, se induce al alumnado a un aprendizaje memorístico del álgebra que describe fenómenos mundanos.

Desde mi punto de vista, la sustitución de variables matemáticas por variables físicas no acerca los problemas a la realidad. Por un lado, las editoriales deberían de desarrollar actividades basadas en necesidades reales y proponer soluciones a través de herramientas tangibles, como pueden ser las TIC (tecnologías de la información y comunicación). De esta forma, se dinamiza el proceso de aprendizaje y la adquisición de la competencia a partir del saber hacer.

Por otro lado, el uso de la modelización matemática en el planteamiento y resolución de actividades plantearía una estructura de trabajo vigente en diferentes estratos del tejido laboral y por tanto acercaría las matemáticas a la vida cotidiana.

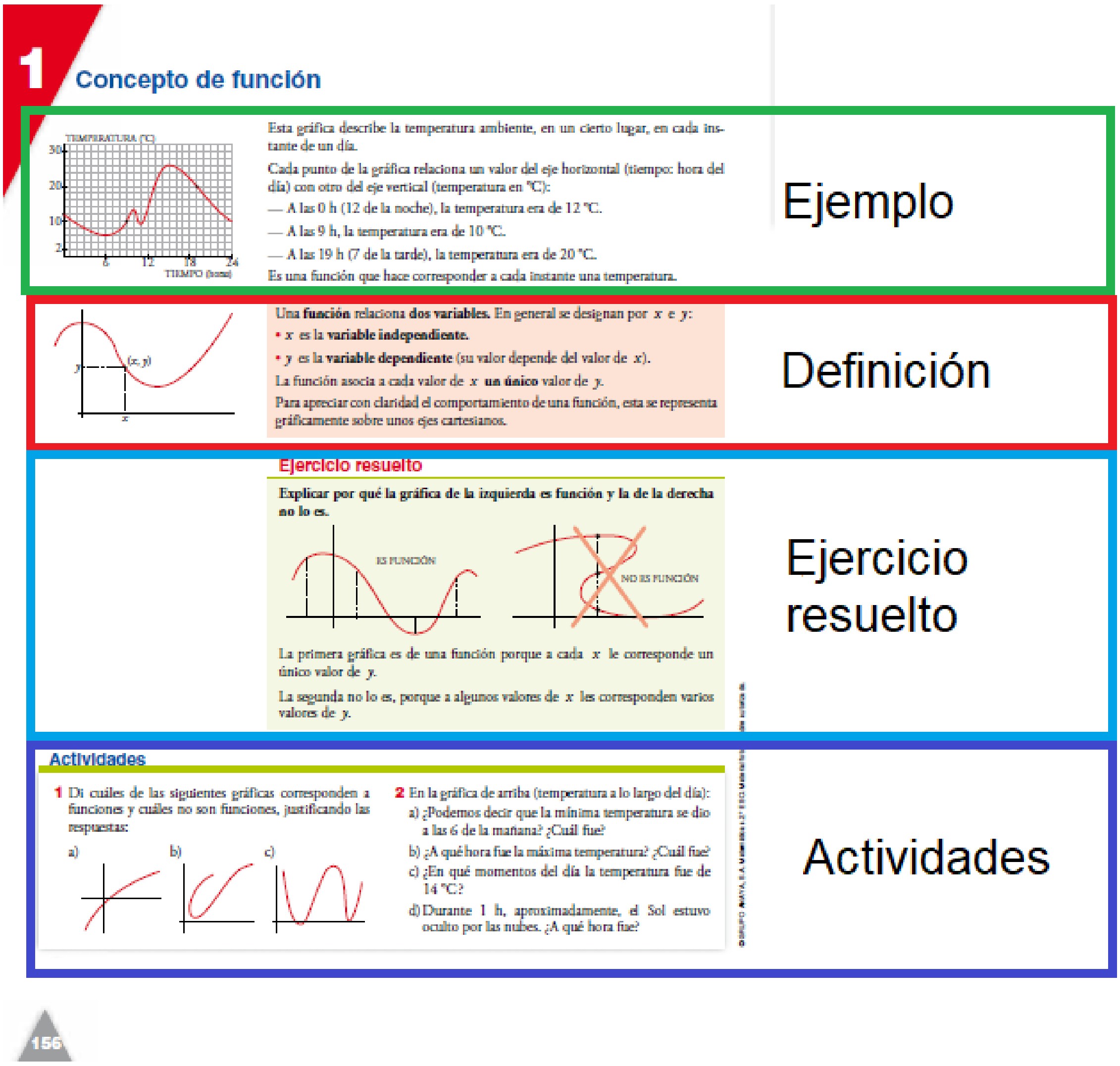


Figura 1.2: Estructura definida por Anaya para desarrollar el contenido

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Este capítulo recoge un tema a desarrollar durante el proceso de selección del profesorado público para la Educación Secundaria y Bachillerato en la especialidad de Matemáticas. El tema corresponde con el número veintiuno, *funciones reales de variable real, funciones elementales, situaciones en que aparece y función compuesta* (BOE, 1993).

2.1. Breve introducción

El concepto de funciones se inicia en el s. XIV por la necesidad de representar la relación entre distintas variables de manera gráfica. En siglos posteriores los problemas de estudio se dividieron en dos variantes generales, el cálculo de la tangencia que daría pie a la derivación y el cálculo de áreas que daría lugar a la integración. Leibnitz y Newton sistematizaron ambos problemas al formular los métodos generales del cálculo infinitesimal (Ortega, 1993).

Leibnitz durante el s. XVII desarrolla la definición de función a través del estudio de máximos/mínimos y el desarrollo de la metodología que determina la recta tangente en un punto del grafo de la función. Durante finales del s. XVII principios del s. XVIII, Euler define el concepto de función como, *cualquier expresión analítica formada con una cantidad variable y con números o cantidades constantes* y empieza a escribir como $f(x)$ para referirse a una función f con dependencia de una variable x (Galindo y López, 2009). Esta definición es usada en la cotidianidad sin hacer referencia al concepto de función.

No obstante, la definición formal actual se le atribuye a Dirichlet en torno al año 1837, al asociar a un valor de la variable independiente un único valor finito de la variable dependiente. Hasta el momento no había constancia de esta propiedad y entendían las funciones como una simple expresión analítica (Elstrodt, 2007).

En la actualidad el estudio del comportamiento de funciones se utiliza para denotar el estado de los procesos. Entender y comprender el comportamiento condiciona las tomas de decisiones en distintos sectores. Además, su estudio se ha facilitado gracias al desarrollo de herramientas gráficas y numéricas que permiten su evaluación y representación.

2.2. Definición de función

Sean A y B dos conjuntos que mantienen una relación entre sus elementos, conformando una correspondencia entre A y B. Así bien, a un único elemento del primer conjunto corresponde con un único del segundo, se establece una aplicación entre A y B.

En el caso de que A y B sean subconjuntos de $\mathbb{R}$, diremos que se trata de una función de variable real,

$$f : A \in \mathbb{R} \rightarrow B \in \mathbb{R} \;/\; x \rightarrow y = f(x),$$

siendo y la variable dependiente y x la variable independiente.

Definición: El dominio de una función f, Dom$f$, es el conjunto de valores en donde se encuentra definida la variable independiente,

$$\text{Dom}f = \{x \in A \;/\; \exists f(x)\}.$$

Definición: El recorrido de una función f, Rec$f$, se define como los valores que puede tomar la variable dependiente,

$$\text{Rec}f = \{y \in B \;/\; \exists x \in A \text{ que verifica que } y = f(x)\}.$$

Definición: Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio y $f(x) = g(x)$ en todo el dominio.

2.3. Operaciones con funciones

Suma

Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con dominios A y B, respectivamente. La suma de las funciones f y g se designa como la función suma $f + g$ tal que,

$$f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}; \;\; (f + g)(x) = f(x) + g(x); \;\; \forall x \in A \cap B.$$

La suma de funciones constituye un **grupo abeliano**, ya que verifica las propiedades conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro y opuesto.

Propiedades de la suma de funciones:

Proposición: La suma de funciones es conmutativa.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x);\ \forall x \in A \cap B = B \cap A,$$

ya que la suma de números reales es conmutativa. $\square$

Proposición: La suma de funciones es asociativa.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ y $h : C \to \mathbb{R}$,

$$f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x);$$

$$\forall x \in A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

ya que la suma de números reales es asociativa. $\square$

Proposición: El elemento neutro de la suma de funciones es $0(x)$.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $0 : B \to \mathbb{R}$, donde $0(x) = 0;\ \forall x \in B$,

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x); \forall x \in A \cap B.$$

$\square$

Proposición: El elemento opuesto de f es $-f$.

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}$,

$$(-f+f)(x) = -f(x) + f(x) = 0(x);\ \forall x \in A;$$

al tratarse de suma de funciones reales de variable real, el elemento opuesto de una función real de variable real es ella misma multiplicada por -1 (ver la sección producto por escalar). $\square$

Producto por escalar

Definición: Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$. La función producto de una función por escalar se designa como $\alpha \cdot f$ tal que,

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x);\ \forall x \in A.$$

Las funciones reales de variable real conforman un **espacio vectorial** en $\mathbb{R}$ respecto a la suma de funciones y el producto por escalar al cumplir la propiedad distributiva respecto la suma y el producto por escalar, pseudo asociativa respecto al producto por escalar y al existir elemento neutro en el producto por escalar.

Propiedades del producto por escalar:

Proposición El producto por escalar es distributivo respecto a la suma de funciones y a la suma de números escalares.

Demostración. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x);\ \forall x \in A \cap B,$$

ya que $\alpha, f(x)$ y $g(x)$ son números reales.

Sea $\beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha + \beta)f(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x);\ \forall x \in A,$$

ya que α, β y $f(x)$ son números reales. □

Proposición: El producto por escalar es pseudo asociativo.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(\beta \cdot f)(x) = \alpha(\beta \cdot f(x)) = \alpha \cdot \beta \cdot f(x) = \beta \cdot \alpha \cdot f(x) = \beta(\alpha \cdot f(x)) = \beta(\alpha \cdot f)(x);\ \forall x \in A,$$

ya que α, β y $f(x)$ son números reales. □

Proposición: El elemento neutro del producto por escalar es el 1.

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}$,

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x),$$

ya que $f(x)$ es un número real. □

Producto de funciones

Definición: Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$. El producto de las funciones f y g se define como,

$$f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R} \;/\; (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); \forall x \in A \cap B.$$

El producto de funciones constituye un **grupo abeliano** ya que cumple las propiedades conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro e inverso.

Propiedades del producto de funciones:

Proposición: El producto de funciones es conmutativo.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g \cdot f)(x);\ \forall x \in A \cap B,$$

ya que el producto de números reales es conmutativo. □

Proposición: El producto de funciones es asociativo.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ y $h : C \to \mathbb{R}$,

$$(f(g \cdot h))(x) = f(x)(g(x) \cdot h(x)) = (f(x) \cdot g(x))h(x) = ((f \cdot g)h)(x);\ \forall x \in A \cap B \cap C,$$

ya que el producto de números reales es asociativo. □

Proposición: El elemento neutro del producto de funciones es $1(x)$.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $1(x) = 1$,

$$(1(x) \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x); \forall x \in A,$$

ya que $f(x)$ y $1(x)$ pertenecen al conjunto de los números reales. □

Proposición: El elemento inverso de f es $1/f$.

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}$,

$$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x)\frac{1}{f(x)} = 1; \forall x \in A - \{x \text{ donde } f(x) = 0\}.$$

□

La suma producto de funciones constituye un **anillo conmutativo** ya que verifica la propiedad conmutativa y distributiva.

Propiedades de la suma producto de funciones:

Proposición: La suma producto de funciones verifica la propiedad distributiva.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ y $h : C \to \mathbb{R}$,

$$(f + g)(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x);\ \forall x \in A \cap B \cap C,$$

ya que la suma producto de números reales es distributiva. $\square$

Composición de funciones

Definición: Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$. La composición de las funciones f y g se define como,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),\text{ donde } g(x) \in A; \forall x \in B.$$

Propiedades de la composición de funciones:

Proposicón: La composición de funciones es asociativa.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ y $h : C \to \mathbb{R}$,

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = (f(g) \circ h)(x) = ((f \circ g) \circ h)(x);$$

$$g(h(x)) \in A;\ h(x) \in B;\ \forall x \in C.$$

$\square$

Proposición: La composición de funciones tiene elemento neutro, $I(x) = x$.

Demostración. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ e $I(x) = x$,

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x) = f(I(x)) = (f \circ I)(x);\ \forall x \in A.$$

$\square$

Definición: Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $I(x) = x$. Se designa función recíproca de f a la función g que verifique,

$$(f \circ g))(x) = (g \circ f)(x) = I(x) \text{ donde } g(x) \in A;\ \forall x \in B \text{ y } f(x) \in B;\ \forall x \in A.$$

2.4. Conceptos básicos

Definición: Se designa G como grafo de $f : A \to \mathbb{R}$ al siguiente conjunto,

$$G : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

El grafo puede expresarse a través de una tabla de valores, en forma algebraica y/o a través de un gráfico en un diagrama cartesiano. El sistema de referencia más común es el ortonormal.

Definición: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. La imagen especular de f respecto al eje de abscisas es $-f$. La figura 2.1 recoge un ejemplo gráfico de esta definición.

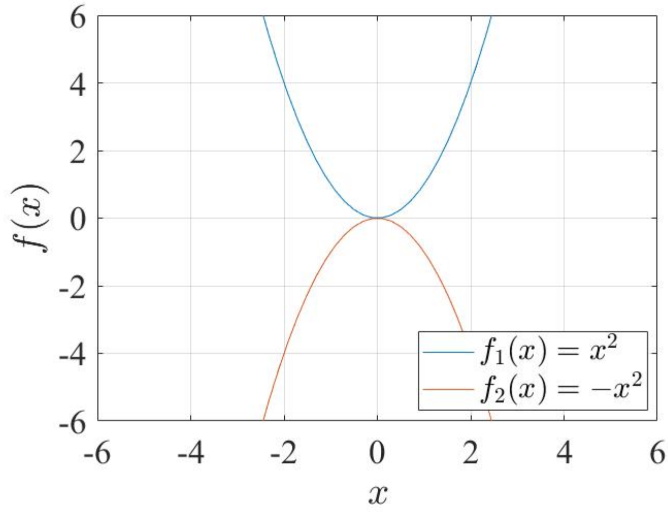


Figura 2.1: Ejemplo de funciones especulares

Definición: Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ es par si

$$f(x) = f(-x); \forall x \in A,$$

siendo el eje de ordenadas un eje de simetría. La figura 2.2 recoge el ejemplo gráfico de una función par.

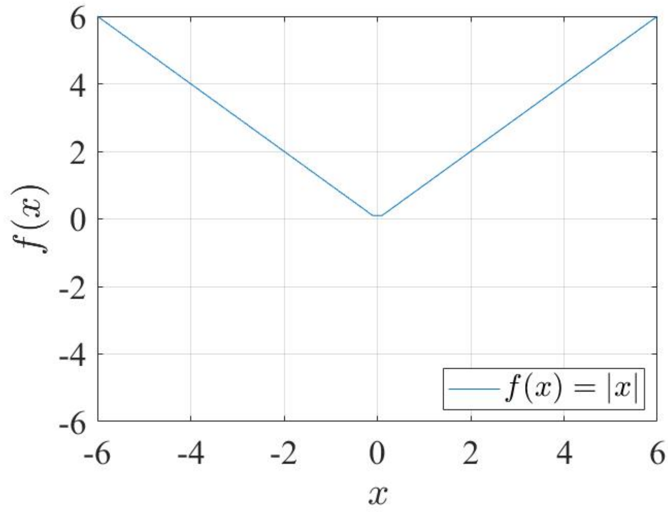


Figura 2.2: Ejemplo de función par

Definición: Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ es impar si

$$f(x) = -f(-x); \forall x \in A.$$

En este caso existe simetría respecto al origen de coordenadas. La figura 2.3 recoge un ejemplo gráfico de una función impar.

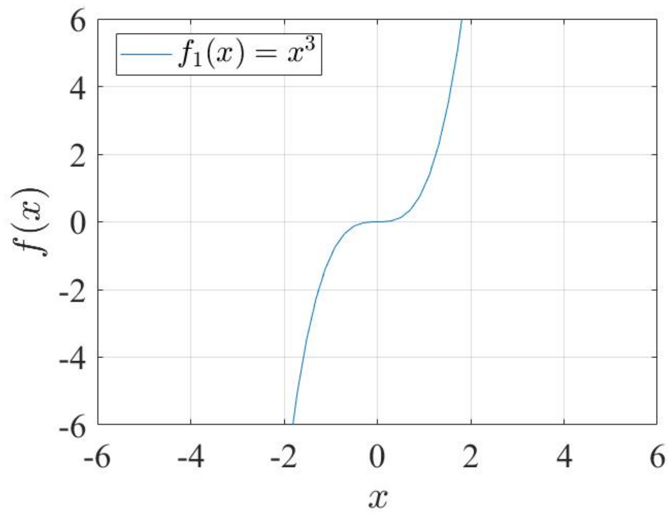


Figura 2.3: Ejemplo de función impar

Definición: Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva si

$$x_1 = x_2; f(x_1) = f(x_2); \forall x_1, x_2 \in A.$$

Definición: Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva si

$$\forall y \in \mathbb{R}; \exists x \text{ tal que } f(x) = y;\ \text{Rec} f = \mathbb{R}.$$

Definición: Diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición: Diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A$ si

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in A; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

La función será continua en su dominio si lo es cada uno de los puntos que lo conforman. Por tanto, la continuidad en un punto es una propiedad local.

Teorema: Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones con dominios A, B respectivamente. Se establece que:

- Las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en todos los puntos del dominio $A \cap B$ donde f y g sean continuas.
- $1/g$ es continua en todos los puntos del dominio B donde g sea continua y no se anule. Así, la función cociente de dos funciones continua f/g siempre será continua si el denominador no se hace nulo.

Demostración. Sea un punto $a \in A \cap B$ en el que f y g son continuas. Veamos si $f+g$ y $f \cdot g$ son continuas en a.
Como f y g son continuas se verifica que:

$$\forall \epsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : x \in A \cap B \wedge |x-a| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon_1,$$

$$\forall \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ : x \in A \cap B \wedge |x-a| < \delta_2 \quad \rightarrow \quad |g(x) - g(a)| < \epsilon_2,$$

donde $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1)$ y $\delta_2 = \delta_2(\epsilon_2)$.

$$|(f+g)(x)-(f+g)(a)| = |(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))| \leq |(f(x)-f(a))|+|(g(x)-g(a))| < \epsilon_1+\epsilon_2 = \epsilon,$$

entonces tomando $\delta =$min(δ_1, δ_2), se tiene que,

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \epsilon; \ x \in A \cap B \text{ y } |x-a| < \delta.$$

En el caso del producto,

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| &= |f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))|. \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)|. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$, el valor de $|g(a)||f(x) - f(a)|$ se puede controlar haciendo $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(|g(a)+1|)}$. Se divide por $|g(a)+1|$ para evitar la problemática cuando $g(a) = 0$. Entonces siendo $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1)$,

$$x \in A \cap B \wedge |x-a| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad |g(a)||f(x) - f(a)| < |g(a)|\frac{\epsilon}{2(|g(a)|+1)} < \frac{\epsilon}{2},$$

$$x \in A \cap B \wedge |x-a| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad |f(x)| = |f(a) + (f(x) - f(a))| < |f(a)| + \epsilon_1.$$

Tomando $M = |f(a)| + \epsilon_1; \ \epsilon_2 = \epsilon/(2M)$ y $\delta_2 = \delta_2(\epsilon_2)$ con $\delta =$min(δ_1, δ_2) se deduce,

$$x \in A \cap B \wedge |x-a| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x)||g(x) - g(a)| < M\tfrac{\epsilon}{2M} \text{ y } |g(a)||f(x) - f(a)| < \tfrac{\epsilon}{2},$$

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| < \epsilon.$$

La demostración de la función cociente de funciones se realiza de forma análoga a la anterior, eliminado del dominio el valor de x donde el denominador se haga nulo y sustituyendo el segundo multiplicando por la función inversa. □

A partir de este teorema se deduce:

- Si la función suma de funciones es continua y un sumando es una función continua, entonces el otro sumando también lo es.
- La suma de una función continua y otra discontinua es discontinua.
- Si la función producto de funciones es continua y uno de los multiplicandos es una función continua y no se anula, el otro multiplicando es una función continua

- La función producto de dos funciones una continua y que no se anula con una discontinua da lugar a una función discontinua.

Definición: $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_1 \leq x_2;\ x_1, x_2 \in A$ es monótona creciente si,

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Definición: $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in A$ es estrictamente creciente si,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Definición: $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_1 \leq x_2; x_1, x_2 \in A$ es decreciente si,

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Definición: $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in A$ es estrictamente decreciente si,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con imagen Im$f = f(A)$ pertenecientes al conjunto de los números reales.

Definición: $f : A \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente si existe $S \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) \leq S;\ \forall x \in A.$$

Definición: $f : A \to \mathbb{R}$ está acotada inferiormente si existe $i \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) \geq i;\ \forall x \in A.$$

Definición: una función está acotada si está acotada superiormente e inferiormente.

Definición: Se define como máximo absoluto de $f : A \to \mathbb{R}$ a $M \in \mathbb{R}$ si,

$$\exists a \in A \ /\ f(x) \leq f(a) = M; \forall x \in A.$$

Definición: Se define mínimo absoluto de $f : A \to \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{R}$ si,

$$\exists b \in A \ /\ f(x) \geq f(b) = m; \forall x \in A.$$

Definición: Un máximo relativo se define como un máximo absoluto en un intervalo acotado,

$$\exists a \in A \ /\ f(x) \leq f(a) = M; \forall x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]; \exists \epsilon > 0.$$

Definición: Un mínimo relativo se define como un mínimo absoluto en un intervalo acotado,

$$\exists b \in A \ /\ f(b) \leq f(x) = m; \forall x \in [b-\epsilon, b+\epsilon]; \exists \epsilon > 0.$$

Teorema de Wierstrass: Una función continua en un intervalo acotado y cerrado contiene un mínimo y máximo absoluto en ese intervalo.

Demostración.

Primera parte:
Sea f una función continua en $[a,b]$:

$$\forall x_0 \in [a,b];\ \forall \epsilon > 0;\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon;\ \forall x \in [a,b].$$

Si $\epsilon = 1$, se obtiene,

$$\forall x_0 \in [a,b];\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1.$$

Sea n un número de subintervalos de $[a,b]$ iguales con longirud inferior a $\delta \Rightarrow (b - a)/n < \delta$ y $[a_k, a_{k+1}]$ con $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ los subintervalos

Si $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$, se obtiene que,

$$\forall x_k \in [a_k, a_{k+1}];\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x - x_k| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_k)| < 1.$$

Como $[a_k, a_{k+1}] < \delta,\ 0 < |x - x_k| < \delta$ (porque es uniformemente continua),

$$\forall x_k \in [a_k, a_{k+1}] \Rightarrow |f(x) - f(x_k)| < 1.$$

Esto implica,

$$\forall x_k \in [a_k, a_{k+1}] \Rightarrow -1 - |f(x_k)| < f(x) < 1 + |f(x_k)|.$$

Se define el supremo,

$$C = \text{sup}\{f(x_k)\ k = 0,1,2\ldots,n-1\} \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ -1 - |C| < f(x) < 1 + |C|,$$

si f es continua, está acotada.

Segunda Parte
Se demuestra la existencia del máximo absoluto y del mínimo absoluto por el axioma del supremo. Reduciendo al absurdo.

Sea f una función continua y acotada en $[a,b]$. Se supone la no existencia del máximo M en x_M,

$$x_M \in [a,b]\ /\ f(x_M) \neq M.$$

Definimos g como una función continua y acotada en $[a,b]$ tal que,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Sea N una cota superior de g tal que,

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) < N.$$

Es decir, $\forall x \in [a,b],\ f(x) > M - \frac{1}{N} \Rightarrow \text{sup}_{x\in[a,b]} f(x) < M$ lo que contradice a M como máximo absoluto. De este modo, $\exists x_M \in [a,b]$ de forma que $f(x_M) = M$. □

El teorema de Weierstrass es un teorema de existencia de máximos y mínimos absolutos pero no te permite calcularlos.

Definición: Se establece una función $f : A \to \mathbb{R}$ con dominio A periódica de periodo $T \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, si $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = f(x+T), \forall x \in \mathbb{R}$.

La función adquiere las mismas imágenes para, $n \cdot T; \forall n \in \mathbb{Z}$.

2.5. Funciones elementales y situaciones en que aparecen

Funciones polinómicas

Definición: Una función polinómica es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de forma que,

$$f(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i;$$

donde a_i con $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ son números reales y n el grado del polinomio.

Su aplicación en la realidad dependen de su grado y coeficientes.

Las funciones polinómicas de primer grado son de la forma,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$x \to f(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Según los valores de los coeficientes a, b se obtienen diferentes propiedades para la función polinómica de primer grado. Los valores de los coeficientes y las propiedades asociadas se recogen en la tabla 2.1.

a	**b**	**Propiedades**
$\neq 0$	0	Aplicación lineal, continua y biyectiva.
$\neq 0$	$\neq 0$	Aplicación afín, sin corte al origen de coordenadas.
> 0	-	Función estrictamente creciente.
< 0	-	Función estrictamente decreciente.
$\neq 0$	0	Función par.
0	$\neq 0$	Función impar.

Tabla 2.1: Coeficientes y propiedades de funciones polinómicas de primer grado

Los puntos de corte de una función polinómica de primer grado con los ejes del sistema de referencia ortonormal son,

si $a = 0; P(0, b),$

$$\text{si } a \neq 0; P\left(-\frac{b}{a}, 0\right).$$

Las funciones lineales se utilizan para modelizar relaciones entre variables que tienen este comportamiento en un dominio de estudio. Por ejemplo, el espacio s y el tiempo t en un movimiento rectilíneo relacionadas a través de la velocidad v,

$$s = v \cdot t.$$

Otro ejemplo de relación lineal entre variables en un dominio determinado se encuentra entre la tensión σ y la deformación ϵ de materiales isotrópicos, relacionadas a través del módulo de Young E al ser este la constante de proporcionalidad,

$$\sigma = E \cdot \epsilon,$$

En general, la relación lineal se utiliza para simplificar relaciones algebraicas entre variables, ejemplo de ello es la relación entre la diferencia de potencial V y la intensidad eléctrica I que circula por una impedancia Z,

$$V = I \cdot Z.$$

Las funciones cuadráticas o de segundo grado siguen la siguiente expresión algebraica,

$$ax^2 + bx + c = f(x); a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0;$$

Gráficamente, se corresponde con una parábola. El gráfico puede intersectar al eje de ordenadas y de abscisas, los puntos de corte reales con en el eje de abscisas son,

$$P_1\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right); P_2\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right).$$

El punto de corte con el eje de ordenadas es,

$$P_3(0, c).$$

Definición: El vértice de la parábola corresponde con el punto cuya pendiente es nula. A partir de esta definición se calcula el punto correspondiente al vértice,

$$P_4\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right).$$

Según los valores de los coeficientes a, b se obtienen diferentes propiedades para la función polinómica de segundo grado. Los valores de los coeficientes y las propiedades asociadas se recogen en la tabla 2.2. La figura 2.4 refleja dos ejemplos de parábolas con $a > 0$ y $a < 0$.

a	b	Propiedades
> 0	-	El vértice es un mínimo absoluto.
> 0	-	Función creciente entre $(-b/2a, \infty)$.
> 0	-	Función decreciente entre $(-\infty, -b/2a)$.
< 0	-	El vértice es un máximo absoluto.
< 0	-	Función decreciente entre $(-b/2a, \infty)$.
< 0	-	Función creciente entre $(-\infty, -b/2a)$.
-	0	Función par.

Tabla 2.2: Coeficientes y propiedades de funciones polinómicas de segundo grado

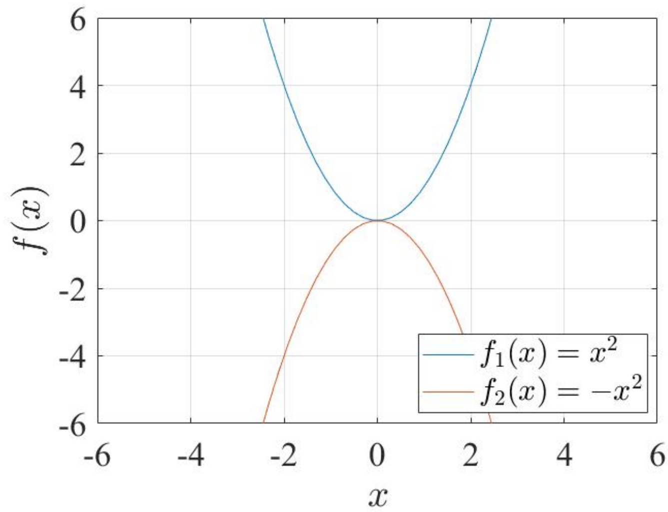


Figura 2.4: Funciones cuadráticas, $a > 0; a < 0$

Las funciones cuadráticas aparecen en la caracterización del movimiento uniformemente acelerado que relaciona el espacio s frente al tiempo t a través de la influencia de la gravedad g, esto ocurre en un tiro parabólico,

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Otra aplicación práctica de estas funciones se muestra en la relación entre el caudal Q y la altura H que proporciona una bomba hidráulica,

$$H \propto Q^2.$$

Además, la energía mecánica E_m relaciona a través de la energía potencial E_p y cinética E_c dos funciones, una polinómica de primer grado con otra de segundo grado si se evalúan respecto al tiempo t. En un movimiento rectilíneo $h = v \cdot t$ y $v = g \cdot t$. Si se desprecian las pérdidas asociadas al rozamiento, la energía mecánica se conserva,

$$E_m = E_p + E_c = 0,$$

$$m \cdot g \cdot h = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2,$$

con m siendo la masa del sólido, g la gravedad, h la altura a la que se encuentra el sólido y v la velocidad del mismo.

Funciones potenciales

Definición: Una función potencial es toda aquella función que siga la siguiente forma,

$$x \to f(x) = x^{\alpha}; \alpha \in \mathbb{R}; \alpha \neq 0.$$

Las funciones potenciales son biyectivas en $\mathbb{R}^+$ y verifican,

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Para $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, la tabla 2.3 recoge el valor del exponente y las propiedades asociadas.

α	**Propiedades**
$2, 4, \ldots, 2n$	Función par.
$2, 4, \ldots, 2n$	Estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.
$2, 4, \ldots, 2n$	Estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$.
$1, 3, \ldots, n$	Función impar.
$1, 3, \ldots, n$	Estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.
$1, 3, \ldots, n$	Estrictamente creciente en $\mathbb{R}^-$.

Tabla 2.3: Valor del exponente $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ y propiedades de funciones potenciales

Para $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^-$, la tabla 2.4 recoge el valor del exponente y las propiedades asociadas.

α	**Propiedades**
$-2, -4, \ldots, -2n$	Función par. Dom$f = \mathbb{R} - \{0\}$.
$-2, -4, \ldots, -2n$	Estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.
$-2, -4, \ldots, -2n$	Estrictamente creciente en $\mathbb{R}^- - \{0\}$.
$-1, -3, \ldots, -n$	Función impar. Dom$f = \mathbb{R} - \{0\}$.
$-1, -3, \ldots, -n$	Estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.
$-1, -3, \ldots, -n$	Estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^- - \{0\}$.

Tabla 2.4: Valor del exponente $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^-$ y propiedades de funciones potenciales

Las figuras 2.5 y 2.6 reflejan gráficamente el impacto del valor del exponente según sea este par o impar.

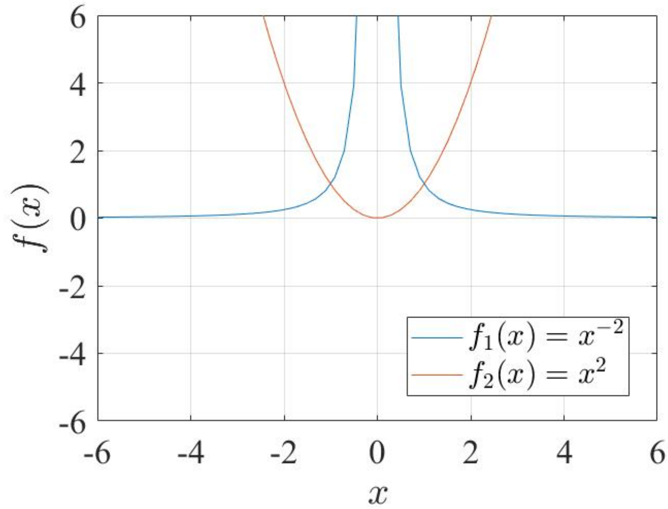


Figura 2.5: Funciones potenciales con exponente par

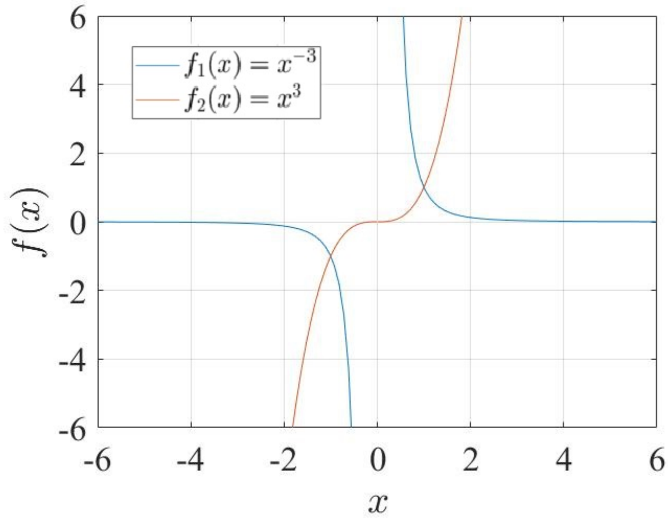


Figura 2.6: Funciones potenciales con exponente impar

Para, $\forall \alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, la función refleja el comportamiento de una función raíz n-ésima. Entre este tipo de funciones destaca la raíz cuadrada que queda definida en el dominio $\mathbb{R}^+$.

Las funciones potenciales aparecen en la realidad como recurso en el cálculo de volúmenes a partir de dimensiones características del objeto de análisis. Un ejemplo es el volumen V de una esfera el cual depende del radio r,

$$V = 4/3\pi r^3.$$

Funciones de proporcionalidad inversa

Definición: Una función de proporcionalidad inversa es toda aquella función que siga la siguiente forma,

$$x \to f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \;/\; cx+d \neq 0.$$

Gráficamente se corresponde con una hipérbola. Además, se puede expresar tal que,

$$f(x) = p + \frac{K}{x-q}; K, p, q \in \mathbb{R},$$

siendo $y = p$ y $x = q$ las expresiones algebraicas de los ejes de la representación gráfica.

Si $K > 0$, la función es estrictamente creciente y si $K < 0$ la función es estrictamente decreciente.

La aplicación de este tipo de funciones se observa por ejemplo en la relación entre la frecuencia fr y el periodo T de una función periódica,

$$T = \frac{1}{fr}.$$

Otra aplicación aparece en la relación entre la intensidad I y la impedancia R asociada a un diferencial de potencial V,

$$I = \frac{V}{R}.$$

Funciones exponenciales

Definición: Una función exponencial es toda aquella función que siga la siguiente forma,

$$x \to f(x) = a^x; a \in \mathbb{R}.$$

Las funciones exponenciales son funciones biyectivas, continuas y verifican,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Se encuentran aplicaciones de estas funciones en la ecuación de desintegración radiactiva.

Funciones logarítmicas

Definición: Una función logarítmica es toda aquella función que siga la siguiente forma,

$$x \to f(x) = \log_a x; a \in \mathbb{R}.$$

Las funciones logarítmicas son funciones recíprocas a las anteriores, funciones exponenciales. Son funciones biyectivas y continuas tal que,

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Las aplicaciones de las funciones logarítmicas son extensibles a las aplicaciones de las funciones exponenciales y viceversa. Cabe destacar la escala del pH, que corresponde con el negativo del logaritmo decimal de los iones de hidrógeno de la sustancia de análisis.

Funciones racionales

Definición: Una función racional es toda aquella función que siga la siguiente forma,

$$x \to f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

con el numerador y denominador funciones polinómicas. El dominio de este tipo de funciones es,

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{x_i \in \mathbb{R} \ / \ h(x_i) = 0\}.$$

Funciones a trozos

Las funciones a trozos son una combinación de funciones con dominios acotados y no superpuestos. La aplicación de este tipo de funciones se observan en la informática a través de las funciones escalonadas o en aplicaciones donde se encuentren diferentes dominios con distintas funciones para unas mismas variables. Un ejemplo de esto es la relación entre la tensión y la deformación de un material isótropo, en la zona elástica se recoge un comportamiento lineal en la zona plástica el comportamiento se asemeja a una parábola, relación cuadrática entre variables.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

En este capítulo se analizan publicaciones de investigación e innovación didáctica relacionadas con el bloque de funciones y que sirven de apoyo para la realización de la unidad didáctica. En primer lugar, se establecen posibles problemas detectados en el aula por distintos autores y relacionados todos con el bloque de funciones. Para así posteriormente, evaluar las acciones tomadas, subsanarlas o reducir su impacto.

Problemas detectados en el aula

García (2006) establece la fenomenología didáctica detectada en el aula relacionada con la dualidad enseñanza-aprendizaje del álgebra. Por un lado, indica que la enseñanza tiene en cuenta numerosas variables para analizar y que existe un desfase entre la dedicación horaria desde un punto de vista docente y la cantidad de contenido a enseñar. Además, establece que el ratio de alumnos por línea es superior al necesario para establecer una cierta calidad en la docencia.

Por otro lado, García (2006) detecta un deterioro en la enseñanza del álgebra por recurrir a modelos didácticos del siglo pasado y por tanto, incurrir en una deficiencia de innovación para este bloque. Así, se muestra una tendencia en el aprendizaje del álgebra de forma memorística, desligada del contexto y la cotidianidad. También, pone de manifiesto la trabas burocráticas del docente, los cambios políticos-legislativos y la escasez de recursos didácticos. Estos problemas pueden transversalizar a otras áreas de conocimiento de forma general.

No obstante, de manera particular al bloque de funciones, Amaya (2020) detecta la existencia de un conflicto epistémico relacionado con el desajuste entre los contenidos curriculares exigidos legalmente, lo impartido por el docente y lo adquirido por el alumno en el bloque de funciones. Este conflicto lo justifica por la no existencia una familiarización de la letra como variable, la no aceptación de representaciones diferentes a la analítica y la confusión de la letra de magnitud con la letra como variable generalizada.

Para conocer el estado en el que se encuentra el aula se pueden realizar estudios que evalúen al docente durante el desarrollo de una clase, que evalúen el contexto del aula o a ambos. Los estudios que evalúan al docente tienen en cuenta cómo el docente soluciona las tareas, los recursos didácticos utilizados y la adecuación de las explicaciones al aula entre otras categorías de análisis.

Amaya (2020) estudia la labor del docente en el aula e identifica problemas en los docentes a la hora de transmitir los conceptos necesarios. El problema lo achaca a la no adecuación del concepto al nivel correspondiente del aula.

Acciones para minimizar los problemas detectados

Se ha evidenciado que existen barreras entre el docente y el alumnado por la no adecuación del contenido al nivel del aula (Amaya, 2020). Así, las acciones que se deben tomar para minimizar los problemas detectados deben responder de forma adecuada a los indicadores de medida asociados a las diferentes categorías de análisis que evalúan el papel del docente en el aula. De esta forma, se notaría una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje y por tanto, se reduciría este tipo de problemáticas. La tabla 3.4 recoge tanto las categorías de análisis como los indicadores a tomar en cuenta para una mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque dedicado a las funciones.

Además, para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje se proponen a la Tecnologías de la Información y Comunicación, TIC, como elemento dinamizador. La utilización de las TIC implican un aprendizaje significativo que puede facilitar el aprendizaje y la compresión semántica del concepto de función (Lanuza, 2020).

Bajo la utilización de las TIC como elemento dinamizador, Lanuza (2020) propone la utilización de un modelo didáctico que se centra en los procesos cognitivos del estudiante y la inteligencia emocional del docente para incentivar, innovar, motivar al alumnado y conseguir las competencias objetivo. Con la metodología recomendada se prentende que el alumnado pueda adaptar los conocimientos a su entorno y sacarles beneficio, ligando el contenido del aula a su contexto y desligándose de un aprendizaje memorístico. El modelo didáctico propuesto tiene en el centro a las TIC, las cuales se transforman en estrategias didácticas y así poder mejorar la calidad del aprendizaje. Los docentes para maximizar el rendimiento de la metodología deben utilizar la creatividad, atendiendo a las necesidades del contexto que les rodea y con equilibrio pedagógico. La figura 3.1 recoge un esquema del modelo didáctico recomendado.

Un ejemplo dinamizador de las TIC se encuentra en el uso de la pizarra digital interactiva como recurso para trabajar el concepto de función y representar gráficamente las diferentes funciones. Así, se potencian las competencias digitales presentes en el currículo. No obstante, el uso de las TIC en el aula también tienen algunos inconvenientes, en la tabla 3.1 se realiza una comparativa entre las ventajas y los inconvenientes del uso de las TIC en el aula. Por tanto, el uso de las TIC debe complementarse con otros recursos y metodologías que minimicen los inconvenientes.

Ventajas:	**Inconvenientes:**
- Son fuente de información.	- Su uso no garantiza la consecución de la competencia.
- Son herramientas con gran potencial.	- Requieren de recursos específicos.
- Son un medio de comunicación.	- Pueden generar diferencias entre el alumnado, brecha digital.
- Mejoran la motivación del alumno.	- Requieren de mucho tiempo.
- Flexibilizan la sesiones docentes.	- Requieren formación para el profesorado.
- Aumentan la interacción en el aula.	- Su uso puntual no es óptimo.
- Permiten realizar simulaciones.	- Resistencia al cambio por parte del profesorado.
- Fomentan metodologías constructivistas.	
- Apoyan a las explicaciones.	
- Reducen la componente abstracta.	
- Fomentan el aprendizaje significativo.	
- Se relaciona el aula con el exterior, Internet.	

Tabla 3.1: Ventajas e inconvenientes del uso de las TIC (Garat-González, 2014)

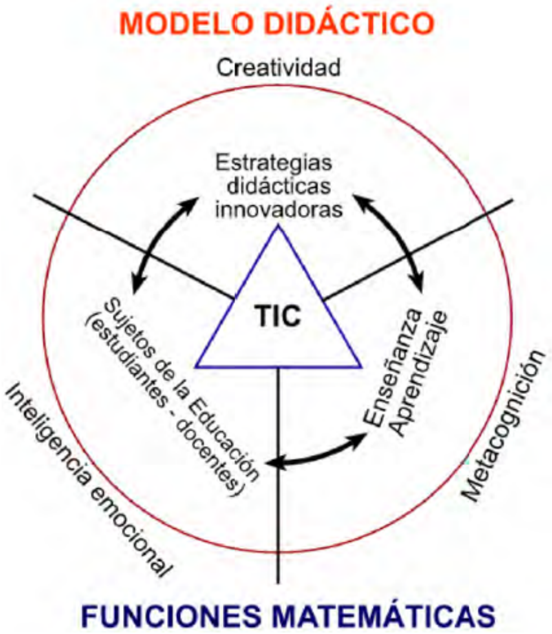


Figura 3.1: Modelo didáctico para la enseñanza aprendizaje de funciones matemáticas (Lanuza, 2020)

Gracias a estrategias metacoginivas y el uso de la inteligencia emocional se pueden establecer procesos de aprendizaje más eficaces y efectivos. Se entiende por metacognición a la capacidad de reflexionar sobre los procesos propios de aprendizaje y sobre el conocimiento adquirido. Por tanto, es una actividad reflexiva que permite la toma de conciencia y control sobre los procesos cognitivos y que está intrínsecamente ligada al proceso global del proceso de aprendizaje (Allueva, 2002).

Adicionalmente, la utilización de la inteligencia emocional hace tener en cuenta la componente emocional junto con el concepto clásico de inteligencia, que engloba tanto aptitudes logico-matemáticas como linguísticas. Relacionada con la inteligencia emocional, se encuentra la inteligencia intrapersonal y interpersonal de Gadner[1] como forma de mejorar la inteligencia emocional en alumnos a partir del aprendizaje basado en problemas (Escribano et al., 2010).

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una metodología colaborativa donde se pretende que el alumno se involucre en su proceso de aprendizaje, a partir de la resolución de problemas se llega al conocimiento y por tanto, el uso de esta metodología repercute en una mejor aplicación de conocimientos por parte del alumnado (Escribano et al., 2010).

En el ABP el alumnado cuando se enfrenta a un problema lo primero que hace es identificar los conocimientos necesarios para posteriormente buscar información sobre ellos y finalmente poder resolver el problema gracias al conocimiento adquiri-

[1] La inteligencia intrapersonal implica aspectos propios e internos del individuo mientras que la inteligencia interpersonal destaca por la capacidad de distinguir emociones en los demás.

do. Desde este punto de vista, se genera un pensamiento crítico en el alumnado lo cual es una propiedad intrínseca en este tipo de aprendizaje. Es importante la presencia de una figura que guíe al alumnado en la identificación de necesidades y en la búsqueda de información, en este caso el profesorado debe asumir esta función. Las propiedades y objetivos de esta metodología activa se recogen en las tablas 3.2 y 3.3 respectivamente. El uso de esta metodología de trabajo puede mejorar la adecuación de los recursos a las necesidades específicas del alumnado.

Propiedades del ABP:
- Metodología activa.
- Aprendizaje centrado en el alumnado.
- Trabajo colaborativo.
- Profesorado como guía en la búsqueda de información.
- Aprendizaje centrado en la resolución de un problema.
- Se centra en la identificación de carencias de conocimiento.
- Transversal a otras áreas de conocimiento.

Tabla 3.2: Propiedades del ABP (Poot-Delgado, 2013)

Objetivos del ABP:
- Responsabilizar al alumno de su aprendizaje.
- Generar un pensamiento crítico en el alumnado.
- Aprender a aprender.
- Mejorar las habilidades interpersonales.
- Retar al alumnado en la resolución de problemas.
- Identificar la falta de conocimiento.
- Guiar hacia la mejora del conocimiento.
- Desarrollar el sentido colaborativo.

Tabla 3.3: Objetivos y propiedades del ABP (Poot-Delgado, 2013)

Por tanto, la atención a indicadores de medida del proceso de enseñanza-aprendizaje y el uso de las TIC como elemento dinamizador bajo principios de creatividad, inteligencia emocional y estrategias metacognitivas pueden conseguir un menor impacto de los problemas detectados, ocasionando una mejora de la eficiencia y eficacia del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Categoría de análisis	**Indicadores**
Soluciona la tarea propuesta.	Procedimientos adecuados al nivel.
Reconocimiento y uso de elementos de una función.	Determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Uso de diferentes procedimientos o estrategias para resolver una tarea.	Tipo de estrategia y articulación entre las soluciones. Identifica casos generales. Pertinencia entre los recursos usados y la tarea.
Uso de definiciones en la solución de una tarea.	Propone nuevas tareas que comprometen al estudiante en su propio proceso de aprendizaje y evidencien la articulación de temas, con temas anteriores y con otro del currículo. Pertinencia de la definición con los elementos analizados.
Argumentos utilizados para comunicar una idea.	Calidad de las explicaciones y justificación de los procesos.

Tabla 3.4: Elementos para el análisis de la faceta epistémica (Amaya, 2020)

CAPÍTULO 4

PROYECCIÓN DIDÁCTICA

4.1. Título

La unidad didáctica se titula Funciones y está recogida dentro de los contenidos del cuarto bloque de la asignatura matemáticas para el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria, Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021).

4.2. Justificación

Se ve necesario el desarrollo de una unidad didáctica asociado al bloque de funciones para adecuar los contenidos establecidos según normativa (BOJA, 2021) a las particularidades del aula. Así, se propone una temporalidad para el desarrollo de las competencias proporcional al contenido total de la materia a impartir. Además, se establece la metodología didáctica utilizada y los recursos asociados a ella para la consecución de las competencias, evaluadas a través de indicadores.

4.3. Contextualización del centro y del aula

La unidad didáctica se desarrolla en el IES Virgen del Carmen, un centro de Educación Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional. Se localiza en el centro de Jaén, con más de 175 años. Destaca por la formación permanente hacia personas adultas, educación secundaria para adultos y bachillerato para adultos. El alumnado perteneciente a la etapa obligatoria se caracteriza por conformar grupos heterogéneos en cuanto a formación previa, situación socioeconómica e intereses por ser un centro aglutinador de alumnado procedente de numerosos colegios.

Por un lado, el centro tiene como objetivo el desarrollo integral de todo su alumnado, abogando por la tolerancia a la diversidad, libertad de expresión y pensamiento crítico, junto con la creación de valores relacionados con la solidaridad, el medio ambiente y el respeto entre iguales. No sólo hace énfasis en la formación en valores sino que también hace un alto hincapié en el desarrollo de competencias técnicas ligadas a la teoría. Todo debe de extrapolarse fuera del centro educativo. Para esto, el centro recomienda a su comunidad educativa la utilización de metodologías activas que fomenten las TIC, la competencia comunicativa y el trabajo en equipo.

Por otro lado, el Decreto 327/210 de 13 de julio (BOJA, 2010) por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria establece los aspectos obligatorios que debe tener la programación didáctica de los departamentos. Además, los contenidos, objetivos y criterios de evaluación se recogen en la Orden dictada por la Junta de Andalucía para la ESO (BOJA, 2021). En cuanto a la formación del profesorado, el centro recomienda una formación propia y continuada por parte del docente, no quedando esta a la espera de la formación dada por la administración competente.

4.4. Objetivos

Los objetivos específicos de la unidad didáctica basados en la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) son que el alumnado:

1 Utilice diferentes formas de representación de una función, sepa relacionar las distintas formas de representación y elija la más favorable al contexto.

2 Comprenda el concepto de función, lo reconozca e interprete y analice las gráficas funcionales.

3 Reconozca, represente y analice funciones lineales y las use en la resolución de problemas.

4 Mejore la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorpore al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

5 Reconozca y plantee situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elabore y utilice diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

6 Utilice de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7 Reaccione ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8 Manifieste una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

9 Consolide conceptos básicos que sirvan de pilar para el desarrollo futuro del bloque de funciones.

10 Use la modelización matemática y las TIC como recurso didáctico para conseguir una mejora del proceso enseñanza-aprendizaje y del pensamiento matemático.

4.5. Competencias clave

Las competencias de la unidad didáctica quedan reflejados en el capítulo 1, sección 1.2 acorde a la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021).

4.6. Contenidos

Los contenidos de la unidad didáctica quedan reflejados en el capítulo 1, sección 1.1 basados en la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021).

4.7. Metodología

La Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) indica que el bloque 4, funciones, debe incluir ejemplos reales conocidos por el alumnado de tablas y grafos para ser analizados. Así, se acentúa la importancia de establecer relaciones entre las variables representadas y poder modelizar algebraicamente dichas relaciones con expresiones sencillas, simplificando los ejemplos a situaciones con dependencia lineal. De esta forma, el alumnado abandonará el uso de algoritmos, permitiendo desarrollar la experiencia necesaria para establecer si un modelo lineal se ajusta a la naturaleza de los datos.

No obstante, esto se complementa a través de metodologías activas basadas en la **modelización matemática** y el **aprendizaje basado en problemas**, interviniendo la comunicación bidireccional alumno-docente y alumno-alumno. Así, se favorece el **andamiaje** y la **tutorización entre iguales**.

Además, para el bloque de funciones se recurre a las TIC como estrategia didáctica y eje central de un aprendizaje significativo. A través de las TIC, la creatividad, la inteligencia emocional y estrategias metacognitivas se obtiene una mejora de la calidad del aprendizaje (Lanuza, 2020). Los recursos específicos necesarios dependen del centro en donde se realizan las sesiones. No obstante, el uso de pizarras digitales interactivas, herramientas de cálculo (*i.e.* hojas de cálculo) o herramientas de representación gráfica (*i.e.* Geogebra) mejoran el aprendizaje y reducen la componente abstracta de los contenidos del bloque de funciones.

Sin embargo, las actividades donde se contemplan el uso de las TIC consumen mucho tiempo y por tanto tienen una mayor aplicación en actividades que refuercen las explicaciones y/o amplíen conocimientos fuera del aula. Para esto se debe garantizar la equidad de recursos en el grupo para evitar diferencias entre el alumnado debido a la brecha digital.

El alumnado se enfrenta por primera vez a la definición reglada de función y sus propiedades, por lo que para evaluar las conjeturas, el conocimiento heredado de cursos anteriores y de su contexto se propone una **clase invertida** como elemento introductorio al álgebra elemental.

De esta forma, los alumnos exponen su perspectiva y el docente puede utilizarla como punto de partida, unificando la idea previa establecida en el grupo y alineándola con los contenidos a impartir. Por tanto, se desarrollan habilidades de nivel inferior fuera del aula, dando lugar al desarrollo de habilidades de nivel superior en la clase, figura 4.1 (Parra, 2017).

Este método constructivista pretende que el alumno construya sus propios conocimientos a partir de materiales didácticos facilitados y que se comprometa con los contenidos. De esta manera, si se aplica de manera integral favorecerá a las etapas de aprendizaje descritas en la Taxonomía de Bloom (Santiago, 2022).

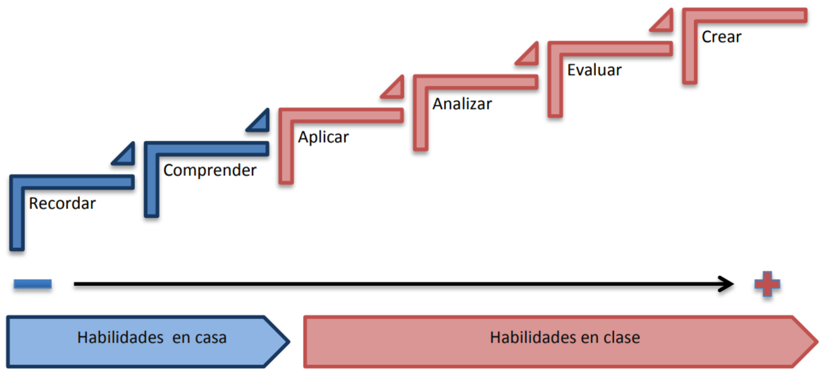


Figura 4.1: Taxonomía de Bloom en relación a la metodología clase invertida (Parra, 2017)

La parte del contenido asociada a definiciones y propiedades se exponen a través de transmisión directa unidireccional, profesor-alumno, permitiendo la interrupción del monólogo por parte del alumnado para la resolución de dudas. Tras el monólogo, se propone un diálogo alumno-profesor con el fin de identificar ejemplos reales asociados a los conceptos desarrollados. Así, se introduce al alumnado a la identificación de recursos matemáticos utilizados externamente de forma guiada.

Clarke et al. (2004) establecen que la modelización tiene implicaciones didácticas. El modelo debe de implicar la utilización de las matemáticas aplicadas en una condición extra-matemática, apareciendo las matemáticas de manera implícita o explícita. Además, el alumno debe identificar la situación a modelar y la matemática implicada en el modelo, guardando una relación entre ellos. Aquí es donde aparecen los principales problemas, al no encontrar la interdependencia. De este modo, se debe entrenar al alumnado para la identificación de recursos matemáticos en modelos matemáticos reales a partir del aprendizaje basado en problemas.

Las fases ordenadas de la modelización matemática son las siguientes, figura 4.4, y deben de aplicarse de forma cíclica hasta la validación del modelo:

1. identificación del problema;
2. identificación de variables del problema;
3. transposición del problema a lenguaje matemático;
4. evaluación de los resultados obtenidos;
5. análisis de los resultados obtenidos;
6. validación del modelo matemático.

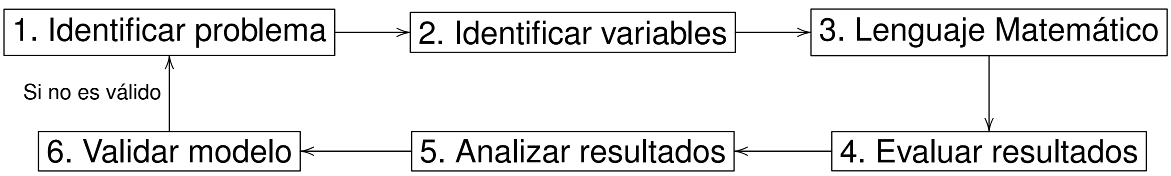


Figura 4.2: Diagrama de flujo de las fases de la modelización matemática

Los trabajos asociados a la modelización matemática serán llevados a cabo siguiendo una metodología de **aprendizaje cooperativo "1-2-4"**. Esta metodología propone en primer lugar que cada alumno de forma independiente afronte el problema y establezca sus conclusiones. En segundo lugar, se invita al alumno a juntarse en parejas para que intercambien sus puntos de vista y finalmente, se unifican pares de parejas para que establezcan cual de las conclusiones establecidas entre todos es la más adecuada (Fragueiro et al., 2012).

4.8. Actividades y recursos

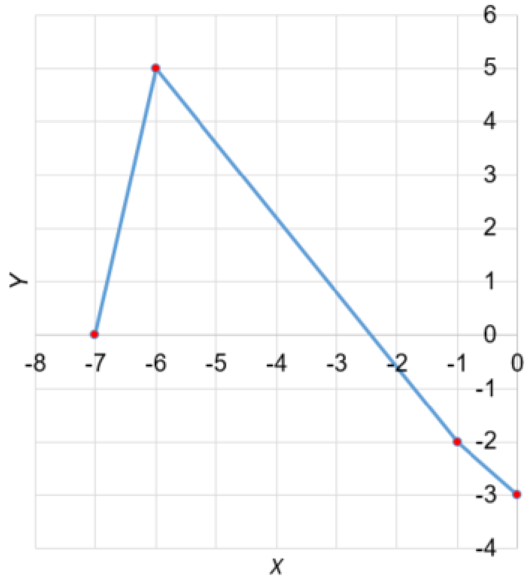
Las actividades y recursos a realizar por el alumnado se dividen en tres grupos según la finalidad y la localización de la misma:

- Actividades para reforzar conceptos en el aula.
- Actividades para la ampliación de conocimientos fuera del aula.
- Actividad de modelización matemática para hacer en el aula.

Actividades para reforzar conceptos en el aula

Actividad 1: Representa un sistema de referencia cartesiano y localiza sobre él los siguientes puntos $A(-7,0),\ B(-1,-2),\ C(0,-3),\ D(-6,5)$. Además, une los puntos para generar una función continua.

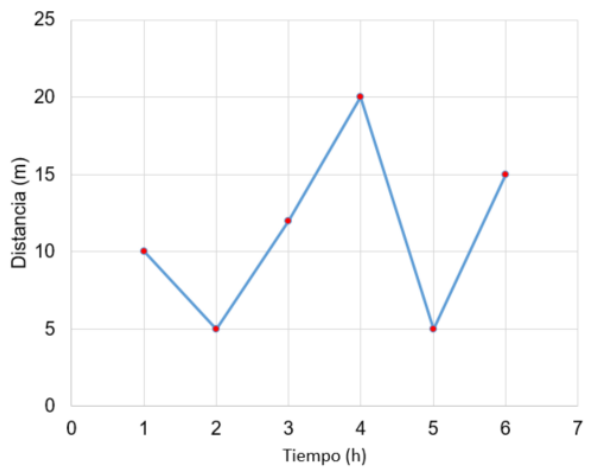
Solución de la actividad 1: Se puede representar manualmente o con la ayuda de una hoja de cálculo.



Actividad 2: Representa los puntos de la siguiente tabla en un sistema cartesiano y discute si la tabla corresponde a una función.

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6
Distancia (m)	10	5	12	20	5	15

Solución de la actividad 2: Si unimos los puntos representados en la tabla se observa que para cada valor de tiempo hay asociada una única distancia y por tanto, podría tratarse de una función. Se puede representar manualmente o con la ayuda de una hoja de cálculo.

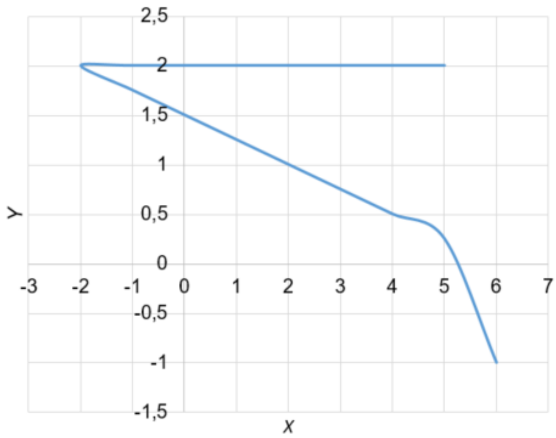


Actividad 3: Escribe la expresión algebraica de la función que a cada número le asocia tres cuartas partes de su valor más dos unidades. Además, evalúa la función para los números tres y cinco.

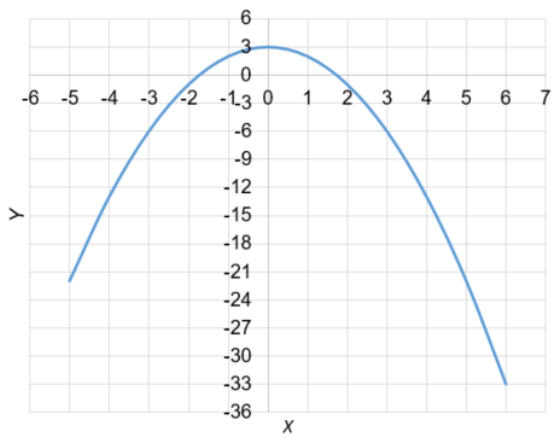
Solución de la actividad 3: $y = f(x) = 3/4x + 2;\ f(3) = 9/4 + 2 = 17/4;\ f(5) = 15/4 + 2 = 23/4.$

Actividad 4: Representa la gráfica de una curva continua que corte al eje Y dos veces y al eje X una vez. ¿Es una función? Posteriormente, representa una curva que corte una vez al eje Y y dos al eje X. ¿Es una función? Además, representa una función con un máximo relativo en cero y con imagen tres.

Solución de la actividad 4: Se puede representar manualmente o con la ayuda de una hoja de cálculo.



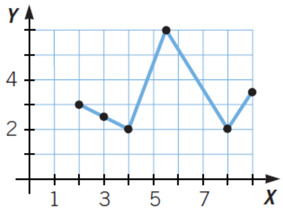
No es una función.

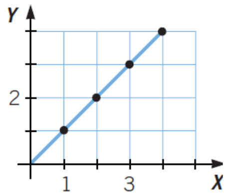


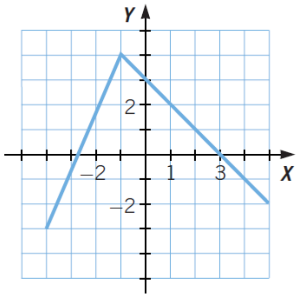
Es una función.

Actividad 5: Representa gráficamente funciones que tengan un máximo y dos míminos, ningún máximo ni mínimo y un máximo y un mínimo (Almodóvar, 2016).

Solución de la actividad 5: Se puede representar manualmente o con la ayuda de una hoja de cálculo.



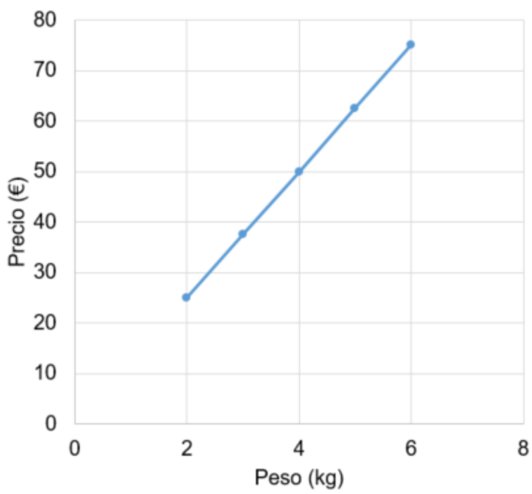




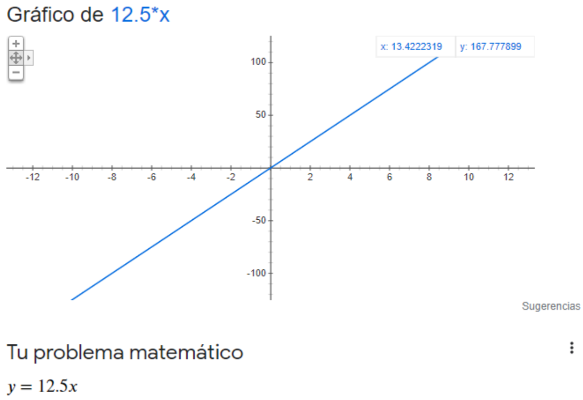
Actividad 6: Si un kilogramo de carne cuesta doce euros y medio. ¿Cuánto cuestan dos, tres, cuatro, cinco y seis kilogramos de carne respectivamente? Genera una tabla que relacione el peso con su precio. Escribe la expresión de la función que relaciona el peso con el precio y representa en un sistema cartesiano la función. Como alternativa a la representación gráfica, utiliza el buscador de internet como herramienta gráfica.

Solución de la actividad 6: $f(x) = 12,5x, f(2) = 25, f(3) = 37,5, f(4) = 50, f(5) = 62,5, f(6) = 75.$

Peso (kg)	2	3	4	5	6
Precio (€)	25	37,5	50	62,5	75



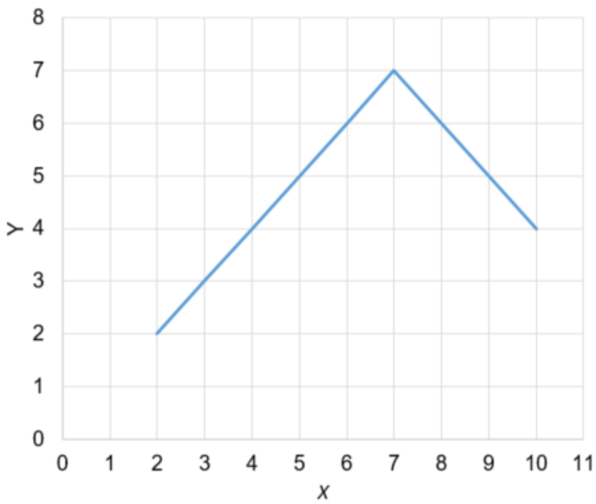
Solución con herramienta de cálculo.



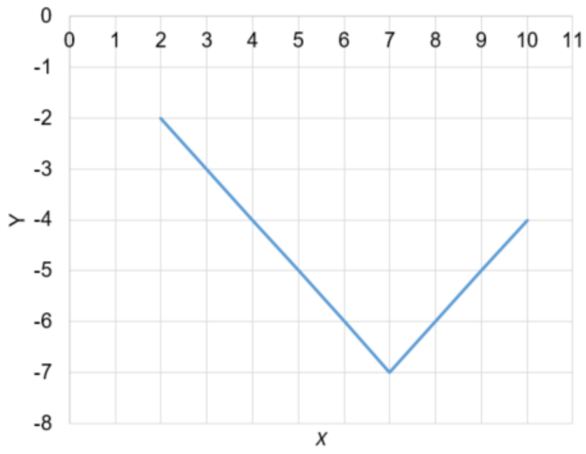
Solución procedente del buscador de internet.

Actividad 7: Representa gráficamente una función lineal creciente en el intervalo $[2, 7)$ y decreciente en el intervalo $[7, 10]$. Además, representa gráficamente una función lineal decreciente en el intervalo $[2, 7)$ y creciente en el intervalo $[7, 10]$. Señala los máximos, los mínimos y los puntos de cambio de tendencia. Adicionalmente, indica la expresión algebraica de ambas funciones y represéntalas con la ayuda de una hoja de cálculo.

Solución de la actividad 7:

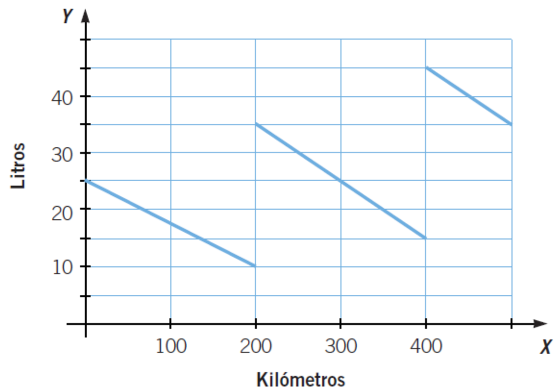


Máximo en $A(7, 7)$, el cual es un punto donde se produce el cambio de tendencia. En el intervalo $[2, 7)$, $f(x) = x$; y en el intervalo $[7, 10]$, $f(x) = -x + 14$.



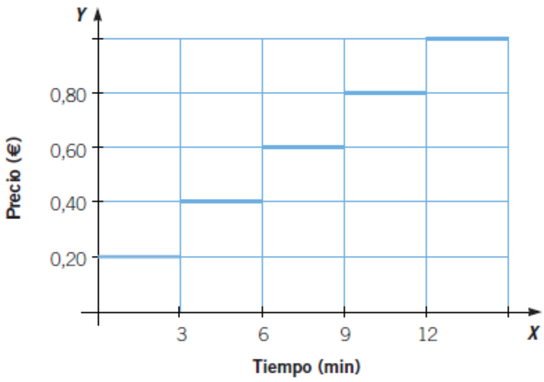
Mínimo en $B(7, -7)$, el cual es un punto donde se produce el cambio de tendencia. En el intervalo $[2, 7)$, $f(x) = -x$; y en el intervalo $[7, 10]$, $f(x) = x - 14$.

Actividad 8: El grafo dado representa la evolución de la gasolina en un coche a lo largo de un viaje. A partir de este grafo se pide, describir el comportamiento inicial y final de la cantidad de combustible en el coche, los kilómetros a los que se repostó y cuántos litros se echaron al depósito. Además, replica el grafo dado en una hoja de cálculo identificando la variable dependiente e independiente. Actividad modificada de Almodóvar (2016).



Solución de la actividad 8: En el inicio del viaje había 25 L de combustible y al final del viaje 35 L. Repostó cuando llevaba 200 km y 400 km. En la primera parada se echaron 25 L de combustible mientras que en la segunda parada se echaron 30 L.

Actividad 9: El grafo adjuntado refleja el precio en función de la duración de una llamada. A partir del grafo se pide, describir el comportamiento de la función, establecer si tiene máximos y/o mínimos y evaluar el coste de una llamada de diez minutos y $4,5$ min. En el caso de tener sólo un euro de saldo, ¿cuántos minutos como máximo podría hablar? Actividad modificada de Almodóvar (2016).



Solución de la actividad 9: La función representa el coste de cada minuto de la llamada según en la franja de duración en la que se encuentre, con un precio distinto y constante para cada intervalo de tiempo representado. Tiene máximos a partir del minuto doce y mínimos en el primer intervalo hasta los tres minutos de duración. $f(10) = 0,20 \cdot 3 + 0,4 \cdot (6-3) + 0,60 \cdot (9-6) + 0,80 \cdot (10-9) = 4,40$ €. $f(4,5) = 0,20{\cdot}3{+}0,4{\cdot}(4,5{-}3) = 1,2$ €. Con 1 € de saldo, $1 = 0,20{\cdot}3{+}0,4{\cdot}(x{-}3)$; $x = 4$ min.

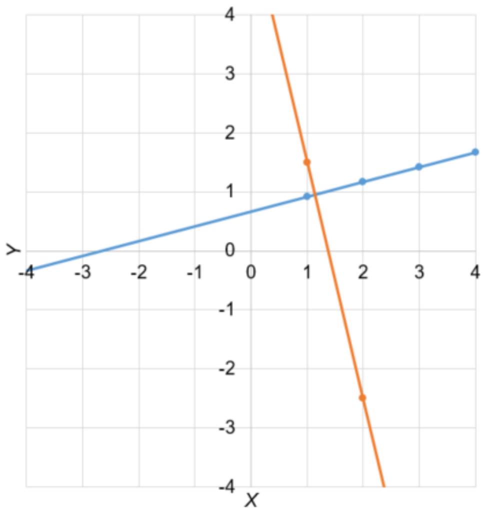
Actividad 10: Para llevar una iniciativa popular al congreso de los diputados se necesitan como mínimo diez mil firmas de ciudadanos españoles. Una plataforma ciudadana acercó cuatro furgonetas repletas de firmas escritas en folios para que admitieran la iniciativa. ¿Entregaron el número mínimo de firmas necesarias? ¿Cuántas firmas llevaron? Problema no estructurado.

Actividad 11: En una empresa hay tres tipos diferentes de trabajos, los cuales tienen diferente sueldo al final de mes. El primer tipo de empleo se paga por el número de horas trabajadas, el segundo tipo de empleo tiene una parte fija y otra variable según el número de horas extra trabajadas y el tercer tipo de empleo tiene una parte fija. ¿Cuánto gana un trabajador según el tipo de empleo al final del mes? ¿Qué tipo de empleo elegirías para ti? Problema no estructurado.

Actividad 12: A parir de los resultados de la *Actividad 11*, establece la expresión algebráica que defina el salario para cada tipo de empleo y usa la representación gráfica de las funciones para justificar tu decisión.

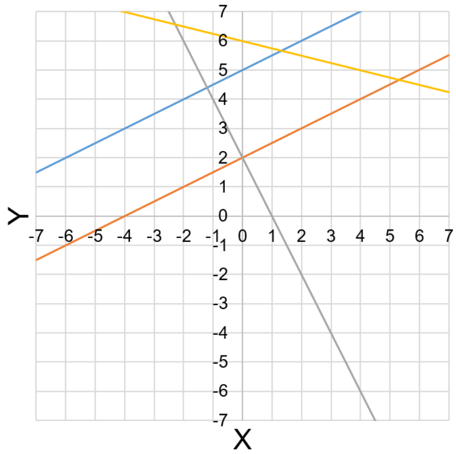
Actividad 13: Dadas las siguientes funciones, $f_1(x) = 0,25x + \frac{2}{3}$ y $f_2(x) = -4x + 5,5$. Representa gráficamente las funciones. ¿Podrías indicar el valor de la pendiente de cada función? ¿Qué ángulo hay entre las rectas? Utiliza un papel cuadriculado y/o una hoja de cálculo.

Solución de la actividad 13:



$m_1 = 0,25; m_2 = -4$. Forman un ángulo de 90 deg.

Actividad 14: Dada la siguiente gráfica, ¿qué relación existe entre las variables mostradas en cada función? Establece la pendiente y la expresión algebráica.

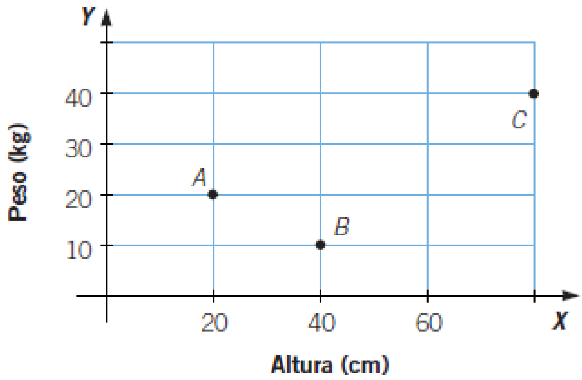


Solución de la actividad 14: Hay una recta perpendicular a dos rectas paralelas y una recta secante a las tres restas anteriores. $f_1(x) = 0,5x + 2$; $f_2(x) = 0,5x + 5$; $f_3(x) = -2x + 2$; $f_4(x) = -0,25 + 6$; $m_1 = m_2 = 0,5$; $m_3 = -2$; $m_4 = -0,25$.

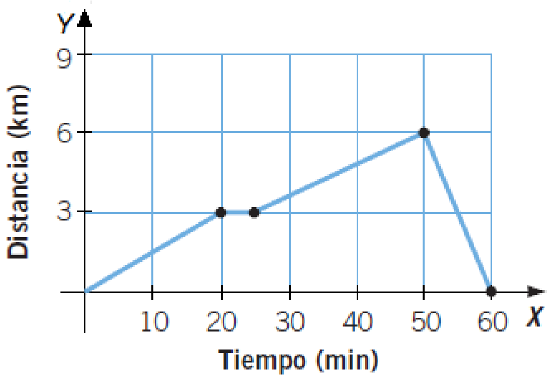
Actividades para la ampliación de conocimientos fuera del aula

Estas actividades se idean para mejorar el pensamiento y razonamiento matemático. Además, se mejora la comprensión de la competencia matemática ligada al concepto de función y el uso potencial de las funciones fuera del aula. Todas las actividades tienen en común la utilización de gráficas. De esta forma, se pone en valor el correcto entendimiento y funcionamiento de la representación gráfica de funciones que relacionan distintas variables de la vida cotidiana.

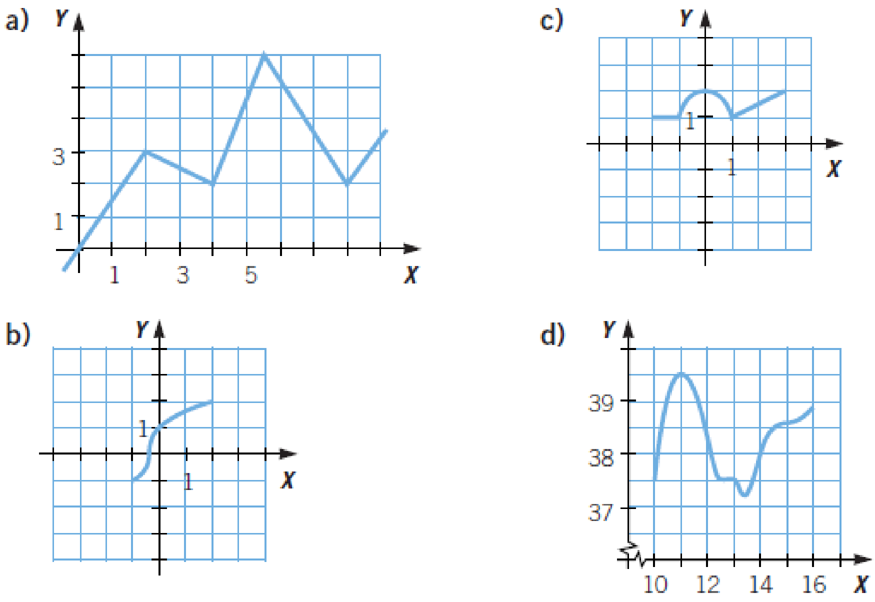
Actividades para ampliar 1: Dado el siguiente grafo se pide discutir qué punto es el más pesado, el más alto y cual tiene mejor relación altura peso tiene de los tres. Actividad modificada de Almodóvar (2016).



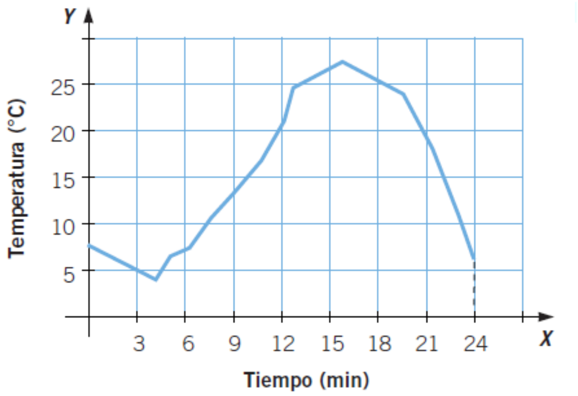
Actividad para ampliar 2: Dado el siguiente grado que relaciona el tiempo y el espacio corrido por un corredor a lo largo de una hora se pide pasar el grafo a una tabla de valores, establecer el número total de kilómetros recorridos en una hora, la duración del descanso intermedio y el tiempo que ha dedicado a andar y a correr respectivamente. Actividad modificada de Almodóvar (2016).



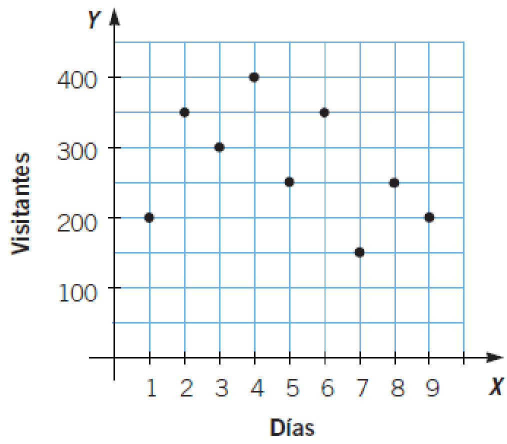
Actividad para ampliar 3: Estudia el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones (Almodóvar, 2016).



Actividad para ampliar 4: Estudia el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la siguiente gráficas de función (Almodóvar, 2016).



Actividad para ampliar 5: El siguiente grafo representa el número de visitantes a un museo a lo largo de 9 días. A partir de este gráfico se pide establecer qué día asistieron un número máximo de visitantes, qué día fue el que se obtuvo una menor asistencia y el número total de asistentes durante los nueve días. Actividad modificada de Almodóvar (2016)



Actividad de modelización matemática para hacer en el aula

La actividad de modelización matemática se plantea como el proyecto final de la unidad dedicada a funciones, englobando todos los contenidos y competencias en un mismo trabajo y así, se pueden evaluar los criterios a partir del trabajo desarrollado. La realización de la actividad se inicia de forma individualizada, prosigue en parejas y finaliza con la solución consensuada entre pares de parejas reflejada en un póster, "1, 2, 4".

La actividad consiste en la realización de un molde con unas medidas determinadas a partir de una folio de papel DIN-A4, en la figura 4.3 aparece un ejemplo de molde realizado con un folio. Para esto se plantea el problema, introduciendo a través de un contexto repostero. El problema se plantea introduciendo la necesidad de un pastelero de realizar moldes para pasteles de una determinada dimensión a partir de la utilización justa de papel para ahorrar en costes de fabricación (Houdement et al., 2003).

En primer lugar, se enseña de forma guiada al alumnado a realizar un molde rectangular a partir de un folio de papel. Posteriormente se le indica que se debe de hacer un molde de dimensiones 10 x 10 x 3 cm y que se debe conocer el tamaño inicial del papel con el que se formará el molde. De esta forma, se guía al alumnado a la búsqueda de relaciones matemáticas, dependencias entre lados y volúmenes del molde inicial y el objetivo para el dimensionamiento del folio.

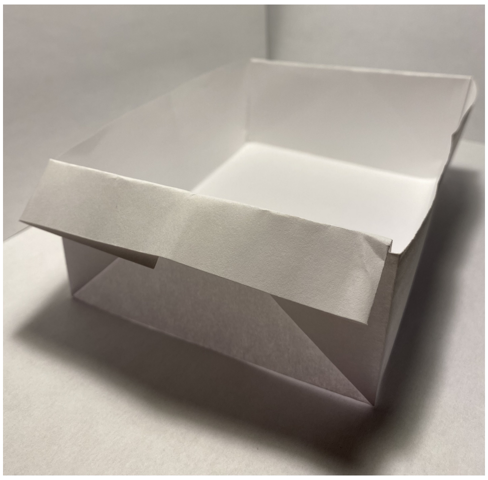


Figura 4.3: Ejemplo de la tipología de molde a realizar

Una vez que cada alumno tiene una solución, se agrupa en parejas. Las parejas tienen que discutir entre qué solución de las dos pensadas es la idónea, justificando la elección de ella y de igual forma con la unificación de pares de parejas. Durante las discusiones, el docente debe garantizar la colaboración entre todos los miembros del grupo y orientar al alumnado en la consecución de la tarea a través de la metodología de trabajo que implica la modelización matemática.

Al tratarse de una actividad no estructurada, permite tener múltiples soluciones posibles, tanto aproximaciones verificadas empíricamente o soluciones analíticas.

Las variables que describen el problema podrían ser las siguientes: A para el ancho del molde, B para el largo del molde, H para la altura del molde y a y b las dimensiones de la hoja. Estas variables se muestran en la figura 4.4 así como los dobleces necesarios en orden de ejecución, del uno al cuatro.

De esta forma, $a = A+2H$ y $b = B+2H+x$, siendo x una variable que puede tomar infinitos valores positivos. Por lo tanto, definiendo un valor de x se pueden obtener las dimensiones del papel necesario para generar un molde con unas dimensiones deseadas. Para $A = 10$ cm, $B = 10$ cm y $H = 3$ cm con $x = 2$ cm la solución al problema sería $a = 16$ cm y $b = 18$ cm.

Finalmente, deben de recoger el trabajo realizado en un póster, reflejando todos los pasos establecidos en la modelización matemática: problema, identificación de variables, simplificación al lenguaje matemático, evaluación y análisis del modelo y validación. Para la validación se recomienda al alumnado la materialización de la solución propuesta y su medición, es decir, una validación experimental. Los materiales necesarios para la realización de la actividad son: papel blanco DIN A4, cartulina, lápices de colores, tijeras y reglas para medir.

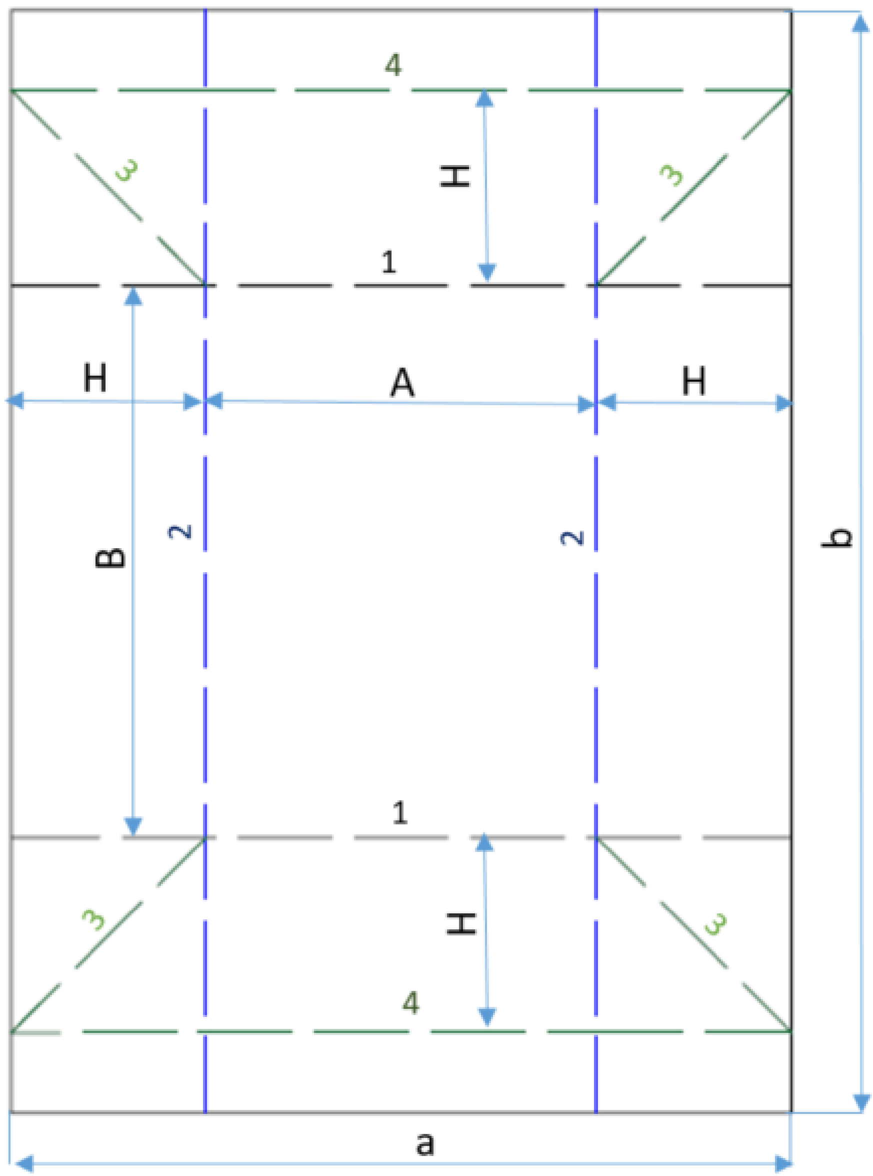


Figura 4.4: Ejemplo de solución a la actividad de modelización matemática

4.9. Atención a la diversidad

Según el artículo 29.2.g) del Decreto 327/2010 del 13 de julio (BOJA, 2010), las proyecciones didácticas para la ESO incluirán acciones de atención a la diversidad. Estas medidas tienen una naturaleza genérica y específica, combinándose con recursos del mismo carácter. Esto se refleja en la Instrucción del 8 de marzo de 2017 (Junta de Andalucía, 2017). Las acciones generales se clasifican según sea su nivel de aplicación en, nivel de centro, nivel de aula y nivel de alumno, tabla 4.1. Además, se recogen medidas de atención a la diversidad específicas de carácter educativo y asistencial, tabla 4.2.

A nivel de centro: - Agrupamientos flexibles - Desdoblamiento - Agrupación de asignaturas en ámbitos - Actividades en horario de libre disposición - Oferta de asignaturas de libre configuración autonómica - Agrupación de asignaturas opcionales
A nivel de aula/grupo de clase: - Programas preventivos - Organización flexible de espacios, tiempos y recursos - Adecuación de programaciones didácticas - Metodologías que promueven la inclusión - Actividades de refuerzo - Apoyo con un 2º profesor en el aula - Seguimiento y acción tutorial
A nivel alumno: - Programa de refuerzo sobre aprendizajes no adquiridos - Plan personalizado para alumnado que no promociona curso - Programa de refuerzo de troncales - Programas para la mejora del aprendizaje y el rendimiento - Permanencia

Tabla 4.1: Acciones generales de respuesta educativa para la atención de la diversidad en el protocolo NEAE (Necesidades Específicas de Apoyo Educativo) (Consejería de educación de la Junta de Andalucía, 2017)

Educativas: - Adaptaciones de acceso - Adaptaciones curriculares no significativas - Adaptaciones curriculares significativas - Programas específicos - Permanencia extraordinaria - Escolarización en un curso inferior al correspondiente por edad para el alumnado de incorporación tardía - Medidas de flexibilidad y alternativas metodológicas en la enseñanza de la lengua extranjera - Programas de enriquecimiento curricular para el alumnado con altas capacidades intelectuales - Adaptaciones curriculares para el alumnado con altas capacidades - Flexibilización del periodo de escolarización
Asistenciales (necesidades educativas especiales): - Ayuda con la alimentación - Ayuda con el desplazamiento - Control postural sedestación - Transporte escolar adaptado - Asistencia en el control de esfínteres - Asistencia en el uso del WC - Asistencia en la higiene y aseo personal - Vigilancia - Supervisión especializada

Tabla 4.2: Acciones específicas de respuesta educativa para la atención de la diversidad en el protocolo NEAE (Necesidades Específicas de Apoyo Educativo) (Consejería de educación de la Junta de Andalucía, 2017)

Las adaptaciones curriculares individualizadas se distinguen por tener un carácter personal e intransferible a alumnos diferentes. Las adaptaciones de acceso al currículo destacan por la adaptación del entorno (espacios, medios de comunicación y/o recursos) para impartir el currículo ordinario. Las adaptaciones curriculares no significativas cambian elementos de no obligado cumplimiento del currículo (metodologías, cómo se evalúa, tareas y/o temporalización). Sin embargo, las adaptaciones curriculares significativas modifican elementos prescriptivos del currículo (Fundación CADAH, 2012).

Las acciones específicas asistenciales están relacionadas con el desarrollo integral adaptado del alumno con necesidades educativas especiales las cuales contienen aspectos relacionados con la alimentación, ayuda asistencial, higiene y movilidad.

4.10. Temporalización

La Consejería de educación y deporte de la Junta de Andalucía en su Delegación Territorial en Jaén establece el calendario del curso escolar. El curso escolar consta de 175 días lectivos para el alumnado de educación secundaria obligatoria, resultando en 1050 h de docencia directa (Junta de Andalucía, 2022).

El desarrollo de las clases se establece en la franja horaria establecida por el centro docente IES Virgen del Carmen. Esta franja horaria se inicia a las ocho y cuarto de la mañana y finaliza a las tres menos cuarto de la tarde. La asignatura de matemáticas al integrarse dentro del bloque de asignaturas troncales generales consta de cuatro sesiones lectivas semanales, cada sesión de una hora para el segundo curso de la educación secundaria obligatoria (Junta de Andalucia, 2022).

La temporalización de los contenidos del bloque de funciones se establece teniendo en cuenta los contenidos de todos los bloques establecidos en la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) para la asignatura de matemáticas en segundo de la ESO. Así, el bloque 4 asociado a funciones queda relegado al tercer trimestre con un total de 53 días lectivos. En concreto el desarrollo de este bloque se propone para las semanas 18 y 19 del año en curso.

Desde la primera sesión hasta la sexta, todas las sesiones comparten la realización de actividades en el aula asociados a los contenidos de la misma y la proposición de tareas complementarias para la ampliación de conocimiento sobre los contenidos impartidos. Estas primeras sesiones están enfocadas desde una perspectiva de clase invertida, donde a partir de recursos facilitados relacionados con los contenidos, se pretende que el alumno desarrolle habilidades de nivel inferior fuera del aula. No obstante, en estas sesiones dentro del aula se refuerzan los contenidos del material facilitado en forma de definiciones regladas y ejemplos de aplicación reales. De esta forma, se garantiza que el alumnado que no ha desarrollado las habilidades fuera del aula pueda tener acceso al desarrollo de competencias.

Las últimas dos sesiones están planificadas para el desarrollo de un proyecto de modelización matemática relacionado con todos los contenidos previos del bloque de funciones. La séptima sesión se utiliza de introducción y explicación del problema para dar paso al desarrollo del proyecto de forma guiada, siguiendo la metodología cooperativa “1-2-4”, e intentando alinear las soluciones propuestas por los alumnos con los contenidos impartidos. Tanto la séptima como la octava sesión se utilizan para la realización del proyecto, plasmando las conclusiones en un póster, el cual debe de ser presentado por cada grupo de cuatro al resto del aula.

La tabla 4.3 recoge la descripción de cada una de las sesiones, su duración, los contenidos del currículo, los estándares de aprendizaje evaluables y criterios de evaluación. La numeración de los estándares y criterios son los recogidos en la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) y de igual manera los plasmados en en el capítulo

1, sección 1.2 y sección 1.3. Posteriormente, se adjuntan descripciones más detallada de cada una de las sesiones a desarrollar.

Sesión	Descripción	Duración	Contenidos de la sesión	Estándares de aprendizaje evaluables	Criterios de evaluación
Sesión 1	Clase invertida con el objetivo de establecer los conocimientos previos necesarios para la sesión. Definiciones y ejemplos reales. Actividades en el aula. Actividades como tarea de ampliación de conocimiento.	1 h	Concepto de función, variable dependiente e independiente. Formas de representación (lenguaje, tabla, gráfica, fórmula).	2.1. 3.1.	2.
Sesión 2	Clase invertida con el objetivo de establecer los conocimientos previos necesarios para la sesión. Definiciones y ejemplos reales. Actividades en el aula. Actividades como tarea de ampliación de conocimiento.	1 h	Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Máximos y mínimos relativos.	3.1. 3.2.	2. 3.
Sesión 3	Análisis de ejemplos reales. Actividades en el aula. Actividades como tarea de ampliación de conocimiento.	1 h	Análisis y comparación de gráficas.	3.1. 3.2.	2. 3.
Sesión 4	Clase invertida con el objetivo de establecer los conocimientos previos necesarios para la sesión. Definiciones y ejemplos reales. Actividades en el aula. Actividades como tarea de ampliación de conocimiento.	1 h	Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta.	4.1. 4.2.	2. 3. 4.
Sesión 5	Clase invertida con el objetivo de establecer los conocimientos previos necesarios para la sesión. Definiciones y ejemplos reales. Actividades en el aula. Actividades como tarea de ampliación de conocimiento.	1 h	Representación de la recta a partir de ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.	4.1. 4.2. 4.3.	2. 3. 4.
Sesión 6	Réplica de ejemplos reales. Representación gráfica (manual y hoja de cálculo). Actividades en el aula. Actividades como tarea de ampliación de conocimiento.	1 h	Utilización de calculadoras gráficas y programa de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	4.4.	2. 3. 4.
Sesión 7	Exposición del problema. Explicación de la tarea a realizar. Alineamiento de todos los proyectos. Realización de póster con conclusiones.	1 h	Proyecto de modelización matemática.	2.1. 3.1. 3.2. 4.1. 4.2. 4.3. 4.4.	2. 3. 4.
Sesión 8	Realización de póster con conclusiones (continuación). Exposición de los proyectos.	1 h	Exposición de resultados del proyecto de modelizacion.	2.1. 3.1. 3.2. 4.1. 4.2. 4.3. 4.4.	2. 3. 4.

Tabla 4.3: Temporalización de las sesiones del bloque 4 de funciones

Sesión 1

Antecedentes:
En la clase anterior se manda como actividad la búsqueda de información sobre la definición de función y formas de representanción de la misma para desarrollarla fuera del aula.

Desarrollo:
(15') Identificación de los conceptos adquiridos a nivel general por el grupo fuera del aula referentes al concepto de función y formas de representación a partir de comunicación bidireccional alumno-profesor.
(20') Aplicación de los conceptos a partir de actividades en el aula. Actividades realizadas en el aula por el profesor y de forma individualizada por el alumnado.
(10') Resolución de dudas tras la realización de las actividades, comunicación bidireccional alumno-profesor.
(15') Explicación de los conceptos sobre los que buscar información para la siguiente sesión (propiedades de las funciones), comunicación bidireccional alumno-profesor.

Objetivos específicos: 1; 2; 4; 6; 9.

Organización del alumnado: Individual.

Criterios de evaluación: 2.

Estándares evaluables: 2.1; 3.1.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: 1; 2.

Sesión 2

Antecedentes:
En la clase anterior se manda como actividad la búsqueda de información sobre las propiedades de las funciones para desarrollarla fuera del aula.

Desarrollo:
(15') Identificación de los conceptos adquiridos a nivel general por el grupo fuera del aula referentes al crecimiento, decrecimiento, continuidad, discontinuidad, máximos y mínimos a partir de comunicación bidireccional alumno-profesor.
(20') Aplicación de los conceptos a partir de actividades en el aula. Actividades desarrolladas en la pizarra por el profesor y de forma individual por el alumno.
(10') Resolución de dudas tras la realización de las actividades, comunicación bidireccional alumno-profesor.
(15') Explicación de la actividades programadas para realizar fuera del aula, comunicación bidireccional alumno-profesor.

Objetivos específicos: 1; 2; 4; 6; 9.

Organización del alumnado: Individual.

Criterios de evaluación: 2; 3.

Estándares evaluables: 3.1; 3.2.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: 3; 4. (Para ampliar: 1.)

Sesión 3

Antecedentes:
En las sesiones anteriores se ha definido el concepto de función, las formas de representación y las propiedades de las funciones.
Desarrollo:
(15') Identificación de los conceptos vistos y adquiridos a nivel general por el grupo, comunicación bidireccional alumno-profesor.
(30') Aplicación de los conceptos a partir de actividades en el aula de forma individual. Actividades facilitadas por el profesor bien en forma de ficha o desarrolladas en la pizarra. Ánalisis de forma colectiva de ejemplos de funciones con aplicación real.
(15') Explicación de la actividades programadas para realizar fuera del aula y los conceptos sobre los que buscar información para la siguiente sesión (funciones lineales), comunicación bidireccional alumno-profesor.

Objetivos específicos: 1; 2; 4; 5; 9.

Organización del alumnado: Individual y colectiva.

Criterios de evaluación: 2; 3.

Estándares evaluables: 3.1; 3.2.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: 5; 11. (Para ampliar: 3; 4; 5.)

Sesión 4

Antecedentes:
En la clase anterior se manda como actividad la búsqueda de información sobre las funciones lineales para desarrollarla fuera del aula.
Desarrollo:
(15') Identificación de los conceptos adquiridos a nivel general por el grupo fuera del aula referentes a la función lineal y el cálculo de la pendiente de la recta a partir de comunicación bidireccional alumno-profesor.
(20') Aplicación de los conceptos a partir de actividades en el aula. Actividades facilitadas por el profesor bien en forma de ficha o desarrolladas en la pizarra.
(10') Resolución de dudas tras la realización de las actividades, comunicación bidireccional alumno-profesor.
(15') Explicación de la actividades programadas para realizar fuera del aula y los conceptos sobre los que buscar información para la siguiente sesión (ecuaciones de las funciones lineales), comunicación bidireccional alumno-profesor.

Objetivos específicos: 1; 2; 3; 4; 6; 9.

Organización del alumnado: Individual.

Criterios de evaluación: 2; 3; 4.

Estándares evaluables: 4.1; 4.2.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: 6; 12. (Para ampliar: 2)

Sesión 5

Antecedentes:
En la clase anterior se manda como actividad la búsqueda de información sobre las ecuaciones de las funciones lineales para desarrollarla fuera del aula.

Desarrollo:
(15') Identificación de los conceptos adquiridos a nivel general por el grupo fuera del aula referentes a la ecuación de la función lineal y el cálculo de la pendiente de la recta a partir de comunicación bidireccional alumno-profesor.
(20') Aplicación de los conceptos a partir de actividades en el aula. Actividades facilitadas por el profesor bien en forma de ficha o desarrolladas en la pizarra.
(10') Resolución de dudas tras la realización de las actividades, comunicación bidireccional alumno-profesor.
(15') Explicación de la actividades programadas para realizar fuera del aula, comunicación bidireccional alumno-profesor.

Objetivos específicos: 1; 2; 3; 4; 6; 9.

Organización del alumnado: Individual.

Criterios de evaluación: 2; 3; 4.

Estándares evaluables: 4.1; 4.2; 4.3.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: 7; 13; 14.

Sesión 6

Antecedentes:
En las sesiones anteriores se han inpartidos los conceptos fundamentales asociados a la funciones y a la funciones lineales.

Desarrollo:
(15') Identificación de los conceptos adquiridos a nivel general por el grupo fuera del aula referentes a la ecuación de la función lineal y el cálculo de la pendiente de la recta a partir de comunicación bidireccional alumno-profesor.
(30') Aplicación de los conceptos a partir de actividades en el aula de forma individual. Actividades facilitadas por el profesor bien en forma de ficha o desarrolladas en la pizarra. Utilización de herramientas gráficas para la representación de funciones forma manual y a través de una hoja de cálculo, a realizar en grupos.
(15') Explicación de la actividades programadas para realizar fuera del aula, comunicación bidireccional alumno-profesor.

Objetivos específicos: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10.

Organización del alumnado: Individual y colectiva.

Criterios de evaluación: 2; 3; 4.

Estándares evaluables: 4.4.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: 8; 9; 10.

Sesión 7

Antecedentes:
En las sesiones anteriores se han inpartidos los conceptos fundamentales asociados a la funciones y a la funciones lineales.
Desarrollo:
(10’) Explicación del problema a modelizar matemáticamente y el proceso que deben de seguir para la resolución.
(10’) De forma individual deben plantear una posible solución. El docente debe asegurar que todas las soluciones estén relacionadas con el tema de funciones.
(10’) Por parejas, deben plantear una posible solución. El docente debe asegurar que todas las soluciones estén relacionadas con el tema de funciones.
(15’) En grupos de 4, deben plantear una posible solución. El docente debe asegurar que todas las soluciones estén relacionadas con el tema de funciones.
(15’) Los alumnos tienen que realizar un poster donde se reflejen los pasos seguidos para la resolución del problema.

Objetivos específicos: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Organización del alumnado: Individual y colectiva.

Criterios de evaluación: 2; 3; 4.

Estándares evaluables: 2.1; 3.1; 3.2; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: Actividad de modelización matemática.

Sesión 8

Antecedentes:
La sesión anterior inició la resolución de un problema a través de la modelización matemática.
Desarrollo:
(20’) Continuación de la sesión anterior. Tiempo disponible para la finalización del poster con la solución del problema.
(40’) Cada grupo debe presentar al resto de la clase los trabajos realizados y exponer qué han hecho y el porqué.

Objetivos específicos: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Organización del alumnado: Individual y colectiva.

Criterios de evaluación: 2; 3; 4.

Estándares evaluables: 2.1; 3.1; 3.2; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP.

Actividades: Actividad de modelización matemática.

4.11. Evaluación

La evaluación integra indicadores a partir de los cuales medir la consecución de los criterios de evaluación y por tanto, la adquisición de las competencias ligadas a dicho criterio. Los criterios de evaluación y competencias se establecen según la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) y aparecen en el capítulo 1, sección 1.2. Además, los indicadores de medición tienen en cuenta la evolución a lo largo del desarrollo de la unidad del alumnado, la participación, las actividades complementarias, el proyecto final y la competencias transversales.

Los criterios de evaluación del bloque 4 de funciones tienen asociadas unas competencias transversales aplicables al resto de áreas de conocimiento. Estas competencias tales como CCL (competencia de comunicación lingüística), CMCT (competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología), CAA (competencia de aprender a aprender) y SIEP (sentido de iniciativa y espíritu emprendedor) se miden a partir de la figura 4.5.

No sólo se evalúa el grado de desarrollo de la competencia sino que también se mide el grado de consciencia sobre la competencia desarrollada por el alumnado. Una evolución positiva se consigue llevando al alumno desde un nivel de competencia bajo y nivel de consciencia bajo hasta un nivel de competencia alto y nivel de consciencia bajo. Este camino implica pasar por un nivel de competencia bajo y nivel de consciencia alto y posteriormente por un nivel de consciencia alto y nivel de competencia alto para llegar al objetivo.

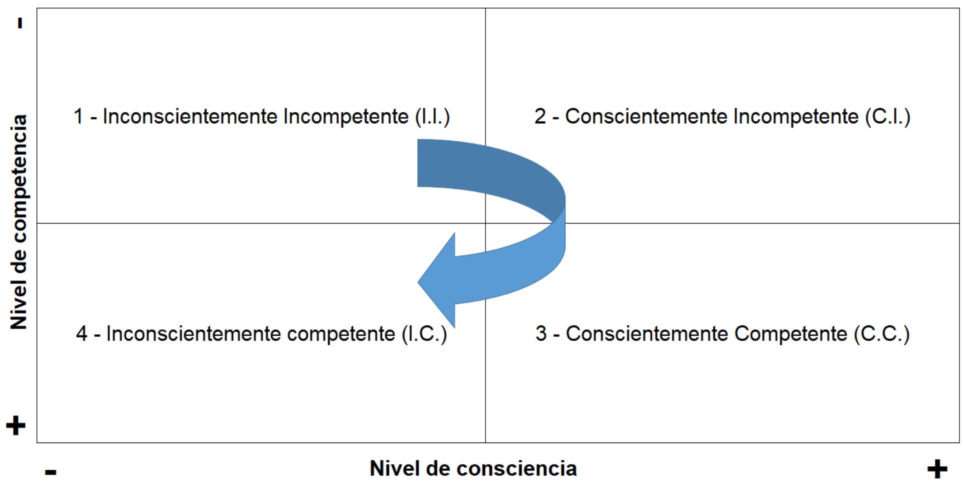


Figura 4.5: Nivel de competencia junto con nivel consciencia de la misma (Bolivar, 2003)

Los criterios de evaluación 2., 3. y 4. acorde a la Orden del 15 de enero de 2021 (BOJA, 2021) se miden a partir de la siguiente rúbrica, figura 4.6.

Criterio \ Nivel	I.I.	C.I.	C.C.	I.C.
Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. 33,3%	No maneja las distintas formas de presentar una función y no es consciente de ello. 10%	No maneja las distintas formas de presentar una función pero es consciente de ello. 30%	Maneja las distintas formas de presentar una función y elige la mejor de ellas para el contexto de forma consciente. 60%	Maneja las distintas formas de presentar una función y elige la mejor de ellas para el contexto de forma inconsciente. 100%
Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales. 33,3%	No comprende el concepto de función, ni reconoce, ni interpreta y no analiza las gráficas funcionales. Además, no es consciente de ello. 10 %	No comprende el concepto de función, ni reconoce, ni interpreta y no analiza las gráficas funcionales. Pero es consciente de ello. 30%	Comprende el concepto de función, reconoce, interpreta y analiza las gráficas funcionales de forma consciente. 60%	Comprende el concepto de función, reconoce, interpreta y analiza las gráficas funcionales de forma inconsciente. 100%
Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas. 33,3%	No reconoce, no representa y no analiza las funciones lineales para utilizándolas para resolver problemas. Además, no es consciente de ello. 10%	No reconoce, no representa y no analiza las funciones lineales para utilizándolas para resolver problemas. Pero es consciente de ello. 30%	Reconoce, representa y analiza las funciones lineales para utilizándolas para resolver problemas de forma consciente. 60%	Reconoce, representa y analiza las funciones lineales para utilizándolas para resolver problemas de forma inconsciente. 100%

Figura 4.6: Rúbrica para la evaluación del nivel de desarrollo de la competencia y el nivel de consciencia

Instrumentos de evaluación

Con el objetivo de obtener indicadores que sirvan para poder evaluar las distintas competencias se establecen una serie de instrumentos de evaluación. A lo largo de la programación didáctica se proponen unos hitos a cumplir por el alumnado, estos hitos tienen asociados una ponderación según su importancia y un mecanismo de control respectivamente, tabla 4.4.

Como mecanismos de control se utilizan:

- *Listas de control*, donde se indica de manera nominativa qué alumnado ha realizado el hito o no.
- *Escalas de observación*, donde se escala la consecución del hito en función de si la evolución ha sido positiva, neutra o negativa.
- *Análisis*, se realiza una evaluación del hito indicando qué se ha realizado mal y medidas correctivas enfocadas a la mejora.
- *Entrevista*, se evalúa individualmente el planteamiento y razonamiento matemático empleado por el alumnado para la consecución del hito.
- *Autoevaluación*, el alumnado evalúa su trabajo para la consecución del hito.
- *Coevaluación*, los integrantes del equipo evalúan el trabajo del resto de miembros para la consecución del hito.

Hitos:	**Ponderación:**	**Mecanismo de control:**
- Asistencia al aula	5 %	Listas de control
- Participación activa	5 %	Escalas de observación
- Entrega de actividades en el aula	5 % 10 %	Listas de control Análisis de actividades
- Entrega de actividades para ampliar fuera del aula	5 % 10 %	Listas de control Análisis de actividades
- Memoria de la actividad de modelización matemática	10 % 10 % 10 % 10 %	Análisis de la memoria Entrevista Autoevaluación Coevaluación
- Presentación de la actividad de modelización matemática	10 % 10 %	Análisis de la presentación Coevaluación

Tabla 4.4: Hitos e instrumentos de evaluación

Los hitos planteados tienen en cuenta la asistencia al aula y la participación activa del alumnado durante las sesiones. Con esto se pretende reducir el absentismo y servir de aliciente para la comunicación alumno-profesor. Para este fin, se lleva a cabo un control diario de asistencia en forma de lista de seguimiento, donde se toma nota de quién ha faltado al aula y si su ausencia está o no justificada, junto con una escala de observación diaria donde se recoge la evolución de cada alumno en relación a la respuesta hacia el profesor y su participación en el aula. La escala de observación se recoge en la tabla 4.5 la cual debe ser aplicada diariamente y de forma nominativa.

La entrega de actividades realizadas dentro y fuera del aula fuerza al alumnado a repasar los contenidos dados, a plantear dudas y a generar consciencia sobre la consecución del criterio. Además, pretende comprometer al alumnado con la materia a partir de la entrega periódica de actividades. Para la evaluación de las diferentes actividades, tanto las realizadas dentro como fuera del aula, se tiene en cuenta la entrega como la correcta realización de las mismas. Además, según la evolución del alumno se establecen medidas para mejorar de forma individualizada. La tabla 4.6 relaciona las condiciones tomadas en cuenta para la evaluación de actividades con las medidas para mejorar.

La actividad de modelización matemática aglutina todos los contenidos y criterios. Así, la memoria debe contener un reflejo de todo lo visto en las distintas sesiones. Con el análisis de la memoria y la entrevista individual se pretende evaluar el trabajo realizado por cada uno de los miembros del equipo. La evaluación de la memoria valora tanto la correcta resolución del problema como el uso de las etapas de la modelización matemática, la ponderación de la actividad en función de estos dos criterios se recoge en la evolución del grupo de trabajo de la tabla 4.8. Para evaluar el trabajo individual se realiza una entrevista donde se tienen en cuenta el planteamiento de una solución y la justificación de la misma, los criterios de la entrevista se recogen en la tabla 4.7.

La autoevaluación y la coevaluación pretenden generar en el alumnado una visión crítica hacia su trabajo y el de los demás con una connotación puesta en la mejora continua. Para esto, se le pide a cada integrante del grupo que rellene dos cuestionarios, recogidos en las tablas 4.9 y 4.10, donde se pone en juicio el trabajo desarrollado por cada miembro del grupo. Además, con la justificación del porcentaje de tareas realizadas por cada miembro se pretende que la carga de trabajo individual sea equitativa.

De manera análoga a la memoria, se encuentra la presentación de la actividad al resto de la clase. No obstante, la presentación pretende enfrentar al alumnado al resto de la clase y generar competencias transversales comunicacionales.

Descripción:	Evolución:
- El alumno no participa ni cuando se le pregunta directamente.	- Negativa (0 %).
- El alumno sólo participa cuando se le pregunta.	- Neutra (50 %).
- El alumno siempre participa en las actividades propuestas y realiza consultas de forma autónoma.	- Positiva (100 %).

Tabla 4.5: Escala de observación

Descripción:	Evolución:	Para mejorar:
- El alumno no entrega ninguna actividad.	- Negativa (0 %).	- Insistir en la realización de la actividad, si es reiterativo derivar al tutor del grupo.
- El alumno entrega las actividades pero están mal realizadas.	- Neutra (30 %).	- Indicar los fallos, el porqué de los mismos y reforzar los contenidos dados para no cometerlos.
- El alumno entrega todas las actividades pero tiene algunos fallos.	- Positiva (70 %).	- Identificar los fallos cometidos y explicar el porqué de los mismos.
- El alumno entrega todas las actividades y no tiene fallos.	- Excelente (100 %).	- Mandar actividades de ampliación.

Tabla 4.6: Análisis de actividades

Descripción:	Evolución:
- El alumno no plantea ninguna solución al problema de forma individual.	- Negativa (0 %).
- El alumno plantea una solución pero no la justifica.	- Negativa (30 %).
- El alumno plantea una solución y la justifica.	- Neutra (50 %).
- El alumno plantea una solución correcta pero la justifica erróneamente.	- Positiva (70 %).
- El alumno plantea una solución adecuada y la justifica correctamente.	- Excelente (100 %).

Tabla 4.7: Entrevista individual

Descripción:	Evolución:
- El grupo de trabajo no entrega ninguna memoria.	- Negativa (0 %).
- El grupo de trabajo entrega una solución incorrecta y no la justifica.	- Negativa (20 %).
- El grupo de trabajo presenta una memoria con una solución incorrecta y la justifica pero no siguiendo las etapas de la modelización matemática.	- Neutro (40 %).
- El grupo de trabajo presenta una memoria con una solución correcta y la justifica pero no siguiendo las etapas de la modelización matemática.	- Positivo (70 %).
- El grupo de trabajo presenta una memoria con una solución correcta y la justifica siguiendo las etapas de la modelización matemática.	- Excelente (100 %).

Tabla 4.8: Análisis de la memoria de la actividad de modelización matemática

Descripción:	Ponderación:	Respuesta:
¿Has propuesto alguna solución al problema?	10 %	Si/No
¿Has justificado tu solución?	10 %	Si/No
¿Has debatido con tus compañeros sobre qué solución es la óptima?	10 %	Si/No
¿Tu solución resultó la elegida finalmente?	10 %	Si/No
Evalúa de 0 a 10 tu trabajo realizado.	30 %	Nota:
Indica el porcentaje de tareas realizadas por ti.	30 %	Porcentaje:

Tabla 4.9: Autoevaluación a rellenar por el alumno

Nombres del resto de integrantes del grupo:		
Integrante A:		
Integrante B:		
Integrante C:		
Descripción:	**Ponderación:**	**Respuesta:**
Evalúa de 0 a 10 el trabajo realizado por A.	50 %	Nota:
Evalúa de 0 a 10 el trabajo realizado por B.	50 %	Nota:
Evalúa de 0 a 10 el trabajo realizado por C.	50 %	Nota:
Indica el porcentaje de tareas realizadas por A.	50 %	Porcentaje:
Indica el porcentaje de tareas realizadas por B.	50 %	Porcentaje:
Indica el porcentaje de tareas realizadas por C.	50 %	Porcentaje:

Tabla 4.10: Coevaluación a rellenar por cada miembro del grupo

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En consecuencia a los objetivos definidos al inicio, el trabajo final de máster aporta una visión general de todos los factores que influyen en la función docente, desde un punto de vista normativo, curricular, epistemológico y contextual. Así, se da respuesta al primer objetivo que pretende que el alumno que desarrolle el trabajo final de máster conozca los agentes y factores que influyen en la docencia y necesarios para la redacción de una unidad didáctica. Estos han condicionado en todo momento la formulación de la unidad didáctica y la forma de trabajar del docente. Sin embargo, los condicionantes impuestos para las adaptaciones curriculares individualizadas como respuesta a la atención a la diversidad deben ser establecidas de forma consensuada con el comité pedagógico del centro docente.

Se ve necesario la aplicación de la proyección didáctica en un aula real, con el objetivo de validar la unidad didáctica y proponer posibles adaptaciones de mejora. Remarcando de igual forma los aspectos positivos y negativos de su aplicación con una visión crítica del docente hacia el trabajo desarrollado. La implementación en revisión continua de la unidad didáctica junto con la forma de trabajo utilizada en la actividad de modelización matemática tienen una componente intrínseca de búsqueda de la mejora continua por su estructura cíclica, enfocada a la validación de la unidad o de la solución propuesta.

El estudio comparado de libros de texto ha dado lugar a actividades modificadas basadas en las usualmente utilizadas por los docentes sacadas de los libros de texto y al diseño de actividades, problemas no estructurados y actividades orientadas a la modelización matemática como forma de trabajo. Así, se recogen recursos alternativos a los usuales y se fomenta el pensamiento y razonamiento matemático, útiles en la vida real.

La elección del tema y su desarrollo ha permitido entender parte del esfuerzo demandado en el proceso de oposición pública, pudiendo establecer de forma implícita una predisposición por aquellos temas más interesantes y adelantando la redacción del mismo para el futuro examen. Además, en el tema se aprecia una relación entre distintas tipologías de funciones y su aplicación en la realidad, pudiendo servir de apoyo para las explicaciones en las distintas sesiones docentes.

El análisis de estudios en educación ha permitido conocer los posibles problemas en el aula relacionados con la no adecuación de los recursos al nivel del aula y el deterioro de la enseñanza. Para hacer frente a estos problemas se han tomado acciones con un fin preventivo, como por ejemplo la utilización de las TIC como elemento dinamizador. Además, el conocimiento del contexto del aula ha permitido establecer una metodologías predominantes sobre otras. Es cierto que el uso de estas metodologías no debe ser rígido, sino que debe adaptarse a la necesidades demandadas por el aula. De esta forma, la unidad didáctica debe estar en continua revisión y en cualquier caso, adaptada al aula donde se aplique. Así, se puede obtener la consecución de las competencias por parte del alumno.

Finalmente, la elaboración de una unidad didáctica ha generado experiencia en gestionar el aula y establecer tiempos gracias a la planificación de las sesiones. Para la evaluación de las distintas actividades realizadas se ha utilizado un rúbrica y diferentes instrumentos de evaluación, reutilizables en otras programaciones. De esta forma, se reduce el tiempo en implementaciones o modificaciones de futuras proyecciones didácticas de la asignatura Matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Allueva, P. (2002). Conceptos básicos sobre metacognición. *Diputación General de Aragón*, *1*, 59–85.

Almodóvar, J. A. (2016). *Matemáticas, 2 ESO: serie resuelve.* Santillana.

Amaya, T. (2020). Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones. *Boletín de Educación Matemática*, *34*(66), 110–131.

BOE. (1993). *Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesor.*

BOE. (2014). *Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

BOE. (2020). *Ley Orgánica 3/2020 de 29 de diciembre por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.*

BOE. (2021). *Real Decreto 984/2021 de 16 de noviembre por el que se regulan la evaluación y la promoción en la Educación Primaria, así como la evaluación, la promoción y la titulación en la ESO, el Bachillerato y la Formación Profesional.*

BOJA. (2010). *Decreto 327/2010 de 13 de julio por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria.*

BOJA. (2020). *Decreto 182/2020 de 10 de noviembre por el que se modifica el Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la ESO en la Comunidad Autónoma de Andalucía.*

BOJA. (2021). *Orden de 15 de enero de 2021 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.*

Bolivar, C. (2003). *Formación y desarrollo de competencias laborales.* Descargado 2022-08-01, de `https://www.gestiopolis.com/formacion-desarrollo-competencias-laborales/`

Clarke, B., Clarke, D., Johnansson, B., Lambdin, D., Lester, F., y Walby, K. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, *1*, 145–159.

Colera, J., y Gaztelu, I. (2016). *Matemáticas 2: ESO*. Anaya.

Consejería de educación de la Junta de Andalucía. (2017). Anexo IX Organización de la respuesta educativa. Protocolo NEAE.

Elstrodt, J. (2007). La vida y obra de Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). *Clay Mathematics Proceedings*, *7*.

Escribano, A., Bejarano, M. T., Zúñiga, M. A., y Fernández, J. L. (2010). Programa de metodología didáctica para la mejora de la inteligencia emocional y el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). *Docencia e investigación: revista de la Escuela Universitaria de Magisterio de Toledo*, *35*(20), 271–305.

Fernández, J. A. (1994). *Análisis Matemático I*. Tecnos.

Fragueiro, M. S., Muñoz, M. M., y Soto, J. R. (2012). “1-2-4". A simple cooperative technique of learning, applied in sciences. *Innovación educativa*, *22*, 87–96.

Fundación CADAH. (2012). *Tipos de adaptaciones curriculares individualizadas (ACI).* Descargado 19/09/2022, de `https://www.fundacioncadah.org/web/articulo/tipos-de-adaptaciones-curriculares-individualizadas.html`

Galindo, A., y López, M. (2009). *La obra de Euler. Tricentenario del nacimiento de Leonhard Euler (1707-1783).* Instituto de España.

Garat-González, M. A. (2014). *Enseñanza de funciones y gráficas en 2º de la ESO utilizando la pizarra digital interactiva.* Universidad internacional de La Rioja.

García, M. (2006). *Experiencia de innovación didáctica en álgebra: una unidad didáctica sobre funciones.* Universidad Complutense de Madrid.

Guzman, M., y Rubio, B. (1992). *Análisis matemático*. Pirámide.

Houdement, C., Butlen, D., y Peltier, M. (2003). La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia. *Comisión permanente de los IREM para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, *1*, 269.

Junta de Andalucía. (2017). *Instrucción de 8 de marzo de 2017 de la dirección general de participación y equidad por la que se actualiza el protocolo de detección, identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa.*

Junta de Andalucia. (2022). *Instrucción conjunta 1/2022 de 23 de junio de la dirección general de ordenación y evaluación educativa y de la dirección general de FP, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan ESO.*

Junta de Andalucía. (2022). *Resolución de 26 de mayo de 2022 de la Delegación Territorial de educación y deporte en Jaén por la que se dictan las normas que han de regir el calendario escolar para el curso 21/22 en todos los centros docentes de la provincia, excepto Universidades.*

Lanuza, E. M. (2020). Tecnologías de la información y comunicación (TIC) integradas en estrategias didácticas innovadoras que faciliten procesos de enseñanza aprendizaje en la unidad de funciones de Matemática General. *Revista Científica de FAREM-Estelí: Medio ambiente, tecnología y desarrollo humano*, *36*, 22–36.

Molina, R., y Franco, M. (1994). *Lecciones de Cálculo Infinitesimal I* (1.ª ed.). Universidad de Murcia.

Ortega, J. M. (1993). *Introducción al análisis matemático*. Labor.

Parra, F. J. (2017). La Taxonomía de Bloom en el modelo Flipped Classroom. *Publicaciones Didácticas*, *86*(1), 176–179.

Poot-Delgado, C. A. (2013). Retos del aprendizaje basado en problemas. *Enseñanza e investigación en psicología*, *18*, 307–314.

Rudin, W. (1972). *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill.

Santiago, R. (2022). *The Flipped Classroom.* Descargado 2022-07-22, de `https://www.theflippedclassroom.es/`

Universidad de Jaén. (2021). *Guía docente 2021-22 - 72326001 - Trabajo fin de Máster.*