



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

**SISTEMAS DE
ECUACIONES EN 4º DE
ESO DE MATEMÁTICAS
ORIENTADAS A
ENSEÑANZAS
ACADÉMICAS**

Alumno/a: Álvarez de Luis, David

Tutor/a: Prof. D. Lorenzo Luque Cañada
Dpto: Didáctica de las Matemáticas

*En cuestiones de cultura y de saber,
Sólo se pierde lo que se guarda,
Sólo se gana lo que se da.*

Antonio Machado

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE	8
1. INTRODUCCIÓN	9
2. OBJETIVOS	10
3. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA	11
3.1. Antecedentes	11
3.1.1. Babilonia (2000 a.C.).....	11
3.1.2. Egipto (1700 a.C.)	12
3.1.3. China (1200 a.C.).....	13
3.1.4. Grecia (600 a.C.)	15
3.1.5. Hinduismo (200 a.C.)	16
3.1.6. Matemáticas árabes (S. IX)	16
3.1.7. Nacimiento del simbolismo matemático moderno (S. XV – XVIII).....	17
3.1.8. Desarrollo de los métodos modernos (S. XVIII – Actualidad)	17
3.2. Generalidades	18
3.2.1. Definiciones	18
3.2.2. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.....	20
3.2.3. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales	22
3.3. Teorema de Rouché y Rouché–Frobenius	24
3.3.1. Teorema de Rouché	26
3.3.2. Teorema de Rouché–Frobenius	29
3.4. Regla de Cramer	30
3.4.1. Sistema de Cramer	30
3.4.2. Solución de un sistema de Cramer	32
3.4.3. Transformación de un sistema cualquiera en sistema de Cramer.....	34
3.5. Método de Gauss y Gauss–Jordan	35
3.5.1. Método de Gauss	38
3.5.2. Discusión de un sistema	41
3.5.3. Método de Gauss–Jordan.....	42
3.6. Aplicación de los sistemas de ecuaciones a la geometría	46
3.6.1. Intersección entre dos rectas en el plano \mathbb{R}^2	46
3.6.2. Intersección entre dos rectas en el espacio \mathbb{R}^3	47

3.6.3. Intersección entre dos planos en el espacio \mathbb{R}^3	49
3.6.4. Intersección entre tres planos en el espacio \mathbb{R}^3	50
3.6.5. Intersección entre una recta y un plano en el espacio \mathbb{R}^3	53
4. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	56
4.1. Sistemas de Ecuaciones: currículo por etapas	56
4.2. Comparación entre diferentes editoriales	61
5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	63
5.1. Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica	63
5.2. Conocimiento conceptual del simbolismo algebraico	67
6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA	72
6.1. Título	72
6.2. Justificación	72
6.3. Contextualización del centro y del aula	72
6.3.1. Situación del centro	73
6.3.2. Oferta educativa	74
6.3.3. Centros adscritos	74
6.3.4. Instalaciones	75
6.3.5. Personal del centro	75
6.3.6. Alumnado del centro	75
6.3.7. Alumnado del aula	76
6.4. Objetivos	77
6.4.1. Objetivos generales en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria	77
6.4.2. Objetivos de las Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas	79
6.4.3. Objetivos de la unidad de Sistemas de Ecuaciones	80
6.5. Competencias clave	81
6.6. Contenidos	81
6.7. Metodología	82
6.8. Actividades y recursos	84
6.8.1. Actividades	84
6.8.2. Recursos	85
6.8.3. Espacios	85
6.9. Atención a la diversidad	85
6.9.1. Atención a la diversidad en el aula	86
6.10. Temporalización	87

6.10.1. Desarrollo de la unidad didáctica	88
6.11. Evaluación	92
7. CONCLUSIONES	97
8. BIBLIOGRAFÍA	99
8.1. Referencias bibliográficas	99
8.2. Marco normativo	99
ANEXO I. ACTIVIDADES	101
Prueba de evaluación inicial.....	101
Actividades ordinarias.....	101
Actividades de refuerzo	110
Actividades de ampliación	112
Examen de la unidad	113
Examen de recuperación.....	114

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Rectas coincidentes (elaboración propia).....	48
Figura 2. Rectas paralelas (elaboración propia)	48
Figura 3. Rectas secantes (elaboración propia).....	48
Figura 4. Rectas que se cruzan (elaboración propia).....	49
Figura 5. Planos coincidentes (elaboración propia).....	49
Figura 6. Planos paralelos (elaboración propia)	50
Figura 7. Planos secantes (elaboración propia).....	50
Figura 8. Tres planos coincidentes (elaboración propia).....	51
Figura 9. Dos planos coincidentes y uno paralelo (elaboración propia)	51
Figura 10. Tres planos paralelos (elaboración propia)	51
Figura 11. Dos planos coincidentes y uno secante (elaboración propia).....	52
Figura 12. Tres planos secantes en una recta (elaboración propia).....	52
Figura 13. Dos planos paralelos y uno secante (elaboración propia).....	53
Figura 14. Tres planos secantes dos a dos (elaboración propia).....	53
Figura 15. Tres planos secantes en un punto (elaboración propia)	53
Figura 16. Recta contenida en un plano (elaboración propia)	54
Figura 17. Recta paralela a un plano (elaboración propia)	55
Figura 18. Recta secante a un plano (elaboración propia).....	55
Figura 19. Localización del I.E.S. Auringis (fuente: Google Maps).....	73
Figura 20. Vista en planta del I.E.S. Auringis (fuente: Google Maps).....	74
Figura 21. Logo del I.E.S. Auringis (fuente: página web del centro).....	74
Figura 22. Número de alumnos por etapa educativa (fuente: equipo directivo del centro)	76

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Método de Diofanto para la resolución de sistemas de ecuaciones	16
Tabla 2. Currículo de Matemáticas 1º y 2º de ESO (fuente: BOE)	56
Tabla 3. Currículo de Matemáticas Aplicadas 3º de ESO (fuente: BOE).....	57
Tabla 4. Currículo de Matemáticas Académicas 3º de ESO (fuente: BOE)	58
Tabla 5. Currículo de Matemáticas Aplicadas 4º de ESO (fuente: BOE).....	59
Tabla 6. Currículo de Matemáticas Académicas 4º de ESO (fuente: BOE).....	60
Tabla 7. Programación didáctica de la asignatura según Anaya y Santillana	61
Tabla 8. Estructura de la Unidad de Sistemas de Ecuaciones según Anaya y Santillana	62
Tabla 9. Registros semióticos en sistemas de ecuaciones (fuente: Segura, S.M.)	64
Tabla 10. Categorías sintáctico-semánticas (fuente: Fernández–Millán, E. y Molina, M.)	69
Tabla 11. Ejemplo invención de problema (fuente: Fernández–Millán, E. y Molina, M.)	69
Tabla 12. Resultados de la prueba (fuente: Fernández–Millán, E. y Molina, M.)	70
Tabla 13. Grupos por etapa educativa (elaboración propia).....	76
Tabla 14. Temporalización del curso de Matemáticas (elaboración propia)	88
Tabla 15. Temporalización de la unidad didáctica (elaboración propia).....	88
Tabla 16. Temporalización de la unidad didáctica por sesiones (elaboración propia) ..	92
Tabla 17. Criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje (fuente: BOE).....	96

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

Resumen

El presente proyecto tiene como objetivo aplicar los conocimientos y aprendizajes adquiridos a lo largo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas para el desarrollo de una unidad didáctica correspondiente a los Sistemas de Ecuaciones de la asignatura de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas de 4º de ESO.

Para tal fin se expondrá previamente la fundamentación teórica sobre la que se sustenta el tema en cuestión, incluyendo el planteamiento, discusión y resolución de sistemas, así como otros aspectos que influyen en la elaboración de la unidad didáctica (marco legislativo, investigaciones didácticas previas sobre la materia, etc.).

Palabras clave

Sistema de ecuaciones, ESO, unidad didáctica, matemáticas.

Abstract

The main objective of the present project is to apply the knowledge and training acquired during the Master's Degree on Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching for the development of a didactic unit corresponding to Systems of Equations of the subject of Mathematics Oriented to Academic Teaching of 4th grade of Secondary Compulsory Education.

For that aim, theoretical foundation on which the subject-matter is based will be presented, including the approach, discussion and resolution of systems of equations, as well as other aspects that influence the elaboration of the didactic unit (legislative framework, previous didactic research on the subject, etc.).

Keywords

System of equations, Compulsory Secondary Education, didactic unit, mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

Los Sistemas de Ecuaciones son un elemento de gran importancia dentro del bloque del álgebra. Asimismo, es una de las unidades que más dificultades presentan para los alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato. Es por ello que resulta esencial estructurar las enseñanzas de forma adecuada, de modo que los alumnos alcancen los aprendizajes de manera efectiva y, ante todo, significativa.

Según el marco legislativo vigente, los sistemas de ecuaciones se introducen en las matemáticas en segundo curso de ESO, y se imparten contenidos relacionados con los mismos en todos los cursos siguientes. Además, son una herramienta fundamental para otras asignaturas como física, química, economía, etc., por lo que se tratará de diseñar una unidad didáctica integrada, transversal y que trabaje la interdisciplinariedad.

En cuanto a la estructura del proyecto, se definirán en primer lugar los objetivos a alcanzar mediante el presente Trabajo Fin de Máster.

Posteriormente se dividirá el cuerpo de la memoria en cuatro bloques principales cuyos objetivos se detallan en el apartado siguiente: fundamentación epistemológica, fundamentación curricular, fundamentación didáctica y proyección didáctica, donde se incluye el desarrollo de la unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones.

Por último, se expondrán las conclusiones derivadas de la realización del proyecto y se incluirán tanto las referencias bibliográficas consultadas como los anexos pertinentes.

2. OBJETIVOS

El objetivo principal del presente proyecto es el entendimiento y desarrollo de la materia correspondiente al Tema 16 *“Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss–Jordan.”* del temario de oposiciones en la especialidad de Matemáticas, para elaborar posteriormente una unidad didáctica que trate del citado tema con objeto de implantarla en el aula.

Asimismo, de manera implícita se pretende poner en práctica todos los aprendizajes adquiridos durante este curso en el Máster de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

El proyecto se sustenta sobre cuatro patas que constituyen el cuerpo del mismo. A continuación se señalan los objetivos que se pretenden alcanzar en cada sección.

Fundamentación epistemológica

El objetivo que se persigue en este apartado es el desarrollo teórico de diferentes conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones (planteamiento, discusión, resolución, etc.), así como la demostración de varios teoremas correspondientes al tema en cuestión, todo ello empleando una notación adecuada, afrontado desde el rigor matemático y alcanzando un nivel considerablemente avanzado.

Fundamentación curricular

La meta de esta tercera sección consiste en identificar el currículo que corresponde a cada etapa educativa en relación con la materia escogida. Posteriormente se analizarán y compararán diferentes libros de texto para verificar si en efecto existe conexión con el currículo y para estudiar de qué manera hacen llegar los contenidos y conocimientos al alumnado.

Fundamentación didáctica

La finalidad de la fundamentación didáctica es recopilar información y consultar artículos relacionados con el tema en cuestión. Para ello se recurrirá a revistas nacionales e internacionales de reconocido prestigio.

Proyección didáctica

Como punto de culminación para los capítulos anteriores, se tratará de diseñar desde cero y desarrollar una unidad didáctica basada en la enseñanza de sistemas de ecuaciones para un curso de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Además, la proyección didáctica tiene también como objetivo que la unidad construida sea original y adaptada al alumnado a quien va dirigida atendiendo a sus necesidades académicas.

3. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En el presente apartado se plantea la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, materia correspondiente al Tema 16 “*Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss–Jordan.*” del temario de oposiciones de la especialidad de matemáticas, publicado en la Orden EDU/3138/2011, de 15 de noviembre, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, accesos y adquisición de nuevas especialidades de los Cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores Técnicos de Formación Profesional.

El objetivo es abordar el tema en cuestión desde el rigor matemático, empleando un lenguaje adecuado y alcanzando un nivel acorde a lo exigido en una presentación de oposición¹.

3.1. Antecedentes

Desde sus orígenes, el ser humano ha tratado de comprender y describir los fenómenos que forman parte del entorno. Ya desde la prehistoria, antes incluso de la aparición de los primeros símbolos con significado y de la escritura, se han hallado evidencias de que nuestros ancestros intentaron cuantificar el tiempo y otras magnitudes mediante diferentes herramientas.

En ese sentido, y a pesar de que el lenguaje algebraico que empleamos hoy día es relativamente moderno, se han hallado muestras antiquísimas de que nuestros antepasados llevan siglos planteando y resolviendo ecuaciones y sistemas, aunque ellos no los concibiesen como tal. A continuación se ha tratado de resumir el extenso recorrido de los sistemas de ecuaciones a lo largo de la historia de las matemáticas, tratando también la evolución del lenguaje y simbología algebraica, pues son conceptos estrechamente ligados.

3.1.1. Babilonia (2000 a.C.)

La información que se ha podido rescatar de la época babilónica es más bien limitada, a través de unas 400 tablillas de arcilla que fueron desenterradas en 1850. En

¹ Para el desarrollo matemático del presente apartado han servido de apoyo los siguientes libros y páginas web de preparación para oposiciones de Educación Secundaria en la especialidad de Matemáticas:

- Morra, J. (2020). *Tema 16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan (Oposiciones Matemáticas)*. Amazon KDP.
- Página Web José Luis Lorente (8 de abril 2021). *TEMA 16. Discusión Y Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan*. <http://www.joseluislorente.es/academia/temas/TEMA%2016.pdf>

ellas se analizan problemas matemáticos estrechamente relacionados con problemas cotidianos (comerciales, agrícolas, reparto de terrenos, herencias, etc.).

Las matemáticas babilónicas empleaban un sistema de numeración sexagesimal. En aquel momento no existía aún el concepto de incógnita ni el de asociar letras a las cantidades desconocidas. Sin embargo, los babilonios eran ya capaces de resolver ecuaciones no lineales y sistemas de ecuaciones lineales asignando a las incógnitas palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

A continuación se muestra un problema hallado en una antigua tablilla babilónica²:

$$\frac{1}{4} \text{ anchura} + \text{ longitud} = 7 \text{ manos}$$

$$\text{anchura} + \text{ longitud} = 10 \text{ manos}$$

Inicialmente se representaba el valor de las manos en términos de dedos; para ello se daba el valor 5 a una mano y a partir de dicha suposición se resolvía el sistema mediante un método similar al de eliminación o reducción. En notación actual sería:

$$\frac{1}{4}x + y = 35 \rightarrow x + 4y = 140$$

$$x + y = 50$$

Eliminando la incógnita x :

$$3y = 90 \rightarrow y = 30$$

$$x = 50 - 30 = 20$$

De donde se concluía que *longitud* = 30 *dedos* y *anchura* = 20 *dedos*.

3.1.2. Egipto (1700 a.C.)

La información disponible sobre los egipcios es por suerte mucho más abundante que la referente a los babilonios. Existe una gran cantidad de muestras de aquella época, todas ellas reflejadas en papiros de los que buena parte han sobrevivido hasta día de hoy. La prueba más extensa es una lámina de 30 centímetros de ancho por 3 metros de largo conocida como Papiro de Rhind o Papiro de Ahmes (S. XVII a.C.).

La capacidad matemática de los egipcios fue mucho más limitada que la babilónica; los problemas de álgebra se limitaban exclusivamente ecuaciones lineales y no hay vestigio alguno de ecuaciones no lineales o sistemas de ecuaciones. En ese sentido, los matemáticos egipcios empleaban el método de falsa posición para resolver problemas con ecuaciones. Dicho método atribuye un valor inicial a la incógnita, que se

² Boyer, C. B. (1968). *Historia de la matemática* (pp. 55–56). Alianza Editorial.

denominaba “aha” o “montón”³. En la mayoría de los casos la estimación será incorrecta, pero a partir de ella puede obtenerse la solución correcta mediante el uso de las proporciones.

Uno de los problemas hallados en el Papiro de Ahmes reza así: “*Un montón, sus dos tercios, su mitad, todos juntos hacen trece. ¿Cuál es la cantidad?*”. Traducido a lenguaje algebraico moderno sería:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13 \rightarrow x = 6$$

Si se da a la incógnita un valor inicial (por ejemplo 12):

$$12 + \frac{24}{3} + \frac{12}{2} = 12 + 8 + 6 = 26 \neq 13$$

La estimación es incorrecta; no obstante se puede corregir mediante una regla de tres: 26 es a 13 lo que 12 es al montón. Por tanto el montón vale 6.

Este método de falsa posición fue la antesala de los métodos iterativos posteriores (bisección, Newton–Raphson, etc.).

3.1.3. China (1200 a.C.)

Los chinos comenzaron a representar las cantidades mediante símbolos, aunque carecían de un símbolo para indicar el cero. Trabajaron además con números negativos aunque no los consideraban soluciones válidas por la fuerte influencia del contexto del problema, lo cual dificultó la generalización del estudio de las ecuaciones.

Su contribución más notable fue la resolución de sistemas de ecuaciones mediante tablas (método semejante a las matrices de hoy día). En los 9 libros del arte matemático, elaborados por autores chinos desconocidos y comentados por Liu Hui en el Siglo III a.C., se resuelven varios problemas de este tipo.

A continuación se muestra un ejemplo resuelto por el método del tablero⁴:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{array} \right\}$$

Se plantea el sistema mediante un tablero semejante a una matriz:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

³ Boyer, C. B. (1968). *Historia de la matemática* (p. 37). Alianza Editorial.

⁴ Martín, J. C. y González, J. L. (2020). Elementos del análisis histórico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas consecuencias didácticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(1), pp. 12-21.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 26 & 34 & 39 \\ \hline \end{array}$$

Se efectúan diferentes operaciones a las columnas para obtener un sistema equivalente más sencillo:

$$2^{\circ} \text{ columna} \times 3$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline 2 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 26 & 102 & 39 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$2^{\circ} \text{ columna} - 3^{\circ} \text{ columna} \times 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 26 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$1^{\circ} \text{ columna} \times 3$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 3 \\ \hline 6 & 5 & 2 \\ \hline 9 & 1 & 1 \\ \hline 78 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$1^{\circ} \text{ columna} - 3^{\circ} \text{ columna}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 8 & 1 & 1 \\ \hline 39 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$1^{\circ} \text{ columna} \times 5$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 20 & 5 & 2 \\ \hline 40 & 1 & 1 \\ \hline 195 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$1^{\circ} \text{ columna} - 2^{\circ} \text{ columna} \times 4$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 5 & 2 \\ \hline 36 & 1 & 1 \\ \hline 99 & 24 & 39 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

los chinos, sólo aceptaba las soluciones positivas pues lo que buscaba era resolver problemas y no simples ecuaciones. En la serie *Arithmetica*, formada por 13 libros, Diofanto plantea problemas como el que se presenta a continuación⁵.

Problema 27 (Libro I): “Encontrar dos números tales que su suma sea 20 y su producto 96”. Para la resolución de este ejemplo, Diofanto supone que la diferencia entre ambos números es $2x$, por tanto:

Diofanto	Álgebra moderna (sustitución)
$\left. \begin{array}{l} \text{incógnita 1} \rightarrow 10 + x \\ \text{incógnita 2} \rightarrow 10 - x \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{array} \right\}$
$(10 + x)(10 - x) = 96$	$x(20 - x) = 96$
$100 - x^2 = 96 \rightarrow x^2 = 4$	$20x - x^2 = 96$
$x = 2$	$x^2 - 20x + 96 = 0$
Por tanto:	$x_1 = 12 ; y_1 = 8$
$\text{incógnita 1} = 12$	$x_2 = 8 ; y_2 = 12$
$\text{incógnita 2} = 8$	

Tabla 1. Método de Diofanto para la resolución de sistemas de ecuaciones

3.1.5. Hinduismo (200 a.C.)

Los hindúes utilizaron un sistema numérico posicional en base 10 muy similar al actual. Asimismo, a pesar de que los problemas seguían emergiendo de situaciones cotidianas concretas, fueron capaces de desarrollar un simbolismo más avanzado que todos sus predecesores. Sin embargo, mantuvieron muchos de sus procedimientos de forma oral y no sacaron provecho a los avances en su notación simbólica. Dicho sistema era mucho más sencillo que los sistemas numéricos no posicionales antiguos y más propicio para la construcción de algoritmos y fórmulas para las operaciones básicas.

3.1.6. Matemáticas árabes (S. IX)

Todas las etapas históricas mencionadas hasta el momento se caracterizan por la falta de un lenguaje algebraico consistente; se empleaban algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero generalmente los cálculos se desarrollaban en lenguaje natural y se expresaban de forma oral. No obstante, la conquista musulmana en el siglo VII marca un antes y un después en la evolución del simbolismo algebraico.

⁵ Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Vol. 1: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I*. (p. 193). Alianza Editorial.

Fueron precisamente los árabes (800–1300 d.C.) quienes se encargaron de desarrollar y difundir por Europa un nuevo sistema de numeración y simbolismo algebraico, logrando un mayor desarrollo del álgebra de ecuaciones y estableciendo reglas de reducción y cancelación de ecuaciones de primer grado.

3.1.7. Nacimiento del simbolismo matemático moderno (S. XV – XVIII)

A raíz de los avances conseguidos por los árabes, el álgebra creció y se desarrolló a pasos agigantados. A partir del siglo XV comenzó a aparecer parte de la simbología algebraica que empleamos en la actualidad.

En esta época fue el matemático alemán Johannes Widmann, en su publicación *Behende und hübsche Rechenung Allen auff Kauffmanschafft* (1489), quien introdujo los símbolos “+” y “-” con los que expresamos la suma y resta, para hacer referencia al superávit o déficit en los problemas mercantiles. Posteriormente, Robert Recorde (1557), médico y matemático galés, inventó el símbolo de la igualdad “=”.

Años después, el trabajo de Diofanto traducido al latín indujo al francés François Viète (1540–1603) a utilizar letras para las cantidades conocidas y las incógnitas y signos para representar las operaciones.

Por otra parte, René Descartes (1637) fusionó la geometría y el álgebra inventando la geometría analítica. Asimismo, ideó la notación algebraica que utilizamos hoy día, donde las constantes se representan con las primeras letras del alfabeto ($a, b, c \dots$) y las variables e incógnitas por las últimas (x, y, z).

3.1.8. Desarrollo de los métodos modernos (S. XVIII – Actualidad)

A partir del Siglo XVIII se empiezan a desarrollar diferentes métodos de resolución para ecuaciones de distinto grado (primer, segundo, tercer y cuarto grado). Las ecuaciones comienzan a ser objeto de estudio sin tener necesariamente conexión con problemas cotidianos. Igualmente, se inicia el estudio de matrices de diversos órdenes.

En cuanto a sistemas de ecuaciones, Euler (1707–1783) es uno de los primeros en indicar que un sistema de orden $n \times n$ no tiene necesariamente n ecuaciones, ya que se deben tener en cuenta las características de dichas ecuaciones (indicios de la dependencia lineal).

Por último, aparecen los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se emplean en la actualidad. Por un lado, los métodos de resolución en términos de determinantes de Maclaurin (1698–1746) y Cramer (1704–1752) y, posteriormente, los métodos de eliminación de Gauss (1777–1855) y Jordan (1838–1922).

Los métodos mencionados en el último párrafo son, entre otras cuestiones importantes, objeto de estudio en los apartados que se desarrollan a continuación.

3.2. Generalidades

En primer lugar se expondrán varias generalidades y conceptos previos y se esbozará una clasificación de los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se tratarán, por el siguiente orden:

- Teorema de Rouché para la discusión de sistemas de ecuaciones lineales.
- Regla de Cramer para la resolución de sistemas compatibles.
- Teoremas de Gauss y Gauss–Jordan para la resolución de sistemas compatibles.

Por último, se propondrán algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales en el bloque de geometría. Para la presentación del tema en cuestión se emplearán, con carácter general, sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

3.2.1. Definiciones

Antes de comenzar con el desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales en sí, conviene establecer ciertas definiciones que serán útiles en apartados posteriores.

Definición 1. Ecuación lineal

Las ecuaciones lineales son ecuaciones algebraicas de primer grado, es decir, son igualdades del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Donde n es el número de incógnitas, x_1, x_2, \dots, x_n son las citadas incógnitas y a_1, a_2, \dots, a_n, b son valores conocidos del cuerpo \mathbb{K} (en adelante por simplicidad se supondrá que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Ejemplo.

La expresión $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 8$ es una ecuación lineal con 5 incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Definición 2. Solución de una ecuación lineal

Dada una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, es solución de dicha ecuación una n -upla $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ que verifique $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n = b$.

Ejemplo.

La n -upla $(4, 2, 1, 1, 2)$ es solución para el ejemplo de ecuación lineal recién expuesto, ya que verifica:

$$2 \cdot 4 - 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 8$$

Definición 3. Sistema de ecuaciones lineales

Se denomina sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$ a un conjunto de m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas y coeficientes pertenecientes al cuerpo \mathbb{K} . Se representa de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ representa el coeficiente de la incógnita x_j en la ecuación i -ésima y $b_i \in \mathbb{K}$ representa el término independiente de la ecuación i -ésima ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

La i -ésima ecuación puede abreviarse de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

Y por tanto el sistema de ecuaciones puede expresarse como:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Ejemplo.

El siguiente conjunto de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 constituyen un sistema de ecuaciones lineales de orden 3×4 :

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3 \end{array} \right\}$$

Definición 4. Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Se denomina solución de un sistema de ecuaciones lineales a cualquier n -upla $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ que verifique todas y cada una de las ecuaciones de dicho sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n = b_1 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n = b_m \end{array} \right\}$$

Ejemplo.

La n -upla $(1, 1, 2, 2)$ es solución para el ejemplo de sistema de ecuaciones lineales recién expuesto, ya que verifica todas las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 1 - 2 + 2 \cdot 2 = 5 \\ -1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 = 4 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -3 \end{array} \right\}$$

Definición 5. Solución general de un sistema de ecuaciones lineales

Se denomina solución general de un sistema de ecuaciones al conjunto de todas las soluciones de dicho sistema.

Definición 6. Ecuación no lineal

Una ecuación no lineal es cualquier expresión algebraica que difiera de lo que se ha definido como ecuación lineal. Es decir, las ecuaciones de grado superior a uno, las ecuaciones que incluyan cualquier función trigonométrica, etc. son ecuaciones no lineales.

Ejemplo.

Las expresiones $x_1 + 2x_2 - x_3^2 = 8$ y $x_1 + \cos(x_2) = 1$ son ecuaciones no lineales.

Definición 7. Sistema de ecuaciones no lineales

Se denomina sistema de ecuaciones no lineales de orden $m \times n$ a un conjunto de m ecuaciones con las mismas n incógnitas y coeficientes pertenecientes al cuerpo \mathbb{K} , donde al menos una de las ecuaciones es no lineal.

Ejemplo.

El siguiente sistema de ecuaciones es no lineal:

$$\left. \begin{array}{l} x - y^3 = 5 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\}$$

Definición 8. Independencia lineal

Se dice de un conjunto de vectores que son linealmente independientes entre sí si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto. Es decir, dado un conjunto finito de vectores v_1, v_2, \dots, v_n se dice que son linealmente independientes si la siguiente igualdad:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0} (*)$$

Se cumple sólo cuando todos los términos a_1, a_2, \dots, a_n son cero.

Por otro lado, se dice de un conjunto finito de vectores que son linealmente dependientes si cumplen la igualdad (*) siendo al menos uno de los términos a_1, a_2, \dots, a_n distinto de cero.

3.2.2. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones

Supóngase un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$ formado por m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

A partir de dicho sistema pueden definirse las siguientes matrices.

- Matriz de coeficientes A , de orden $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Matriz de términos independientes B , de orden $m \times 1$:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Matriz ampliada $A|B$ de orden $m \times (n + 1)$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- Matriz de incógnitas X , de orden $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$$

Por tanto, el sistema puede expresarse matricialmente de la siguiente manera:

$$AX = B$$

Ejemplo.

Supóngase el siguiente sistema de ecuaciones lineales de orden 3×4 :

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Las matrices asociadas al sistema resultan:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

A continuación se muestra una clasificación de los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a dos criterios distintos.

3.2.3.1. Según el número de soluciones del sistema

Se puede plantear una clasificación de los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones en función del número de soluciones que admiten.

Sistema compatible

Se dice de un sistema que es compatible si admite al menos una solución.

Si dicha solución es única, se dice que el sistema es compatible determinado (SCD). Por otro lado, si el sistema admite más de una solución se dice que es compatible indeterminado (SCI).

Proposición 1.

Si un sistema tiene más de una solución, entonces tienen infinitas soluciones⁶.

Demostración.

Tómese el siguiente sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O escrito de otra forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m$$

Y sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ dos soluciones distintas del sistema.

Se cumple que $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, la expresión $\gamma\alpha + (1 - \gamma)\beta$ es también solución del sistema:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}[\gamma\alpha_j + (1 - \gamma)\beta_j] = \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j$$

⁶ La proposición en cuestión es propia de los sistemas lineales y no se aplica a los sistemas no lineales. Por ejemplo, la ecuación no lineal $(x + 2)(x - 5)(x - 1) = 0$ admite un número finito de soluciones mayor que 1 (en concreto 3 soluciones: $\beta_1 = -2$; $\beta_2 = 1$; $\beta_3 = 5$).

Dado que α y β son soluciones del sistema:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j = b_i$$

Y por tanto:

$$\gamma \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j = \gamma b_i + (1 - \gamma)b_i = \gamma b_i + b_i - \gamma b_i = b_i$$

Queda demostrado que $\gamma\alpha + (1 - \gamma)\beta$ es también solución $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ y por ende el sistema tiene infinitas soluciones.

Sistema incompatible

Se dice de un sistema que es incompatible (SI) si no tiene solución.

3.2.3.2. Según la matriz de términos independientes

Se pueden clasificar los sistemas de ecuaciones lineales según cómo sea la matriz de términos independientes o vector B .

Sistema homogéneo

Se dice de un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ que es homogéneo si el vector B es el vector nulo, es decir:

$$B = (0,0, \dots, 0)^t$$

Por tanto:

$$AX = 0$$

Sistema no homogéneo

Se dice de un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ que es no homogéneo si el vector B es distinto del vector nulo, es decir:

$$B \neq (0,0, \dots, 0)^t$$

Por tanto se emplea la expresión general:

$$AX = B$$

Proposición 2.

Los sistemas homogéneos (del tipo $AX = 0$) verifican las siguientes propiedades:

1. Este tipo de sistemas son siempre compatibles, ya que admiten al menos la solución trivial $X = (0,0, \dots, 0)^t$.
2. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es solución de cierto sistema homogéneo, entonces se cumple que $(k\alpha_1, k\alpha_2, \dots, k\alpha_n)$ también es solución de dicho sistema $\forall k \in \mathbb{R}$.

3. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ son dos soluciones distintas de cierto sistema homogéneo, entonces se cumple que $\alpha + \beta$ también es solución de dicho sistema.

Demostración.

1. Tóme un sistema homogéneo $AX = 0$. Dicho sistema puede expresarse de la siguiente manera para las m ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Resulta obvio que si $\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$, entonces $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ es solución.

2. Tóme un sistema homogéneo $AX = 0$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es solución. En dicho sistema se verifica que:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Introduciendo ahora el número real k en el vector solución, se tiene:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (k\alpha_j) = k \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = k \cdot 0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Por tanto se cumple la proposición.

3. Tóme un sistema homogéneo $AX = 0$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ son dos soluciones distintas. En dicho sistema se verifica que:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j = 0 + 0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Y se cumple que el vector $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ es también solución del sistema.

3.3. Teorema de Rouché y Rouché–Frobenius

A continuación se desarrollarán los Teoremas de Rouché y Rouché–Frobenius; no obstante, en primer lugar conviene definir algunos conceptos previos.

Definición 9. Submatriz

Sea una matriz A de orden $m \times n$. Se considera submatriz de la matriz A cualquier matriz de menor dimensión ($m' \leq m$ y $n' \leq n$) obtenida a partir de la supresión de ciertas filas y/o columnas de la matriz original A .

Ejemplo.

Tómese la matriz A de orden 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Son submatrices de A las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 10. Menor de orden p

Sea una matriz A de orden $m \times n$. Se denomina menor de orden p de la matriz A a un determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden $p \times p$ extraída de A .

Ejemplo.

Tómese la matriz anterior de orden 3×3 ; son menores de orden 2 de la matriz A los siguientes determinantes:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3; A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11; A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

Definición 11. Rango de una matriz

Se denomina rango de una matriz A al número máximo de filas o columnas linealmente independientes. El rango fila y el rango columna son siempre coincidentes, por lo que se denomina simplemente como rango de la matriz A y se expresa como $rg(A)$.

También se puede definir el rango de una matriz como la dimensión del menor no nulo de mayor dimensión que se pueda construir. Por tanto, el rango de una matriz nunca puede ser superior a la menor de sus dimensiones; es decir, para una matriz de orden $m \times n$:

- Si $m < n$, entonces $rg(A) \leq m$.
- Si $n < m$, entonces $rg(A) \leq n$.

Ejemplo.

Considérese la matriz A de orden 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de dicha matriz resulta:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 6 - (0 + 0 + 18) = 0$$

Por tanto, el rango de la matriz A es menor que 3 ($rg(A) < 3$).

A continuación se busca un menor de A de orden 2 con determinante no nulo. Por ejemplo:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \neq 0$$

El rango de la matriz A resulta ser 2 ($rg(A) = 2$).

Observación.

Si todos los menores de orden p de una matriz son nulos, entonces el rango de dicha matriz no puede ser mayor de $p - 1$:

$$rg(A) \leq p - 1$$

Es decir, si en el cálculo del rango de una matriz resulta que todos los menores de orden p son nulos, también los son todos los menores de orden superior a p .

3.3.1. Teorema de Rouché

Supóngase un sistema de ecuaciones lineales formado por m ecuaciones y n incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Y sean A , B y $A|B$ las matrices asociadas a dicho sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

El Teorema de Rouché determina que, para un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ de orden $m \times n$, se verifica lo siguiente:

1. El sistema es incompatible, y por tanto carece de solución, si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes no coincide con el rango de la matriz ampliada, es decir $rg(A|B) \neq rg(A)$.
2. El sistema es compatible indeterminado, y por tanto tiene infinitas soluciones, si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz

ampliada y dicho rango es menor que el número de incógnitas del sistema, es decir $rg(A|B) = rg(A) < n$.

3. El sistema es compatible determinado, y por tanto tiene solución única, si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y dicho rango es igual al número de incógnitas del sistema, es decir $rg(A|B) = rg(A) = n$.

Demostración.

El conjunto de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$ puede representarse mediante vectores columna:

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

De tal forma que:

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = B$$

En primer lugar, es evidente que el sistema tendrá solución si y sólo si el vector B es combinación lineal de c_1, c_2, \dots, c_n . Esta condición trasladada al ámbito matricial implica que la última columna de la matriz ampliada sea combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes A , ya que precisamente esta última columna resulta ser el vector B . Por tanto, si la última columna de la matriz ampliada es combinación lineal del resto, se concluye que el rango de $A|B$ es igual al rango de A .

Aplicando el razonamiento inverso, se concluye que si el rango de la matriz A es igual al rango de la matriz ampliada, el vector B es combinación lineal de c_1, c_2, \dots, c_n y por tanto el sistema admite solución.

$$SC \text{ (existe solución)} \Leftrightarrow rg(A|B) = rg(A)$$

1. Si el rango de la matriz A y el rango de la matriz ampliada no coinciden ($rg(A|B) \neq rg(A)$), eso significa que la última columna de la matriz ampliada, es decir el vector B , es linealmente independiente de las columnas de la matriz A . Por tanto, no hay forma de que se cumpla el sistema de ecuaciones, es decir, no existe ninguna n -upla para la que se cumpla la igualdad $c_1 \cdot x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = B$ y el sistema no tiene solución.

Recíprocamente, si el sistema no admite solución, eso implica que el vector B es linealmente independiente de c_1, c_2, \dots, c_n y por tanto, el rango de la matriz ampliada y rango de la matriz A no son iguales.

$$SI \text{ (no existe solución)} \Leftrightarrow rg(A|B) \neq rg(A)$$

Además, obsérvese que siempre que se cumple la desigualdad $rg(A|B) \neq rg(A)$ esto implica que $rg(A) = rg(A|B) - 1$, ya que la matriz ampliada es

idéntica a la matriz A , a excepción de una columna adicional que es linealmente independiente del resto.

2. Para demostrar el segundo punto del Teorema basta con demostrar que un sistema compatible es indeterminado si y sólo si $rg(A) < n$, ya que al inicio de este apartado se demostró que el sistema es compatible si y sólo si $rg(A) = rg(A|B)$.

Supóngase un sistema indeterminado que admite al infinitas soluciones y tómnese dos de ellas $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Dichas soluciones verifican:

$$c_1 \cdot \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \alpha_j = B$$

$$c_1 \cdot \beta_1 + c_2 \beta_2 + \dots + c_n \beta_n = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \beta_j = B$$

Si se restan ambas expresiones:

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot \alpha_j - \sum_{j=1}^n c_j \cdot \beta_j = \sum_{j=1}^n c_j \cdot (\alpha_j - \beta_j) = B - B = 0 \text{ (columna de ceros)}$$

Por otro lado, un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ es linealmente dependiente si se cumple:

$$\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \dots + \gamma_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Siendo alguno de los escalares $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ distinto de cero.

Dado que α y β son soluciones diferentes, existe a la fuerza algún $(\alpha_j - \beta_j)$ que sea distinto de cero; por tanto las columnas c_1, c_2, \dots, c_n son linealmente dependientes y el rango de la matriz A es menor que n . En conclusión, si el sistema es compatible indeterminado, entonces el rango de A es menor que n . Aplicando el razonamiento inverso, si $rg(A) = rg(A|B)$ el sistema es compatible y admite al menos una solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot \alpha_j = B$$

Además, si $rg(A) < n$ entonces las columnas c_1, c_2, \dots, c_n de la matriz A son linealmente dependientes, por tanto se cumple:

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot \mu_j = 0$$

Para un conjunto $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ que tenga algún término μ_j distinto de cero.

Si sumamos ambas expresiones:

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot \alpha_j + \sum_{j=1}^n c_j \cdot \mu_j = \sum_{j=1}^n c_j \cdot (\alpha_j + \mu_j) = B + 0 = B \text{ (columna de ceros)}$$

Por tanto $(\alpha_j + \mu_j)$ es también solución del sistema.

En conclusión, si $rg(A) = rg(A|B) < n$ el sistema admite dos soluciones (por ende infinitas soluciones) y es compatible indeterminado.

$$SCI \text{ (infinitas soluciones)} \Leftrightarrow rg(A|B) = rg(A) < n$$

3. Para demostrar el tercer punto del Teorema basta con demostrar que un sistema compatible es determinado si y sólo si $rg(A) = n$, ya que al inicio de este apartado se demostró que el sistema es compatible si y sólo si $rg(A) = rg(A|B)$.

Por descarte, si un sistema es compatible y además no es indeterminado eso implica:

$$\begin{aligned}rg(A) &= rg(A|B) \\rg(A) &\geq n\end{aligned}$$

Y dado que el rango de A no puede ser mayor que n:

$$rg(A) = n$$

Por tanto los sistemas compatibles que no son indeterminados serán determinados y cumplirán:

$$SCD \Leftrightarrow rg(A) = rg(A|B) = n$$

Observación.

Resulta imposible un hipotético escenario 4, donde $rg(A|B) = rg(A) > n$, ya que al ser la matriz A de orden $m \times n$, su rango no puede ser mayor que n.

3.3.2. Teorema de Rouché–Frobenius

El teorema de Rouché–Frobenius determina que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es que la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A|B tengan el mismo rango:

$$\text{sistema compatible} \Leftrightarrow rg(A|B) = rg(A)$$

Corolario 1.

Para sistemas homogéneos siempre se verifica que $rg(A|B) = rg(A)$. Por tanto, como ya se adelantó anteriormente, los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

Corolario 2.

En un sistema de ecuaciones lineales cuadrado de orden $n \times n$, si el determinante de la matriz A es distinto de 0, entonces el sistema es compatible determinado, ya que:

$$rg(A) = rg(A|B) = n$$

Corolario 3.

Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones ($n > m$), el sistema no puede ser compatible determinado, ya que:

$$rg_{máx}(A) = m < n$$

Y por tanto resulta imposible cumplir el requisito $rg(A|B) = rg(A) = n$.

3.4. Regla de Cramer

La regla de Cramer es un teorema del álgebra lineal que permite la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en términos de determinantes. A continuación se establecen las condiciones necesarias para poder aplicar este método.

3.4.1. Sistema de Cramer

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante la Regla de Cramer dicho sistema debe verificar ciertos requisitos:

1. El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, es decir, se trata de un **sistema cuadrado**. Por tanto la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$.
2. El determinante de dicha matriz de coeficientes (A) es no nulo, es decir $|A| \neq 0$.

Los sistemas que cumplen estas condiciones se denominan sistemas de Cramer, y tienen la siguiente forma.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

Proposición 3.

Los sistemas de Cramer son siempre compatibles determinados (tienen solución única) y viceversa, es decir, todos los sistemas compatibles determinados son sistemas de Cramer.

Demostración.

1. Sistema de Cramer \Rightarrow SCD

Supóngase un sistema de Cramer cualquiera $AX = B$, de n ecuaciones y n incógnitas, donde A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ con determinante no nulo.

Dado que $|A|$ es distinto de cero, existe y se puede calcular su matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$$

Por tanto el sistema puede resolverse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Donde el vector X es la única solución del sistema y, por tanto, se trata de un SCD.

2. SCD \Rightarrow Sistema de Cramer

Sea un sistema compatible determinado $AX = B$ cuya única solución es $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Se cumple por tanto:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

Expresando el sistema mediante los vectores columna c_1, c_2, \dots, c_n que componen la matriz A :

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &= B \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n &= B \end{aligned}$$

Supóngase además que $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ es solución del sistema compatible homogéneo asociado ($AX = 0$). Se cumple por tanto:

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n = 0 \text{ (columna de ceros)}$$

Existe entonces otra solución adicional para el sistema original, ya que:

$$\begin{aligned} c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n + c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n \\ = c_1(\alpha_1 + \beta_1) + c_2(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + c_n(\alpha_n + \beta_n) = B + 0 = B \end{aligned}$$

Dicha solución adicional es el vector $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$.

No obstante, ya que se ha supuesto que el sistema es compatible determinado (solución única), se concluye que el vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ debe ser el vector nulo.

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

De manera que $\alpha + \beta = \alpha$.

Además, si β sólo puede ser el vector nulo, se concluye que el sistema homogéneo $AX = 0$ sólo tiene una solución posible (la solución trivial). De esta manera queda demostrado que las columnas c_1, c_2, \dots, c_n de la matriz A son linealmente independientes, ya que la única manera de que $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n = 0$ es que β sea el vector nulo. Por tanto, el determinante de la matriz A es no nulo.

De ambas afirmaciones se deduce, finalmente, que:

$$\text{Sistema de Cramer} \Leftrightarrow \text{SCD}$$

3.4.2. Solución de un sistema de Cramer

Proposición 4.

La única solución resultante de un sistema de Cramer es de la forma:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Siendo Δ_j el determinante de la matriz A , una vez sustituido el vector B en la columna j de A . Es decir:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} & & j) & & \\ a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración.

Sea un sistema de ecuaciones lineales cuadrado, de orden $n \times n$, donde el determinante de la matriz de coeficientes A es no nulo (sistema de Cramer).

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

A partir de dicho sistema, se puede definir Δ_j de la siguiente manera:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} & & j) & & \\ a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dado que el vector B es combinación lineal del vector x , se puede escribir:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} & & j) & & \\ a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes, Δ_j se puede dividir de la siguiente manera:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{21}x_1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}x_j & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}x_j & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}x_j & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n}x_n & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para un determinante $|D|$ cualquiera de orden $m \times n$ se cumple:

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & k \cdot d_{1j} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & \cdots & k \cdot d_{2j} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & k \cdot d_{mj} & \cdots & d_{mn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1j} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & \cdots & d_{2j} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mj} & \cdots & d_{mn} \end{vmatrix}$$

Por tanto, a partir de la expresión anterior, de cada uno de los determinantes se puede extraer la componente x_j ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\Delta_j = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ + x_j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Además, las propiedades de los determinantes establecen que si dos líneas (filas o columnas) son iguales, dicho determinante es nulo. Por tanto, de la expresión anterior se anulan todos los términos excepto el correspondiente a x_j . Es decir:

$$\Delta_j = x_j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El único determinante restante resulta ser el determinante de la matriz A. Por tanto, despejando x_j :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|A|}$$

3.4.3. Transformación de un sistema cualquiera en sistema de Cramer

Los sistemas de Cramer son aquellos sistemas cuadrados (mismo número de ecuaciones e incógnitas) cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo. A continuación se mostrará cómo, para sistemas compatibles, es posible transformar un sistema que no sea de Cramer en otro que sí lo sea.

Supóngase un sistema cualquiera de orden $m \times n$:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

En primer lugar debe comprobarse que el sistema es compatible. A continuación:

- Si $m < n$:
Se debe tomar la submatriz asociada a un menor no nulo de la matriz A de mayor orden posible. Las variables contenidas en dicho menor serán las incógnitas del nuevo sistema; las variables no contenidas se transformarán en parámetros y se traspondrán junto a los términos independientes de cada ecuación. Tras resolver el sistema mediante la Regla de Cramer, las nuevas incógnitas quedarán expresadas como función de los parámetros.
- Si $m > n$:
Se toma un menor no nulo de la matriz A del mayor orden posible.
 - Si el menor es de orden p inferior a n ($p < n$) se trata de un caso análogo al anterior.
 - Si el menor es de orden n , se pueden tomar esas n ecuaciones linealmente independientes para formar un sistema de Cramer.

A continuación se muestran un ejemplo de transformación a sistema de Cramer de un sistema compatible y otro ejemplo de lo que ocurriría si se trata de aplicar la Regla de Cramer a un sistema incompatible.

Ejemplo.

Considérese el siguiente sistema compatible de 2 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z + t = 1 \\ 2x - 3y - z - t = 2 \end{array} \right\}$$

Las matrices A y $A|B$ del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}; A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tómese por ejemplo el siguiente menor de la matriz A :

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

Las variables x e y contenidas en el menor serán las incógnitas del nuevo sistema.

Las variables z y t excluidas del menor se transforman en parámetros y se trasponen junto a los términos independientes.

Si $z = \mu$ y $t = \lambda$, el nuevo sistema de ecuaciones es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 - 2\mu - \lambda \\ 2x - 3y = 2 + \mu + \lambda \end{array} \right\}$$

De manera que la nueva matriz A y el nuevo vector B resultan:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; B' = \begin{pmatrix} 1 - 2\mu - \lambda \\ 2 + \mu + \lambda \end{pmatrix}$$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_{1x}|}{|A_1|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 2\mu - \lambda & 1 \\ 2 + \mu + \lambda & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3 + 6\mu + 3\lambda - 2 - \mu - \lambda}{-5} = \frac{-5 + 5\mu + 2\lambda}{-5}$$

$$x = 1 - \mu - \frac{2}{5}\lambda$$

$$y = \frac{|A_{1y}|}{|A_1|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\mu - \lambda \\ 2 & 2 + \mu + \lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{2 + \mu + \lambda - 2 + 4\mu + 2\lambda}{-5} = \frac{5\mu + 3\lambda}{-5}$$

$$y = -\mu - \frac{3}{5}\lambda$$

Ejemplo.

Tómese el siguiente sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

Resulta evidente a simple vista que el sistema es incompatible. No obstante, si se pasa por alto este hecho y se trata de transformar el sistema en un sistema de Cramer, se podría tomar de las dos primeras ecuaciones el siguiente menor no nulo de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Tomando dichas ecuaciones y aplicando la Regla de Cramer se obtiene la solución $x = y = 1$, que por supuesto no es solución de la tercera ecuación, y por tanto tampoco lo es del sistema.

3.5. Método de Gauss y Gauss–Jordan

De manera análoga a los apartados anteriores, previo desarrollo del teorema se comenzará por definir algunos conceptos necesarios.

Definición 12. Sistemas lineales equivalentes

Se dice de dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número n de incógnitas que son equivalentes si tienen la misma solución general. Es decir, dados dos sistemas de ecuaciones lineales de orden $m \times n$ y $p \times n$:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \dots + c_{pn}x_n = d_p \end{array} \right\}$$

Se dice de dichos sistemas que son equivalentes si ambos comparten todas y cada una de sus soluciones; es decir, son equivalentes si y sólo si todas las soluciones del sistema 1 son también solución del sistema 2, y viceversa.

Esto implica que dos sistemas incompatibles cualesquiera son equivalentes entre sí.

Nótese que para que dos sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes entre sí deben tener el mismo número n de incógnitas, pero el número de ecuaciones m y p no es necesariamente el mismo.

Transformaciones elementales

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se pueden aplicar ciertas transformaciones para obtener un sistema equivalente al original.

A partir del sistema inicial, se obtiene otro equivalente si:

1. Se intercambian dos de las ecuaciones entre sí.
2. Se multiplica una de las ecuaciones por cualquier número real no nulo.
3. Se suma a una de las ecuaciones un múltiplo cualquiera de otra de las ecuaciones.

Demostración.

Tómese un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

1. Si se intercambian dos de las ecuaciones del sistema entre sí (supóngase por simplicidad y sin pérdida de generalidad que se intercambian la primera y segunda ecuación):

$$\left. \begin{array}{l} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Una solución del primer sistema será solución también del segundo sistema. Es decir, una solución del sistema debe ser solución para todas las ecuaciones del sistema, independientemente de su orden.

2. Si se multiplica una de las ecuaciones del sistema por un número real no nulo (supóngase por simplicidad y sin pérdida de generalidad que se multiplica la primera ecuación por un número $k \in \mathbb{R}$):

$$\left. \begin{array}{l} ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \cdots + ka_{1n}x_n = kb_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} k \neq 0$$

Una solución del sistema equivalente será solución también para el sistema original. Es decir, las ecuaciones E_2 hasta E_m se verificarán por ser iguales en ambos sistemas. La ecuación E_1 se verificará también en ambos casos por ser proporcionales:

$$\begin{aligned} ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \cdots + ka_{1n}x_n &= kb_1 \\ k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) &= kb_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \frac{k}{k}b_1 = b_1 \end{aligned}$$

3. Si se suma a una de las ecuaciones un múltiplo cualquiera de otra de las ecuaciones (supóngase por simplicidad y sin pérdida de generalidad que se le suma a la primera ecuación la segunda multiplicada por un número $k \in \mathbb{R}$):

$$\left. \begin{array}{l} (ka_{21} + a_{11})x_1 + (ka_{22} + a_{12})x_2 + \cdots + (ka_{2n} + a_{1n})x_n = kb_2 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ una solución del sistema equivalente. Entonces se verifica:

$$\left. \begin{array}{l} (ka_{21} + a_{11})\alpha_1 + (ka_{22} + a_{12})\alpha_2 + \cdots + (ka_{2n} + a_{1n})\alpha_n = kb_2 + b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array} \right\}$$

La primera ecuación puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ka_{21}\alpha_1 + a_{11}\alpha_1 + ka_{22}\alpha_2 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + ka_{2n}\alpha_n + a_{1n}\alpha_n &= kb_2 + b_1 \\ ka_{21}\alpha_1 + ka_{22}\alpha_2 + \cdots + ka_{2n}\alpha_n + a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n &= kb_2 + b_1 \end{aligned}$$

Nótese que la siguiente expresión es equivalente a la segunda ecuación según lo expuesto en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} ka_{21}\alpha_1 + ka_{22}\alpha_2 + \cdots + ka_{2n}\alpha_n &= kb_2 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n &= b_2 \end{aligned}$$

Por tanto, de la primera ecuación se obtiene:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1$$

Es decir, la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ del sistema equivalente es también solución del sistema original.

Obsérvese además que al sumar a una ecuación del sistema una combinación lineal del resto, el sistema sigue siendo equivalente. Es decir, se estaría sumando a una de las ecuaciones otra ecuación multiplicada por un número y repitiendo dicho proceso varias veces, lo cual resultaría en un sistema equivalente al anterior.

Corolario 4.

Dado que dos sistemas equivalentes tienen exactamente las mismas soluciones, para resolver un sistema cualquiera basta con resolver un sistema equivalente del mismo.

Definición 13. Pivote

Se llama pivote de una fila al primer elemento no nulo de dicha fila, si es que existe alguno.

Definición 14. Matriz escalonada

Se dice de una matriz cualquiera A que es escalonada si:

1. El pivote de cada fila (a partir de la segunda) está estrictamente más alejado que el pivote de la fila anterior, es decir, está situado más a la derecha, en una columna de índice estrictamente superior.
2. Si tiene filas compuestas enteramente por ceros, dichas filas están situadas al final de la matriz (debajo de todas las filas no nulas).

Ejemplo.

Las siguientes matrices son escalonadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 15. Sistema escalonado

Se dice de un sistema de ecuaciones lineales que es escalonado si su matriz de coeficientes asociada es escalonada.

3.5.1. Método de Gauss

El Método de Gauss, empleado por primera vez por el científico alemán en 1809 para estudiar las órbitas de ciertos cuerpos celestes⁷, consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro sistema equivalente de forma que este último sea escalonado, es decir, cuya matriz de coeficientes sea escalonada. De esta manera,

⁷ De La Fuente O'Connor, J.L. (1997). *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera* (p. 7). Editorial Reverté.

resolviendo el sistema equivalente (más sencillo que el inicial) se obtienen las soluciones del sistema original.

Supóngase un sistema de ecuaciones lineales cualquiera de orden $m \times n$:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

Con sus matrices asociadas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

El Método de Gauss se aplica en las etapas siguientes:

1. El coeficiente a_{11} debe ser no nulo. Si se diera el caso de que es igual a cero, se intercambia la primera ecuación por otra donde el primer término sea no nulo (de esta manera el sistema no se altera ya que se obtiene otro equivalente – ver transformación elemental 1).

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} a_{11} \neq 0$$

2. El coeficiente a_{11} debe ser igual a 1. En caso contrario, se dividen todos los términos de la primera ecuación por a_{11} , resultando el sistema de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \overline{a_{13}}x_3 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

3. Se elimina la incógnita x_1 de las siguientes ecuaciones. Para ello, se resta sucesivamente la ecuación (1) a la ecuación $j = 2, 3, \dots, m$ multiplicada por el término conveniente:

$$\begin{aligned} \text{ecuación } 2 &\rightarrow \overline{(2)} = (2) - (1) \cdot a_{21} \\ \text{ecuación } 3 &\rightarrow \overline{(3)} = (3) - (1) \cdot a_{31} \\ &\vdots \\ \text{ecuación } m &\rightarrow \overline{(m)} = (m) - (1) \cdot a_{m1} \end{aligned}$$

De esta operación resulta un sistema equivalente al inicial (ver transformación elemental 3):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \overline{a_{13}}x_3 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ \overline{a_{22}}x_2 + \overline{a_{23}}x_3 + \cdots + \overline{a_{2n}}x_n &= \overline{b_2} \\ \overline{a_{32}}x_2 + \overline{a_{33}}x_3 + \cdots + \overline{a_{3n}}x_n &= \overline{b_3} \\ &\vdots \\ \overline{a_{m2}}x_2 + \overline{a_{m3}}x_3 + \cdots + \overline{a_{mn}}x_n &= \overline{b_m} \end{aligned} \right\}$$

Y la incógnita x_1 sólo aparece en la primera columna del sistema.

4. Manteniendo la primera ecuación se repiten los pasos anteriores, esta vez para eliminar la incógnita x_2 .

4.1. Se dividen los términos de la ecuación 2 entre $\overline{a_{22}}$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \overline{a_{13}}x_3 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ x_2 + \overline{\overline{a_{23}}}x_3 + \cdots + \overline{\overline{a_{2n}}}x_n &= \overline{\overline{b_2}} \\ \overline{a_{32}}x_2 + \overline{a_{33}}x_3 + \cdots + \overline{a_{3n}}x_n &= \overline{b_3} \\ &\vdots \\ \overline{a_{m2}}x_2 + \overline{a_{m3}}x_3 + \cdots + \overline{a_{mn}}x_n &= \overline{b_m} \end{aligned} \right\}$$

- 4.2. A continuación se resta sucesivamente la ecuación (2) a la ecuación $j = 3, \dots, m$ multiplicada por el término conveniente:

$$\begin{aligned} \text{ecuación } 3 &\rightarrow \overline{\overline{(3)}} = \overline{(3)} - (2) \cdot \overline{a_{32}} \\ &\vdots \\ \text{ecuación } m &\rightarrow \overline{\overline{(m)}} = \overline{(m)} - (2) \cdot \overline{a_{m2}} \end{aligned}$$

De esta operación resulta un sistema equivalente al anterior (ver transformación elemental 3):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{a_{13}}x_3 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ x_2 + \overline{\overline{a_{23}}}x_3 + \cdots + \overline{\overline{a_{2n}}}x_n &= \overline{\overline{b_2}} \\ \overline{\overline{a_{33}}}x_3 + \cdots + \overline{\overline{a_{3n}}}x_n &= \overline{\overline{b_3}} \\ &\vdots \\ \overline{\overline{a_{m3}}}x_3 + \cdots + \overline{\overline{a_{mn}}}x_n &= \overline{\overline{b_m}} \end{aligned} \right\}$$

5. Realizando tantas iteraciones de este proceso como sea posible, se obtiene un sistema escalonado equivalente al original:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \overline{\overline{\overline{b_1}}} \\ x_2 &= \overline{\overline{\overline{b_2}}} \\ &\vdots \\ x_p &= \overline{\overline{\overline{b_p}}} \end{aligned} \right\} p \leq m$$

Nótese que las ecuaciones del tipo $0 = 0$ se verifican para cualquier asignación de valores a las incógnitas y pueden por tanto eliminarse; de ahí que $p \leq m$ y no $p = m$.

Ejemplo.

Sea un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 6y + z &= 7 \\ x + 2y - z &= -1 \\ 5x + 7y - 4z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

1. Dado que $a_{11} = 2 \neq 0$ se podría avanzar al segundo paso y dividir la primera ecuación entre 2. No obstante, se puede efectuar un cambio previo entre la primera y segunda ecuación para evitar operar con fracciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ 5x + 7y - 4z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

2. Dado que a_{11} es igual a 1, no es necesario dividir la primera ecuación.
3. Se elimina la variable x de las ecuaciones (2) y (3). Para ello:

$$\begin{aligned} (2)' &= (2) - 2 \cdot (1) \\ (3)' &= (3) - 5 \cdot (1) \end{aligned}$$

De manera que:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ 2y + 3z &= 9 \\ -3y + z &= 14 \end{aligned} \right\}$$

4. Se elimina la variable y de la ecuación (3).

- 4.1. Se divide la segunda ecuación entre 2:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ y + \frac{3}{2}z &= \frac{9}{2} \\ -3y + z &= 14 \end{aligned} \right\}$$

- 4.2. Se suma la segunda ecuación multiplicada por 3 a la tercera:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ y + \frac{3}{2}z &= \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2}z &= \frac{55}{2} \end{aligned} \right\}$$

5. Finalmente se resuelve el sistema equivalente escalonado, empezando por la variable z y retrocediendo hacia arriba ecuación por ecuación:

$$\begin{aligned} z &= \frac{55}{11} = 5 \\ y &= \frac{9 - 3z}{2} = \frac{9 - 15}{2} = -3 \\ x &= -1 + z - 2y = -1 + 5 + 6 = 10 \end{aligned}$$

La solución del sistema equivalente y, por tanto, del sistema original es $(10, -3, 5)$.

3.5.2. Discusión de un sistema

De la aplicación del Método de Gauss y posterior obtención de un sistema equivalente escalonado, se puede concluir lo siguiente:

- Si alguna de las ecuaciones resultantes es del tipo $0 = b_i$ (siendo $b_i \neq 0$), estamos ante una ecuación inconsistente. Se puede por tanto concluir que el sistema equivalente es incompatible y, consecuentemente, que el sistema original también lo es.

- En caso de no cumplirse la condición de incompatibilidad, se distinguen las siguientes situaciones:
 - Si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas ($m = n$) el número de soluciones dependerá de la existencia o no de ecuaciones triviales⁸.
 - ❖ En caso de que no haya ecuaciones triviales, se dirá que el sistema es compatible determinado y por tanto también lo será el sistema original.
 - ❖ En caso contrario, el sistema será compatible indeterminado y por tanto también lo será el sistema original.
 - Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones ($m < n$) tanto el sistema equivalente como el original son compatibles indeterminados.
 - Si el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas ($m > n$):
 - ❖ Si existe un número de ecuaciones triviales mayor que $(m - n)$, el sistema es compatible indeterminado.
 - ❖ Si existe un número de ecuaciones triviales igual a $(m - n)$, el sistema es compatible determinado.
 - ❖ Si no hay ecuaciones triviales o existe un número menor que $(m - n)$, habrá que comprobar que se cumplen todas las ecuaciones desde E_n hasta E_m . En caso de cumplirse, el sistema será compatible determinado y se resolverán todas las ecuaciones desde E_n hasta E_1 . En caso de no verificarse alguna de las ecuaciones, el sistema será incompatible.

3.5.3. Método de Gauss–Jordan

El Método de Gauss–Jordan es un algoritmo basado en el ya citado Método de Gauss que puede ser empleado para determinar la inversa de una matriz o calcular las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Al igual que su predecesor, este método se basa en la reducción del sistema a otro equivalente donde cada ecuación contiene una incógnita menos que la anterior. No obstante, el Método de Gauss–Jordan lleva esta transformación un paso más lejos, hasta obtener una matriz escalonada reducida en lugar de la matriz simplemente escalonada del Método de Gauss.

En primer lugar, véanse las siguientes definiciones.

Definición 16. Matriz escalonada reducida

Se dice de una matriz A que es escalonada reducida si, además de ser escalonada, verifica que el pivote de cada fila vale 1 y es el único elemento no nulo de dicha fila.

Ejemplo.

⁸ Se entiende por ecuación trivial la ecuación del tipo $0 = 0$. Este tipo de ecuaciones admiten valores arbitrarios para una o varias variables del sistema.

Son matrices escalonadas reducidas las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 17. Sistema escalonado reducido

Se dice de un sistema de ecuaciones lineales que es escalonado si su matriz de coeficientes asociada es escalonada reducida.

Definidos estos dos conceptos, véase a continuación el desarrollo del Método de Gauss–Jordan.

Supóngase un sistema de ecuaciones lineales cualquiera de orden $m \times n$:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Con sus matrices asociadas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Los pasos a seguir para la resolución del sistema son los siguientes:

1. El coeficiente a_{11} debe ser no nulo. Si se diera el caso de que es igual a cero, se intercambia la primera ecuación por otra donde el primer término sea no nulo (de esta manera el sistema no se altera ya que se obtiene otro equivalente – ver transformación elemental 1).

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} a_{11} \neq 0$$

2. El coeficiente a_{11} debe ser igual a 1. En caso contrario, se dividen todos los términos de la primera ecuación por a_{11} , resultando el sistema de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \overline{a_{13}}x_3 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n = \overline{b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

3. Se elimina la incógnita x_1 de las siguientes ecuaciones. Para ello, se resta sucesivamente la ecuación (1) a la ecuación $j = 2, 3, \dots, m$ multiplicada por el término conveniente:

$$\begin{aligned} \text{ecuación 2} &\rightarrow \overline{(2)} = (2) - (1) \cdot a_{21} \\ \text{ecuación 3} &\rightarrow \overline{(3)} = (3) - (1) \cdot a_{31} \\ &\vdots \\ \text{ecuación } m &\rightarrow \overline{(m)} = (m) - (1) \cdot a_{m1} \end{aligned}$$

De esta operación resulta un sistema equivalente al inicial (ver transformación elemental 3):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \overline{a_{13}}x_3 + \dots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ \overline{a_{22}}x_2 + \overline{a_{23}}x_3 + \dots + \overline{a_{2n}}x_n &= \overline{b_2} \\ \overline{a_{32}}x_2 + \overline{a_{33}}x_3 + \dots + \overline{a_{3n}}x_n &= \overline{b_3} \\ &\vdots \\ \overline{a_{m2}}x_2 + \overline{a_{m3}}x_3 + \dots + \overline{a_{mn}}x_n &= \overline{b_m} \end{aligned} \right\}$$

Y la incógnita x_1 sólo aparece en la primera columna del sistema.

4. Se repiten los pasos anteriores, esta vez para eliminar la incógnita x_2 . A diferencia del Método de Gauss, el Método de Gauss–Jordan efectúa esta eliminación también en la ecuación (1). Para ello:

- 4.1. Se dividen los términos de la ecuación 2 entre $\overline{a_{22}}$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \overline{a_{13}}x_3 + \dots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ x_2 + \overline{a_{23}}x_3 + \dots + \overline{a_{2n}}x_n &= \overline{b_2} \\ \overline{a_{32}}x_2 + \overline{a_{33}}x_3 + \dots + \overline{a_{3n}}x_n &= \overline{b_3} \\ &\vdots \\ \overline{a_{m2}}x_2 + \overline{a_{m3}}x_3 + \dots + \overline{a_{mn}}x_n &= \overline{b_m} \end{aligned} \right\}$$

- 4.2. A continuación se resta sucesivamente la ecuación (2) a la ecuación $j = 1, 3, \dots, m$ multiplicada por el término conveniente:

$$\begin{aligned} \text{ecuación 1} &\rightarrow \overline{\overline{(1)}} = \overline{(1)} - (2) \cdot \overline{a_{12}} \\ \text{ecuación 3} &\rightarrow \overline{\overline{(3)}} = \overline{(3)} - (2) \cdot \overline{a_{32}} \\ &\vdots \\ \text{ecuación } m &\rightarrow \overline{\overline{(m)}} = \overline{(m)} - (2) \cdot \overline{a_{m2}} \end{aligned}$$

De esta operación resulta un sistema equivalente al anterior (ver transformación elemental 3):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \overline{\overline{a_{13}}}x_3 + \dots + \overline{\overline{a_{1n}}}x_n &= \overline{\overline{b_1}} \\ x_2 + \overline{\overline{a_{23}}}x_3 + \dots + \overline{\overline{a_{2n}}}x_n &= \overline{\overline{b_2}} \\ \overline{\overline{a_{33}}}x_3 + \dots + \overline{\overline{a_{3n}}}x_n &= \overline{\overline{b_3}} \\ &\vdots \\ \overline{\overline{a_{m3}}}x_3 + \dots + \overline{\overline{a_{mn}}}x_n &= \overline{\overline{b_m}} \end{aligned} \right\}$$

Y la incógnita x_2 sólo aparece en la segunda columna del sistema.

5. Realizando tantas iteraciones de este proceso como sea posible, se obtiene un sistema escalonado reducido equivalente al original:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \widetilde{b}_1 \\ = \widetilde{b}_2 \\ \\ = \widetilde{b}_p \end{array} \quad p \leq m$$

Nótese que las ecuaciones del tipo $0 = 0$ se verifican para cualquier asignación de valores a las incógnitas y pueden por tanto eliminarse; de ahí que $p \leq m$ y no $p = m$.

Ejemplo.

Sea el siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 13 \\ x + y + z = 11 \\ 2x + 2y - z = 7 \end{array} \right\}$$

1. Dado que $a_{11} = 1 \neq 0$ se puede avanzar directamente a la eliminación de la primera incógnita (x).
2. Se elimina la variable x de las ecuaciones (2) y (3). Para ello:

$$\begin{aligned} (2)' &= (2) - (1) \\ (3)' &= (2) - 2 \cdot (1) \end{aligned}$$

De manera que:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 13 \\ 2y - 2z = -2 \\ 4y - 7z = -19 \end{array} \right\}$$

3. Se elimina la variable y de las ecuaciones (1) y (3).

3.1. Se divide la segunda ecuación entre 2:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 13 \\ y - z = -1 \\ 4y - 7z = -19 \end{array} \right\}$$

3.2. Se suma la segunda ecuación a la primera y se resta multiplicada por 4 a la tercera:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 12 \\ y - z = -1 \\ -3z = -15 \end{array} \right\}$$

4. Se elimina la variable z de las ecuaciones (1) y (2).

4.1. Se divide la tercera ecuación entre -3 :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 12 \\ y - z = -1 \\ z = 5 \end{array} \right\}$$

4.2. Se resta la tercera ecuación multiplicada por 2 a la primera y se suma a la segunda:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{array} \right\}$$

Al mantenerse sólo una variable en cada una de las ecuaciones, la resolución del sistema es inmediata; es decir, no es necesario retroceder en el sistema calculando las diferentes variables a partir de la primera.

Dado que el sistema escalonado reducido es equivalente al original, la solución obtenida (2,4,5) es válida para dicho sistema.

3.6. Aplicación de los sistemas de ecuaciones a la geometría

Una de las aplicaciones más conocidas y útiles de los sistemas de ecuaciones lineales se encuadra dentro del bloque de geometría. Y es que la discusión y resolución de sistemas permite analizar la posición relativa entre cuerpos geométricos (por ejemplo entre planos y rectas).

3.6.1. Intersección entre dos rectas en el plano \mathbb{R}^2 .

La ecuación general de una recta en el plano es de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

Sean dos rectas en el plano cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y - C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y - C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

O escrito de otra manera:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned} \right\}$$

Las matrices asociadas al sistema son:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de la matriz A :

$$|M| = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1$$

Se pueden distinguir varios casos:

- Si el determinante de la matriz M es distinto de cero, el sistema es compatible determinado y por tanto tiene solución única. Es decir, ambas rectas se cortan en un punto que será la solución del sistema.
- Si el determinante de la matriz M es igual a cero su rango será 1.
 - Si el rango de la matriz ampliada no coincide con el rango de M , se trata de un sistema incompatible. Es decir, las rectas son paralelas y no se cortan en ningún punto.
 - Si el rango de la matriz ampliada coincide con el rango de M , se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones). Es decir, ambas

rectas tienen infinitos puntos de corte o, dicho de otra manera, son la misma recta.

3.6.2. Intersección entre dos rectas en el espacio \mathbb{R}^3 .

La ecuación general de una recta en el espacio se puede representar como la intersección entre dos planos:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A'x + B'y + C'z &= D' \end{aligned} \right\}$$

Sean dos rectas en el espacio cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \end{aligned} \right\} = r; \left. \begin{aligned} A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z &= D_4 \end{aligned} \right\} = s$$

Y sean:

$$M_{12} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; M_{34} = \begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$$

Los puntos de corte entre ambas rectas se pueden calcular resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z &= D_4 \end{aligned} \right\}$$

Las matrices asociadas a dicho sistema son:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, se sobreentiende que el rango máximo de la matriz M es 3 y el mínimo es 2. Es decir, las matrices M_{12} y M_{34} de cada sistema por separado deben tener como mínimo rango 2.

Si cualquiera de las dos matrices, por ejemplo la matriz M_{12} del sistema r , tuviese rango 1, se cumpliría una de estas dos situaciones:

- Si $rg(M'_{12}) = 2$ el sistema que define la recta es incompatible, es decir, los dos planos que definen la recta son paralelos y por tanto no existe la recta.
- Si $rg(M'_{12}) = 1$ el sistema que define la recta es compatible indeterminado, es decir, los dos planos que definen la recta son idénticos y por tanto la recta no está bien definida (existen infinitas rectas que verifican el sistema).

El mismo razonamiento se aplica al sistema s ; por tanto, se define en primer lugar que $rg(M) \geq 2$.

Por otro lado, la intersección entre ambas rectas puede catalogarse de la siguiente manera y según los siguientes casos:

- Si $rg(M) = rg(M') = 2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Es decir, los dos planos que definen la recta r y los que definen la recta s son proporcionales y, por tanto, ambas rectas r y s son coincidentes y tienen infinitos puntos de corte.



Figura 1. Rectas coincidentes (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 2$ y $rg(M') = 3$ el sistema es incompatible y no admite solución. Es decir, de los dos planos que definen la recta r :
 - Uno de los planos de r es paralelo a uno de los planos de s (las filas de M serán proporcionales, pero no los términos independientes).
 - Uno de los planos de r es proporcional a uno de los planos de s (las ecuaciones de ambos planos serán totalmente proporcionales, incluyendo los términos independientes).

Por tanto, ambas rectas son paralelas entre sí y no existe punto de corte entre ellas.



Figura 2. Rectas paralelas (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 2$, entonces $rg(M') \neq 4$.
- Si $rg(M) = rg(M') = 3$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única. Dado que $rg(M') = 3$ uno de los planos es proporcional a otro (no paralelo), ya que si fueran paralelos el rango de M' sería 4 y no 3. En este caso ambas rectas son secantes y se cortan en un solo punto.

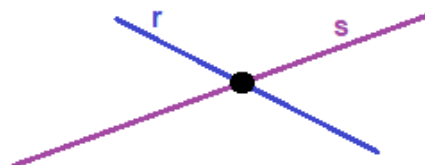


Figura 3. Rectas secantes (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 3$ y $rg(M') = 4$ el sistema es incompatible no admite solución. Dado que $rg(M) = 3$, hay dos filas de M que son proporcionales. No obstante, dado

que $rg(M') = 4$, los términos independientes de dichas filas son no proporcionales. Es decir, dos de los planos son paralelos entre sí. En este caso ambas rectas se cruzan y no existe punto de corte entre ellas.

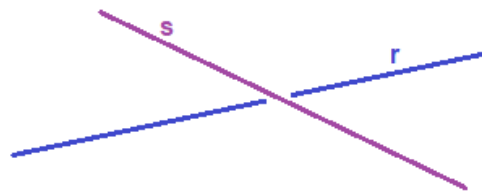


Figura 4. Rectas que se cruzan (elaboración propia)

3.6.3. Intersección entre dos planos en el espacio \mathbb{R}^3 .

La ecuación general de un plano en el espacio se representa como:

$$Ax + By + Cz = D$$

Sean dos planos en el espacio cuyas ecuaciones son:

$$P \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$Q \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

Se puede analizar la intersección entre ambos planos planteando el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{array} \right\}$$

Siendo M y M' la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Se puede catalogar la intersección entre dos planos de la siguiente manera:

- Si $rg(M) = rg(M') = 1$ el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad y tiene infinitas soluciones. Es decir, ambos planos tienen la misma ecuación (o proporcional) y por tanto son coincidentes. Por tanto, la intersección entre ambos planos da como resultado infinitas rectas.

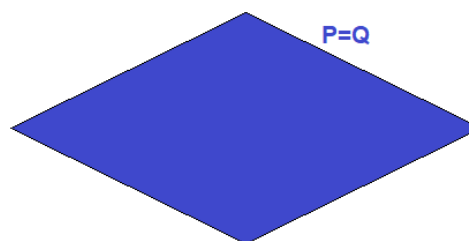


Figura 5. Planos coincidentes (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 1$ y $rg(M') = 2$ el sistema es incompatible y no admite solución. Es decir, las filas de la matriz M son proporcionales pero no lo son los términos

independientes. Por tanto ambos planos son paralelos y no existe punto de corte alguno entre ellos.

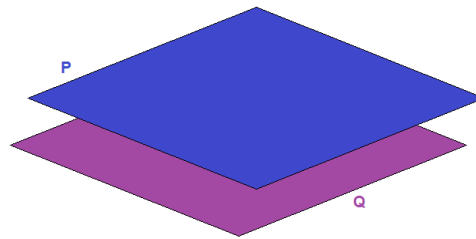


Figura 6. Planos paralelos (elaboración propia)

- Si $rg(M) = rg(M') = 2$ el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad y tiene infinitas soluciones. Es decir, las ecuaciones de ambos planos son independientes entre sí, pero el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. Por tanto, los planos son secantes y la intersección entre ambos da como resultado una única recta.

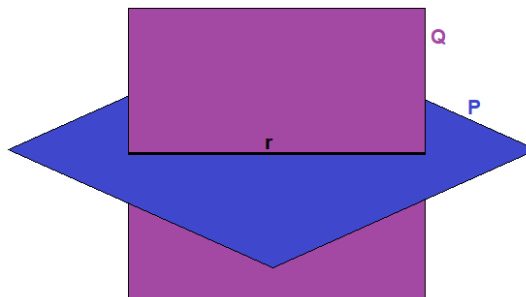


Figura 7. Planos secantes (elaboración propia)

3.6.4. Intersección entre tres planos en el espacio \mathbb{R}^3 .

Sean tres planos en el espacio cuyas ecuaciones son:

$$P \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$Q \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

$$R \equiv A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

Se puede analizar la intersección entre dichos planos planteando el sistema:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned} \right\}$$

Siendo M y M' la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Se puede catalogar la intersección entre tres planos de la siguiente manera:

- Si $rg(M) = rg(M') = 1$ el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad y tiene infinitas soluciones. Es decir, los tres planos tienen la misma ecuación (o proporcional) y por tanto son coincidentes. Por tanto, la intersección entre planos da como resultado infinitas rectas.

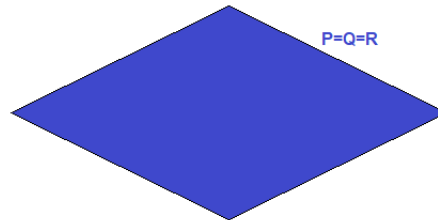


Figura 8. Tres planos coincidentes (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 1$ y $rg(M') = 2$ el sistema es incompatible y no admite solución. En primer lugar, dado que $rg(M) = 1$, las tres filas de la matriz M son iguales o proporcionales. En este caso hay dos posibilidades, dependiendo de las características de los términos independientes:
 - Si dos de los términos independientes son proporcionales entre sí en la misma medida que son sus correspondientes filas de M , los planos asociados a esas dos ecuaciones son coincidentes. Además, dado que $rg(M') = 2$, el tercer término independiente es no proporcional a los dos anteriores. Por tanto, el tercer plano sería paralelo a los dos primeros.
 - Si los tres términos independientes son no proporcionales entre sí, los tres planos son paralelos.

Por tanto, en cualquiera de los dos casos no existe ningún punto en el que concurren los tres planos simultáneamente.

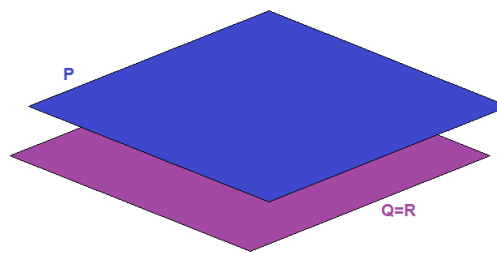


Figura 9. Dos planos coincidentes y uno paralelo (elaboración propia)

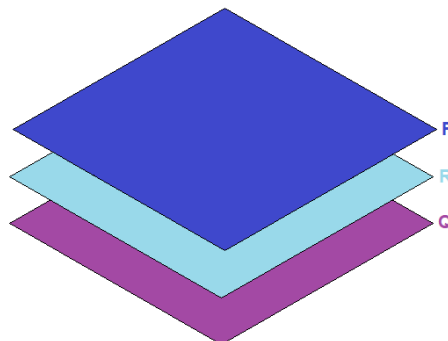


Figura 10. Tres planos paralelos (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 1$, entonces $rg(M') \neq 3$.

- Si $rg(M) = rg(M') = 2$ el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad y tiene infinitas soluciones. En este caso hay dos posibilidades:
 - Si $rg(M) = rg(M') = 2$ porque la ecuación de uno de los planos es combinación lineal de las otras dos, entonces los tres planos son secantes entre sí en una recta.
 - Si $rg(M) = rg(M') = 2$ porque las ecuaciones de dos de los planos son iguales o proporcionales, entonces esos dos planos son coincidentes y el tercero es secante a ellos dos en una recta.

En cualquiera de los dos casos el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, los tres planos intersecan en infinitos puntos (la intersección entre los tres planos es una recta).

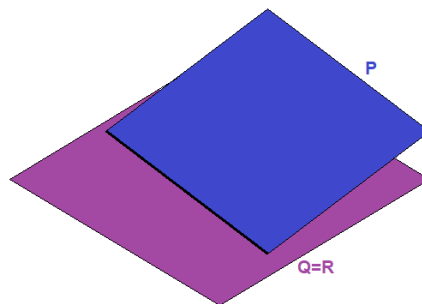


Figura 11. Dos planos coincidentes y uno secante (elaboración propia)

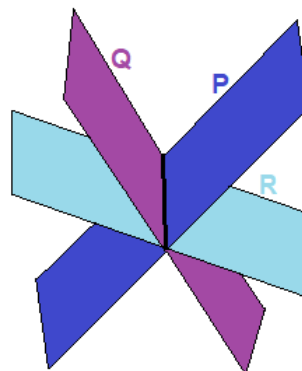


Figura 12. Tres planos secantes en una recta (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 2$ y $rg(M') = 3$ el sistema es incompatible y no admite solución. En este caso hay dos posibilidades:
 - Si $rg(M) = 2$ porque dos de sus filas son proporcionales, y dado que $rg(M') = 3$, entonces dos de los planos son paralelos y el tercero secante a ellos.
 - Si $rg(M) = 2$ porque una de sus filas es combinación lineal de las dos restantes, y dado que $rg(M') = 3$, entonces los tres planos son secantes dos a dos, pero no concurren los tres simultáneamente en ningún punto.

En cualquiera de los dos casos el sistema no admite solución, es decir, no existe ningún punto del espacio en el que intersequen los tres planos.

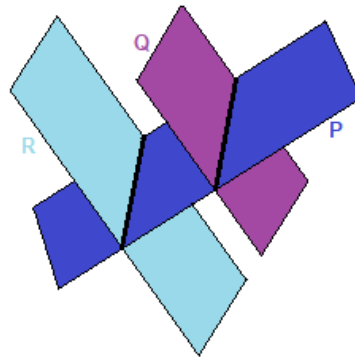


Figura 13. Dos planos paralelos y uno secante (elaboración propia)

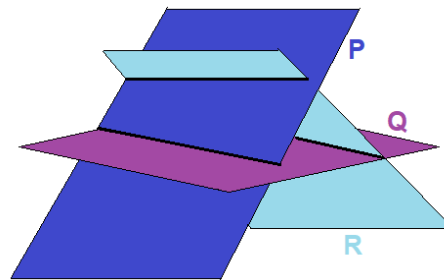


Figura 14. Tres planos secantes dos a dos (elaboración propia)

- Si $rg(M) = rg(M') = 3$ el sistema es compatible determinado y tiene una única solución. Es decir, las ecuaciones de los tres planos son independientes entre sí, y además el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. Por tanto, los tres planos se intersecan en un único punto.

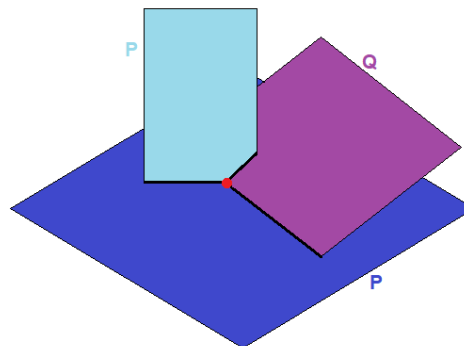


Figura 15. Tres planos secantes en un punto (elaboración propia)

3.6.5. Intersección entre una recta y un plano en el espacio \mathbb{R}^3 .

Sea una recta r con la siguiente ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{array} \right\} = r$$

Siendo:

$$M_r = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Y un plano P :

$$P \equiv A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

Se puede estudiar la intersección entre ambos elementos planteando el sistema:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned} \right\}$$

Siendo:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, por el mismo razonamiento que en el apartado 4.7.2 se sobreentiende que el rango máximo de la matriz M es 3 y el mínimo es 2 (el rango mínimo de la matriz M_r es 2, y dado que la matriz M contiene a M_r , $rg(M) \geq 2$).

Se distinguen las siguientes posibilidades:

- Si $rg(M) = rg(M') = 2$ el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad y tiene infinitas soluciones. En este caso hay dos posibilidades:
 - Si $rg(M) = 2$ porque la ecuación del plano P es combinación lineal de las ecuaciones de los dos planos que forman r , entonces P interseca con los dos planos de la recta exactamente a través de r y, por tanto, también la contiene.
 - Si $rg(M) = 2$ porque la ecuación del plano P es proporcional a alguna de las dos ecuaciones que forman r , entonces P es coincidente con el plano asociado a dicha ecuación y, por tanto, también contiene a r .

En cualquiera de los dos casos, el plano P interseca con la recta r en infinitos puntos, es decir que la contiene.

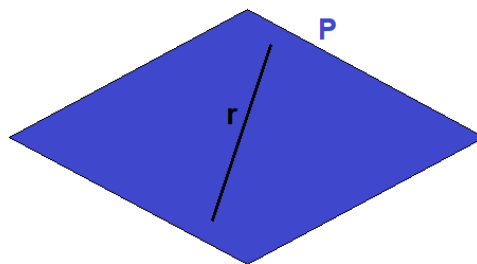


Figura 16. Recta contenida en un plano (elaboración propia)

- Si $rg(M) = 2$ y $rg(M') = 3$ el sistema es incompatible y no admite solución. En este caso hay dos posibilidades:
 - Si $rg(M) = 2$ porque la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, y dado que $rg(M') = 3$, entonces P interseca con los dos planos de la recta pero no en la recta r .

- Si $rg(M) = 2$ porque la tercera fila es proporcional a alguna de las dos primeras, y dado que $rg(M') = 3$, entonces P es paralelo a alguno de los dos planos que forman r .

En cualquiera de los dos casos la recta r es paralela al plano P y, por tanto, no existe punto alguno en el espacio donde intersequen ambos elementos.

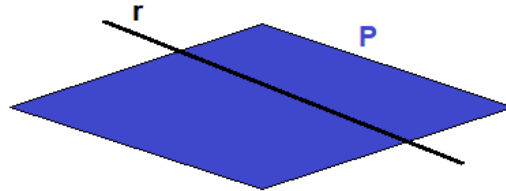


Figura 17. Recta paralela a un plano (elaboración propia)

- Si $rg(M) = rg(M') = 3$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única. Es decir, los dos planos que forman r y el plano P intersecan en un único punto. Dicho punto estará contenido en la recta intersección entre los dos planos que forman r y será por tanto el único punto de intersección entre la recta r y el plano P .

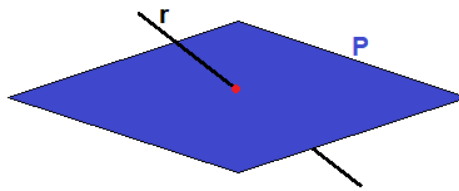


Figura 18. Recta secante a un plano (elaboración propia)

4. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

A continuación se examinará el currículo de Matemáticas en lo referente a Sistemas de Ecuaciones, desglosándolo por períodos educativos, y se hará un estudio de diferentes libros de texto acerca del tema en cuestión. Para ello se realizará en primer lugar una comparación entre varios libros de la misma editorial para diferentes cursos y posteriormente se equiparán libros de diferentes editoriales correspondientes al mismo curso.

4.1. Sistemas de Ecuaciones: currículo por etapas

En este primer sub-apartado se analizarán las diferencias entre las distintas etapas educativas de la Educación Secundaria Obligatoria en cuanto a conceptos, dificultad, enfoque, etc. en lo que a Sistemas de Ecuaciones se refiere. Para ello se compararán los libros de texto de diferentes cursos (1º–4º de ESO) de una misma editorial (Anaya) y se contrastará su contenido con los requisitos establecidos por la legislación vigente.

En ese sentido, el currículo básico de las materias del bloque de asignaturas troncales (bloque en el que se encuadra la asignatura de Matemáticas) se recoge en el anexo primero del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (en adelante RD 1105/2014). Dicho anexo establece los contenidos, competencias, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje correspondientes a cada etapa educativa.

A continuación se muestran, por cursos, los elementos del currículo que hacen referencia al tema de Sistemas de Ecuaciones y junto con un breve análisis del libro de texto correspondiente.

1º y 2º ESO (apartado 29 – Anexo I – RD 1105/2014)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.	7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma. 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Tabla 2. Currículo de Matemáticas 1º y 2º de ESO (fuente: BOE)

Cabe destacar en primer lugar que 2º de ESO es el primer curso en el que se introduce el concepto de Sistema de Ecuaciones. En cuanto al libro de texto de la editorial Anaya, la unidad correspondiente es la número 8.

La organización del tema sigue el orden clásico de los libros de texto; inicialmente se ofrece una introducción a los Sistemas de Ecuaciones, a continuación se desarrollan las diferentes partes de la unidad mediante las explicaciones, ejemplos y actividades correspondientes y por último se incluye una colección de problemas.

Por otro lado, los contenidos se estructuran de la siguiente manera:

- 1) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- 2) Sistemas de ecuaciones lineales.
- 3) Métodos para la resolución de sistemas lineales:
 - a) Método de sustitución.
 - b) Método de igualación.
 - c) Método de reducción.
- 4) Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones.

En general el libro se ajusta a los requisitos recogidos en el RD 1105/2014, aunque cabe mencionar que el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones no se expone explícitamente, sino que se trabaja de manera implícita a lo largo de todo el tema.

3º ESO Aplicadas (apartado 28 – Anexo I – RD 1105/2014)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.	4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos.	4.2. Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos. 4.3. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Tabla 3. Currículo de Matemáticas Aplicadas 3º de ESO (fuente: BOE)

En este caso la unidad correspondiente a los Sistemas de Ecuaciones es también la número 8. Además, la estructura del tema es idéntica a la dispuesta en el libro de texto de 2º de ESO (introducción, desarrollo, colección de problemas).

Los contenidos se organizan de la siguiente manera:

- 1) Ecuaciones con dos incógnitas.
- 2) Sistemas de ecuaciones.
- 3) Número de soluciones de un sistema lineal.
- 4) Método de sustitución.
- 5) Método de igualación.
- 6) Método de reducción.
- 7) Regla práctica para resolver sistemas lineales.
- 8) Traducción de enunciados a sistemas de ecuaciones.

A grandes rasgos el libro se ajusta a los requerimientos del RD 1105/2014. Cabe destacar que, al igual que en el caso anterior, el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones no se expone explícitamente, sino que se trabaja de manera implícita. Asimismo, no se propone ni se hace mención a ningún recurso tecnológico para la práctica de sistemas de ecuaciones.

En líneas generales el contenido y la dificultad no dista mucho del curso anterior, aunque se aumenta ligeramente la complejidad de las actividades y se hace mayor hincapié en el concepto de “solución del sistema”.

3º ESO Académicas (apartado 27 – Anexo I – RD 1105/2014)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Tabla 4. Currículo de Matemáticas Académicas 3º de ESO (fuente: BOE)

En el caso de las Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas, la unidad correspondiente a los Sistemas de Ecuaciones es la número 7. Además, la estructura del tema es análoga a las anteriores (introducción, desarrollo, colección de problemas).

Los contenidos se organizan de la siguiente manera:

- 1) Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones.
- 2) Sistemas de ecuaciones lineales.

- 3) Sistemas equivalentes.
- 4) Número de soluciones de un sistema lineal.
- 5) Métodos de resolución de sistemas:
 - a) Método de sustitución.
 - b) Método de igualación.
 - c) Método de reducción.
- 5) Sistemas de ecuaciones no lineales.
- 6) Resolución de problemas mediante sistemas.

Por lo general, el contenido y enfoque de las Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas es análogo al de las Matemáticas Aplicadas. No obstante, cabe señalar una mayor dificultad tanto en conceptos como en las actividades propuestas a lo largo de la unidad; se introduce por ejemplo el concepto de sistemas equivalentes, así como la resolución de ecuaciones no lineales. Por otro lado, se echa en falta la inclusión de alguna herramienta tecnológica en la unidad.

4º ESO Aplicadas (apartado 28 – Anexo I – RD 1105/2014)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.	3. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas.	3.1. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Tabla 5. Currículo de Matemáticas Aplicadas 4º de ESO (fuente: BOE)

En este caso la unidad correspondiente a Sistemas de Ecuaciones es la número 7. Además, la estructura del tema es idéntica a las que se vienen indicando anteriormente (introducción, desarrollo, colección de problemas).

Los contenidos se disponen de la siguiente manera:

- 1) Ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- 2) Sistemas de ecuaciones lineales.
- 3) Resolución de sistemas de ecuaciones.
- 4) Sistemas de ecuaciones lineales más complejos.
- 5) Sistemas no lineales.
- 6) Resolución de problemas mediante sistemas.

El libro de texto se ajusta perfectamente a los requerimientos del RD 1105/2014. Además, se observa un aumento en la complejidad de los contenidos respecto al curso anterior: ya no se exponen los diferentes métodos de resolución, se incluyen sistemas no lineales, etc.

4º ESO Académicas (apartado 27 – Anexo I – RD 1105/2014)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.	4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.	4.2. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.

Tabla 6. Currículo de Matemáticas Académicas 4º de ESO (fuente: BOE)

La unidad correspondiente a Sistemas de Ecuaciones es la número 3 y, una vez más, la estructura del tema es idéntica a las anteriores (introducción, desarrollo, colección de problemas).

Se establece el siguiente orden para los contenidos:

- 1) Ecuaciones.
- 2) Sistemas de ecuaciones lineales.
- 3) Sistemas de ecuaciones no lineales.
- 4) Inecuaciones con una incógnita.

El libro de texto se ajusta con precisión a los requisitos establecidos por el RD 1105/2014. Por otra parte, se advierte una diferencia considerable frente a las Matemáticas Aplicadas, ya que la unidad de Matemáticas Académicas es más densa y más compleja. En ese sentido, la mayor desigualdad radica en la inclusión de inecuaciones y sistemas de inecuaciones, así como la resolución gráfica de los mismos. Cabe recalcar también la variedad de ecuaciones que contiene el libro y la complejidad de las mismas (ecuaciones radicales, bicuadradas, exponenciales, logarítmicas, etc.).

Comparativa

En términos generales la evolución de los sistemas de ecuaciones en la ESO es paulatina y no se encuentran diferencias exageradas en la transición de un curso al siguiente, aunque dichas diferencias son más notorias en el caso de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas. En ese sentido, apenas hay evolución de 2º de ESO a 3º de ESO de Aplicadas más allá de la introducción del número de posibles soluciones para un sistema de ecuaciones y se trata de unidad prácticamente de repaso.

Sin embargo, en el caso de 3º de ESO Académicas, además de la revisión de enseñanzas anteriores, sí se introducen varios conceptos novedosos, como los sistemas equivalentes y los sistemas no lineales. Por último, esta tendencia continúa en 4º de ESO. Por un lado, las Matemáticas Aplicadas podrían asemejarse a las Académicas de 3º ESO (se incluyen ecuaciones y sistemas más complejos, sistemas no lineales, etc.), mientras que las Matemáticas Académicas van un paso más lejos e incluyen el trabajo con inecuaciones y sistemas de inecuaciones.

4.2. Comparación entre diferentes editoriales

En el presente epígrafe se compararán los libros de texto correspondientes a 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas, publicados por dos editoriales diferentes. Las editoriales seleccionadas son Anaya y Santillana, por ser ambas de reconocido prestigio, generalmente muy utilizadas y fácilmente accesibles en formato digital.

En primer lugar, cabe destacar la diferencia de orden que escoge cada editorial para estructurar la programación didáctica del curso completo. Anaya plantea una distribución en 12 unidades didácticas, donde la correspondiente a sistemas es la número 3, mientras que Santillana opta por 14 temas, donde las ecuaciones se corresponden con el número 5. En ambos casos los sistemas de ecuaciones se imparten en el primer tramo de curso.

Nº	Anaya	Santillana
1	Números reales.	Números reales. Porcentajes.
2	Polinomios y fracciones algebraicas.	Potencias y radicales. Logaritmos.
3	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas.	Polinomios y fracciones algebraicas.
4	Funciones. Características.	Ecuaciones e inecuaciones.
5	Funciones elementales.	Sistemas de ecuaciones e inecuaciones.
6	Semejanza. Aplicaciones.	Áreas y volúmenes. Semejanza.
7	Trigonometría.	Trigonometría.
8	Geometría analítica.	Vectores y rectas.
9	Estadística.	Funciones.
10	Distribuciones bidimensionales.	Funciones polinómicas y racionales.
11	Combinatoria.	Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
12	Cálculo de probabilidades.	Estadística.
13	-	Combinatoria.
14	-	Probabilidad.

Tabla 7. Programación didáctica de la asignatura según Anaya y Santillana

Otra diferencia que capta la atención es la estructura de unidad por la que opta cada editorial. Por un lado Anaya unifica en una única unidad los aprendizajes relativos a ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones (tónica habitual en los libros de texto), mientras que Santillana se inclina por dividirlo en dos bloques (ecuaciones e inecuaciones en primer lugar y sistemas de ecuaciones e inecuaciones en la siguiente unidad).

En cuanto a contenido, ambas editoriales se ajustan a los criterios establecidos en el RD 1105/2014. No obstante, cabe recalcar cierta diferencia en la complejidad, ya que el alcance de Anaya se limita a inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita, mientras que Santillana sí incluye sistemas con dos incógnitas (el marco normativo no determina el número de incógnitas que deben contener las inecuaciones).

A continuación se muestra la estructura que sigue cada una de las unidades didácticas propuestas por cada editorial:

Anaya	Santillana
1) Ecuaciones 2) Sistemas de ecuaciones lineales 3) Sistemas de ecuaciones no lineales 4) Inecuaciones con una incógnita	1) Sistemas de ecuaciones lineales 2) Resolución de sistemas de ecuaciones 3) Sistemas de ecuaciones no lineales 4) Sistemas de inecuaciones con una incógnita 5) Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Tabla 8. Estructura de la Unidad de Sistemas de Ecuaciones según Anaya y Santillana

En ambos casos la unidad didáctica comienza de idéntica manera: se ofrece una breve introducción histórica y se propone un esquema del tema con los diferentes aspectos a tratar. A partir de este punto, la organización es muy similar: se van presentando los apartados en los que se divide la unidad mediante una explicación, varios ejemplos y problemas para resolver por el alumno. Por último se incluye una colección de problemas al final del tema. No se incluye ni se hace mención al uso de herramientas tecnológicas para la resolución de sistemas y, aunque esto no se requiere por ley para 4º de ESO, podría resultar positivo y de gran ayuda.

En cuanto a las exposiciones de cada apartado, se trata en general de construir métodos estandarizados por pasos para la resolución de cada tipo de ecuación o sistema, en lugar de buscar un conocimiento más significativo y global. Los problemas, por otro lado, son muy similares en ambos libros y los enunciados son del tipo “resuelve el sistema”; no se busca habitualmente contextualizar los sistemas de ecuaciones. Además cabe destacar, en relación con los artículos de investigación consultados, que apenas se realiza el paso del registro gráfico al algebraico o algebraico al verbal (casi siempre se suele trabajar las transiciones inversas).

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

Para la redacción de este primer apartado se han consultado varios artículos académicos publicados en revistas de reconocido prestigio y relacionados con la enseñanza de sistemas de ecuaciones.

Cabe destacar, en primer lugar, un artículo publicado en la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* que trata de los obstáculos que encuentra el alumnado en el aula para aprender y manejar los sistemas de ecuaciones de manera efectiva. Además, incluye la construcción y puesta en marcha de una propuesta didáctica alternativa a los métodos tradicionales para salvar dichas dificultades.

Por otro lado, se ha consultado otro artículo de la revista *Enseñanza de las ciencias* que trata de promover la invención de problemas relacionados con ecuaciones y sistemas como herramienta para indagar en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de los alumnos de secundaria.

Tanto los artículos mencionados como otros que han sido de ayuda para la elaboración de la fundamentación didáctica pueden verse listados en el capítulo de referencias bibliográficas.

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica

El artículo principal que ha dado pie a esta sección es “Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica” de Sandra Mabel Segura de Herrero (Universidad Nacional de Cuyo, Argentina), publicado en 2004 en la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME).

Esta publicación detalla el diseño y la aplicación de una secuencia didáctica que pretende facilitar el aprendizaje y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, implicando diferentes registros de representación semiótica para los mismos (verbal o lingüística, algebraica y gráfica), además de trabajar la transición entre dichos registros.

Los sistemas de ecuaciones aparecen en el segundo año de la Educación Secundaria Obligatoria (13 años), y reaparecen directa o indirectamente como herramienta matemática en niveles superiores así como otras asignaturas relacionadas con las matemáticas. En ese sentido cabe mencionar la diferencia entre el sistema educativo español y argentino, ya que en Argentina según indica Segura los sistemas de ecuaciones se incluyen en el temario por primera vez en tercer grado (alumnos/as de 14–15 años).

Inicialmente el artículo presenta la problemática a la que se pretende hacer frente mediante la investigación didáctica. En ese sentido, se hace hincapié en los errores en que habitualmente incurren los estudiantes. Se mencionan en primer lugar las

dificultades para realizar operaciones aritméticas elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones, aun cuando son capaces de aplicar sin problemas los algoritmos de resolución. Asimismo, se señala la desarticulación existente entre los sistemas de ecuaciones y su solución asociada. Es decir, el alumnado no acostumbra a verificar la solución obtenida una vez resuelto un sistema. Por último, y como punto de mayor relevancia, se destaca el gran problema que supone para el estudiantado el paso de un registro semiótico a otro, es decir, el paso de lenguaje verbal a algebraico (interpretación del enunciado), de la representación algebraica a la gráfica, y viceversa. Según la autora, este aspecto juega un papel fundamental en el aprendizaje y no se le da generalmente la importancia que merece en las aulas.

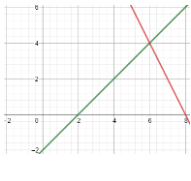

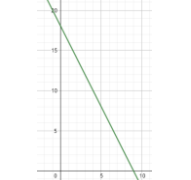
Objeto matemático	Representación		
	Verbal	Algebraica	Gráfica
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (sol. única)	Si los dos lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro es de 24 cm. Si la diferencia entre lados es de 2 cm, ¿cuánto mide cada lado?	$\left. \begin{aligned} 2(x + 2) + 2(y + 2) &= 24 \\ x &= y + 2 \end{aligned} \right\}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (sin solución)	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?	$\left. \begin{aligned} x + y &= 1000 \\ 2(x + y) &= 700 \end{aligned} \right\}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (infinitas sol.)	El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 cm. Si se suma uno de los lados congruentes a la mitad del no congruente, se obtiene 9. ¿Cuánto mide cada lado?	$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ x + \frac{y}{2} &= 9 \end{aligned} \right\}$	

Tabla 9. Registros semióticos en sistemas de ecuaciones (fuente: Segura, S.M.)

En general, la enseñanza matemática se organiza como si la coordinación entre los diferentes registros fuese rápida y se ejecutase de forma natural, cuando no es así.

A raíz de la problemática expuesta, el desafío principal de la investigación consiste en proponer una secuencia didáctica que favorezca el aprendizaje y consiga equilibrar las posibles dificultades que se hallen en el proceso.

La metodología empleada en la investigación es la denominada ingeniería didáctica, caracterizada por una fuerte connotación experimental y de realización didáctica en el aula. Además, se hace uso de la validación interna para comparar el análisis a priori y posteriori de la secuencia didáctica.

La investigación didáctica se desarrolla en un grupo de 29 alumnas de 15 años, habituadas al modelo de enseñanza tradicional (el profesor explica la teoría en la pizarra,

da una serie de ejercicios para practicar y proporciona la solución correcta para que las alumnas comparen sus producciones). Los instrumentos de los que disponen las estudiantes son: conocimiento de los números reales, conocimientos básicos de funciones y conocimientos geométricos (posición de una recta en el plano).

El proceso experimental de la investigación se puede dividir en cinco etapas.

1. Análisis preliminar

Esta etapa comprende la interpretación de los resultados de investigaciones anteriores, el análisis de diferentes libros de texto y el estudio de la evolución histórica de los sistemas de ecuaciones.

Todas las investigaciones previas consultadas alcanzaban conclusiones similares. En primer lugar, los alumnos tienen en general predilección por el registro algebraico al ser más automático, mientras que evaden en la medida de lo posible el registro verbal. De ahí que la comprensión del enunciado de un problema sea *“una de las carencias más evidentes de los alumnos por la dificultad que tienen para entender un texto escrito, tener claro lo que se les pregunta, identificar las incógnitas y plasmarlo todo en ecuaciones algebraicas y sistemas”* (Martínez y Sáez, 2014, p. 41).

Asimismo, realizan con frecuencia la transición de registro algebraico a gráfico, pero rara vez a la inversa. Por otro lado, no es habitual la verificación de la solución obtenida y, en caso de ser ésta errónea, la única herramienta de la que disponen para corregir el fallo es realizar todo el problema de nuevo, siendo incapaces de localizar el error. Por último, se destacan las grandes dificultades que encuentra el alumnado para traducir el registro verbal a lenguaje algebraico.

En cuanto a los libros de texto, los problemas que incluyen son en ocasiones demasiado abstractos y carecen de sentido para el alumnado. Asimismo, otorgan en general mayor importancia al lenguaje algebraico; trabajan la transición de registro verbal a algebraico y de éste al gráfico, pero rara vez se practica la transición inversa.

2. Concepción y análisis a priori

La secuencia didáctica se concibe con el objetivo de trabajar el registro verbal, algebraico y gráfico, así como la transición bidireccional entre registros. Para ello se diseña una serie de cinco actividades de nivel creciente que aluden a un contexto llamativo para las alumnas, con objeto de incrementar su interés y motivación. Para cada tarea se elabora una descripción general que incluye aspectos como los objetivos, comportamientos matemáticos–cognitivos esperados, rol del docente, posibles estrategias y errores de las alumnas, etc.

El comportamiento matemático esperado consiste en que las alumnas propongan algebraicamente y/o gráficamente rectas que, de manera conjunta, pasen por un punto

dado, mientras que el cognitivo es que trabajen los diferentes registros semióticos y que realicen la transición entre uno y otro. Asimismo, que hallen gráfica y/o algebraicamente las soluciones de un sistema dado, que verifiquen dichas soluciones gráfica y/o algebraicamente, que comprendan el concepto de sistemas equivalentes y que validen sus conjeturas de manera gráfica y/o algebraica.

En ese sentido, cada una de las tareas propuestas es considerada un desafío para el alumno; los recursos puestos a disposición del mismo deben ser insuficientes para la resolución del problema, pero a partir de ellos debe estar en condiciones de desarrollar acciones de toma de información, exploración, hipótesis y verificación. Es decir, el alumno no recibe directamente el significado del objeto matemático (sistemas de ecuaciones), sino que debe construirlo por sí mismo. Durante todo este proceso, el papel del docente se limita a guiar al estudiante transformando sus respuestas en saber, descontextualizando los aprendizajes adquiridos para dotarlos de carácter global.

3. Experimentación

La puesta en práctica se lleva a cabo en seis jornadas de 80 minutos cada una. Cada sesión incluye un debate al final, moderado por la profesora. El papel del investigador y su colaborador se limita a ser observadores pasivos. Además, se lleva a cabo un registro mediante grabaciones y entrevistas a las alumnas.

4. Análisis a posteriori

Cada tarea de la secuencia fue detallada mediante fecha, duración, participación de la docente, análisis de las producciones, diálogos, descripción del debate, etc. De las transcripciones recogidas a lo largo de las sesiones, se pudo observar que cada alumna tenía sus propias preferencias a la hora de trabajar en un registro u otro y era en general reticente a emplear los registros que peor dominaba. Además, se pudo concluir que un rol menos conductista de la profesora favorecía que las alumnas tomaran mayor conciencia de lo que hacían y se responsabilizaran en mayor medida de determinar si una solución era correcta o errónea y el por qué. Es decir, el hecho de cuestionar por qué una respuesta era correcta o incorrecta en vez de dar la solución acertada directamente favorecía la asimilación de los aprendizajes por parte de las alumnas.

5. Confrontación: análisis a priori vs posteriori

El rol de la profesora se limitaba a observar, recorrer los grupos y responder preguntas. No obstante, la autora resalta que había ocasiones en las que su actitud era excesivamente conductista. Al responder “esto está bien” o “esto está mal”, la validación deja de estar a cargo de la alumna y pasa a ser responsabilidad de la docente, por lo que la estudiante no reconoce el error, sino que se limita a acatar lo que la profesora ha establecido como correcto o incorrecto.

Por otro lado, el momento de institucionalización de los aprendizajes se adelantó una sesión respecto a lo previsto, por iniciativa de la docente, al observar ésta que las alumnas resolvían sistemas de ecuaciones implícitamente a través de la realización de otras tareas.

Conclusiones

El objetivo de la investigación fue elaborar y aplicar una secuencia de enseñanza que facilitase el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. En ese sentido, interesó no sólo que las alumnas obtuvieran un resultado final en primera instancia, sino también que fundamentaran sus decisiones para que, al momento del debate, aceptaran o refutaran sus argumentos con criterio.

Finalmente se logró desarrollar en las alumnas comportamientos matemáticos y cognitivos que les sirvieron para asimilar estos objetos de manera más efectiva. Se puede por tanto concluir que al afrontar el alumno los problemas con sus propios recursos y de manera más autónoma, el resultado es un aprendizaje más profundo.

La autora afirma además que durante el desarrollo de la secuencia la mayoría de las alumnas pasaron satisfactoriamente por las fases de acción, formulación y validación. Asimismo, el hecho de enfatizar sobre los tres registros trabajados (verbal, algebraico y gráfico) favorece que el alumno identifique el objeto en todos ellos de manera fluida.

Por último, se puede advertir la subsanación de algunos fenómenos descritos en investigaciones previas, como la desarticulación entre los sistemas de ecuaciones y su solución o la desconexión entre los diferentes registros semióticos.

5.2. Conocimiento conceptual del simbolismo algebraico

En este segundo artículo titulado “Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas” Elena Fernández–Millán y Marta Molina (Universidad de Granada, 2016) tratan de identificar las características propias de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar problemas matemáticos: inclusión de más de una incógnita, presencia de la misma incógnita a ambos lados de la igualdad, operaciones multiplicativas entre incógnitas, etc. A pesar del tiempo e importancia que se concede al estudio del álgebra, el alumnado encuentra grandes obstáculos con esta materia y comete numerosos y reiterados errores que sugieren un déficit considerable de conocimiento conceptual.

Para indagar en el conocimiento adquirido por los alumnos durante su etapa de Educación Secundaria, las autoras proponen una actividad basada en la invención de problemas, apoyándose en estudios previos que demuestran la utilidad de dicha herramienta.

1. Estudios previos

Todas las investigaciones anteriores en las que se basa el estudio recalcan las grandes dificultades que encuentran los estudiantes en el campo del álgebra: interpretación de las incógnitas, diferenciación entre parámetro, variable e incógnita, asociación de dos significados diferentes a una misma incógnita, etc.

Por otro lado, se identifican algunos de los errores más comunes en la traducción de simbolismo algebraico a lenguaje verbal: confusión de operaciones aritméticas, generalización de elementos de las expresiones, uso polisémico de una incógnita e inclusión de más variables de las necesarias.

Además, se destacan los procesos de traducción del sistema de representación simbólico al verbal, frente a la traducción en sentido inverso, como más accesibles para los estudiantes al inicio y al cierre de la educación secundaria, por lo que se recomienda promover un trabajo integrado de invención y resolución de problemas en dichas etapas.

2. Objetivos de la prueba y sujetos participantes

La investigación pretende analizar, mediante la invención de problemas matemáticos, el conocimiento conceptual relativo al simbolismo algebraico que adquieren los alumnos de su formación a lo largo de la ESO. Asimismo, los objetivos específicos que se pretenden alcanzar son:

- 1) Identificar las características de las ecuaciones y sistemas que dificultan a los estudiantes la invención de problemas.
- 2) Distinguir el significado que dan los estudiantes a las incógnitas y operaciones contenidas en las ecuaciones y sistemas.

Por otro lado, el grupo en el que se desarrolla la investigación es un grupo de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Aplicadas formado por 20 alumnos con conocimientos previos de álgebra en materia de ecuaciones y sistemas. El rendimiento de la clase se califica como heterogéneo y, en general, medio.

3. Diseño de la prueba

La prueba consiste en un cuestionario compuesto por siete tareas (cinco ecuaciones y dos sistemas con solución única), cada una de las cuales requiere la invención de un problema que implique en su resolución el uso de la ecuación o sistema dado. Para ello se incluyen ecuaciones y sistemas variados (ecuaciones lineales y cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, etc.), todos ellos previamente trabajados por el grupo en diferentes etapas de la ESO. Además, con objeto de facilitar la actividad, todos los coeficientes, términos independientes y soluciones son números enteros. La resolución de la tarea es individual, mediante lápiz y papel.

4. Análisis de los datos

Para el análisis de la prueba, las autoras clasifican un problema como “correcto” cuando la traducción simbólica del enunciado coincide con la ecuación o sistema dado, e “incorrecto” en caso contrario.

A partir de los problemas formulados por los alumnos, se definen dos categorías: sintáctica (forma), asociada al primer objetivo específico de la prueba, y semántica (significado), relacionado con el segundo.

Cat. sintáctica	Nombre	Valor posible
A	Conservación de términos y operaciones.	Sí / No
B	Presencia de incógnitas operando.	Sí / No
C	Relación entre coeficientes e incógnitas.	Sí / No / N/A
D	Igual número de incógnitas.	Sí / No / N/A
Cat. semántica	Nombre	Valor posible
E	Da significado a las incógnitas.	Sí / No / N/A
F	Da significado a las estructuras aditivas.	Sí / No / N/A
G	Da significado a las estructuras multiplicativas.	Sí / No / N/A

Tabla 10. Categorías sintáctico-semánticas (fuente: Fernández–Millán, E. y Molina, M.)

Véase a continuación un ejemplo (primera ecuación de la ficha) que muestra el mecanismo de evaluación de los problemas propuestos por el alumnado:

Nº tarea	Expresión dada	Enunciado inventado	Traducción simbólica	Codificación			
				A	B	C	D
1	$8 = x + 6$	La suma de dos números consecutivos pares da 8. Calcula qué dos números son.	$2x + 2x + 2 = 8$	No	Sí	No	Sí

Tabla 11. Ejemplo invención de problema (fuente: Fernández–Millán, E. y Molina, M.)

- A – no se cumple (la expresión inicial cuenta con una suma y el enunciado propuesto incluye al menos dos).
- B – sí se cumple (la incógnita aparece operando).
- C – no se cumple (la relación entre coeficientes e incógnita es incorrecta).
- D – sí se cumple (tanto en la expresión original como en el problema propuesto aparece una única incógnita).

5. Resultados

A continuación se muestra una tabla resumen que recoge los resultados arrojados por la prueba. Para el análisis de los datos obtenidos se excluyen los problemas en

blanco (*sin respuesta*) y aquellos que no pueden traducirse a lenguaje simbólico o se limitan a pedir la resolución de la ecuación/sistema dado (*descartado*).

Codificación	Ecuación/Sistema							
	1	2	3	4	5	6	7	Total
Sin respuesta	0	2	1	2	5	5	6	21
Descartado	1	2	2	1	0	3	1	10
Total no analizables	1	4	3	3	5	8	7	31
Correctos	15	8	6	8	8	6	6	57
Incorrectos	4	8	11	9	7	6	7	52
Total analizables	19	16	17	17	15	12	13	109

Tabla 12. Resultados de la prueba (fuente: Fernández–Millán, E. y Molina, M.)

Categorías sintácticas

En este apartado destaca la alta frecuencia de los errores relacionados con la categoría A (42% de los casos analizables). En el caso de ecuaciones cuadráticas una confusión habitual es la invención de enunciados que se corresponden con ecuaciones lineales.

Los errores en la categoría B son mucho menos comunes (17% de los casos analizables), y todos ellos salvo uno son debidos a la presencia de la incógnita directamente despejada, en lugar de operando.

Los fallos relativos a las categorías C y D presentan también menor frecuencia (9% y 14% de los casos analizables respectivamente). En el primer caso se deben a una relación incorrecta entre coeficientes e incógnitas, mientras que los desaciertos con el número de incógnitas se deben siempre a la inclusión de incógnitas adicionales.

Categorías semánticas

Cabe destacar respecto a la categoría E que en el 65% de los casos analizables los alumnos asignan a las incógnitas significados no encuadrados en contextos matemáticos. Además, se comprueba que las actividades más problemáticas en este sentido son aquellas que incluyen estructuras multiplicativas entre incógnitas.

En cuanto a las categorías F y G se puede constatar que en la mayoría de los enunciados (85% de los casos analizables) los estudiantes dan significado a las estructuras aditivas, mientras que sólo lo hacen en un 46% de los casos analizables para estructuras multiplicativas.

Conclusiones

En general los estudiantes encuentran grandes dificultades para inventar problemas cuya traducción al simbolismo algebraico se corresponda con la expresión dada; salvo la

primera ecuación propuesta, ninguna tarea tuvo un ratio de respuestas correctas superior al 50%.

En primer lugar, la investigación permite identificar las características de las ecuaciones y sistemas que, con carácter general, dificultan la invención de tareas por parte del alumnado: número de incógnitas superior a uno, misma incógnita a ambos lados del signo de igualdad, coeficientes diferentes superiores a dos y estructuras multiplicativas entre incógnitas.

En cuanto a las operaciones, se detecta una mayor facilidad para trabajar con estructuras aditivas respecto a las estructuras multiplicativas. Asimismo, las estructuras aditivas más repetidas fueron las estructuras semánticas de combinación y cambio (las más frecuentes en los libros de texto) y las estructuras multiplicativas más recurrentes fueron la de comparación y proporcionalidad simple. Cabe destacar la ausencia casi total de la estructura semántica multiplicativa del producto cartesiano (presente por ejemplo en las áreas de polígonos), por lo que resulta necesario intensificar la enseñanza en ese sentido y trabajar la verbalización de relaciones multiplicativas, tanto en contextos aritméticos como algebraicos. Además de los obstáculos para operar con estructuras multiplicativas, se hace hincapié también en la dificultad para dar significado a las incógnitas en las ecuaciones y problemas con este tipo de estructuras.

Por último y ante cualquier otra conclusión, queda demostrada la utilidad de la invención de problemas como herramienta para evaluar el conocimiento de los estudiantes en el campo del álgebra.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA

En el presente apartado se desarrollará una unidad didáctica de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO. Para ello se contextualizará en primer lugar el centro y el aula donde se pretende impartir dicha unidad didáctica, estableciendo posteriormente los objetivos perseguidos y los contenidos y competencias a trabajar, analizando tanto la metodología como los recursos empleados y definiendo por último la temporalización.

6.1. Título

El título de la unidad didáctica a desarrollar es “Sistemas de Ecuaciones”, que será implantada en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO.

6.2. Justificación

El álgebra en general es considerada una de las ramas más importantes y más dificultosas para el alumnado dentro de las matemáticas, por lo que resulta imprescindible estructurar de manera efectiva las unidades correspondientes. En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales, no son una excepción de ello; se trata de un tema de importancia considerable y cuyo entendimiento acarrea grandes problemas para los estudiantes.

En primer lugar, el bloque de sistemas de ecuaciones es un componente presente por ley en el currículo de toda etapa educativa, desde su introducción en 2º de ESO hasta la culminación en 2º de Bachillerato, por lo que resulta obligatoria su impartición⁹.

Asimismo, se trata de un tema de numerosas aplicaciones tanto dentro de las propias matemáticas (geometría de 2º de Bachillerato) como en otras asignaturas (física, química, economía, etc.) y ocasionalmente en situaciones cotidianas de la vida.

Por último, cabe destacar que los obstáculos hallados habitualmente por los alumnos con el entendimiento y resolución de los Sistemas de Ecuaciones hacen del diseño de esta unidad didáctica un reto muy atractivo.

6.3. Contextualización del centro y del aula

A continuación se detalla alguna información acerca del centro y más concretamente del aula donde se pretende implantar la Unidad Didáctica desarrollada¹⁰.

⁹ El marco legislativo que regula el currículo y la enseñanza relativa a Sistemas de Ecuaciones se mostró en el apartado 5.1.

¹⁰ Toda la información necesaria para el desarrollo del presente apartado fue facilitada por el equipo educativo del centro.

6.3.1. Situación del centro

El I.E.S. Auringis se encuentra situado en la Calle Cerro de los Lirios (zona oeste de Jaén capital) y fue inaugurado en la década de 1980. Originalmente se impartían las enseñanzas de BUP y COU, de donde surgieron posteriormente la ESO y el Bachillerato. Además, a partir del año 2003 se incorporaron también varios ciclos formativos a la oferta educativa. El horario lectivo del centro es de 08:10 a 14:45.

El entorno del instituto se caracteriza por una gran actividad comercial (restauración, supermercados, entidades bancarias, etc.) y por la variedad de familias en todos los aspectos.

En primer lugar, la zona se caracteriza mayoritariamente por familias tradicionales con una media de dos hijos/as, aunque son cada vez más frecuentes las situaciones familiares complejas que condicionan el rendimiento del alumnado en el centro.

En cuanto al nivel económico y profesional, la región sigue en términos generales la tendencia de la sociedad actual: aumento de desempleo y precariedad laboral. Es por ello que las familias se preocupan cada vez más por el futuro de sus hijos/as y se implican en su educación en mayor medida. No obstante, existen núcleos familiares de todas las índoles, desde rentas bajas hasta familias con capacidad económica media–alta.

Por último, respecto a nivel cultural cabe destacar la disparidad entre familias de la región. Existen núcleos con padres, madres e incluso hermanos/as con estudios universitarios y familias con niveles de formación más bajos, aunque no por ello menos implicados en la educación de sus hijos/as.



Figura 19. Localización del I.E.S. Auringis (fuente: Google Maps)



Figura 20. Vista en planta del I.E.S. Auringis (fuente: Google Maps)



Figura 21. Logo del I.E.S. Auringis (fuente: página web del centro)

6.3.2. Oferta educativa

La oferta educativa del I.E.S. Auringis incluye Educación Secundaria, Bachillerato y varios Ciclos Formativos. Los cursos disponibles son los siguientes:

- 1º a 4º de ESO
- 1º y 2º de Bachillerato en ciencias y tecnología
- 1º y 2º de Bachillerato en humanidades y ciencias sociales
- Ciclo Formativo de Grado Medio en atención a personas en situación de dependencia
- Ciclo Formativo de Grado Superior en educación infantil
- Ciclo Formativo de Grado Superior en iluminación, captación y tratamiento de imagen
- Ciclo Formativo de Grado Superior en sonido para audiovisuales y espectáculos

6.3.3. Centros adscritos

El I.E.S. Auringis recibe alumnado procedente de cinco colegios adscritos de la zona:

- C.E.I.P. Navas de Tolosa
- C.E.I.P. Agustín Serrano de Haro
- C.E.I.P. Antonio Prieto
- C.E.I.P. Muñoz Garnica
- C.E.I.P. María Zambrano

En este sentido cabe destacar la gran demanda por parte de las familias de la zona para acceder al centro y el elevado número de solicitudes.

6.3.4. Instalaciones

El I.E.S. Auringis cuenta en total con una superficie de 10.000 m² aproximadamente, distribuidos de la siguiente manera:

- Edificio principal de tres plantas donde se ubican la mayoría de instalaciones: dirección, secretaría, departamentos, sala de profesores, aulas, biblioteca, talleres, cafetería, etc.
- Polideportivo de 650 m² de superficie aproximadamente, donde se sitúan además varias aulas y el departamento de educación física.
- Patios, canchas de fútbol y baloncesto, zonas al aire libre, etc.
- Parking para profesorado.

6.3.5. Personal del centro

En primer lugar, el equipo directivo del centro está formado por: director, jefa de estudios, vicedirector (dado que se imparten Ciclos Formativos), secretario, jefe de estudios adjunto y jefa de estudios adjunta.

El claustro del profesorado está compuesto por aproximadamente 80 profesores y profesoras, de los cuales en torno al 65% constituyen la plantilla definitiva de docentes del centro. Cabe mencionar en esta sección que a partir del año 2010 incorporaron con destino definitivo un gran número de docentes con perfil bilingüe. Además, la constitución del claustro puede considerarse bastante estable, puesto que el personal no definitivo del centro suele como norma general repetir en su elección de destino.

En cuanto a personal no docente, el centro cuenta con dos administradoras, dos ordenanzas y un equipo de personal de limpieza formado por cuatro personas.

6.3.6. Alumnado del centro

La matrícula del centro ronda los 850 estudiantes, de los cuales aproximadamente 250 a diario asisten a clase de manera telemática debido a la situación sanitaria de pandemia por COVID-19.

A continuación se muestra una tabla resumen donde figuran las diferentes etapas educativas y los grupos correspondientes a cada etapa:

Etapas	Curso	Nº de grupos
ESO	1º ESO	5
	2º ESO	5
	3º ESO	4
	4º ESO	4
Bachillerato	1º Bachillerato	3

	2º Bachillerato	3
Ciclo Formativo de Grado Medio	1º atención a personas en situación de dependencia	1
	2º atención a personas en situación de dependencia	1
Ciclo Formativo de Grado Superior	1º educación infantil	1
	2º educación infantil	1
	1º iluminación, captación y tratamiento de imagen	1
	2º iluminación, captación y tratamiento de imagen	1
	1º sonido para audiovisuales y espectáculos	1
	2º sonido para audiovisuales y espectáculos	1

Tabla 13. Grupos por etapa educativa (elaboración propia)

En cuanto al número de alumnos y alumnas, el reparto por etapas se indica en el siguiente gráfico:

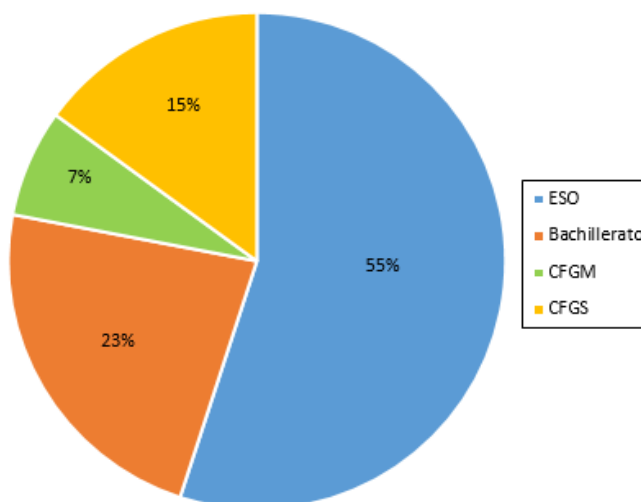


Figura 22. Número de alumnos por etapa educativa (fuente: equipo directivo del centro)

El alumnado del I.E.S. Auringis se caracteriza por una gran diversidad en cuanto a edad, ya que dicho rango varía desde los 11 o 12 años de los alumnos de 1º de ESO hasta los más de 40 que tienen varios de los estudiantes de los Ciclos Formativos.

6.3.7. Alumnado del aula

La unidad didáctica elaborada se aplicará a un grupo de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas formado por 22 alumnos/as, ninguno de ellos repetidor. En general se supondrá que la mayoría del colectivo posee los conocimientos

previos suficientes para afrontar el curso sin obstáculos; no obstante, se realizará una prueba de nivel al inicio del año.

Por otra parte, se habrán de tener en cuenta las necesidades específicas de cada alumno. En ese sentido, se considerarán varias adaptaciones curriculares no significativas, ya que el grupo incluye una alumna de altas capacidades y un alumno colombiano; aunque este segundo domine el castellano a la perfección, se incorporó una vez iniciado el curso y se perdió por tanto parte del contenido.

6.4. Objetivos

A continuación se definen las metas a alcanzar por parte del alumnado, tanto de forma general durante su etapa de educación secundaria, así como en la asignatura de Matemáticas y más concretamente en la unidad de Sistemas de Ecuaciones. Estos objetivos deben ser ante todo concisos, observables, medibles y realistas.

6.4.1. Objetivos generales en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria

Los objetivos definidos para la etapa de ESO vienen recogidos, por un lado, en el artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) y, además, en el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, mencionado anteriormente. Dichos objetivos se enumeran a continuación:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación

básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Asimismo, los objetivos establecidos a nivel nacional se complementan a escala autonómica con el Decreto 111/2016, de 14 de junio, cuyo artículo 3 define para Andalucía los siguientes objetivos adicionales:

- a) Profundizar en el conocimiento y el aprecio de las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
- b) Profundizar en el conocimiento y el aprecio de los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

6.4.2. Objetivos de las Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas

La enseñanza de las Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan¹¹:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

¹¹ Basado en la normativa que viene a suplir la Orden de 14 de julio de 2016 (derogada), es decir: Decreto 111/2016, de 14 de junio; Decreto 182/2020, de 10 de noviembre, e Instrucción 9/2020, de 15 de junio, de la Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Objetivos de la unidad de Sistemas de Ecuaciones

De acuerdo con los requisitos establecidos en el BOE y BOJA, se definen los siguientes objetivos específicos para la unidad de Sistemas de Ecuaciones:

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicamente, aplicando diferentes métodos y empleando un lenguaje algebraico adecuado.
2. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales algebraicamente empleando un lenguaje algebraico adecuado.
3. Resolver sistemas de ecuaciones gráficamente y mediante recursos tecnológicos.
4. Resolver problemas que requieran del planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones, efectuando una lectura comprensiva y diferenciando la información relevante de la irrelevante.
5. Resolver sistemas de inecuaciones con una incógnita, empleando un lenguaje algebraico adecuado y representando la solución de distintas maneras.
6. Resolver sistemas de inecuaciones con dos incógnitas gráficamente.
7. Resolver problemas que requieran del planteamiento y resolución de sistemas de inecuaciones, efectuando una lectura comprensiva y diferenciando la información relevante de la irrelevante.
8. Interpretar la solución obtenida en un problema y exponer los resultados de manera concisa y simplificada.
9. Analizar y reflexionar sobre el propio aprendizaje, los procesos de planteamiento y resolución empleados, validar los procedimientos correctos, identificar posibles errores cometidos y justificar la validez/invalides de cada decisión tomada.
10. Valorar la importancia de los sistemas de ecuaciones en la vida cotidiana y su aplicación en otras asignaturas o campos de la enseñanza.

6.5. Competencias clave

El Real Decreto 1105/2014 define en su artículo segundo las competencias como *“capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”*. Este enfoque competencial pretende inculcar en el alumnado, además del saber, las capacidades de saber hacer y el saber ser y estar.

Las competencias clave a alcanzar por el alumnado perteneciente al Sistema Educativo Español vienen recogidas en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero (artículo 2), y en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (artículo 2.2):

- a) Comunicación lingüística (CCL)
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)
- c) Competencia digital (CD)
- d) Aprender a aprender (CAA)
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC)
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC)

6.6. Contenidos

El Real Decreto 1105/2014 define en su artículo segundo los contenidos como *“conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado”*.

Los contenidos a impartir se recogen en el Real Decreto 1105/2014. En cuanto a la unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones, se habrán de considerar los contenidos relativos a los bloques 1 y 2 de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas de 4º de ESO.

Bloque 1 – Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

- 1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.
- 1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver sub-problemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- 1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las

soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- 1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- 1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- 1.6. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- 1.7. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:
 - a) La recogida ordenada y la organización de datos.
 - b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.
 - c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.
 - d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.
 - e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.
 - f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Bloque 2 – Números y álgebra

- 2.13. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- 2.14. Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas.

6.7. Metodología

El Real Decreto 1105/2014 define en su artículo segundo la metodología didáctica como *“conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados”*. En otras palabras, la metodología empleada en el aula determina *“cómo se enseña”*.

En ese sentido, no se puede determinar objetivamente y con precisión lo que son metodologías correctas o incorrectas, ni metodologías mejores que otras. En efecto, el Real Decreto 1105/2014 indica que la metodología didáctica *“no implica una organización cerrada, por el contrario, permitirá organizar de diferentes maneras los elementos curriculares y adoptar la metodología más adecuada a las características de los mismos y del grupo de alumnos”*. No obstante, el Decreto 111/2016 en su artículo

séptimo recoge algunas recomendaciones metodológicas sobre las que se sustenta la propuesta actual.

En primer lugar, el proceso de enseñanza–aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, interdisciplinariedad y carácter integral. Para ello se emplearán metodologías que contextualicen el proceso educativo, que presenten de manera relacionada los contenidos de diferentes materias y que favorezcan el desarrollo de varias competencias simultáneamente. Asimismo, se fomentará la transferibilidad y funcionalidad de los aprendizajes mediante trabajos de investigación y actividades integradas.

En cuanto al papel del docente, se limitará a orientar, promover y facilitar el desarrollo de los aprendizajes en el alumnado, favoreciendo la implicación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje, haciéndoles partícipes y responsables del mismo. Para ello se tratará de estimular la superación individual y el desarrollo de todas sus capacidades, fomentando su autoconcepto y autoconfianza y promoviendo procesos de aprendizaje autónomo. En ese sentido, resulta de vital importancia suscitar la motivación y participación entre el alumnado, proponiendo tareas que capten su interés y favorezcan la experimentación, recurriendo por un lado a actividades vistosas ocasionalmente (como juegos o acertijos matemáticos), así como planteando actividades diarias lo más atractivas posible. Asimismo, es también trabajo del docente ajustarse al nivel competencial inicial del alumnado, adaptarse a la diversidad del grupo y respetar los distintos ritmos de aprendizaje.

Por otra parte, se tratará de fomentar actitudes reflexivas que, junto con las directrices señaladas en el párrafo anterior, resulten en aprendizajes más significativos para del alumnado, siendo ellos quienes construyan su propio conocimiento tanto individual como grupalmente. Con este mismo objetivo se promoverá también el descubrimiento, la investigación, la iniciativa personal y el espíritu emprendedor.

Otra cuestión importante a tener en cuenta es que las estrategias metodológicas adoptadas sean activas y dinámicas, es decir, que incluyan tareas cooperativas que faciliten la interacción profesor–alumno y alumno–alumno, favoreciendo el intercambio de conocimientos e ideas.

Igualmente se procurará, mediante las diferentes metodologías empleadas, fomentar hábitos de lectura, prácticas de expresión escrita y capacidades de expresarse correctamente en público. Este tipo de actividades son además fácilmente combinables con tareas de recopilación y presentación de información. En ese sentido, resultan de especial interés las labores de investigación histórica, social y cultural de las Matemáticas, como por ejemplo la indagación acerca de célebres personajes históricos relacionados con las Matemáticas. Para ello se tratará de fomentar el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC).

Por último, dado el importante rol que juega la tecnología hoy día, resulta imprescindible la implantación en la enseñanza de recursos como calculadoras gráficas, softwares matemáticos, etc. así como plataformas del estilo a Google Classroom, donde se incluya contenido online, actividades de autoevaluación automatizadas, vídeos o tutoriales explicativos, actividades de refuerzo, etc. En este sentido, cabe destacar que la inclusión de las tecnologías debe tener un impacto positivo y con vistas a mejorar el aprendizaje.

En cualquier caso, tal como se anticipaba al inicio de este apartado, la metodología didáctica no será única y cerrada, sino que se tratarán de intercalar diferentes estrategias metodológicas, seleccionando la más adecuada para contenido, actividad, situación o momento.

6.8. Actividades y recursos

A continuación se determinan las herramientas disponibles (actividades, recursos y espacios) para llevar a cabo el desarrollo de la unidad didáctica.

6.8.1. Actividades

Para que las actividades desarrolladas en el aula sean de provecho y lo más efectivas posible, deben reunir ciertas características: fomentar el papel activo del alumno, ser de interesantes y motivadoras, definir con claridad los objetivos... En resumen, deben ser acordes a la metodología didáctica empleada.

Asimismo, las actividades pueden clasificarse según cuál sea su cometido; existen tareas de evaluación, diagnóstico, consolidación, introducción, motivación... Para que la unidad didáctica sea rica y variada se tratará de incluir diferentes tipos de problemas.

Por otro lado, las tareas diseñadas para la unidad didáctica irán encaminadas a suplir las carencias identificadas a través de los artículos de investigación académica consultados y el análisis de los libros de texto seleccionados. En ese sentido, se han planteado actividades que favorezcan la interdisciplinariedad, integrando conocimientos de diferentes áreas de las Matemáticas y de otras asignaturas. Asimismo, se ha tratado de diseñar enunciados dotados de contexto, basados no sólo en la resolución del problema, sino aportándole un sentido a la ejecución del mismo. Por último, se ha intentado fomentar la transición entre diferentes registros semióticos de manera bidireccional (verbal \rightarrow algebraico \rightarrow gráfico, y viceversa), no sólo unidireccional como se venía observando anteriormente.

La colección completa de actividades de la unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones se detalla en el Anexo I – Actividades.

6.8.2. Recursos

Para la consecución de los objetivos planteados se dispondrá de los siguientes recursos:

- Libro de texto de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas, 4º ESO (editorial Santillana).
- Cuadernillo de actividades entregado por el profesor, que incluye todas las actividades presentadas en el apartado anterior (ver Anexo I – Actividades).
- Pizarra tradicional (tiza o rotulador).
- Papel y lápiz/bolígrafo.
- Pizarra digital.
- Proyector y ordenador con acceso a conexión de internet.
- Calculadora.
- Ordenadores para el alumnado.

6.8.3. Espacios

Además de las actividades y recursos disponibles, se emplearán los siguientes espacios del centro, ya sea ocasionalmente o de manera habitual:

- Aula de 4º de ESO.
- Biblioteca.
- Sala de ordenadores.

6.9. Atención a la diversidad

El Decreto 111/2016, de 14 de junio, establece numerosas medidas de apoyo a la diversidad en la educación. Se incluyen, entre otros, el fomento de la diversidad como elemento transversal del currículo (artículo 6.f), recomendaciones para la elaboración de metodologías didácticas inclusivas (artículo 7.2) y la necesidad de reflejar las medidas de atención a la diversidad dentro del proyecto educativo del centro (artículo 8.2).

Asimismo, en el propio decreto se dedica un capítulo exclusivamente a la atención a la diversidad (capítulo VI), donde se especifica que deben acometerse *“actuaciones educativas de atención a la diversidad dirigidas a dar respuesta a las diferentes capacidades, ritmos y estilos de aprendizaje, motivaciones, intereses, situaciones socioeconómicas y culturales, lingüísticas y de salud del alumnado, con la finalidad de facilitar la adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que le impida alcanzar la titulación correspondiente”*.

Además, se deben proveer medidas curriculares y organizativas que aseguren el adecuado progreso del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, de modo que puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades y cumplir

los objetivos generales establecidos. Las condiciones que implican necesidades educativas específicas se recogen en el artículo 71 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, y son las siguientes:

- Retraso madurativo.
- Trastornos del desarrollo del lenguaje y la comunicación.
- Trastornos de atención o de aprendizaje.
- Desconocimiento grave de la lengua de aprendizaje.
- Situación de vulnerabilidad socioeducativa.
- Altas capacidades intelectuales.
- Incorporación tardía al sistema educativo.
- Condiciones personales o de historia escolar.

Igualmente se deben establecer los procedimientos y recursos precisos para identificar tempranamente las necesidades educativas específicas del alumnado.

En este proceso de adaptación a las diferentes necesidades del alumnado se contemplarán diversas herramientas, aunque la más significativa es la basada en adaptaciones curriculares. La legislación vigente dictamina que se propondrán adaptaciones de currículo para los estudiantes con necesidades específicas de apoyo educativo o estudiantes de altas capacidades intelectuales, cuando sea recomendable y siempre con el fin de buscar el máximo desarrollo de sus competencias.

En definitiva, la atención a la diversidad se basa en favorecer un clima escolar inclusivo, donde se garantice la igualdad de oportunidades y la no discriminación de ningún colectivo, facilitando la consecución de los objetivos y el máximo desarrollo de las capacidades para todo el alumnado.

6.9.1. Atención a la diversidad en el aula

Parte del trabajo de la unidad didáctica consistirá en trasladar las medidas de atención a la diversidad expuestas al aula. Para ello se valorará el nivel competencial y los conocimientos previos de la clase mediante una prueba de evaluación inicial. A partir de los resultados, y basándose en el ritmo de aprendizaje de cada alumno, se tratará de adaptar el proceso de enseñanza–aprendizaje a cada estudiante, de manera que todos ellos alcancen los objetivos fijados.

Asimismo, se facilitarán actividades de refuerzo y ampliación para fortalecer los conceptos adquiridos por los alumnos y se propondrán adaptaciones curriculares cuando se estime necesario. En cualquier caso, cualquier atención especial que requiera cualquiera de los estudiantes no deberá derivar en situaciones de exclusión.

En cuanto a adaptaciones curriculares, se considerará por un lado el caso de una alumna con altas capacidades intelectuales que desarrollará tareas más complejas

(incluso de cursos superiores) con mayor autonomía a través de un ordenador portátil. Además, se pondrá especial atención sobre otro alumno de origen colombiano que se incorporó de manera tardía al curso académico. En su caso el lenguaje no supone una barrera para el aprendizaje, ya que domina el castellano a la perfección. No obstante, se deberá hacer un seguimiento de su progresión y aclimatación, trabajando conjuntamente con el departamento de orientación y comprobando que el alumno se adapta correctamente al entorno del centro, y se atenderá y corregirá toda dificultad añadida que presente en su proceso de aprendizaje. Además, si surgiesen a lo largo del curso académico otros casos de alumnos con necesidades educativas especiales (TDH, dislexia...) se adoptarían igualmente las adaptaciones curriculares pertinentes (enunciados con menor carga lingüística, redactados en frases más cortas y concisas, etc.).

Por último, se dará a aquellos alumnos que no hayan superado las Matemáticas del curso anterior la oportunidad de superarlas mediante varios exámenes de recuperación a lo largo del curso académico.

6.10. Temporalización

El calendario escolar de Andalucía para el curso 2020/2021 comprende un total de 178 días lectivos para alumnado de Educación Secundaria. Teniendo en cuenta que las Matemáticas se imparten en cuatro de los cinco días lectivos de la semana, se considerará un total de 140 sesiones para todo el curso. Se propone por tanto la siguiente temporalización basada en el libro de texto de la editorial Santillana¹²:

Unidad	Título	Sesiones
1	Números reales. Porcentajes.	8
2	Potencias y radicales. Logaritmos.	8
3	Polinomios y fracciones algebraicas.	8
4	Ecuaciones e inecuaciones.	12
5	Sistemas de ecuaciones e inecuaciones.	12
6	Áreas y volúmenes. Semejanza.	10
7	Trigonometría.	12
8	Vectores y rectas.	12
9	Funciones.	12
10	Funciones polinómicas y racionales.	10
11	Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.	10
12	Estadística.	10
13	Combinatoria.	8

¹² Se descartó la editorial Anaya ya que unificaba las unidades de ecuaciones y sistemas, mientras que Santillana propone una estructura dividida en dos unidades diferentes.

14	Probabilidad.	8
Total		140

Tabla 14. Temporalización del curso de Matemáticas (elaboración propia)

6.10.1. Desarrollo de la unidad didáctica

Las 12 sesiones que componen la unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones se estructuran de la siguiente manera:

Sesión	Descripción
1	Introducción y evaluación inicial
2	Sistemas de ecuaciones lineales
3	Sistemas de ecuaciones no lineales
4	Problemas con sistemas de ecuaciones
5	Sistemas de inecuaciones – una incógnita
6	Sistemas de inecuaciones – dos incógnitas
7	Problemas con sistemas de inecuaciones
8	Representación de sistemas mediante Geogebra
9	Examen de la unidad
10	Resolución del examen
11	Exposición grupal
12	Examen de recuperación

Tabla 15. Temporalización de la unidad didáctica (elaboración propia)

A continuación se detalla cada una de las sesiones.

Sesión 1: Introducción y evaluación inicial	
Desarrollo	Prueba de evaluación inicial para valorar el nivel del alumnado (45 min). Introducción a la unidad didáctica (15 min): <ul style="list-style-type: none"> Breve contextualización histórica. Presentación de la estructura de la unidad. Breve debate sobre posibles aplicaciones de los sistemas de ecuaciones en la vida cotidiana.
Contenidos	1.4, 1.6, 1.7
Evaluación	Evaluación inicial.
Objetivos	10
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital, examen de evaluación inicial (impreso) y cuaderno de actividades.
Metodología	Trabajo autónomo durante la realización de la prueba, metodología expositiva y motivadora durante la introducción a la unidad y trabajo interactivo durante el debate final.
Tareas para casa	Actividad 1.1 (para entregar vía Google Classroom).

	Actividades 1.2 y 1.3.
Sesión 2: Sistemas de ecuaciones lineales	
Desarrollo	<p>Corrección de manera grupal de las Actividades 1.2 y 1.3 como repaso general de sistemas de ecuaciones lineales (40 min):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Número de soluciones. • Sistemas equivalentes. • Método de reducción, sustitución e igualación. • Método gráfico. <p>Resolución de la Actividad 2.1 de manera individual. Se trabaja la transición de registro gráfico a registro algebraico (20 min).</p>
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.13
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	1, 3, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital y cuaderno de actividades.
Metodología	Expositiva e interactiva (primera parte de la sesión) y trabajo autónomo (segunda parte de la sesión).
Tareas para casa	Finalizar Actividad 2.1 (para entregar vía Google Classroom). Actividad 2.2.
Sesión 3: Sistemas de ecuaciones no lineales	
Desarrollo	<p>Recordatorio de las diferencias entre sistemas lineales y no lineales mediante ejemplos propuestos tanto por el profesor como por la clase (10 min).</p> <p>Corrección de la Actividad 2.2 colectivamente en la pizarra. Se sigue trabajando el registro gráfico y se resalta para sistemas no lineales la posibilidad de obtener un número de soluciones mayor que uno y distinto de infinito (30 min).</p> <p>Resolución de la Actividad 3.1 de manera individual (20 min).</p>
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.13
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	2, 3, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital y cuaderno de actividades.
Metodología	Expositiva e interactiva (primera y segunda parte de la sesión) y trabajo autónomo (tercera parte de la sesión).
Tareas para casa	Finalizar la Actividad 3.1. Actividad 3.2 (para entregar vía Google Classroom).
Sesión 4: Problemas con sistemas de ecuaciones	
Desarrollo	<p>Corrección de la Actividad 3.1 de manera colectiva (25 min).</p> <p>Resolución de las Actividades 4.1 y 4.2 a modo de ejemplo para la resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones (20 min).</p> <p>Resolución de las Actividades 4.3 y 4.4 de manera individual (15 min).</p>

Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 2.13
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	3, 4, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital y cuaderno de actividades.
Metodología	Expositiva e interactiva (primera y segunda parte de la sesión) y trabajo autónomo (tercera parte de la sesión).
Tareas para casa	Finalizar Actividades 4.3 y 4.4 (las soluciones se facilitarán a través de Google Classroom). Actividad 4.5 (para entregar vía Google Classroom).
Sesión 5: Sistemas de inecuaciones – una incógnita	
Desarrollo	Introducción a los sistemas de inecuaciones con una incógnita mediante la resolución en grupo de la Actividad 5.1. Se muestran las diferentes maneras de expresar la solución del sistema (20 min). Resolución de las Actividades 5.2 y 5.3 por parte del alumnado formando parejas (30 min). Corrección de la Actividad 5.2 de manera colectiva, estableciendo conexión con la unidad de Funciones (10 min).
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.14
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	5, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital y cuaderno de actividades.
Metodología	Expositiva, interactiva y cooperativa.
Tareas para casa	Finalizar la Actividad 5.3.
Sesión 6: Sistemas de inecuaciones – dos incógnitas	
Desarrollo	Corrección de la Actividad 5.3 de manera colectiva y dudas al respecto del ejercicio (20 min). Introducción a los sistemas de inecuaciones con dos incógnitas mediante la resolución en grupo de la Actividad 6.1. Se muestran la representación gráfica de la solución (30 min). Resolución de la Actividad 6.2 por parte del alumnado formando parejas (10 min).
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.14
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	6, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital y cuaderno de actividades.
Metodología	Expositiva, interactiva y cooperativa.
Tareas para casa	Finalizar la Actividad 6.2.
Sesión 7: Problemas con sistemas de inecuaciones	

Desarrollo	Corrección de la Actividad 6.2 de manera colectiva y dudas al respecto del ejercicio (20 min). Resolución en la pizarra de manera colectiva de las Actividades 7.1 y 7.2 a modo de ejemplo (20 min). Resolución individual de las actividades 7.3 a 7.6 (20 min).
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 2.14
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	7, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, pizarra o pizarra digital y cuaderno de actividades.
Metodología	Expositiva e interactiva (primera parte de la sesión) y trabajo autónomo (segunda parte de la sesión).
Tareas para casa	Finalizar Actividades 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6 (se facilitarán las soluciones a través de Google Classroom).
Sesión 8: Representación de sistemas mediante Geogebra	
Desarrollo	Breve explicación sobre el uso básico del software Geogebra y cómo representar funciones con el mismo (15 min). Se forman parejas de alumnos para realizar la Actividad 8.1 mediante Geogebra (30 min). También en parejas, se realiza la Actividad 8.2 (15 min).
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 2.13, 2.14
Evaluación	1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 2.3, 2.4
Objetivos	3, 6, 8, 9
Recursos	Recursos humanos, cuaderno de actividades y ordenadores.
Metodología	Expositiva, cooperativa e interactiva, trabajo con recursos tecnológicos.
Tareas para casa	-
Sesión 9: Examen de la unidad	
Desarrollo	Se dedica la sesión completa a la resolución del examen de la unidad didáctica.
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 2.13, 2.14
Evaluación	1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Recursos	Examen impreso.
Metodología	Trabajo individual y autónomo.
Tareas para casa	-
Sesión 10: Resolución del examen	
Desarrollo	Resolución del examen de la unidad en la pizarra y dudas acerca del mismo (45 min). Debate grupal acerca del desarrollo de la unidad: dificultades halladas tanto en el examen como en la unidad en general, congruencia entre los problemas trabajados en clase y los planteados en el examen, etc. (15 min).

Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 2.13, 2.14
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	9
Recursos	Recursos humanos, pizarra digital o pizarra clásica.
Metodología	Activa, interactiva y cooperativa, tanto en la resolución del examen como en el debate posterior.
Tareas para casa	-
Sesión 11: Exposición grupal	
Desarrollo	La sesión completa se dedica a la exposición de los sistemas preparados durante la Sesión 8 junto con las preguntas correspondientes.
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 2.13, 2.14
Evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 2.3, 2.4
Objetivos	8
Recursos	Pizarra digital.
Metodología	Expositiva (parte de la presentación) e interactiva (turno de preguntas).
Tareas para casa	-
Sesión 12: Examen de recuperación	
Desarrollo	El alumnado que no haya superado el examen de la unidad realizará el examen de recuperación, que estará también a disposición de aquellos estudiantes que deseen mejorar su nota anterior. A quienes no realicen el examen se les proporcionará una serie de puzles y acertijos matemáticos (Actividades 12.1, 12.2 y 12.3).
Contenidos	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 2.13, 2.14
Evaluación	1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4
Objetivos	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Recursos	Recursos humanos, examen impreso y ficha impresa.
Metodología	Trabajo individual y autónomo.
Tareas para casa	-

Tabla 16. Temporalización de la unidad didáctica por sesiones (elaboración propia)

6.11. Evaluación

Los criterios de evaluación correspondientes a cada actividad propuesta en la unidad didáctica se detallaron en el apartado anterior. Dichos criterios, así como los estándares de aprendizaje evaluables, se definen en el Real Decreto 1105/2014 (art. 2).

Los criterios de evaluación se consideran “el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado

debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura”.

En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables, se describen como *“especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables”.*

A continuación se reúnen los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje correspondientes a los bloques 1 y 2 de la asignatura de Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas de 4º de ESO.

Criterios de evaluación	CC	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL CMCT	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT CAA	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y	CCL CMCT CAA	-

probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.		
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT CAA	4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL CMCT CAA SIEP	5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT CAA CSC SIEP	6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT CAA	7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT	8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

		<p>8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.</p> <p>8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.</p>
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT CAA SIEP	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT CAA SIEP	10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT CD CAA	<p>11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.</p> <p>11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.</p> <p>11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.</p> <p>11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.</p>
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL CMCT CD CAA	<p>12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.</p> <p>12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.</p> <p>12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.</p>
Bloque 2. Números y álgebra		

<p>3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.</p>	<p>CCL CMCT CAA</p>	<p>3.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico. 3.2. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado. 3.3. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas. 3.4. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.</p>
<p>4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inequaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.</p>	<p>CCL CMCT CD</p>	<p>4.1. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. 4.2. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inequaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.</p>

Tabla 17. Criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje (fuente: BOE)

La calificación obtenida por cada alumno se calculará mediante el sistema SÉNECA. Dicha plataforma realiza una ponderación asociando un determinado porcentaje de la nota total a cada criterio de evaluación. De esta manera, al evaluar una actividad, se están evaluando implícitamente aquellos criterios asociados a dicha actividad. Por tanto, la calificación asociada a cada criterio se calcula como la media de las calificaciones obtenidas en todas las actividades ligadas a dicho criterio. La nota final de la unidad se calcula mediante la citada ponderación, donde cada criterio de evaluación equivale a un porcentaje del total.

7. CONCLUSIONES

Como objetivo principal del proyecto se estableció la puesta en práctica de todos los conocimientos y aprendizajes adquiridos a lo largo del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Se puede concluir, sin lugar a dudas, que el Trabajo de Fin de Máster es una excelente herramienta para tal fin, así como para conocer la normativa que rige la Educación Secundaria y el Bachillerato y como primer contacto con la actividad docente y el desarrollo de unidades didácticas.

La labor del profesor de Matemáticas no es una tarea fácil; se debe hacer frente, por un lado, a la reticencia inicial por parte del alumnado con respecto a la asignatura y al escaso interés en la misma, además de las numerosas dificultades y obstáculos que presentan durante el aprendizaje. En ese sentido, resulta de gran ayuda el conocimiento de las matemáticas a alto nivel, ya que permite enfocar cada situación o problema desde diferentes prismas. No obstante, es esencial no sólo comprender y controlar la materia, sino ser capaz de transmitirla al alumnado de manera efectiva y significativa, teniendo en cuenta que su nivel de madurez no es el de una persona adulta y considerando que cada estudiante es diferente al resto. Para ello es de gran importancia ponerse en el papel del alumno, entender su pensamiento y forma de razonar o actuar, y de esta manera identificar sus dificultades e incluso anticiparse a ellas.

Asimismo se ha comprobado que la materia de Sistemas de Ecuaciones, análogamente al resto de unidades encuadradas en el bloque de álgebra, es una de las más arduas para el alumnado. Por ello conviene enseñar dicha unidad adecuadamente y saber transmitir la importancia de los sistemas tanto en la vida cotidiana como en la académica, ya sea en otras asignaturas o en cursos superiores de las Matemáticas. En apartados anteriores de este proyecto se identificaban, mediante el análisis de varios artículos de investigación académica, algunos de los obstáculos más habituales que encuentran los alumnos para hacer frente a los sistemas de ecuaciones, así como errores muy frecuentes que se cometen en la enseñanza y en el diseño de libros de texto. En ese aspecto se ha tratado de elaborar una unidad didáctica efectiva y transversal, que favorezca la integración de conocimientos de varias áreas y que permita salvar las dificultades observadas anteriormente, promoviendo aprendizajes más significativos y la transición bidireccional entre los registros verbal, algebraico y gráfico de los sistemas de ecuaciones.

Por último, este último año y varios meses nos han enseñado que la cercanía facilita en gran medida la labor docente. El impacto de la pandemia por COVID-19 ha sido especialmente notorio, entre otros sectores, en la comunidad educativa. La pérdida de

contacto con el alumnado ha sido devastadora en muchos casos, aunque ha abierto la puerta al desarrollo e inclusión de innumerables recursos tecnológicos que, sin duda, se continuarán empleando de ahora en adelante. Como moraleja se puede concluir que la labor docente debe permanecer en actualización constante, adaptándose a la sociedad de manera continua e innovando para salvar las dificultades que se vayan presentando, cosa que es perfectamente factible con profesores cualificados, motivados y dispuestos a mejorar la comunidad educativa.

8. BIBLIOGRAFÍA

A continuación se detalla la bibliografía consultada para la realización del Trabajo Fin de Máster.

8.1. Referencias bibliográficas

- ❖ Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A. y Donaire, J. J. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Ediciones SM.
- ❖ Boyer, C. B. (1968). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.
- ❖ Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M. J., García, R. y Colera, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4*. Anaya Educación.
- ❖ De La Fuente O'Connor, J.L. (1997). *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera*. Editorial Reverté.
- ❖ Fernández–Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las ciencias*, 34 (1), pp. 53–71.
- ❖ Gámez, J. C., Gaztelu, A. M., Loylese, F., Marín, S., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas Enseñanzas Académicas 4º ESO*. Santillana Educación.
- ❖ Morra, J. (2020). *Tema 16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan (Oposiciones Matemáticas)*. Amazon KDP.
- ❖ Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad.
- ❖ Martín Molina, J. C. y González Marí, J. L. (2020). Elementos del análisis histórico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas consecuencias didácticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(1), pp. 12–21.
- ❖ Martínez De La Rosa, F. y Sáez Martínez, S. M. (2014). Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato. *Números*, 85, pp. 41–48.
- ❖ Página Web José Luis Lorente (8 de abril 2021). *TEMA 16. Discusión Y Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Teorema de Rouché. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan*. <http://www.joseluislorente.es/academia/temas/TEMA%2016.pdf>
- ❖ Segura, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 7 (1), pp. 49–78.

8.2. Marco normativo

- ❖ Circular de 24 de abril de 2020 de la Dirección General de Atención a la Diversidad, Participación y Convivencia Escolar por la que se dictan instrucciones para la

adaptación del proceso de detección e identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE) y organización de la respuesta educativa.

- ❖ Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía (BOJA 28-06-2016).
- ❖ Decreto 182/2020, de 10 de noviembre, por el que se modifica el Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía (BOJA 16-11-2020).
- ❖ Decreto 327/2010, de 13 de julio, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria.
- ❖ Instrucción 9/2020, de 15 de junio, de la Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que imparten Educación Secundaria Obligatoria.
- ❖ Instrucciones de 8 de marzo de 2017, de la Dirección General de Participación y Equidad, por las que se actualiza el protocolo de detección, identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa.
- ❖ Instrucciones de 12 de mayo de 2020, de la Dirección General de Atención a la Diversidad, Participación y Convivencia Escolar, por las que se regula el procedimiento para la aplicación del protocolo para la detección y evaluación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades intelectuales.
- ❖ Orden de 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía.
- ❖ Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.
- ❖ Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- ❖ Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se Modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- ❖ Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa.
- ❖ Real Decreto 310/2016, de 29 de julio, por el que se regulan las evaluaciones finales de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato.
- ❖ Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

ANEXO I. ACTIVIDADES

A continuación se incluyen las actividades a realizar durante el desarrollo de la unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones.

Prueba de evaluación inicial

Ejercicio 1

- ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de dos ecuaciones lineales?
- ¿Qué significa que dos sistemas sean equivalentes?
- Menciona los métodos que conozcas para resolver un sistema de ecuaciones lineales y explica brevemente en qué consiste cada uno.

Ejercicio 2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, si es posible empleando un método diferente para cada uno:

$$a) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad c) \begin{cases} z - 5 = t \\ t + 2z = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 3

Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4

Observa el siguiente sistema de ecuaciones y trata de resolverlo. ¿Cuántas soluciones tiene? ¿En qué se diferencia de todos los sistemas anteriores?

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ y^2 + 3x = 10 \end{cases}$$

Actividades ordinarias

Actividad 1.1. Investigación histórica.

¿Qué civilizaciones emplearon sistemas de ecuaciones en la antigüedad? ¿Para qué los utilizaban? ¿Qué matemáticos realizaron aportaciones a la investigación de los sistemas de ecuaciones? ¿Por qué otras hazañas fueron conocidos esos matemáticos?

Actividad 1.2.

- ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales? Pon un ejemplo para cada caso y represéntalo gráfica y algebraicamente.

- ¿Qué son los sistemas equivalentes? Pon un ejemplo y represéntalo gráfica y algebraicamente.
- ¿Qué métodos conoces para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales? ¿En qué consiste cada uno?

Actividad 1.3.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones algebraicamente y gráficamente.

$$a) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = -6 \end{cases}; b) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}; c) \begin{cases} x = y + 3 \\ 2x - 6 = 2y \end{cases}$$

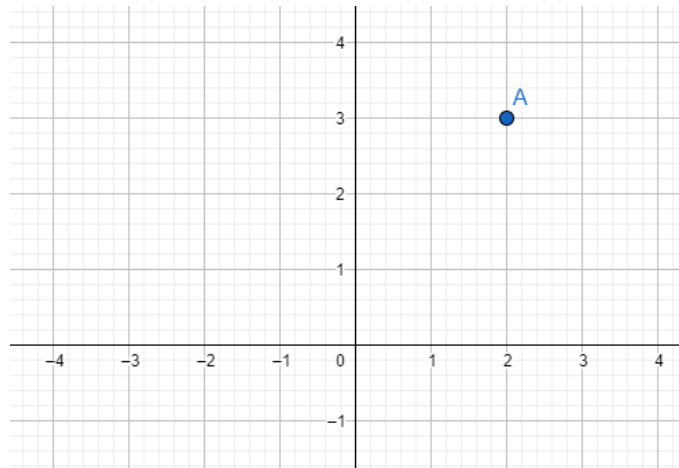
$$d) \begin{cases} z + 5 = t \\ t + 2z = -4 \end{cases}; e) \begin{cases} 2x = 4 - 2y \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Propón un sistema que sea equivalente al sistema *b*).

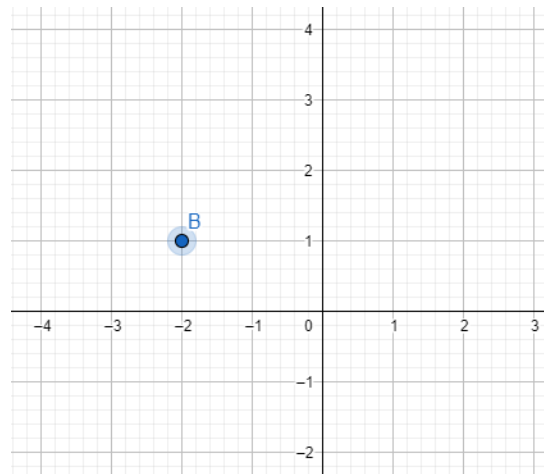
Actividad 2.1. Virus libre en el laboratorio

En un laboratorio de investigación bioquímica se ha derramado un bote de ensayos por error, liberando un peligroso virus por toda la estancia. Por suerte existe un sistema de protección formado por dos pistolas láser que son capaces de eliminarlo. Sin embargo, el virus es tan potente que para neutralizarlo completamente hay que apuntar con las dos pistolas a la vez.

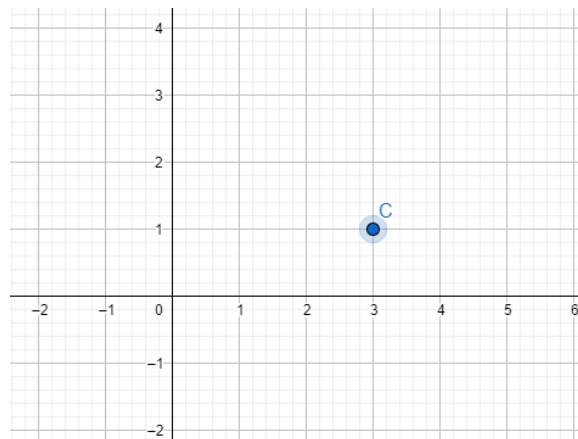
- a) Si el virus está situado en el punto A del laboratorio, ¿qué dos rayos podrían utilizarse para neutralizarlo? Dibuja al menos dos ejemplos en la gráfica y represéntalos también mediante su expresión algebraica.



- b) Si el virus se encuentra ahora sobre el punto B, una pistola se sitúa sobre el punto (-3,0) y la otra se sitúa sobre el punto (-4,2), dibuja los rayos necesarios para eliminar el virus y escribe su representación algebraica.



- c) Si el virus se encuentra ahora sobre el punto C y disparamos con la primera pistola desde el punto (2,-1), dibuja y escribe dos rayos de la segunda pistola que no serían válidos para eliminar el virus.



Actividad 2.2.

A continuación se dan tres parejas de funciones; cada pareja está formada por una recta y una parábola.

Pareja	Recta	Parábola
A	$y = 2x + 3$	$y = 3x - x^2 + 5$
B	$2y + 2x = 1$	$y = x^2 - 3x + 2$
C	$y = 2x - 2$	$y = x^2 - 1$

Averigua en qué coordenadas se cortan ambas funciones en cada caso, empleando un gráfico y también de manera algebraica.

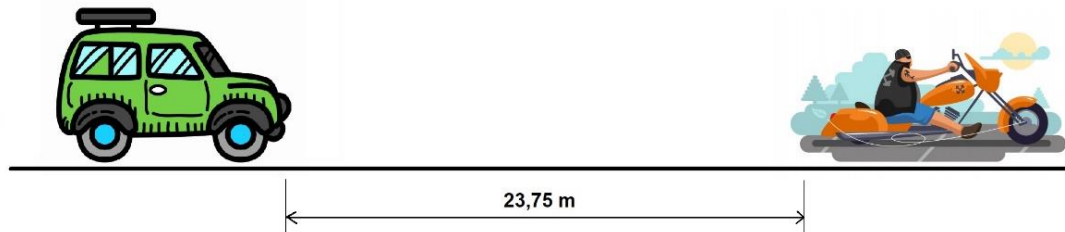
Actividad 3.1.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left. \begin{array}{l} x - 1 = 2y \\ \sqrt{x + y} = 2 \end{array} \right\}; \quad b) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{array} \right\}; \quad c) \left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ y = x^3 - 3x + 1 \end{array} \right\}; \quad d) \left. \begin{array}{l} xy = 4 \\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{y} - \frac{3}{x} \end{array} \right\}$$

Actividad 3.2. La motocicleta amarilla

Un conductor que viaja en coche avista una moto amarilla varios metros por delante de él. Al recordar que su mejor amigo tiene una Honda muy parecida, se pregunta si será él quien la conduce.



El coche avanza a una velocidad constante de 20 m/s . La motocicleta, por otro lado, avanza a 8 m/s , aunque en el momento del avistamiento el conductor comienza a acelerar a un ritmo de 2 m/s^2 . Se sabe además que en ese instante la moto se encontraba $23,75 \text{ m}$ por delante del coche.

¿Será el conductor del coche capaz de reconocer al motorista pasando por su lado?

En caso de cruzarse, ¿lo harán sólo una vez? ¿En qué momento y a qué distancia?

Describe la situación de ambos vehículos en cada momento: qué es lo que ocurre, quién va por delante, etc.

Recordatorio.

Expresión para calcular el espacio avanzado por un vehículo que acelera:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Expresión que relaciona la velocidad y el tiempo (para velocidad constante):

$$v = \frac{s}{t}$$

Actividad 4.1.

Para contratar la tarifa de internet hemos consultado a dos operadoras diferentes: Mega-Móvil y Telefonéame. Mega-Móvil cobra una cuota fija de 5 € al mes y un extra de 1 € por cada GB consumido. Telefonéame, por otro lado, ofrece una cuota fija de 8 € más un coste adicional de $0,5 \text{ €}$ por cada GB consumido.

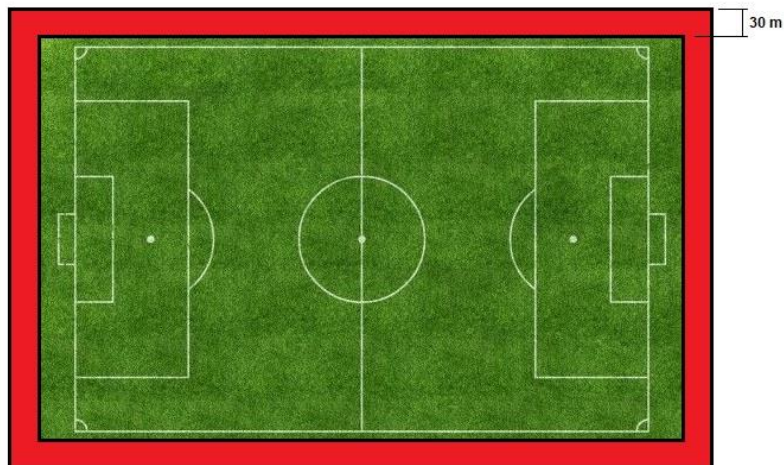
Representa gráficamente el precio de cada tarifa en función de los GB consumidos.

¿Cuántos GB tendremos que consumir en un mes para que ambas compañías nos cobren lo mismo? ¿Cuánto sería el coste total en ese caso?

Comprueba la solución de manera algebraica.

Actividad 4.2.

El Real Jaén Club de Fútbol quiere calcular las dimensiones de su estadio para un estudio urbanístico de ampliación. Se sabe que el área contando sólo el terreno de juego es de 6.500 m^2 , y si se tienen en cuenta las gradas que lo rodean asciende a 20.000 m^2 . Teniendo en cuenta que el ancho de las gradas es de 30 metros en todo el estadio, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

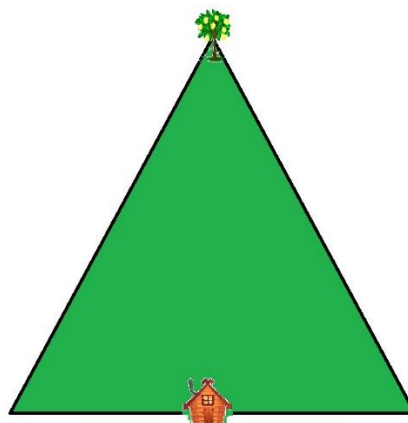


Actividad 4.3.

Hace unos años Marcos heredó de su abuelo una parcela de terreno muy fértil repleta de árboles frutales. Tiempo más tarde, viendo que no tiene tiempo para aprovecharla y que la tierra va a echarse a perder, ha decidido venderla. Para poner un anuncio en internet quiere calcular las dimensiones que tiene la propiedad.

Se sabe que la parcela tiene forma de triángulo isósceles, y que justo en la mitad del lado desigual se construyó una pequeña chabola para guardar herramientas. Según contaba el abuelo, la distancia desde la chabola hasta el limonero que hay en el vértice opuesto del terreno es de 12 metros. Además, se sabe que para cercar toda la superficie del campo se necesitaron 40 metros de verja metálica.

¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?



Actividad 4.4.

Para llenar una piscina se dispone de dos tuberías de diferente tamaño. La primera tubería en solitario tarda en llenar la piscina el doble que la segunda. No obstante, si se abren ambos grifos simultáneamente, la piscina se llena en 10 minutos.

¿Cuánto tarda cada tubería por separado en llenar la piscina?

Actividad 4.5. Inventa tu propio problema

A continuación se muestran varios sistemas de ecuaciones representados en lenguaje algebraico. Trata de inventar, para cada uno de ellos, el enunciado de un problema que pueda resolverse mediante dichos sistemas.

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 55 \\ x + 3y = 32 \end{cases}; b) \begin{cases} xy = 12 \\ 2x + 2y = 25 \end{cases}; c) \begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - y = 35 \end{cases}$$

Actividad 5.1.

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución de diferentes maneras:

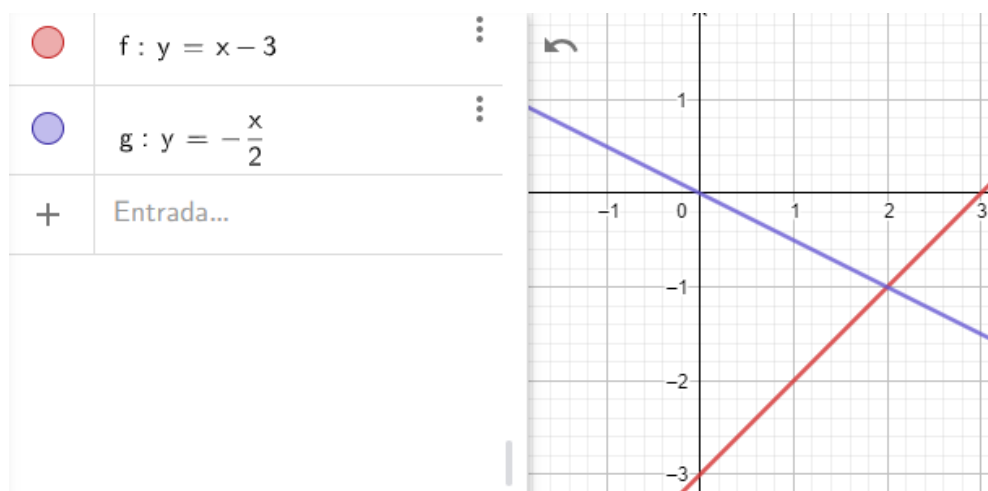
$$a) \begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x^2 \leq 9 \end{cases}; b) \begin{cases} 4 + x \leq 6 \\ 3 < 1 - 2x \end{cases}; c) \begin{cases} \frac{4 - 3x}{2} < 1 \\ 2 \geq \frac{4}{3} + x \end{cases}; d) \begin{cases} 4 - 2x < 3 \\ 5x + 6 \geq x^2 \end{cases}$$

En el apartado a), indica si los valores $x = -3$, $x = 2$ y $x = 3$ son solución del sistema.

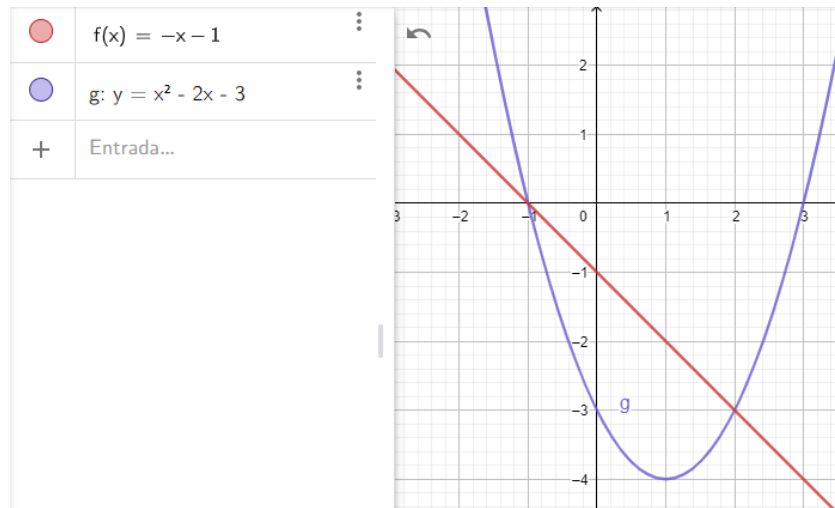
Actividad 5.2.

Observa las siguientes gráficas y, sin resolver las inecuaciones, responde:

a) ¿Para qué valores de x se cumple $x - 3 > -x/2$?



b) ¿Para qué valores de x se cumple $-x - 1 \geq x^2 - 2x - 3$?



¿Qué conclusiones podrías sacar de las gráficas e inecuaciones anteriores?

Actividad 5.3.

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución de diferentes maneras:

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x < 4 - x - x^2 \\ 18 \geq 2x^2 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} 9 - 5x < 1 \\ 4 + x \leq \frac{x}{3} + 2 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} 2(x + 3) > x + 6 \\ 2x - 7 \leq 3 \end{array} \right\}; d) \left. \begin{array}{l} 7x \leq x + 8 \\ 3 + \frac{x}{4} \geq \frac{10}{3} \end{array} \right\}$$

Actividad 6.1.

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución gráficamente en el plano:

$$a) \left. \begin{array}{l} x > y \\ -y \leq 2x - 3 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \leq y \\ x - y > -2 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} y - 3x > -2 \\ -8 + 2y \leq 6x \end{array} \right\}$$

Para el apartado a), indica si los puntos (3,3) – (1,1) – (2,-1) son solución del sistema y justifícalo tanto gráficamente como algebraicamente.

Actividad 6.2.

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución gráficamente en el plano:

$$a) \left. \begin{array}{l} y \geq -2 \\ x - 2y \leq 2 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} y - 5 < -x^2 \\ x^2 - 3 \leq y \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} x > y \\ x + 3 < y \end{array} \right\}; d) \left. \begin{array}{l} y < \frac{x}{3} \\ 4 - y \geq x \\ 5x > 3y - 12 \end{array} \right\}$$

Actividad 7.1.

Tenemos un listón de madera de 120 cm de largo. Al intentar medir su longitud con palmos de la mano, he descubierto que con 5 palmos me quedo corto, pero con 6 me paso de largo. ¿Cuánto mide el palmo de mi mano?

Actividad 7.2.

Tus padres están pensando en comprar un coche nuevo y una plaza de garaje para aparcarlo, pero no quieren gastar más de 35.000 € en total entre las dos cosas. Por otro lado, para que ambos desembolsos no sean muy desparejos, han determinado que el coche no debe ser 5.000 € más caro que el aparcamiento. ¿Cuál es el rango de precios que pueden gastar tanto para el coche como para el parking? Representa las condiciones de manera gráfica, señalando la región solución que cumple todos los requisitos.

Actividad 7.3.

Alberto está buscando trabajo como comercial para vender coches y, tras acudir a varias entrevistas, ha recibido dos ofertas de trabajo de concesionarios que están interesados. Por un lado, Renault le ofrece un sueldo fijo de 1.200 € al mes y un extra de 200 € por cada coche vendido. Por otro lado, Ford le propone un sueldo fijo de 1.500 € al mes más un plus de 150 € por vehículo vendido.

¿Cuántos coches debe vender para que le sea más beneficioso trabajar en Renault?
¿Y para ganar más dinero trabajando en Ford?

¿Existe alguna situación en la que le diese igual trabajar en un concesionario u otro?
¿Qué cantidad de coches tendría que vender para ganar lo mismo en cualquiera de los dos trabajos? ¿Cuánto sería el sueldo para ese número de coches vendidos?

Actividad 7.4.

La orquesta de vuestro pueblo está formada por hombres y mujeres de diferentes edades, aunque no sabéis la cantidad exacta de integrantes que hay. Echando cuentas en el último concierto, calculasteis que el número de mujeres es al menos el doble que el número de hombres. Además, según los registros del secretario, el número total de músicos no llega a 51. ¿Cuál es el número máximo de hombres que tiene la orquesta?

Representa gráficamente las posibles soluciones del problema, señalando el área que cumple todas las condiciones, y nombra tres posibles parejas (Nº de hombres – Nº de mujeres) que sean válidas.

Actividad 7.5.

Determina el lado de un cuadrado cuya área sea inferior a 16 cm^2 y cuyo perímetro no sea inferior a 10 cm.

Actividad 7.6.

Estamos construyendo una casa y el arquitecto nos ha pedido que concretemos el diseño del jardín. Tenemos claro que queremos una parcela de césped de al menos 50 metros cuadrados. Además, queremos que sea más ancho que largo, pero que la

anchura no supere el 150% de la longitud. ¿Qué dimensiones podrá seleccionar el arquitecto para el diseño del jardín? Representa las posibles soluciones mediante una gráfica y señala la región que cumple todas las condiciones.

Actividad 8.1

Representa los siguientes sistemas mediante Geogebra e indica cuál es su solución:

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 6 \\ x = 3 - 3y \end{array} \right\}; \quad b) \left. \begin{array}{l} x^2 - 4x = y + 7 \\ y - x = -1 \end{array} \right\}; \quad c) \left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 3x \\ 2x - 7 < 0 \end{array} \right\}; \quad d) \left. \begin{array}{l} xy < 10 \\ 2x \geq 5y \\ y + 8 > 2x \end{array} \right\}$$

Actividad 8.2

Inventa un sistema de ecuaciones o inecuaciones, represéntalo mediante Geogebra e indica su solución. Deberás exponer ante la clase el proceso de resolución y el porqué de la solución. Además, deberás preparar dos preguntas acerca del sistema para plantear a tus compañeros.

Actividad 12.1. La lechuga, la oveja y el lobo

Un granjero volvía a casa al terminar la jornada junto con un lobo, una oveja y una lechuga. Al llegar al río que había frente a su caserío, se dio cuenta de que en la chalupa sólo había dos plazas; es decir, en cada viaje sólo podían embarcar el propio granjero y un acompañante. El problema es el siguiente: si el lobo se queda solo con la oveja en un lado del río, se la comerá; además, si la oveja se queda sola con la lechuga en un lado del río, también se la comerá. ¿Qué viajes debe hacer el granjero a un lado y otro del río para asegurarse de que sus tres acompañantes cruzan sanos y salvos?

Actividad 12.2. Las doce monedas

Un coleccionista ha adquirido un lote de 12 monedas antiquísimas de la época del Imperio Romano, de las cuales sabe que 11 son auténticas y una es falsa, y quiere averiguar cuál. Teniendo en cuenta que la réplica tiene un peso diferente al resto, ¿cómo hará para identificarla utilizando una balanza de dos brazos y pudiendo realizar sólo tres pesadas?

Actividad 12.3. Sudoku

Resuelve el siguiente sudoku. Para ello debes ir completando cada casilla con un número del 1 al 9, de tal manera que ningún número se repita dentro de la misma fila, dentro de la misma columna o dentro del mismo cuadrado.

7			8	3		5
		5		7	3	
	4			6		2
5						1
	6	4			2	9
2						6
	7			2		8
		8		3	6	
6			4	9		7

Actividades de refuerzo

Además de las actividades ordinarias se incluyen las siguientes actividades de refuerzo, ideadas para aquellos alumnos que tengan dificultades para seguir el ritmo de las clases o para aquellos que quieran afianzar o repasar conceptos.

Actividad R.1

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de reducción, igualación y sustitución respectivamente, y también de manera gráfica:

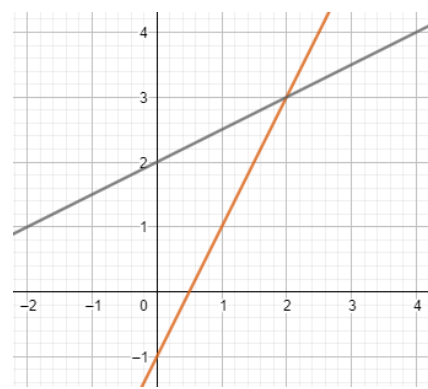
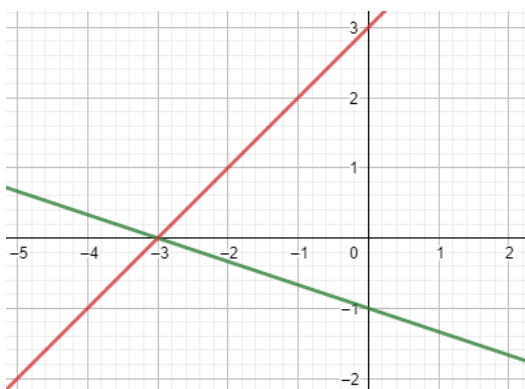
$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - 3x = 2 \end{cases}; b) \begin{cases} y = x - 3 \\ y + 5 = 2x \end{cases}; c) \begin{cases} 5 - 3y = 2x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Comprueba que las soluciones obtenidas son correctas.

Propón tres sistemas equivalentes a cada uno de los anteriores, uno equivalente a a), otro para b) y otro para c).

Actividad R.2

Indica cuál es la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones y exprésalos algebraicamente, comprobando que la solución es correcta:



Actividad R.3

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba que las soluciones obtenidas son correctas:

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} xy = 6 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{array} \right\}$$

Actividad R.4

Antonio está ayudando a su padre a contar la recaudación semanal de la pescadería, aunque han tenido un despiste y no recuerdan cuántos billetes y monedas había de cada tipo. En la caja había en total 70 unidades, entre billetes de 5 € y monedas de 2 €. Además, la recaudación total era de 653 €. ¿Cuántas monedas y billetes hay?

Actividad R.5

El jardín frente a la oficina en la que trabaja tu padre es de forma rectangular y tiene una superficie de 8 m^2 . Sabiendo que el lado largo mide 2 metros más que el corto, ¿cuáles son las dimensiones del jardín? ¿Hay una sola respuesta para el problema? ¿Has descartado alguna solución? ¿Por qué?

Actividad R.6

Observa las siguientes expresiones algebraicas. ¿Son ecuaciones? ¿Cuántas incógnitas tienen?

Trata de resolverlos, representando la solución de distintas formas y comprueba que dicha solución es correcta:

$$a) \left. \begin{array}{l} 3 - x > 1 \\ 1 \leq x + 5 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} 2(x - 1) \geq -2 \\ x^2 - 2 \leq 7 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + 1 \leq 4 \\ 5 > x + 3 \end{array} \right\}; d) \left. \begin{array}{l} 4x + 2 > 6 \\ 3 - 2x \geq 3x - 5 \end{array} \right\}$$

Actividad R.7

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones, representando la solución gráficamente y señalando la región del plano que cumple todas las condiciones:

$$a) \left. \begin{array}{l} 4 - y > x \\ 2x - y \leq 3 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} 3 \geq y - x \\ x^2 - 2x - 3 < y \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} 2y - x < 0 \\ 2x + 3 < y \end{array} \right\}$$

Actividad R.8

Para comprar una cafetera de 148 €, al sacar la billetera has comprobado que con 7 billetes no te llega, pero con 9 sí. ¿De qué valor son los billetes que llevas en la cartera?

Actividad R.9

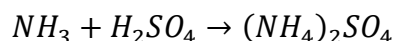
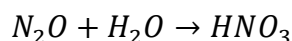
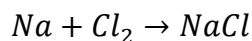
Miguel y yo pesamos entre los dos más de 130 kg. Sabiendo, además, que Miguel pesa más que yo, ¿en qué rango de peso nos encontramos los dos? Representa la región válida de manera gráfica y menciona tres posibles soluciones.

Actividades de ampliación

Este conjunto de tareas se incluye de cara a aquellos alumnos que dominen los conceptos y actividades resueltos en el aula con facilidad y decidan ir un paso más allá con ejercicios más complejos, para mantener su interés y motivación activos.

Actividad A.1

Ajusta las siguientes reacciones químicas empleando sistemas de ecuaciones:



Actividad A.2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left. \begin{array}{l} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} x^3 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 1 \\ 9 + y = x \end{array} \right\}$$

Actividad A.3

El vestíbulo del ayuntamiento de Valdepeñas es rectangular y tiene un área de 8 m². El alcalde se está planteando hacer una remodelación para ampliar la estancia, y el arquitecto le ha dicho que alargando uno de los lados en 1 metro y el otro en 2 metros, el área total aumentará en 5 m². ¿Cuáles son las dimensiones actuales del vestíbulo?

Actividad A.4

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones representa la solución de diferentes maneras:

$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{4}{x^2 - 9} < 0 \\ 5x - 3 \leq 5 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} 3x - 5 > 4 \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} \geq 1 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x^2 + 2x} \geq 0 \\ \frac{x}{3} - 1 < 1 \end{array} \right\}$$

Actividad A.5

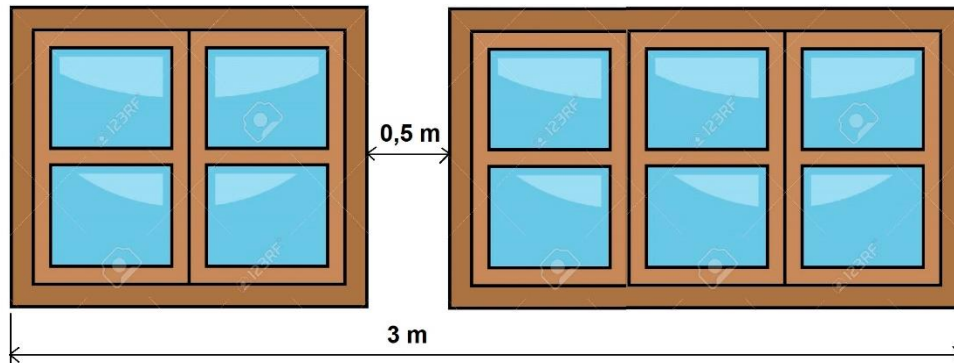
Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución gráficamente:

$$a) \left. \begin{array}{l} y < \frac{2}{x} \\ x + 1 \geq y \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} y^2 < x + 4 \\ x < 2 + y \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} xy \leq 6 \\ y - 4 < 2x \\ y < x \end{array} \right\}$$

Actividad A.6

Vuestra vecina ha decidido cambiar las ventanas de casa para poner unos cristales nuevos de PVC que mantengan mejor el calor en el interior. Una de las ventanas es

cuadrada y la otra rectangular. Además están perfectamente alineadas a la misma altura de la pared, y la altura de la ventana rectangular es igual al lado de la ventana cuadrada. Si el área total ocupada por las ventanas no puede ser superior a 2 m^2 , y el tramo de pared disponible es de 3 metros de largo, ¿qué tamaños de ventana puede elegir nuestra vecina? Importante tened en cuenta que las ventanas están separadas entre sí medio metro.



Examen de la unidad

Ejercicio 1 (1 pt)

- a) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico y otro método que tú elijas:

$$a) \begin{cases} y - 2x = -2 \\ 6 - 2y = x \end{cases}$$

- b) Propón un sistema equivalente al anterior.

Ejercicio 2 (2 pt)

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} xy + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}; b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (1,5 pt)

En el barrio donde vives suele haber dos taxistas, Fran y José. Fran cobra una cuota fija de 5 € por la carrera, además de 1,5 € por cada kilómetro recorrido. José, en cambio, cobra una cuota fija de 8 € por la carrera, aunque cobra a 1 € el kilómetro recorrido. Calcula los kilómetros que deberíamos recorrer en taxi para que el precio de Fran y José sea el mismo.

Ejercicio 4 (2 pt)

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$a) \left. \begin{array}{l} 3x - 4 < 2 \\ 3 \leq \frac{x}{2} + 5 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} x^2 - 5 < 0 \\ 5 \leq 2x + 7 \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} 1 + \frac{x}{2} > 3 \\ 4 \leq 2x - 1 \end{array} \right\}$$

Ejercicio 5 (1,5 pt)

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones y representa la solución gráficamente:

$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{y}{2} < 1 \\ -6 + x \leq 2y \end{array} \right\}$$

Ejercicio 6 (2 pt)

En una clase de Bachillerato hay más del doble de estudiantes morenos que de rubios. En la última semana de curso se celebró una fiesta a la que acudieron la mitad de los morenos de la clase y todos los rubios menos uno; además, acudieron 3 personas invitadas que también eran morenas. Sabiendo el número de morenos en la fiesta era superior al número de rubios, ¿cuántos morenos y rubios podría haber dentro de la clase? Representa la solución gráficamente.

Examen de recuperación

Ejercicio 1 (1,5 pt)

- a) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método gráfico y otro método que tú elijas:

$$a) \left. \begin{array}{l} 6 = 2y - x \\ 3 - x = y \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} x = \frac{y}{2} + 1 \\ y = 2x \end{array} \right\}$$

¿En qué se diferencian?

- b) Propón un sistema equivalente al sistema a).

Ejercicio 2 (2 pt)

- a) ¿En qué se diferencia un sistema no lineal de un sistema lineal? ¿Cuántas soluciones pueden tener los sistemas no lineales?
- b) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left. \begin{array}{l} xy = -8 \\ x = 2 - y \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ xy = 4 \end{array} \right\}$$

Ejercicio 3 (1,5 pt)

Para contratar la luz en tu nueva casa has consultado a dos compañías: Iluminados y Maxi-Luz. La primera te ofrece una cuota fija de 25 € más 15 céntimos por kWh consumido. La segunda cobra 35 € de cuota fija, pero vende cada kWh a 10 céntimos.

¿Qué cantidad de kWh debemos consumir para que ambas compañías nos cobren lo mismo? ¿De cuánto será la factura en ese caso?

Ejercicio 4 (2 pt)

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución de diferentes maneras:

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x - 3 > 0 \\ 7 - x \geq 2 \end{array} \right\}; b) \left. \begin{array}{l} 1 + \frac{x}{3} \leq 4 \\ -3 < 5 - 2x \end{array} \right\}; c) \left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ 2 \geq \frac{5}{6} + x \end{array} \right\}$$

Ejercicio 5 (1,5 pt)

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones y representa la solución gráficamente en el plano:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y \leq 6 \\ 2y + 2 < x \end{array} \right\}$$

Ejercicio 6 (1,5 pt)

En un equipo de fútbol de liga amateur no puede haber inscritos más de 20 jugadores. Si el equipo que va primero en el campeonato fichase 4 jugadores diestros, habría más del doble de diestros que de zurdos en el equipo. ¿Cuántos jugadores diestros y zurdos podría haber en el equipo? Representa la solución gráficamente y da tres combinaciones posibles de la cantidad de zurdos y diestros.