



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

**INTRODUCCIÓN A LA
GEOMETRÍA ANALÍTICA.
EN BUSCA DE UN ENFOQUE
NO RUPTURISTA**

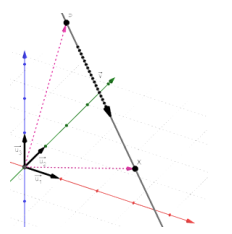
Alumno/a: Pérez Eguíluz, Víctor

Tutor/a: Prof. D. Ildefonso Castro López
Dpto: Matemáticas. Área de Geometría y topología.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. EN BUSCA DE UN ENFOQUE NO RUPTURISTA

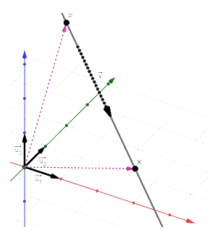
VÍCTOR PÉREZ EGUÍLUZ

JAÉN, JUNIO DE 2021

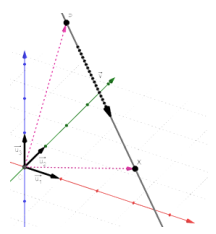


Índice

Resumen.....	5
Abstract	5
Índice de tablas y figuras.....	6
1. Introducción	9
2. Objetivos	9
3. Fundamentación curricular	11
3.1. Matemáticas Académicas en el currículo de 4º de la ESO	11
3.2. Temporalización del bloque de Geometría y sus unidades didácticas en la Asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO.	14
3.3. Recursos y materiales a disposición del profesorado en los libros de texto para la unidad de Geometría Analítica	17
4. Fundamentación epistemológica. Desarrollo del tema 51: Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines....	24
4.1. Sistemas de referencia en el plano y en el espacio	24
4.2. La recta en el plano. Ecuaciones.....	28
4.3. La recta en el espacio. Ecuaciones.....	32
4.4. El plano en el espacio. Ecuaciones	33
4.5. Relaciones afines de rectas y planos	35
5. Fundamentación didáctica. Investigaciones sobre aprendizaje y la enseñanza..	41
5.1. ¿Qué es el autismo temático?	41
5.2. El caso de la Geometría	43
5.3. De la Geometría Sintética en la ESO a la Geometría Analítica en el Bachillerato	44
5.4. <i>GeoGebra</i> , una herramienta para este objetivo	48



6. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica.....	51
6.1. Título	51
6.2. Justificación.....	51
6.3. Contextualización del centro y del aula.....	52
6.4. Objetivos	54
6.5. Competencias clave	57
6.6. Contenidos	58
6.7. Temporalización.....	60
6.8. Metodología.....	61
6.9. Actividades y recursos	63
6.10. Atención a la diversidad	65
6.11. Evaluación	67
6.12. Desarrollo pormenorizado de las sesiones.....	70
 7. Conclusiones	 74
 8. Referencias bibliográficas	 76
 Anexo I: Proyecto de levantamiento digital 3D del centro.....	 78
Anexo II: Formato de clase invertida	82
Anexo III: Actividades gamificadas	84



Resumen

La Geometría Analítica es una rama de las Matemáticas que se empieza a aprender en 4º de la ESO, en un momento en que la Geometría deja de verse desde exclusivamente desde un enfoque sintético, basado en las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, para introducir un lenguaje algebraico que defina estos objetos en términos de lugares geométricos sobre un sistema de referencia dado.

Tradicionalmente este salto produce una ruptura y un gran aislamiento con respecto al resto de ramas de las Matemáticas que no es tal, debido a la abstracción y a la dificultad para comprender su aplicabilidad.

El presente Trabajo Fin de Máster afronta este hecho tratando de buscar las herramientas con las que diseñar una unidad didáctica, a la vez que integra y lleva a la práctica los saberes aprendidos en este curso académico.

El perfil psicopedagógico del alumnado de este nivel educativo –en plena adolescencia y en un momento en el que se define su trayectoria posterior-, sus heterogéneas necesidades fruto de una multitud de factores como el entorno familiar, las dinámicas que se crean en los grupos y el contexto de un centro concreto conforman el resto del escenario en el que deberemos realizar nuestra labor docente, y desarrollar esta unidad en particular.

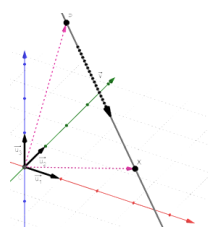
Abstract

Analytical geometry is a mathematical subject that begins to be learnt during the 4th year of ESO, at a time when Geometry is no longer seen exclusively from a synthetic approach based on the properties of geometric figures and bodies, to introduce an algebraic language that defines these objects in terms of geometric places given a coordinate system.

Traditionally, this step produces a break and a great isolation with respect to the rest of the mathematical fields, which should not be the case, due to abstraction and difficulty in understanding its applicability.

The present master's thesis addresses this fact by trying to find the tools to design a teaching unit, while integrating and putting into practice the knowledge learned during this academic year.

The psychopedagogical profile of the students of this educational level –in full adolescence and at a time when their subsequent career is being defined-, their heterogeneous needs as a result of a multitude of factors such as the family environment, the dynamics that are created in the groups and the context of a specific center, they all constitute the scenario in which we will have to carry out our teaching work, and develop this particular unit.



Índice de tablas y figuras

TABLAS

Tabla 3.1. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Geometría, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO.

Tabla 3.2. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO.

Tabla 3.3 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES Az-Zait (Jaén). Fuente: Programación del departamento 2020-2021, elaboración propia.

Tabla 3.4 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES San Blas (Aracena). Fuente: Programación del departamento 2016-2017, elaboración propia.

Tabla 3.5 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES Juan Goytisolo (Carboneras). Fuente: Programación del departamento 2017-2018, elaboración propia.

Tabla 3.6 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES Cástulo (Linares). Fuente: Programación del departamento 2020-2021, elaboración propia.

Tabla 3.7 Análisis comparativo de los contenidos y su enfoque, tal y como lo ofrecen los libros de texto de las editoriales ANAYA y SM. En rojo las diferencias significativas. Fuente: elaboración propia.

Tabla 3.8. Análisis comparativo de los ejercicios, tal y como lo ofrecen el libro de texto de la editorial SM. Fuente: elaboración propia.

Tabla 3.9. Análisis comparativo de los ejercicios, tal y como lo ofrecen el libro de texto de la editorial ANAYA. Fuente: elaboración propia.

Tabla 3.10 Análisis del grado de significación de las tareas donde se puede aplicar la modelización matemática en los libros de texto de ANAYA y SM. Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.1. Objetivos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Tabla 6.2. Objetivos de la materia Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Tabla 6.3. Objetivos específicos de la unidad: “Incorporamos la Geometría Analítica”. Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.4. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Geometría, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO, a desarrollar por esta unidad.

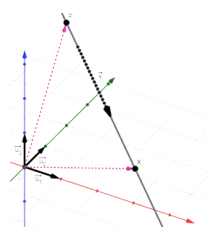
Tabla 6.5. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO, a desarrollar por esta unidad.

Tabla 6.6 Temporalización y organización de los contenidos del curso. Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.7 Temporalización de las sesiones de esta unidad didáctica (ver desglose pormenorizado en apartado 6.12). Fuente: elaboración propia

Tabla 6.8 Rúbrica para la evaluación de la Unidad y conexión con el proceso de calificación en la evaluación sumativa. Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.9 Desarrollo pormenorizado de cada sesión y conexión con el currículo y las estrategias metodológicas empleadas. Fuente: elaboración propia.



FIGURAS

Figura 4.1. Interpretación geométrica en el plano de la composición de vectores mencionada en el corolario. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.2. Interpretación geométrica en el plano de la propiedad mencionada. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.3. La recta queda definida por un punto y un vector director. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.4. La ecuación segmentaria permite identificar fácilmente los puntos de corte con los ejes. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.5. La recta en el espacio también queda definida por un punto y un vector director. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.6. La ecuación segmentaria del plano permite identificar fácilmente los puntos de corte con los ejes. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.7. Dos rectas paralelas. En este caso el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ no será proporcional a $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Figura 4.8. Posiciones relativas de 3 rectas en el plano. Fuente: elaboración propia.

Figura 4.9. Posiciones relativas de 3 planos en el espacio. Fuente: elaboración propia.

Figura 5.1. Ejemplificación de la jerarquía de niveles de codeterminación de Chevallard adaptada al caso que nos ocupa. Fuente: elaboración propia.

Figura 5.2. Agentes implicados y barreras que afectan a la interconexión de la jerarquía de niveles de codeterminación. La potencial actuación del profesorado, no exime de la corresponsabilidad del resto de agentes. Fuente: elaboración propia.

Figura 5.3. Adaptación del esquema de modelización matemática propuesto por Treffers (1987) y Maaß (2006a) a la interrelación mutua de la Geometría Sintética y la Analítica. Fuente: elaboración propia.

Figura 5.4. Planteamiento y resolución sintética del problema. Fuente: elaboración propia con *GeoGebra*.

Figura 5.5. Ilustración de la solución analítica del problema. Fuente: elaboración propia con *GeoGebra*.

Figura 5.6. Ilustración de la forma de ver el problema anterior en función del parámetro variable de las coordenadas del punto. Fuente: elaboración propia con *GeoGebra*.

Figura A.1. Ámbito objeto de estudio, la manzana en la que se ubica el centro SAFA Linares. Fuente: imagen de *Google Maps*, elaboración propia.

Figura A.2. Algunas de las condiciones para la captura de fotos aéreas. Fuente: *aerial-insights.co*.

Figura A.3. Ejemplo de uno de los vídeos y sus preguntas de las sesiones de clase invertida. Fuente: *Susi, profe (Youtube)*, elaboración propia de cuestionario con *Edpuzzle*.

Figura A.4. Captura de la aplicación “Dibujar rectas mediante ecuaciones con Scratch”. Se trata de una sencilla interfaz en la que introducir la ecuación de la recta. Fuente: *Scratch (mit.edu)*.

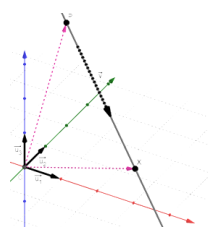
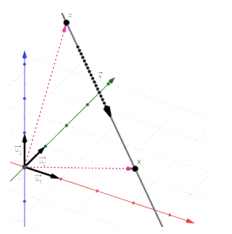


Figura A.5. Captura de la aplicación “Dibujar rectas mediante ecuaciones con *Scratch*”. Una vez introducidos los parámetros el dron realiza la trayectoria indicada. Fuente: *Scratch* (mit.edu).

Figura A.6. Captura del formulario donde introducir las respuestas. Fuente: elaboración propia.

Figura A.7. Captura de uno de los *Kahoot* disponibles para uso público. Fuente: Desmos en *Kahoot.com*.



1. Introducción

El presente documento se ha redactado como Trabajo de Fin de Máster (TFM) del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas.

En concreto se centrará sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica que tiene lugar en el final del currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º de la ESO) y continuará después en el Bachillerato.

Para ello, se partirá de un encuadre curricular y epistemológico de esta materia, junto con una fundamentación didáctica que permitan analizar mejor las cuestiones que rodean esta enseñanza: enfoques y planteamientos para abordar los contenidos, metodologías y recursos disponibles y deseables o dificultades de aprendizaje para el alumnado¹. La finalidad será trasladar este análisis a una proyección didáctica completa para esta unidad.

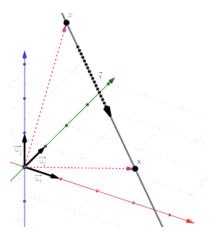
2. Objetivos

Los objetivos de este TFM tienen una doble vertiente: los de aprendizaje, como aplicación y compendio de los estudios de Máster cursados; y los didácticos, relacionados con la docencia de la Geometría Analítica en la secundaria.

De entre los objetivos de aprendizaje relacionados con el Máster destacaremos:

- Desarrollar la competencia profesional del profesorado para planificar su actuación didáctica en el aula, intentando evitar un punto de vista simplista.
- Ejercitar la capacidad para realizar una transposición didáctica completa, para trasladar el “saber sabio” de la ciencia al “saber aprendido” por el alumnado (siendo conscientes de la primera transposición didáctica que viene dada por el sistema educativo español y andaluz en particular, y de nuestras posibilidades y responsabilidad como profesorado al cargo de la segunda transposición que adaptará dicho saber a la actividad del aula).
- Elaborar propuestas y llevarlas a cabo sobre la adquisición de aptitudes y destrezas intelectuales y emocionales.
- Aplicar los conocimientos aprendidos durante las asignaturas del Máster y durante la fase de prácticas para realizar una programación realista y bien

¹ A lo largo de este trabajo se ha pretendido emplear un lenguaje neutro en lo posible, no obstante, toda referencia colectiva ha de entenderse aludiendo a cualquier género.

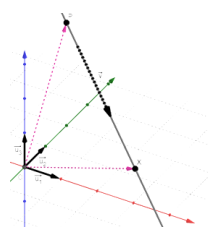


contextualizada, adaptada a las necesidades del grupo y de los requisitos del sistema educativo.

- Conocer las características del alumnado, su contexto social y sus motivaciones; para implicarse mejor en su desarrollo académico y personal.
- Aplicar y conocer una diversidad de recursos educativos que amplíen las destrezas necesarias para desarrollar la labor docente.

De entre los objetivos didácticos relacionados con la enseñanza de la Geometría Analítica, destacan:

- Profundizar en el conocimiento de los problemas que plantea tanto la enseñanza por parte del docente como el aprendizaje del alumnado relacionados con esta unidad.
- Alcanzar un aprendizaje significativo de la necesidad y la utilidad de la Geometría Analítica, que sirva de base para su ampliación posterior.
- Posibilitar la articulación de las técnicas sintéticas con las analíticas, para que sean entendidas como un todo dentro de la Geometría, y que establece además conexiones evidentes con otros bloques como el cálculo, el álgebra o las funciones.
- Incorporar a la docencia los recursos y metodologías necesarias para interiorizar y comprender mejor el aprendizaje de la Geometría Analítica, así como para desarrollar la competencia matemática propia de los objetivos de este nivel educativo (uso de programas de geometría dinámica a disposición del alumnado, realización de actividades motivadoras, activas y contextualizadas, etc.).



3. Fundamentación curricular

En este apartado del trabajo procederemos a encuadrar la unidad didáctica a desarrollar dentro del currículo propio del curso de 4º de la ESO, analizando por un lado tanto los contenidos y criterios de evaluación mínimos que le corresponden, como la temporalización aproximada que puede requerir y los materiales habituales con los que contamos el profesorado a la hora de trabajar esta parte de la asignatura.

Para ello, metodológicamente vamos a proceder de la siguiente manera:

- Recuperaremos la mencionada información respecto del currículo que aparece en la normativa vigente para la asignatura de Matemáticas Académicas de 4º de la ESO².
- Analizaremos y compararemos la temporalización y la estructura de este curso en base un conjunto de programaciones de distintos Institutos de Educación Secundaria de la comunidad de Andalucía.
- Y finalmente analizaremos algunos libros de texto de diferentes editoriales para estudiar la relación con el currículo establecido legalmente, las estrategias metodológicas que facilitan y los recursos que ponen a disposición de la enseñanza-aprendizaje.

3.1. Matemáticas Académicas en el currículo de 4º de la ESO

En nuestro actual sistema educativo, el primer y segundo nivel de concreción curricular corresponden a las normativas estatal y autonómica respectivamente. En concreto las normativas que establecen el currículo de las asignaturas de esta etapa educativa son:

- *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*
- *Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas.*

Fijándonos en estas dos normativas, extraeremos aquí los contenidos mínimos y los criterios de evaluación que allí se establecen. Nos fijaremos en especial en el bloque de **Geometría**, en el que se encuadra la unidad didáctica a desarrollar (en negrita), y en el bloque de *procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, como bloque fundamental para alcanzar los objetivos de la asignatura y a desarrollar de manera transversal. Incorporaremos también en estas tablas las competencias clave que se desarrollan con cada criterio, no olvidando que son un elemento clave de la evaluación posterior.

² Normativa vigente al menos durante el curso 2020-2021, fecha de redacción de este trabajo, a falta de conocer cómo termina de concretarse y desarrollarse la reciente *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. En lo posible, tratará de incorporarse a este trabajo la nueva legislación.

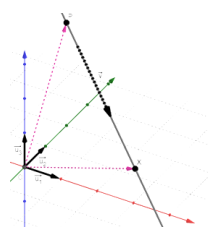


Tabla 3.1. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Geometría, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO.

Bloque 3. Geometría			
Contenidos	Criterios de evaluación y competencias clave asociadas ³		Estándares de aprendizaje evaluables
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Iniciación a la Geometría Analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la Geometría Analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	CMCT, CAA. CMCT, CAA. CCL, CMCT, CD, CAA.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

³ Las siglas que identifican a las competencias en estos bloques son: CMCT, Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. CAA, Competencia para aprender a aprender. CCL, Comunicación lingüística. CD, Competencia digital. SIEP, Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor. CSC, Competencias sociales y cívicas.

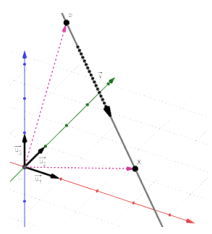
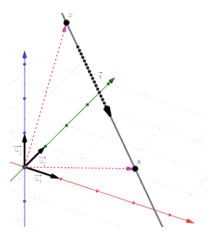


Tabla 3.2. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Contenidos	Criterios de evaluación y competencias clave asociadas	
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: - a). la recogida ordenada y la organización de datos. - b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. - c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. - d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. - e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. - f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT.
	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA.
	3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA.
	4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA.
	5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
	6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP.
	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA.
	8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT.
	9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP.
	10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP.
	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA.
	12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA.



3.2. Temporalización del bloque de Geometría y sus unidades didácticas en la Asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO.

Con el fin de enmarcar la temporalización y las unidades didácticas propias del bloque de Geometría, y para obtener un marco de referencia temporal verosímil para el desarrollo de nuestra unidad didáctica, compararemos las programaciones didácticas del área de matemáticas de varios centros de nuestra comunidad a las que se ha podido tener acceso:

- IES Cástulo (Linares),
- IES Az-Zait (Jaén),
- IES San Blas (Aracena),
- IES Juan Goytisolo (Carboneras).

Asumiremos una asignación horaria para esta asignatura de 4 horas semanales, sin contemplar la posibilidad de refuerzos (*Orden de 14 de julio de 2016*). Asumiremos también como referencia el calendario escolar vigente durante el curso 2020-2021, con un total de 178 días lectivos para tratar de homogeneizar las asignaciones temporales de cada programación. De esta forma el curso tendría unas 35 semanas de duración y un máximo de hasta 140 sesiones, aunque para acomodar posibles imprevistos, repasos y demás, muchas programaciones ajustan la temporalización a 30 semanas y/o 120 sesiones.

Como veremos, las principales diferencias, además de la extensión de tiempo dedicada a cada unidad (con leves diferencias, y donde la Geometría Analítica suele ocupar de 9 a 12 sesiones) radica en si adelantar o no el bloque de funciones al de Geometría Analítica, por sus evidentes relaciones. Como veremos en alguna programación, esta interconexión llega a hacerse patente hasta el punto de introducir contenidos de la Geometría Analítica (como las ecuaciones de la recta, y las condiciones de paralelismo y perpendicularidad), dentro del bloque de funciones.

Entre las programaciones vigentes a las que se ha podido acceder, y por la situación excepcional derivada de la pandemia y del hecho de no haber podido impartir la materia programada para el final del curso 2019-20, se recoge además un análisis y la valoración de los aprendizajes imprescindibles que se impartieron y no impartieron en dicho curso, así como los contenidos imprescindibles del presente curso (*Instrucción 10/2020 de 15 de junio*).

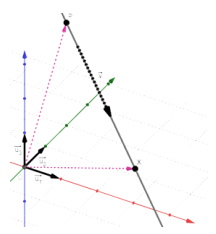


Tabla 3.3 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES Az-Zait (Jaén).
Fuente: Programación del departamento 2020-2021, elaboración propia.

UNIDAD DIDÁCTICA	Bloque temático	Trimestre/ Evaluación	Sesiones
UD 1: Números reales	Bloque 2 Números y Álgebra	1ºT	13
UD 2: Polinomios y fracciones algebraicas			12
UD 3: Ecuaciones, inecuaciones y sistemas			20
UD 4: Funciones. Características	Bloque 4 Funciones	2ºT	10
UD 5: Funciones elementales			12
UD 6: Semejanza y sus aplicaciones	Bloque 3 Geometría		8
UD 7: Trigonometría			15
UD 8: Geometría Analítica			9
UD 9: Estadística	Bloque 5 Estadística. y Prob.	3T	11
UD 10: Cálculo de probabilidades			13
UD 11: Combinatoria			12
TOTAL			135

*En esta programación y por la situación excepcional vivida durante la pandemia, la programación recogía los contenidos no abordados en el curso anterior, y aquellos que se consideran indispensables, por lo que se adaptaron los contenidos para asegurar el cumplimiento de estos indispensables. La introducción a la geometría analítica figuraba entre dichos contenidos indispensables.

Tabla 3.4 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES San Blas (Aracena).
Fuente: Programación del departamento 2016-2017, elaboración propia.

UNIDAD DIDÁCTICA	Bloque temático	Trimestre/ Evaluación	Sesiones
UD 1: Números reales	Bloque 2 Números y Álgebra	1ºT	4
UD 2: Proporcionalidad			12
UD 3: Polinomios			14
UD 4: Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones			12
UD 5: Funciones	Bloque 4 Funciones	2ºT	8
UD 6: Funciones Polinómicas y Racionales*			12
UD 7: Funciones Exponenciales y Logarítmicas			14
UD 8: Semejanza y Trigonometría	Bloque 3 Geometría	3T	12
UD 9: Vectores*			12
UD 10: Estadística	Bloque 5 Estdadística y Probabilidad		12
UD 11: Probabilidad			4
UD 12: Combinatoria			4
TOTAL			120

* Las Ecuaciones de la recta así como paralelismo y perpendicularidad se introduce ya en el bloque de funciones.

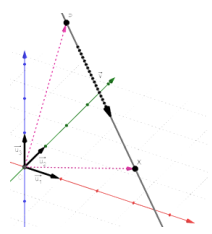


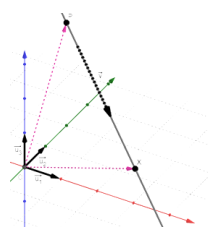
Tabla 3.5 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES Juan Goytisolo (Carboneras).
Fuente: Programación del departamento 2017-2018, elaboración propia.

UNIDAD DIDÁCTICA	Bloque temático	Trimestre/ Evaluación	Sesiones
UD 1: Números reales	Bloque 2 Números y Álgebra	1ºT	9
UD 2: Expresiones algebraicas			8
UD 3: Ecuaciones y sistemas			9
UD 4: Inecuaciones y sistemas		2ºT	9
UD 5: Semejanza y Trigonometría	10		
UD 6: Aplicaciones de la trigonometría	9		
UD 7: Geometría Analítica	9		
UD 8: Funciones	Bloque 4 Funciones	3T	8
UD 9: Funciones elementales			8
UD 10: Introducción al concepto de límite			8
UD 11: Introducción al concepto de derivada			8
UD 12: Combinatoria	Bloque 5 Estadística y Probabilidad		7
UD 13: Probabilidad			9
UD 14: Estadística			9
TOTAL			120

Tabla 3.6 Temporalización y organización de los contenidos del curso de 4º de Matemáticas Académicas en el IES Cástulo (Linares).
Fuente: Programación del departamento 2020-2021, elaboración propia.

UNIDAD DIDÁCTICA	Bloque temático	Trimestre/ Evaluación
UD 1: Números reales	Bloque 2 Números y Álgebra	1ºT
UD 2: Expresiones algebraicas		
UD 3: Ecuaciones y sistemas		
UD 4: Inecuaciones y sistemas		
UD 5: Semejanza y Trigonometría	Bloque 3 Geometría	2ºT
UD 6: Aplicaciones de la trigonometría		
UD 7: Geometría Analítica		
UD 8: Funciones	Bloque 4 Funciones	
UD 9: Funciones elementales		
UD 10: Combinatoria	Bloque 5 Estadística y Probabilidad	3T
UD 11: Probabilidad		
UD 12: Estadística		

*En esta programación clasifican los criterios de evaluación en criterios básicos (>50%), criterios medios, y criterios avanzados (aproximadamente un 10%). Todos los del bloque de Geometría se consideran básicos.



Algunas conclusiones

Como anunciábamos al inicio, no hay unanimidad acerca de la posibilidad de adelantar el bloque de Funciones al de Geometría. En realidad son dos aproximaciones de una misma cuestión, por lo que lo verdaderamente importante es hacer énfasis en la necesidad de evidenciar tal complementariedad al abordar ambas unidades, y tenerlo en cuenta al programar las sesiones correspondientes. Además, el número de sesiones que se dediquen a estos bloques se verán afectados por esta complementariedad, al servir para preparar, introducir, afianzar y repasar conocimientos relacionados.

Evidentemente el análisis de los contenidos abordados y no abordados durante el curso anterior es algo que debe tenerse en cuenta al temporalizar el año académico (como hemos visto, algunas programaciones lo contemplaban por la excepcionalidad del curso actual, pero en general, la evaluación inicial debería servir para detectar estas posibles lagunas y ajustar así la programación).

Además, la estrategia de clasificar y acordar una serie de contenidos indispensables para afianzar y dominar, con vistas a asentar una base suficiente que permita progresar posteriormente en el curso siguiente, es una estrategia que puede dar buenos frutos de cara a coordinar el aprendizaje a lo largo de los distintos niveles. Esto es especialmente útil en el caso de la Geometría Analítica, que ya desde el currículo se plantea como transición necesaria para los contenidos que se trabajarán en el bachillerato.

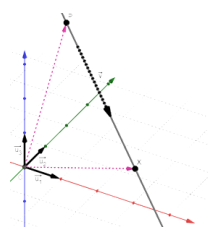
3.3. Recursos y materiales a disposición del profesorado en los libros de texto para la unidad de Geometría Analítica.

Una vez visto el posible encuadre de la unidad en el currículo y la temporalización del curso, intentaremos relacionarlo ahora con la forma en que es tratado dentro de algunos libros de texto. En concreto, utilizaremos para este análisis los textos de la editorial Anaya (Colera et al., 2016) y de la editorial SM (Alcaide et al., 2017), y nos fijaremos en la estructura de los contenidos en el curso, la propia forma de desarrollar dichos contenidos, y la tipología de actividades junto con las metodologías a las que pueden dar pie.

Estructura del curso

Empezando por la estructura del curso, de nuevo aquí volvemos a tener la doble vertiente de quienes colocan el bloque de Geometría antes del bloque de Funciones (SM) y quienes empiezan por las funciones directamente detrás del bloque de números y álgebra (Anaya). Veamos por separado los puntos relevantes de sus propuestas:

- En la propuesta didáctica de Anaya justifican este hecho dado que el alumnado ha podido hacer ya un repaso concreto de las funciones lineales que ha venido estudiando desde 2º y 3º de la ESO, y suponen que dominan las ecuaciones de la recta en todas sus formas. Según esta perspectiva se trata ahora de incidir más



en su tratamiento geométrico: posiciones relativas de dos rectas, paralelismo y perpendicularidad.

El tratamiento de los vectores no los consideran necesarios a este nivel (son contenidos obligatorios, pero no estrictamente necesarios para la resolución de problemas geométricos a este nivel), sin embargo se introducen como base para su uso en bachillerato.

Los conocimientos mínimos que aspiran a alcanzar son las operaciones con vectores, el punto medio de un segmento y el punto simétrico respecto a otro, la comprobación de la alineación de 3 puntos, la aplicación de las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, la obtención de la intersección de dos rectas, las rectas paralelas a los ejes de coordenadas y la distancia entre dos puntos.

Como era lógico dado el orden propuesto, las formas de la ecuación de una recta son conocimientos a repasar, así como la diferenciación entre sistemas de ecuaciones lineales con solución y sin solución.

- En la propuesta didáctica de SM no adelantan el bloque de funciones, pero sin embargo realizan cierto énfasis en la interpretación gráfica de los sistemas de ecuaciones, e incluso en posibles aplicaciones geométricas que hayan derivado en la resolución de sistemas. Es decir, apuestan por un carácter ilustrativo de la interpretación gráfica del bloque de sistemas de ecuaciones e inecuaciones (frecuentemente con *GeoGebra*) como sustento de la unidad de Geometría Analítica.

Los contenidos en el libro de texto

Si analizamos ahora la forma en que se desarrollan los contenidos, observamos básicamente dos diferencias (ver tabla 3.7). La primera es que la editorial SM profundiza más en el significado epistemológico, utiliza más en profundidad el lenguaje matemático en la forma de enunciar propiedades y definiciones. Por el contrario, ANAYA utiliza un lenguaje más llano, y un ejemplo de ello puede ser el hecho de no incorporar el concepto de vector libre o de equipolencia. ANAYA tampoco incorpora la ecuación general de la recta, cosa que sí ocurre en SM, donde al no haberse visto el bloque de funciones aun, han optado por desarrollarla aquí (por lo que esta última diferencia se explica en realidad por el propio orden de las unidades en el curso, porque en ambos casos es un contenido que se trabajará finalmente).

La segunda diferencia principal tiene relación con contenidos que no necesariamente han de estar presentes según el currículo (por no estar explícitamente mencionados). Mientras que la editorial SM introduce el producto escalar en 4º de la ESO, y lo utiliza por sus propiedades para estudiar el ángulo entre dos rectas o vectores, ANAYA opta por no abordar esta operación, sino introducir la ecuación de la circunferencia para identificar en ella las coordenadas del centro y el radio.

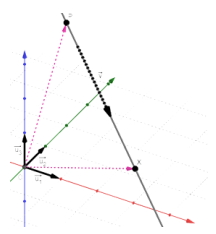


Tabla 3.7 Análisis comparativo de los contenidos y su enfoque, tal y como lo ofrecen los libros de texto de las editoriales ANAYA y SM. En rojo las diferencias significativas

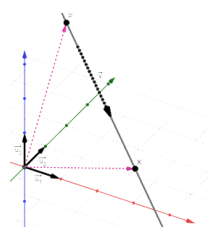
Fuente: elaboración propia.

Secciones de contenidos abordados por ANAYA y cuestiones desarrolladas	
Vectores	Coordenadas, módulo, dirección y sentido (no utilizan el concepto de vector libre, basta con que dos vectores son iguales si tienen mismo módulo, dirección y sentido, tampoco usan el concepto equipolente).
Operaciones con vectores	Producto por un número, suma, resta y combinación lineal (no usan el concepto linealmente in/dependientes).
Vectores que representan puntos	Aquellos con origen en el centro de coordenadas, (en lugar de llamarlo vector de posición, aunque luego sí emplean este concepto para la ecuación vectorial de la recta).
Punto medio	Cálculo de sus coordenadas
Puntos alineados	Condición vectorial de alineación
Ecuaciones de la recta	Ecuación vectorial (vector de posición o punto y vector de dirección), ecuaciones paramétricas, ecuación en la forma continua, ecuación explícita, ecuación en la forma punto pendiente (no utilizan aquí el concepto de ecuación general, porque se ha trabajado en las funciones lineales).
Paralelismo y perpendicularidad	Vector dirección o pendiente: vectores perpendiculares, perpendicularidad entre pendientes (pero de nuevo, no lo interpretan desde la ecuación general, ni desde el producto escalar)
Rectas paralelas a los ejes	Como casos particulares y por su relación (y su no relación) con funciones.
Posiciones relativas de dos rectas	Reconocer el sistema de ecuaciones
Distancia entre dos puntos	módulo del vector
Ecuación de la circunferencia	

Secciones de contenidos abordados por SM y cuestiones desarrolladas	
Vectores	Vectores fijos y libres. Coordenadas, módulo, dirección y sentido. Equipolencia.
Operaciones con vectores	Producto por un número, suma, resta, combinación lineal y punto medio.
Producto escalar	Cálculo por trigonometría o por coordenadas. Cálculo de ángulos entre vectores y condición de perpendicularidad.
Ecuaciones de la recta	Vectorial (vector de posición o punto y vector de dirección), paramétricas, forma continua, general, explícita, forma punto pendiente
Problemas de incidencia o posición relativa	Rectas secantes, paralelas, perpendiculares y coincidentes: basado en la ecuación general o explícita.

Calidad y diversidad de las tareas y problemas matemáticos

Finalmente, si analizamos los ejercicios y problemas que se plantean para desarrollar los contenidos, practicar y desarrollar la competencia matemática, encontraremos también algunas diferencias entre ambos textos y una cierta carencia. Para dicho análisis nos inspiraremos en cierto modo en la clasificación expuesta por Blanco (1993) para distinguir entre:



- lo que él llama *ejercicios de reconocimiento*, donde se aplica directamente y sin demasiado desarrollo una propiedad o teorema;
- aquellos considerados *ejercicios algorítmicos o de repetición*, carentes de contexto no matemático, y donde se aplican propiedades o cuestiones más o menos simples de forma secuencial, con la intención de reforzar una habilidad de cálculo o una estrategia de resolución;
- *problemas de traducción simple*, que son aquellos que camuflan el enunciado matemático en cuestiones más o menos cotidianas;
- *problemas sobre situaciones reales*⁴.

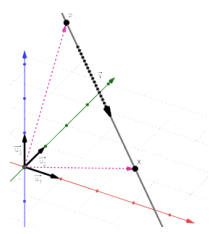
Del mismo modo, basándonos en algunas cualidades enunciadas por Maaß (2006b) que deberían cumplir las tareas de modelización matemática para ser significativas en el aprendizaje del alumnado, se han estudiado los escasos ejercicios que permitían realizar tal modelización. En ellos se ha observado la relevancia del contexto escogido y de las cuestiones desarrolladas, si la solución es cerrada o permite alternativas, o si se evidenciaba la aplicabilidad de los contenidos a la vida real.

El libro de SM divide los ejercicios entre aquellos que se ubican como desarrollo inmediato en la misma página del contenido correspondiente, y otro conjunto de tareas que se sitúan al final de la unidad. La gran mayoría de todos ellos son ejercicios de los clasificados como *de repetición* (67,9%). En ambos casos incluye algunos ejercicios resueltos como modelo (11,6% de las tareas), que además pueden ser en cierto modo redundantes, ya que en el desarrollo teórico se daban también ejemplos numéricos. Además casi siempre, salvo en el apartado de autoevaluación final, se explicita a qué sección de los contenidos hace referencia el ejercicio. Entre estas dos características no parece para nada extraño que se pueda dar un caso de algoritmización y clasificación de las tareas según un catálogo de ejercicios tipo.

De entre la categoría de *problemas*, apenas hay un 17% y casi todo ellos son matemáticamente autorreferenciales, es decir, relativos a propiedades de los triángulos, exentos de contexto o de proyección con la realidad. Además son los que demandan una mayor riqueza de conocimientos y se sitúan al final de la unidad (normalmente no basta con aplicar una propiedad, sino que desarrollan varias y por ello además acumulan mayor dificultad).

Pero es que además los 3 problemas sobre situaciones reales son en realidad ajenos a la realidad o intereses del alumnado. Plantean un ejercicio bastante simple una vez traducido (y en cierto modo la modelización matemática está iniciada: por ejemplo, en

⁴ En realidad, Blanco (1933) distinguía también problemas de procesos, que eran aquellos que admitían varias estrategias de resolución o problemas de investigación matemática, pero no se han detectado en nuestros libros.



la realidad uno no mide directamente coordenadas, sino distancias respecto a puntos significativos de tu elección y luego se debería interpretar). Pero además, pierden la posibilidad de mostrar el potencial de aplicación de la Geometría Analítica y de las matemáticas, es decir, en qué tecnologías se implementan estos conocimientos, por ejemplo en GPS, en diseño de redes, etc.⁵

Y finalmente, tampoco puede decirse que haya mucho espacio para plantear problemas con soluciones abiertas, ya que las pocas que hay se basan en poner un ejemplo de un punto o vector que cumpla unas condiciones que evidentemente no definen un único punto o vector, y siempre en ejercicios casi inmediatos.

Analizando ahora el caso del libro planteado por ANAYA, encontramos resultados en la línea observada en el modo de exponer los contenidos. Dividen igualmente los ejercicios por secciones de contenidos, y aunque al final existe un apartado con problemas entremezclados, está muy dirigido el tipo de propiedad o conocimiento que se necesita aplicar.

Los ejercicios se tratan de facilitar incorporando una mayor cantidad de ejercicios de reconocimiento (32,5%), y una cantidad similar de ejercicios resueltos que en el caso de la editorial anterior. Además, como los *ejercicios de repetición* ascienden aquí al 75,2% del total, el riesgo de clasificar los problemas por tipologías a los que aplicar la solución de catálogo aprendida puede aumentar.

De nuevo los *problemas* que tratan de encaminar al alumnado a representar una situación "real" o no analítica (19,7%), son en realidad referencias a propiedades de triángulos, de cuadriláteros o de la circunferencia. No son realidad problemas en ningún contexto real, pero al menos mantienen más lazos con otros contenidos de la Geometría Sintética que en la editorial anterior. Si bien, no se ha utilizado para evidenciar el potencial que incluye la algebrización y la aplicación de un sistema de referencia a la geometría.

Tampoco es diferente el enfoque que se da a las pocas tareas con solución abierta, porque siguen remitiendo a dar ejemplos de puntos o vectores que cumplen una serie de propiedades. No obstante, permiten aplicar un pensamiento no del todo algoritmizado que rompa con este hábito, aunque se haya practicado en los ejercicios resueltos. A ello podrían contribuir también un reducido grupo de ejercicios con preguntas teóricas, aunque al estar formulados a modo de test, sin pedir necesariamente una reflexión, habría que incidir en esta cuestión.

⁵ Tan solo en uno de ellos, en el apartado final del libro y ya resuelto, plantea el problema en términos puramente del modelo real, para después explicar el proceso de modelización matemática y su utilidad.

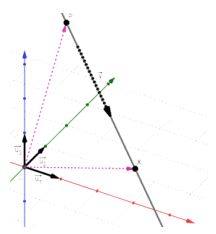


Tabla 3.8. Análisis comparativo de los ejercicios, tal y como lo ofrecen el libro de texto de la editorial SM. Fuente: elaboración propia.

Clasificación de los ejercicios de la editorial SM (total 112)							
Denominación y ubicación del ejercicio	Desarrollo de la teoría	Desarrollo de la teoría resueltos	Actividades clave de la unidad	Actividades practicar al final de la unidad	Actividades para practicar al final de la unidad resueltas	Problemas para resolver y pensar más al final de la unidad	Ejercicios de Autoevaluación
<i>Ejercicios de reconocimiento</i>	4	1		10			2
<i>Ejercicios algorítmicos o de repetición</i>	22	7	2	32	6	2	5
<i>Problemas de traducción simple o compleja</i>	1		2	6		6	1
<i>Problemas sobre situaciones reales</i>						3	

*Solo 4 ejercicios admitían soluciones abiertas (no únicas).

Tabla 3.9. Análisis comparativo de los ejercicios, tal y como lo ofrecen el libro de texto de la editorial ANAYA. Fuente: elaboración propia.

Clasificación de los ejercicios de la editorial ANAYA (total 117)					
Denominación y ubicación del ejercicio	Desarrollo de la teoría	Desarrollo de la teoría resueltos	Ejercicios y problemas del conjunto de la unidad	Ejercicios para aplicar lo aprendido al final de la unidad	Ejercicios de Autoevaluación
<i>Ejercicios de reconocimiento</i>	10	8	12	6	2
<i>Ejercicios algorítmicos o de repetición</i>	18	16	17	30	7
<i>Problemas de traducción simple o compleja</i>	2	2	3	14	1
<i>Problemas sobre situaciones reales</i>				1	

*Solo 9 ejercicios admitían soluciones abiertas (no únicas)

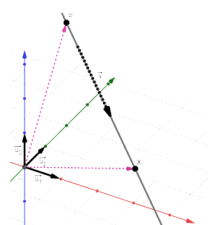


Tabla 3.10 Análisis del grado de significación de las tareas donde se puede aplicar la modelización matemática en los libros de texto de ANAYA y SM. Fuente: elaboración propia

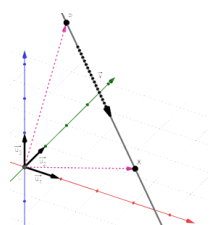
Clasificación actividades de modelización Matemática (Maaß, 2006b)	Observaciones	SM	ANAYA
<i>Problemas verbales insertados en la realidad</i>	El contexto no es importante en absoluto, no desempeña ningún papel en la solución y puede ser eliminado.	1	1
<i>Problemas relacionados con la realidad.</i>	Problemas reales pero en un contexto simplificado.	3	
<i>Contexto realista con una cuestión didácticamente relevante</i>		1	
<i>Contexto realista con una cuestión interesante:</i>	La cuestión no es auténtica, pero didácticamente aporta otra visión.		
<i>Contexto realista con una cuestión auténtica</i>	En la conexión con el campo de la “vida cotidiana”, todo el mundo puede ser considerado como experto.	1	

Concluyendo, se comprueba en ambos textos la existencia de un problema didáctico como es la ruptura que se produce entre la Geometría Analítica y la Sintética, así como respecto a otras facetas de las matemáticas, aspecto este en el que se profundizará en el apartado de la fundamentación didáctica. No se hace evidente su potencial y se ve prácticamente desgajado de toda aplicación práctica real.

Metodológicamente tampoco existen actividades que puedan ser planteadas de modo cooperativo o con una mínima investigación, elementos necesarios para cubrir contenidos obligatorios del bloque I del currículo que no podemos olvidar.

Además, tampoco se incluyen tareas en las que aplicar el uso de aplicaciones de geometría dinámica (más allá de sencillos recursos pregrabados en *GeoGebra* a disposición del docente a modo ilustrativo en ambas editoriales).

Con todo ello, será necesario por nuestra parte como docentes enriquecer dicho repertorio de tareas con actividades enfocadas metodológicamente en todos estos últimos sentidos y contenidos necesarios de cubrir.



4. Fundamentación epistemológica.

Desarrollo del tema 51: Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines

La Geometría Analítica descansa sobre la definición de un sistema de referencia, algo que propuso René Descartes en el siglo XVII en su obra *Discurso del Método*, y por ello el sistema de referencia cartesiano que utilizamos recibe este nombre en su honor (CenOposiciones, 2010, p.5). Apoyándose en él, se desarrolló todo un tratamiento vectorial de la Geometría, lo que conocemos como el álgebra de vectores con el que trataremos entes geométricos como el punto, la recta, el plano, etc. de un modo puramente analítico.⁶

4.1. Sistemas de referencia en el plano y en el espacio

Para tratar elementos geométricos de forma analítico-matemática y poder aplicar los conocimientos algebraicos, debemos fijar un origen relativo y una escala para todos estos elementos, esto es, intuitivamente, un sistema de referencia.

EL PLANO Y EL ESPACIO AFÍN

Definición: sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y A un conjunto no vacío de puntos. Se define una ley de composición externa en A , con coeficientes en V , como la aplicación:

$$\begin{aligned}\varphi: A \times V &\rightarrow A \\ (P, \vec{v}) &\rightarrow Q \\ \text{con } \overrightarrow{PQ} &= \vec{v}.\end{aligned}$$

Así, la terna (A, V, φ) recibe el nombre de espacio afín asociado a V si además φ verifica:

- **Unicidad:** para todo $P, Q \in A$ existe un único $\vec{v} \in V$ tal que $\varphi(P, \vec{v}) = Q$
- **Composición:** Para todo $P \in A$ y $\vec{v}, \vec{u} \in V$, se tiene que $\varphi(\varphi(P, \vec{u}), \vec{v}) = \varphi(P, \vec{u} + \vec{v})$

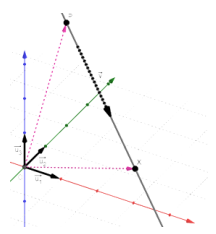
La dimensión del espacio afín A (el conjunto de puntos) se define pues como la del espacio vectorial V .

- Cuando la dimensión es 2, el espacio afín asociado al espacio vectorial V_2 es (A_2, V_2, φ) y se le llama plano afín.
- Cuando la dimensión es 3, el espacio afín asociado al espacio vectorial V_3 es (A_3, V_3, φ) y se le llama sencillamente espacio afín.

Corolario de la unicidad:

Sea un vector $\vec{v}$, de manera que dado un punto P verifique $\varphi(P, \vec{v}) = Q$; el único vector que verifica $\varphi(P, \vec{u}) = P$ es el vector nulo $\vec{u} = \vec{0}$.

⁶ Para el desarrollo de este apartado y sus demostraciones, se han consultado especialmente las siguientes obras: CenOposiciones (2010), Berenguer Maldonado y Cobo Mérida (2015), Fuller, G. y Tarwater, D. (1995).



Demostración:

$$P = \varphi(P, \vec{u}) = \varphi(\varphi(P, \vec{u}), \vec{u}) = \varphi(P, \vec{u} + \vec{u}) = \varphi(P, 2\vec{u}),$$

y por unicidad $\vec{u} = 2\vec{u}$, luego $\vec{u} = \vec{0}$ ■

Corolario de la composición:

Tanto en el plano como en el espacio afín podemos definir una composición de vectores cuyo resultado es el vector nulo.

Dado un espacio afín A , se puede definir una composición de vectores con extremos en los puntos $P, Q, R \in A$, tal que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \vec{0}$.

Para demostrarlo definiremos una aplicación $f: A_2 \times A_2 \rightarrow V_2$ (respectivamente podría ser en A_3 y V_3 etc.) tal que $f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$ que verifique que $f(P, Q) + f(Q, R) + f(R, P) = \vec{0}$, lo que sería equivalente a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \vec{0}$. Demostración:

Definimos $P, Q, f(P, Q) = \vec{u}$ y además sabemos que $\vec{u}$ es el único vector tal que $\varphi(P, \vec{u}) = Q$.

De esta forma, sea $f(Q, R) = \vec{v}$ tal que $\varphi(Q, \vec{v}) = R$ y $f(R, P) = \vec{w}$ tal que $\varphi(R, \vec{w}) = P$.

Sustituyendo R en $\varphi(R, \vec{w}) = P$ tenemos que $\varphi(\varphi(Q, \vec{v}), \vec{w}) = P$ con lo que $\varphi(Q, \vec{v} + \vec{w}) = P$.

Sustituyendo Q en la anterior tenemos que $\varphi(\varphi(P, \vec{u}), \vec{v} + \vec{w}) = P$, es decir $\varphi(P, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = P$.

Como por unicidad solo el vector nulo transforma un punto en sí mismo: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ ■

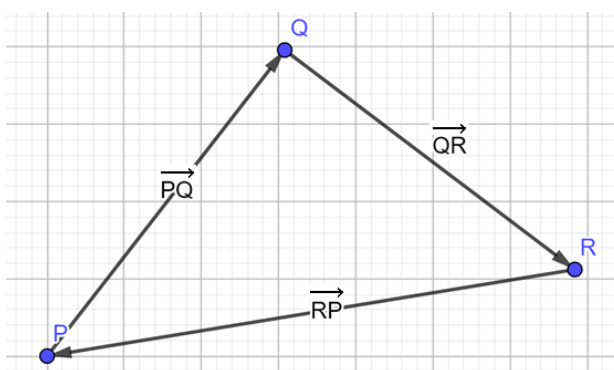


Figura 4.1. Interpretación geométrica en el plano de la composición de vectores mencionada en el corolario. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

Bijectividad de la aplicación vector de posición⁷

Sea $O \in A_2$ (respectivamente A_3) el origen de un vector de posición, la aplicación $f_o: A_2 \rightarrow V_2$ (respectivamente V_3), $f_o(P) = \overrightarrow{OP}$, es una biyección.

Demostración:

- Es inyectiva: sean P, Q tal que $f_o(P) = f_o(Q)$, y sea $\vec{v}$ tal que $f_o(P) = \vec{v}$, entonces $\varphi(O, \vec{v}) = P$, y como $f_o(Q) = \vec{v}$ entonces $\varphi(O, \vec{v}) = Q$. Luego $P = Q$.
- Es sobreyectiva: pues si $\vec{v} \in V_2$ (respectivamente V_3), sea $P = \varphi(O, \vec{v})$, entonces $f_o(P) = \vec{v}$ por lo que todo vector tiene preimagen. ■

Otras propiedades:

- Para todo $P, Q \in A_2$ (respectivamente A_3), $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

Demostración: puesto que $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ (por los corolarios de la unicidad y la composición) entonces $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

- Para $P, Q, R, S \in A_2$ (respectivamente A_3), las igualdades $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, son equivalentes.

Demostración: ya que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$, entonces $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$ y análogamente, como $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$, entonces $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$, y como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ deduciremos que $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR}$.

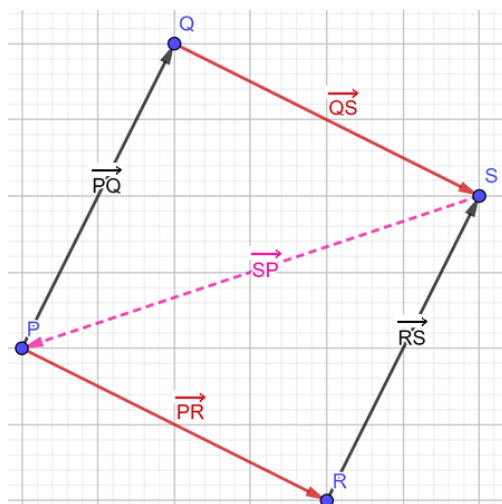


Figura 4.2. Interpretación geométrica en el plano de la propiedad mencionada.

Fuente: GeoGebra, elaboración propia.

⁷ A continuación se definirá el vector de posición, pero nos interesa demostrar ahora que todo punto tiene un vector de posición y este es único dado un sistema de referencia.

SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

Una vez definidos el plano y el espacio afín, asociados a sus correspondientes espacios vectoriales, es suficiente con definir un origen de referencia de entre el conjunto de puntos y los correspondientes vectores linealmente independientes de su espacio vectorial (2 o 3, tantos como su dimensión, una base) para definir un sistema de referencia.

- Sistema de referencia del plano afín A_2 es la terna $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}, \vec{v}\}$, donde $O \in A_2$ es el origen del sistema de referencia y $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base del espacio vectorial asociado V_2 .

- Sistema de referencia del plano afín A_3 es la cuaterna $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, donde $O \in A_3$ es el origen del sistema de referencia y $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base del espacio vectorial asociado V_3 .

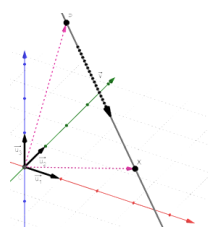
Así, a cada sistema se asocian unos ejes de coordenadas que son las rectas que pasando por el origen tienen la dirección correspondiente a los vectores de su base.

Con estos sistemas de referencia, dado un punto P del plano o del espacio afín, el vector $\overrightarrow{OP}$ recibe el nombre de vector de posición, respecto del origen O .

Las coordenadas de un punto P respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R}$ son por tanto las coordenadas de su vector de posición en la base de dicho sistema. Es decir si $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es el sistema de referencia del espacio afín (para el plano bastaría con prescindir del tercer vector en este razonamiento) y $\overrightarrow{OP} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, entonces las coordenadas de P en el sistema $\mathcal{R}$ serán (x, y, z) .

Para llegar al concepto de vector libre, sabemos que existe un único punto P tal que su vector de posición (con extremos en el origen de coordenadas y en P) es $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Dada esta correspondencia entre coordenadas de vectores de posición y puntos, podemos definir las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de $\mathcal{R}$ como las coordenadas de P respecto del mismo sistema. Generalizando, sea un vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, con origen en P y extremo en Q , como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. Las coordenadas de $\vec{u}$ como vector libre respecto de $\mathcal{R}$ serán las coordenadas de su extremo, menos las coordenadas de su origen, y $\vec{u}$ representa así a la clase de vectores equipolentes, teniendo mismo módulo, dirección y sentido.

Finalmente, y en concreto, los sistemas de referencia cartesianos para el plano y para el espacio toman como base vectores unitarios perpendiculares entre sí. De esta forma, el sistema de referencia cartesiano para el espacio afín lo compondrían el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y la base $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$, $\vec{u}_3 = (0,0,1)$ (para el plano afín A_2 bastaría con prescindir del tercer vector y consecuentemente de la tercera coordenada).



Hacia las rectas y los planos. ¿Qué son las variedades lineales afines y los subespacios directores?

Definición: Sea el espacio afín (A, V, φ) y B un subconjunto de A en el que existe al menos un punto $P \in B$ tal que el conjunto de vectores $W = \{\overrightarrow{PX} : X \in B\}$ es un subespacio vectorial de V . Se denomina variedad lineal afín o subespacio afín a la terna (B, W, φ) .

Veamos ahora las variedades lineales afines al plano afín y al espacio afín. Pero definamos antes una propiedad de los subespacios vectoriales.

El subespacio vectorial W asociado al punto P , es independiente de P , es decir, $W_P = \{\overrightarrow{PX} : X \in B\}$ y $W_Q = \{\overrightarrow{QX} : X \in B\}$ serán el mismo subespacio.

Demostración: - Veamos primero que $W_P \subseteq W_Q$. Sea $\overrightarrow{PX} \in W_P$, como $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QX}, \overrightarrow{QP} \in W_Q$, entonces $\overrightarrow{PX} \in W_Q$.

- Del mismo modo veamos que $W_P \supseteq W_Q$. Sea $\overrightarrow{QX} \in W_Q$, como $\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ} \in W_P$, entonces $\overrightarrow{QX} \in W_P$. Luego $W_P = W_Q$ ■

Al subespacio vectorial W que está asociado a la variedad lineal afín B , se le llama también subespacio director de B y su dimensión es la misma que la de la variedad afín. Estudiemos todos los casos posibles:

- En el plano afín A_2 solo tenemos variedades lineales de dimensión 0 (un punto), dimensión 1 (una recta) o dimensión 2 (el plano afín completo).
- En el espacio afín A_3 solo tenemos variedades lineales de dimensión 0 (un punto), dimensión 1 (una recta), dimensión 2 (un plano) y dimensión 3 (el espacio afín completo).

Dado que el punto y el espacio afín ya han sido estudiados, veamos la manera de describir la recta en el plano, así como la recta y el plano en el espacio.

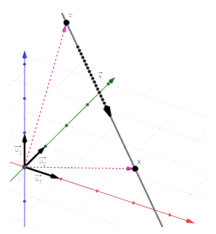
4.2. La recta en el plano. Ecuaciones

Definición: se denomina recta en el plano a una variedad lineal del plano afín A_2 de dimensión 1. Es decir, existe un punto $P \in A_2$ y un subespacio vectorial W de dimensión 1, tal que X pertenece a la recta si y solo si $\overrightarrow{PX} \in W$.

De esta forma, por ser de dimensión 1, el vector $\vec{v} \in W$ genera dicho subespacio W ya que $W = \{\lambda \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

- $\vec{v}$ es el vector director de la recta

Para la definición de las distintas formas de ecuaciones que pueden definir una recta en el plano afín A_2 tomaremos los siguientes datos de partida:



- Tomaremos de aquí en adelante el siguiente sistema de referencia: $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ con $u_1 = (1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1)$
- Las coordenadas del vector director $\vec{v}$ en dicho sistema son (v_1, v_2)
- Las coordenadas de un punto P de la recta son (p_1, p_2)
- Por tanto, en todas las ecuaciones que definamos en adelante, estas se verificarán si y sólo si sustituimos (x, y) por un punto de la recta –el punto X –.

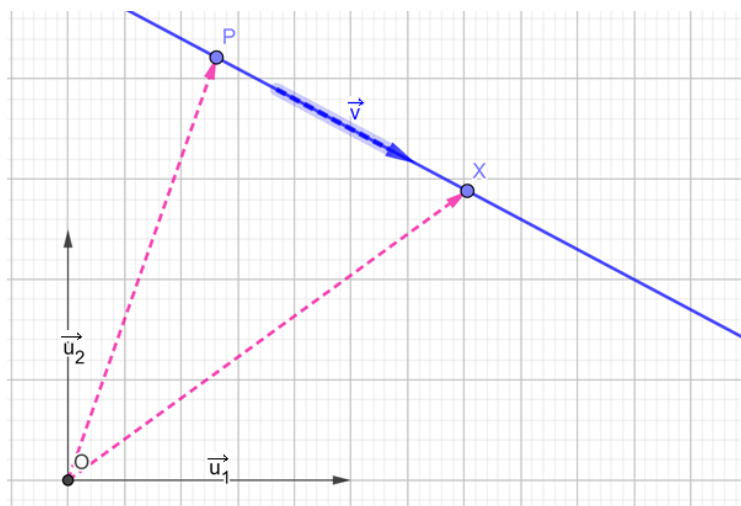


Figura 4.3. La recta queda definida por un punto y un vector director.
Fuente: GeoGebra, elaboración propia.

Ecuación vectorial de la recta en el plano

Nos basaremos en el hecho de que dos puntos de la recta pueden definir un vector que pertenece también al mismo subespacio vectorial que el vector director de la recta.

- Si X pertenece a la recta, $\overrightarrow{PX} \in W$. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v}$.
- Como $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$, se deduce:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} : \text{ecuación vectorial}$$

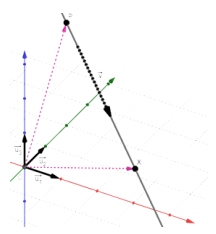
Así la interpretación geométrica de esta ecuación es que cada punto es una traslación geométrica del punto P según un vector proporcional a $\vec{v}$.

Ecuaciones paramétricas de la recta en el plano

Para obtener las ecuaciones paramétricas, basta reescribir la ecuación anterior en términos de coordenadas, lo cual será muy cómodo para obtener puntos de la recta puesto que solo necesitaremos asignar valores a λ :

- $(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Separado coordenada por coordenada se deduce:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases} : \text{ecuaciones paramétricas}$$



Ecuación en forma continua de la recta en el plano

Esta ecuación nos facilitará la comprobación de pertenencia de un punto a la recta. Para construirla, despejamos λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualamos.

$$\lambda = \frac{x-p_1}{v_1}, \lambda = \frac{y-p_2}{v_2}, \text{ por lo que concluimos:}$$

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} : \text{ecuación continua}$$

Ecuación general o en forma implícita de la recta en el plano

Operando en la ecuación continua obtenemos $v_2(x - p_1) - v_1(y - p_2) = 0$. Teniendo en cuenta que el punto P y el vector director $\vec{v}$ son elementos conocidos, deducimos una ecuación de la siguiente forma:

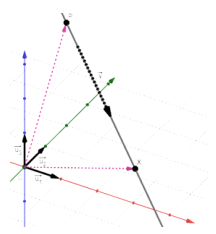
$$Ax + By + C = 0 : \text{ecuación general o implícita}$$

Para interpretar geoméricamente sus coeficientes, se procede a construirla por otra vía. Para ello:

- sea $\vec{n} = (A, B)$ un vector normal a la recta,
- sea $P = (p_1, p_2)$ un punto de la recta.

Si tomamos un punto X que pertenezca a la recta, $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{n}$ serán forzosamente perpendiculares, con lo que su producto escalar será nulo.

$$0 = (A, B) \cdot (x - p_1, y - p_2) = A(x - p_1) + B(y - p_2) = Ax + By + C \\ \text{con } C = -Ap_1 - Bp_2$$



Ecuación explícita y ecuación punto pendiente de la recta en el plano

Despejando y de la ecuación general obtenemos $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, siempre que $B \neq 0$, en cuyo caso la ecuación implícita previa sería $x = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante, siendo por tanto una recta vertical (donde la pendiente no está definida).

Si denominamos $m = \frac{-A}{B}$ y $n = \frac{-C}{B}$, la ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$y = mx + n : \text{ecuación explícita}$$

m es la pendiente, es decir, la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas; y n es la ordenada en el origen, es decir el valor de y cuando $x = 0$

Otra forma de construir la ecuación explícita sería observar que el vector $(m, -1)$ es perpendicular a la recta (cuyo vector director podría ser $(1, m)$ por la propia definición de pendiente). Así, el producto de este por cualquier vector de la recta definido por dos puntos (por ejemplo $\overrightarrow{PX}$ estudiado en el punto anterior) sería nulo:

$$0 = (m, -1) \cdot (x - p_1, y - p_2) = m(x - p_1) - (y - p_2)$$

Despejando:

$$y - p_2 = m(x - p_1) : \text{ecuación punto pendiente}$$

Evidentemente operando y despejando se obtiene de nuevo la ecuación explícita.

Ecuación segmentaria de la recta en el plano

Una última expresión interesante deriva de conocer los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas. Se excluyen, por tanto, los casos de las rectas horizontales o verticales. Es decir pasaría por los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$, y podemos tomar $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$ como vector director de la recta. La ecuación continua, que era inmediata conociendo un vector y un punto quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y-0}{b} ; -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}; \text{ y finalmente:}$$

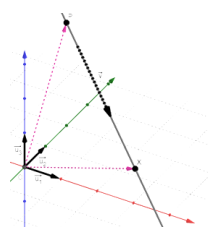
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 : \text{ecuación segmentaria}$$

b es la ordenada en el origen

a es la abscisa en el origen



Figura 4.4. La ecuación segmentaria permite identificar fácilmente los puntos de corte con los ejes. Fuente: GeoGebra, elaboración propia.



4.3. La recta en el espacio. Ecuaciones

Una vez estudiada la recta en el plano, trataremos ahora de trasladar lo que acabamos de aplicar para el espacio afín A_2 al espacio afín A_3 . En A_3 la recta sería un subespacio afín de dimensión 1, y de nuevo se puede definir mediante 1 punto y un vector director, por lo que la descripción es en esencia similar a la que vimos anteriormente.

Para la construcción de las distintas formas de ecuaciones que pueden definir una recta en el espacio afín A_3 tomaremos los siguientes datos de partida:

- Tomaremos el siguiente sistema de referencia: $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; con $u_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$, $\vec{u}_3 = (0,0,1)$
- Las coordenadas del vector director $\vec{v}$ en dicho sistema son (v_1, v_2, v_3)
- Las coordenadas de un punto P de la recta son (p_1, p_2, p_3)
- Por tanto, en todas las ecuaciones que definamos en adelante, estas se verificarán si y sólo si, sustituimos (x, y, z) por un punto de la recta –el punto X –.

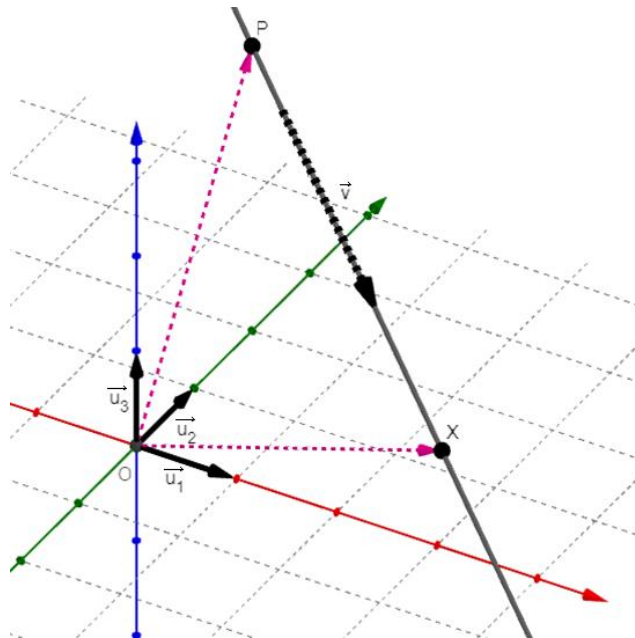


Figura 4.5. La recta en el espacio también queda definida por un punto y un vector director.

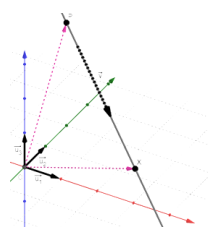
Fuente: GeoGebra, elaboración propia.

Ecuación vectorial de la recta en el espacio

De nuevo, tomando dos puntos que definen un vector $\overrightarrow{PX}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v}$.

Como $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$, se deduce:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} : \text{ecuación vectorial}$$



Ecuaciones paramétricas de la recta en el espacio

La obtención de las ecuaciones paramétricas se logra retomando la ecuación vectorial con sus coordenadas y después expresarla coordenada a coordenada:

- $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Separando por coordenadas resulta:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases} : \text{ecuaciones paramétricas}$$

Ecuación continua de la recta en el espacio

Al despejar λ en cada ecuación paramétrica se obtiene:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3} : \text{ecuación continua}$$

Ecuaciones implícitas de la recta en el espacio

Siguiendo el mismo razonamiento realizado para la recta en el plano, se puede operar en la ecuación continua anterior. Tomando dos términos de la igualdad, y teniendo en cuenta que el punto P y el vector director $\vec{v}$ son elementos conocidos, obtendremos ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases} : \text{ecuaciones implícitas}$$

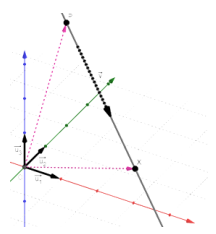
Cada una de esas dos ecuaciones definen un plano (como se estudiará a continuación) y por lo tanto el corte de dos planos (si se produce) define una recta. Para que la solución a dicho sistema exista y se compruebe que ambos planos efectivamente se cortan (y no son paralelos), obsérvese que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ tiene que ser 2.

4.4. El plano en el espacio. Ecuaciones

Definición: dentro del espacio afín A_3 , un plano es una variedad lineal afín de dimensión 2, por lo que su subespacio director está generado por dos vectores linealmente independientes $\vec{v}, \vec{w}$. Por lo tanto, es suficiente con describir un punto de esta variedad y el subespacio director para definir un plano.

Del mismo modo que al estudiar las ecuaciones de la recta en el espacio, definiremos previamente las condiciones de partida:

- Tomaremos el siguiente sistema de referencia: $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $u_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,1)$
- Las coordenadas de un punto P del plano son (p_1, p_2, p_3)
- Las coordenadas de los vectores linealmente independientes del subespacio director son $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$
- Por tanto, en todas las ecuaciones que definamos en adelante, estas se verificarán si y sólo si, sustituimos (x, y, z) por un punto del plano –el punto X .



Ecuación vectorial del plano

A partir de la definición anterior, podemos decir que X pertenece al plano si $\overrightarrow{PX}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Como $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$, concluimos:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \text{ecuación vectorial}$$

Así, la interpretación geométrica de esta ecuación supone que cada punto es una traslación geométrica del punto P según una combinación lineal de vectores proporcionales a $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Ecuaciones paramétricas del plano

Expresando en coordenadas la ecuación vectorial obtenemos:

$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Separando coordenadas:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} : \text{ecuaciones paramétricas}$$

Ecuación implícita o general del plano

Dado un punto $X = (x, y, z)$, el sistema de ecuaciones paramétricas tendría como incógnitas λ y μ . Este sistema solo tendría solución si el rango de la matriz ampliada es dos. Pero además, sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es dos porque $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes. Dadas estas condiciones, X pertenece al plano si y sólo si:

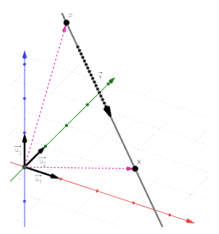
$$\begin{vmatrix} x - p_1 & v_1 & w_1 \\ y - p_2 & v_2 & w_2 \\ z - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Y si desarrollamos el determinante teniendo en cuenta que el punto P y los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ eran elementos conocidos, obtendremos una ecuación con la siguiente forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0 : \text{ecuación general o implícita del plano}$$

Esta ecuación coincide con la forma ya anticipada al definir las ecuaciones implícitas de la recta en el espacio como un sistema de dos ecuaciones/planos que intersecan.

Ahora bien, con los planos también resulta muy útil conocer un vector normal al plano $\vec{n} = (A, B, C)$, por lo que vamos a construirla por otra vía para poder interpretarla geoméricamente. Puesto que sabemos que todo vector $\overrightarrow{PX}$ que pertenezca al plano será perpendicular a $\vec{n}$, aplicando las propiedades del producto escalar obtenemos:



$$\begin{aligned}
 0 &= \vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = (A, B, C) \cdot (x - p_1, y - p_2, z - p_3) \\
 &= A(x - p_1) + B(y - p_2) + C(z - p_3) \\
 0 &= Ax + By + Cz + D \\
 \text{con } D &= -Ap_1 - Bp_2 - Cp_3
 \end{aligned}$$

Ecuación segmentaria del plano

Análogamente a lo estudiado en el caso de la recta, siempre que el plano corte a los 3 ejes de coordenadas, el plano contendrá a 3 puntos de la forma $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. En este caso, dos vectores directores podrían ser $\overrightarrow{AB}(-a, b, 0)$ y $\overrightarrow{AC}(-a, 0, c)$, y la ecuación del plano se obtendría así:

$$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y-0 & b & 0 \\ z-0 & 0 & c \end{vmatrix} = (x-a)bc - (-abz) - (-acy) = bcx + acy + abz - abc = 0$$

Y dividiendo todo por abc obtenemos:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 : \text{ecuación segmentaria}$$

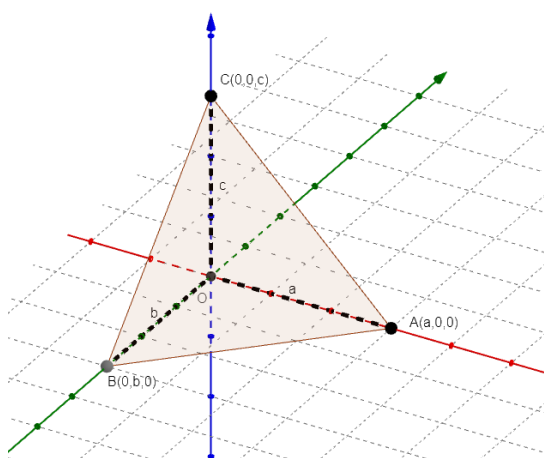


Figura 4.6. La ecuación segmentaria del plano permite identificar fácilmente los puntos de corte con los ejes. Fuente: *GeoGebra*, elaboración propia.

4.5. Relaciones afines de rectas y planos

Las relaciones afines no son más que las posiciones relativas que entes geométricos como las rectas y los planos pueden guardar entre sí. En tanto que relación afín, nos interesa la existencia o no de elementos comunes de entre los definidos por cada variedad lineal afín, por lo tanto no haremos aquí referencia a nociones métricas concretas como la distancia o el ángulo que pueda darse entre ellos.

En concreto, estudiaremos las relaciones afines de rectas en el plano afín, y rectas y planos en el espacio afín (en sus diversas combinaciones).

Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Dos rectas en el plano solo tienen tres posibles posiciones relativas: compartir todos sus puntos (ser coincidentes), compartir un solo punto (ser secantes) o no compartir ninguno (en cuyo caso son paralelas y comparten dirección).

Sea cual sea la forma en que se presenten las ecuaciones de las rectas r y s , siempre podríamos comprobar el caso del que se trata haciendo una interpretación geométrica. Para ello basta con obtener sus vectores directores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$, ya sean estos evidentes según la ecuación utilizada o deducidos a partir de dos puntos de cada una de ellas.

- Si los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales, al tener direcciones diferentes, las rectas serán secantes.
- Si los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales tendríamos que distinguir si son paralelas o coincidentes:
 - Si tomando un punto de cada recta (P_r y P_s respectivamente), el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ es también proporcional a ellos, entonces serán coincidentes.
 - En caso contrario, serán paralelas.

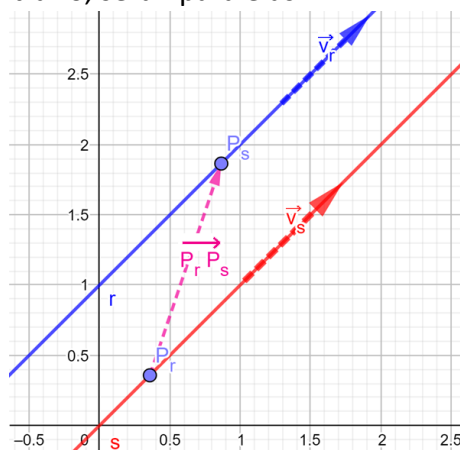
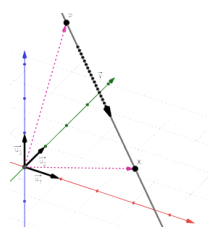


Figura 4.7. Dos rectas paralelas. En este caso el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ no será proporcional a $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$.
Fuente: GeoGebra, elaboración propia.

Otra forma de averiguarlo sería discutiendo el sistema que formarían las ecuaciones de las dos rectas en su forma implícita. Si tenemos $r \equiv Ax + By + C = 0$, $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$ podemos discutir el sistema observando los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, sabiendo que el número de incógnitas es dos (teorema de Rouché-Fröbenius).

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} \text{ y } \widehat{M} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

- Si $rgM = 1$, y $rg\widehat{M} = 1$, el sistema es compatible indeterminado, y como hay infinitas soluciones las rectas son coincidentes.
- Si $rgM = 1$, y $rg\widehat{M} = 2$, el sistema es incompatible, y al no haber solución, no hay puntos comunes y las rectas son paralelas.
- Si $rgM = 2$, entonces $rg\widehat{M} = 2$, el sistema es compatible determinado, hay una única solución y las rectas son secantes (la solución nos da el punto de corte).



Posiciones relativas de tres rectas en el plano

Podemos razonar análogamente dos a dos, por cualquiera de los caminos vistos anteriormente, pero lo más eficaz quizá sea discutir directamente el sistema que forman las rectas. Por ejemplo:

Sean $r \equiv Ax + By + C = 0$, $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$, $t \equiv A''x + B''y + C'' = 0$

Sean sus matrices asociadas $M = \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ y $\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$

- Si $rgM = 1$, y $rg\hat{M} = 1$, el sistema es compatible indeterminado (tenemos dos incógnitas), y como hay infinitas soluciones las tres rectas han de ser coincidentes.
- Si $rgM = 1$, y $rg\hat{M} = 2$, el sistema es incompatible, y al no haber solución, no hay puntos comunes a las tres rectas. Como $rgM = 1$, las rectas consideradas de dos en dos tienen que ser paralelas o coincidentes:
 - o Si dos de las ecuaciones son proporcionales (hay filas en $\hat{M}$ proporcionales), esas rectas serán por tanto coincidentes.
 - o Si las ecuaciones no son proporcionales, tendremos tres rectas paralelas.
- Si $rgM = 2$, y $rg\hat{M} = 2$, el sistema es compatible determinado, hay una única solución y por lo tanto un único punto en común a las tres rectas.
 - o Si dos de las ecuaciones son proporcionales, esas rectas serán por tanto coincidentes y la tercera será secante a ellas.
 - o Si las ecuaciones no son proporcionales, entonces las rectas se cortan en un punto siendo además el único que comparten dos a dos.
- Si $rgM = 2$, y $rg\hat{M} = 3$, el sistema es incompatible, y las rectas no tienen ningún punto en común.
 - o Si dos de las filas de M son proporcionales, esas rectas serán por tanto paralelas y la tercera será secante a ellas, cortándose en un punto distinto con cada una de ellas.
 - o Si en M no hay filas proporcionales, las rectas serán secantes dos a dos y los cortes se producen en 3 puntos distintos.

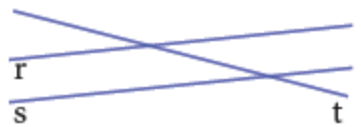
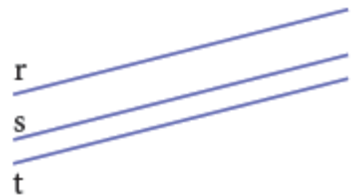


Figura 4.8. Posiciones relativas de 3 rectas en el plano.
Fuente: elaboración propia.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Dado el estudio de casos que se ha descrito en el plano al analizar las posiciones relativas de dos rectas, el planteamiento en el espacio incorpora una cuarta casuística: que las rectas no sean paralelas, ni coincidentes y además no tengan ningún punto en común, es decir, se crucen en el espacio.

Siguiendo análogamente el primer razonamiento que aplicamos anteriormente, interpretando geoméricamente la situación obteniendo puntos y vectores de las rectas, solo tendríamos que añadir la distinción de qué ocurre cuando los vectores directores tienen diferente dirección: ¿se cortan o se cruzan?

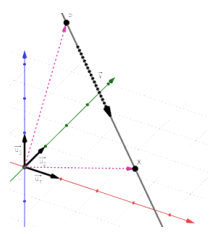
Retomando el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ que unía un punto de cada recta, nos bastaría comprobar si este es una combinación lineal de los vectores directores que habíamos hallado para cada una de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$. De serlo, todos estarán en el mismo plano y por ende, las rectas se cortan. De lo contrario, los tres vectores son linealmente independientes y las rectas se cruzan. Comprobar esto es fácil analizando el determinante de la matriz formada por las tres coordenadas de los tres vectores: si fuera 0, demostraría que cualquiera de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros y las rectas se cortan.

Además, también podríamos hacerlo discutiendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones implícitas de las rectas r y s , y estudiando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada (que además tendrán un valor ≥ 2 puesto que cada par de ecuaciones está definiendo una recta).

$$\text{Sean } r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0 \\ A_2'x + B_2'y + C_2'z + D_2' = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sus matrices asociadas son } M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' \end{pmatrix} \text{ y } \widehat{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & D_2' \end{pmatrix}$$

- Si $rgM = 2$, y $rg\widehat{M} = 2$, el sistema es compatible indeterminado (tendríamos tres incógnitas), y como hay infinitas soluciones las tres rectas han de ser coincidentes.
- Si $rgM = 2$, y $rg\widehat{M} = 3$, el sistema es incompatible, y al no haber solución, no hay puntos comunes a las tres rectas. Como seguimos teniendo que $rgM = 2$, las rectas tienen que ser paralelas.
- Si $rgM = 3$, y $rg\widehat{M} = 3$, el sistema es compatible determinado, hay una única solución y por lo tanto las rectas se cortan.
- Si $rgM = 3$, y $rg\widehat{M} = 4$, el sistema es incompatible, y las rectas no tienen ningún punto en común pero tampoco son paralelas porque $rgM = 3$: luego las rectas se cruzan.



Posiciones relativas de una recta y un plano

Evidentemente ahora trabajaremos solo en el espacio para que tenga sentido plantearse esta cuestión. Podemos encontrar tres posibilidades: que la recta esté contenida en el plano, que la recta sea paralela al plano, o que la recta corte al plano.

Podríamos razonar de forma similar al planteamiento aplicado para tres rectas en el espacio, obteniendo las ecuaciones implícitas de la recta y la del plano y discutiendo el sistema que forman esas tres ecuaciones (el rango de la matriz de coeficientes seguirá siendo ≥ 2 puesto que dos de ellas definen una recta, y el resto del desarrollo puede ser considerado trivial una vez visto el caso anterior).

Un razonamiento diferente puede darse definiendo la recta en ecuaciones paramétricas y el plano en ecuación implícita. En ese caso bastaría sustituir cada coordenada de la recta en la ecuación implícita:

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases} \quad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A(p_1 + \lambda v_1) + B(p_2 + \lambda v_2) + C(p_3 + \lambda v_3) + D = 0$$

Y operando los coeficientes conocidos quedaría de la forma $R\lambda + S = 0$

- Si $R = 0$, $S = 0$, cualquier punto de la recta estaría contenida en el plano, pues el parámetro λ de la recta podría tomar cualquier valor y se seguiría satisfaciendo la igualdad.
- Si $R = 0$, $S \neq 0$, no habría ningún punto de la recta que satisfaga la ecuación del plano, luego la recta ha de ser paralela al plano.
- Si $R \neq 0$, la ecuación de primer grado a la que hemos llegado tiene una única solución, el punto en el que la recta y el plano se cortan.

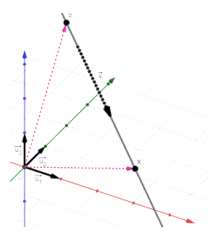
Posiciones relativas de dos o tres planos

Dos o más planos en el espacio solo pueden ser coincidentes, paralelos, o secantes. Dos planos que son secantes en el espacio definen una recta (como era evidente en la definición de la recta mediante ecuaciones implícitas) y además, 3 planos que son secantes dos a dos, tendrán un único punto en común. Veamos como hallarlo.

Para el caso de dos planos entre sí, podríamos recurrir al vector normal al plano:

$$\text{Sea } \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \text{ y su vector normal } \vec{n} = (A, B, C), \\ \text{y } \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0, \text{ y su vector normal } \vec{n}' = (A', B', C')$$

- Si $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ no son proporcionales sus direcciones son distintas, y por tanto los planos se cortan.
- Si $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ son proporcionales habría que considerar si un punto P de π , satisface la ecuación de π' , en cuyo caso serían coincidentes. En caso contrario, los planos serían paralelos.



Otra forma de estudiarlo sería discutir el sistema de ecuaciones que forman los planos. Vamos a desarrollar este procedimiento para el caso de tres planos.

$$\text{Sean } \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

$$\text{Y sus matrices asociadas } M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } \hat{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

- Si $rgM = 1$, y $rg\hat{M} = 1$, el sistema es compatible indeterminado (tenemos tres incógnitas), y como hay infinitas soluciones los tres planos han de ser coincidentes.
- Si $rgM = 1$, y $rg\hat{M} = 2$, el sistema es incompatible, y al no haber solución, no hay puntos comunes a los tres planos. Como $rgM = 1$, los vectores normales de los tres planos comparten dirección:
 - o Si dos de las ecuaciones son proporcionales (hay filas en $\hat{M}$ proporcionales), estos planos serán por tanto coincidentes y el tercero paralelo a ellos.
 - o Si las ecuaciones no son proporcionales, tendremos tres planos paralelos.
- Si $rgM = 2$, y $rg\hat{M} = 2$, el sistema es compatible indeterminado, luego hay una recta común a los tres planos.
 - o Si dos de las ecuaciones son proporcionales, esos planos serán por tanto coincidentes y el tercer plano será secante a ellos.
 - o Si las ecuaciones no son proporcionales, entonces los tres planos se cortan definiendo la misma recta, sin compartir dos a dos ningún otro punto.
- Si $rgM = 2$, y $rg\hat{M} = 3$, el sistema es incompatible, y las rectas no tienen ningún punto en común a los tres planos. Como $rg\hat{M} = 3$, hemos descartado toda coincidencia, teniendo que:
 - o Si dos de las filas de M son proporcionales, estos planos serán por tanto paralelos y el tercero será secante a ellos, definiendo una recta distinta con cada plano que son paralelas entre sí.
 - o Si en M no hay filas proporcionales, los planos son secantes dos a dos y los cortes definen tres rectas distintas que además tienen que ser paralelas entre sí.
- Si $rgM = 3$, y $rg\hat{M} = 3$, el sistema es compatible determinado, hay una única solución y por lo tanto los planos ante ser secantes dos a dos y tienen un único punto en común a los tres.

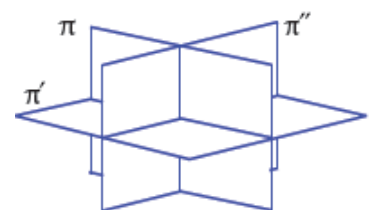
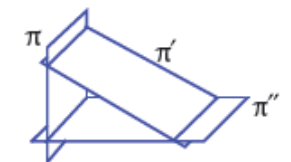
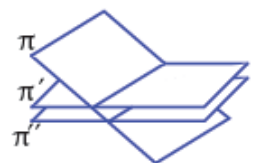
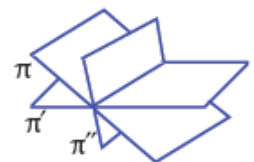
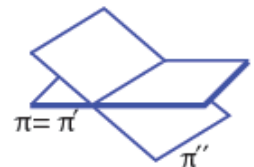
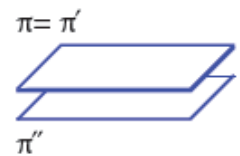
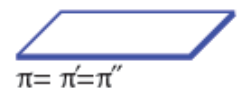


Figura 4.9. Posiciones relativas de 3 planos en el espacio.

Fuente: elaboración propia.

5. Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y la enseñanza

La fundamentación didáctica de este trabajo se va a basar en una cuestión fundamental de los contenidos que abordará la unidad didáctica a desarrollar: el hecho de que la Geometría Analítica se trate de forma más o menos separada de la Geometría Sintética. En concreto, preocupan especialmente las dificultades de aprendizaje que esto acarrea, no solo en 4º de la ESO, curso en el que se centrará el trabajo, sino en los niveles posteriores si esta interconexión no se hace evidente y se practica.

Estas dificultades pueden conducir a una desorientación e incompreensión de los problemas planteados, por lo que se llega a apreciar “una fuerte tendencia a la ‘algoritmización’ de los contenidos enseñados” (Ancochea, 2011, p. 534), o dicho en otras palabras, una automatización de los procesos de resolución de problemas sin comprender su contenido y su significado. Es decir, la desconexión con el resto de conocimientos previos y la abstracción que se impone lleva al alumnado a tratar de resolver ejercicios por asociación a otro previamente resuelto: “esto se resuelve como caso x” siguiendo los pasos memorizados y sin ni siquiera plantear un dibujo esquemático del problema geométrico.

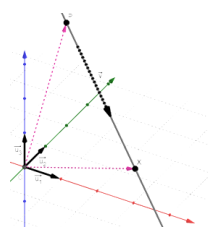
Para evitar este hecho, analizaremos algunos problemas generales de los que puede adolecer la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en general y la Geometría en particular.

5.1. ¿Qué es el autismo temático?

Ocurre con cierta frecuencia en nuestras aulas que el alumnado pregunta para qué sirven los conocimientos que se adquieren. Es más, debido a la praxis predominante basada en poner en práctica los conocimientos adquiridos directamente sobre ejercicios o pseudoproblemas encauzados para aplicar tal o cual aprendizaje, el alumnado tiende a encasillar los contenidos en compartimentos estancos, no ya entre asignaturas diferentes, sino también entre bloques y partes de una misma asignatura.

Josep Gascón (2003 y 2004) explicó este fenómeno aplicándolo en concreto a la disciplina matemática. Para ello, se aproximó primero a los requisitos de un aprendizaje no ya significativo sino al menos bien estructurado, llegando a la conclusión de que para que un conocimiento pueda darse en la escuela con sentido, se necesita al menos que incluya una de las siguientes características:

- que provenga o conecte con asuntos de interés propios la sociedad del momento y de alguna manera al alcance del alumnado (que sea significativo),
- que conecte con contenidos propios de la materia, ya sean previos o posteriores (que esté estructurado didácticamente),



- que esté conectado con otras cuestiones que se estudien en otras materias y disciplinas (interdisciplinariedad y aplicación).

Cuando esto no ocurre, se dice que son conocimientos encerrados en sí mismos ya que han perdido la referencia al porqué y al para qué. Esto es el autismo matemático (Gascón, 2004) y, como veremos, ocurre especialmente en algunos bloques como la Geometría Analítica.

Pero antes de ello, intentaremos razonar qué elementos conducen a este fenómeno. A partir de la jerarquía de niveles de codeterminación que propuso Chevallard (2001) para entender la estructura de los currículos y los planes de estudios, podríamos estructurar cuestiones que, suscitadas en la esfera de lo social, llegan a ser tratadas en la esfera pedagógica del aula. Este sería el planteamiento teórico por el cual se decide lo que los ciudadanos del futuro deben aprender en la institución educativa.

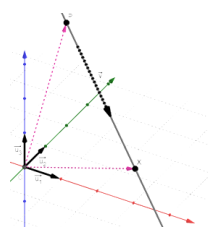


Figura 5.1. Ejemplificación de la jerarquía de niveles de codeterminación de Chevallard adaptada al caso que nos ocupa. Fuente: elaboración propia.

Realizando el camino inverso, cuando las cuestiones matemáticas planteadas y trabajadas en última instancia en el aula no consiguen conducir a parte alguna en niveles superiores (o paralelos) de dicha jerarquía, incurriríamos en dicho autismo temático. Pero se plantearía entonces el interrogante de si es responsabilidad exclusivamente del docente alcanzar dicha coherencia o, dicho de otra manera, hasta qué límite el profesorado está capacitado para asumir tal responsabilidad. ¿Cómo se podrían combatir entonces dichas barreras? ¿Tienen sentido incluso las divisiones establecidas?

De hecho, de nuevo el profesor Gascón (2003, p. 27) pretendía mostrar que, “en Secundaria, no sólo ha desaparecido la razón de ser de las cuestiones que se estudian a nivel temático, sino también la razón de ser de las diversas ‘áreas’ [hoy bloques] en las que se divide la matemática escolar”. Se trata de una afirmación no exenta de controversia y en cierto modo provocadora, pero la explicación que se da es que cuando las cuestiones parecen surgir de temas aislados, no solo respecto de niveles jerárquicos superiores (como veíamos antes) sino aislado también de disciplinas y áreas con las que debería establecer ciertos paralelismos, surge la desorientación y las preguntas del alumnado con las que abríamos este apartado. Además, paradójicamente es una decisión incuestionable por cuanto viene definida en el primer nivel de concreción curricular de nuestro sistema educativo. Por lo tanto, no todo ello depende de la profesión docente en última instancia.

Por otro lado, existe también una separación entre los niveles de *disciplina*, *área* y *sector* (atribuibles a la epistemología matemática y no cuestionables aparentemente por la



didáctica) y los de *tema* y *cuestión*, relegados a la aplicación pedagógica. Es decir, a la compartimentación establecida por parte de los legisladores se incorpora también la estructura de la epistemología, fruto tanto de la tradición e historia de las Matemáticas, y que quizá debería replantearse de alguna forma a la luz a través de los resultados ofrecidos por los investigadores en Didáctica de las Matemáticas.



Figura 5.2. Agentes implicados y barreras que afectan a la interconexión de la jerarquía de niveles de codeterminación. La potencial actuación del profesorado, no exime de la corresponsabilidad del resto de agentes. Fuente: elaboración propia.

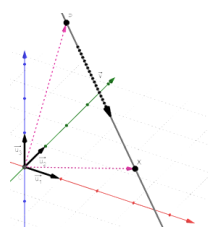
La discusión y el cuestionamiento de esta estructura superan los objetivos y las limitaciones de este trabajo y queda en manos de los investigadores especializados en la didáctica de las matemáticas y en las personas encargadas del diseño de los currículos oficiales. Sin embargo, la posibilidad de hacer cuanto esté en nuestra mano por interconectar y relacionar *cuestiones* que pertenecen a *temas*, *sectores*, *áreas* o incluso *disciplinas* distintas, y a través de ello con elementos de nuestra *sociedad*, sí que está a nuestro alcance en la práctica diaria.⁸

5.2. El caso de la Geometría

Como hemos anunciado, este trabajo fin de máster abordará en concreto la división que se realiza entre Geometría Sintética y Geometría Analítica, a pesar de que deberían tratarse de forma continua y complementaria es un claro ejemplo de este autismo temático del que venimos hablando. De hecho esta afirmación no es exclusiva de quien suscribe estas palabras, sino que el mismo Gascón (2002) en un trabajo anterior demostró que “la presunta controversia entre la Geometría Sintética y la Geometría Analítica es, en última instancia, una falsa controversia fruto de un análisis epistemológico superficial.”

También lo es la suposición de que la construcción y resolución de problemas geométricos con regla y compás (puntos y rectas notables del triángulo, tangencias, paralelismo o perpendicularidad...) son abordados de forma complementaria desde disciplinas como la Educación plástica y visual o el Dibujo. Durante la secundaria no se contempla necesariamente este estudio basado en sus propiedades como lugares geométricos, ni se hace tampoco evidente la posibilidad de tratar dichas propiedades

⁸ Y todo ello sin perder de vista la afirmación de Gascón (2003, p. 32) “Si para acceder al estudio de una cuestión matemática concreta se requiere que la cadena de niveles que debe desembocar en esa cuestión cruce varios sectores diferentes de un área, entonces el autismo temático provocará que dicha cadena sea muy difícil de establecer y esto impedirá (o hará muy poco probable) que dicha cuestión pueda ser estudiada efectivamente.



de manera algebraica. Las expresiones “eso es de matemáticas”, o “eso es de dibujo” son frecuentes en las aulas de secundaria (incluso en las de bachillerato) cuando en realidad se están tratando cuestiones claramente afines.

5.3. De la Geometría Sintética en la ESO a la Geometría Analítica en el Bachillerato

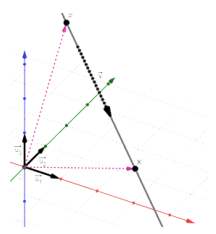
Pero, ¿de dónde nace esta división? En los años sesenta, matemáticos como Choquet, Dieudonné, Artin, Godement, Freudenthal o Santaló compartieron puntos de vista sobre el lugar que debían ocupar la Geometría Sintética (basada en pruebas más sencillas, en axiomas y con resultados intuitivos) y la Geometría Analítica (que incorpora la potencia del cálculo algebraico pero con más dificultad para evidenciar el significado de lo que se consigue). Este debate tuvo una gran influencia en la forma en que la Geometría se enseña hoy nuestra enseñanza, iniciándose de forma sintética en la etapa obligatoria para incorporar finalmente la analítica en la etapa post-obligatoria (Gascón, 2002).

Este punto de inflexión, que viene a producirse entre 4º de la ESO y el bachillerato, plantea un problema didáctico que en opinión de este autor (Gascón, *op. cit.*) obedece a “causas circunstanciales que pueden ser modificadas”.

La Geometría Sintética sin embargo, tiene evidentes beneficios como práctica mental y espacial para ayudar a comprender nuestro entorno (físicamente), las ciencias experimentales y en concreto las propias matemáticas. Son evidentes los beneficios mutuos que puede producir además, interrelacionando otras asignaturas como el Dibujo o la Física.

Para superar esta dicotomía, autores como André Revuz, cuestionan que exista la Geometría como algo “independiente dentro de las Matemáticas”, y lo inscribe dentro del modelo de enseñanza de las matemáticas basado en *situaciones* (contextos reales), *modelos* (esquema matemático que se adapta a una situación) y *teorías* (el modelo matemático considerado con independencia de las particularidades de una situación en concreto). En este marco, señala que existen contenidos geométricos dentro de distintos bloques de las matemáticas que nos llevarían a no considerar como situaciones geométricas exclusivamente a las situaciones basadas en aquellas relativas a magnitudes del espacio real (del espacio físico). Es más, señala que de esta forma no se podría hablar estrictamente de *teorías* en Geometría, sino que serían *modelos* o *situaciones* geométricas que se producen dentro de otros bloques de las matemáticas (Revuz, 1971, visto en Gascón, *op. cit.*).

Aplicando estas consideraciones, y ampliando el concepto de situación y de modelización matemática a las nociones enunciadas por Chevalard (1989, visto en Gascón, *op. cit.*), llegaríamos a algunas recomendaciones entre las que destacaremos aquí dos que nos llevarán a trenzar mejor los contenidos geométricos dentro de la didáctica de las matemáticas:



- una que nos impediría enseñar la Geometría al margen de otros aspectos matemáticos (aritmética, álgebra, combinatoria...),
- y otra según la cual se deben buscar modelos y situaciones geométricas de diversa índole (topológicos, métricos, afines, proyectivos...).

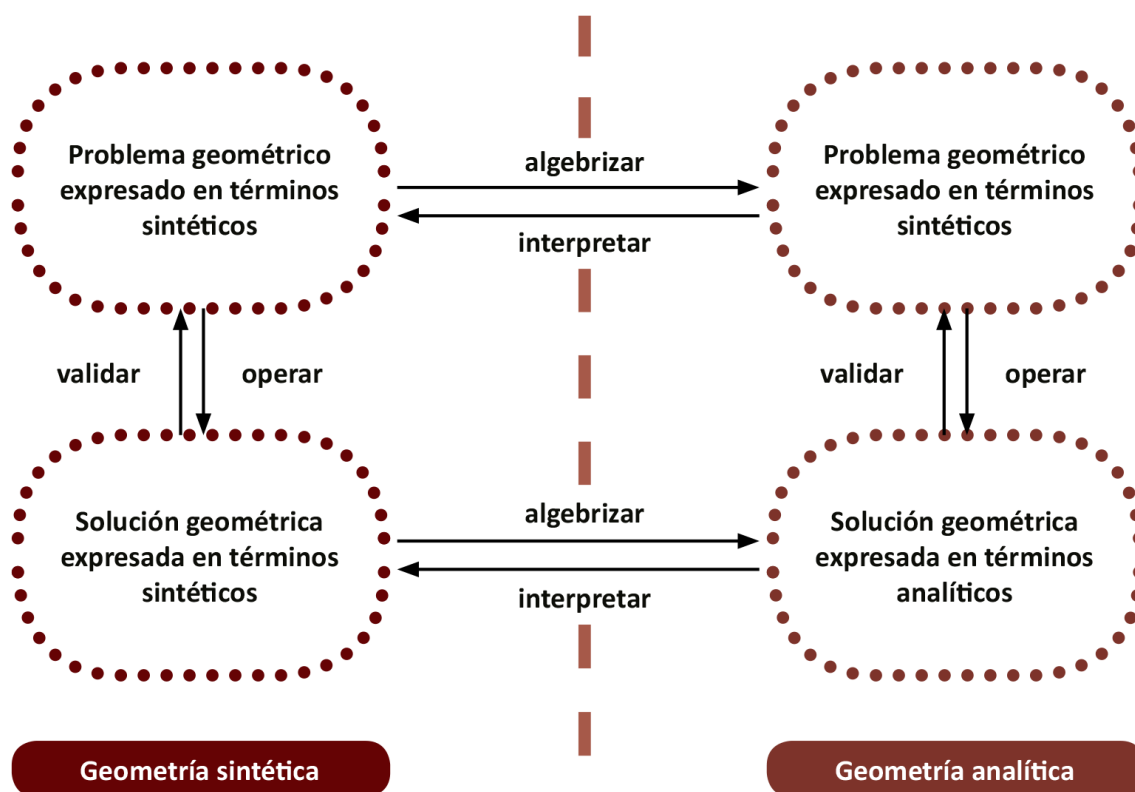
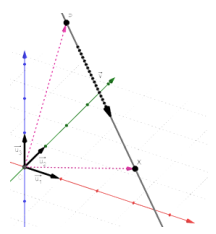


Figura 5.3. Adaptación del esquema de modelización matemática propuesto por Treffers (1987) y Maaß (2006a) a la interrelación mutua de la Geometría Sintética y la Analítica. Fuente: elaboración propia.

Así, aprender Geometría se relacionará con los procesos de modelización matemática, solo que aplicando conocimientos de tipo geométrico (por ejemplo, aplicando relaciones geométricas a un sistema de ecuaciones), o con la construcción de conocimiento matemático a partir de un sistema geométrico (por ejemplo en las demostraciones, como la del teorema de Pitágoras).

Esto se concreta más claramente en la denominada “Tesis de continuidad entre las geometrías sintética y analítica” según la cual, la progresiva ampliación de los problemas que se plantean con relaciones geométricas, van a requerir la aportación cada vez mayor de herramientas de cálculo y técnicas analíticas, y detrás de la cual se sitúa este trabajo fin de máster.

Pero pongamos un ejemplo concreto (aunque algunos de los contenidos de este ejemplo excedan ahora mismo lo que se estudia en 4º de la ESO). Planteamos un problema como el siguiente:



Dibuja utilizando instrumentos de dibujo como la regla y el compás una circunferencia de radio 3 cm, que pase por el punto P y sea tangente a la recta r.

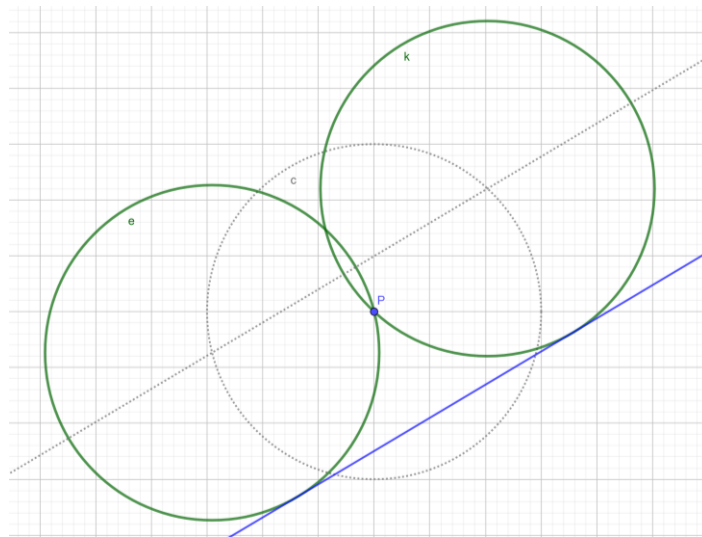


Figura 5.4. Planteamiento y resolución sintética del problema. Fuente: elaboración propia con GeoGebra.

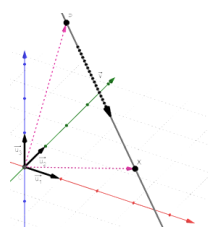
La solución a este ejercicio es sencilla aplicando los conocimientos analíticos de *lugar geométrico*, tanto de la distancia de los puntos de una circunferencia con respecto a su centro (circunferencia con centro en P y radio 3 cm), como de los puntos que están separados una distancia en concreto de una recta (rectas paralelas a la distancia dada). Ambas condiciones, que pueden ser dibujadas, me determinarán dos puntos que son los centros de una de las circunferencias pedidas.

Pues bien, si proponemos un problema equivalente, o algebrizamos esta situación, estamos ante un planteamiento analítico guiado por el procedimiento sintético:

Hallar la ecuación de una de las circunferencias de radio 3, que pase por el punto $P=(3,3)$ y sea tangente a una recta r definida por la ecuación $2x-3,5y=4,25$.

No sería difícil seguir la construcción anterior aplicando los conocimientos analíticos de perpendicularidad y pendiente de una recta, distancia entre dos puntos, o las ecuaciones de una circunferencia, para finalmente resolver el sistema de ecuaciones que se plantea.

Por ejemplo: tomar un punto de la recta y un vector perpendicular de módulo 3 en el sentido deseado, para después hallar la ecuación de una recta paralela a r que pase por el extremo de este vector. Paralelamente, tomamos la ecuación de la circunferencia con centro en P y radio 3. Y finalmente resolvemos el sistema para hallar las coordenadas de los centros de las circunferencias solución.



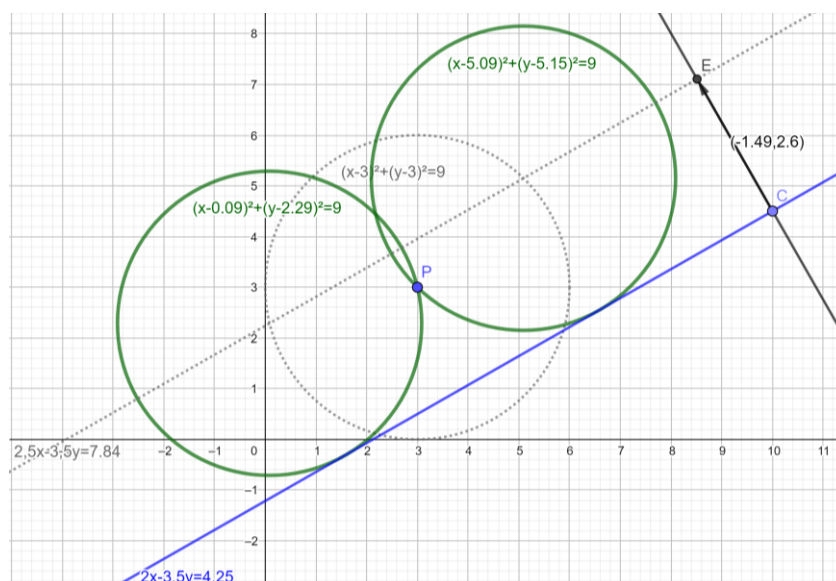
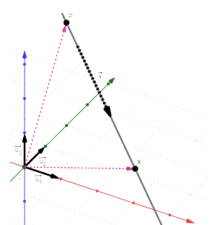


Figura 5.5. Ilustración de la solución analítica del problema. Fuente: elaboración propia con *GeoGebra*.

Es más, con esto, solo habríamos demostrado al alumnado que existe otro camino para resolver un problema, que aparentemente ya teníamos resuelto. Pero ahora es el momento de ir mostrando la potencia de esta nueva perspectiva. Se trataría de mostrarles que los datos como el radio, el punto P o la propia recta r, cualquiera de ellos podría ser un parámetro variable y aun así podríamos construir un modelo matemático que definiera las infinitas soluciones en función de las variables (ver figura 5.6, más adelante).

De esta manera se vería siempre la complementariedad que existe entre ambas formas de ver la Geometría, y cuando en bachillerato terminen por aparecer las técnicas analíticas, se haya llegado a ellas de forma continua desde la ESO y siendo conscientes de su necesidad. Es decir, se podrían plantear problemas en los últimos cursos de secundaria donde las técnicas analíticas no fuesen suficiente, y retomar en bachillerato dichos problemas demostrando la potencia de las nuevas técnicas. Pero no nos adelantaremos aún a concretar dichas propuestas.

Todo esto además lo hemos visto en el análisis de algunos libros de texto, donde se intenta dotar de significado geométrico a expresiones algebraicas y en los distintos bloques del currículo. También habría que involucrar más el cálculo algebraico en la resolución de problemas geométricos sintéticos. Y finalmente, herramientas como *GeoGebra* pueden ser un gran aliado para evidenciar la interconexión existente entre los bloques, gracias a sus interfaces gráfica y analítica.



5.4. *GeoGebra*, una herramienta para este objetivo

Investigadores como Ancochea (2011) han propuesto caminos para integrar las técnicas de construcción y estudio de las figuras (la Geometría Sintética) junto con aquellas de la Geometría Analítica. En este camino, herramientas como *GeoGebra* han demostrado ser de gran ayuda como ahora veremos.

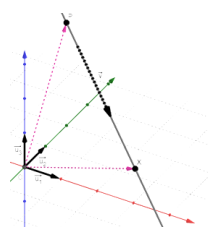
Retomando aquí de nuevo la distinción que se observa también entre el tratamiento que se da a los problemas geométricos desde las disciplinas del Dibujo, los programas de geometría dinámica nos dan herramientas para tratar un mismo problema desde perspectivas complementarias, atendiendo a las propiedades métricas junto a un tratamiento algebraico de las mismas. Y no solo como un elemento ilustrativo, sino como una herramienta en sí misma.

La posibilidad que otorga *GeoGebra* para construir elementos y figuras, ya sea mediante puntos, vectores o rectas (entre otros) introducidos gráficamente a través de comandos, como a través de expresiones algebraicas y coordenadas. Es decir, combina una interfaz gráfica, con la posibilidad de introducir y mostrar en una ventana adyacente las expresiones algebraicas asociadas y aplicar la potencia del cálculo a todo ello. Así pues, es una evidencia visible de la interacción entre las dos perspectivas que venimos mencionado, y al igual que puede usarse en bachillerato para ilustrar gráficamente cualquier proceso analítico (incluso los relacionados con el resto de bloques de la asignatura), está disponible para hacer evidente la relación que existe con las propiedades estudiadas sintéticamente en secundaria.

Todo ello nos llevaría a diseñar procesos de enseñanza-aprendizaje donde el alumnado vaya compaginando siempre ambas visiones y técnicas (a modo ilustrativo primero y como evidencia de su existencia, para ir aprendiendo a dominarlo más tarde y apreciar su potencia y aplicabilidad).

Además plantean 3 estrategias que pueden sernos útiles para tenerlas presentes cuanto intentemos conectar ambos contenidos (Ancochea, 2011; Gascón, 2002):

- “Enunciar problemas del tipo de los que se plantean en la Geometría de la ESO y no son resolubles con las técnicas sintéticas disponibles en dicha etapa educativa.
- Proponer problemas geométricos en el bachillerato que admitan una resolución mucho más sencilla y natural con técnicas sintéticas que con las analíticas.
- Proponer problemas que, si bien exigen técnicas analíticas, requieren casi ineludiblemente la utilización previa de técnicas sintéticas para diseñar una estrategia de resolución.”



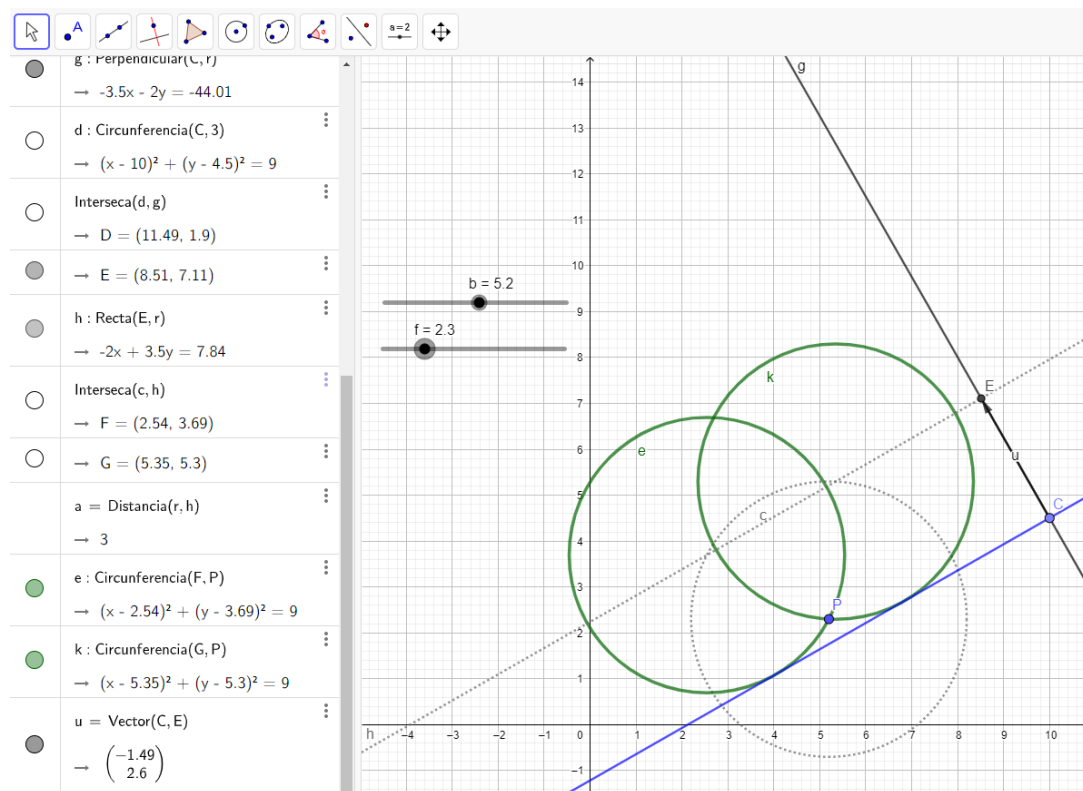


Figura 5.6. Ilustración de la forma de ver el problema anterior en función del parámetro variable de las coordenadas del punto. Fuente: elaboración propia con *GeoGebra*.

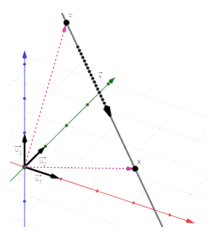
De hecho, este mismo autor (Ancochea, *op. cit.*) plantea un taller enfocado al alumnado de bachillerato, el cual se supone ya inmerso en los problemas de Geometría Analítica, basado en 3 etapas como las siguientes (que en esencia son el ejemplo y la aplicación de la adaptación de la modelización matemática a la Geometría que se han expuesto anteriormente):

- A partir de un enunciado de los de Geometría Analítica, el alumnado debe enfrentarse a una primera “algebrización”. Antes de nada deberán pasar por plantear una resolución sintética (una concreta, a pesar de que el problema pida un estudio de casos en función de uno o varios parámetros). Se trataría de utilizar *GeoGebra* con los conocimientos propios de regla y compás (lugares geométricos), para después plantear las ecuaciones correspondientes y alcanzar la solución.
- En una segunda sesión, ahora sí se trataría de generalizar el problema anterior empleando el uso de parámetros. Esto no plantea mayores problemas tampoco utilizando adecuadamente el sistema de referencia adecuado y los parámetros en *GeoGebra*, por lo que tras este paso intermedio no debería resultar problemático incorporar tales parámetros a las ecuaciones antes planteadas para un caso concreto.

- Finalmente, con la versión analítica del problema planteada, corresponde ahora analizar los distintos casos que pueden producirse e identificarlos con sus correspondientes casos del estudio sintético.

Esta metodología, podría ser interesante para ir planteando en los cursos anteriores el enfoque recíproco: aunque se resuelvan problemas de Geometría Sintética concretos, se deberían ir mostrando las posibilidades del cálculo basado en la Geometría Analítica para plantear soluciones alternativas, cómo afecta un determinado parámetro al problema, etc.

En los cursos anteriores a 4º de la ESO estos contenidos excederían el currículo, por lo que no sería necesario ni posible exigirlos, pero si utilizarlos a modo ilustrativos para ir sentando las bases de un conocimiento que se ampliará más adelante. En 4º de la ESO sería el momento de no perder este enfoque, y recuperar este planteamiento de taller, por muy sencillos que sean los problemas con los que se empiece a trabajar.



6. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica

A lo largo de este capítulo procederemos a la elaboración de una unidad didáctica para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de la ESO. Dicha unidad didáctica abordará los contenidos que el currículo denomina “Iniciación a la Geometría Analítica en el plano [...]”.

6.1. Título

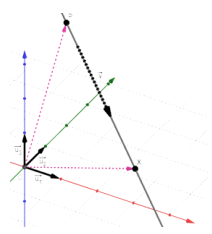
El propio título, “Incorporamos la Geometría Analítica”, pretende ser una declaración de intenciones sobre algunos de los objetivos específicos que esta unidad didáctica tratan de conseguir en su relación con el resto del currículo que abordan los estudiantes.

6.2. Justificación

Tal y como ha quedado patente en este trabajo en la fundamentación curricular, estos contenidos se presentan en 4º de la ESO⁹ como un nuevo enfoque que aportar al estudio de la Geometría en Matemáticas, que a su vez aporta una nueva visión al propio bloque de funciones. Es además una herramienta que será necesario dominar en la etapa del bachillerato, por lo que es esencial que estos conocimientos se incorporen en cierta continuidad y diálogo con los conocimientos previos, así como con las potencialidades del cálculo y análisis geométrico que los sistemas de referencia y la algebrización nos ofrecen.

Se trata por lo tanto de convertir una unidad tradicionalmente operativa, abstracta y donde difícilmente se alcanza un aprendizaje verdaderamente significativo, en un proceso en que el alumnado se involucre, se sienta activo más allá de la realización de tareas repetitivas de afianzamiento y que en último lugar comprenda su sentido y la importancia de su estudio y sus aplicaciones prácticas que ahora podemos empezar a vislumbrar: estudios en Ciencias y Tecnología, y no solo en Física o Matemáticas donde el trabajo vectorial es indispensable, sino también en otras carreras como puedan ser Ingenierías o Arquitectura, Informática y aplicaciones gráficas digitales de diversa índole donde el campo profesional en el que se pueden emplear se multiplica (entre otras muchas aplicaciones y estudios).

⁹ Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato; y Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía [...]



6.3. Contextualización del centro y del aula.

El contexto de aplicación de esta unidad será el del C.D.P. Escuelas Profesionales de la Sagrada Familia, de Linares –Jaén-.¹⁰

El alumnado del centro y del aula

Se trata por tanto de un centro privado de la red concertada, perteneciente a una fundación de la orden religiosa de la Compañía de Jesús. Se sitúa en pleno centro de la localidad de Linares, si bien, acoge unos 1100 alumnos y alumnas de tres núcleos poblacionales socioeconómicamente muy diferenciados:

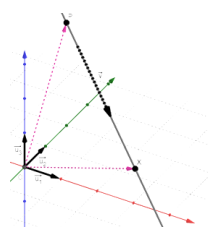
- El entorno de la avenida de Andalucía, donde habitan familias de pocos miembros y un nivel socioeconómico y de formación medio-alto.
- Las zonas de San José, San Antonio y Zarzuela, con familias de muchos miembros, clase socioeconómica baja, escasa formación y precariedad laboral. Alberga además población inmigrante, en buena medida pakistaní y marroquí, por lo que la barrera del idioma está también presente (hay 90 estudiantes no nacionales de hasta 16 nacionalidades).
- El barrio del Cerro, con una elevada marginación social por su pasado chabolista, con grandes familias donde la natalidad es muy elevada, una alta proporción de analfabetismo funcional y una tasa de desempleo altísima que se une a una casi nula capacitación laboral.

El centro tiene todos los niveles educativos desde Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato, FP Básica y Ciclos formativos (incluyendo talleres de mecánica, laboratorios, instalaciones de frío). Es decir no se trata de un centro concertado con un perfil marcado, sino que alberga situaciones socioeconómicas y formativas diversas.

Organizativamente, cada etapa educativa tiene un edificio o ámbito distinto dentro del complejo, con distintas jefaturas de estudios y ETCPs. También tienen comedor y un aula matinal para madrugadores, servicios que también ofertan junto con actividades extraescolares (estas últimas suspendidas en buena medida por la pandemia).

Dentro del centro tienen también alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (unos 116 en todo el centro), como no podía ser de otra forma, incluyendo aquellos de altas capacidades (unos 24 alumnos sumando los de todos los niveles). Todos ellos cuentan con asesoramiento por parte del Departamento de Orientación a la hora de aplicar medidas de atención a la diversidad. En concreto, por poner un ejemplo con el alumnado de altas capacidades, se aplica un programa de enriquecimiento curricular apostando por mantenerlos en su grupo. Este programa consiste en reforzar aquellos ámbitos de su especial interés o competencia –diseño, literatura, etc.- en todos

¹⁰ Se ha optado por este centro por haber podido familiarizarse con sus características durante el periodo de prácticas, para dar un contexto lo más realista posible a esta unidad.



los niveles a excepción de 2º de bachillerato por considerarse que ya es suficientemente exigente en sí mismo, aunque se mantiene la atención psicológica. Esta iniciativa cuenta con el patrocinio externo del programa 'SCHOOL&TALENT' de ENDESA.

Por todo ello, y a pesar de la diversidad de itinerarios que el propio centro ofrece, en la clase de 4º de la ESO y en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas cabe esperar un grupo en cierto modo heterogéneo, tanto en intereses posteriores, como en capacidades. Por lo tanto, la capacidad de adaptación de nuestras enseñanzas y la motivación de todo el alumnado será un objetivo y un reto en sí mismo, y una guía a la hora de aplicar metodologías adecuadas contando con los recursos propios y del centro.

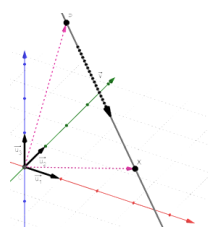
Recursos y coyuntura actual debido a la pandemia causada por COVID-19

Dado que la coyuntura actual es especial en cierto modo, y ello condiciona el contexto el contexto de aplicación de esta unidad didáctica, quisiera reflejar especialmente el impacto directo que ha tenido a efectos organizativos y educativos en el presente curso, elementos a tener en cuenta para la programación del mismo.

Organización de los recursos. Debido a la pandemia, las programaciones docentes han de prever la impartición de docencia sin presencialidad o en condiciones de semipresencialidad si fuera necesario. De hecho, en este centro se ha aplicado un modo de semipresencialidad en Bachillerato y 4º de la ESO según el cual medio grupo asiste a las 3 primeras horas y el otro medio a las últimas de cada jornada, alternando semanas, así como también se ha contemplado el uso de aulas espejo (para evitar altas concentraciones de personas). En cualquiera de los casos, se ha aplicado el uso de videoconferencias con las que resolver dichas situaciones e incluso la difusión de las clases al alumnado confinado. Es decir, esta es una situación que ha de preverse a la hora de plantear las metodologías de esta unidad.

Afortunadamente, se han incorporado equipos informáticos de grabación y proyección en cada clase, y en cierto modo, se han puesto los medios mínimos para llevar esto a cabo.

El proceso de enseñanza aprendizaje. El año pasado, el confinamiento sobrevenido supuso un gran aprendizaje para todos, lo que aprovecharon para mejorar las competencias digitales no solo del profesorado sino del alumnado y familias: documentos colaborativos, uso del teléfono como herramienta profesional/educativa, etc. Todo el alumnado tiene cuenta de G Suite, Classroom y autorización para el uso de teléfonos móviles solo para las actividades que el profesorado desarrolle específicamente.



Así, lo que inicialmente supuso un obstáculo para la aplicación de metodologías colaborativas o cooperativas, poco a poco fue mejorando y es hoy un conjunto de recursos que podemos aplicar a una situación cambiante. Más allá del reto logístico, muchas de estas cosas se han transformado en recursos que permanecen: se pueden grabar las sesiones con Meet (incluso cuando no hay nadie en casa) y sus explicaciones en aplicaciones de pizarra como Whiteboard (permite archivar las sesiones en una pizarra infinita) subiendo todo ello a Classroom y estando disponible para el repaso del alumnado.

Sin embargo, observan el negativo impacto que esta situación ha tenido, y que también hay que tener en cuenta. Se observa entre un alumnado que en no pocos grupos ha mermado su implicación y compromiso con los estudios (ellos mismos reconocen la pérdida del hábito de estudio). En semipresencialidad es difícil que todos se conecten (ya sea por falta de interés o de recursos), se pierde mucho tiempo por problemas técnicos y la participación en clase desde casa es casi nula (el alumnado declara que no se puede ver ni entender tan bien como en clase). Finalmente, el temario que no se impartió el curso pasado ha sobrecargado los contenidos del actual, pero aun así los docentes indican que les preocupa más el negativo impacto que perciben en la actitud, más que el retraso en los contenidos, lo que de nuevo será un reto a incorporar al planteamiento de programaciones y unidades didácticas como esta.

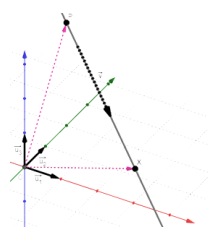
6.4. Objetivos

La unidad didáctica está encuadrada dentro del área de las matemáticas y a su vez dentro de la etapa de la Educación Secundaria obligatoria. Por ello, contemplaremos los objetivos propios de cada uno de ellos, procediendo de lo general a lo particular.

Objetivos de la etapa, Enseñanza Secundaria Obligatoria

La *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*, modificada por la *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre*, recoge en el artículo 22.2 que:

“La finalidad de la Educación secundaria consiste en lograr que los alumnos y alumnas adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanístico, artístico, científico-tecnológico y motriz; desarrollar y consolidar en ellos los hábitos de estudio y de trabajo; así como hábitos de vida saludables, preparándoles para su incorporación a estudios posteriores, para su inserción laboral y formarles para el ejercicio de sus derechos y obligaciones de la vida como ciudadanos”.

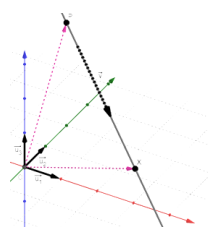


Es decir, se trata de una etapa preparatoria tanto para una posible continuación en sus estudios, como para una segura incorporación a la vida adulta. Además, si observamos los objetivos propios de la enseñanza secundaria (ver tabla 6.1) observamos cómo esto supera claramente el mero aprendizaje de contenidos, ya que buena parte de ello se traducirán en actitudes y destrezas.

Tabla 6.1. Objetivos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Objetivos de la etapa, Enseñanza Secundaria Obligatoria¹¹
a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

¹¹ Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato



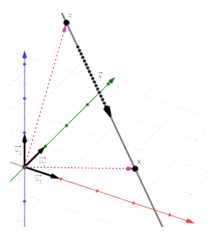
Objetivos de la materia, Matemáticas aplicadas a las enseñanzas académicas

En un siguiente nivel de especificidad, encontramos los objetivos propios de la materia, que son compartidos además por esta asignatura en 3º y 4º de la ESO. De nuevo, si bien es cierto que ya se van integrando algunos contenidos propios de la materia, se puede hacer una lectura transversal que se resume en términos actitudinales: en favor del pensamiento reflexivo, con capacidad de aplicar estrategias de reconocimiento, resolución e interpretación de situaciones susceptibles de ser expresados en términos matemáticos y científicos o mediante herramientas tecnológicas (ver tabla 6.2).

Tabla 6.2. Objetivos de la materia Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Objetivos de la materia Matemáticas aplicadas a las enseñanzas académicas -3º y 4º de la ESO-¹²
1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

¹² Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía [...].



Objetivos específicos de la unidad didáctica

Finalmente, la redacción de esta unidad persigue unos objetivos específicos en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en nuestros centros educativos.

Tabla 6.3. Objetivos específicos de la unidad: “Incorporamos la Geometría Analítica”.
Fuente: elaboración propia.

Objetivos de la Unidad
Incorporar los contenidos propios de la Geometría Analítica en pie de continuidad con otras partes de la Geometría y con conexiones evidentes con otros bloques como el cálculo, el álgebra o las funciones.
Interrelacionar la Geometría Analítica con otras materias como la Física o el Dibujo, así como con sus aplicaciones en la vida cotidiana, como medio para evidenciar la utilidad de este aprendizaje.
Alcanzar un aprendizaje significativo de los contenidos Geometría Analítica, que sirva de motivación para su trabajo y de base para su ampliación posterior.
Incorporar el uso de metodologías que se adapten al alumnado y faciliten la comprensión de los conceptos abstractos trabajados.

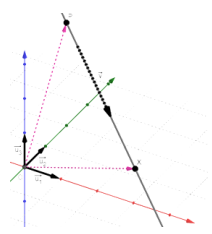
6.5. Competencias clave

Viendo la lectura en clave actitudinal que hemos realizado de los objetivos de la secundaria y de la materia en cuestión, se ve la complementariedad que tienen con la formulación de las competencias clave.

Las competencias clave que podemos asociar a la unidad didáctica objeto de este trabajo¹³ vienen definidas a través de la *Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*. En concreto son:

- CMCT, Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- CAA, Competencia para aprender a aprender.
- CCL, Comunicación lingüística.
- CD, Competencia digital.
- SIEP, Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
- CSC, Competencias sociales y cívicas.

¹³ Las competencias clave se asocian en esta orden a los criterios de evaluación que formarán parte de esta unidad. Esto no impide que se pudiera haber diseñado otra unidad que aglutine distintos criterios y por ende, puedan llevar aparejados distintas competencias clave. Nótese que en esta relación no aparece CEC, Conciencia y expresiones culturales.



6.6. Contenidos

Para el diseño de esta unidad didáctica, hemos recuperado algunos de los contenidos mínimos, criterios de evaluación, competencias clave asociadas y estándares de aprendizaje que recogía la legislación vigente para el bloque de Geometría, y para el bloque transversal de Procesos, métodos y actitudes matemáticas. En concreto son los siguientes:

Tabla 6.4. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Geometría, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO, a desarrollar por esta unidad.

Contenidos del bloque 3 a desarrollar por esta UD			
Contenidos	Criterios de evaluación y competencias clave asociadas		Estándares de aprendizaje evaluables
Iniciación a la Geometría Analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la Geometría Analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	CCL, CMCT, CD, CAA.	3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

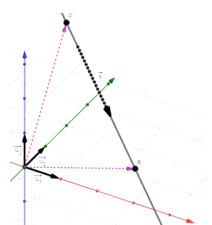
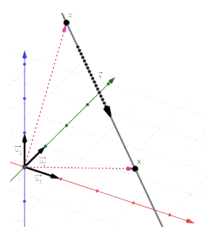


Tabla 6.5. Contenidos y criterios de evaluación del bloque de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de la ESO, a desarrollar por esta unidad.

Contenidos del bloque 1 a desarrollar por esta UD		
Contenidos	Criterios de evaluación y competencias clave asociadas	
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: - a). la recogida ordenada y la organización de datos. - b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. - c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. - d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. - e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. - f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT.
	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA.
	4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA.
	5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP.
	6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP.
	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA.
	8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT.
	9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP.
	10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP.
	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA.
	12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA.



6.7. Temporalización

En coherencia con el estudio de las posibles temporalizaciones y estructuras del curso en unidades didácticas analizadas, se ha optado por una estructura de curso en que la Geometría Analítica se vea antes del bloque de Funciones, con la intención de que esta geometría tenga en lo posible el sentido práctico y aplicado que venimos buscando en todo este planteamiento, y de modo que el estudio de las funciones sirva después de repaso.

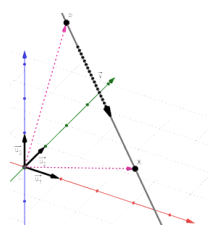
Tabla 6.6 Temporalización y organización de los contenidos del curso.

Fuente: elaboración propia.

UNIDAD DIDÁCTICA	Bloque temático	Trimestre/ Evaluación	Sesiones
UD 1: Números reales	Bloque 2 Números y Álgebra	1ºT	12
UD 2: Expresiones algebraicas			12
UD 3: Ecuaciones y sistemas			8
UD 4: Inecuaciones y sistemas		2ºT	8
UD 5: Semejanza y Trigonometría	Bloque 3 Geometría		8
UD 6: Aplicaciones de la trigonometría			12
UD 7: Geometría Analítica			12
UD 8: Funciones	Bloque 4 Funciones	3T	8
UD 9: Funciones elementales			12
UD 10: Combinatoria	Bloque 5 Estadística y Probabilidad		10
UD 11: Probabilidad			10
UD 12: Estadística			8
TOTAL			120

Tabla 6.7 Temporalización de las sesiones de esta unidad didáctica
(ver desglose pormenorizado en apartado 6.12). Fuente: elaboración propia

Sesiones 1 y 2	Evaluación inicial de conocimientos previos: sistemas de referencia, coordenadas, vectores, paralelismo y perpendicularidad, el plano y el espacio.
	Introducción o historia y motivación: por qué la Geometría Analítica
Sesiones 3 a 9	Sesión 3 a 9: desarrollo de los contenidos de la unidad
Sesión 10	Sesión 10: prueba individual de evaluación
Sesiones 11 y 12	Revisión, dudas y refuerzo
	Actividades de ampliación y recuperación.



6.8. Metodología

De acuerdo con el artículo 2.1. apartado g), del RD 1105/2014 ya antes mencionado, entenderemos por metodología didáctica al “conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados”.

Además, la propia Orden de 16 de enero de 2021 de la Junta de Andalucía recoge entre las estrategias metodológicas que cabría aplicar para adaptarse a las necesidades del alumnado en relación con este conjunto de contenidos las siguientes:

- Utilización de metodologías como el ABP (Aprendizaje Basado en Problemas), formulando preguntas al alumnado a partir de las cuales desarrollará su aprendizaje, trabajando con técnicas de aprendizaje cooperativo, o el ABI (Aprendizaje Basado en la Investigación), a través de la resolución de problemas”.
- Uso de recursos TIC y software específico, tanto para la construcción del pensamiento matemático¹⁴ como para enriquecer el proceso de evaluación del alumnado o favorecer el aprendizaje constructivo y cooperativo.

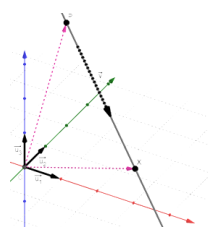
No cabe duda de que el trabajo de algebrización que lleva aparejada la Geometría Analítica requerirá también del desarrollo de ciertas tareas repetitivas con el objetivo de mecanizar y afianzar algunos cálculos y procesos. Sin embargo, esto solo se realizará una vez se haya interiorizado plenamente el sentido y la utilidad de realizar dichas operaciones (para lo cual serán especialmente útiles las metodologías antes reseñadas), ya sea dentro de la estrategia de resolución del problema, ya sea identificando el significado de cada componente de las expresiones algebraicas o vectoriales que se trabajen.

Por todo ello, se propone el uso de las siguientes estrategias metodológicas:

- Una metodología activa, que favorezca constantemente la interacción con el alumnado, incluso dentro de discursos expositivos, aumentando la participación y permitiendo conocer el grado de comprensión en todo momento.

En ella, la posición del profesor tratará de ser interna con respecto al grupo en todo lo posible, para evitar la recepción pasiva de conocimientos por parte del alumnado. Por ello la organización del aula, evitando la individualización y la focalización en un único punto es importante.

¹⁴ El uso de programas y aplicaciones informáticas (app) de geometría dinámica hacen que la enseñanza de la Geometría sea más motivadora consiguiendo un aprendizaje más efectivo en el alumnado.



Además, se pondrá el foco en el descubrimiento por parte del alumnado, siendo este capaz de alcanzar ciertas deducciones lógicas apoyado por el andamiaje, las orientaciones o las preguntas que planteemos como docentes. Todo ello considerando los distintos estilos de aprendizaje.

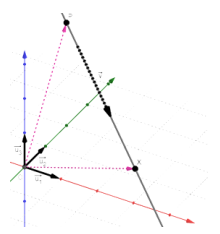
- Un enfoque interdisciplinar, significativo y realista, que constantemente haga referencia las aplicaciones de estas destrezas en el mundo real y en relación a otras asignaturas.
- El uso combinado de diversas fuentes y formas de transmitir la información, desde materiales escritos y transmisión oral, hasta proyección de audiovisuales y materiales compartidos online.
- La ejecución de distintas dinámicas de grupo, desde tormentas de ideas, debates o diálogos, a la realización de actividades cooperativas que favorezcan el aprendizaje entre iguales (por ejemplo del tipo ABP o ABI). Estas estrategias se dirigen al aprendizaje y desarrollo de competencias porque favorece la crítica, la reflexión, la hipótesis y la investigación.

En estas actividades, se valora especialmente el proceso, más allá del resultado final, pues permite además desarrollar valores transversales como la empatía, la aceptación mutua, la solidaridad, el respeto, la interacción y las tutorías entre iguales. Tampoco hay que olvidar el potencial para desarrollar la responsabilidad individual, el liderazgo, el trabajo en equipo o la autoestima.

- Uso intencionado de los dispositivos móviles o tabletas, como herramienta de trabajo informática adicional y como forma de luchar contra las distracciones a través del uso de aplicaciones, tareas gamificadas o fuente de información adicional.

Además, las dinámicas que pueden darse con este trabajo permiten también sustituir momentáneamente la escritura para potenciar actividades de interpretación para conectar ideas, poniendo el acento en el porqué y en el razonamiento más que en el desarrollo de una tarea algoritmizada o mecánica.

- Utilización de estrategias de clase invertida (*flipped classroom*), como forma de preparar y reforzar contenidos fuera del aula.



Actividades

Como se decía en el apartado metodológico, no se desdeñará la capacidad de entrenamiento y afianzamiento de procesos y conocimientos adquiridos que los ejercicios aportan.

Atendiendo a una clasificación por el tipo de actividades que se desarrollarán estas serán:

- Actividades de diagnóstico: principalmente colectivas, a través de lluvia de ideas y explicación entre iguales de conceptos previos para conocer el nivel de partida y reforzar conocimientos de base.
- Actividades de introducción: a partir del visionado de vídeos o la comprensión de ejemplos en los que la Geometría Analítica es de aplicación (física, dibujo, diseño de trayectorias, análisis de gráficas...) para contextualizar la unidad a desarrollar.
- Actividades de motivación: especialmente a través de estrategias gamificadas, o de generación de un pequeño proyecto (ver anexos).
- Actividades de aprendizaje: en ellas se adquirirán destrezas procedimentales y conceptuales, ya sea mediante la estrategia de clase invertida (ver anexo II), como en el aula. En general, todas ellas contribuirán a este hecho.
- Actividades de consolidación y refuerzo: tanto para fijar y consolidar los contenidos como para individualizar la enseñanza y atender a la diversidad. Para su elección se prestará atención a la evolución del alumnado.
- Actividades creativas: especialmente aquellas vinculadas al proyecto a desarrollar a partir de una idea (ver anexo I).



- Actividades de evaluación: todas ellas son susceptibles de determinar el grado de consecución de los objetivos, no solo a través de una prueba individual. Se observará y anotará sistemática e individualmente en todas las que sea posible.¹⁵
- Actividades de ampliación: destinadas especialmente a quienes hayan alcanzado los objetivos y como medio de individualizar la enseñanza y atender la diversidad.
- Actividades de recuperación: destinadas a quienes no han alcanzado a prior los objetivos, una vez solventadas las dudas o carencias y como medio de individualizar la enseñanza y atender la diversidad.

Recursos

Se parte por supuesto de los recursos humanos principales, como son el propio alumnado y el profesorado (el de esta materia, y el de materias afines, con las que puedan colaborar determinadas actividades).

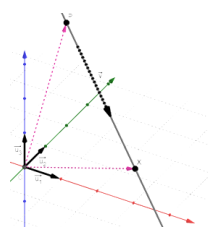
De entre los recursos materiales, contamos con los libros de texto, material escolar de escritura, dibujo y anotación (el cuaderno del alumnado es parte importante del proceso de aprendizaje y también formará parte de la evaluación), aula con pizarra, equipo informático y proyector, así como los teléfonos inteligentes, tabletas u ordenadores del alumnado¹⁶.

Dentro del entorno virtual y las TIC, destacaremos específicamente el uso de las siguientes:

- Plataforma Google Classroom como método de organización, comunicación e intercambio de información y actividades online.
- Aplicación Geogebra Classic y Geogebra Notes, como software de geometría dinámica y herramienta de interacción entre el lenguaje gráfico y el lenguaje algebraico. Será una herramienta fundamental a utilizar tanto por el docente como por el alumnado. A esto se añade también la posibilidad de hacer desarrollos en pizarra virtual, con la posibilidad de almacenar todo ello y ponerlo a disposición del alumnado después (alternativamente también se puede recurrir a otros software de pizarra digital –*Whiteboard...*-, o incluso a
- Plataforma Edpuzzle, a través de la cual desarrollar la estrategia de clase invertida, seleccionando videos externos de dominio público de corta duración

¹⁵ Ver a continuación el proceso de evaluación y calificación.

¹⁶ En caso de detectar que algún estudiante carezca de estos medios, se tratará de buscar una solución oportuna, ya sea adaptando las actividades que lo requieran para realizarse de forma colaborativa, o proporcionando puntualmente algún equipo por parte del centro.



sobre los que poder desarrollar e incrustar pequeñas preguntas para evaluar el seguimiento de esta tarea (ver anexo II).

- Aplicaciones como Kahoot o formularios de Google, a través de los que desarrollar estrategias gamificadas de motivación (ver anexo III).
- Aplicaciones como Scratch.mit.edu, donde combinar los conocimientos adquiridos de Geometría Analítica con tareas sencillas de programación (ver anexo III.1).
- Sistemas de grabación de las sesiones o videoconferencia si fuera necesario como Google Meet, Zoom, OBS Studio...

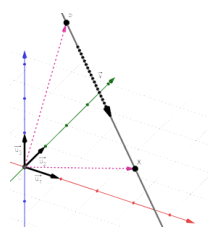
6.10. Atención a la diversidad

Tal y como se ha comentado en la contextualización del alumnado del centro, la atención a la diversidad ha de ser una constante en la educación, no solo por cuestiones cognitivas (diagnósticos de toda índole como TDAH, trastornos del espectro autista, altas capacidades...), sino por cualquier otra causa que pueda plantear dificultades o situaciones extraordinarias de aprendizaje (situaciones personales, incorporaciones tardías, etc.).

Es decir, la atención a la diversidad se entiende como “el respeto a las diferencias y la compensación de las posibles desigualdades sociales, económicas, culturales y personales”, y está orientada al logro de los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria y la adquisición de las competencias correspondientes y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que impida alcanzar dichos objetivos y competencias y la titulación correspondiente” tal y como rezan el preámbulo y el artículo 2 del *Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*.

La atención a la diversidad está presente en todo momento a lo largo de esta unidad didáctica, precisamente en la flexibilidad y en la variedad de tareas y recursos metodológicos que se plantean para poder adaptarse mejor a las necesidades de cada persona. Además, las actividades de refuerzo y de ampliación están específicamente orientadas a este fin:

- Las tareas de ampliación, así como las tareas abiertas, están destinadas a que el alumnado pueda desarrollar sus capacidades al máximo, incluso dentro del grupo. Permiten enriquecer, profundizar e investigar más en los conocimientos trabajados, e incluso adaptarlos a su interés personal, lo cual puede beneficiar además al grupo.



- Las tareas de refuerzo buscan resolver dudas, adaptarse al contexto y al ritmo de aprendizaje del alumnado, aumentar la motivación y anular los problemas de planteamiento o los posibles bloqueos que puedan estar entorpeciendo el aprendizaje. El planteamiento grupal de muchas de las actividades están orientados además a la creación de grupos heterogéneos, donde se favorezca además la tutoría entre iguales, ampliamente favorable a todos.

Además de ello, y tal y como recoge la *ORDEN de 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía*, y dado que estamos en una asignatura de Matemáticas, se contempla la posibilidad de aplicar otras medidas si fuera necesario:

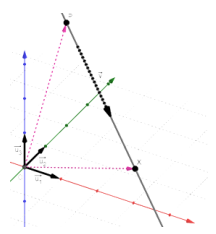
- “Agrupamientos flexibles para la atención al alumnado en un grupo específico, siempre con carácter temporal y abierto, con el fin de facilitar la integración del alumnado en su grupo ordinario [...]”.
- Desdoblamientos de grupos, [...] con la finalidad de reforzar su enseñanza.
- Apoyo en grupos ordinarios mediante un segundo profesor o profesora dentro del aula, [...] en los casos del alumnado que presente un importante desfase en su nivel de aprendizaje [...].
- Modelo flexible de horario lectivo semanal, que se seguirá para responder a las necesidades educativas concretas del alumnado.”

En cualquier caso, cuando se apliquen este tipo de medidas y especialmente cuando se trate de medidas individualizada, se informará a las madres, padres y tutores legales del alumnado.

De ser necesario realizar algún tipo de adaptación curricular, “estarán destinadas al ajuste metodológico y de adaptación de los procedimientos e instrumentos y, en su caso, de los tiempos y apoyos que aseguren una correcta evaluación de este alumnado” (artículo 23, Decreto 111/2016).

Ninguna de todas estas adaptaciones se tendrán en cuenta en ningún caso para reducir las calificaciones obtenidas.

Finalmente, en caso de tener que llegar al caso de realizar adaptaciones significativas que afecten al currículo, se atenderá a lo establecido en la normativa, y siempre manteniendo la máxima de adaptarse a las necesidades específicas de apoyo educativo del alumnado.



6.11. Evaluación

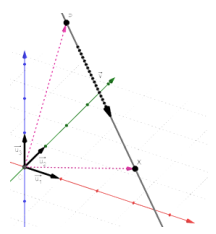
La evaluación es un acto educativo que permite conocer el grado de consecución de los objetivos y de asimilación de los contenidos, sirviendo para orientar en qué medida y de qué forma se puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es decir, se evalúa tanto el rendimiento del alumnado como el propio desempeño del docente. Para ello, se centra en el proceso y se apoya en referencias cualitativas y descriptivas que cumplirán las siguientes claves:

- Serán conocidas por el alumnado, que en todo momento conocerá lo que se tendrá en cuenta para su evaluación y posterior calificación.
- Al formar parte del proceso de aprendizaje, darán información al profesorado, al alumnado y a sus familias y/o tutores para poder reorientar su estudio si fuera necesario.
- Se basará en comprobar competencias y destrezas que perduren en el tiempo, poniendo especial atención en el cumplimiento de lo imprescindible, y de ahí en adelante en lo deseable.

Por ello hay tres momentos clave en la evaluación:

1. Evaluación inicial: se trata de conocer los conocimientos previos del alumnado sobre el curso (evaluación inicial del curso) o sobre la propia la unidad didáctica (especialmente para detectar si poseen aquellos que sean imprescindibles para aprender los nuevos que queramos trabajar). Por eso será cualitativa.
2. Evaluación continua: mediante la observación de todas las actividades que se desarrollen, prestando atención a la necesidad de subsanar errores, malas interpretaciones, hacer correcciones, adaptar nuevas actividades y explicaciones o plantear refuerzos, etc.
3. Evaluación sumativa: o final, donde se identifica el nivel de logro de los criterios que había propuesto la unidad por parte del alumnado, y de idoneidad en el planteamiento de la misma por parte del docente.

Todo ello se hará en consecuencia con el *Real Decreto 1105/2014* (artículo 20) y el *Decreto 111/2016* (capítulo V), que definen la evaluación del proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas de educación secundaria obligatoria como continua, formativa, integradora e individualizada. Además, y de acuerdo a estas mismas normativas, los referentes para la evaluación son el cumplimiento de los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables”.



Instrumentos de evaluación

Todas las actividades planteadas de las que quede registro serán susceptibles de evaluación, y por tanto de arrojar una retroalimentación sobre el resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje. En concreto, en esta unidad tenemos:

- Cuaderno de clase: valorando la claridad, orden y realización y seguimiento de las tareas.
- Cuestionarios y actividades online (preguntas de comprobación del seguimiento de la metodología “clase invertida” –Edpuzzle- y formularios con actividades y preguntas –Kahoot, Google Forms...-).
- Pruebas y actividades escritas y entregables, como son las actividades colaborativas del proyecto propuesto y el examen y prueba de recuperación.
- Observación del interés y la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas, como son el grado de participación en clase, su implicación en el uso de los materiales didácticos propuestos, su grado de colaboración en las tareas grupales, el respeto por el aula y por sus compañeros.

Para ello, se ha diseñado una rúbrica de evaluación que integra todas estas actividades evaluables y que facilitará la posterior calificación en la evaluación sumativa (ver tabla en el apartado de calificación).

La calificación

La calificación es la cuantificación de los logros obtenidos, por lo que es un acto administrativo posterior a la evaluación, especialmente a la evaluación sumativa.

Para trasladar las observaciones cualitativas a notas será necesario además ponderar los diferentes instrumentos, lo cual se ha realizado de la siguiente manera en función de la rúbrica de la unidad (ver tabla 6.8). Además, y siguiendo lo establecido por la programación del departamento de Matemáticas del centro, las unidades didácticas tendrán un peso equivalente en la calificación final.

Finalmente, el instrumento de procesamiento de las calificaciones para las evaluaciones trimestrales y finales será el programa Séneca, en el cual se volcarán las notas de las actividades que hacen referencia a los criterios de evaluación y sus correspondientes competencias asociadas (recordemos las tablas 6.1. y 6.2.). En este programa se han registrado ya las ponderaciones mencionadas (de las actividades y de las distintas unidades), obteniendo así la evaluación final de la asignatura, y la evaluación competencial que se traslada al expediente del alumnado.

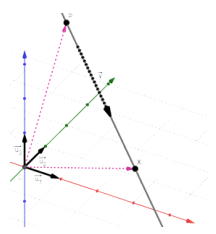
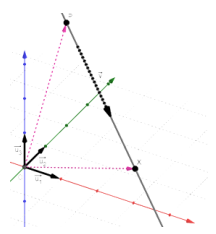


Tabla 6.8 Rúbrica para la evaluación de la Unidad y conexión con el proceso de calificación en la evaluación sumativa. Fuente: elaboración propia.

RUBRICA DE LA UNIDAD	Excelente	Bueno	Mejorable	Ponderación sobre el total de la UD	Nota asignada
Cuaderno de clase	El cuaderno se presenta ordenado y completo con las actividades suficientemente desarrolladas o corregidas	El cuaderno no está del todo completo o falta corregir algunas actividades	El cuaderno carece de orden o no se han realizado suficientemente las tareas planteadas	10	
Seguimiento de la clase invertida	Se han realizado con atención las tareas, comprendiendo los contenidos esenciales	No se han realizado todas las tareas o no se han comprendido suficientemente los contenidos esenciales	No se han realizado las tareas o no se han comprendido los contenidos esenciales	15	
Cuestionario Kahoot	Se han comprendido suficientemente los conceptos trabajados	Se podría mejorar la comprensión de algunos de los conceptos trabajados	No se han comprendido suficientemente los conceptos trabajados o ha faltado implicación en la actividad		
Formulario sobre actividad	Se han comprendido suficientemente los conceptos trabajados	Se podría mejorar la comprensión de algunos de los conceptos trabajados	No se han comprendido suficientemente los conceptos trabajados o ha faltado implicación en la actividad		
Proyecto colaborativo "El vuelo del dron"	La implicación en la actividad ha sido y se ha mostrado capacidad de integrar los conocimientos practicados	La implicación en la actividad ha sido buena, aunque se podría haber profundizado más en el desarrollo de la misma.	La implicación en la actividad no ha sido suficiente y/o no se ha mostrado capacidad de integrar los conocimientos practicados	25	
Prueba final	Se ha demostrado dominar los conceptos trabajados	Se ha demostrado un dominio suficiente de los conceptos trabajados	El dominio demostrado no es suficiente y podría comprometer el aprendizaje futuro en esta materia	50	
Prueba de recuperación	Se ha demostrado dominar los conceptos trabajados	Se ha demostrado un dominio suficiente de los conceptos trabajados	El dominio demostrado no es suficiente y podría comprometer el aprendizaje futuro en esta materia	50	
EVALUACIÓN SUMATIVA	Se han superado con dominio los criterios de evaluación y las competencias trabajadas	Se han superado suficientemente los criterios de evaluación y las competencias trabajadas	No se han alcanzado con suficiencia los criterios de evaluación y las competencias trabajadas, pudiendo comprometer el aprendizaje futuro		



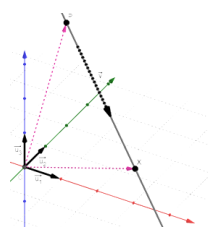
6.12. Desarrollo pormenorizado de las sesiones

A continuación se detalla el desarrollo de cada sesión de la temporalización, pormenorizando los contenidos y los tipos de actividades a emplear. Como se puede observar, se han tratado de combinar distintos decursos y metodologías, aplicando además una estrategia de repaso acumulativo que integre y refuerce constantemente lo visto anteriormente.

Los minutajes son orientativos y susceptibles de cambio para adaptarse a las necesidades del alumnado. La estrategia de emplear pequeñas tareas de clase invertida pretende evitar la idea de ‘deberes’, pero sí dedicar 5-8 minutos para ver unos vídeos y responder algunas preguntas que faciliten la asimilación de los contenidos. Además, las actividades gamificadas podrían desarrollarse en el aula o, si fuera necesario, desde casa como herramienta de repaso.

Tabla 6.9 Desarrollo pormenorizado de cada sesión y conexión con el currículo y las estrategias metodológicas empleadas. Fuente: elaboración propia.

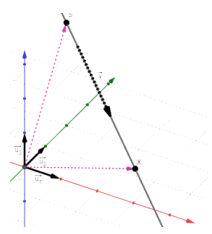
Desarrollo de la sesión: 1 y 2 Evaluación inicial e introducción	
Contenido de la sesión: - Tormenta de ideas participativa sobre los conceptos previos: sistemas de referencia, coordenadas, vectores, paralelismo y perpendicularidad, el plano y el espacio. - Introducción al significado de la Geometría Analítica: del lenguaje algebraico al geométrico analítico y viceversa. Visualización de ejemplos con <i>GeoGebra</i> y aplicaciones en la vida real: https://es.slideshare.net/mattiamaroni/revista-geometria-analitica-aplicacion-en-la-vida-cotidiana https://www.navigames.es/articulos/matematicas-en-desarrollo-de-videojuegos/Geometria-para-programacion-de-videojuegos -Arranque del proyecto grupal “Programamos un vuelo fotográfico con un dron”: ¿qué necesitamos? https://www.aerial-insights.co/blog/como-planificar-capturas-de-dron/ (ver anexo I) Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i>, ver anexo II): ¿Qué es la Geometría Analítica? ¿Qué son los ejes cartesianos? Introducción ¿Qué es Geometría Analítica? 2	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.6 // 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, SIEP.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado es el protagonista la lluvia de ideas a modo de evaluación inicial e introducción. La actividad de proyecto, en grupos de 6 se plantea como colaborativa y creativa y agrupando estrategias ABP y ABI que sean significativas y motivadoras. Preparación y refuerzo individual mediante el visionado y preguntas de la clase invertida. Uso de las TIC como búsqueda de recursos, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	



Desarrollo de la sesión 3: vectores en el plano y operaciones	
Contenido de la sesión: -Repaso acumulativo (10') -Definiciones y ejercicios relacionados con los vectores: cálculo de coordenadas, módulos y distancias. Visualización en <i>GeoGebra</i> . (30') -Seguimiento proyecto: "Programamos un vuelo...": localizamos puntos.' (20')	
Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i> , ver anexo II): VECTORES en el Plano ➤ Concepto , COORDENADAS y MÓDULO	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.6 // 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas repasa los conceptos previos, reconstruye los contenidos vistos en la clase invertida y resuelve los ejercicios de consolidación propuestos con la orientación del profesor. La actividad grupal de proyecto se orienta ahora a la resolución de un problema (ABP). Uso de las TIC como búsqueda de recursos, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	

Desarrollo de la sesión 4: operaciones con vectores, combinaciones lineales	
Contenido de la sesión: -Repaso acumulativo (10') -Suma, resta y producto de un vector por un escalar: ejercicios de combinaciones lineales. Visualización en <i>GeoGebra</i> (35') -Actividad gamificada (ver anexo III): <i>Kahoot</i> de combinaciones lineales. (15')	
Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i> , ver anexo II): SUMA, RESTA de Vectores y MULTIPLICACIÓN por un Escalar ➤ Vectores en el Plano	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.6 // 1, 2, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas repasa los conceptos previos, reconstruye los contenidos vistos en la clase invertida y resuelve los ejercicios de consolidación propuestos con la orientación del profesor. La actividad gamificada pretende motivar al alumnado al tiempo que otorgar un primer instrumento de evaluación individualizado del proceso de aprendizaje. Uso de las TIC como recursos motivador, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	

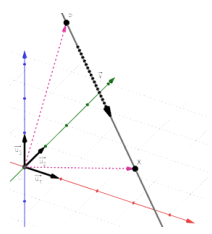
Desarrollo de la sesión 5: operaciones con vectores, producto escalar	
Contenido de la sesión: -Repaso acumulativo (10') -El producto escalar y su aplicación para saber el ángulo entre vectores: ejercicios (50').	
Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i> , ver anexo II): Producto escalar y PRODUCTO ESCALAR y ÁNGULO entre Vectores ➤ Vectores en el Plano	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.6 // 1, 2, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas repasa los conceptos previos, reconstruye los contenidos vistos en la clase invertida y resuelve los ejercicios de consolidación propuestos con la orientación del profesor. Uso de las TIC como búsqueda de recursos, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	



Desarrollo de la sesión 6: ecuaciones de la recta	
Contenido de la sesión: -Repaso acumulativo (10') -Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas y continua. Ejercicios y visualización en <i>GeoGebra</i> (35') -Seguimiento proyecto: "Programamos un vuelo...": definimos trayectorias (15') Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i> , ver anexo II): Ecuación de la recta SECUNDARIA (4ºESO) Geometría Plana	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.6 // 1, 2, 4, 6, 7 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, SIEP.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas repasa los conceptos previos, reconstruye los contenidos vistos en la clase invertida y resuelve los ejercicios de consolidación propuestos con la orientación del profesor. La actividad grupal de proyecto se orienta ahora a la resolución de un problema (ABP). Uso de las TIC como búsqueda de recursos, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	

Desarrollo de la sesión 7: ecuaciones de la recta	
Contenido de la sesión: -Repaso acumulativo (10') -Ecuaciones de la recta: general, explícita y punto pendiente. Ejercicios y visualización en <i>GeoGebra</i> (35') -Actividad gamificada (ver anexo III): 'Kahoot de conceptos básicos' (15') Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i> , ver anexo II): Posición relativa de dos rectas SECUNDARIA (4ºESO) geometría plana	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.6 // 1, 2, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas repasa los conceptos previos, reconstruye los contenidos vistos en la clase invertida y resuelve los ejercicios de consolidación propuestos con la orientación del profesor. La actividad gamificada pretende motivar al alumnado al tiempo que otorgar un segundo instrumento de evaluación individualizado del proceso de aprendizaje. Uso de las TIC como búsqueda de recursos, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	

Desarrollo de la sesión 8: problemas de incidencia	
Contenido de la sesión: -Repaso acumulativo (10') -Posiciones relativas de dos rectas, paralelismo y perpendicularidad. (20') -Ejercicios de aplicación (15') -Actividad gamificada: 'formulario de escape, Definir trayectorias de dron con Scratch (mit.edu) ' (15') Flipped classroom (<i>Edpuzzle</i> , ver anexo II): Rectas Paralelas y Perpendiculares	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 // 1, 2, 4, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas repasa los conceptos previos, reconstruye los contenidos vistos en la clase invertida y resuelve los ejercicios de consolidación propuestos con la orientación del profesor. La actividad gamificada (ver anexo III) pretende motivar al alumnado llevando a un contexto "semi real-matematizado" los conocimientos que han adquirido tanto en el proyecto como en la unidad. Uso de las TIC como búsqueda de recursos, visualización gráfica de los contenidos y herramienta de comunicación para las actividades.	

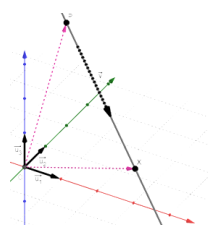


Desarrollo de la sesión 9: repaso general	
Contenido de la sesión: -Ejercicios de repaso e integración de contenidos (30'). -Remate del proyecto: "Programamos un vuelo...": presentación secuencia de vuelo. (30')	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 // 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, SIEP.
Metodología y tipo de actividades: Metodología activa en la que el alumnado, individualmente y en parejas resuelve los ejercicios de refuerzo propuestos con la orientación del profesor. La actividad grupal de proyecto entra en la parte final, en la que se presentan los resultados obtenidos y se debaten y comparan propuestas. Uso de las TIC como herramienta de comunicación y presentación gráfica de los resultados.	

Desarrollo de la sesión 10: prueba individual	
Contenido de la sesión: -Prueba individual (60') -Revisión de los cuadernos	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 // 1, 2, 4, 8, 9	Competencias: CCL, CMCT.
Metodología y tipo de actividades: Actividad netamente de evaluación individualizada.	

Desarrollo de la sesión 11: refuerzo y resolución de dudas	
Contenido de la sesión: -Corrección grupal del examen y tutoría entre iguales supervisada (30') -Ejercicios de refuerzo sobre los contenidos que hayan planteado problemas (30')	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 // 1, 2, 8, 9, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Actividades de refuerzo basadas en la tutoría entre iguales en grupos de 4, que consolida los aprendizajes adquiridos y facilita la interacción entre el alumnado. Uso de las TIC para la visualización gráfica de los contenidos.	

Desarrollo de la sesión 12: actividades de ampliación y recuperación	
Contenido de la sesión: -Prueba individual (45') -Actividad de ampliación (60'): Reflexiona, investiga y propón, ¿cómo aplicarías lo aprendido al uso de la tecnología GPS?	
Estándares de evaluación trabajados: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 // 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA.
Metodología y tipo de actividades: Actividad de evaluación para el alumnado que necesite recuperar y actividad de ampliación basada en la investigación en grupos de 2 a 4 personas, que integre lo aprendido con un sentido práctico en la vida cotidiana. Pequeño debate final donde compartir los hallazgos. Uso de las TIC como búsqueda de información.	



7. Conclusiones

A lo largo de este Trabajo de Fin de Máster se ha pretendido compilar los aprendizajes adquiridos en esta etapa formativa así como la experiencia acumulada gracias al periodo de prácticas.

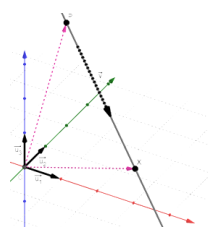
Se ha puesto en evidencia como la profesión de docente requiere comprender el proceso de transposición didáctica (Bosch y Gascón, 2006) entre el saber sabio, el saber enseñar, el saber enseñado y finalmente el saber aprendido: uno de los fines últimos de la profesión junto con el aprendizaje por parte del alumnado de una serie de actitudes y valores útiles para su vida.

Esta coherencia se ha tratado de transmitir a lo largo de las fundamentaciones epistemológica, curricular y didáctica, que han servido de base para el planteamiento de la unidad didáctica. El dominio de la materia ha tratado de ir acompañado de un conocimiento profundo del sistema educativo, así como de los principios psicopedagógicos (específicos de la unidad y generales de la materia y de la etapa de desarrollo del alumnado) que influyen en el proceso.

Ha servido pues para aplicar una parte de la normativa que regula el sistema educativo; investigar acerca de los recursos y las potenciales dificultades que rodean al tema en cuestión de la Geometría Analítica y para profundizar en el estudio de la materia en sí misma. En concreto, ha servido para trazar una estrategia didáctica que pretende conectar el enfoque analítico con el resto de las matemáticas y su aplicación en otros campos del saber y de la realidad.

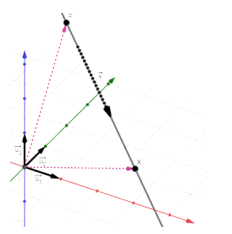
Junto a todo ello, la experiencia directa vivida durante las prácticas ha incorporado aun un punto más de realismo a la cotidianidad del aula, factor necesario para que cualquier programación pueda alcanzar sus objetivos y para plantearse desafíos verosímiles. Hacer frente a problemas de aprendizaje, concepciones erróneas, lagunas de base o la falta de concentración o de estímulos son cuestiones que están en el día a día de la profesión.

Para ello, la innovación educativa se muestra como una herramienta en constante cambio para adaptarse a las dificultades que se vayan encontrando, una actitud en pos de adaptarse a la diversidad de necesidades de cada persona y cada contexto (sociocultural, recursos, motivación, situaciones sobrevenidas, etc.). En concreto, planteamientos como el uso de programas de geometría dinámica que combinen el lenguaje gráfico y el algebraico; el planteamiento de situaciones de aplicación real de estos conocimientos adaptados a su nivel, o el uso de dinámicas gamificadas, colaborativas y de clase invertida podrían arrojar resultados positivos. Las diferentes metodologías y actividades aplicadas son un planteamiento que deberá ser evaluado y validado o reformulado tras su aplicación.



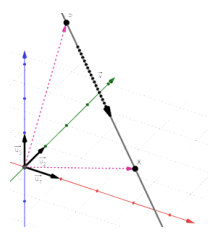
Es más, tras esta experiencia, ha cobrado mayor significación la importancia de la relación profesorado-alumnado, vital para conocer mejor sus intereses y aquello que puede motivarlos para que el aprendizaje sea verdaderamente significativo, así como para conectar emocionalmente con ellos. La correcta preparación de las sesiones, junto con el conocimiento y gestión del grupo permitirán un clima de convivencia y trabajo en el que se pueda aprovechar el valioso pero limitado tiempo del que disponemos en el aula.

En definitiva, este trabajo es solo una muestra de cómo la planificación y la programación de la docencia no pueden confiarse a modelos preestablecidos e inmóviles, ni tampoco a la improvisación. Un desafío en el que aprendemos cada día.

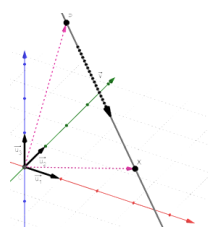


8. Referencias bibliográficas

- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A. y Donaire, J. J. (2017). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO. Andalucía*. Madrid: SM-Savia.
- Ancochea, B. (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria. En Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. y Languier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD. III Congreso Internacional sobre la TAD. CRM Documents vol. 10* (pp. 533-551). Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Berenguer Maldonado, J. y Cobo Mérida, P. (2015). Tema 51: Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines. En Berenguer Maldonado, J. y Cobo Mérida, P., *Temario de Matemáticas*. Córdoba: Matemáticas Divertidas.
- Blanco, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*, 25, pp. 49-60.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2006). 25 años de Transposición Didáctica. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F. J. (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- CenOposiciones (2010). Tema 51: Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines. En CenOposiciones (Ed.), *Matemáticas. Temario 1993*. Madrid: CenOposiciones.
- Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. (Conferencia no publicada). Recuperado de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Osca.pdf
- Claustro (2005). Tema 51: Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines. En Claustro (Ed.), *Oposiciones de Secundaria. Matemáticas*. Sevilla: Claustro-Centro de enseñanza.
- Colera Jiménez, J., Oliveira González, M^a. J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO. Propuesta didáctica*. Madrid: Anaya.
- Fuller, G. y Tarwater, D. (1995). *Geometría analítica*. México D.F: Pearson Educación.



- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, 39, pp. 13-27.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, 44, pp. 25-34.
- Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA*, 45, pp. 41-52.
- Lehman, Ch. H. (1989). *Geometría analítica*. México D.F.: Limusa.
- Maaß, K. (2006a). What are modelling competencies? *ZDM*, 38 (2), pp. 113-142.
- Maaß, K. (2006b). Classification of modelling tasks. En ISDDE, *Mathematics meets reality, International Society for Design and Development in Education Conference (ISDDE) 4-7 September 2006*. Nottingham: University of Nottingham.
- Revuz, A. (1971). El lugar de la geometría en la educación matemática. En Piaget, J. et al., *La enseñanza de las matemáticas modernas* (pp. 291-297). Madrid: Alianza Editorial.
- Treffers, Adrian (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer.



Anexo I: Proyecto de levantamiento digital 3D del centro

En coordinación con las asignaturas de Tecnología y Matemáticas se plantea el siguiente proyecto que pretende suponer un aprendizaje significativo de la aplicación de los contenidos: realizar un levantamiento 3D de la manzana que ocupa el centro, basándose en métodos fotogramétricos a partir capturas de imágenes aéreas desde un dron.

El trabajo matemático consistirá en programar la trayectoria de vuelo del dron, las capturas necesarias y la altura, argumentando todas las decisiones para aprovechar el vuelo del aparato y obtener las imágenes necesarias para el procesamiento informático.

Esto nos permitirá ir aplicando paulatinamente los contenidos de la unidad en un proyecto colaborativo en grupos de 6 personas, que se pretende desarrollar en horario de clase, en las sesiones indicadas en la temporalización.

ENUNCIADO PROPUESTO



Figura A.1. Ámbito objeto de estudio, la manzana en la que se ubica el centro SAFA Linares. Fuente: imagen de *Google Maps*, elaboración propia.

En grupos de 6, recibís el encargo de realizar un modelo 3D de la manzana donde se ubica vuestro centro. Para ello, contaréis con un dron equipado con una cámara, y recibiréis apoyo por parte del profesorado de Matemáticas y Tecnología para cumplir esta tarea.

El software de vuelo de un dron permite establecer una trayectoria pregrabada que los controles de navegación en piloto automático de este aparato pueden seguir con gran precisión. Para ello es preciso parametrizar dicha trayectoria en un sistema de referencia cartesiana, calcular la altura y los puntos desde los cuales realizar cada captura con la cámara que lleva incorporada.

Las condiciones para una correcta captura de imágenes que permitan el posterior proceso de levantamiento 3D del conjunto pueden extraerse de este artículo.

► [Cómo planificar el vuelo del dron: trayectoria, ángulo cámara, altura... \(aerial-insights.co\)](https://aerial-insights.co)

Como aspectos básicos necesitaremos:

Definir y presentar vuestro plan de vuelo, de manera que cubra plenamente el área de la manzana que ocupa nuestro centro y nos permita hacer un modelo 3D posteriormente. Argumentad todas vuestras decisiones. En concreto:

- Identificación del punto en que se tomarán las fotografías necesarias en un sistema de referencia previamente definido y altura de vuelo para garantizar una óptima cobertura.
- Definición analítica de las trayectorias que tenga que cumplir seguir el dron para pasar por todos los puntos de captura de imágenes.

Pautas a tener en cuenta en su desarrollo

El proyecto planteado supone una aplicación real del trabajo del aula que se escapa de los conocimientos habituales, sin embargo, en la base de desarrollo de la fotogrametría está sin duda la Geometría, tanto Sintética como Analítica.

Los resultados del proyecto son abiertos, puesto que la toma de decisiones a lo largo del proceso condicionará la definición de los elementos solicitados. El artículo que se presenta como guía y la orientación del profesorado deberían ayudar al alumnado a plantearse preguntas como:

- ¿Necesito un sistema de referencia? ¿Cómo defino uno de la forma más conveniente para el proyecto?
- ¿Cuántos puntos de captura de imágenes necesito en función del trabajo que quiero realizar? ¿Tienen que ver con la altura del vuelo? ¿Tienen que ver con la amplitud de captura de la cámara (ángulo de visión)? ¿Cómo calculo el ángulo de visión de la cámara? ¿Se puede hacer empíricamente y extrapolar?
- ¿Qué forma de ecuación para las trayectorias rectas del dron es la más adecuada en función de los datos que tengo? ¿Qué trayectoria dibujamos?

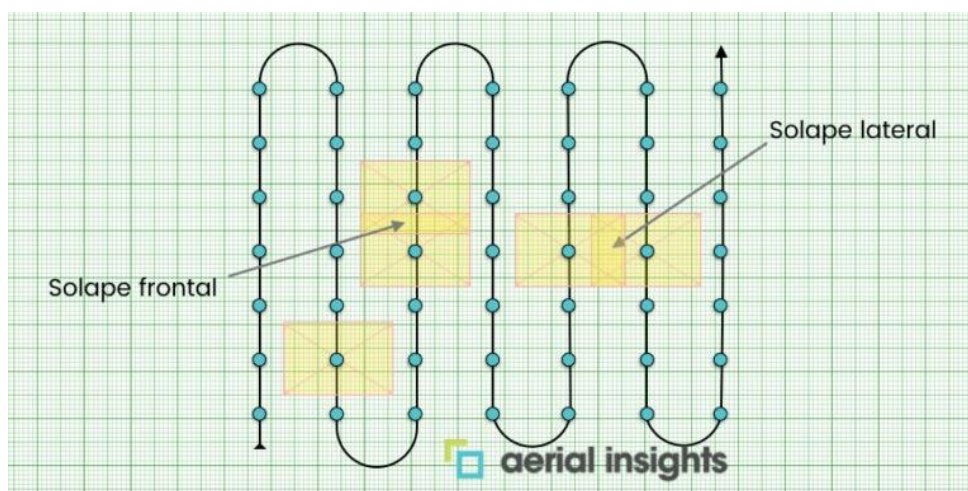


Figura A.2. Algunas de las condiciones para la captura de fotos aéreas.

Fuente: aerial-insights.co.

Posible desarrollo de las sesiones

-Arranque del proyecto grupal “Programamos un vuelo fotográfico con un dron”: ¿qué necesitamos?

Sesiones iniciales 1 y 2 (aproximadamente 40' en total)

Durante esta sesión se presentará el trabajo a realizar, se definirán los grupos de alrededor de 6 personas y se tratará de comprender individualmente el conjunto del trabajo a realizar (al disponer de dos sesiones, se podría trabajar individualmente el primer día, y crear las agrupaciones ya en la parte desarrollada en la segunda sesión, favoreciendo así la reflexión personal inicial).

Más allá de la comprensión de la tarea, que puede requerir de ciertas aclaraciones al margen del artículo propuesto, de entre los posibles problemas que pueden esperarse destaca el proceso de calcular el área que abarca una foto tomada desde el aire. Para ello deberán averiguar el angular de la cámara, lo que intuitivamente podría hacerse tomando una fotografía a una altura conocida, y estableciendo a partir de ahí un modelo matemático en función de la altura. De este modelo dependerá el número de capturas y la separación entre ellas.

-Seguimiento proyecto: “Programamos un vuelo...”: localizamos puntos.’

Sesión 3 (20')

A lo largo de esta fase deberán decidir un sistema de coordenadas apropiado y calcular las coordenadas de los puntos de captura de imágenes.

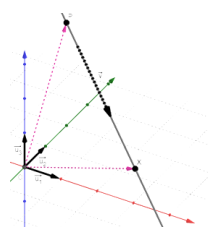
Un posible problema a encontrar puede darse en la comprensión de que el sistema de coordenadas cartesianas puede colocarse y orientarse de forma que haga más fácil la definición de las trayectorias que haya que definir posteriormente. Sin embargo, se espera con ello poder comprender como la elección del origen de coordenadas y la orientación de los ejes es también una variable a considerar, y cómo las coordenadas del punto dependen del sistema de referencia elegido.

-Seguimiento proyecto: “Programamos un vuelo...”: definimos trayectorias

Sesión 6 (15')

Una vez definidos todos los puntos por los que debe pasar el dron, el grupo deberá decidir cuál es la mejor trayectoria para pasar por todos ellos. Una vez dibujada, cada tramo tendrá una ecuación que será preciso definir.

En realidad, esta cuestión no es del todo auténtica hoy en día, puesto que los softwares de programación de trayectorias tienen una interfaz gráfica para introducir las coordenadas y trayectorias. Es decir, ya no es necesario programar con código las



ecuaciones de la recta a seguir, pero nos valemos de este artificio para trabajar distintas posiciones en un contexto aplicado.

Un posible problema puede ser decidir el tipo de ecuación que se adapta mejor para describir los tramos analíticamente, si bien, disponiendo de todos los puntos de paso, obtener puntos y vectores directores o incluso en algunos casos la pendiente y la ordenada en el origen no deberían presentar mayor dificultad.

-Remate del proyecto: “Programamos un vuelo...”: presentación secuencia de vuelo.

Sesión 9 (30’)

Durante esta última fase se presentarán los resultados obtenidos por los distintos grupos, comparando los resultados: número de capturas, altura, longitudes comparativas de los distintos vuelos, etc. pudiendo juzgar la idoneidad de unas u otras decisiones.

Se trata de una sesión para validar y debatir las implicaciones de la toma de ciertas decisiones a lo largo del proyecto, partiendo de la base de que quizá todas hayan resuelto el problema planteado. Esto se hará mediante los propios comentarios que el propio alumnado pueda compartir a la hora de comparar sus trabajos y con la ayuda de preguntas abiertas que orienten la reflexión por parte del profesor sobre determinados aspectos del proceso, especialmente sobre aquellos relacionados con el bloque de procesos, métodos y actitudes.

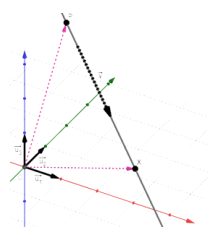
Recursos

Los recursos necesarios para la realización de esta fase de la actividad son muy básicos:

- Enunciado de la situación planteada, con fotografía a escala del área de estudio.
- Material de papelería como cartulina A3, rotuladores de colores, regla, lapiceros, tijeras y pegamento.
- Tabletas de aula o teléfono móvil para consulta.

Para culminar el proyecto conjunto, sería deseable contar un dron programable con cámara y software de procesamiento de imágenes para crear el modelo 3D (tipo *PhotoScan*, con versión gratuita). Este procesado es sencillo y se podría desarrollar en una o dos sesiones de la asignatura de Tecnología con la que se planteaba este proyecto.

Con todo ello, podríamos crear una pequeña exposición en la que mostrar el trabajo realizado por el aula y el modelo en 3D del centro.



Anexo II: Formato de clase invertida

A lo largo de la unidad se ha programado un sistema de clase invertida aprovechando los materiales libremente disponibles en la web y la plataforma educativa *Edpuzzle*.

A partir de los vídeos seleccionados para cada sesión, de una duración aproximada de 10 minutos cada uno, se programa una actividad basada en unas pocas preguntas de afianzamiento sobre las cuestiones planteadas en cada vídeo.

El propósito es tener una pequeña visión de los contenidos que se trabajarán durante la sesión en el aula, para que la metodología aplicada sobre estos contenidos pueda ser más participativa al construirse sobre lo iniciado en el vídeo. Además, contribuye a dar continuidad al estudio más allá de la hora de clase, sin sobrecargar dada la corta duración.

Finalmente, la plataforma nos envía los resultados de las preguntas realizadas por el alumnado, pudiendo hacer un seguimiento y evaluación de su uso.

edpuzzle VECTORES en el Plano > Concept...

MULTIPLE CHOICE QUESTION

Para calcular el módulo de un vector, ¿nos recuerda a algo la fórmula que ha dado?

- ☐ Es el discriminante de una ecuación de segundo grado
¿Seguro? Me parece que $\Delta = b^2 - 4ac$ no tiene mucho que ver con esto. Date otra oportunidad
- ☒ Es el teorema de Pitágoras
Las coordenadas del vector son los catetos de un triángulo rectángulo, y el módulo es la longitud de su hipotenusa. Así no hay que memorizar nada nuevo.
- ☐ Esta fórmula sólo se usa para esto
Me parece que sí que la hemos usado ya. Cateto al cuadrado, más cateto al cuadrado, era igual a...

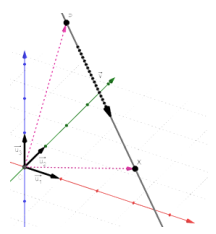
Figura A.3. Ejemplo de uno de los vídeos y sus preguntas de las sesiones de clase invertida.

Fuente: *Susi, profe (Youtube)*, elaboración propia de cuestionario con *Edpuzzle*.

Resultados esperados

Los objetivos de aplicar esta metodología son dos:

- Por un lado, introducir enfoques complementarios en la enseñanza de esta parte de la Geometría Analítica, estableciendo conexiones con otros contenidos ya estudiados del currículo y con situaciones de la vida cotidiana. Algunos de los vídeos tienen una aproximación muy matemático-algebraica, algo que también es necesario, pero que de esta forma se puede enriquecer (o viceversa).



Anexo III: Actividades gamificadas

Las actividades gamificadas son un recurso metodológico que puede aumentar el atractivo y la motivación por realizar determinadas actividades. Puesto que este es uno de los objetivos de la unidad, y ciertos contenidos conceptuales o repetitivos pueden ser áridos o abstractos, este tipo de tareas incorpora ese pequeño extra de interés.

Además, habiendo constatado la dificultad para restringir el uso de los dispositivos móviles en las aulas, se pretende enfocar dicha utilización hacia un uso formativo.

1. ACTIVIDAD DE ESCAPE, MEDIANTE FORMULARIOS

Los *escape room* son un juego de moda en los últimos años en el que a partir de pruebas y claves se obtiene una recompensa: habitualmente salir de la sala.

Siguiendo esa analogía se ha diseñado una actividad de juego individual a base de unas pruebas, cuya recompensa es la obtención de un código que da acceso a determinados premios para los participantes. La evaluación positiva de la actividad es también uno de ellos.

Las pruebas consisten en la definición de una serie de 2 trayectorias diferentes que pasen correspondientemente por 2 puntos distintos, para lo que se recurre a una aplicación web que ilustra este hecho con el vuelo de un dron (y de paso sirve para ejercitar el trabajo que será necesario en el proyecto del vuelo del dron).

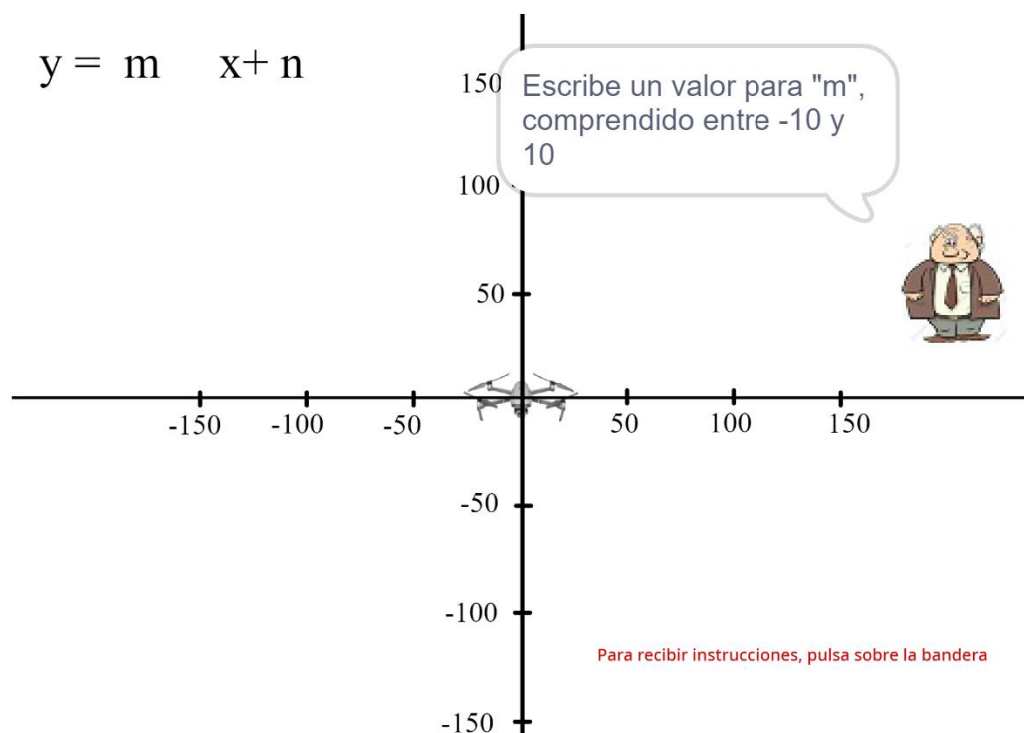
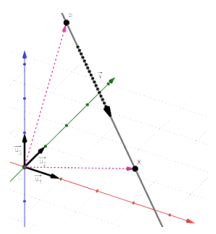


Figura A.4. Captura de la aplicación “Dibujar rectas mediante ecuaciones con Scratch”. Se trata de una sencilla interfaz en la que introducir la ecuación de la recta. Fuente: *Scratch* (mit.edu).



Desarrollo de la actividad

En un primer momento será el propio alumnado el encargado de plantear las coordenadas de los puntos posibles a escoger para resolver las pruebas.

- El uso de *Mentimeter* ayudará a proyectar una nube de puntos (a través de sus coordenadas) sugerida por los propios participantes.

Después, cada persona deberá escoger 2 de los puntos propuestos, y plantear una ecuación en forma explícita que dibuje una recta que contenga a los dos.

- Tras realizar los cálculos que estime oportunos, puede comprobar su hipótesis con la aplicación de *Scratch*.

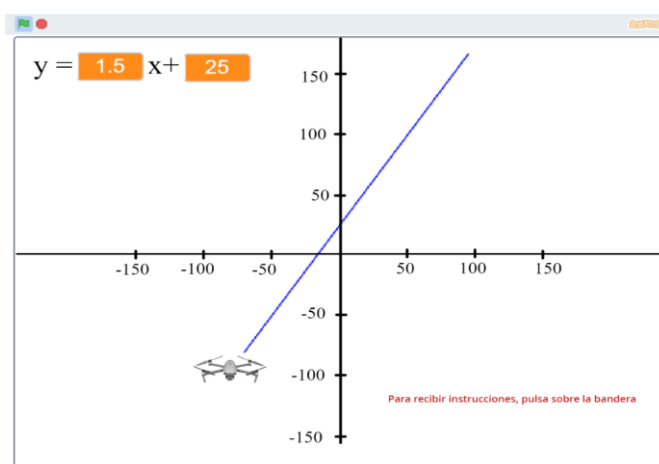


Figura A.5. Captura de la aplicación “Dibujar rectas mediante ecuaciones con Scratch”. Una vez introducidos los parámetros el dron realiza la trayectoria indicada. Fuente: *Scratch* (mit.edu).

Una vez conforme con el resultado, introducirá los datos en el formulario de *Google Forms* preparado al efecto, recibiendo como respuesta la primera parte de su código personal si la respuesta es afirmativa (este proceso es realizado manualmente por el profesor).

Una vez obtenidas las dos partes de su clave personal, el alumnado habrá superado la prueba y puede enviar por el formulario dicho código completo para la obtención de la recompensa.

Figura A.6. Captura del formulario donde introducir las respuestas. Fuente: elaboración propia.

Posibles problemas

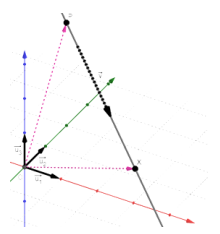
La aplicación está definida a través de la ecuación explícita, por lo que trabajará especialmente con las características que esta forma nos ofrece. La definición de esta ecuación requiere del dominio de la interpretación gráfica de sus coeficientes, o ser conscientes de la compatibilidad de dos ecuaciones con incógnitas “m” y “n” para que la recta pase por ambos puntos. Es decir, en uno de los casos supone una interpretación exclusivamente algebraica de la situación, mientras que el segundo caso conduce a trabajar con el concepto de pendiente y ordenada en el origen. De esta forma, la estrategia de resolución a priori podría ser doble:

- Un primer método sería plantear un sistema de ecuaciones con dos incógnitas a partir de los dos puntos, lo que supone el dominio de la interpretación algebraica de las ecuaciones que se generan.
- Obtener la pendiente del vector que une los dos puntos es otra opción, que muestra además el conocimiento de su interpretación geométrica, ajustando después la ordenada en el origen con cualquiera de los puntos, sin tener que plantear un sistema.

Recursos

Los recursos necesarios son:

- Equipo informático en el aula y proyector.
- Web *Mentimeter.com* en la que introducir las coordenadas de los puntos para proyectar.
- Formulario de *Google Forms*, que recopila el nombre de la persona participante y en el que se han programado tres campos de datos, de corrección manual.
- Aplicación web [Dibujar rectas mediante ecuaciones con Scratch \(mit.edu\)](https://scratch.mit.edu) –no requiere descarga alguna-, con la que hacer hipótesis de trayectorias y comprobar los resultados.
- Un dispositivo electrónico desde el que el alumnado pueda ejecutar la aplicación y rellenar el formulario. Son compatibles con ordenadores, tabletas y teléfonos inteligentes, pero si alguna persona tuviese dificultades con ello, se tratará de facilitar temporalmente el acceso a un dispositivo del centro.



2. KAHOOT COMO HERRAMIENTA DE REPASO CONCEPTUAL GAMIFICADO

El uso de la plataforma *Kahoot* está cada vez más extendido en las aulas y recibe una muy buena acogida por parte del alumnado. La componente lúdica y la facilidad de uso resultan muy atractivas al tiempo que, una vez más, supone una estrategia para captar su atención y enfocar el uso del teléfono móvil de forma educativa.

Desde el punto de vista del profesorado, esta plataforma es a la vez una comunidad donde encontramos una infinidad de preguntas que han sido puestas a disposición del público por otros usuarios (del mismo modo, nuestras propuestas lo estarán, cuando las creamos). Es, de este modo, una rica fuente de actividades a nuestra disposición para que podamos elegir aquella que más se adapta a la situación del aula que queramos trabajar y que además nos permite recopilar los datos y las respuestas dadas por el alumnado para proceder a su evaluación y orientar nuestro trabajo (recordemos que las sesiones programadas con esta herramienta están programadas en un punto intermedio del desarrollo de la unidad).

Kahoot! Home Discover Library Reports Groups Upgrade now Create

Línea Recta
4 favorites 29 plays 212 players
Play Edit

A public kahoot
Distancia entre puntos, pendiente y ecuaciones punto-pendiente y general de la recta.
PROF.AJSANCHEZ
Created over 3 years ago

Questions (5) Show answers

1 - Quiz
Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos (5,3) y (-1,2)

2 - Quiz
Determine la distancia entre los puntos A(-2,1) y B(-3,2)

3 - Quiz
Determina la distancia entre los puntos (10,-1) y (-3,0)

4 - Quiz
Si $y = \frac{2}{3}x + 4$, entonces la ecuación general de la recta es:

5 - Quiz
Si la ecuación gral de una recta es $3x + 5y + 5 = 0$, determina la ec. punto-pendiente:

Resource credits
Description: Desmos.com

Figura A.7. Captura de uno de los *Kahoot* disponibles para uso público.

Fuente: Desmos en *Kahoot.com*.

Recursos

Los recursos necesarios son:

- Equipo informático en el aula y proyector.
- Web [Kahoot.com](https://kahoot.com) donde registrarse y programar o buscar los *Kahoot* a desarrollar en clase (pudiéndose además proponer para su cumplimentación en casa).
- Un dispositivo electrónico desde el que el alumnado pueda participar. Es compatible con ordenadores, tabletas y teléfonos inteligentes, pero si alguna persona tuviese dificultades con ello, se tratará de facilitar temporalmente el acceso a un dispositivo del centro.

