



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE LAS MATRICES Y SUS APLICACIONES

Alumno/a: Sánchez Martínez, Marta

Tutora: Prof.^a Dr.^a Carmen Ordóñez Cañada
Dpto: Matemáticas

Septiembre, 2023

ÍNDICE

1. ABSTRACT	6
1. RESUMEN.....	5
2. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES	7
3. OBJETIVOS	11
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	13
4.1. Introducción al tema	13
4.2. Matrices	13
4.2.1. <i>Tipología de matrices</i>	13
4.2.2. <i>Método de Hermite</i>	16
4.2.3. <i>Teorema de Rouché-Frobenius</i>	18
4.2.3.1. <i>Teorema de Rouché-Frobenius</i>	19
4.3. Álgebra de matrices	19
4.3.1. <i>Suma de Matrices</i>	19
4.3.2. <i>Producto de una matriz por un escalar</i>	20
4.3.3. <i>Producto de matrices</i>	21
4.3.4. <i>Traspuesta de una matriz</i>	22
4.3.5. <i>Determinante de una matriz</i>	23
4.3.6. <i>Regla de Cramer</i>	25
4.3.7. <i>Inversa de una matriz</i>	27
4.4. Aplicaciones	28
4.4.1. <i>Aplicaciones en ingeniería electrónica</i>	28

4.4.2. Aplicaciones en ingeniería informática	30
4.4.3. Aplicaciones en geometría	31
4.4.4. Estadística	32
4.4.5. Ingeniería mecánica	33
4.4.6. Cadenas de Markov	34
4.4.7. Teoría de Grafos	35
5. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	37
5.1. Normativa aplicable	37
5.1.1. Objetivos de etapa	38
5.1.2. Competencias clave	39
5.1.3. Competencias específicas	43
5.1.4. Saberes básicos	45
5.1.5. Situaciones de aprendizaje	47
5.2. Análisis de libros de texto	47
5.2.1. Libro de texto de la Editorial Bruño	48
5.2.2. Libro de texto de la Editorial ANAYA	51
5.2.3. Comparativa	53
6. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	57
6.1. Introducción	57
6.2. Análisis manual 1	57
6.3. Análisis manual 2	59
6.4. Análisis manual 3	61
7. PROYECCIÓN DIDÁCTICA	

ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA.....	64
7.1. Título	64
7.10. Aspectos metodológicos	75
7.10.1. <i>Recursos y actividades</i>	76
7.11. Temporalización	81
7.2. Justificación	64
7.3. Contextualización.....	65
7.3.1. <i>Análisis del entorno</i>	65
7.3.2. <i>Análisis del centro educativo</i>	66
7.3.3. <i>Análisis del alumnado y del grupo-clase</i>	67
7.4. Objetivos y punto de partida de la unidad.....	67
7.5. Principios pedagógicos.....	68
7.6. Competencias clave relacionadas	69
7.7. Competencias específicas y criterios de evaluación	71
7.8. Indicadores de logro	72
7.9. Atención a la diversidad y a las diferencias individuales.....	73
8. CONCLUSIONES.....	85
9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
ANEXO I. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.....	91
ANEXO II. PRUEBA DE EVALUACIÓN	98

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.4.4.1. <i>Ejemplo de matriz de correlación</i>	33
Tabla 4.4.6.1. <i>Ejemplo Cadena de Markov</i>	35
Tabla 5.1.4.1. <i>Competencias clave y criterios de evaluación</i>	44
Tabla 5.2.3.1. <i>Contenido de los libros de texto</i>	55
Tabla 7.7.1. <i>Competencias específicas y criterios de evaluación de la Unidad Didáctica</i>	72
Tabla 7.8.1. <i>Indicadores de logro para el criterio de evaluación 1.1, 3.2, 6.2, 9.1 y 9.3 de la Tabla 7.7.1</i>	73
Tabla 7.8.2. <i>Indicadores de logro para el criterio de evaluación 1.2, 6.1, 8.1, 8.2 de la Tabla 7.7.1</i>	74
Tabla 7.11.1. <i>Temporalización de las unidades didácticas del curso</i>	83
Tabla 7.11.2. <i>Temporalización de la Unidad Didáctica “Matrices y aplicaciones”</i>	84

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 4.4.1.1. Caja negra de circuitos electrónicos y eléctricos</i>	29
<i>Figura 4.4.1.2. Circuito electrónico de tres mallas y dos nodos</i>	30
<i>Figura 4.4.7.1. Plano del metro de Londres (VisitLondon, 2023)</i>	36
<i>Figura 5.2.1.1. Esquema temario (J. M. Arias C. y I. Maza S., 2009, p. 35)</i>	49
<i>Figura 5.2.1.2. Producto de matrices (J. M. Arias C. y I. Maza S., 2009, p. 38)</i>	50
<i>Figura 5.2.1.3. Organización de datos en matrices (J. M. Arias C. y I. Maza S., 2009, p. 42)</i>	51
<i>Figura 5.2.2.1. Nomenclatura. Definiciones (J. Cólera, M. J. Oliviera, 2017, p. 50)</i>	52
<i>Figura 5.2.2.2. Producto de una matriz fila por una matriz columna (J. Cólera, M. J. Oliviera, 2017, p. 53)</i>	53
<i>Figura 7.3.1.1. Edificio de Maristas (Colegio Santa María de la Capilla Jaén, 2012)</i>	66

1. RESUMEN

En el presente Trabajo Final de Máster se documenta la fundamentación epistemológica, curricular y didáctica necesaria para la creación de una unidad didáctica. Dicha unidad se titula “Matrices y Aplicaciones” y está dirigida al curso de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de la asignatura Matemáticas II.

Se ha diseñado siguiendo la normativa en vigor LOMLOE (Ley Orgánica por la que se modifica la LOE de 2006). Previamente, se ha profundizado en el temario en cuestión elaborando un tema de oposiciones y se han analizado dos libros de texto de diferentes editoriales para establecer una comparativa.

Se realiza un análisis de diversas investigaciones didácticas. En la unidad didáctica se busca conseguir que el alumnado aprenda qué son y cómo operar con las matrices y que sea capaz de establecer las relaciones con la vida cotidiana gracias a la situación de aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: matrices, aplicaciones, unidad didáctica, Bachillerato, LOMLOE, situación de aprendizaje.

1. ABSTRACT

This Master's Thesis documents the epistemological, curricular and didactic foundations necessary for the creation of a didactic unit. The unit is entitled "Matrix and applications" and it is designed for the 2nd year of the bachelor of Science and Technology course of the subject Mathematics II.

It has been designed following the LOMLOE (Organic Law that modifies the LOE of 2006) regulation. Previously, the subject matter in consideration has been studied deeply by developing a state exam and by analyzing two school textbooks in order to choose the one which fits best.

Several didactic research studies are analyzed. In the didactic unit, the aim is that students learn what matrix are and how to operate with them, and that they are able to establish the relationship between the knowledge learnt and the everyday life thanks to the learning situation in order to make sense of Mathematics.

KEYWORDS: matrix, applications, didactic unit, Bachelor, LOMLOE, learning situation.

2. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

El presente Trabajo Final de Máster (TFM) ha sido redactado con el fin de culminar con el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas con especialidad en Matemáticas.

Mediante este trabajo, se pretende reflejar el aprendizaje obtenido a lo largo del curso académico. En concreto, la especialidad elegida y cursada es la de Matemáticas y este trabajo se centra en la asignatura “Matemáticas II” de 2º de Bachillerato.

El tema en el que me he basado es de matrices y sus aplicaciones. Se trata de un tema que he tenido muy presente a lo largo de mis estudios en el Grado de Ingeniería Electrónica Industrial y es este uno de los principales motivos por el que he optado por esta temática.

Considero las aplicaciones de las matemáticas como un apoyo fundamental a la hora de su estudio, de manera que puedan establecer conexiones reales. Centrarnos únicamente en desarrollar los conceptos puede ser un gran error, pues muchas veces se crea una barrera en el desarrollo de la enseñanza.

En el desarrollo del presente trabajo, se han analizado una serie de artículos didácticos de los principales investigadores en didáctica abordando el tema de las Matemáticas y sus aplicaciones.

Sosa, L., Carrillo, J. (2010) identifican diferentes subdominios del conocimiento que el profesorado debe de abordar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Cabe destacar que Carrillo es uno de los investigadores de la didáctica matemática más reconocidos.

Macías-P., M. R., Arteaga-P., I. G. (2022) investigan sobre la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos y sobre su implantación en las aulas. Plaza M., P. (2013) nos transmite la importancia que tiene para los alumnos las matemáticas como una herramienta para nuestro uso diario y nos sugiere diferentes aplicaciones que los alumnos deben de conocer.

Además de los autores anteriormente citados, también me he ayudado de otros artículos como el de Nishimura, K. y Honda, C. (2019) en el que se trata el diseño de tareas para desarrollar la competencia de toma de decisiones sociales en didáctica matemática, aunque está enfocado a alumnos de primaria y secundaria, sea este el motivo por el cuál no se incluye en la fundamentación didáctica. Pérez-T., P., Monje, J. y Castro, E. (2019) desarrollan un instrumento para obtener información sobre la ansiedad matemática a través de una entrevista.

Profundizando en la historia de las matrices, según Morra (2020) la primera vez que aparecieron las matrices fue de la mano del matemático James Joseph Sysvester (1814-1897). Sin embargo, fue el matemático y astrónomo sir William R. Hamilton quién realizó el desarrollo inicial de las matrices. Se encargó de agrupar las propiedades de los vectores en cuatro dimensiones, creando el álgebra no conmutativa.

En 1858, Arthur Cayley estableció la notación matricial como la representación de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y fue en este momento, cuando se empezó a descubrir el gran potencial que tienen las matrices.

En la actualidad los sistemas de matrices son muy utilizados en diversas áreas como la Geometría, la Biología o la Ingeniería. Además, numerosos programas informáticos utilizan las matrices a la hora de crear su código de programación.

La estructura que presenta el TFM se divide principalmente en los siguientes bloques: Fundamentación epistemológica, Fundamentación curricular, Fundamentación didáctica y Proyección didáctica.

En la Fundamentación epistemológica se desarrolla un tema de oposiciones relacionado con la Unidad Didáctica correspondiente. Se analizan en profundidad todo el temario necesario para adquirir el conocimiento de la materia en cuestión, abordando sus correspondientes definiciones y teoremas, e investigando sobre diferentes aplicaciones.

En la Fundamentación curricular se realiza un análisis de las leyes vigentes aplicables: Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) y Decreto 103/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa para Andalucía. También se realiza una comparativa entre diferentes libros de texto de las editoriales Bruño y ANAYA.

En la Fundamentación didáctica se analizan los artículos de Sosa, L., Carrillo, J. (2010), Macías-P., M. R., Arteaga-P., I. G. (2022) y Plaza M., P. (2013) que servirán de ayuda para el desarrollo de la proyección didáctica.

En la Proyección didáctica se diseña una Unidad Didáctica para el tema de Matrices basándose en las leyes vigentes tanto a nivel autonómico como nacional. Dentro de ella podemos encontrar una situación de aprendizaje que ayudará al alumnado a relacionar las matrices con sus aplicaciones.

3. OBJETIVOS

El objetivo principal del presente Trabajo Final de Máster es describir y analizar la enseñanza y el aprendizaje de las matrices y sus aplicaciones para el curso de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología y proponer una Unidad Didáctica esta temática.

Para conseguir el objetivo principal, se han marcado diferentes subobjetivos entre los que se encuentran:

Objetivo 1. Analizar y profundizar desde el punto de vista institucional la teoría de las matrices, haciendo especial hincapié a diferentes aplicaciones que nos podemos encontrar.

Objetivo 2. Analizar el currículo de la normativa vigente para el curso de 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología tanto a nivel estatal como a nivel autonómico.

Objetivo 3. Realizar un análisis didáctico de libros de texto de dos editoriales relevantes para el curso escogido y establecer una comparativa diferenciando las particularidades principales del temario.

Objetivo 4. Analizar trabajos de autores relevantes en didáctica de las matemáticas que hayan realizado trabajos de investigación en los que han profundizado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matrices y en las aplicaciones de las matemáticas.

Objetivo 5. Diseñar una Unidad Didáctica acorde a la legislación vigente realizando una situación de aprendizaje, conocidas las características de los alumnos e incorporando los recursos y metodologías necesarias.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

4.1. Introducción al tema

En el presente apartado se explica el tema 18 de oposiciones para la asignatura de matemáticas. Se titula “Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las ciencias sociales y de la naturaleza”. La mayor parte de las definiciones, ejemplos, teoremas, etc. son obtenidos de Merino y Santos (2006) y de Berenguer Maldonado, J. y Cobo Mérida, P. (2023).

4.2. Matrices

Definición 4.2.a: Sea K un cuerpo, la **matriz** con orden $m \times n$ que posee coeficientes en K se asemeja a una “caja” con m filas y n columnas que tiene la siguiente estructura:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Denotaremos $M_{m \times n}(K)$ al conjunto de las matrices con orden $m \times n$ que poseen coeficientes en el cuerpo K .

4.2.1. Tipología de matrices

Definición 4.2.1.a: Se llama **matriz fila** a aquella matriz que posee una única fila, su orden es $1 \times n$.

Definición 4.2.1.b: Se llama **matriz columna** a aquella matriz que posee una única columna y tiene orden es $m \times 1$.

Definición 4.2.1.c: Se denomina **matriz cuadrada** a toda matriz que posee el mismo número de filas que de columnas, es decir, es de orden $n \times n$. Denotaremos $M_n(K)$ en vez de $M_{n \times n}(K)$ al conjunto de matrices de orden n con coeficientes en el cuerpo K .

Definición 4.2.1.d: Dada una matriz A de orden $n \times m$, se llama **submatriz** de A a las matrices que han sido obtenidas a partir de suprimir algunas filas y columnas de A .

Definición 4.2.1.e: La diagonal principal de una matriz de orden n se compone de los siguientes elementos: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$, se denomina **matriz diagonal** a aquella matriz A que tiene los elementos situados fuera de la diagonal principal con valor nulo.

$$A \text{ es diagonal} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$$

Definición 4.2.1.f: Se denomina **matriz triangular superior** a aquella matriz que tiene los elementos situados debajo de su diagonal principal igual a cero. La **matriz triangular inferior** es aquella matriz que tiene todos los elementos situados por encima de la diagonal principal igual a cero.

$$Triangular superior \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$$

$$Triangular inferior \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i < j$$

Definición 4.2.1.g: Se denomina **matriz identidad** de orden n , a aquella matriz cuadrada que tiene los elementos situados dentro de la diagonal principal igual a uno y los elementos situados en el resto de posiciones igual a 0.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 4.2.1.h: Se denomina **traza** de una matriz cuadrada A de orden n a la suma de todos los elementos ubicados a lo largo de la diagonal principal.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Definición 4.2.1.i: Dada la matriz $A \in M_{m \times n}(K)$ de orden $n \times m$, se llama **pivote** de una fila o de una columna de A al primer elemento que sea no nulo de esa fila o columna, si procede. Se dice que la matriz A es **escalonada por filas** si cumple con las siguientes características:

- Si la matriz A posee filas compuestas únicamente por ceros y dichas filas se encuentran agrupadas en la parte inferior de A . Dichas filas se denominan filas nulas.
- El pivote en cada fila no nula es equivalente a uno y está situado a la derecha del pivote de la fila previa.
- Todos los elementos que se encuentran en la misma columna que el pivote de una fila y por debajo de él, son igual a cero.

Una matriz A es **escalonada reducida por filas** si además de cumplir las condiciones anteriores de una matriz escalonada por filas, cumple que todos los elementos que se encuentran en la misma columna que el pivote de una fila son todos igual a cero.

Se dice que la matriz A es **escalonada por columnas** si cumple las siguientes condiciones:

- Si la matriz A posee columnas formadas únicamente por ceros y dichas columnas se encuentran en las últimas columnas de A .
- El pivote en cada columna no nula es igual a uno y está situado más abajo del pivote de la fila anterior.
- Todos los elementos que se encuentran en la misma fila que el pivote de una columna y a la derecha de él, son igual a cero.

Una matriz A es **escalonada reducida por columnas** si además de cumplir las condiciones anteriores de una matriz escalonada por filas, cumple que todos los elementos que se encuentran en la misma fila que el pivote de una columna son todos igual a cero.

4.2.2. Método de Hermite

El método de Hermite consiste en reducir una matriz en una escalonada reducida. Para conseguir esto, es necesario realizar las siguientes transformaciones elementales en las filas de dicha matriz:

- Tipo 1: Modificar la posición de dos filas.
- Tipo 2: Multiplicar cada elemento de una fila por un escalar no nulo.
- Tipo 3: Sumar una fila a otra fila que esté multiplicada por un escalar.

Denotamos $A \sim_f B$ cuando las matrices A y B son equivalentes por filas, es decir, si mediante una sucesión de transformaciones elementales de filas se puede pasar de una a otra.

Lema 4.2.2.a: Dadas las matrices A , B y C en el conjunto $M_{m \times n}(K)$, se confirma:

- $A \sim_f A$.
- $A \sim_f B \leftrightarrow B \sim_f A$.
- Si se cumple $A \sim_f B$ y $B \sim_f C$, entonces $A \sim_f C$.

Lema 4.2.2.b: Dadas las matrices escalonadas reducidas por filas A y B , si son equivalentes por filas, entonces las matrices son iguales ($A = B$).

Teorema 4.2.2.a: Cada matriz tiene una única matriz escalonada reducida por filas equivalentes.

Demostración: Para demostrar la existencia de la matriz escalonada reducida podemos observar el siguiente algoritmo. La unicidad es obvia a partir del lema 4.2.2.b.

- Primero cambiamos las filas de tal modo que en el primer lugar tenemos una fila que tiene el primer coeficiente no nulo. En el caso de que el primer coeficiente de todas las filas sea cero, se considerará el segundo coeficiente, y así sucesivamente.
- En el caso de que la primera fila tenga pivote a , se multiplica dicha fila por $\frac{1}{a}$ de manera que el pivote sea igual a uno.

- En las filas restantes se hace 0 el primer coeficiente al sumarle la primera fila que es multiplicada por el escalar conveniente.
- La primera fila se deja fija y volverán a realizar los pasos anteriores del 1 al 3 con las filas restantes con el coeficiente siguiente hasta conseguir una matriz escalonada.
- Por último, teniendo el pivote 1 de cada fila no nula el término de todas las anteriores se hace cero, por lo que la matriz resultante es escalonada reducida.

■

Para ejemplificar el Teorema 4.2.2.a definimos la matriz A de orden 3×4 , se calcula su matriz escalonada reducida.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \sim_f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 4.2.2.a: Dada la matriz $A \in M_{m \times n}(K)$ de orden $n \times m$, se define **rango** de A al número de filas no nulas de la matriz escalonada reducida resultante. El rango se denota como $\text{rg}(A)$. Por lo que en el ejemplo del Teorema 4.2.2.a, el rango de la matriz es 3.

Proposición 4.2.2.a: Sea A una matriz de orden $m \times n$, entonces $\text{rg}(A) \leq \min(m,n)$.

4.2.3. Sistema de ecuaciones lineales

Sea un sistema con m ecuaciones lineales que tiene n incógnitas, tal y podemos ver en la siguiente ecuación:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots + \cdots + \vdots = \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Definiendo A como la matriz de coeficientes del sistema y A' como la matriz ampliada del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Definición 4.2.3.a: Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Sistema compatible cuando tiene al menos una solución. A su vez se divide en:
 - Sistema compatible determinado cuando el sistema tenga solo una solución.
 - Sistema compatible indeterminado cuando tenga más de una solución.
- Sistema incompatible cuando no tiene ninguna solución.

Proposición 4.2.3.a: Sea un sistema de ecuaciones lineales que cuenta con la matriz ampliada A' , sea H la forma normal de Hermite por filas de la matriz ampliada A' ,

diremos que el sistema que tenga la matriz ampliada igual a H es un sistema escalonado reducido que equivale a la inicial.

4.2.3.1. Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 4.2.3.1.a: Sea un sistema con m ecuaciones lineales, con n incógnitas, una matriz de coeficientes denominada A y matriz ampliada A' se verifica lo siguiente:

- Es un sistema compatible $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A')$
- Es un sistema compatible determinado $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A') = n$

Demostración: Dada C la matriz escalonada reducida por fila de A' , entonces C' será la matriz que se obtiene quitando la última columna de la matriz escalonada reducida de A .

Un sistema es compatible cuando en su matriz escalonada reducida no aparece $b = 0$ con $b \neq 0$, es decir, cuando C y C' poseen la misma cantidad de filas no nulas o $rg(A) = rg(A')$.

Cuando $rg(A) = rg(A') = r$, el sistema es compatible determinado si existen r incógnitas principales y $r = n$.

■

4.3. Álgebra de matrices

4.3.1. Suma de Matrices

Dadas las matrices A y B , ambas de orden $m \times n$. Teniendo en cuenta que $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$, $B = (b_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$, la suma de $A + B$ se define como:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es necesario para sumar matrices que tengan ambas el mismo orden, en otro caso no es posible.

Proposición 4.3.1.a: En la suma de matrices se cumplen las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $A + B = B + A$; $\forall A, B \in M_{m \times n}(K)$.
2. Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$; $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(K)$.
3. Elemento neutro: $\exists 0 \in M_{m \times n}(K)$ $A + 0 = 0 + A = A$ $\forall A \in M_{m \times n}(K)$.
4. Elemento simétrico $\forall A \in M_{m \times n}(K)$ $\exists \forall -A \in M_{m \times n}(K)$, $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

4.3.2. Producto de una matriz por un escalar

Definición 4.3.2.a: Dada la matriz $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$ de orden $m \times n$ y el escalar $\alpha \in K$.

$$(\alpha, A) \rightarrow \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{ij}$$

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 4.3.2.a: Se cumplen las siguientes propiedades para el producto de una matriz por un escalar:

- Propiedad pseudodistributiva para la suma de matrices: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ $\forall A, B \in M_{m \times n}(K)$; $\forall \alpha \in K$.

- Propiedad pseudodistributiva para la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \quad \forall A \in M_{m \times n}(K); \forall \alpha, \beta \in K.$
- Propiedad pseudoasociativa $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \quad \forall A \in M_{m \times n}(K); \forall \alpha, \beta \in K.$
- Elemento unidad: $1 \cdot A = A \quad \forall A \in M_{m \times n}(K)$

4.3.3. Producto de matrices

Dadas dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz situada a la izquierda (A) sea igual que el número de filas de la matriz situada a la derecha (B):

$$A = (a_{ik})_{ik} \in M_{m \times r}(K)$$

$$B = (b_{kj})_{kj} \in M_{r \times n}(K)$$

En el producto de A·B se obtiene una matriz de dimensiones $m \times n$.

$$(A, B) \rightarrow A \cdot B = C = (c_{ij})_{ij} M_{m \times n}(K)$$

Cada elemento de esta nueva matriz se obtiene realizando la suma de productos de cada elemento de una fila de la matriz de la izquierda por el correspondiente que se sitúa en cada columna de la matriz de la derecha.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^r a_{1k} \cdot b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^r a_{1k} \cdot b_{kj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^r a_{ik} \cdot b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^r a_{ik} \cdot b_{kj} \end{pmatrix}$$

Sean $A, B \in M_{m \times n}(K)$ dos matrices no nulas, entonces el producto puede resultar una matriz nula entendiendo como matriz nula toda matriz que posee todos los elementos son igual a cero.

Proposición 4.3.3.a: El producto de matrices cumple las siguientes propiedades:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad A \in M_{m \times n}(K); B \in M_{n \times k}(K); C \in M_{k \times r}(K)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad A, B \in M_{m \times n}(K); C \in M_{n \times k}(K)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad A \in M_{m \times n}(K); B, C \in M_{n \times k}(K)$
- $A \cdot I = I \cdot A = A \quad A \in M_{m \times n}(K)$

4.3.4. Traspuesta de una matriz

Definición 4.3.4.a: Sea la matriz $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(K)$, definimos la matriz traspuesta de A como la matriz $A^t = (a_{ij})_{ji}$. Es decir, dada una matriz A de orden $m \times n$, llamamos matriz traspuesta A^t , a aquella matriz de orden $n \times m$ cuyas filas son las columnas de A .

Proposición 4.3.4.a: Las propiedades de la matriz traspuesta son las siguientes:

- La traspuesta de una suma de matrices es equivalente a la suma de la traspuesta de cada matriz

$$(A + B)^t = A^t + B^t; \quad \forall A, B \in M_{m \times n}(K)$$

- La traspuesta de un producto de matrices es equivalente al producto de la traspuesta de cada matriz

$$(AB)^t = B^t A^t; \quad \forall A \in M_{m \times r}(K); B \in M_{r \times n}(K)$$

- La traspuesta de una matriz por un escalar es equivalente al producto del escalar por la traspuesta de la matriz

$$(\beta A)^t = \beta A^t; \quad \forall A \in M_{m \times n}(K); \forall \beta \in K$$

Definición 4.3.4.b: Sea A una matriz cuadrada, será simétrica si la matriz traspuesta A^t es igual a la matriz original A .

$$A \in M_n(K) \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$$

Definición 4.3.4.c: Una **matriz antisimétrica** cumple las siguientes condiciones. Como consecuencia, su diagonal principal equivalente a cero: $a_{ii} = 0$

$$A \in M_n(K) \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow -A = A^t \Leftrightarrow -a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$$

4.3.5. Determinante de una matriz

Definición 4.3.5.a: El determinante de una matriz cuadrada $B = (b_{ij})$ que es de orden n , se define como $\det(B) = b_{11} \cdot \beta_{11} + \dots + b_{nn} \cdot \beta_{nn}$.

Si el valor del determinante correspondiente a cada matriz de orden $n-1$ para una matriz cuadrada de orden n se conoce, en ese caso se denomina i -ésimo menor adjunto de la matriz B a $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(B_{ij})$. B_{ij} se refiere a la matriz obtenida de la matriz B eliminando la fila i -ésima y la columna j -ésima. Por lo que el determinante queda definido por:

$$\det(B) = b_{11} \cdot \beta_{11} + \dots + b_{nn} \cdot \beta_{nn}$$

Ejemplo: El determinante se calcula sumando los elementos de la primera columna de la matriz B multiplicado cada elemento por su correspondiente adjunto.

Para una matriz cuadrada de orden 3, el determinante se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} &= b_{11} \cdot \beta_{11} + b_{21} \cdot \beta_{21} + b_{31} \cdot \beta_{31} = \\ &= b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{21} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{31} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = \\ &= b_{11}(b_{22} \cdot b_{33} - b_{32} \cdot b_{23}) + b_{21}(b_{32} \cdot b_{13} - b_{12} \cdot b_{33}) + b_{31}(b_{12} \cdot b_{23} - b_{22} \cdot b_{13}) = \\ &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{31}b_{12}b_{23} - b_{11}b_{32}b_{23} - b_{21}b_{12}b_{33} - b_{31}b_{22}b_{13} \end{aligned}$$

Proposición 4.3.5.a: Los determinantes tienen las siguientes propiedades:

- Dadas 3 matrices cuadradas B , B' y B'' son idénticas a excepción de que la i -ésima fila o columna de B es la suma de filas o columnas correspondientes de B' y B'' .
 $\det(B) = \det(B') + \det(B'')$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \cdots & x_n + y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- Dada una matriz cuadrada B que tiene dos filas y dos columnas iguales, su determinante es igual a cero

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- Si queremos intercambiar dos filas o dos columnas de la matriz B, el determinante de dicha matriz cambia su signo:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- Si hay un escalar que multiplica toda una fila o columna, Dicho escalar es multiplicado por el determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot x_1 & \alpha \cdot x_2 & \cdots & \alpha \cdot x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- Solo cuando un determinante de una matriz cuadrada es distinto de cero, la matriz es regular, como veremos en el apartado 4.3.7.

$$\det(B) \neq 0$$

- Si tenemos el producto de matrices cuadradas un determinante equivalente al producto de los determinantes de las matrices cuadradas:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- En una matriz, el determinante es igual que el determinante de su traspuesta:

$$\det(B) = \det(B^t)$$

Teorema 4.3.5.a: Sea una matriz $A \in M_{m \times n}(K)$, entonces el rango de dicha matriz A coincide con el orden mayor de una submatriz cuadrada regular (Véase apartado 4.3.7.) de A.

4.3.6. Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método utilizado para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

El primer paso que debemos de tomar para utilizar Cramer es separar nuestro sistema de ecuaciones como un producto de matrices, tal y como se muestra a continuación:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La regla de Cramer dice que la única solución del sistema de ecuaciones viene determinada de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Si tenemos un sistema de ecuaciones de 3 incógnitas: x, y, z. El objetivo es despejar las incógnitas x, y, z. Para ello se van a utilizar los determinantes y sus propiedades. Puesto que la matriz B es cuadrada va a tener determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Las incógnitas se calculan de la siguiente forma, aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_{12} & b_{13} \\ k_2 & b_{22} & b_{23} \\ k_3 & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & k_1 & b_{13} \\ b_{21} & k_2 & b_{23} \\ b_{31} & k_3 & b_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & k_1 \\ b_{21} & b_{22} & k_2 \\ b_{31} & b_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

4.3.7. Inversa de una matriz

Definición 4.3.7.a: Sean $A, B \in M_n(K)$, B será matriz inversa de $A \Leftrightarrow AB = BA = I_n$.

Lema 4.3.7.a: Una matriz invertible $A \in M_n(K)$ únicamente posee una inversa.

Proposición 4.3.7.a: Sean $A, B \in M_n(K)$, se cumple:

- Si A y B son matrices invertibles, entonces AB es invertible.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Si $A_1, \dots, A_n$ son invertibles, entonces $A_1 \dots A_n$ será invertible.

$$(A_1 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \dots A_1^{-1}$$

- Si A es invertible, entonces A^t es invertible

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Teorema 4.3.7.a: Dada la matriz $A \in M_n(K)$, son equivalentes las afirmaciones siguientes:

- Es una matriz invertible o regular.
- Es una matriz regular a derecha.

$$BA = 0 \Rightarrow B = 0$$

- Es una matriz a izquierda.

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0$$

- $rg(A) = n$
- La forma de Hermite por filas de la matriz A es la identidad.
- La forma de Hermite por columnas de la matriz A es la identidad.
- La matriz se trata de un producto de matrices elementales.
- $\det(A) \neq 0$.

Por lo que, gracias a este Teorema, a las matrices inversibles las llamaremos a su vez como matrices regulares.

Corolario 4.3.7.a: Dada la matriz $A \in M_{m \times n}(K)$ y sea H la forma de Hermite por filas de la matriz A , entonces existe una matriz regular $Q \in M_m(K)$ de manera que $H = QA$.

Teorema 4.3.7.b: Sea la matriz $A \in M_n(K)$ de manera que existe $B_1, \dots, B_m \in M_n(K)$, cada una de ellas invertible tal que

$$B_m B_{m-1} \dots B_1 A = I \Rightarrow A^{-1} = B_m B_{m-1} \dots B_1$$

4.4. Aplicaciones

4.4.1. Aplicaciones en ingeniería electrónica

Una de las principales aplicaciones que tienen las matrices es su uso en la ingeniería eléctrica y electrónica para entender el funcionamiento de los circuitos y partes eléctricas que hay en determinadas cajas negras. A continuación, se muestra dicha caja que tiene dos entradas de alimentación (positiva y negativa) y dos salidas que podrían conectarse a una carga, alimentándola (positiva y negativa).



Figura 4.4.1.1. Caja negra de circuitos electrónicos y eléctricos

Tanto a la entrada (izquierda) como a la salida (derecha), podemos ver que tenemos una corriente de entrada (I_1) y otra corriente de salida (I_2). A su vez, hay una tensión de entrada (V_1) y una tensión de salida (V_2). Existen unas constantes (b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22}) que relacionan cada entrada con las salidas y ayudan a calcular cada valor siempre y cuando consideramos que hay operación lineal. Las constantes toman su valor dependiendo del circuito interno que exista en la caja.

$$v_1 = (b_{11} \quad b_{12}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = b_{11} \cdot v_1 + b_{12} \cdot I_1$$

$$I_1 = (b_{21} \quad b_{22}) \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = b_{21} \cdot v_2 + b_{22} \cdot I_2$$

Las matrices también se pueden utilizar en ingeniería electrónica para resolver problemas de circuitos más complejos. Las matrices nos ayudan a analizar los circuitos de una manera más rápida y sencilla usando las leyes de Kirchhoff.

Las leyes de Kirchhoff se dividen en dos:

- Primera Ley de Kirchhoff: La sumatoria de las corrientes que entran a un nodo es igual a la sumatoria de las corrientes que salen de dicho nodo. Entendiendo nodo como el punto de conexión de varios conductores.
- Segunda Ley de Kirchhoff: La sumatoria de las caídas de tensión de un circuito cerrado es igual a cero. Se aplica cuando en el circuito hay varias mallas y se quiere calcular la tensión de la malla o de un componente en particular.

Para resolver el circuito con las leyes de Kirchhoff, se analiza siguiendo una de las dos leyes y obtenemos una ecuación para cada nodo o malla. Por tanto, cada sumatorio de corrientes o tensiones, dependiendo de si lo analizamos como nodo o como malla, será una fila de la matriz.

Supongamos que tenemos el circuito electrónico de la Ilustración 2, que se trata de un circuito sencillo que nos ayuda a entender cómo utilizar las matrices. Se puede analizar con la primera Ley de Kirchhoff teniendo en cuenta que hay dos nodos: A y B.

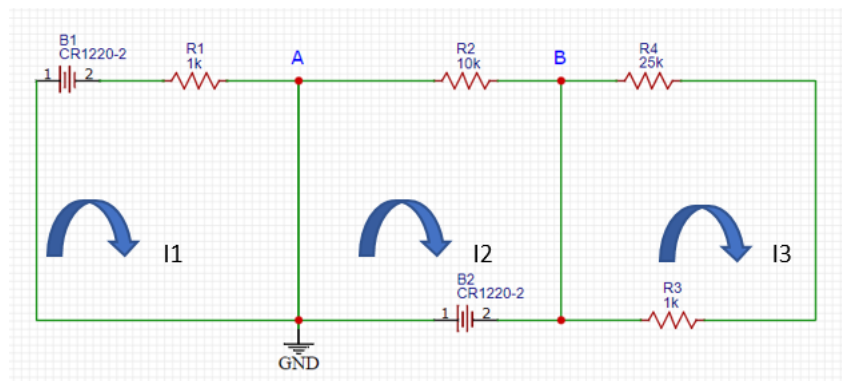


Figura 4.4.1.2. Circuito electrónico de tres mallas y dos nodos.

Vamos a analizarlo con mallas tal y como se indica en la segunda Ley de Kirchhoff. Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

1ª Malla (I1):

$$I1 \cdot 1k = V_{B1}$$

2ª Malla (I2):

$$I2 \cdot 10k = -V_{B2}$$

3ª Malla (I3):

$$I3 \cdot 23k + I3 \cdot 1k = 0$$

De las ecuaciones anteriores definimos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1k & 0 & 0 & V_{B1} \\ 0 & 10k & 0 & -V_{B2} \\ 0 & 0 & 23k + 1k & 0 \end{array} \right)$$

Con la matriz resultante se puede calcular el valor de las incógnitas (tensión, corriente o impedancia) con la regla de Cramer, explicada en el apartado 3.3.3.

4.4.2. Aplicaciones en ingeniería informática

Una de las áreas en las que más se utilizan las matrices es en el ámbito de la informática. En programación, a las matrices y vectores se les llama arrays y sirven como almacenamiento en el cual todos los elementos son del mismo tipo. Con dichos arrays, la información es mucho más fácil de manipular.

Se pueden definir los arrays dándoles un nombre, el que nosotros queramos e igualarlo a un conjunto de elementos. De esta manera siempre que llamemos al array con su nombre, estaremos llamando a todo el conjunto de datos definido.

Con los arrays se puede representar imágenes ya sea, 2D o 3D. La inteligencia artificial no tendría sentido sin estos importantes arrays, por ejemplo, en la identificación de rostros. El reconocimiento de rostros y objetos se realiza dividiendo la imagen en diferentes segmentos, el cual, cada segmento pertenece a un elemento de nuestra matriz y operando con ella. Las imágenes y los videos digitales son arrays con los que operando estos arrays podemos generar filtros y mejorar dicha imagen.

Otra aplicación muy importante en informática es el uso de matrices como base de datos. Todas las bases de datos de cualquier empresa o institución funcionan con el uso de matrices, de manera que se puedan guardar los datos de forma ordenada y poder obtener los datos rápidamente llamando a la matriz y seleccionando su posición.

4.4.3. Aplicaciones en geometría

La geometría es una rama de las matemáticas que trabaja con las matrices, ya que son de gran ayuda a la hora de trabajar en coordenadas en el espacio. La geometría se encarga de estudiar figuras geométricas en el espacio por medio de puntos, rectas, planos, etc.

El punto no tiene dimensiones, sin embargo, se utiliza para indicar una determinada posición en el espacio mediante coordenadas. Por otro lado, las rectas no tienen ningún espesor y son ilimitadas en sus extremos. Dos puntos pueden determinar una única recta que, a su vez, dichos puntos pertenecen a la recta. Un plano se puede determinar mediante tres puntos no colineales, es decir, cuando los tres puntos no pertenecen a una única recta. El plano tampoco tiene espesor ni límites.

Existen tres ejes principales cuando hablamos de un sistema de coordenadas tridimensional: eje x, y, z. El sistema de coordenadas sirve para poder definir la posición de cualquier figura geométrica. González Pascual, L. y Valdés Menéndez, A. (2022) afirman que está formado por:

- Origen de coordenadas, O.
- Base para los vectores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Vector de coordenadas en el espacio entre el origen de coordenadas y un punto cualquiera.

Cada punto debe de definirse por tres coordenadas.

$$P = (x, y, z)$$

El plano π se determina con un punto $P_0 \in \pi$ y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. La ecuación vectorial del plano viene definida por:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Podemos representar la ecuación con tres vectores:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Sólo dos de los vectores son linealmente independientes, por tanto, el rango de la matriz es 2:

$$rg(\pi) = \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

El determinante de la matriz es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando los determinantes de las matrices de arriba, obtenemos la ecuación del plano:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

4.4.4. Estadística

En estadística es muy utilizada la matriz de datos. Es la principal herramienta para registrar los valores que tienen las diferentes variables. Para ello se pueden utilizar herramientas como las hojas de cálculo cuando los datos sean numéricos. De esta manera, se pueden realizar estudios realizando las operaciones estadísticas necesarias o sometiénolos a los tratamientos necesarios.

Otra aplicación para Benites, L. (2021) es la matriz de correlación que estudia los coeficientes de correlación de un conjunto de variables. Nos permite ver la correlación de todas las posibles combinaciones de variables.

Tabla 4.4.4.1. *Ejemplo de matriz de correlación.*

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	1	0,73	0,43	0,53	0,87
V2	0,73	1	0,71	0,96	0,71
V3	0,43	0,71	1	0,72	0,41
V4	0,53	0,96	0,72	1	0,65
V5	0,87	0,71	0,41	0,65	1

En la tabla 4.4.4.1. se muestra un ejemplo de una matriz de correlación en la que $V_1, \dots, V_5$ son las variables que se van correlar.

También se puede representar de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,73 & 0,43 & 0,53 & 0,87 \\ 0,73 & 1 & 0,71 & 0,96 & 0,71 \\ 0,43 & 0,71 & 1 & 0,72 & 0,41 \\ 0,53 & 0,96 & 0,72 & 1 & 0,65 \\ 0,87 & 0,71 & 0,41 & 0,65 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonal principal de la matriz siempre será 1, ya que es la correlación entre una variable y sí misma. Se trata de una matriz simétrica. Un ejemplo podría ser correlar el cambio de la estatura de una persona a medida que va incrementando su edad.

4.4.5. Ingeniería mecánica

En ingeniería mecánica se utilizan las matrices para numerosas aplicaciones con Fuerzas en el espacio, entre ellas para calcular el momento de una fuerza.

Un momento es una magnitud vectorial que se calcula como el producto vectorial de una Fuerza F respecto a un punto O , que es representada por M_0 :

$$M_0 = \overrightarrow{OA} \times F$$

Considerando (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) las coordenadas del punto del origen O' y (X, Y, Z) las coordenadas del vector de Fuerza, la expresión del momento queda representada de la siguiente forma:

$$M_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

También existen métodos matriciales que se utilizan para analizar las estructuras. El desarrollo de los ordenadores ha sido uno de los motivos principales por los que se ha querido desarrollar el estudio de estructuras a través de las matrices.

4.4.6. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son una aplicación de las matrices a nivel de las ciencias sociales y de la naturaleza. Se trata de un proceso estocástico en el que conocido el estado actual (X_n) y unos estado previos ($X_1, \dots, X_{n-1}$), la probabilidad que hay del estado futuro es X_{n+1} . Por lo que únicamente depende del estado actual.

Se realiza una matriz de transición, que es una matriz cuadrada con elementos positivos y en la que la suma de los elementos que hay en cada fila es igual a 1.

$$A = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Una probable aplicación de la Cadena de Markov es el estudio de la genética Mendeliana, en el que se intenta cruzar individuos que pertenecen a la misma especie pero que tienen diferentes caracteres.

Otro ejemplo es cuando analizamos el seguimiento que pueden tener los pacientes en un hospital. Primero los distinguimos entre pacientes críticos, pacientes graves y pacientes estables.

Tabla 4.4.6.1. *Ejemplo Cadena de Markov*

Pacientes	Críticos	Graves	Estables
Críticos	0'7	0,25	0'05
Graves	0'3	0,55	0,15
Estables	0,1	0,2	0,7

En tabla 4.4.6.1. se muestra la probabilidad que existe de que cada tipo de paciente con una criticidad concreta pase a otro tipo de criticidad.

De manera que la probabilidad de que un paciente que inicialmente se encuentra en estado crítico, al día siguiente siga igual es de un 70%, que pase a estado grave es del 25% y que pase a estable es de un 5%.

4.4.7. Teoría de Grafos

Un grafo no orientado está formado por un conjunto de vértices o nodos que están unidos por unas líneas a las cuales se denominan aristas. Nos permiten representar un conjunto de objetos relacionados entre sí. Son útiles en circuitos electrónicos, figuras geométricas, mapa de carreteras... A los Grafos se pueden asociar matrices a ellos. A cada grafo se le relaciona una matriz de Adyacencia y una matriz de Incidencia.

La matriz de Adyacencia representa las conexiones existentes entre los pares de vértices. Se trata de una matriz cuadrada en la que en cada elemento se coloca un 1 si el vértice i es adyacente al vértice j , y se coloca un 0 en el caso contrario.

La matriz de Incidencia se construye de forma simétrica asignando un orden a cada vértice y a cada lado del grafo. Se asignará un 1 en el elemento ij si el lado j es incidente en el vértice i , y se asignará un 0 en el caso contrario.

Los grafos se pueden utilizar para encontrar el mejor camino que se deba de tomar, para realizar estudios estadísticos o para ver los habitantes que hay en una cierta región entre otros.

A continuación, en la Figura 3 se muestra un grafo no orientado de un caso real que corresponde al metro de Londres, en él se pueden ver los diferentes caminos que podemos tomar dependiendo de nuestro punto de partida y de nuestro destino.

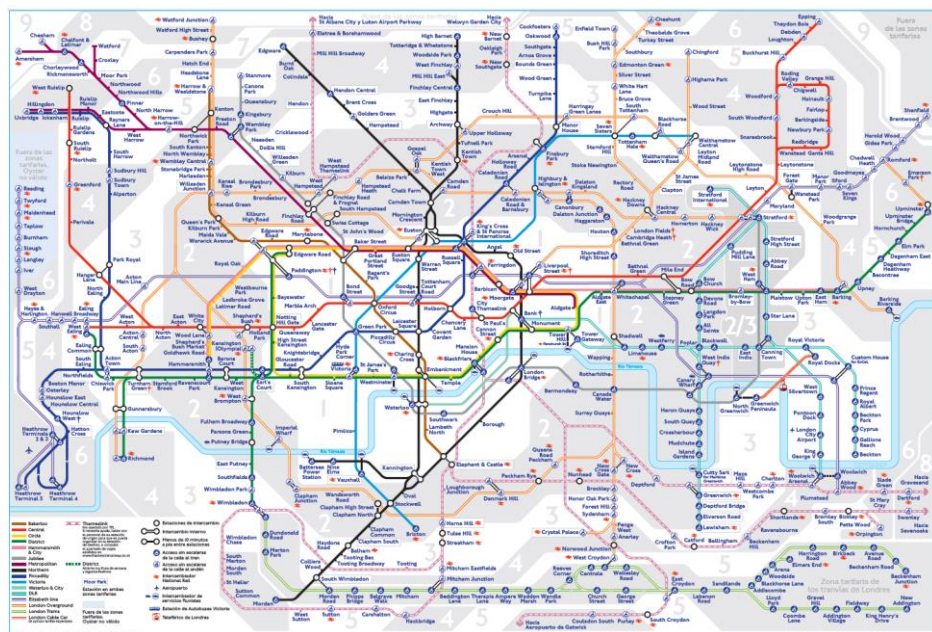


Figura 4.4.7.1. Plano del metro de Londres (VisitLondon, 2023)

5. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

5.1. Normativa aplicable

En el presente apartado se va a analizar el currículo que servirá de apoyo para abordar la unidad didáctica. Para comenzar se realiza una búsqueda de la normativa a aplicar y se analiza en detalle para el caso que nos ocupa.

La normativa a aplicar en España se encuentra en estado de tránsito de la normativa LOMCE a la normativa LOMLOE. Para el curso 2022/2023, aplica la LOMCE en los cursos pares y la LOMLOE para los cursos impares.

Sin embargo, se diseña la unidad didáctica del presente TFM para su aplicación en el curso 2023/2024. De manera que la normativa a aplicar es la LOMLOE:

- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE).

La unidad didáctica se desarrolla en la Comunidad Autónoma de Andalucía, por lo que también es necesario tener en cuenta la normativa que se rige en dicha Comunidad Autónoma:

- Decreto 103/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía (BOJA 15-05-2023).

De acuerdo con las normativas previamente mencionadas se extrae los contenidos y criterios de evaluación establecidos. La unidad didáctica está orientada a la asignatura de Matemáticas II del curso de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología.

5.1.1. Objetivos de etapa

Los objetivos son resultados que se esperan que el alumnado alcance al finalizar la etapa y cuya consecución está vinculada a la adquisición de las competencias clave.

- Ejercer la ciudadanía de forma democrática, desde un punto de vista global, y conseguir una conciencia cívica responsable, basada en los valores de la Constitución Española y que respete los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en el desarrollo de una sociedad justa y equitativa.
- Fortalecer una madurez personal, afectivo-sexual y social que les posibilite una actuación respetuosa, responsable y autónoma desarrollando su espíritu crítico. Prevenir, identificar y solucionar de forma pacífica los conflictos personales, familiares y sociales, así como los posibles casos de violencia.
- Promover la igualdad de derechos y oportunidades tanto para mujeres como para hombres, estudiar y valorar de forma crítica las desigualdades, así como el reconocimiento y enseñanza del papel importante que las mujeres han desempeñado en la historia e impulsar la igualdad real y la no discriminación por diferentes razones como el nacimiento, sexo, origen racial o étnico, discapacidad, edad, enfermedad, religión o creencias, orientación sexual o identidad de género.
- Consolidar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como requisitos para el aprovechar eficazmente el aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- Controlar, de forma oral como de forma escrita, el lenguaje castellano, indagando en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura, conociendo y valorando la peculiaridad lingüística del andaluz en todas sus variedades.
- Comunicarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
- Utilizar con responsabilidad y profesionalidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- Conocer y valorar de forma crítica la vida actualidad del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Formar parte de forma solidaria del desarrollo y progreso de su entorno social, considerando los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, como

son el flamenco y otros hechos que se distinguen en nuestra Comunidad, para que se valore y respete como un patrimonio propio y dentro del marco de la cultura española y universal.

- Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y controlar las habilidades principales particulares de la modalidad elegida.
- Comprender los elementos y métodos principales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el progreso de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto medioambiental, conociendo y apreciando el medio físico y natural de la Comunidad de Andalucía.
- Reforzar el emprendimiento gracias a aptitudes como la creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
- Reforzar las actividades físicas y el deporte para mejorar en el desarrollo personal y social. Consolidar los hábitos de actividades físicas y deportivas para la mejora del bienestar físico y mental, sirviendo de medio del desarrollo social y personal de cada uno.
- Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la movilidad segura y saludable.
- Promover una actitud responsable y comprometida en la lucha contra el cambio climático y en la defensa del desarrollo sostenible.

5.1.2. Competencias clave

Las competencias clave son considerados como desempeños imprescindibles para que el alumnado pueda prosperar con exitosamente en su recorrido formativo y afrontar los principales retos y desafíos globales y locales. Son adaptados al sistema educativo español de las competencias clave establecidas en la Recomendación del

Consejo de la Unión Europea, de 22 de mayo de 2018, referente a las competencias clave para el aprendizaje continuo.

- Competencia en comunicación lingüística.

La competencia en comunicación lingüística implica la habilidad de comunicarse de forma oral, escrita, signada o multimodal de manera efectiva para distintos ámbitos y contextos y con diferentes propósitos comunicativos. Implica la movilización, conscientemente, el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes. Esto implica ser capaz de comprender, interpretar y valorar críticamente mensajes orales, escritos, signados o multimodales evitando los riesgos de manipulación y desinformación, así como comunicarse eficazmente con otras personas de manera cooperativa, creativa, ética y respetuosa. Esta habilidad es fundamental para el pensamiento y para la construcción del conocimiento en todos los ámbitos del saber. Por ello, su desarrollo está vinculado a la reflexión explícita acerca del funcionamiento de la lengua en los géneros discursivos específicos de cada área de conocimiento, así como a los usos de la oralidad, la escritura o la asignación para pensar y para aprender. Por último, hace posible apreciar la dimensión estética del lenguaje y disfrutar de la cultura literaria.

- Competencia plurilingüe.

En la competencia plurilingüe se debe usar diferentes lenguas, orales o signadas, de forma apropiada y eficaz para el desarrollo del aprendizaje y la comunicación. Es importante reconocer y respetar los perfiles lingüísticos individuales y aprovechar las experiencias propias para desarrollar estrategias que permitan mediar y hacer transferencias entre lenguas, incluidas las clásicas, y, en su caso, mantener y adquirir destrezas en la lengua o lenguas familiares y en las lenguas oficiales. Integra, igualmente, dimensiones históricas e interculturales orientadas a conocer, valorar y respetar la diversidad lingüística y cultural de la sociedad con el objetivo de fomentar la convivencia democrática.

- Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería.

La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para modificar el entorno de forma comprometida,

responsable y sostenible. La competencia matemática posibilita el desarrollo aplicando la perspectiva y el razonamiento matemáticos para resolver diferentes problemas dependiendo del contexto. La competencia en ciencia necesita la comprensión y explicación del entorno natural y social, por medio de un conjunto de conocimientos y metodologías, incluidas la observación y la experimentación, para poder plantear preguntas y extraer conclusiones basadas en con el fin de interpretar y modificar el mundo natural y el contexto social. La competencia en tecnología e ingeniería comprende la aplicación de los conocimientos y metodologías propios de las ciencias para mejorar nuestra sociedad de acuerdo con las necesidades o deseos de las personas en un marco de seguridad, responsabilidad y sostenibilidad.

- Competencia digital.

La competencia digital se adquiere gracias al uso seguro, saludable, sostenible, crítico y responsable de las tecnologías digitales para el aprendizaje, para el trabajo y para la participación en la sociedad. También implica la alfabetización en información y datos, la comunicación y la colaboración, la educación mediática, la creación de contenidos digitales (en el que se incluye la programación), la seguridad (en el que se incluye el bienestar digital y las competencias relacionadas con la ciberseguridad), temas relacionados con la ciudadanía digital, la privacidad, la propiedad intelectual, la resolución de problemas y el pensamiento computacional y crítico.

- Competencia personal, social y de aprender a aprender.

La competencia personal, social y de aprender a aprender constituye la habilidad de reflexionar sobre uno mismo para ser capaz de conocerse, aceptarse y promover un crecimiento personal constante; gestionar el tiempo y la información de manera eficaz; trabajar con otros de forma constructiva; mantener la resiliencia; y gestionar el aprendizaje a lo largo de la vida. También implica la capacidad actuar frente a la incertidumbre y a la complejidad de las situaciones; adaptarse a los cambios; aprender a gestionar los procesos meta cognitivos; identificar conductas contrarias a la convivencia y desarrollar estrategias para afrontarlas; contribuir al bienestar físico, mental y emocional propio y de las demás personas, desarrollando habilidades para cuidarse a sí mismo y a quienes lo rodean a través de la corresponsabilidad; ser capaz de llevar una vida orientada al futuro; así demostrar empatía y abordar los conflictos en un contexto aliento.

- Competencia ciudadana.

La competencia ciudadana ayuda al alumnado para que sea capaz de ejercer una ciudadanía responsable y participar totalmente en la vida social y cívica, apoyándose en el entendimiento de los criterios y las estructuras sociales, económicas, jurídicas y políticas, así como en el conocimiento de los acontecimientos mundiales y el compromiso activo con la sostenibilidad y el logro de una ciudadanía mundial. También implica la alfabetización cívica, la inclusión de los valores propios de una cultura democrática fundada en el respeto a los derechos humanos, la reflexión crítica sobre de los grandes problemas éticos que vivimos actualmente y el desarrollo de un estilo de vida sostenible acorde con los Objetivos de Desarrollo Sostenible planteados en la Agenda 2030.

- Competencia emprendedora.

La competencia emprendedora incluye el desarrollo de un enfoque vital hacia las actuaciones ante las oportunidades, utilizando los conocimientos específicos que se necesitan para conseguir resultados significativos para los demás. Añade estrategias que permiten dirigir nuestro enfoque para detectar necesidades y oportunidades; desarrollar el pensamiento para analizar y evaluar el entorno, y crear y replantear ideas utilizando la imaginación, la creatividad, el pensamiento estratégico y la reflexión ética, crítica y constructiva dentro de los procesos creativos y de innovación; y despertar la disposición a aprender, a arriesgar y a afrontar la incertidumbre. Además, incluye tomar decisiones teniendo en cuenta la información y el conocimiento y colaborar de ágilmente con otras personas, con motivación, empatía y habilidades de comunicación y de negociación, para llevar las ideas planteadas a la acción mediante la planificación y gestión de proyectos sostenibles de valor social, cultural y económico-financiero.

- Competencia en conciencia y expresión culturales.

La competencia en conciencia y expresión culturales implica la comprensión y el respeto de la manera en que las ideas, las opiniones, los sentimientos y las emociones son expresadas y comunicadas de forma creativa en diferentes culturas y a través de diversas manifestaciones artísticas y culturales. Incluye además un compromiso con la comprensión, el desarrollo y la expresión de las ideas propias y del sentido del lugar que se ocupa o del papel que se desempeña en la sociedad. Además, tiene como requisito la comprensión

de la propia identidad en evolución y del patrimonio cultural en un mundo caracterizado por la diversidad, así como la toma de conciencia de que el arte y otras manifestaciones.

5.1.3. Competencias específicas

Las competencias específicas y los criterios de evaluación han sido obtenidos de Ministerio de Educación y Formación Profesional (2023).

Tabla 5.1.4.1. *Competencias clave y criterios de evaluación*

Competencias específicas	Criterios de Evaluación
1: Ser capaz de resolver los problemas que se den en la vida cotidiana, así como en la ciencia y en la tecnología con diferentes métodos y formas de razonar.	1.1. Utilizar distintos métodos y herramientas, incluyendo las herramientas digitales para resolver problemas de la vida cotidiana, de la ciencia y de la tecnología. 1.2. Calcular todas las soluciones posibles para resolver problemas de la vida cotidiana, de la ciencia y de la tecnología.
2: Analizar la validez de las posibles soluciones de un problema mediante el razonamiento y la argumentación contrastando su idoneidad.	2.1. Demostrar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema, utilizando el razonamiento y la argumentación. 2.2. Elegir la solución más adecuada de un problema dependiendo del contexto (de sostenibilidad, de consumo responsable, equidad...), mediante el razonamiento y la argumentación.
3: Analizar las matemáticas con distintas tecnologías para	3.1. Conseguir nuevo conocimiento matemático a través de la formulación, razonamiento y

Formular o investigar conjeturas o problemas.	justificación de conjeturas y problemas de forma autónoma. 3.2. Usar la tecnología para representar diferentes ideas matemáticas
4: Usar el pensamiento computacional eficazmente, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas gracias al uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la ciencia y la tecnología.	4.1. Interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, usando el pensamiento computacional.
5: Investigar y establecer conexiones entre las diferentes ideas matemáticas reconociendo los vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos dando significado y estructurando el aprendizaje matemático.	5.1. Investigar y adquirir nuevas ideas matemáticas. 5.2. Resolver problemas en contextos matemáticos estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas.
6: Descubrir las aplicaciones de las matemáticas en otras áreas del conocimiento.	6.1. Resolver problemas del mundo real utilizando procesos matemáticos. 6.2. Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad.
7: Utilizar las herramientas tecnológicas para representar conceptos, procedimientos e información matemáticos con el fin de visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.	7.1. Seleccionar las herramientas tecnológicas más adecuadas y reflejar los conocimientos matemáticos en ellas. 7.2. Elegir las herramientas tecnológicas que mejor se adecuan para reflejar nuestras ideas.

8: Expresar las ideas matemáticas individualmente y colectivamente con rigor matemático	8.1. Comunicar las ideas matemáticas con organización y rigor. 8.2. Utilizar el lenguaje matemático en distintos contextos
9: Utilizar destrezas personales y sociales, sabiendo gestionar las emociones, respetando las emociones de los demás y organizando entre todos el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo de los errores.	9.1. Afrontar las situaciones de incertidumbre y tomar decisiones teniendo en cuenta todas las opciones, gestionando las emociones, y aceptando y aprendiendo de los errores. 9.2. Mostrar una actitud positiva ante las posibles críticas recibidas de las que poder aprender y aceptar sin rechazo. 9.3. Realizar los problemas matemáticos activamente en equipos heterogéneos, respetando a los compañeros y demostrando las habilidades sociales y fomentando el trabajo en equipo.

5.1.4. Saberes básicos

De acuerdo con la Ley Orgánica 3/2020, los saberes básicos a aplicar son:

- Sentido numérico
 1. Sentido de las operaciones
 - Operaciones con matrices (suma, resta y producto).
 - Estrategias para operar con números reales, vectores y matrices: Entender y saber utilizar las propiedades.
 2. Relaciones
 - Relaciones existentes entre vectores y matrices. Conocer su estructura y propiedades.
- Sentido algebraico
 1. Patrones

- Generalización de patrones en situaciones diversas.

2. Modelo matemático

- Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
- Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos.

3. Igualdad y desigualdad

- Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, y con herramientas digitales.
- Resolución de sistemas de ecuaciones en diferentes contextos.

4. Pensamiento computacional

- Resolución de problemas de la vida cotidiana empleando las herramientas adecuadas.
- Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices, los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- Sentido socio afectivo

1. Toma de decisiones

- Habilidad para analizar diferentes soluciones y ser capaz de tomar decisiones en la resolución de problemas y tareas matemáticas.

2. Inclusión, respeto y diversidad

- Habilidades sociales y comunicativas necesarias para el aprendizaje matemático. Conocer y valorar las matemáticas, así como todos los matemáticos y matemáticas que han contribuido en ella a lo largo de la historia.

5.1.5. Situaciones de aprendizaje

Las situaciones de aprendizaje se desarrollan mediante la realización de una serie de actividades articuladas que los docentes llevarán a cabo para conseguir que los alumnos puedan desarrollar las competencias específicas en un determinado contexto.

La metodología tiene un carácter especialmente activo, motivador y participativo, que deberá partir de los intereses del alumnado favoreciendo el trabajo individual, cooperativo y el aprendizaje entre iguales desde un enfoque orientado a una perspectiva de género, al respeto a las diferencias individuales, la inclusión y a la indiscriminación, e integrará en todas las materias referencias a la vida cotidiana y al entorno inmediato.

En el planteamiento de las distintas situaciones de aprendizaje se realizará el entre los equipos docentes, con el objetivo de proporcionar un enfoque interdisciplinar, integrador y holístico al proceso educativo.

5.2. Análisis de libros de texto

Una vez analizada la materia necesaria para nuestra unidad didáctica y tras haber localizado y entendido la normativa aplicable en vigor, se procede a analizar los libros de texto que el alumnado va a utilizar a lo largo del aprendizaje de la unidad.

Los libros que se van a analizar y comparar son de Matemáticas II de 2º de bachillerato. Las editoriales que se van a analizar son *Bruño* y *ANAYA*. Aunque el TFM está adaptado a la nueva normativa LOMLOE, los libros que se van a elegir son anteriores a esta ley.

Se han analizado los siguientes libros de texto:

[L1] Arias Cabezas, J. M. y Maza Saéz, I. (2009). *Matemáticas 2 Bachillerato*. Grupo Editorial Bruño, S. L.

[L2] Colera, J. y Oliveira, M.J. (2009). *Matemáticas II*. Grupo ANAYA Educación.

5.2.1. Libro de texto de la Editorial Bruño

El libro de texto L1 de la editorial *Bruño* cuenta con un total de 14 temas distribuidos en tres bloques. El tema en cuestión es el tema 2 titulado “Matrices” y se encuentra dentro del bloque de álgebra, el cual es el primero.

En la página de introducción al tema explica brevemente que son las matrices y nombra algunas aplicaciones. También tiene un esquema que ayuda mucho al alumnado a estructurar su aprendizaje y ser capaz de separar y enlazar conocimientos.

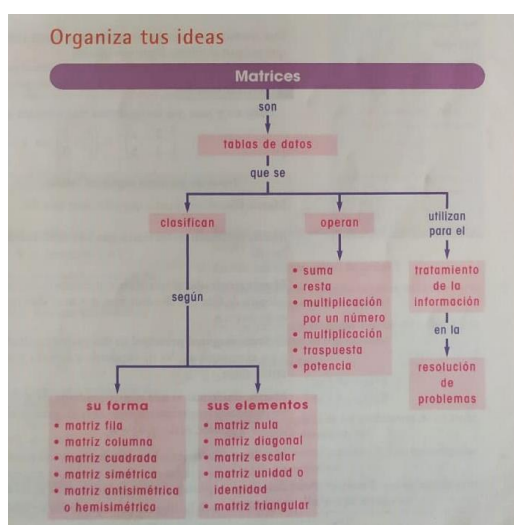


Figura 5.2.1.1. Esquema temario (J. M. Arias C. y I. Maza S., 2009, p. 35)

El temario se divide en cuatro apartados. El primer apartado es sobre tipos de matrices, donde se estudia la definición de una matriz, tipología de matrices y la matriz traspuesta de una matriz. Nos encontramos con 12 ejercicios donde se aplica la teoría y 12 ejercicios adicionales propuestos por el libro.

En el segundo apartado, el alumnado aprenderá a realizar operaciones con las matrices: sumar, restar, multiplicar un número por una matriz, producto de matrices. Además, aprenderán las propiedades de dichas operaciones y otras como la no conmutatividad. En este apartado hay 4 ejercicios para que puedan practicar las operaciones y 5 ejercicios adicionales propuestos por el libro.

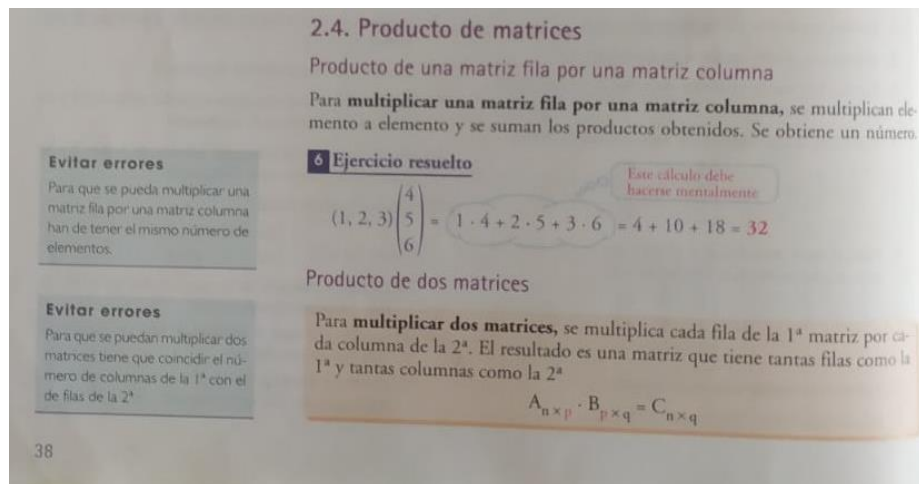


Figura 5.2.1.2. Producto de matrices (J. M. Arias C. y I. Maza S., 2009, p. 38)

En el tercer apartado, se aprenderá a realizar la potencia en matrices, el concepto y cálculo de matrices cíclicas, las potencias por recurrencia y los sistemas de ecuaciones matriciales. Tiene 6 ejercicios en los que podrán aplicar la teoría y 6 ejercicios adicionales propuestos por el libro.

En el último apartado del tema se aprenderá a resolver problemas matriciales con aplicaciones. Para ello se procede a la organización de datos en matrices y posteriormente a la representación matricial de un sistema. Al final del apartado hay 2 problemas con los que podrán practicar y 2 problemas adicionales propuestos por el libro.

4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

Piensa y calcula

Una empresa de electrodomésticos tiene tres fábricas: una en Madrid, otra en Málaga y otra en Vigo. La producción semanal viene dada por la siguiente matriz:

	Madrid	Málaga	Vigo
Frigoríficos	150	140	130
A = Lavadoras	175	155	125
Lavaplatos	160	140	100

a) Interpreta el elemento a_{12} de la matriz **A**
b) Interpreta el elemento a_{21} de la matriz **A**
c) Interpreta el elemento a_{33} de la matriz **A**

Modelización matemática

1. Identificar un problema real

Una fábrica necesita decidir sobre los presupuestos de distintas empresas para distribuir sus productos.

2. Identificar factores importantes y representar estos factores en términos matemáticos

La información de productos y costes se representa en **matrices**.

3. Usar técnicas matemáticas para obtener resultados

Con la **multiplicación de dos matrices** obtenemos los resultados del coste de cada empresa por llevar cada producto a los distintos países.

4. Interpretar y evaluar los resultados matemáticos y ver cómo afectan al mundo real

Los resultados matemáticos nos permiten tomar decisiones.

4.1. Organización de datos en matrices

Una de las aplicaciones más importantes de las matrices es su aplicación a la resolución de problemas algebraicos cuando hay muchos datos y éstos se pueden organizar en tablas de doble entrada, que son matrices.

15 Ejercicio resuelto

Una fábrica distribuye sus productos alimenticios A, B y C a cuatro países Q, R y S, según se describe en la matriz M (cantidades de toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas E y F para el transporte de los productos a los países de destino, como indica la matriz N (en euros por tonelada).

	A	B	C
P	200	100	120
Q	110	130	200
R	220	200	100
S	150	160	150

	P	Q	R	S
E	500	450	375	350
F	510	400	400	350

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

a) ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto?

b) ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa F?

c) Indica qué elementos de la matriz producto te permiten decidir cuál empresa que más barato transporta el producto B a todos los países.

Solución

$$\begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 284\,500 & 239\,500 & 240\,000 \\ 286\,500 & 239\,000 & 233\,700 \end{pmatrix}$$

a) El elemento a_{11} de la matriz producto representa lo que cobra la empresa E por distribuir el producto A a todos los países.

b) El elemento a_{23}

c) El elemento a_{22} , que es más barato que a_{12}

Figura 5.2.1.3. Organización de datos en matrices (J. M. Arias C. y I. Maza S., 2009, p. 42)

En cada uno de los subapartados hay un ejemplo de cada tipo de concepto, de manera que resulta una ayuda muy buena y visual para los estudiantes. Además, también se incorporan notas con los errores más frecuentes y como evitarlos.

Al final del tema hay 6 ejemplos de ejercicios más difíciles para que a partir de ellos puedan ser capaces de resolver cualquier problema. También tienen unas preguntas tipo test que ayudan a reflexionar sobre la teoría.

Posee 12 ejercicios para ampliar el conocimiento además de 15 problemas. Para profundizar con mayor dificultad hay 6 ejercicios.

5.2.2. Libro de texto de la Editorial ANAYA

Se va a analizar el libro de texto L2 de Matemáticas II de 2º de bachillerato. En concreto, nos vamos a centrar en el tema 2 que trata sobre Álgebra de matrices. Al iniciar el tema se da una breve contextualización histórica sobre las matrices. Antes de comenzar el temario, hay 3 ejercicios para resolver en los que el alumnado puede reflexionar sobre situaciones reales en las que se utilizan matrices. De esta manera se consigue captar su atención y conseguir que tengan una idea general de lo que van a aprender.

En el primer apartado del tema se estudia las definiciones de los términos que son imprescindibles. A su vez se dan diferentes ejemplos para que el alumnado pueda entenderlo de una manera más visual. El libro propone 3 ejercicios para practicar.

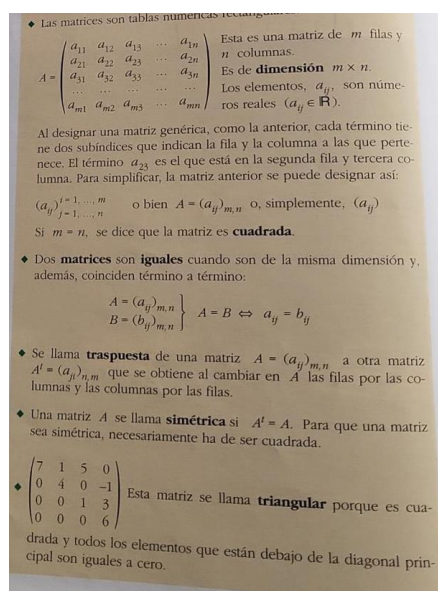


Figura 5.2.2.1. Nomenclatura. Definiciones (J. Cólera, M. J. Oliviera, 2017, p. 50)

El segundo apartado trata sobre operaciones. Se estudiarán las distintas operaciones que los alumnos deben de conocer: sumar, multiplicar un número por una matriz, producto de una matriz fila por una matriz columna, producto de matrices. Todos ellos con sus respectivos ejercicios resueltos. Se proponen 3 ejercicios para el desarrollo del aprendizaje y 8 ejercicios más para practicar al final del tema.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Efectuar el producto $F \cdot C$.

$F = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F \cdot C = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -5 + 3 + 8 + 0 = 6$

(El producto $C \cdot F$ se realiza de forma muy distinta, como veremos en la página siguiente).

2. El número de estudiantes en cierta academia de idiomas es: 100 en 1.º, 90 en 2.º y 80 en 3.º. Al finalizar el curso pasarán a 3.º el 20% de los que había en 3.º (repite), el 70% de los de 2.º y el 5% de los de 1.º, que han aprovechado de forma extraordinaria el curso. ¿Cuántos alumnos habrá en 3.º?

Observa que el número de alumnos que habrá en 3.º el curso próximo se puede obtener como producto de un vector fila por un vector columna:

$$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,70 & 0,20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix} = 0,05 \cdot 100 + 0,70 \cdot 90 + 0,20 \cdot 80 = 84$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
5% 70% 20% 5% de 100 70% de 90 20% de 80

Habrán 84 alumnos en 3.º.

Date cuenta de que este ejercicio podría haberse resuelto sin necesidad de usar matrices pero habría supuesto mayor trabajo y complicación.

3. Para viajar de A a C, no hay vuelo directo. Necesariamente hay que hacer escala en alguno de los aeropuertos intermedios. ¿Cómo representar matricialmente esta situación?

Podemos hacerlo del siguiente modo:

Número de vuelos de A a B₁, B₂, B₃, B₄: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Número de vuelos de B₁, B₂, B₃, B₄ a C: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Número de combinaciones de vuelos de A a C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 0 + 0 + 6 = 9$$

Hay 9 formas de ir de A a C.

Figura 5.2.2.2. Producto de una matriz fila por una matriz columna (J. Cólera, M. J. Oliviera, 2017, p. 53)

En el tercer apartado, se estudian las diferentes propiedades que tienen las operaciones con matrices. Mientras en el cuarto apartado profundizarán en las matrices cuadradas, aprendiendo la matriz unidad, la matriz inversa de otra matriz, la inversa de una matriz por el método de Gauss y el compendio de las propiedades de las operaciones en $M_{n,n}$. El alumnado cuenta con 2 ejercicios para poder practicar lo aprendido y 14 ejercicios más para practicar al final del tema.

El apartado quinto es destinado a estudiar los diferentes complementos teóricos para el estudio de las matrices: espacios vectoriales, n-uplas de números reales, combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal. Hay un total de 11 ejercicios para poder practicar lo aprendido.

Para el apartado final, que se trata del sexto, se estudiará el rango de una matriz y su obtención mediante el método de Gauss. Hay un total de 5 ejercicios propuestos.

Por último, se incluyen diferentes demostraciones y ejercicio para profundizar en la materia una vez que ya tienen los conocimientos necesarios.

Además de todos los ejercicios que aparecen en el libro, también se incluyen un CD en el que podrán seguir practicando y reforzando el temario con diferentes ejercicios

adicionales. También se incluyen diferentes notas resaltadas en las que se avisa de los datos más importantes y relevantes a tener en cuenta.

Al final del tema hay 7 ejemplos de ejercicios más difíciles para que a partir de ellos puedan ser capaces de resolver cualquier problema. Posee 17 ejercicios para ampliar el conocimiento además de 3 problemas. Para profundizar con mayor dificultad hay 10 ejercicios.

En cada uno de los apartados del temario hay una serie de ejercicios más fáciles para que los alumnos puedan poner en práctica lo aprendido en clase. También se van incorporando algunos ejemplos de reflexión en los que se puede reflexionar sobre la gran relación que existe entre las matrices y la vida cotidiana.

5.2.3. Comparativa

La estructura de los libros de texto analizados es muy similar. Comienzan con contenidos teóricos y después añaden ejemplos. En cada apartado tienen ejercicios para que el alumnado trabaje individualmente. La editorial *ANAYA* desarrolla las explicaciones con algo más de profundidad que en la editorial *Bruño*. Ambas tienen una parte del tema dedicado exclusivamente a profundizar en los desarrollos.

En el primer libro hay un ejemplo para cada definición del temario mientras que en el segundo para algunas definiciones hay varios ejemplos. Sin embargo, para el segundo libro en las que se echa en falta ejemplos para algunas definiciones.

La editorial de *Bruño* utiliza un lenguaje natural pues se expresa de una forma más cercana y amena al estudiante, por lo que facilita la comprensión de los conocimientos, pero sin alejarse de un lenguaje culto y matemático. En el caso de *ANAYA*, también se expresa con un lenguaje matemático y culto adaptado al nivel de bachillerato.

En cuanto a los conceptos, en ambas editoriales marcan visiblemente aquello que consideran más importante en negrita y marcándolos también con un fondo amarillo, de forma que se distinga del resto de contenidos. Ambas están de acuerdo a los requerimientos del currículo.

A continuación, se comparan los contenidos de ambas editoriales para analizar si las editoriales tienen todos los contenidos necesarios:

Tabla 5.2.3.1. *Contenido de los libros de texto.*

Saberes básicos	Editorial Bruño	Editorial ANAYA
Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.	1. Tipos de matrices.	1. Nomenclatura. Definiciones.
Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.	2. Operaciones con matrices.	2. Operaciones con matrices. 3. Propiedades de las operaciones con matrices.
Análisis algorítmico de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	3. Potencias de matrices y resolución de sistemas de matrices.	5. Complementos teóricos para el estudio de matrices.
Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología empleando las herramientas o los programas más adecuados.	4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas.	Diferentes ejercicios a lo largo del tema.

Ambos tienen teoremas, argumentaciones, demostraciones y proposiciones para ampliar el conocimiento matemático. Los procedimientos de *Bruño* son muy ilustrativos mientras que *ANAYA* tiende a expresarse más mediante texto.

Además, esta editorial tiene más ejercicios y problemas para que el alumnado pueda aplicar, practicar y ampliar sus conocimientos. También le dedica un apartado completo a la aplicación de las matrices en la vida real, un punto muy importante a tener en cuenta para nuestra Unidad.

El libro finalmente elegido será el de la editorial *Bruño*, ya que está mucho más esquematizado. El temario es mucho más fácil de entender para los alumnos y tiene más ejercicios y problemas para practicar. Además, este libro posee un apartado en especial dedicado a aplicaciones de matrices que el de *ANAYA* no tiene.

6. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

6.1. Introducción

El objetivo principal de la Fundamentación didáctica realizada ha sido analizar las investigaciones acerca de las necesidades existentes por parte del docente para conseguir un resultado más eficaz y dinámico en sus clases. Además, he querido verificar mi hipótesis inicial en la que defendía que las matemáticas siempre deben de ir acompañadas de las aplicaciones a la hora del desarrollo del aprendizaje. En la Fundamentación didáctica se han analizado los siguientes manuales:

[M1] Sosa, L. y Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XIV*, 569-580.

[M2] Macías Peñafiel, M. R. y Arteaga Pita, I. G. (2022). Aprendizaje Basado en Proyectos, en la enseñanza de Matemáticas para estudiantes de Bachillerato de la U.E.F “Pablo Hanníbal Vela”. *Polo del Conocimiento*, 67, 1585-1597.

[M3] Plaza Menéndez, P. (2013). Las competencias matemáticas en el aprendizaje a lo largo de la vida. *Suma +*, 72, 9-15.

6.2. Análisis manual 1

El presente apartado se basa en el artículo de Sosa, L., Carrillo, J. (2010) en el que se identifican los dominios del MKT a la hora de enseñar las matrices en bachillerato. Entendiendo MKT al Conocimiento Matemático para la Enseñanza que proviene del inglés Mathematical Knowledge for Teaching. El **objetivo** de este artículo es conocer cuáles son los conocimientos necesarios que el docente debe de incorporar para el correcto funcionamiento de sus clases.

Entre los subdominios del MKT, Ball et al. (2008) identifica los siguientes:

- Conocimiento común del contenido (CCK) necesario para resolver las tareas realizadas por los alumnos.
- Conocimiento del horizonte matemático (HCK) a lo largo de las etapas educativas.
- Conocimiento Especializado del contenido (SCK) propio de la profesión del profesorado ante las diferentes respuestas del alumnado.
- Conocimiento del contenido y de los alumnos (KCS) para predecir lo que alumnado le parece interesante, fácil, motivador, etc.
- Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) para conseguir elegir que representaciones, métodos y procedimientos son idóneas a la hora de enseñar contenidos.
- Conocimiento curricular (KCC).
- Conocimiento del contenido (SMK).
- Conocimiento didáctico del contenido (PCK).

La **metodología** de la investigación realizada se enmarca dentro del paradigma interpretativo (Latorre, et al. 1997) para comprender el MKT en el curso de bachillerato, se estudia un aspecto de corte cognitivo. Es por esto que el investigador juega un papel fundamental a la hora de interpretar los resultados.

Para esta investigación, se han escogido a dos profesoras que imparten clases de matemáticas para el segundo curso de Bachillerato. Ambas con una gran reputación como profesionales.

La investigación duró un periodo de tres meses en las que grabaron las clases impartidas por las profesoras y las analizaron detenidamente. Se obtuvieron las siguientes caracterizaciones:

- CCK: Conocer definición de matriz, tipos de matrices, operaciones, propiedades, aplicaciones.
- SCK: Se encuentra un descriptor. El profesor es quién debe caer y hacer caer en la cuenta de cierto conocimiento matemático.
- HCK: Conocer que las matrices constituyen un espacio vectorial.

- KCS: Las profesoras deben prever las diferentes dificultades que los alumnos puedan encontrar. Un ejemplo es explicar al alumnado un error que los alumnos suelen cometer normalmente para que sepan cómo enfrentarse ante este tipo de situaciones.
- KCT: Se evidencia con el uso de ejemplos, la gestión de la participación con sus respectivas preguntas y respuestas para que los alumnos aprendan razonando qué está bien y qué está mal.
- KCC: Conocer el contenido que los alumnos deben aprender gracias a la Programación, el libro de texto y el temario para el examen de admisión a la Universidad.

Cabe destacar que los ejemplos son muy versátiles a la hora de enseñar, ya que pueden ser utilizados tanto para explicar un tema concreto como para hacer hincapié en los aspectos más importantes.

La **principal aportación** que se obtiene es un primer acercamiento sobre el conocimiento matemático del profesorado de bachillerato de matemáticas. Los descriptores nos ayudan a conocer el amplio abanico de conocimientos que el profesor debe conocer y utilizar para conseguir un adecuado aprendizaje en sus estudiantes.

6.3. Análisis manual 2

En este último apartado de fundamentación didáctica se ha investigado sobre la aplicación del Aprendizaje Basado en Proyectos para la asignatura de Matemáticas de segundo de Bachillerato.

El artículo en el que he decidido basarme es de Macías-P., M. R., Arteaga-P., I. G. (2022) e intenta mejorar la enseñanza de las matemáticas. El **objetivo** es observar una propuesta de aprendizaje motivadora y analizar su implementación en las aulas.

Las Matemáticas han resultado siempre ser una materia difícil para muchos alumnos ya sea por falta de motivación o por los métodos tradicionales empleados. Cabe mencionar la importancia que esta materia tiene, pues es utilizada en casi todas las actividades que el hombre desarrolla.

La **metodología** que aplica es el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y nos acerca a una enseñanza mucho más innovadora y motivadora para el alumnado. Los

profesores deben de encontrar metodologías que aumenten el rendimiento escolar, así como despertar el interés del alumnado en las Matemáticas.

El ABP puede variar a la hora de implantarse en las aulas y esto depende de cada profesor por este motivo es necesario definir cuáles son las ideas básicas de esta metodología.

Dichos proyectos deben además integrar la teoría, práctica y el trabajo cooperativo del alumnado. Los métodos que aplican son los siguientes:

- Método cuantitativo para procesar un gran número de datos usando diversas técnicas, tabulando y asignando valores a la información recopilada. Posteriormente, se traslada estos resultados a matrices en Excel para analizarlas. La recopilación de estos datos se realizará mediante una entrevista.
- Método de nivel empírico para clasificar y enriquecer la información del estudio. A través de un enfoque lógico y empírico, se recopila información relevante para avanzar en la investigación.
- Método de nivel teórico permiten establecer cualidades que no son directamente observables para una comprensión más profunda.

Entre las técnicas, se llevó a cabo una entrevista con preguntas abiertas hacia los docentes sobre el uso de metodologías en matemáticas. También se realizaron encuestas dirigidas a los estudiantes acerca de los métodos tradicionales que se aplican en las aulas.

Se realizó entrevistas a 4 profesores de Matemáticas y encuestas a 88 estudiantes de primero de bachillerato. Se escogió a 31 estudiantes del mismo curso para obtener información acerca del aprendizaje mediante ABP.

De la matriz de análisis cualitativo se obtienen puntos en común para los distintos profesores como la importancia de la participación activa del estudiante, la metodología ABP se aplica de forma incorrecta en la institución por no direccionarse adecuadamente al estudiante. También se nombra la falta de recursos, formación por parte del profesorado y la falta de interés en el alumnado

Por otro lado, hay algunos puntos en los que divergen las opiniones como es la aplicación de las metodologías activas en el centro en el que dan clase.

Como **resultado** se obtiene que existe un desconocimiento sobre las metodologías activas y su aplicación y es por esto que no se utilizan. Los alumnos podrían llegar a ser mucho más creativos y participativos con el uso de ellas. Al trabajar de una manera grupal y no colaborativa, no hay un número significativo de participación por parte del alumnado.

Para el ABP la labor del profesorado será la de mediar y guiar a los alumnos para construir su aprendizaje. Sería importante revisar la manera en la que el método ABP se implementa para conseguir un aprendizaje centrado en los estudiantes.

6.4. Análisis manual 3

El artículo de Plaza M., P. (2013) para la revista Suma número 72, expone que la matemática es una ciencia muy utilizada en la vida diaria de las personas. Es un hecho que las matemáticas nos rodean por todas partes, allá donde enfoquemos nuestra atención por eso tienen una gran importancia. Cada persona se enfrenta a lo largo de su vida con numerosas situaciones en las que las matemáticas les ayudarán a resolverlas gracias a los conocimientos adquiridos en sus enseñanzas obligatorias y post-obligatorias.

Muchas veces los alumnos recurren a la típica pregunta ¿para qué sirven las matemáticas? El **problema** está en que aprenden sin conocer las posibles aplicaciones que pueden tener en los diferentes ámbitos. Freudenthal en los años 70 dijo “si no son útiles, las matemáticas no deberían de existir” (Suma+, 2013, p. 11).

Según Plaza M., P. (2013), los descriptores de la competencia matemática relacionan las capacidades que son necesarias para trabajar de forma autónoma en nuestra sociedad. Existen diferentes **centros de actuación** en los que afectan ciertos descriptores muy importantes como los que se describen a continuación:

- **Matemática cotidiana:** En este centro de actuación existen descriptores tan importantes como ser capaz de entender y poder comparar diferentes precios, las fechas de caducidad. Poder realizar un cálculo de los gastos que se han hecho a final de mes. Ser capaz de calcular cuánto va a ser el coste total de cualquier tipo de celebración. O incluso entender en una herencia cómo se realiza el reparto.

- Salud: Ser capaz de comprender la correlación existente entre diversos factores y hábitos con enfermedades. Comprender ciertas unidades de medida que son utilizadas en medicamentos.
- Consumo: Ser capaz de poder calcular si es mejor alquilar una vivienda o comprarla. Calcular cuál va a ser el descuento final de una compra. Comprender el recibo de la luz y el agua.
- Mundo laboral: Comprender nuestra nómina. Calcular la edad de nuestra jubilación, las ganancias mensuales y anuales.
- Tecnologías: Saber usar un cajero automático, programar electrodomésticos, utilizar un ordenador y sus utilidades.
- Ocio: Ser capaz de programar y realizar un presupuesto de nuestros viajes. Ser capaz de realizar el cambio de moneda de otros países. Conocer las probabilidades de los juegos de azar.
- Entorno democrático: Comprender las cifras, diagramas y gráficas que aparecen en los medios de comunicación...
- Economía y medio ambiente: Poder ser capaz de calcular el ahorro en carburante dependiendo del número de ocupantes del vehículo. Ser capaz de interpretar las gráficas de temperatura, precipitaciones, etc. Calcular si es mejor incorporar luces LED o bombillas dependiendo del ahorro energético.

Para poder **abordar los descriptores** anteriormente mencionados, necesitamos contenidos de aritmética, álgebra, geometría, unidades de medida, funciones y gráficas, proporcionalidad, estadística, azar y probabilidad. Son nociones básicas que necesitamos conocer, entender y utilizar en nuestra vida diaria y que quizás los alumnos no son capaces de ver esta importante relación. Por eso somos los docentes lo que no sólo debemos proporcionarles las herramientas y ayudarles a entender los conocimientos sino también debemos enseñarles la importancia y la gran utilidad que las matemáticas van a tener para el resto de sus vidas.

7. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

7.1. Título

El título de la unidad didáctica elegida es “Matrices y aplicaciones” que se desarrolla en el 2º curso de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas II dentro de la modalidad de ciencias y tecnología.

7.2. Justificación

Es un tema muy importante que los alumnos deberán de defender no sólo en clase sino también en selectividad. El tema de matrices se imparte en el segundo curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología y es muy práctico para los alumnos.

Sin embargo, es muy frecuente que los alumnos no son capaces de relacionar las matemáticas con la gran utilidad que tienen éstas en sus vidas. Es este el principal motivo por el que en esta Unidad Didáctica se hace un especial énfasis en que los alumnos sean capaces de entender que las matemáticas son necesarias y deben de aprenderse para que las puedan aplicar en sus vidas.

Entender esto puede servir de motivación y ayuda a la hora de aprender las matrices. Además, al ser un curso de ciencias y tecnología van a necesitar conocer y dominar este temario para poder utilizar los conocimientos adquiridos en sus posteriores estudios.

7.3. Contextualización

7.3.1. Análisis del entorno

El centro escolar donde se quiere poner en práctica el presente TFM es en el Colegio Santa María de la Capilla Hermanos Maristas que está ubicado en el centro de la capital de Jaén, en la Avenida Joaquín Ruiz Jiménez, 1, 23008, en la comunidad autónoma de Andalucía, España. Gran parte de la información de este apartado ha sido cedida por el Colegio Santa María de la Capilla Jaén (2023).



Figura 7.3.1.1. Edificio de Maristas (Colegio Santa María de la Capilla Jaén, 2012)

Es un colegio concertado que está sostenido por fondos públicos de Educación Infantil, Primaria, Secundaria y fondos privados para Bachillerato. Se trata de un centro de alumnos mixtos, donde niños y niñas aprenden por igual en las mismas clases, siempre divididos por niveles.

El centro fue fundado por Marcelino Champagnat, nacido en Francia en 1789. Siendo muy joven quiso ejercer de sacerdote y tuvo muchísimas dificultades debido a su escasa educación. En 1824, decidió crear una Sociedad religiosa católica dedicada a la

enseñanza, fundando Maristas. Marcelino fue proclamado Santo en 1999 por Juan Pablo II. Actualmente Maristas se abarca en 81 países.

El colegio se ubica en una zona que se encuentra muy bien comunicada del centro de la ciudad. Se encuentra en una zona donde hay numerosos centros escolares que tienen la misma oferta académica. Es una zona en la que hay numerosos servicios para los docentes y el alumnado como papelerías, librerías, cafeterías...

7.3.2. Análisis del centro educativo

Existen tres grupos para Bachillerato repartidos en Bachillerato de ciencias tecnológico (Grupo A), bachillerato de ciencias biológico (Grupo B), y bachillerato de humanidades (Grupo C). Cada clase cuenta con un aula propio para las sesiones didácticas. En concreto, el presente TFM se va a orientar al segundo curso de segundo de bachillerato de la rama de ciencias y es útil tanto para el bachillerato tecnológico como para el biológico.

Las aulas de los grupos A y B, que son a los que se les va a impartir clase, se encuentran ambas en la planta baja del edificio principal. Para el grupo A el tamaño del aula es ligeramente inferior que para el grupo B, ya que el número de alumnos es menor. Aun así, cuentan con espacio suficiente para todos los alumnos. El alumnado se sienta por parejas para que puedan trabajar individualmente y con sus compañeros. Cuentan con abundante luz natural, ya que tienen entre tres y cuatro ventanas.

Cada clase cuenta con una pizarra digital y otra pizarra blanca en la que se puede escribir con rotuladores. Cada profesor tiene un portátil táctil que se puede conectar a la pizarra digital y compartir pantalla. El profesor puede elegir entre escribir en la pantalla del portátil o en la pantalla de la pizarra digital.

Cada alumno tiene su propia taquilla que está ubicada en el pasillo, donde pueden guardar todo lo que necesiten y cerrarla con llave. Además, dentro del aula tienen paneles para colgar todo lo que sea relevante, así como un calendario donde anotar las fechas de los exámenes.

A la semana se imparten un total de 4 horas por grupo. El horario de clases de Matemáticas II para el Grupo A es martes y miércoles de 08:00 a 09:00, jueves de 09:00

a 10:00 y viernes de 11:30 a 12:30. El horario de clases para el grupo B es lunes y miércoles de 09:00 a 10:00, martes de 13:30 a 14:30 y viernes de 08:00 a 09:00.

7.3.3. *Análisis del alumnado y del grupo-clase*

Los alumnos que estudian en el colegio provienen de familias de clase económica media-alta cuyos padres tienen de media 42 años de edad y con 2 hijos. En su gran mayoría, estas familias se dedican a profesiones liberales o son propietarios industriales o funcionarios. Son familias religiosas que quieren educar a sus hijos con valores cristianos.

En el grupo A de bachillerato de ciencias tecnológico hay un total de 24 alumnos que en general tienen una buena actitud, aunque les cuesta un poco el aprendizaje de las matemáticas.

En el grupo B de bachillerato de ciencias biológico hay un total de 32 alumnos con ganas de aprender y que necesitan una elevada nota en selectividad para poder obtener la carrera que desean.

En ninguno de los dos grupos hay alumnos con capacidades especiales que necesiten refuerzo o una adaptación curricular. Por este motivo, el desarrollo de la unidad didáctica se va a realizar de manera homogénea a todos los alumnos y alumnas.

7.4. Objetivos y punto de partida de la unidad

Según el artículo 5 del Decreto 103/2023, los objetivos de etapa relacionados con la presente unidad didáctica son:

- Responsabilizarse de sus deberes, conociendo y ejerciendo sus derechos en el respeto de los demás, desarrollar aptitudes como la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, entrenarse en el diálogo consolidando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad global y prepararse para el empleo de la ciudadanía democrática.
- Aprender y desarrollar hábitos de disciplina, estudiar y trabajar independientemente como en equipo de forma efectiva como condición

necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

- Desarrollar habilidades básicas en el uso de las fuentes de información de una manera crítica para adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las habilidades tecnológicas básicas y reflexionar sobre el uso y funcionamiento de las tecnologías de manera ética.
- Entender el conocimiento científico como un conjunto unificado que se divide en diferentes áreas de estudio y conocer y abordar los métodos para reconocer los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- Entender y comunicarse de manera efectiva, tanto oralmente como de forma escrita, en la lengua castellana, textos y mensajes de mayor complejidad, y comenzar a explorar en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

7.5. Principios pedagógicos

Los principios pedagógicos citados en el artículo 6 del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril son los que se muestran a continuación:

- Las actividades educativas en Bachillerato ayudarán al alumnado en su capacidad para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para aplicar diferentes métodos de investigación, incluyendo la perspectiva de género.
- Se tendrá especial atención a aquellos alumnos y alumnas que tengan una necesidad específica brindándoles apoyo adaptado atendiendo a la diversidad.

Los principios pedagógicos citados en el artículo 6 del Decreto 103/2023, de 9 de mayo son los que se muestran a continuación:

- Se buscará el desarrollo progresivo de las bases que ayuden a los alumnos a adquirir las competencias clave.
- Se implementará el uso de tecnologías de la información y la comunicación.

- Las Unidades Didácticas incluirán actividades y tareas que ayuden al desarrollo de la competencia lingüística, buscando alcanzar el interés y hábito de la lectura, expresión escrita y la capacidad de expresión oral en clase.
- Se implementará el aprendizaje mediante resolución colaborativa de problemas, trabajando en equipo, aplicando métodos de investigación, responsabilidad y emprendimiento.
- Actividades para fomentar el enfoque interdisciplinar del aprendizaje por competencias.

7.6. Competencias clave relacionadas

Según el BOJA número 90 de 15/05/2023, las competencias clave relacionadas con sus descriptores operativos correspondientes a la unidad didáctica son:

- Competencia en comunicación lingüística.
 - CCL1. Se expresa con coherencia, fluidez y adecuación ante los contextos sociales ya académicos. Participa de forma cooperativa y respetuosa en las interacciones comunicativas.
- Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería.
 - STEM1. Usa método inductivos y deductivos matemáticos empleando estrategias para resolver problemas analizando sus soluciones.
 - STEM2. Usa el pensamiento científico a la hora de entender fenómenos. Experimenta, investiga y usa herramientas para comprobar hipótesis.
 - STEM3. Trabaja en equipo de forma colaborativa resolviendo problemas y proyectos.
 - STEM4. Interpreta y expresa de manera clara y precisa los elementos más importantes de las investigaciones.
- Competencia digital.

- DC1. Realiza avanzadas búsquedas de información en internet teniendo en cuenta la calidad y fiabilidad de sus resultados referenciando la información.
- CD2. Amplía su conocimiento a través de herramientas digitales.
- CD3. Selecciona las herramientas para aplicarlas en su entorno de aprendizaje digital para trabajar colaborativamente y poder compartir su información.
- CD4. Aplica medidas ante los posibles riesgos en el uso de tecnologías digitales.
- Competencia personal, social y de aprender a aprender.
 - CPSAA1.1. Autoeficacia de manera autónoma para la eficacia del aprendizaje.
 - CPSAA1.2. Gestiona de manera constructiva los cambios, participando socialmente, desarrollando una personalidad autónoma.
 - CPSAA2. Se involucra en un estilo de vida sostenible, atendiendo al bienestar mental propio y de los demás.
 - CPSAA3.1. Es consciente de la gran influencia que puede ejercer en el grupo mostrando una personalidad empática.
 - CPSAA3.2. Distribuye las tareas en un grupo, proporcionando las tareas con un enfoque sistémico.
 - CPSAA4. Valora la fiabilidad de las fuentes de información.
 - CPSAA5. Es capaz de planificar a largo plazo sus propósitos en la construcción del conocimiento.

7.7. Competencias específicas y criterios de evaluación

De acuerdo con la Ley Orgánica 3/2020, las competencias específicas de la unidad didáctica junto con sus criterios de evaluación son las siguientes:

Tabla 7.7.1. *Competencias específicas y criterios de evaluación de la Unidad Didáctica.*

Competencias específicas	Criterios de Evaluación
1	1.1. 1.2.
3	3.2.
6	6.1. 6.2.
8	8.1. 8.2.
9	9.1. 9.3.

7.8. Indicadores de logro

La evaluación del aprendizaje del alumnado se realizará de forma continua, integradora y objetiva. Se realizará una observación continua de la evolución en el proceso de aprendizaje y del grado de desarrollo de las competencias específicas. Para ello se identifican los indicadores de logro de cada criterio de evaluación.

Tabla 7.8.1. *Indicadores de logro para el criterio de evaluación 1.1, 3.2, 6.2, 9.1 y 9.3 de la Tabla 7.7.1.*

INSUFICIENTE (1-4)	SUFICIENTE (5-6)	BIEN (6-7)	NOTABLE (7-8)	SOBRESALIENTE (9-10)
Situación de aprendizaje: No es capaz de identificar ninguna estrategia.	Situación de aprendizaje: Es capaz de resolver los problemas con al menos una estrategia. No utiliza las herramientas digitales.	Situación de aprendizaje: Es capaz de resolver los problemas con al menos una estrategia. Utiliza las herramientas digitales.	Situación de aprendizaje: Es capaz de resolver los problemas con diferentes estrategias sin elegir la más eficiente, pero trabajando en equipo. Utiliza las herramientas digitales.	Situación de aprendizaje: Es capaz de resolver los problemas con diferentes estrategias y elegir más eficiente, trabajando en equipo. Utiliza las herramientas digitales.

Tabla 7.8.2. *Indicadores de logro para el criterio de evaluación 1.2, 6.1, 8.1, 8.2 de la Tabla 7.7.1.*

INSUFICIENTE (1-4)	SUFICIENTE (5-6)	BIEN (6-7)	NOTABLE (7-8)	SOBRESALIENTE (9-10)
No consigue resolver los ejercicios del examen.	Consigue resolver la mitad de los ejercicios de la situación de aprendizaje sin describir procedimiento.	Consigue resolver 3 de los problemas del examen y describe el procedimiento de resolución detallado.	Consigue resolver 4 de los problemas del examen y describe el procedimiento de resolución detallado.	Consigue resolver todos los problemas del examen y describe el procedimiento de resolución detallado.

7.9. Atención a la diversidad y a las diferencias individuales

Cada estudiante tiene motivaciones diferentes al resto y además su proceso de aprendizaje es también distinto. Por ello, nos encontramos con diferentes capacidades que como docentes hay que reconocer y atender para que todos los alumnos lleguen al mismo punto sin importar las diferencias que existan entre ellos, atendiendo a la diversidad.

El primer paso es estar pendiente de cómo cada alumno se enfrenta a la materia en cuestión. Para ellos es la primera vez que se enfrentan a las matrices por lo que no tendría mucho sentido realizar una evaluación inicial sobre este tema. Por este motivo, es necesario atender a como cada alumno va realizando los ejercicios para ver que necesidades poseen.

Una vez reconocidos cuales son las principales dificultades de cada alumno y su evolución, se preparará una serie de ejercicios para que puedan reforzar sus puntos débiles y avanzar cada uno a su propio ritmo.

Además, los grupos de la situación de aprendizaje serán seleccionados por el docente para que entre los miembros del grupo haya alumnos con diferentes niveles de

aprendizaje y así entre todos podrán ayudarse para llegar al objetivo que tienen en común.

A continuación, se muestra unos ejemplos de actividades de refuerzo que se pueden entregar a los alumnos para superar los objetivos de la unidad.

Actividad 1 de refuerzo. Producto de matrices

Para que dos matrices se puedan multiplicar el número de columnas de la primera matriz debe de coincidir con el número de filas de la segunda.

La matriz A tiene 2 filas (n) y 2 columnas (m) por lo que su dimensión es 2×2 (n×m). La matriz B tiene 2 filas (m) y 3 columnas (p) por lo que su dimensión es 2×3 (m×p). Como el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda se puede multiplicar.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$$

La matriz resultante tendrá el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda matriz.

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times p} = R_{n \times p}$$

Una vez que comprobamos que este criterio cumple, comenzamos con la operación. Para ello, hay que multiplicar cada fila de la primera matriz por cada columna de la segunda.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot h & a \cdot f + b \cdot i & a \cdot g + b \cdot j \\ c \cdot e + d \cdot h & c \cdot f + d \cdot i & c \cdot g + d \cdot j \end{pmatrix}$$

1) Realiza las siguientes operaciones:

$$a) \begin{pmatrix} 12 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 8 & -7 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 2 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 2 de refuerzo. Sistema de ecuaciones matriciales

La resolución de un sistema de ecuaciones matriciales es idéntica a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. En este caso las incógnitas son matrices que hay que despejar para conseguir hallar el resultado de cada matriz incógnita. Se pueden despejar por sustitución, igualación o reducción.

1) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + 8B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$-8A - 4B - 6C = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$5A - 9B - 4C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$2A + 7B - 7C = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

7.10. Aspectos metodológicos

Las metodologías que se siguen en la unidad didáctica son tres, son claves para la comprensión del temario y están basados según Sindicato de Euskal Herria. (2022). Cada sesión tendrá una metodología diferente o un conjunto de metodologías dentro de las siguientes:

- **Aprendizaje cooperativo:** Consiste en dividir los alumnos de la clase en grupos más pequeños para que puedan trabajar en equipo. Cada alumno debe de profundizar en su propio aprendizaje. Esta metodología se aplica en la situación de aprendizaje.

- Aprendizaje basado en problemas (PBL): se ocupa de una meta particular que el alumnado debe de alcanzar. El objetivo es que el alumnado entienda los conceptos matemáticos básicos que se están dando en clase.
- Aprendizaje basado en proyectos (ABP): Se busca que el alumnado sea capaz de resolver problemas que les servirán para la vida diaria gracias a la situación de aprendizaje donde se refleja esta metodología.

7.10.1. Recursos y actividades

Los recursos materiales que se van a necesitar en el desarrollo de la unidad didáctica son las siguientes:

- Pizarra digital.
- Pizarra blanca para rotulador.
- Libro de texto.
- Calculadora.
- Portátil o Tablet.
- Apuntes del profesor sobre el temario.

Los recursos web que se van a utilizar son:

- Outlook, para poder comunicarse con por correo electrónico.
- Kahoot para realizar examen teórico tipo test del tema.
- Youtube para mostrar vídeos de aplicaciones de las matrices.
- Microsoft Classroom, para que los alumnos puedan subir las actividades. También es una plataforma para que el profesorado pueda compartir el material necesario para el alumnado.

Las actividades que se van a realizar a lo largo de la unidad didáctica son las que se incluyen a continuación.

Situación de aprendizaje: Queda reflejada en el ANEXO I del presente documento.

Actividad nº 1. Tipos de matrices.

Competencias específicas	Descriptores del perfil de salida	Saberes básicos
2	STEM1, STEM2, CD2, CD3, CPSAA3.1	Sentido numérico (2) Sentido algebraico (2)

- **Tipo:** ejercicio
- **Metodología:** PBL
- **Dinámica:** individual
- **Contenidos implicados:** Definición de matriz, tipos de matrices según su forma y según sus elementos, matriz traspuesta de una matriz.
- **Criterios de evaluación:** 2.1 y 2.2

1) Sea el sistema lineal siguiente:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 0 \\ 14x + 5y = 24 \\ x - 7y + 46z = 2 \end{cases}$$

- a) Escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas e indica cuál es su dimensión.
- b) Escribe la matriz X con las incógnitas e indica cuál es su dimensión.
- c) Escribe la matriz columna B con los términos independientes e indica cuál es su dimensión.
- d) Escribe la matriz traspuesta de cada una de las matrices de los apartados anteriores e indica cuál es la dimensión de cada matriz traspuesta.

Actividad nº 2. Operaciones con matrices.

Competencias específicas	Descriptores del perfil de salida	Saberes básicos
5	STEM1, STEM3, CD2, CD3	Sentido numérico (1, 2)

- **Tipo:** ejercicio
- **Metodología:** PBL
- **Dinámica:** individual
- **Contenidos implicados:** Operaciones con matrices: suma, resta, producto de un escalar y una matriz, producto de matrices, no conmutatividad, producto no simplificable y divisores de cero.
- **Criterios de evaluación:** 5.1 y 5.2

1) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 8 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 34 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula:

- a) $A + C$
- b) $2C - 4A$
- c) $B \cdot (A - C)$

Actividad nº 3. Potencias de matrices.

Competencias específicas	Descriptores del perfil de salida	Saberes básicos
5	STEM1, STEM3, CD2, CD3	Sentido numérico (1, 2) Sentido algebraico (1)

- **Tipo:** ejercicio
- **Metodología:** PBL
- **Dinámica:** individual
- **Contenidos implicados:** Potencias de matrices, matrices cíclicas y potencias por recurrencia.
- **Criterios de evaluación:** 5.1 y 5.2

1) Calcula A^3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Calcula A^{1476}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calcula A^k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad nº 4. Sistema de ecuaciones matriciales.

Competencias específicas	Descriptores del perfil de salida	Saberes básicos
5	STEM1, STEM3, CD2, CD3	Sentido numérico (1, 2) Sentido algebraico (2, 3)

- **Tipo:** ejercicio
- **Metodología:** PBL
- **Dinámica:** individual
- **Contenidos implicados:** Sistema de ecuaciones matriciales.
- **Criterios de evaluación:** 5.1 y 5.2

1) Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$A - 4B = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 4 \\ -7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5A + 12B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Actividad nº 5. Resolución de problemas.

Competencias específicas	Descriptores del perfil de salida	Saberes básicos
1, 4	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CPSAA4, CPSAA5	Sentido algebraico (2, 3)

- **Tipo:** problema
- **Metodología:** PBL
- **Dinámica:** Cooperativo

- **Contenidos implicados:** Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas, organización de datos en matrices y representación matricial de un sistema.
- **Criterios de evaluación:** 1.1, 1.2 y 4.1

1) Una fábrica produce tres modelos de coches: SUV, berlinas y deportivos. Para cada modelo fabrican dos versiones distintas que son la versión ECO (baja de gama) y la versión TOP (alta de gama). De los coches SUV se fabrican 10000 unidades de la versión ECO y 800 para la versión TOP. De las berlinas se fabrican 45000 unidades de la versión ECO y 4050 de la versión TOP. De los deportivos se fabrican 5000 unidades de la versión ECO y 600 de la versión TOP. Para montar un coche ECO se necesitan 14 h de montaje y para la versión TOP necesitan 20 horas. Para realizar las pruebas de aceptación necesitan 2 horas para la versión ECO y 5 para la versión TOP.

a) Representa en 2 matrices toda la información adquirida.

b) Escribe una matriz con las horas de montaje y pruebas de aceptación para cada versión.

c) Si cada hora de montaje se paga a 16 € y cada hora de pruebas de aceptación se paga a 20€, escribe una matriz expresando el coste total de los tres modelos de coches.

Prueba de evaluación: Véase en ANEXO II.

7.11. Temporalización

A continuación, se muestra la temporalización de las diferentes Unidades de Programación que se van a desarrollar a lo largo del período lectivo:

Tabla 7.11.1. *Temporalización de las unidades didácticas del curso*

BLOQUE	UNIDAD DIDÁCTICA	TEMPORALIZACIÓN
Álgebra	1. Sistemas lineales	Primer trimestre
	2. Matrices	
	3. Determinantes	
	4. Sistemas lineales con parámetros	
Geometría	5. Vectores en el espacio	Segundo trimestre
	6. Espacio afín	
	7. Espacio métrico	
	8. La esfera	
Análisis	9. Límites, continuidad y asíntotas	Tercer trimestre
	10. Cálculo de derivadas	
	11. Aplicaciones de las derivadas	
	12. Análisis de funciones y representación de curvas	
	13. Integral indefinida	

	14. Integral definida	
--	-----------------------	--

Tabla 7.11.2. *Temporalización de la Unidad Didáctica “Matrices y aplicaciones”*

Semana 1	Sesión 1	Introducción al tema Definición de matriz Actividad 1
	Sesión 2	Situación de aprendizaje: Tareas 1 y 2
	Sesión 3	Operaciones con matrices Actividad 2
	Sesión 4	Situación de aprendizaje: Tareas 3 y 4
Semana 2	Sesión 5	Potencias de matrices Sistemas de ecuaciones matriciales Actividades 3 y 4
	Sesión 6	Aplicaciones de las matrices en problemas Actividad 5
	Sesión 7	Situación de aprendizaje: Tareas 3 y 4
	Sesión 8	Situación de aprendizaje: Tarea 5
Semana 3	Sesión 9	Prueba de evaluación

8. CONCLUSIONES

En el presente Trabajo Final de Máster se ha procedido a aplicar las enseñanzas adquiridas gracias a esta etapa formativa del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, y a la experiencia del periodo de prácticas. A continuación, se van a analizar la consecución de los objetivos propuestos.

El objetivo principal del presente Trabajo Final de Máster es describir y analizar la enseñanza y el aprendizaje de las matrices y sus aplicaciones para el curso de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología y proponer una Unidad Didáctica esta temática.

A lo largo del trabajo se ha podido analizar y describir el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matrices y sus aplicaciones enfocándolo al curso de 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología para la asignatura de Matemáticas II, creando una propuesta como Unidad Didáctica y añadiendo una situación de aprendizaje.

Objetivo 1. Analizar y profundizar desde el punto de vista institucional la teoría de las matrices, haciendo especial hincapié a diferentes aplicaciones que nos podemos encontrar.

En la Fundamentación epistemológica, se ha analizado en profundidad la teoría de las matrices incluyendo todos los temas necesarios para abordar el currículo según la legislatura vigente. Además, se ha expuesto al final del capítulo diferentes aplicaciones de las matrices.

Objetivo 2. Analizar el currículo de la normativa vigente para el curso de 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología tanto a nivel estatal como a nivel autonómico.

En la Fundamentación curricular se analiza la legislatura vigente. Las leyes que se analizan son las siguientes: Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) y Decreto 103/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía (BOJA 15-05-2023).

Objetivo 3. Realizar un análisis didáctico de libros de texto de dos editoriales relevantes para el curso escogido y establecer una comparativa diferenciando las particularidades principales del temario.

En la Fundamentación curricular, además de analizar la legislatura, también se realiza un análisis didáctico sobre las editoriales Bruño y ANAYA, donde se comparan diferentes aspectos como son el lenguaje, los conceptos, procedimientos y demostraciones entre otros.

Objetivo 4. Analizar trabajos de autores relevantes en didáctica de las matemáticas que hayan realizado trabajos de investigación en los que han profundizado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matrices y en las aplicaciones de las matemáticas.

En la fundamentación didáctica se analizan tres artículos de grandes autores en didáctica matemática que han realizado trabajos de investigación en el proceso de la enseñanza-aprendizaje como Sosa, L., Carrillo, J. (2010) o Macías-P., M. R., Arteaga-P., I. G. (2022). Por otro lado, Plaza M., P. (2013) investiga y profundiza en las aplicaciones de las matemáticas.

Objetivo 5. Diseñar una Unidad Didáctica acorde a la legislación vigente realizando una situación de aprendizaje, conocidas las características de los alumnos e incorporando los recursos y metodologías necesarias.

Se culmina el trabajo con el desarrollo de la Unidad Didáctica titulada “Matrices y aplicaciones” dirigida al curso de Matemáticas II de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología, la cual cuenta con la elaboración de una situación de aprendizaje en la que los alumnos podrán entender cuál es la relación que tienen las matrices en su vida diaria y en los estudios posteriores que quieran realizar.

En definitiva, este trabajo intenta dar un enfoque distinto a las matemáticas. Se intenta profundizar no sólo en la teoría, sino también enfocar nuestra atención y darle valor a la importancia de conocer las diferentes aplicaciones que las matemáticas pueden llegar a tener en nuestras vidas y que muchas veces no somos capaces de verlo. De esta manera nos aseguraremos que el alumnado sea capaz de dar un sentido a aquello que está estudiando.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benites, L. (21 de diciembre de 2021). *La matriz de correlación*. Statologos. Recuperado el 21 de septiembre del 2023 de <https://statologos.com/matriz-de-correlacion/>

Decreto 103/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

González Pascual, L. y Valdés Menéndez, A. (2022). *CAPÍTULO 5. Rectas y planos en el espacio*. Apuntes Marea Verde. Recuperado el 21 de septiembre de 2023 de <https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/BC2%2005%20RectasPlanos.pdf>

Macías Peñafiel, M. R. y Arteaga Pita, I. G. (2022). Aprendizaje Basado en Proyectos, en la enseñanza de Matemáticas para estudiantes de Bachillerato de la U.E.F “Pablo Hanníbal Vela”. *Polo del Conocimiento*, 67, 1585-1597.

Berenguer Maldonado, J. y Cobo Mérida, P. (2023). *Tema 18: Matrices. Matrices y aplicaciones lineales. Cambio de base. Álgebra de matrices. Aplicaciones en Ciencias Sociales y de la Naturaleza*. Matemáticas divertidas.

Merino, L., Santos, E. (2006). *Álgebra lineal con métodos elementales*. Thomson.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2023). *Competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos: segundo curso – Matemáticas II*. Educagob. Recuperado el 21 de septiembre de 2023 de <https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/menu-curriculos-basicos/bachillerato/materias/matematicas/criterios-eval-segundo-curso.html>

Morra, J. (2020). *Tema 18. Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza*. Jorge Morra.

Plaza Menéndez, P. (2013). Las competencias matemáticas en el aprendizaje a lo largo de la vida. *Suma +*, 72, 9-15.

Sindicato de Euskal Herria. (2022). *Elaboración y defensa de las Unidades Didácticas*.
<https://steilas.eus/wp-content/uploads/2022/02/Elaboracion-y-defensa-de-las-Unidades-Didacticas-LOMLOE-Maestras-os.pdf>

Sosa, L. y Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XIV*, 569-580.

ANEXO I.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

UNIDAD DIDÁCTICA: Matrices y aplicaciones		Temporalización	3 semanas	Sesiones	4
Etapas	Bachillerato	Curso	2º Bachillerato		
Materia		Matemáticas II			
Situación de aprendizaje nº 1		Gestiona tus ventas			
Intención educativa		El objetivo de esta situación de aprendizaje es que el alumnado comprenda que las matrices sirven para situaciones de la vida cotidiana. Trabajarán inicialmente individualmente para obtener los datos principales que empiecen a intentar realizar las actividades de manera independiente. Posteriormente, trabajarán en grupos de 4 personas para que entre todos puedan analizar diferentes soluciones y aprender a trabajar en equipo. Los alumnos están preparando una recaudación de dinero para poder realizar un viaje de fin de curso después de terminar la selectividad. Van a aprender a aplicar las matrices para gestionar el inventario, las ventas y las ganancias. Esta situación de aprendizaje ayuda a los alumnos a entender la importancia de las matemáticas y a responder la típica pregunta de ¿y esto para que me sirve?			

Competencias Específicas	Criterios de evaluación	Descriptores del Perfil de Salida
Ser capaz de resolver los problemas que se den en la vida cotidiana, así como en la ciencia y en la tecnología con diferentes métodos y formas de razonar.	Utilizar distintos métodos y herramientas, incluyendo las herramientas digitales para resolver problemas de la vida cotidiana, de la ciencia y de la tecnología.	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CPSAA4, CPSAA5.
	Calcular todas las soluciones posibles para resolver problemas de la vida cotidiana, de la ciencia y de la tecnología.	
Analizar las matemáticas con distintas tecnologías.	Usar la tecnología para representar diferentes ideas matemáticas	CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD3.
Descubrir las aplicaciones de las matemáticas en otras áreas del conocimiento.	Resolver problemas del mundo real utilizando procesos matemáticos.	STEM1, STEM2, CD2, CPSAA5.
	Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad.	
Expresar las ideas matemáticas individualmente y colectivamente con rigor matemático	Comunicar las ideas matemáticas con organización y rigor.	CCL1, STEM2, STEM4, CD2.
	Utilizar el lenguaje matemático en distintos contextos.	
Destrezas personales y sociales	Realizar los problemas matemáticos activamente en equipos heterogéneos, respetando a los compañeros y demostrando las habilidades sociales y fomentando el trabajo en equipo.	CP3, CPSAA1.1, CPSAA1.2, CPSAA3.1.

Saberes básicos	
Sentido numérico	Operaciones con matrices (suma, resta y producto). Entender y saber usar sus propiedades.
	Relaciones existentes entre vectores y matrices. Conocer su estructura y propiedades.
Sentido algebraico	Resolución de problemas de la vida cotidiana empleando las herramientas adecuadas.
Sentido socio-afectivo	Creencias, actitudes y emociones. Habilidades a la hora de reconocer nuestras propias emociones y saber gestionar las posibles situaciones de estrés y ansiedad que puedan surgir a la hora de aprender matemáticas. Ser capaz de analizar los errores individuales y colectivos.
	Habilidad para analizar diferentes soluciones y ser capaz de decidir cuál es la acertada ante las posibles soluciones.
	Inclusión, respeto y diversidad. Habilidades sociales y comunicativas necesarias para el aprendizaje matemático. Conocer y valorar las matemáticas, así como todos los matemáticos y matemáticas que han contribuido en ella a lo largo de la historia.
Metodología	Aprendizaje cooperativo Aprendizaje basado en proyectos
Agrupamientos	Trabajo individual Grupos heterogéneos de 4 estudiante Gran-grupo o grupo de clase

Secuenciación didáctica	
Recursos	Diseño de actividades
Pizarra digital, Cuaderno	Tarea 1: Introducción (Sesión 1) En esta primera tarea de la situación de aprendizaje, el profesorado procederá a introducir las aplicaciones de las matrices. Para iniciar la situación de aprendizaje se reproducirá el siguiente vídeo de Eduardo Sáenz de Cabezón que es un gran matemático, profesor y divulgador científico. https://www.youtube.com/watch?v=9FKFgNQktkU Se explicará la organización de la situación de aprendizaje, indicando que tareas se van a llevar a cabo y como se va a trabajar. Deberán de crear un informe con todos los datos que se han analizado y con los resultados obtenidos.
Ordenadores, Cuaderno	Tarea 2: Matrices de datos. (Sesión 1) Los alumnos llevan unas semanas vendiendo ciertos productos con el fin de recolectar dinero para poder pagar de forma parcial o total el viaje de fin de curso que va a realizar. Los productos que venden se dividen en diferentes categorías: comestibles, jabones caseros, material escolar, carteras, accesorios, obras artísticas y artículos de segunda mano. Dentro de cada categoría, hay una serie de artículos, cada uno con un precio diferente. El objetivo es poder reflejar cuantas unidades había inicialmente. Primero cada alumno deberá de trabajar individualmente y crear una matriz con las unidades de artículos que tiene para vender. También deberá de realizar una matriz con los precios y costes de las categorías.

	Se formarán grupos heterogéneos de 4 personas y deberán de formar un equipo en el que van a sumar entre todas las unidades totales que tiene ese grupo en concreto.
Ordenadores, Cuaderno	Tarea 3: Controlar stock. (Sesión 2-3) Para esta tarea deberán de primero realizar un recuento de los artículos vendidos individualmente, para posteriormente poder reflejarlo en el grupo. Deberán de crear una gráfica con la evolución que ha tenido el stock de los artículos vendidos.
Ordenadores, Cuaderno	Tarea 4: Gestionar dinero. (Sesión 2-3) En esta tarea los alumnos deben de realizar los cálculos necesarios para responder las siguientes preguntas: ¿Cuánto dinero se ha conseguido con cada categoría? ¿Y en total? ¿Qué categoría es la que más dinero ha recaudado? ¿Y la que menos? ¿Cuánto dinero ha recaudado cada grupo? ¿Y la clase completa?
Pizarra digital	Tarea 5: Resultados (Sesión 4) En la última sesión de la situación de aprendizaje los distintos grupos darán a conocer a la clase los resultados obtenidos y se obtendrán conclusiones al respecto ya más generales. Se realizará un recuento total del dinero recaudado entre todos los grupos sumando todas las matrices de ganancias. Y se calculará el reparto de dinero para cada alumno.

ANEXO II.

PRUEBA EVALUACIÓN

Preguntas tipo test de la plataforma Kahoot:



Haya el valor de n

$n \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2,5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

29

0

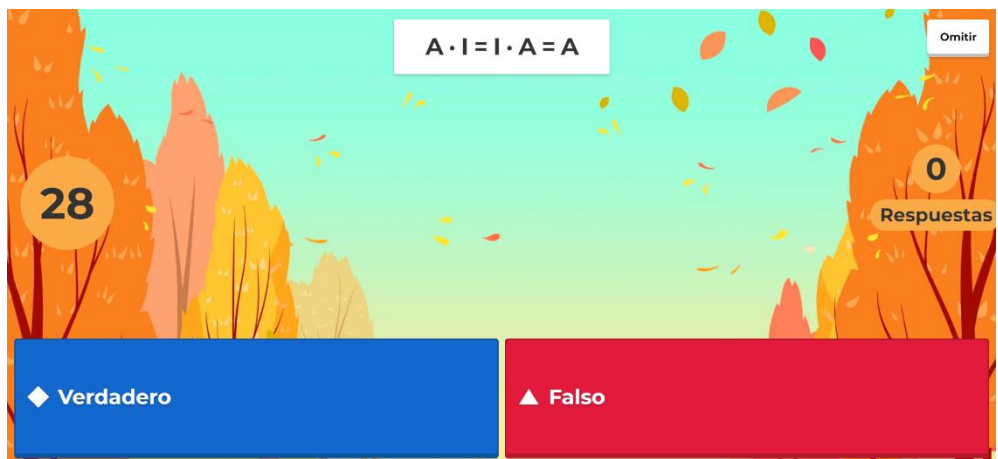
Respuestas

▲ 4

◆ 1

● 7

■ 2



$A \cdot I = I \cdot A = A$

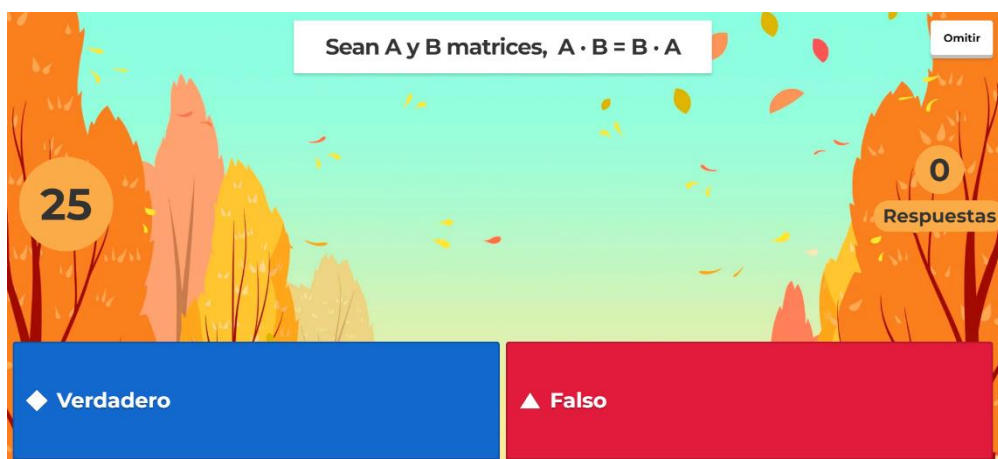
28

0

Respuestas

◆ Verdadero

▲ Falso



Sean A y B matrices, $A \cdot B = B \cdot A$

25

0

Respuestas

◆ Verdadero

▲ Falso

La matriz de la imagen corresponde a

(0 4 2)

28

0 Respuestas

Omitir

▲ matriz fila

◆ matriz nula

● matriz escalar

■ matriz columna

Para la ecuación: $A \cdot B = A \cdot C$, ¿Se cumple que $B=C$?

27

0 Respuestas

Omitir

◆ Verdadero

▲ Falso

Para que dos matrices se puedan multiplicar tiene que coincidir

28

0 Respuestas

Omitir

▲ el número de filas

◆ el número de columnas de la primera con el número de filas de la segunda

● el número de columnas

■ el número de filas de la primera con el número de columnas de la segunda

Examen escrito:

1. Te han contratado en una empresa de pinturas y un cliente te ha pedido tres colores diferentes: 12 Litros de gris glacial, 24 Litros de arena y 8 Litros de royal.

Para conseguir el color gris glacial necesitas un 75 % de azul, un 75 % de gris y un 25 % de blanco.

Para conseguir el color arena necesitas un 75 % de azul, un 75 % de naranja y un 25 % de blanco.

Para conseguir el color royal necesitas un 75 % de azul, un 25 % de negro y un 25 % de blanco.

Obtén matricialmente los litros de vas a necesitar de cada color para preparar la mezcla.

2. Resuelve el sistema matricial:

$$2X + 4Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X + 5Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz A, calcula B, siendo I la matriz unidad de orden 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B = 2AA^t - 5I$$

4. Realiza las siguientes operaciones:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 13 & 4 \\ 23 & 5 & 13 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 56 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

b) *Calcula A^4 si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$*