



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

**FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:
UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA
3º DE ESO**

Alumno/a: Galiano Galiano, María del Carmen

Tutor/a: Prof.^a D.^a Carmen Ordóñez Cañada
Dpto: Matemáticas

Junio, 2021

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo general aplicar los conocimientos adquiridos en el Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, para diseñar una unidad didáctica sobre factorización de polinomios en 3º de ESO. Para ello se describe y analiza la enseñanza y aprendizaje del anillo de polinomios y, en particular, en lo relativo a su factorización en irreducibles. Tras la indagación en el currículo oficial del Sistema Educativo Español, se realiza el análisis y la comparativa de dos libros de texto utilizando las entidades primarias que propone el EOS. El estudio epistemológico junto con el análisis de artículos de investigación en esta temática, ponen de manifiesto las posibles dificultades y errores o conflictos, que se pueden encontrar. Por último, se desarrolla una propuesta de unidad didáctica que integra diferentes metodologías para trabajar la motivación de los estudiantes y el aprendizaje de esta materia.

Palabras clave: Factorización, Polinomios, Enfoque Ontosemiótico, Didáctica de las Matemáticas, Educación Secundaria Obligatoria.

ABSTRACT

The general aim of this work is to put into practice the knowledge acquired during the Master's Degree in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching to design a Unit of Work about factorization of polynomials for the 3rd year of Compulsory Secondary Education. For this purpose, the teaching and learning of polynomial ring, specifically factorization into irreducibles, will be described and analyzed. After researching the official curriculum of the Spanish Educational System, the analysis and comparison of two textbooks is going to be carried out using the primary entities proposed by the EOS. The epistemological foundation, together with the analysis of research articles on this topic, shows some difficulties and semiotic conflicts which may be encountered. Finally, a Unit of Work that integrates different methodologies to work on the motivation of the students and the learning of this subject will be developed as well.

Keywords: Factorization, Polynomials, Onto-semiotic approach, Didactics of Mathematics, Secondary Education.

ÍNDICE

Capítulo 1. Introducción	3
Capítulo 2. Objetivos.....	5
Capítulo 3. Fundamentación curricular	7
3.1. ANÁLISIS DEL CURRÍCULO.....	7
3.2. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO	13
3.2.1. Marco teórico.....	14
3.2.2. Análisis didáctico de manuales. Comparativa.....	17
3.2.3. Discusión de resultados y propuestas.....	25
Capítulo 4. Fundamentación epistemológica	29
4.1. INTRODUCCIÓN	30
4.2. POLINOMIOS Y OPERACIONES	32
4.2.1. Suma de polinomios.....	33
4.2.2. Producto de polinomios.....	33
4.3. FÓRMULAS DE NEWTON	34
4.3.1. Triángulo de Tartaglia	35
4.3.2. Fórmula de Newton	36
4.3.3. Fórmula de Leibniz	37
4.4. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.....	37
4.4.1. Criterios para estudiar si un polinomio es reducible.....	45
4.5. FRACCIONES ALGEBRAICAS. APLICACIONES.....	46
4.5.1. Suma de razones algebraicas	47
4.5.2. Producto de razones algebraicas	47
4.5.3. Descomposición en fracciones simples y aplicaciones.....	48
4.5.4. Aplicaciones	49
Capítulo 5. Fundamentación didáctica	53
Capítulo 6. Proyección didáctica.....	61
6.1. TÍTULO	61
6.2. JUSTIFICACIÓN.....	61
6.3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA.....	62
6.4. OBJETIVOS	64
6.4.1. Objetivos generales de etapa	65
6.4.2. Objetivos del área de matemáticas	66
6.4.3. Objetivos concretos de la unidad.....	68

6.5. COMPETENCIAS CLAVE	68
6.6. CONTENIDOS	70
6.6.1. Contenidos de la materia	71
6.7. METODOLOGÍA.....	73
6.8. ACTIVIDADES Y RECURSOS	76
6.8.1. Actividades	76
6.8.2. Recursos	77
6.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD	78
6.10. TEMPORALIZACIÓN	79
6.11. EVALUACIÓN.....	85
6.11.1. Criterios de evaluación.....	85
6.11.2. Calificación	88
Capítulo 7. Conclusiones	89
Referencias bibliográficas	93
ANEXO I. Generalidades de factorización en anillos	95
ANEXO II. Actividades	101
ANEXO III. Evaluación.....	125

Capítulo 1. Introducción

La elaboración del presente trabajo supone la culminación del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de matemáticas, cuyo objetivo principal es el diseño de una unidad didáctica aplicando todos los conocimientos adquiridos en dichos estudios.

La elección del tema del trabajo tuvo lugar en las primeras reuniones con mi tutora, quien pertenece al área de Álgebra, rama de las matemáticas que siempre ha despertado gran interés en mí. El tema de la factorización de polinomios nos pareció muy interesante a la hora de plantear una unidad didáctica, ya que el paso de divisibilidad de números naturales a polinomios a veces se hace demasiado rápido, dándose muchas cosas por sabidas y prestando más importancia al procedimiento de factorización y cálculo de raíces que a la comprensión de los conceptos en sí.

Según la Orden de 14 de julio de 2016, en la que se desarrolla el contenido correspondiente a Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, la factorización de polinomios se estudia en el tercer y cuarto curso de Secundaria. En Primaria y en los cursos anteriores de Secundaria se estudia la divisibilidad en los naturales. En Bachillerato también se estudia este tema ya que la factorización es una parte esencial en los grados y ciclos de carácter técnico por sus numerosas aplicaciones.

El trabajo se ha dividido en siete capítulos. El primero es la introducción, en el que nos encontramos actualmente.

En el segundo se establece el objetivo principal del trabajo y los subobjetivos parciales, que conducirán al logro del objetivo principal.

En tercer lugar, encontramos el capítulo dedicado a la fundamentación curricular, destinada, por una parte, al análisis del currículo y a la ubicación de los contenidos que nos interesan en este trabajo, y por otro, al análisis de dos libros de texto de 3º de ESO, curso en el que se enmarca la unidad didáctica posteriormente propuesta. Dicho análisis se realiza atendiendo a las entidades primarias que proporciona el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

A continuación, en el cuarto capítulo, se localiza la fundamentación epistemológica, en la que se profundiza en la materia al desarrollarse el estudio de los polinomios bajo el prisma del temario de oposiciones del Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.

El quinto capítulo contiene la fundamentación didáctica, donde se abordan investigaciones en Didáctica de las Matemáticas relacionadas con el anillo de polinomios y su factorización, a fin de extraer posibles dificultades o conflictos semióticos por parte del alumno en esta temática.

En el sexto capítulo, se ofrece una propuesta didáctica para 3º de ESO sobre factorización de polinomios. En este apartado entra en juego todo lo recopilado en los capítulos anteriores, poniendo en práctica los conocimientos adquiridos en el máster. Se procurará favorecer la enseñanza de la factorización de polinomios, utilizando metodologías que motiven al alumno y hagan que logre la adquisición de las competencias clave oportunas.

Por último, en el séptimo capítulo, se analiza si se han logrado los objetivos propuestos en este trabajo y se extraen las conclusiones obtenidas a lo largo del mismo.

Cabe añadir, que al final del trabajo se adjuntan tres anexos, en los que se recogen aspectos que, debido a la falta de espacio, no se han incluido y que pueden facilitar o completar la lectura de este trabajo fin de máster. En el primero hemos añadido definiciones básicas y fijamos la notación para luego el desarrollo epistemológico, en el segundo se incluyen las actividades propuestas para la unidad y en el último, se ubican las rúbricas que se utilizarán en la evaluación junto con la propuesta de prueba final escrita.

Capítulo 2. Objetivos

El *objetivo general* de este trabajo es aplicar los conocimientos adquiridos en el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de matemáticas, para diseñar una unidad didáctica sobre factorización de polinomios en 3º de ESO.

Descomponemos este objetivo general en otros parciales, de forma que el primero de ellos será:

O1. Poner en práctica los conocimientos adquiridos en el máster y aplicarlos al estudio de la factorización de polinomios en Educación Secundaria Obligatoria, concretamente en el tercer curso.

Por otro lado, es obvio que el diseño de la unidad didáctica requiere describir y analizar la enseñanza y aprendizaje del anillo de polinomios y, en particular, en lo relativo a su factorización en irreducibles. Así, en primer lugar, nos ocuparemos de la fundamentación curricular que materializaremos a través de los siguientes objetivos:

O2. Realizar un análisis del currículo escolar y en qué cursos se ubican los contenidos sobre factorización de polinomios.

Y, por otro lado:

O3. Analizar, utilizando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, la forma en que dos libros de texto, de diferentes editoriales, abordan dichos contenidos y establecer una comparativa entre ellos.

Un pilar importante en la enseñanza y aprendizaje de una materia es su estudio epistemológico. Para obtenerlo nos planteamos:

O4. Desarrollar los contenidos curriculares relacionados con la factorización de polinomios en Educación Secundaria a partir de uno de los temas que se incluyen en el temario de oposiciones al Cuerpo de Profesores de Secundaria.

Además, la investigación en Didáctica de la Matemática en un tema pone de manifiesto los conflictos y las posibles dificultades que se pueden encontrar en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, en relación a esto, nos planteamos:

O5. Analizar varias investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre el anillo de polinomios e identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de esta temática.

Tras el estudio de lo anterior se elaborará una propuesta de proyección didáctica sobre la factorización de polinomios para el tercer curso de Secundaria que se muestra en el siguiente objetivo:

O6. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje durante el diseño de la unidad didáctica sobre la factorización de polinomios en el tercer curso de Educación Secundaria.

Capítulo 3. Fundamentación

curricular

Esta sección está destinada a hacer, por una parte, un análisis del currículo escolar y en qué cursos se ubican los contenidos sobre factorización de polinomios y, por otro lado, a comparar y analizar la forma en que libros de texto abordan dichos contenidos.

3.1. ANÁLISIS DEL CURRÍCULO

La unidad didáctica a elaborar se enmarca en el estudio de la factorización de polinomios. Para hacer un análisis del currículo vigente respecto a este tema nos referimos al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, a nivel nacional.

La temática de divisibilidad aparece por primera vez en el currículo en 5º y 6º de Primaria, donde aparecen las nociones de número primo, divisor, múltiplo, mínimo común múltiplo, etc. En Educación Secundaria, la factorización empieza a trabajarse con la divisibilidad de números naturales en 1º de ESO, donde se estudia la descomposición de un número en factores primos, el máximo común divisor y el mínimo común de dos o más números, y se da un primer acercamiento al lenguaje algebraico. En el segundo curso se empieza a trabajar con polinomios haciendo operaciones simples. No es hasta 3º de ESO, en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, donde se estudia la factorización de polinomios. Por último, en 4º de ESO se hace uso de esa descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.

Por tanto, la asignatura en la que vamos a centrar nuestra atención es en Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Según el Real Decreto, esta asignatura se divide en 5 bloques: procesos, métodos y actitudes en matemáticas, números y álgebra, geometría, funciones y, estadística y probabilidad. En este análisis nos centraremos en el primer bloque, el de “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, ya que es complementario a todos los demás y debe trabajarse durante todo el curso y, el segundo bloque, “Números y Álgebra”, que es donde se recoge los contenidos referentes a nuestra unidad de estudio.

A continuación, se presentan los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables recogidos en el Real Decreto 1105/2014 sobre el bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
<p>Planificación del proceso de resolución de problemas.</p> <p>Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.</p> <p>Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.</p> <p>Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.</p> <p>Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.</p> <p>Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:</p> <p>a) la recogida ordenada y la organización de datos.</p> <p>b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.</p> <p>c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.</p> <p>d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.</p> <p>e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.</p> <p>f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.</p>	<p>1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.</p> <p>2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.</p> <p>3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.</p> <p>4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.</p> <p>5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.</p> <p>6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.</p> <p>7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.</p> <p>8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.</p> <p>9. Superar bloques e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.</p> <p>10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.</p> <p>11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.</p> <p>12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.</p>	<p>1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.</p> <p>2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).</p> <p>2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.</p> <p>2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.</p> <p>2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.</p> <p>3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.</p> <p>4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.</p> <p>4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.</p> <p>5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.</p> <p>6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.</p> <p>6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.</p> <p>6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.</p> <p>6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.</p> <p>6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.</p> <p>7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.</p> <p>8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.</p> <p>8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.</p> <p>8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.</p> <p>8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.</p> <p>9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.</p>

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		<p>10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.</p> <p>11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.</p> <p>11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.</p> <p>11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.</p> <p>11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.</p> <p>12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión.</p> <p>12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.</p> <p>12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.</p>

Figura 3.1.1. Contenidos bloque 1 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, pp. 391-392)

En la figura 3.1.2 se muestran los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables del bloque 2.

Bloque 2. Números y álgebra		
<p>Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso.</p> <p>Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños.</p> <p>Operaciones con números expresados en notación científica.</p> <p>Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones.</p> <p>Jerarquía de operaciones.</p> <p>Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.</p> <p>Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.</p> <p>Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.</p> <p>Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.</p> <p>Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).</p> <p>Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.</p> <p>Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.</p> <p>Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.</p>	<p>1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.</p> <p>2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.</p> <p>3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.</p> <p>4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.</p>	<p>1.1. Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), indica el criterio utilizado para su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.</p> <p>1.2. Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período.</p> <p>1.3. Halla la fracción generatriz correspondiente a un decimal exacto o periódico.</p> <p>1.4. Expresa números muy grandes y muy pequeños en notación científica, y opera con ellos, con y sin calculadora, y los utiliza en problemas contextualizados.</p> <p>1.5. Factoriza expresiones numéricas sencillas que contengan raíces, opera con ellas simplificando los resultados.</p> <p>1.6. Distingue y emplea técnicas adecuadas para realizar aproximaciones por defecto y por exceso de un número en problemas contextualizados, justificando sus procedimientos.</p> <p>1.7. Aplica adecuadamente técnicas de truncamiento y redondeo en problemas contextualizados, reconociendo los errores de aproximación en cada caso para determinar el procedimiento más adecuado.</p> <p>1.8. Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos.</p> <p>1.9. Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.</p> <p>1.10. Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.</p> <p>2.1. Calcula términos de una sucesión numérica recurrente usando la ley de formación a partir de términos anteriores.</p> <p>2.2. Obtiene una ley de formación o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios.</p>

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		2.3. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los "n" primeros términos, y las emplea para resolver problemas. 2.4. Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas. 3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana. 3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado. 3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común. 4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Figura 3.1.2. Contenidos bloque 2 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, pp. 392-393)

En concreto, los **contenidos** vinculados a la factorización de polinomios son:

“Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.”

El **criterio de evaluación** asociado es:

“Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.”

Y, por último, los **estándares de aprendizaje evaluables** son:

3.1. “Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.”

3.2. “Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.”

3.3. “Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.”

Además del Real Decreto, se debe consultar, a nivel autonómico, la Orden de 14 de julio de 2016, en la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

A continuación, se muestran los criterios de evaluación del primer bloque, junto a sus competencias asociadas, recogidos en la Orden de 14 de julio de 2016.

Tabla 3.1.1. Competencias de los criterios de evaluación bloque 1

BLOQUE 1 “PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS”	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguidos en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados como contruídos.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

En cuanto al Bloque 2, los contenidos que nos interesan son:

“Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.” (Consejería de Educación, 2016, p.192).

Los criterios asociados a los contenidos del Bloque 2 según (Consejería de Educación, 2016, p.192) se recogen en la tabla 3.1.2.

Tabla 3.1.2. *Competencias de los criterios de evaluación bloque 2*

BLOQUE 2 “Números y Álgebra”	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.	CMCT, CAA.
2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos	CMCT
3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola	CMCT
4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados.	CCL, CMCT, CD, CAA

Según (Consejería de Educación, 2016, p.172) las competencias a las que nos referimos son:

Tabla 3.1.3. *Competencias clave*

Competencias claves	
CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
CD	Competencia digital
CAA	Competencia de aprender a aprender
CSC	Competencias sociales y cívicas
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CEC	Conciencia y expresiones culturales.

3.2. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Es una realidad que actualmente los libros de texto son utilizados como una de las principales herramientas a la hora de enseñar en la mayoría de los centros de Educación Secundaria. La transposición didáctica es el “conjunto de transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado” (Chevallard, 1985).

Según hemos estudiado en la asignatura Aprendizaje y enseñanza I, dada por el profesor Manuel García, los saberes matemáticos son construidos por los matemáticos profesionales y constituyen el *saber sabio*, pero la mayoría de ese saber no es de interés para los alumnos, por lo que el sistema social de enseñanza elige cuáles de esos saberes son de interés y constituyen los denominados *objetos a enseñar*. Los diseñadores del currículo se encargan de organizarlos y de formar el *saber a enseñar* para que después los expertos recompongan este saber y formen los *objetos de enseñanza*. Los redactores de manuales escolares convierten este saber en *saber escolar* y el profesor, mediante sus conocimientos en el tema y en proceso de enseñanza-aprendizaje lo convierte en *saber enseñado*, que los alumnos transforman en el *saber del alumno*.

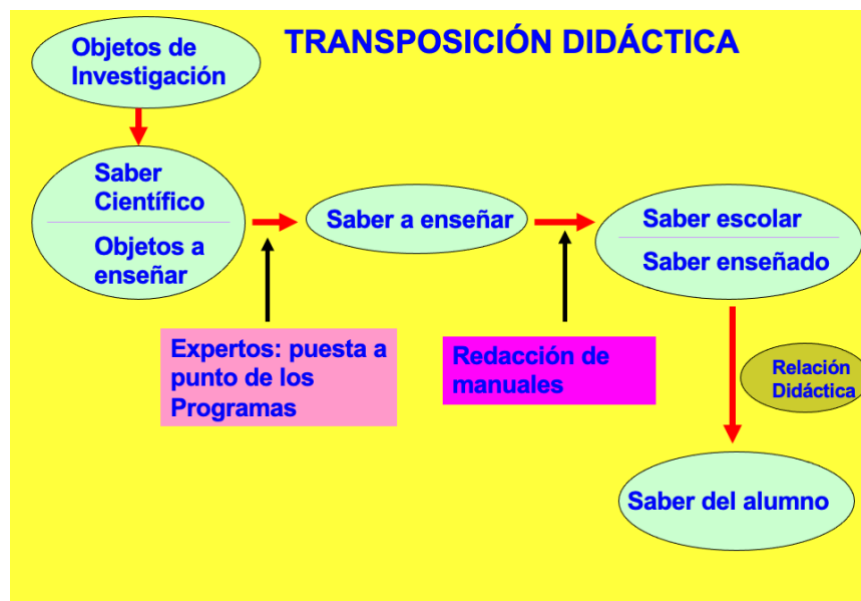


Figura 3.2.1. Transposición didáctica (García, 2021, p.11)

Por tanto, resulta de gran interés realizar un análisis sobre los libros de texto con los que se trabaja en clase. A continuación, se presentan dos manuales de distintas editoriales: M1 (Colera et al., 2020) y M2 (Alcaide et al., 2020), centrándonos en el curso de 3º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, ya que es el curso al que se dirige nuestra unidad didáctica.

La justificación para la elección de estas editoriales es que son dos de las más utilizadas en Educación Secundaria y, por otro lado, han sido los manuales que se utilizaban en el centro donde hacía las prácticas, 1º y 3º de ESO utilizaban SM, mientras 2º y 4º de ESO trabajaban con Anaya.

3.2.1. Marco teórico

El análisis didáctico de manuales es una cuestión muy relevante y nada trivial en la Didáctica de las Matemáticas. Para establecerlo se necesita el sustento de un marco teórico que guíe de manera científica dicho análisis.

Según Godino y Batanero (1994), la *Didáctica de las Matemáticas* estudia los procesos de enseñanza-aprendizaje de los saberes matemáticos, en los aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas, tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

En la investigación en Didáctica de las Matemáticas, marcos teóricos utilizados son el Constructivismo social, la Teoría de las Situaciones Didácticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico o el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticas (también conocido como EOS), entre otros. En el análisis didáctico de los manuales elegidos nos vamos a basar en el EOS (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017), pues nos proporciona, a través de las entidades primarias, los constructos necesarios para dicho análisis. Para desarrollar de manera sintetizada algunos principios básicos del EOS, a continuación, se ofrecen algunas nociones básicas.

El *Enfoque Ontosemiótico (EOS)* es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. (Godino, 2014, p.4)

Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas que adquieren un compromiso mutuo que conlleva la realización de unas prácticas sociales condicionadas por los preceptos de la misma. (Godino, 2014, p.11)

Se llama *práctica* a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales o abstractos, que Chevallard (1985) llama praxemas, que pueden representarse de forma textual, oral, gráfica o gestual. (Godino y Batanero, 1994, p.334).

Por *proceso de instrucción matemática*, se entiende a los procesos planificados de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la que intervienen los sistemas de prácticas matemáticas, los estudiantes, el profesor y los recursos institucionales.

Los procesos de instrucción matemática basándonos en el EOS consideran que: la enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático se modeliza como un proceso multidimensional que se compone de seis subprocesos: epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional (Godino, Contreras y Font, 2006).

Atendiendo a quien realiza las prácticas, podemos distinguir los significados personales, cuando los realiza una persona y los *significados institucionales*, cuando lo hacen los componentes de una institución.

Respecto a los **significados personales**, Godino, Batanero y Font (2007), proponen tres tipos:

- *Global*: sistema de prácticas que el estudiante puede desarrollar respecto a un objeto matemático determinado.
- *Declarado*: significado que surge cuando el alumnado se somete a las pruebas de evaluación de aprendizaje. Se incluyen los sistemas de prácticas que desde la perspectiva institucional se consideran correctos tanto los incorrectos.
- *Logrado*: sistemas de prácticas expresados por el alumno y que son correctos afines a la institución.

En cuanto a los **significados institucionales**, distinguimos cuatro tipos:

- *Referencial*: es la que se asigna a un objeto matemático y se usa como base para elaborar el significado pretendido.
- *Pretendido*: surge al planificar el proceso de instrucción.
- *Implementado*: emerge en el sistema de prácticas ejercidas por el docente.
- *Evaluado*: es el que surge de las prácticas que utiliza el docente para evaluar el aprendizaje.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, el EOS propone una clasificación de los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas, a los que Godino, Batanero y Font (2007) llaman *entidades elementales o primarias* y, son las siguientes:

- *Situaciones problemas*: conjunto de situaciones que generan un problema (problematización) y que son la razón de la actividad matemática.
- *Lenguaje matemático*: uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...).
- *Conceptos*: objetos introducidos mediante definiciones.
- *Proposiciones*: enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones o métodos de cálculo.
- *Argumentos*: enunciados que permiten justificar las proposiciones y los procedimientos.

Estas entidades a su vez se unen organizando dando lugar a configuraciones epistémicas, (CE). En la siguiente figura se muestra cómo se organizan y se relacionan las distintas entidades primarias que se han mencionado.

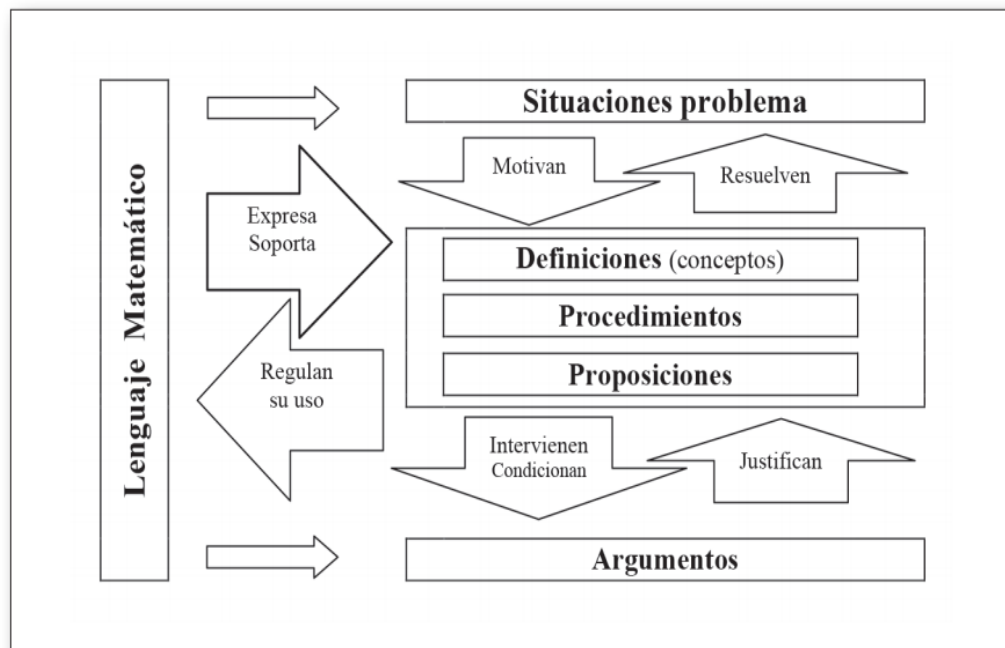


Figura 3.2.1.1. Configuración de entidades primarias (Godino, Batanero y Font, 2007)

3.2.2. Análisis didáctico de manuales. Comparativa

Como se ha mencionado antes, los libros en cuestión a analizar son M1 (Colera et al., 2020), de la editorial Anaya y M2 (Alcaide et al., 2020), de la editorial SM.

En primer lugar, analizaremos la extensión de los manuales y, el lugar y orden de los contenidos. El manual de Anaya cuenta con 311 páginas y se trata el tema de polinomios desde la página 86 a la 107. El manual de SM consta de 304 páginas y se trata el tema que nos interesa desde la página 66 a la 90.

La estructura del temario de cada manual se muestra en la tabla 3.2.2.1.

Tabla 3.2.2.1. *Temas en las editoriales Anaya y SM.*

M1. ANAYA	M2. SM
Bloque 1. ARITMÉTICA	Bloque 1. NÚMEROS Y ALGEBRA
1. Fracciones y decimales	1. Conjuntos numéricos
2. Potencias y raíces	2. Potencias y raíces
3. Problemas aritméticos	3. Sucesiones
4. Progresiones	4. Polinomios
Bloque 2. ÁLGEBRA	5. Ecuaciones y sistemas
5. El lenguaje algebraico	Bloque 2. GEOMETRÍA
6. Ecuaciones	6. Semejanza
7. Sistemas de ecuaciones	7. Geometría del plano
Bloque 3. FUNCIONES	8. Movimiento en el plano
8. Funciones. Características	9. Geometría en el espacio. Cuerpos geométricos
9. Funciones lineales y cuadráticas	Bloque 3. FUNCIONES
Bloque 4. GEOMETRÍA	10. Funciones
10. Problemas métricos en el plano	11. Funciones lineales y cuadráticas
11. Cuerpos geométricos	Bloque 4. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD
12. Transformaciones geométricas	12. Estadística unidimensional
Bloque 5. ESTADÍSTICA Y AZAR	13. Probabilidad
13. Tablas y gráficos estadísticos	
14. Parámetros estadísticos	
15. Azar y probabilidad	

Como se puede ver, en el libro de SM, las unidades de aritmética y álgebra están agrupadas en un mismo bloque denominado “Números y álgebra”. Mientras que Anaya dedica tres temas al bloque de álgebra, SM le dedica dos temas.

En el caso de Anaya, los temas del bloque de álgebra son el 5, 6 y 7, llamados “El lenguaje algebraico”, “Ecuaciones” y “Sistemas de ecuaciones”, respectivamente. Dichos temas se sitúan después del bloque de aritmética y antes del de funciones.

En SM, los temas de álgebra son el 4 y 5, denominados “Polinomios” y “Ecuaciones y sistemas”, respectivamente. Por tanto, se ve que este último tema engloba los dos últimos de Anaya.

De estos temas, los que se consideran para hacer el análisis es el tema 5, “El lenguaje algebraico” de Anaya y de SM el tema 4, “Polinomios”.

El tema de Anaya, “El lenguaje algebraico”, se divide en seis puntos.

1. Expresiones algebraicas
2. Monomios
3. Polinomios
4. Identidades
5. Cociente de polinomios
6. Fracciones algebraicas

El tema “Polinomios”, de SM consta de siete apartados.

1. Expresiones algebraicas. Valor numérico.
2. Monomios y polinomios
3. Operaciones con polinomios
4. Identidades notables
5. División de polinomios
6. Regla de Ruffini
7. Factorización de polinomios

Comenzamos el análisis didáctico atendiendo a cada una de las entidades primarias que propone el EOS mencionadas anteriormente y siguiendo la clasificación de las mismas propuestas por Ordóñez (2018, p.54).

a) Situaciones-problemas

- *Dominio de definición:* Principalmente, hay que destacar que ambos temas se desarrollan sobre dominios euclídeos, con la diferencia que el manual de Anaya solo trabaja con coeficientes enteros mientras que el manual de SM también introduce el de los racionales.

- *Elementos introductorios:* en Anaya, al inicio de la unidad, aparece una introducción histórica de cómo ha ido evolucionando el álgebra en las diferentes civilizaciones, dando algunos ejemplos y resaltando a matemáticos tales como Diofanto, Al-Jwarizmi, Cardano, Tartaglia o Descartes. Además, se proponen tres ejercicios de los contenidos de ese tema, dado en otros cursos como especie de evaluación inicial; en cambio, en SM no hay elementos introductorios.
- *Ejemplos:* en el manual de Anaya se presentan un total de 34 ejemplos dispuestos antes y después de los conceptos a estudiar. En SM, hay 23 ejemplos, situados después de cada concepto para afianzarlo.
- *Ejercicios:* en el primer manual existe escasez de ejercicios contextualizados, a excepción de un par de ellos que aparecen al final del tema, lo que puede terminar desmotivando al alumnado. Lo mismo ocurre en el segundo manual. En Anaya, durante la explicación del tema, se encuentran 26 ejercicios en los que no se indica la dificultad y 9 ejercicios resueltos.

Al final del tema se proponen 66 ejercicios con su respectiva dificultad indicada, de los cuales 27 presentan dificultad baja (41%), 36 dificultad media (54,5%) y 3 nivel alto (4,5%). También, en las últimas páginas hay un ejercicio de investigación para tener una primera toma de contacto con el Triángulo de Pascal junto con tres problemas que pueden resultar más cercanos a la vida real.

En SM hay un total de 145 ejercicios, de los cuales 68 se encuentran repartidos entre los diferentes puntos de la unidad, estando resueltos 15, y el resto están al final del tema, como actividades finales. En este manual ningún ejercicio refleja su nivel de dificultad como en Anaya, pero los ejercicios finales están divididos en “Ejercicios para practicar” y “Problemas para resolver”, además de un ejercicio final de “Soy competente”. Al final del tema se puede encontrar también un esquema, “Lo esencial”.

Por último, cabe destacar, que ambos libros cuentan con una autoevaluación final y que se pueden encontrar las soluciones en la web de cada editorial.

En la tabla 3.2.2.2 se ofrece una tabla resumen con la comparativa de las diferentes situaciones-problemas que hemos analizado.

Tabla 3.2.2.2. Comparación situaciones-problemas

Situaciones-problemas	Anaya	SM
Dominios de definición	El anillo de los enteros, $\mathbb{Z}[x]$	El anillo de los enteros, $\mathbb{Z}[x]$ y el de los racionales $\mathbb{Q}[x]$
Elementos introductorios	Elementos históricos (Egipto, Grecia, Cardano,...)	No hay elementos introductorios
Ejemplos	34 ejemplos	23 ejemplos
Ejercicios	92 ejercicios a resolver 9 ejercicios resueltos	130 ejercicios a resolver 15 ejercicios resueltos

b) Lenguaje

Para el análisis de esta identidad se consideran los tipos de lenguajes extraídos de Ordóñez (2018, p.54).

- *Natural- vernáculo*: es el lenguaje normal con el que solemos hablar.
- *Numérico*: es aquel en el que se manejan números.
- *Tabular*: recoge datos en una tabla de forma ordenada.
- *Gráfico*: interpretación de un gráfico o dibujo.
- *Formal, algebraico o simbólico*: es el lenguaje formal matemático.
- *Algorítmico*: describe un algoritmo mediante una serie de pasos.

En la figura 3.2.2.1 se muestra ejemplos de lenguaje natural y tabular para la explicación de la Regla de Ruffini en el manual de Anaya, en la p.95.

Natural-vernáculo	Tabular
<p>“La regla de Ruffini sirve para dividir un polinomio por $x - a$. Las operaciones (sumas y multiplicaciones por a) se realizan una a una. Se obtiene así, los coeficientes del cociente y el resto de la división”</p>	<p> $(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3)$ $\begin{array}{r rrrrr} & 7 & -11 & 0 & -94 & 7 \\ 3 & & 21 & 30 & 90 & -12 \\ \hline & 7 & 10 & 30 & -4 & -5 \end{array}$ COEFICIENTES DEL COCIENTE RESTO Cociente: $7x^3 + 10x^2 + 30x - 4$ Resto: -5 </p>

Figura 3.2.2.1. Ejemplos lenguajes natural y tabular

También resulta enriquecedor el uso del lenguaje gráfico y algorítmico para su cálculo tal y como se muestra en la figura 3.2.2.2.

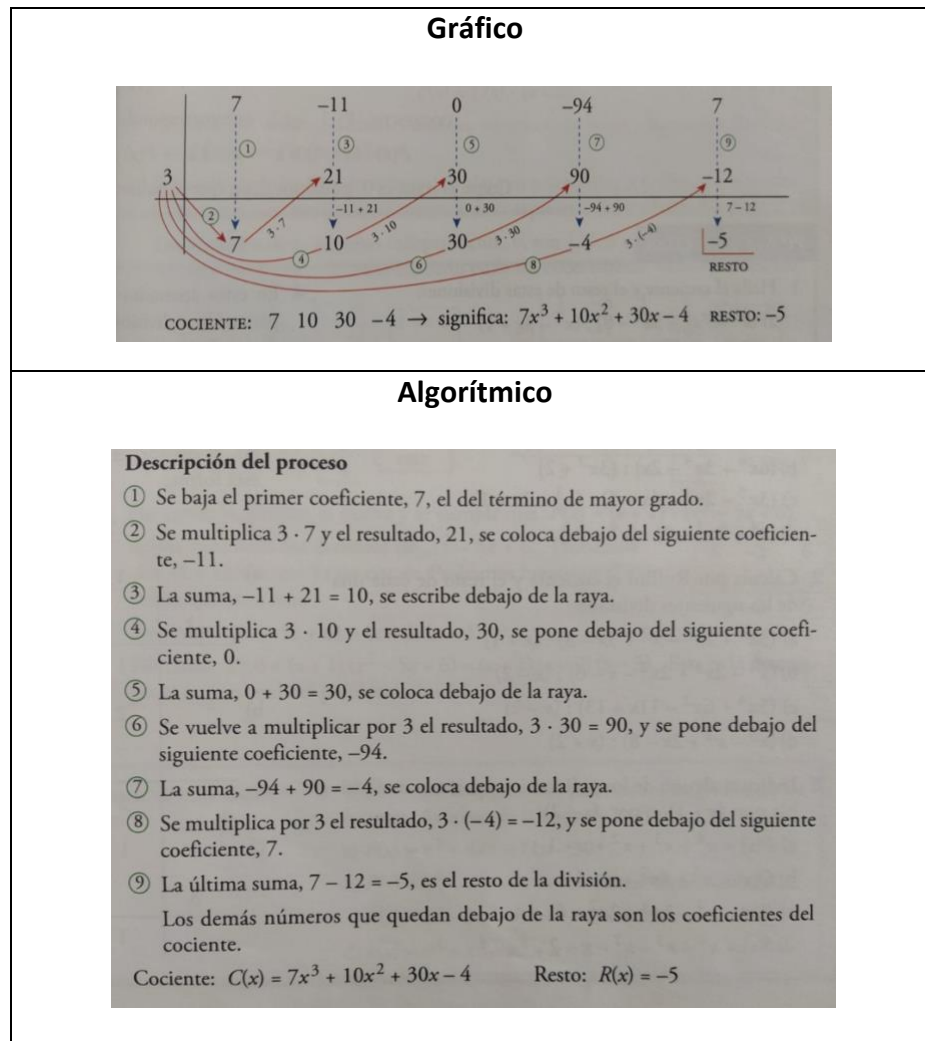


Figura 3.2.2.2. Ejemplos lenguajes gráfico y algorítmico

El lenguaje numérico es muy habitual en ambos manuales porque los ejemplos que se ponen son con números.

En M2 también encontramos variedad en el lenguaje: natural-vernáculo, gráfico, tabular, entre otros. Algunos ejemplos se pueden ver en la figura 3.2.2.3.

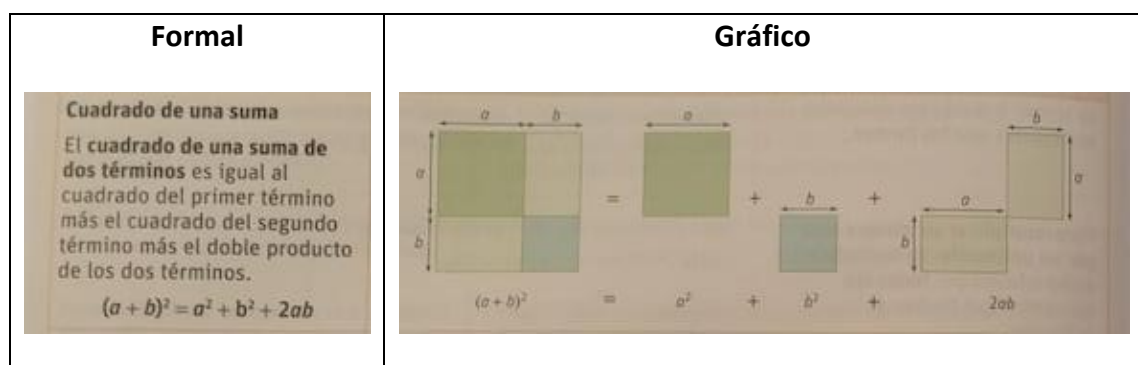


Figura 3.2.2.3. Ejemplos lenguajes formal y gráfico

c) Conceptos

Según Colera et al. (2020), los conceptos que se pueden encontrar en M1 son:

- “Monomio es el producto de un número por una o varias letras (variables).” (p.89)
- “Las letras (parte literal) representan números de valores desconocidos o indeterminado” (p.89)
- “El coeficiente de un monomio es el número que multiplica a la parte literal” (p. 89).
- “Se llama grado de un monomio al número total de factores que forman su parte literal” (p. 89).
- “Los números son monomios de grado cero” (p. 89).
- “Dos monomios son semejantes cuando tienen idéntica parte literal” (p. 89).
- “Un polinomio es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama término.” (p. 90).
- “El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio se ha puesto en su forma reducida” (p. 90).
- “El valor numérico del un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a ” (p.90).
- “Si el valor numérico de un polinomio para $x = a$ es 0, entonces se dice que a es una raíz de dicho polinomio” (p. 90).
- “Se llama opuesto de un polinomio al resultado de cambiar se signo todos sus términos” (p. 90).
- “ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Cuadrado de una suma” (p. 91).
- “ $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Cuadrado de una diferencia” (p. 91).
- “ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Suma por diferencia” (p. 91).
- “Una identidad es una igualdad algebraica que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen” (p. 92).
- “Cuando $R(x) = 0$, la división es exacta y se cumple que $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$. Entonces decimos que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.” (p. 94).
- “Se dice que un polinomio está factorizado cuando se presenta descompuesto en producto de otros polinomios (factores) del menos grado posible.” (p.97).
- “Se llama fracción algebraica al cociente indicado de dos polinomios” (p. 98).
- “Se llama inversa de una fracción algebraica a la que se obtiene intercambiando numerador y denominador” (p. 99).

Según Alcaide et al. (2020), los conceptos que se pueden encontrar en M2 son:

- “Una expresión algebraica es una expresión matemática en la que intervienen letras, números y los signos de operaciones aritméticas. Las letras reciben el nombre de variables” (p.66)
- El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado obtenido al sustituir cada una de las variables por números y aplicar las operaciones indicadas en la expresión” (p.66)
- “Un *monomio* es una expresión algebraica formada por el producto de un número real por una o varias variables elevadas a exponentes naturales.” (p.68)
- “Parte literal: formada por las variables y sus exponentes correspondientes” (p.68)
- “Coeficiente: o parte numérica, el número que multiplica a la parte literal” (p.68)
- “El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las variables que intervienen en la parte literal” (p.68)
- “Dos monomios son semejantes si tiene la misma parte literal” (p.68)
- “Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes, que se llaman términos.” (p.69)
- “El término principal es el monomio de mayor grado. Su coeficiente es el coeficiente principal” (p.69)
- “El término independiente es el monomio que no tiene parte literal” (p.69)
- “Se llama grado del polinomio al mayor de los grados de los monomios que los forman” (p.69)
- “Un monomio es un polinomio formado por dos monomios. Un trinomio es un polinomio formado por tres monomios” (p.69)
- “Las *identidades notables* son expresiones que aparecen en el álgebra con frecuencia y que transforman productos en sumas o restas, y viceversa.” (p.72)
- “El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término más el doble producto de los dos términos” (p.72)
- “El cuadrado de una diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término menos el doble producto de los dos términos” (p.72)
- “La suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término” (p.72)
- “Se dice que $x = a$ es una *raíz* del polinomio $P(x)$, si el valor de $P(x)$ para $x = a$ es nulo, es decir, $x = a$ es raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$.” (p.79)
- “Un *polinomio* es *irreducible* si no se puede escribir como producto de dos o más polinomios de grado menor.” (p.80)

Se observa que ningún manual trata explícitamente el concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, aunque en el primero se estudian las fracciones algebraicas. En el manual de Anaya no se define el concepto de polinomio irreducible mientras que en el de SM sí, y la diferencia de primo e irreducible no se trata en ninguno de los dos libros, lo que puede suponer que los alumnos sufran un conflicto semiótico de cara a cursos siguientes ya que se asocia a lo estudiado en los enteros.

d) Proposiciones

La aparición de proposiciones es muy escasa en ambos manuales. En Anaya podemos encontrar las siguientes:

- “El grado del resto es inferior al del divisor.” (Colera et al., p. 94).
- “Si $P(x)$ es divisible por $(x - a)$, lo podemos expresar así:
 $P(x) = C(x) \cdot (x - a)$ ” (Colera et al., p. 97).
- “Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros, entonces sus raíces enteras son divisores del término independiente.” (Colera et al., p. 97).

Mientras, en SM encontramos las siguientes:

- “Al dividir un polinomio por otro de la forma $(x - a)$:
 - El grado del cociente es una unidad menos que el grado del dividendo
 - El resto será un polinomio de grado cero, es decir, un número
 - Se puede expresar como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.” (Alcaide et al., p.76)
- “Teorema del Resto: El resto R de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio $(x - a)$, coincide con el valor numérico del polinomio $x = a$, es decir, $R = P(a)$.” (Alcaide et al., p.78)
- “Teorema del Factor: Si $P(a) = 0$, entonces el polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a)$, es decir, $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.” (Alcaide et al., p.79)
- “Las raíces enteras de un polinomio son divisores de su término independiente.” (Alcaide et al., p.80)

e) Procedimientos

Ambos manuales ofrecen varios procedimientos tales como la suma, resta, producto y división de monomios y polinomios, y la *regla de Ruffini*.

En el libro de SM se dedica un punto completo a la factorización de polinomios mientras que en el de Anaya se le da mucha menos importancia y se expresa como una aplicación de la regla de Ruffini. Además, en Anaya no se define qué es un polinomio irreducible.

Tampoco ninguno de los dos libros explica el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

f) Argumentos

Los argumentos empleados son directos y básicos. En ambos libros todo se deduce de manera natural a partir de los conceptos dados sin entrar en demostraciones por reducción al absurdo o ensayo-error, a excepción de la demostración del Teorema del resto en el libro de SM, como se refleja en la siguiente imagen.

Teorema del resto

El resto, R , de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio $(x - a)$, coincide con el valor numérico del polinomio en $x = a$, es decir, $R = P(a)$.

Al dividir el polinomio $P(x) = 2x^2 + 2x - 3$ por el binomio $(x - 3)$, se obtiene el cociente $C(x) = 2x + 8$ y el resto $R = 21$.

	2	2	-3	
3		6	24	
	2	8	21	→ Resto

↓
Coeficientes del cociente

Al sustituir x por 3 en $P(x)$ se obtiene:

$$P(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 2 \cdot 9 + 6 - 3 = 18 + 6 - 3 = 21$$
 Se observa que el resto de la división coincide con el valor numérico del polinomio.

Para probar el teorema, se expresa el polinomio $P(x)$ utilizando la propiedad de la división como $P(x) = C(x) \cdot d(x) + R$, es decir, $P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$.
 Al sustituir $x = a$
 $\Rightarrow P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R$
 $\Rightarrow P(a) = R$

Figura 3.2.2.4. Demostración Teorema del Resto

3.2.3. Discusión de resultados y propuestas

Después de haber realizado el análisis de los dos manuales de estudio se puede sacar varias conclusiones. Estas las establecemos siguiendo las entidades primarias, propuestas por el EOS, que hemos utilizado en el análisis de los libros de texto.

La extensión de ambos manuales es muy similar y el tema que nos interesa se localiza en el bloque de álgebra. En la tabla 3.2.3.1 se hace una comparativa sobre la extensión y el lugar en el que se encuentra los temas de polinomios.

Tabla 3.2.3.1. Comparación extensión y lugar

	Anaya	SM
Extensión	Consta de 311 páginas y se trata desde la página 86 a la 107	Consta de 304 páginas y se trata desde la página 66 a la 90
Lugar	Capítulo 5: Lenguaje algebraico	Capítulo 4: Polinomios

Ambos se adaptan al currículo vigente, aunque difieren en algunos aspectos. Los contenidos que aparecen tanto en el tema 5 de M1 como en el tema 4 de M2 son los que refleja la tabla 3.2.3.2.

Tabla 3.2.3.2. Contenidos comunes en ambos manuales

CONTENIDOS COMUNES EN AMBAS EDITORIALES	Expresiones algebraicas. Variables e incógnitas
	Monomios y operaciones
	Polinomios y operaciones
	Identidades notables
	Sacar factor común
	División de polinomios
	Regla de Ruffini
	Factorización de polinomios

También hay contenidos que tiene un manual y no el otro y viceversa, como muestra la tabla 3.2.3.3.

Tabla 3.2.3.3. Contenidos presentes en un único manual

Anaya	SM
- Fracciones algebraicas. Suma, resta, producto y cociente	- Término principal, coeficiente principal y término independiente - Definición de polinomio irreducible - Teorema del resto - Teorema del factor

En cuanto a las *situaciones-problemas* ambos manuales son bastantes parecidos, estructurándose de manera deductiva. Primero se explican los conceptos teóricos, luego se presentan ejemplos resueltos sobre esos conceptos presentados y, por último, se proponen algunos ejercicios para que el alumno ponga en práctica lo aprendido. Ambas editoriales se basan en una *metodología* transmisiva, donde el

docente explicaría los contenidos en clase y luego los alumnos realizarían ejercicios para ponerse a prueba.

Principalmente hay que destacar que ambos temas se desarrollan sobre *dominios* euclídeos, con la excepción de que SM profundiza más, ya que introduce coeficientes racionales.

A la hora de utilizar *elementos introductorios*, la unidad Anaya lo aborda de forma más amplia, ya que hacer una breve introducción histórica permite motivar al alumnado y ponerlo en contexto de lo que se va a estudiar.

En cuanto a los *ejemplos*, en ambos manuales aparecen después de la explicación para ilustrarla y, posteriormente, proponen los ejercicios para practicar lo aprendido. Dichos *ejercicios* son del mismo tipo, dándole más importancia al cálculo procedimental que a la asimilación de los conceptos dados o al cuestionamiento de si existe solución. No se proponen situaciones de problematización o generalización de problemas, ni ejercicios donde intervienen diferentes dominios. Para la factorización de polinomios siempre suelen aparecer mónicos y con las mismas raíces.

En ambos manuales existe gran variedad en el lenguaje, siendo el más utilizado el natural-vernáculo, junto con el numérico (propio de la temática que se desarrolla) y el gráfico, aunque cabe destacar que en el manual de SM se utiliza un lenguaje más formal. También aparecen los lenguajes tabular y algorítmico a la hora de explicar la regla de Ruffini.

Se ha observado que en ambos manuales se presta más atención al estudio de los *procedimientos* que en la profundización de *conceptos*, donde los alumnos realizan ejercicios mecánicos de forma individual sin necesidad de pensar más allá. Como futura mejora se podrían proponer ejercicios finales bien contextualizados, lo más cercanos posible a la vida real, de tipo Pisa o problemas de investigación, que potencie el trabajo individual o colaborativo, motive al alumnado y lo haga pensar. Así mismo, como luego se hará en la propuesta didáctica, se deberían proponer ejercicios para trabajar el concepto de polinomio y raíz, más allá del cálculo mecánico.

En cuanto a las *proposiciones* se ha visto que son escasas por el rigor requerido. Aun así, los alumnos deben trabajar el razonamiento matemático y familiarizarse poco a poco con el lenguaje matemático y el rigor que precisan las matemáticas.

Como hemos visto en la comparativa, en el libro de SM se dedica un punto completo a la factorización de polinomios mientras que en el de Anaya se expresa como una aplicación de la regla de Ruffini, lo que puede provocar que los alumnos no consigan entender verdaderamente el concepto de factorización, todo eso unido a que no se define qué es un polinomio irreducible.

Para terminar, cabe mencionar que los *recursos TIC* y los *trabajos cooperativos* son prácticamente inexistentes, por tanto, corre de la mano del docente incorporar estas herramientas en las clases para potenciar el aprendizaje del alumno. A nuestro entender faltan ejercicios de aplicaciones, como puede ser el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios para operar fracciones algebraicas.

En nuestra propuesta de unidad didáctica se pretende incluir las mejoras que se han propuesto y subsanar las carencias observadas en el análisis de los manuales, desarrollando una unidad didáctica lo más completa posible.

Capítulo 4. Fundamentación epistemológica

Con el objetivo de ahondar en el trasfondo matemático de los polinomios, a continuación, se desarrolla el tema 13 del temario que rige el procedimiento de ingreso, adquisición de nuevas especialidad y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. El título de dicho tema es: **Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas.**

Este tema presenta la siguiente estructura:

- 4.1. Introducción
- 4.2. Polinomios y operaciones
 - 4.2.1. Suma de polinomios
 - 4.2.2. Producto de polinomios
- 4.3. Fórmulas de Newton
 - 4.3.1. Triángulo de Tartaglia
 - 4.3.2. Fórmula de Newton
 - 4.3.3. Fórmula de Leibniz
- 4.4. Factorización de polinomios
 - 4.4.1. Criterios para estudiar si un polinomio es reducible
- 4.5 Fracciones algebraicas. Aplicaciones
 - 4.5.1. Suma de fracciones algebraicas
 - 4.5.2. Producto de fracciones algebraicas
 - 4.5.3. Descomposición en fracciones simples
 - 4.5.4. Aplicaciones

4.1. INTRODUCCIÓN

A la hora de enseñar matemáticas, es fundamental que el docente tenga un buen conocimiento histórico y una consolidada base matemática para obtener una buena fundamentación epistemológica del tema a estudiar. Además, esto permitirá poder motivar al alumno en el estudio de lo que se está viendo y hacerles ver como surgieron y se plantearon en un primer momento los problemas que ahora estudian ellos.

La civilización Mesopotámica es la autora de los textos más antiguos de matemáticas que conocemos en la actualidad. Se trata de tablillas de arcilla talladas con signos cuneiformes que se empleaban como textos de enseñanza (Sessa, 2005). En esas tablillas se encuentra una gran variedad de problemas aritméticos con un procedimiento de resolución coloquial sin explicación.

Otras civilizaciones también se preocuparon de resolver problemas de la vida cotidiana. Por ejemplo, los egipcios fueron capaces de resolver ecuaciones lineales por el método de la falsa posición. Este método también fue utilizado por los babilónicos y posteriormente por los árabes (Ochoviet, 2014)

El estudio de la divisibilidad y, en concreto del máximo común divisor de números enteros, viene de la mano de la civilización griega.

La civilización griega utilizó procedimientos geométricos para resolver muchos problemas, entre ellos la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado (Ochoviet 2014). Entre los matemáticos griegos destaca Euclides (alrededor del año 300 a.C), quien en su obra Elementos, demostró varios teoremas de la divisibilidad de los números enteros y al cual le debemos el Algoritmo de Euclides, que es el algoritmo más eficiente para el cálculo del máximo común divisor, también en el anillo de polinomios, siendo un método más eficaz que el cálculo del mismo a través de la factorización. También estableció los principales conceptos matemáticos de la divisibilidad, divisor, múltiplo, primo, entre otros.

En el álgebra greco-alejandrina destaca el matemático Diofanto (alrededor del año 300 d.C), el cual introdujo un simbolismo algebraico muy elemental para describir expresiones polinómicas e incógnitas. A Diofanto le debemos las ecuaciones diofánticas, que son una aplicación fundamental del Algoritmo de Euclides y de la Identidad de Bezout.

Los aportes más importantes de los hindúes fueron la utilización de cierto simbolismo, el sistema posicional decimal y la resolución de algunas ecuaciones. Además, trabajaron con números negativos y entre los métodos de resolución empleados destacaba la regla de tres y el método de inversión.

Más tarde los árabes establecieron lazos con diferentes culturas, por eso utilizaron tanto métodos de los griegos como de los hindúes. Entre las aportaciones de la cultura árabe destaca la del gran matemático Al-Khwarizmi. En su obra *Al-jabr wa'l Muqabala*, aborda la resolución de varios tipos diferentes de ecuaciones.

En el siglo XII comienza una fuerte decadencia y no es hasta el siglo XVI cuando se produce en Europa un avance notable, gracias a los algebristas italianos que contribuyeron en la búsqueda de fórmulas con las que resolver ecuaciones algebraicas. Del Ferro y Tartaglia resuelven la ecuación de tercer grado, Ferrari la de cuarto y Cardano publica ambas, creándose así una gran polémica.

Importantes fueron las aportaciones de Fermat (1601) en teoría de números. No obstante, en el siglo XVIII, fue cuando René Descartes empezó a utilizar a, b, c para representar las constantes y la parte final del alfabeto, x, y, z para las incógnitas o variables. Además, introdujo la notación exponencial que usamos hoy en día para trabajar con polinomios. Ruffini (1765) se interesó por el estudio de los polinomios e intentó demostrar que no era posible encontrar una fórmula que permitiera resolver ecuaciones de grado cinco y superior.

El nacimiento del Álgebra Abstracta en el S.XIX permitió obtener una nueva perspectiva al surgir nuevas estructuras algebraicas. La primera estructura que se introdujo fue la de grupo, de la mano de Hilbert (1862), después vino la de anillo, ideal y cuerpo, entre otras, y toda la teoría de anillos que ello conlleva. Aparecieron anillos más amplios como los dominios de integridad, DI , (donde se establecieron las definiciones más generales de divisor, múltiplo, máximo común divisor), dominios de factorización única, DFU , (donde se profundizó en el cálculo del máximo común divisor con la factorización de irreducibles), dominios de ideales principales, DIP , y dominios euclídeos, DE , (donde se generalizaron el algoritmo de la división y el de Euclides). La encargada de sistematizar todos los resultados que se tenían hasta el momento de anillos e ideales y de enlazar la factorización con la cadena de ideales, fue la matemática alemana Noether (1882), una de las mujeres más importantes en la historia de las matemáticas.

En el siglo XIX, también destaca el matemático Abel, que se dedicó a estudiar sobre la teoría de Galois y proporcionó una elegante respuesta a lo que intentaba demostrar Ruffini, al comprobar que no existe fórmula que permita resolver ecuaciones de grado cinco o superior, respecto a la resolución de ecuaciones de grado 5 o superior.

La divisibilidad está muy presente en los currículos de las diferentes etapas educativas, desde Primaria hasta Bachillerato. El estudio se inicia en los números naturales (en 5º y 6º de Primaria) y posteriormente se amplía al anillo de polinomios. La factorización de polinomios, que es el tema que aborda este trabajo, se estudia en 3º y 4º de la ESO de matemáticas académicas, así como en Bachillerato. En algebra superior, se estudia la divisibilidad en dominios abstractos como DI, DIP, DFU, DE. En particular, la divisibilidad en el anillo de polinomios y el cálculo de raíces es de gran utilidad, por sus aplicaciones en diferentes campos como puede ser la teoría de grafos o en integración. El estudio de la divisibilidad ha tenido un gran auge por sus aplicaciones en la teoría de códigos y en general en la informática.

Antes de centrarnos en la divisibilidad del anillo de polinomios se ofrece un estudio sobre conceptos más generales de anillos y la divisibilidad en dichos dominios. Esas notas se pueden consultar en el **Anexo I** titulado: Generalidades de factorización en anillos. La divisibilidad en polinomios se extiende de las definiciones de ese Anexo.

4.2. POLINOMIOS Y OPERACIONES

En este capítulo vamos a dar algunas definiciones sobre el conjunto de los polinomios y repasaremos la estructura de anillo con la que se puede dotar.

Definición 4.2.1. Sea A un anillo, una indeterminada x es un nuevo elemento que no pertenece al anillo A . Llamamos **polinomio** en x con coeficientes en A a toda expresión formal del tipo

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

con $a_i \in A, i = 1, \dots, n$ y con x^i un nuevo elemento que está determinado por x e $i = 1, \dots, n$.

Dos polinomios $p(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m$ son iguales si $n = m$ y para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene que $a_i = b_i$.

Llamamos $A[x]$ al conjunto de todos los polinomios en x con coeficientes en A .

El polinomio $p(x)$ se llama *constante* si $n = 0$, se llama *mónico* si $a_n = 1$, a_n se llama *coeficiente líder o principal*. Si es no nulo decimos que el grado de $p(x)$ es n ; a_0 se llama *término independiente*; el polinomio $p(x) = 0$ diremos que tiene grado $-\infty$. El grado del polinomio $p(x)$ lo denotaremos $gr(p(x))$

En $A[x]$ podemos definir dos operaciones: suma y producto.

4.2.1. Suma de polinomios

Definición 4.2.1.1. Sean $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$ dos polinomios de $A[x]$. Se define la **suma** de $p(x) + q(x)$ como:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_r + b_r)x^r,$$

con $r \leq \{n, m\}$.

Proposición 4.2.1.1. El conjunto de los polinomios $A[x]$ con la operación suma, tienen estructura de grupo abeliano; esto es, se verifica:

1. Propiedad asociativa
2. Existencia de elemento neutro
3. Existencia de elemento opuesto
4. Propiedad conmutativa

Proposición 4.2.1.2. Sean $p(x), q(x) \in A[x]$ no nulos. Entonces

$$gr(p(x) + q(x)) \leq \max \{gr(p(x)), gr(q(x))\}$$

4.2.2. Producto de polinomios

Definición 4.2.2.1. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de $A[x]$, tal que $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$

Se define el **producto** de $p(x) \cdot q(x)$ como:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0 + b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + c_s x^s + \cdots + a_n b_m x^{n+m},$$

con $c_s = a_0b_s + a_1b_{s-1} + \cdots + a_{s-1}b_1 + a_s b_0$.

Siempre suponemos $a_h = 0$ si $h > n$ y $b_k = 0$ si $k > m$.

Proposición 4.2.2.1. Sean $p(x), q(x) \in A[x]$ no nulos. Entonces

$$gr(p(x) \cdot q(x)) \leq gr(p(x)) + gr(q(x))$$

Lema 4.2.2.1. Dados dos polinomios no nulos $p(x)$ y $q(x)$ de $A[x]$, se tiene que:

$$gr(p(x)q(x)) \leq gr(p(x)) + gr(q(x))$$

La igualdad se verifica si y sólo si A es un dominio de integridad.

Teorema 4.2.2.1. $A[x]$ con la suma y el producto definidos es un anillo.

4.3. FÓRMULAS DE NEWTON

Los números combinatorios juegan un papel importante en el desarrollo de las potencias de un binomio y en general de un polinomio. Por ello, vamos a exponer algunos conceptos básicos para su uso.

Definición 4.3.1. Se define el número combinatorio de base m y orden n como:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Cumple las siguientes propiedades:

i) $\binom{m}{0} = 1$

ii) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

iii) $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$

4.3.1. Triángulo de Tartaglia

El triángulo de Tartaglia es una representación de los números combinatorios ordenados en forma de triángulo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} &
 \end{array}$$

En virtud de la propiedad iii, cada número resulta igual a la suma de los dos que están inmediatamente sobre él, se obtiene así la siguiente tabla conocida como el triángulo de Tartaglia.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 &
 \end{array}$$

Figura 4.3.1.1. Triángulo de Tartaglia

Una aplicación de interés práctico de este triángulo consiste en facilitar el cálculo rápido de los números combinatorios de índice superior m cuando se conocen los de índice $(m - 1)$, pues aplicando la propiedad iii), sabemos que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

Por ejemplo, para calcular los elementos de la 3ª fila sería:

$$\begin{aligned}
 \binom{3}{0} &= 1 \\
 \binom{3}{1} &= \binom{2}{0} + \binom{2}{1}
 \end{aligned}$$

4.3.3. Fórmula de Leibniz

La fórmula de Newton se puede generalizar para un polinomio de n términos, $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ y obtenemos:

- Términos de la forma $a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdot \dots \cdot a_m^\delta$ con $\alpha + \beta + \dots + \delta = n$.
- El coeficiente que acompaña a cada término es $PR_n^{\alpha, \beta, \dots, \delta} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \delta!}$

Siendo $PR_n^{\alpha, \beta, \dots, \delta}$ las permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite α veces, el segundo β veces, ...

Por tanto, tenemos que la fórmula de Leibniz se puede expresar como:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\alpha + \beta + \dots + \delta = n} \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \delta!} a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdot \dots \cdot a_m^\delta$$

4.4. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Todas las definiciones generales que vimos para anillos recogidas en el Anexo I se pueden trasladar para el caso particular del anillo de polinomios.

Proposición 4.4.1.

- i) Si A es conmutativo entonces $A[x]$ conmutativo.
- ii) A es un dominio de integridad entonces $A[x]$ es un dominio de integridad.
- iii) Si A es DFU entonces $A[x]$ es DFU.

Proposición 4.4.2. Si A es DI, las unidades del anillo de polinomio $A[x]$, serán las unidades del anillo A .

En general los polinomios no tienen estructura de cuerpo puesto que el inverso de x que es x^{-1} no es un polinomio.

La divisibilidad en polinomios se extiende de las definiciones 11 y 12. En este caso diremos que $q(x)$ **divide a** $p(x)$ si existe $c(x) \in A[x]$ tal que $p(x) = q(x) \cdot c(x)$.

Lo denotaremos $q(x)|p(x)$. Diremos que los dos polinomios anteriores son **asociados** cuando $c(x)$ es una unidad.

Proposición 4.4.3. Sea $p(x), q(x) \in A[x]$, $p(x), q(x) \neq 0$. Si $q(x)|p(x)$ entonces $gr(q(x)) \leq gr(p(x))$.

Definición 4.4.1. Sea $p(X), q(X) \in A[X]$, un elemento $d(X) \in A[X]$ se dice que es un **máximo común divisor** y se denota $M.C.D(p(X), q(X)) = d(X)$, si verifica que:

- i) $d(x)|p(x)$ y $d(x)|q(x)$
- ii) Si $d'(x) \in A$ y $d'(x)|p(x)$ y $d'(x)|q(x)$ entonces $d'(x)|d(x)$

Las unidades del anillo juegan un papel muy importante en la unicidad del máximo común divisor. En el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo, el máximo común divisor es único salvo asociados.

En el anillo de polinomios, si queremos calcular el máximo común divisor, esto se puede hacer a través de la factorización en irreducible como veremos más adelante. Sin embargo, es más eficiente obtenerlo utilizando el algoritmo de Euclides.

El algoritmo de Euclides para polinomios se extiende del teorema 4 del Anexo I y recordemos que después de hacer las divisiones oportunas, el máximo común divisor de a y b era el "último resto no nulo". Ver Anexo I.

▪ *Ejemplo 4.4.1*

A continuación, vamos a calcular el máximo común divisor de $x^3 - x$ y $x^3 + x^2 - 2x$ utilizando el algoritmo de Euclides.

Como ambos polinomios tienen el mismo grado nos da igual que polinomio tomamos como dividendo y cual como divisor. En este caso el dividendo será $x^3 + x^2 - 2x$ y el divisor $x^3 - x$.

Vamos a construir una tabla como la de la *Figura 2* del Anexo I.

Cocientes		1	$x - 1$
	$x^3 + x^2 - 2x$	$x^3 - x$	$x^2 - x$
Restos	$x^2 - x$	0	

Por tanto, aplicando el Algoritmo de Euclides, hemos obtenido que

$$M.C.D (x^3 - x, x^3 + x^2 - 2x) = x^2 - x$$

Continuamos definiendo uno de los conceptos más importantes en los polinomios, por sus aplicaciones, el de raíz.

Definición 4.4.2. Una **raíz** del polinomio $p(x) \in A[x]$ es un elemento $a \in A$ que verifica $p(a) = 0$.

Definición 4.4.3. Si $a \in A$ es una raíz del polinomio $p(x) \in A[x]$, definimos la **multiplicidad** de a como el mayor número entero positivo k tal que $p(x) = (x - a)^k q(x)$ para algún $q(x) \in A[x]$.

También podemos definir la multiplicidad de a como el número de veces que se repite como raíz.

Teorema 4.4.1. Algoritmo de la división para polinomios

Sea K un cuerpo y $p(x), q(x) \in K[x]$ con $q(x) \neq 0$ con coeficiente principal una unidad. Entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ de $A[x]$ verificando $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$ y $gr(r(x)) < gr(q(x))$.

El polinomio $c(x)$ se llama cociente de $p(x)$ por $q(x)$ y $r(x)$ es el resto.

La función euclidea que se utiliza en el anillo de polinomios es el grado.

En particular, si K es cuerpo, p, q pertenece a $k[x]$ con q distinto de cero.

Demostración.

- Veamos en primer lugar, veamos la *unicidad*

Supongamos que existan dos cocientes c y c' y dos restos r y r' de x .
Entonces $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$ y $p(x) = q(x)c'(x) + r'(x)$, dos descomposiciones del polinomio $p(x)$. Si restamos las dos expresiones obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (c(x) - c'(x)) \cdot q(x) + (r(x) - r'(x)) \\ (r'(x) - r(x)) &= (c(x) - c'(x)) \cdot q(x) \end{aligned}$$

Si $r(x) = r'(x)$ tendríamos que $(c(x) - c'(x)) \cdot q(x) = 0$. Como $q(x) \neq 0$, por ser dominio de integridad tendríamos que $c(x) = c'(x)$.

Ahora veamos que ocurre cuando $r(x) \neq r'(x)$. Si ocurre esto también ocurre que $c(x) \neq c'(x)$.

Estudiando los grados tenemos que

$$gr[(c(x) - c'(x)) \cdot q(x)] = gr(c(x) - c'(x)) + gr(q(x)) \geq gr(q(x))$$

Pero a la vez también tenemos que

$$gr(r'(x) - r(x)) \leq \max(gr(r(x)), gr(r'(x))) < gr(q(x))$$

Luego, obtenemos una contradicción, y llegamos a que $c(x) = c'(x)$ y $r'(x) = r(x)$. Por lo que el cociente y el resto son únicos.

- Ahora demostramos la *existencia*

Veamos la inducción sobre el grado de $p(x)$. Definimos:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ con } a_n \neq 0 \text{ (} gr(p(x)) = n \text{)} \\ q(x) &= \sum_{j=0}^m b_j x^j \text{ con } b_m \neq 0 \text{ (} gr(q(x)) = m \text{)} \end{aligned}$$

Si $n < m$, $c(x) = 0$ y $r(x) = p(x)$

Suponemos $n \geq m$. Como K es un cuerpo, si dividimos los monomios de los coeficientes líderes obtenemos el primer cociente.

$$c_0 = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Y el primer resto sería $r_0 = p - c_0q$. Si $r_0 = 0$ o $gr(r_0) < gr(q(x))$, habríamos terminado, tomando $c(x) = c_0$ y $r(x) = r_0$.

Si no ocurre eso tendremos que ir repitiendo el mismo proceso hasta que el resto sea cero o tenga grado menor que $q(x)$. Por hipótesis de inducción, existirían ahora c_1 y r_1 , correspondientes a la división de r_0 y $q(x)$ donde

$$r_0 = c_1q(x) + r_1$$

Si recopilamos tenemos que

$$p(x) = c_0q(x) + r_0 = c_0q(x) + c_1q(x) + r_1 = (c_0 + c_1)q(x) + r_1$$

Y podemos considerar $r(x) = r_1$ y $c(x) = c_0 + c_1$. Por tanto, quedaría demostrada la existencia. ■

▪ *Ejemplo 4.4.2*

Consideramos $p(x) = 3x^3 + x^2 - x + 2$ y $q(x) = 2x^2 + 3$. Si hacemos el algoritmo en $\mathbb{Q}[x]$, en la primera etapa obtenemos que:

$$(3x^3 + x^2 - x + 2) = \frac{3}{2}x \cdot (2x^2 + 3) + (x^2 - \frac{11}{2}x + 2)$$

En la segunda etapa tendríamos que seguir dividiendo $x^2 - \frac{11}{2}x + 2$ entre $q(x)$ y tendríamos

$$(3x^3 + x^2 - x + 2) = \frac{3}{2}x \cdot (2x^2 + 3) + \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 3) + \left(-\frac{11}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

Sacando factor común $q(x)$ obtenemos que:

$$(3x^3 + x^2 - x + 2) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x^2 + 3) + \left(-\frac{11}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

Siendo el cociente $q(x) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ y el resto $r(x) = \left(-\frac{11}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

Corolario 4.4.1. Si K es un cuerpo, entonces $K[x]$ es dominio euclídeo

Teorema 4.4.2. Teorema del resto

Sea A un anillo conmutativo y $p(x) \in A[x]$. Para cada $a \in A$ existe un único polinomio $q(x) \in A[x]$ tal que

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a).$$

Demostración.

Sea $p(x) \in A[x]$. Al dividir $p(x)$ entre $(x - a)$ tenemos que, $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$, siendo $q(x)$ el cociente y $r(x)$ el resto, con $gr(r(x)) < 0$. Por tanto, $r(x) = r$ constante.

Si evaluamos el polinomio en $x = a$, obtenemos que:

$$p(a) = (a - a)q(a) + r \Rightarrow p(a) = r$$

■

Del teorema anterior obtenemos la famosa *Regla de Ruffini*, que nos facilita el cálculo rápido de la división de cualquier polinomio entre un binomio de la forma $(x - a)$.

Regla de Ruffini

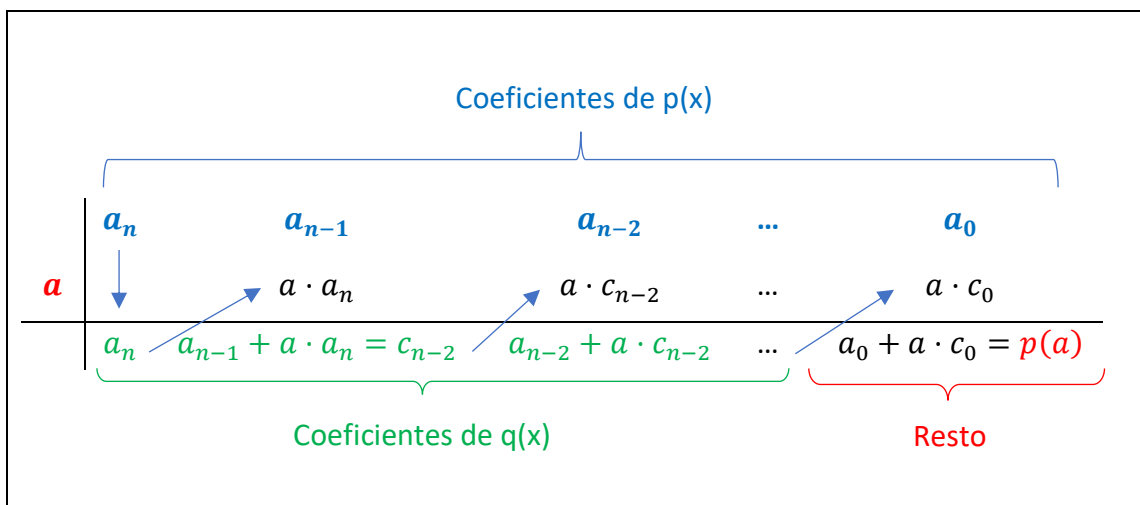


Figura 4.4.1. Regla de Ruffini

Si $p(a) = 0$ tenemos que a es raíz de $p(x)$. Este resultado queda reflejado en el siguiente teorema.

Corolario 4.4.2. Teorema del Factor.

Si A es un anillo y $p(x) \in A[x]$. $p(x)$ es divisible por $(x - a)$ si y sólo si a es raíz de $p(x)$.

Demostración.

\Rightarrow Si $(x - a) \mid p(x) \Rightarrow p(x) = (x - a) \cdot q(x)$

Entonces, $p(a) = (a - a) \cdot q(a) \Rightarrow p(a) = 0 \Rightarrow a$ es raíz de $p(x)$.

\Leftarrow Si a es raíz de $p(x) \Rightarrow p(a) = 0$.

Como $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$ y $p(a) = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

Luego, $p(x) = (x - a) \cdot q(x) \Rightarrow (x - a) \mid p(x)$ como queríamos demostrar.

■

Como consecuencia podremos descomponer algunos polinomios como un producto de polinomios de grado uno.

Teorema 4.4.3. Si A es un dominio de integridad y $p(x) \in A[x]$ para a_1, \dots, a_k raíces de $p(x)$ distintas dos a dos, se verifica $(x - a_1) \dots (x - a_k) \mid p(x)$.

Si no estamos en un dominio de integridad esto no es cierto. Por *ejemplo*, si consideramos el polinomio $p(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_8[x]$, tenemos que 1 y 3 son raíces y sin embargo $(x - 1)(x - 3) \nmid p(x)$.

Corolario 4.4.3. Si A es un DI y $p(x) \in A[x]$, $p(x) \neq 0$ entonces, el número de ceros distintos de $p(x)$ es menor o igual que $gr(p(x))$.

Si no estamos en un DI es falso. Si consideramos $p(x) = x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{Z}_6[x]$ vemos que 1, 2, 4 y 5 son raíces del polinomio. Por tanto, un polinomio de grado dos tiene más de dos raíces.

Definición 4.4.4. Sea $p(X) \in A[x]$, $p(X) \neq 0$ y $p \notin U(A[x])$. Diremos que el polinomio $p(X)$ es **irreducible** si verifica que $p(x) = s(x)r(x)$ y $s(X) \in U(A[x])$ o $r(x) \in U(A[X])$.

Existen anillos donde la factorización no es única, como es el caso de $\mathbb{Z}_6[x]$, donde por ejemplo vemos que $x^2 + x = x(x + 1) = (x - 2)(x - 3)$. Tenemos un polinomio de grado 2, que tiene 4 raíces y admite dos factorizaciones en irreducibles.

Sabemos que, si K es un cuerpo, el anillo $K[x]$ es un DE y también DFU. En este dominio los conceptos de primos e irreducibles coinciden y nos permite obtener el M.C.D como “comunes elevados al menor exponente” de la factorización en irreducibles.

Lema 4.4.1. Sea K un cuerpo y consideremos $K[x]$.

1. Los polinomios de grado 1 en $K[x]$ son irreducibles
2. Los polinomios de grado 1 en $K[x]$ son los únicos irreducibles de $K[x]$ si y solo si todo polinomio de $K[x]$ no constante tiene una raíz en K .

Definición 4.4.5. Un cuerpo K se dice que es **algebraicamente cerrado**, si todo polinomio no constante de $K[x]$ tiene alguna raíz en K .

En lo que sigue D es un DFU.

Definición 4.4.6. Sea $p(x) \in D[x]$ un polinomio no constante. Se define el **contenido** de $p(x)$ como $C(p(x)) = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Un polinomio $p(x)$ se llama **primitivo** si su contenido es 1.

Si $p(x) \in D[x]$ y consideramos $c = C(p(x))$, podemos expresar $p(x) = c \cdot p(x)^*$, donde $p(x)^* \in D[x]$ y, además, primitivo.

Teorema 4.4.4. Lema de Gauss

Sea D un DFU, el producto de dos polinomios primitivos es un polinomio primitivo.

Proposición 4.4.4. Sea D un DFU y sea K su cuerpo de fracciones. Sea $p(x) \in D[x]$ primitivo. Entonces, $p(x)$ es irreducible como elemento de $D[x]$ si y solo si $p(x)$ es irreducible como elemento de $K[x]$.

Esta proposición es de gran ayuda porque es mucho mas fácil ver si $p(x)$ es irreducible como elemento de $K[x]$ que comprobarlo en $D[x]$.

Corolario 4.4.4. Sea D un DFU y sea K su cuerpo de fracciones. Los irreducibles de $D[x]$ son los irreducibles de D y los polinomios de $D[x]$ primitivos que son irreducibles como elementos de $K[x]$

Teorema 4.4.5. Si D es DFU, entonces $D[x]$ es DFU.

▪ Ejemplos

1. $U(\mathbb{Z}[x]) = U(\mathbb{Z}) = \{+1, -1\}$, $U(\mathbb{Q}[x]) = U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \{0\}$
2. En $\mathbb{R}[x]$ los polinomios $p(x) = 3x^3 + x + 2$ y $q(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 1$ son asociados porque $p(x) = q(x) \cdot \frac{1}{2}$, pero no serían asociados en $\mathbb{Z}[x]$.
3. \mathbb{C} es algebraicamente cerrado (Teorema Fundamental del Álgebra)
4. Si consideramos el polinomio $p(x) = 2x^5 + 4x^4 + 12x^2 + 6$ en $\mathbb{Q}[x]$ y calculamos su contenido que es 2, tenemos que $p(x) = 2(x^5 + 2x^4 + 6x^2 + 3)$, siendo primitivo $x^5 + 2x^4 + 6x^2 + 3$.
5. $\mathbb{Z}[x]$ DFU, pero no DE

4.4.1. Criterios para estudiar si un polinomio es reducible.

En esta sección vamos a considerar un dominio de factorización única y K su cuerpo de fracciones. La factorización en el anillo de polinomios presenta dos problemas prácticos relacionados entre sí:

1. Dado un polinomio determinar si es reducible o irreducible
2. Si es reducible, factorizarlo en irreducibles.

Para el primer caso a veces basta con tener criterios que suponen condiciones suficientes (es decir que, si cumple cierto criterio, es irreducible, pero si no lo cumple, no podemos decir nada).

Criterio de Ruffini

Sea D es DFU y K un cuerpo de fracciones de D . Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in D[x]$. Entonces el polinomio $ax - b \in D[x]$ con $m.c.d(a, b) = 1$ divide a $p(x)$ si y solo si $a|a_n$ y $b|a_0$ y $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

▪ Ejemplo 4.4.1.1.

Sea $p(x) = x^4 + 4$ en $\mathbb{Z}[x]$. Cualquier raíz racional suya debe ser de la forma b/a con $a/1$ y $b/4$. Luego las posibles raíces racionales de $p(x)$ son 1, -1, 2, -2, 4, -4. Un cálculo rápido muestra que ninguno de estos números es raíz de $p(x)$, luego el polinomio $p(x)$ no tiene raíces en \mathbb{Q} .

Criterio de Eisenstein

Sea D un DFU y sea K el cuerpo de fracciones de D . Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in D[x]$ primitivo.

Si $\exists p \in D$ primo tal que $p|a_i \forall i = 0, \dots, n-1$, $p \nmid a_n$ y $p^2 \nmid a_0$, entonces $p(x)$ es irreducible en $D[x]$ y en $K[x]$.

▪ Ejemplo 4.4.1.2.

Sea $p(x) = 2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15 \in \mathbb{Z}[x]$. El polinomio es primitivo porque $m.c.d(2, -6, 9, -15) = 1$. El primo 3 divide a todos los coeficientes menos al líder y, tenemos que $3^2 = 9$ no divide al término independiente, luego $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

4.5. FRACCIONES ALGEBRAICAS. APLICACIONES

Definición 4.5.1. Llamamos **fracción algebraica** a un par de polinomios $p(x), q(x) \in K[x]$, con $q(x) \neq 0$. El primero de ellos recibe el nombre de numerador y el segundo denominador. Se representa por:

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

En el conjunto $K[x] \times K[x]^*$, donde $K[x]^* = K[x] - 0$, definimos la relación de equivalencia R dada por

$$\frac{p(x)}{q(x)} R \frac{p'(x)}{q'(x)} \Leftrightarrow p(x) \cdot q'(x) = q(x) \cdot p'(x)$$

Es inmediato comprobar que es relación de equivalencia ya que cumple la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva.

Cada clase de $K[x] \times K[x]^*/R$ recibe el nombre de **razón algebraica**, siendo $K[x] \times K[x]^*/R$ el conjunto de las razones algebraicas.

4.5.1. Suma de razones algebraicas

Definición 4.5.2. Definimos en $K[x] \times K[x]^*/R$ la operación **suma** como:

$$\forall \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right], \left[\frac{r(x)}{s(x)} \right] \in K[x] \times K[x]^*/R;$$

$$\left[\frac{p(x)}{q(x)} \right] + \left[\frac{r(x)}{s(x)} \right] = \left[\frac{p(x)s(x) + r(x)q(x)}{q(x)s(x)} \right]$$

Con esta operación el conjunto de las razones algebraicas tiene estructura de *grupo abeliano*.

- i) La operación está bien definida (no depende de los representantes elegidos).
- ii) Propiedad asociativa.
- iii) Existencia de elemento neutro.
- iv) Existencia de elemento simétrico.
- v) Propiedad conmutativa.

4.5.2. Producto de razones algebraicas

Definición 4.5.2.1. En $K[x] \times K[x]^*/R$ definimos la operación **producto** como:

$$\forall \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right], \left[\frac{r(x)}{s(x)} \right] \in K[x] \times K[x]^*/R; \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right] \cdot \left[\frac{r(x)}{s(x)} \right] = \left[\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} \right]$$

De nuevo podemos ver que la operación está bien definida

Proposición 4.5.2.1. El conjunto $(K[x] \times K[x]^*/R, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, por lo que es llamado el **cuerpo de fracciones** y se notará $K(x)$.

4.5.3. Descomposición en fracciones simples y aplicaciones.

Definición 4.5.3.1. Sea $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$ con $M.C.D(p(x), q(x)) = 1$, dicha razón recibe el nombre de **fracción simple**.

Proposición 4.5.3.1. Dada $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$ y $r(x) \in K[x]$ no nulo. Se verifica que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)r(x)}{q(x)r(x)}$$

Corolario 4.5.3.1. Para cada $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$, existen dos únicos polinomios $p'(x), q'(x) \in K[x]$ tal que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)}{q'(x)} \quad \text{con } M.C.D(p'(x), q'(x)) = 1$$

Proposición 4.5.3.2. Toda fracción simple $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$ se puede escribir de forma única como

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + r(x)$$

donde $c(x) \in K[x]$ y $r(x)$, si es distinto de cero, será una fracción simple donde el grado del numerador es menos que el grado del denominador o la otra posibilidad es que sea cero.

Teorema 4.5.3.1. Teorema de descomposición

Sea $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$ con $gr(p(x)) < gr(q(x))$ y $p(x) \neq 0$. Si $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$ con $q_1(x), q_2(x)$, primos entre sí, entonces $\frac{p(x)}{q(x)}$ se descompone de forma única como:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{t_1(x)}{q_1(x)} + \frac{t_2(x)}{q_2(x)}$$

con $gr(t_i(x)) < gr(q_i(x))$ si $t_i(x) \neq 0 \forall i = 1, 2$.

El siguiente lema extiende al teorema anterior cuando el denominador se puede descomponer en el producto de n factores primos entre sí.

Lema 4.5.3.1. Sea $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$ con $gr(p(x)) < gr(q(x))$ y $p(x) \neq 0$. Si $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot \dots \cdot q_n(x)$ con $q_i(x), q_j(x)$ coprimos $\forall i \neq j$ entonces $\frac{p(x)}{q(x)}$ se descompone de forma única como:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{t_1(x)}{q_1(x)} + \frac{t_2(x)}{q_2(x)} + \dots + \frac{t_n(x)}{q_n(x)}$$

con $gr(t_i(x)) < gr(q_i(x))$ si $t_i(x) \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$.

Esta descomposición resulta de gran ayuda y tiene distintas aplicaciones, por ejemplo, en el cálculo de integrales.

4.5.4. Aplicaciones

En el cálculo de algunas integrales no se puede aplicar cambio de variable o no se resuelven de manera inmediata. Existen básicamente tres tipos de integrales de funciones racionales según el tipo de integrando. Cada tipo tiene su propio método de resolución el cual explicaremos a continuación.

Supongamos que tenemos la integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

Donde $p(x)$ y $q(x)$ son los polinomios del numerados y el denominador respectivamente. Para hacer las operaciones más sencillas suponemos que $q(x)$ es mónico. Entonces distinguimos los siguientes casos:

1. Si $gr(p) \geq gr(q)$, efectuamos la división de polinomios para poder descomponer la integral. Al efectuar la división tenemos que:

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Si dividimos la expresión por $q(x)$ obtenemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) \cdot \frac{r(x)}{q(x)}$$

De este modo, aplicando las propiedades de las integrales, la integral original se transforma en

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

2. Si $gr(p) < gr(q)$, factorizamos el polinomio $q(x)$ y al hacerlo tenemos que:

$$q(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_n)^{k_n}$$

con a_i raíces reales de $q(x)$ y k_i es la multiplicidad de la raíz a_i , es decir, el número de veces que se repite la raíz. Para calcular las raíces de los polinomios podemos aplicar la regla de Ruffini estudiada en el capítulo 4.4.

Según el Teorema Fundamental del Álgebra el cociente $\frac{p(x)}{q(x)}$ podemos expresarlo como suma de fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{(x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_n)^{k_n}} = \\ &= \frac{b_1^1}{(x - a_1)^1} + \frac{b_2^1}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{b_{k_1}^1}{(x - a_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{b_1^2}{(x - a_2)^1} + \frac{b_2^2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{b_{k_2}^2}{(x - a_2)^{k_2}} + \\ &+ \dots + \frac{b_1^n}{(x - a_n)^1} + \frac{b_2^n}{(x - a_n)^2} + \dots + \frac{b_{k_n}^n}{(x - a_n)^{k_n}} + \end{aligned}$$

donde los términos b_i^j son reales y buscaremos sus valores dando valores a x .

▪ *Ejemplo 4.5.4.1*

a) Queremos calcular la integral

$$\int \frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} dx$$

Como el grado del numerados es mayor que el del denominador, dividimos los polinomios aplicando el algoritmo de la división. Por tanto, podemos escribir el dividendo como el producto del divisor y el cociente más el resto:

$$x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10 = (x^2 - 5)(2x^3 - 2) + 0$$

Dividiendo por $q(x) = x^2 - 5$, obtenemos que calcular la integral original es equivalente a calcular.

$$\int \frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} dx = \int (2x^3 - 2) dx = \frac{x^4}{2} - 2x + C$$

b) Ahora calculamos la integral

$$\int \frac{5x - 2}{x(x - 2)} dx$$

Al ser el grado del denominador mayor que el del numerador expresamos la integral como la suma de fracciones simples:

$$\frac{5x - 2}{x(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + Bx}{x(x - 2)}$$

Por tanto, tenemos que $5x - 2 = A(x - 2) + Bx$

Para obtener las constantes A y B damos valores a x en la igualdad anterior. Si $x = 0$ tenemos que $A = 1$ y si $x = 1$ tenemos que $B = 4$. Por tanto:

$$\int \frac{5x - 2}{x(x - 2)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{4}{(x - 2)} dx = \ln|x| + 4\ln|x - 2| + C$$

Capítulo 5. Fundamentación didáctica

En este apartado se pretende indagar acerca de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que estén relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la factorización de polinomios, centrándonos en las dificultades, errores y conflictos semióticos que surgen en los alumnos, para luego hacer hincapié en ellos a la hora de desarrollar nuestra unidad didáctica, con el fin de reducirlos.

Para ello se han seleccionado dos artículos:

1. Ordóñez, C., Ordóñez, L., & Contreras, A. (2019). Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 16, 22-39.
2. Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación matemática*, 22(2), 5-34.

En el criterio de selección, ha prevalecido que la investigación estuviera relacionada con el anillo de polinomios y su factorización. El primero, (Ordóñez, C., Ordoñez, L. y Contreras, A., 2019), trata sobre la didáctica del álgebra superior centrada en la temática de la enseñanza del máximo común divisor y enmarca la factorización de polinomios dentro de la divisibilidad en los distinto dominios, con caso particular el anillo de polinomios. El segundo, (Fonseca, C., Bosh, M. y Gascón, J., 2010), se centra en la práctica matemática escolar en torno a la división sintética, también denominada regla de Ruffini, y la factorización de polinomios, mostrando que es posible ampliarla y completarla progresivamente mediante el trabajo de la técnica.

Otros de los criterios que se han tenido en cuenta para su elección es que son publicaciones de revistas de gran impacto y que se encuadran en diferentes marcos teóricos tales como el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, en el caso del primer artículo y la Teoría Antropológica de lo Didáctico en el segundo.

El estudio de estos artículos se va a realizar bajo el prisma de ir destacando las partes fundamentales que constituyen un trabajo de investigación, con el afán de aprender y no solo ver la investigación concreta realizada en ellos.

En el análisis de estos trabajos, se han ido marcando en negrita las principales partes que componen un artículo de investigación: *objetivo principal, interés de la temática y problema de investigación, antecedentes, marco teórico, metodología y, por último, resultados y conclusiones.*

El primer artículo de investigación que se ha seleccionado se titula “Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática”, publicado en la revista AIEM en 2019. Sus autores son profesores del departamento de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Jaén.

En él se realiza un estudio epistemológico del máximo común divisor cuya enseñanza va dirigida a estudiantes del Grado en Ingeniería Informática. Este estudio permite crear una herramienta de análisis didáctico para establecer una comparativa entre manuales. Así fue posible extraer carencias de significado y mostrar una tendencia en la enseñanza hacia una preeminencia de lo particular frente a lo general, fuente de conflictos semióticos potenciales.

La Didáctica del Álgebra Superior despierta gran **interés** en el investigador ya que se ha contrastado la dificultad del alumno en el aprendizaje de la materia dado el alto nivel de abstracción necesario. Los autores hacen una reflexión justificando que es un campo novedoso en Didáctica de las Matemáticas.

En cuanto a los **antecedentes** los autores los clasifican en cuatro bloques:

1. Relacionado con la divisibilidad en distintos niveles educativos anteriores (Bodí, Valls & Llinares,2005), para maestros en formación (Muñoz-Catalán & Carrillo,2007) y en álgebra superior para estudiantes de matemáticas (Hausberger,2007).
2. Dificultades de los estudiantes en torno a la demostración y el lenguaje simbólico (Recio y Godino, 2001; Camacho, Sánchez y Zubieta, 2014).
3. Enseñanza en un entorno computacional (Balacheff, 1993; Harel y Sowder, 2007).
4. Análisis de manuales universitarios (Ordóñez et al.,2015) o del programa computacional (Ordóñez et al., 2013,2014; Ordóñez et al.,2017). Otras investigaciones respecto del análisis de manuales, que utilizan también el

EOS, son Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Del Pino-Ruiz y Estepa, (2017).

El **objetivo** de esta investigación es determinar características del significado institucional del máximo común divisor mostrado en diferentes manuales de Ingeniería informática, viendo qué configuraciones epistémicas están presentes y cómo afectan a la enseñanza el uso de recursos informáticos. Para abordar dicha actividad se requiere de un **marco teórico**. En el artículo se utilizan los constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS).

La **metodología** de análisis de la actividad matemática está basada en cinco niveles (Font, Planas y Godino), aunque esta investigación solo se centra en los dos primeros que son el análisis de tipos de problema y de sistemas de prácticas, y en el quinto, idoneidad didáctica.

Al principio se hace un estudio histórico-epistemológico sobre el máximo común divisor estableciendo las distintas configuraciones epistémicas según diferentes dominios de definición. Comienza desde el dominio más general, dominio de integridad (DI), dando definiciones y propiedades generales, para observar los cambios y las diferentes configuraciones epistemológicas que se producen al ir restringiendo a los diferentes dominios. Dichas componentes de la actividad matemática se resumen en tablas (situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). El estudio se realiza en dominios de integridad (DI), dominios de factorización única (DFU), dominios de ideales principales (DIP) y dominios euclídeos (DE). El trabajo de investigación destaca que, aunque el estudio comience desde el dominio más general, en la enseñanza del máximo común divisor se hace al revés, de lo particular a lo general, provocando que el estudiante se encuentre con la ruptura de la configuración epistémica inicial y, se enfrente a un conflicto semiótico. Por ejemplo, en el caso que a nosotros nos compete, existen dominios donde la factorización de un polinomio no es única y, en general, existen tantos máximos común divisores como unidades, lo que provoca un conflicto semiótico.

En la segunda fase se analiza los significados institucionales presentes en ocho manuales universitarios recomendados para estudiantes del Grado de Ingeniería Informática de tres universidades españolas, la Universidad de Granada, la de Jaén y la Politécnica de Madrid, situadas en los primeros puestos del Ranking Académico (Shanghái) de Universidades del Mundo, en la disciplina de Ciencias de la Computación, en 2014 y 2015. El criterio de selección de los mismos se muestra muy cuidado. En el trabajo de investigación se muestra el análisis de dos manuales, M1 (Rosen,2004), y M2 (Cohn,2000).

Para comparar los dos manuales se elabora una plantilla de análisis, considerando las diferentes entidades primarias que recoge el EOS (situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y se aplica a cada manual. A continuación, se exponen los **resultados** del análisis realizado a cada manual.

El primer manual se titula “Matemática Discreta y sus aplicaciones” y se seleccionó por estar recomendado por las tres universidades elegidas. Como hechos significativos resaltan la ausencia de demostraciones para la mayoría de proposiciones, apareciendo sólo a veces alguna justificación inmediata con argumentos constructivos. El análisis didáctico muestra variedad de situaciones y lenguajes, con tareas motivadoras y se les da importancia a las aplicaciones informáticas.

El segundo manual se titula “Classic Algebra” y se recomienda en la bibliografía de la Universidad de Jaén y Granada. En él se presentan tres de las cuatro configuraciones epistémicas, que permite hacer el proceso de abstracción desde lo particular (los enteros) a lo general, DI, DFU y DE. El anillo de polinomios se obtiene como caso particular de los anteriores. En este manual existe formalismo matemático en el uso del lenguaje algebraico, sin embargo, no aparece aplicaciones a la informática. Hay un uso casi exclusivo del lenguaje deductivo y simbólico y, una ausencia de ejemplos y situaciones de aplicación que, junto al alto nivel de abstracción requerido, provoca en el alumno dificultades en el acoplamiento de significados.

El trabajo de investigación se ha podido realizar de manera unificada debido a la herramienta de análisis creada y, tras los resultados expuestos se extraen una serie de **conclusiones**. El manual 1 se centra en procedimientos y las aplicaciones informáticas tiene un papel fundamental. El manual 2 es un libro con fuertes procesos de generalización que no se utiliza en el uso de la tecnología y sus aplicaciones. La ausencia de demostraciones en M1 supone un conflicto semiótico y una enseñanza incompleta, aun así, se hace más accesible para el alumno que el M2.

Para terminar, como aplicación de esta investigación, el profesor debe de tener en cuenta que existe una fuerte tendencia hacia lo procedimental y la particularización y que el uso de la tecnología es beneficioso para trabajar el proceso de generalización.

El segundo artículo de investigación seleccionado se titula “El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios”, publicado en la revista Educación matemática en el año 2010 por investigadores de gran prestigio. El trabajo de la técnica

tiene un gran **interés** en la completación de la progresiva de la práctica matemática escolar.

El **objetivo** principal del trabajo es estudiar la OM escolar en torno a la división sintética de polinomios y proponer un posible desarrollo y completación progresiva de dicha OM, utilizando el marco teórico de la TAD.

Al principio el artículo establece los elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que es el **marco teórico** sobre el que se va a sustentar la investigación. Define qué es una organización matemática (OM), distinguiendo entre puntuales y locales y luego explica en qué consiste la completación progresiva de una OM, mostrando siete características del proceso de construcción de una OM local y siete indicadores de su grado de completitud en términos de las características de los componentes de la OM y de las relaciones entre ellos.

Los **antecedentes** que se proponen en el trabajo corresponden al marco teórico y son (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, y Fonseca 2004). No nombra otros antecedentes respecto a la división sintética y la factorización de polinomios.

En los siguientes apartados se habla de las discontinuidades matemáticas que se dan entre la Secundaria y la universidad. Por un lado, se hace un análisis de la regla de Ruffini en la Secundaria española, poniendo de manifiesto la incompletitud de la OM que se enseña, debido a la falta de cuestionamiento sobre las limitaciones de la regla de Ruffini y su uso sistemático. De existir un adecuado cuestionamiento, sería posible desarrollar una actividad matemática flexible y libre de rigidez que nos llevaría a tener OM mucho más completas. Luego se analiza la regla de Ruffini en el paso de la Secundaria a la Universidad, poniendo de manifiesto, que en la institución universitaria en vez de retomar la OM mostrando sus limitaciones, desarrollándola y completándola, se ignora por completo y se proponen nuevos métodos totalmente independientes para la resolución de ecuaciones.

En cuanto a la **metodología**, para el estudio en secundaria se utiliza el análisis de manuales de Bachillerato, quedando de manifiesto que en esta etapa la regla de Ruffini acaba teniendo un carácter autotecnológico, es decir, se propone como una técnica que no necesita justificación más allá de ver que efectivamente “funciona” y no se proponen tareas que provoquen algún tipo de conflicto y la necesidad de flexibilizar dicha técnica o de cuestionar su costo.

Respecto al estudio de la regla de Ruffini en su paso a la universidad se utiliza una metodología exploratoria en la que se propone una muestra de 128 alumnos de la

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial y de la Escuela Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad de Vigo, a los se les planteó una tarea que les pedía calcular las soluciones enteras de una ecuación de grado tres cuyo término independiente era 135. Los resultados obtenidos fueron que el 61.71% de los alumnos intentaron calcular las raíces utilizando la regla de Ruffini, el 20.31% empezaron calculando el valor numérico del polinomio para cada uno de los 16 divisores del término independiente y el 17.96% restante dejaron el blanco el ejercicio. Cabe destacar que ningún estudiante se planteó la posibilidad de que no existieran soluciones enteras, como era el caso. Esto lleva a pensar que los estudiantes aprenden a aplicar una técnica a una tarea concreta sin que existan tareas de estudio de las técnicas.

Tras esto, el propósito de los autores es mostrar que, con un adecuado cuestionamiento tecnológico, es posible desarrollar el trabajo de la técnica “regla de Ruffini” y proponen algunos desarrollos posibles. Para ello plantean una serie de tareas que surgen del cuestionamiento tecnológico de la técnica y las limitaciones que van surgiendo. Estas tareas son:

T1. Calcular las soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros que tengan todas las soluciones enteras.

T2. Resolver ecuaciones polinómicas de grado ≥ 3 con coeficientes enteros.

T3. Resolver ecuaciones polinómicas de grado 3 con coeficientes enteros que tengan, como mínimo, una solución racional. O bien ecuaciones polinómicas de grado n que tengan, como mínimo $n - 2$ soluciones racionales.

A modo de **conclusión**, el último epígrafe muestra los resultados que se han obtenido y habla de las funciones didácticas del trabajo de la técnica y sus relaciones con el resto de dimensiones del proceso didáctico. Destaca como “*el cuestionamiento tecnológico de las técnicas ha dirigido el desarrollo de éstas y recíprocamente, cómo el trabajo práctico-técnico ha originado nuevas necesidades tecnológico-teóricas*” (p.31). Así, existe una clara relación funcional entre el trabajo de la técnica y el momento tecnológico teórico.

También ponen de manifiesto que las instituciones escolares tienen una fuerte tendencia a la desarticulación y a la automatización, cuando el trabajo de la técnica es un trabajo creativo, es decir, productor de nuevas tareas que necesitan de nuevas tecnologías y técnicas.

Para finalizar, dicen que las funciones didácticas del momento del trabajo de la técnica y las discontinuidades matemáticas entre la Educación Secundaria y universitaria que se han visto en el análisis de la regla de Ruffini no son un hecho aislado, ya que para

otras OM vistas en Secundaria, lo más habitual es que la enseñanza universitaria no las retome ni las desarrolle adecuadamente y que ese es, a su entender, uno de los factores esenciales de la ruptura entre el tipo de actividad matemática que se puede llevar a cabo entre ambas instituciones.

Capítulo 6. Proyección didáctica

En las secciones anteriores nos hemos encargado de ir recopilando información con el propósito de diseñar una proyección didáctica. Por tanto, en esta sección, lo que se pretende es aplicar toda la información recogida en la fundamentación curricular, epistemológica y didáctica. Se contextualizará el centro y el aula donde se realizará la unidad didáctica, teniendo en cuenta las actividades, los recursos, la temporalización, la atención a la diversidad y la evaluación.

6.1. TÍTULO

Se va a desarrollar una unidad didáctica para la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, de tercero de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El título propuesto para dicha unidad didáctica es **“Factorización de polinomios”**.

Se ha elegido este título para enfatizar ya desde el nombre de la unidad la importancia que tiene la factorización de polinomios y sus diversas aplicaciones.

6.2. JUSTIFICACIÓN

La elaboración de la siguiente unidad didáctica es necesaria por diferentes motivos. Dentro de la rama del álgebra encontramos el estudio de la divisibilidad. Este tema se estudia prácticamente en todas las etapas educativas por sus numerosas aplicaciones.

En primer lugar, según el Real decreto 126/2014, en Educación Primaria se tienen que estudiar los múltiplos de un número con las tablas de multiplicar, los primeros múltiplos de un número determinado, los divisores de números inferiores a cien y el cálculo de máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números.

En segundo lugar, en el primer ciclo de Educación Secundaria se estudia la divisibilidad de números naturales, los criterios de divisibilidad, los números primos y compuestos, la descomposición de un número en factores primos y el máximo común

divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números. Al llegar al segundo ciclo de Educación Secundaria empieza el estudio de la divisibilidad y la factorización de polinomios.

En la sección de la fundamentación curricular, se ha hecho un análisis del currículo sobre los contenidos que se estudian en el bloque de álgebra y el primero, que es complementario al resto de bloques, del tercer curso de Educación Secundaria.

La presente unidad didáctica se ajustará a los contenidos dispuestos tanto en el Real Decreto 1105/14 como en la Orden de 14 de julio de 2016, pertenecientes al bloque 2: “Números y álgebra” de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º de ESO sobre polinomios.

Para la elaboración de dicha unidad se partirá de la base de que el alumnado presenta ciertos conocimientos previos de lenguaje algebraico y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. Tras el estudio de la unidad, el alumnado será capaz de aplicar el razonamiento matemático y de abordar situaciones cotidianas, lo que contribuirá a que se desenvuelva mejor en el ámbito social y profesional.

Desde el punto de vista interno, el estudio de los polinomios y su factorización es una rama de las matemáticas muy necesaria para los alumnos que continuarán sus estudios en Ciencias y Tecnología debido a sus diferentes aplicaciones, como puede ser el cálculo de integrales y, más tarde en titulaciones universitarias científicas e ingenierías.

6.3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA

Los contenidos de la unidad didáctica elaborada en este trabajo se pueden llevar a cabo en el centro donde realicé las Prácticas Docentes, el IES Az-Zait, sito en la ciudad de Jaén. Toda la información acerca de la contextualización del centro ha sido extraída de la página web oficial de dicho centro.

El IES Az-Zait se sitúa en la zona oeste de la ciudad de Jaén, en la Avenida de Arjona nº 3. Es un centro pequeño donde solo se imparte los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Hay matriculados 195 alumnos y el claustro está formado por 24 profesores.

El centro se sitúa entre los barrios de Peñamefécit, Santa Isabel, Av. De Barcelona y de Andalucía, Gran Eje, y el barrio de las Fuentezuelas. Estos barrios presentan un contraste entre población joven y activa, de clase media y de nivel cultural medio; y otro envejecido y de nivel cultural bajo, en paro o de cualificación baja.

Al centro se accede desde dos puertas situadas en la avenida de Arjona. Fue construido en el año 2000 y al ser un edificio “preindustrializado” con paredes de “bocadillo de pladur” existían problemas de acondicionamiento y de consistencia. Para solventar esto, de manera progresiva se han ido reforzado las paredes, se han instalado aparatos de aire acondicionado en las aulas, en la biblioteca, los talleres, el laboratorio y en los despachos. Asimismo, se instalaron también algunos radiadores, limitados por la capacidad de la caldera. El centro aún tiene pendiente reemplazar la caldera actual por una de mayor capacidad.

El exterior del edificio cuenta con dos pistas polideportivas, un patio y una zona ajardinada. El interior del edificio está formado por once aulas polivalentes de 30 puestos, dos aulas polivalentes de 34 puestos, un aula de Educación Especial Específica, un aula TIC-Música, un laboratorio de ciencias, un aula taller de tecnología y robótica, una pequeña aula TIC y una biblioteca. Asimismo, cuenta con un gimnasio cubierto con vestuario, una sala de profesorado, varios despachos, una conserjería y aseos para el alumnado y para el profesorado. La mayoría de las aulas cuentan con material TIC, principalmente proyectores para los ordenadores de los profesores y algunas pizarras digitales. También cuenta con portátiles y tablets para su uso en las aulas.

Por otra parte, el departamento de matemáticas del centro se preocupa por motivar al alumnado, despertar su interés por las matemáticas y, fomentar la curiosidad y creatividad para la resolución de problemas. Por ello, este centro es veterano en la organización y realización de actividades, tales como su participación en la Gymkhana matemática de Alcalá la Real, la Olimpiada Matemática organizada por el IES Guadalentín de Pozo Alcón, la Olimpiada Matemática organizada por la S.A.E.M Thales e IES Virgen del Carmen o su tradicional visita a la Alhambra.

En cuanto a las características socioeconómicas de las familias, una encuesta realizada en el año 2015-2016 a las familias del alumnado del centro muestran que un 47% de las familias conviven en un hogar de cuatro miembros, mientras un 30% se compone de familias de padres separados/divorciados o familias monoparentales. En cuanto a ocupación, predomina el sector servicios con un 52%, al que se suma un 10% en ocupaciones elementales o de baja cualificación, resultando que 2/3 de las familias del centro se encuentran en una situación precaria o de clase media-baja. Un tercio de

las familias se encuentran en una situación de inactividad laboral. Por tanto, al proceder de familias de nivel económico variado el alumnado presenta un perfil heterogéneo.

En cuanto a la contextualización del aula, el grupo al que iría dirigida esta unidad didáctica sería el de 3º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, el cual se ubica en el aula 8. Esta estancia es una de las más grandes del centro, ya que ha sido reformada este verano a raíz del COVID y cuenta, además de con la típica pizarra de rotulador, con pizarra digital, la cual resultará de gran ayuda a la hora de realizar las explicaciones. El grupo está compuesto por un total de 27 alumnos y alumnas que proceden de 3ºA y 3ºB, ya que en esta etapa se realiza un desdoblamiento de los cursos en la asignatura, separando las matemáticas académicas de las aplicadas. El alumnado procede de un ambiente familiar en el que se valora los estudios y es uno de los grupos que presenta mejor rendimiento académico del centro, así que se partirá de la base de que la mayor parte del alumnado tiene una buena base matemática.

Pese a su heterogeneidad, sus diferentes ritmos de asimilación y su predisposición, todos los alumnos responden a un modelo físico y psicológico acorde a su edad y ningún alumno presenta necesidades específicas. Aun así, en nuestra unidad didáctica tendremos en cuenta la atención a la diversidad. También hay que tener en cuenta que se encuentran en una etapa de grandes cambios, muy delicada, en la que además de interesarnos en la adquisición de competencias curriculares también es de vital importancia prestar atención a los problemas y dificultades que suelen presentar los alumnos en esta etapa. Es también el deber del docente resolverlos, evitando que vaya a mayores y que el alumno se disperse.

6.4. OBJETIVOS

En este apartado se definirán los objetivos, que según el RD 1105/2014 son los

“referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificada a tal fin”. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.172)

Para ello se partirá del punto de vista general dispuesto por la normativa y se irán particularizando hasta definir los objetivos concretos de nuestra unidad didáctica.

6.4.1. Objetivos generales de etapa

Los objetivos generales de etapa son aquellos que el alumnado debe de haber trabajado durante la Educación Secundaria Obligatoria y alcanzado tras la misma. Según lo dispuesto en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (pp.176-177), los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria son los siguientes:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Además de estos objetivos de etapa a nivel nacional, el Decreto 111/2016 (p.30), establece también los siguientes objetivos en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía:

- a) Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
- b) Conocer y apreciar los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad, para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

6.4.2. Objetivos del área de matemáticas

Según la Orden de 14 de julio de 2016 (p. 190) los objetivos correspondientes a las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas son:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida,

realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Objetivos concretos de la unidad

Según lo dispuesto en la normativa que hemos ido recopilado en los apartados anteriores, proponemos los objetivos concretos que el alumno debe alcanzar en nuestra unidad didáctica:

1. Plantear expresiones algebraicas a partir de situaciones en un contexto cercano.
2. Reconocer el grado y el coeficiente de un monomio.
3. Identificar qué expresiones algebraicas son o no polinomios. En caso afirmativo reconocer los coeficientes y el grado.
4. Calcular e interpretar el valor numérico de un polinomio para un valor determinado.
5. Reconocer si un número es raíz de un polinomio.
6. Realizar sumas, restas y multiplicaciones de polinomios.
7. Desarrollar y reconocer identidades notables. Realizar el proceso inverso.
8. Realizar la división euclídea de polinomios y reconoce la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto.
9. Emplear la regla de Ruffini en las divisiones por un polinomio de la forma $(x - a)$.
10. Factorizar polinomios sacando factor común, empleando identidades notables o aplicando la regla de Ruffini y reconocer las raíces.
11. Aplicar el teorema del resto para la factorización de polinomios y la detección de raíces.
12. Mostrar una actitud crítica hacia las resoluciones de los problemas, examinando los distintos caminos que pueden existir para llegar a la solución.

6.5. COMPETENCIAS CLAVE

Según el Real Decreto 1105/2014 se definen las competencias como:

“capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.172)

Los alumnos deben trabajar siete competencias clave que les permita adaptarse y enfrentarse a diferentes situaciones. Por tanto, a través de las competencias se tienen que promover los tres saberes: saber, saber hacer y saber ser.

De acuerdo a lo establecido en el Real Decreto 1105/2014 (p. 172), las competencias del currículo son las siguientes:

- a) Comunicación lingüística (CCL).
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

El desarrollo de cualquier unidad didáctica debe contribuir a la adquisición de estas competencias. A lo largo de esta unidad didáctica se realizarán actividades que permitan al alumnado el desarrollo de las competencias claves mencionadas en la materia de matemáticas, como son:

- a) *Comunicación lingüística*: Esta competencia estará presente a lo largo de toda la unidad. Se desarrollará durante las explicaciones de la profesora, a la hora de entender los enunciados de alguna situación-problema o cuando el alumnado tenga que expresarse oralmente, ya sea para preguntar dudas, desarrollar alguna actividad o trabajar en grupo.
- b) *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología*: Los ejercicios propuestos contribuyen a que el alumno asimile los significados de los nuevos objetos matemáticos y adquiera práctica en el manejo de procedimientos. También ayudan a familiarizarse con el lenguaje algebraico y a su presencia en la vida real, a la vez que aclara sus ideas, teniendo que plasmar de manera lógica y ordenada sus conocimientos.
- c) *Competencia digital*: Se pretende que el alumnado adquiera destreza en el uso de herramientas informáticas y motores de búsqueda que contribuyan en su aprendizaje. Esta competencia se intentará integrar en la unidad mediante el uso de internet para buscar información en alguna actividad o cuando sea necesario, utilizando la pizarra digital para representar funciones en Geogebra y mediante algún cuestionario online, en nuestro caso Quizziz, que permite una competición lúdica entre el alumnado usando tablets o dispositivos móviles.
- d) *Aprender a aprender*: Es bueno que el alumnado tenga consciencia de lo que conoce y desconoce. Las explicaciones de la profesora y las actividades propuestas contribuirán a la superación de los objetivos definidos y a que el

alumno adquiera las herramientas y los conocimientos necesarios con el fin de aplicarlos en una variedad de contextos.

- e) *Competencias sociales y cívicas:* Se trabajará a diario, cuando el alumno tenga que relacionarse con sus compañeros y la profesora, propiciando un buen ambiente en el aula. También en las tareas grupales cuando tenga que expresar su punto de vista y argumentarlo, sin menospreciar la de otro compañero y, al surgir discrepancias, donde tendrán que dialogar, siempre desde el respeto.
- f) *Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:* Se pretende que el alumno desarrolle la capacidad de decisión, la creatividad y la asunción de riesgos. Para ello se propondrán en nuestra unidad tareas donde el alumno tenga que establecer relaciones por sí solo que le permita avanzar hasta encontrar la solución.
- g) *Conciencia y expresiones culturales:* Conocer la herencia cultural del álgebra y de los matemáticos que han contribuido en su desarrollo llevará al alumnado a ser consciente de la importancia que tiene en nuestra vida.

6.6. CONTENIDOS

Según el Real Decreto 1105/2014 se definen los contenidos como:

“conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado”. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.172)

De este modo los conocimientos representan el saber, las habilidades y actitudes el saber hacer y, por último, las actitudes, el saber ser.

En este apartado se ofrecen los contenidos de nuestra unidad didáctica que deben estar estrechamente relacionados con los objetivos y las competencias planteadas.

6.6.1. Contenidos de la materia

En el apartado 3.1. *Análisis del currículo* se vieron los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables del bloque 1 y 2 de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º de ESO, recogidos en el Real Decreto 1105/2014.

Los contenidos del *bloque 1* a trabajar en esta unidad son:

- 1.1. *Planificar el proceso de resolución de problemas.*
- 1.2. *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.*
- 1.4. *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.*
- 1.5. *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*
- 1.6. *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico*
- 1.7. *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:*
 - a) *la recogida ordenada y la organización de datos.*
 - b) *la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.*
 - c) *facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.*
 - d) *el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.*

En cuanto al bloque 2 “Números y álgebra”, relacionados con la factorización de polinomios sólo encontramos el siguiente contenido:

- 2.10. *Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.*

Teniendo esto en cuenta, se presenta una propuesta de los contenidos que se van a trabajar en nuestra unidad didáctica, clasificándolos en contenidos conceptuales (conocimientos), procedimentales (habilidades y destrezas) y actitudinales (actitudes).

En primer lugar, consideramos los **contenidos conceptuales**, relacionados con el *bloque 2*:

- Expresiones algebraicas. Monomios.
- Polinomios. Grado, coeficiente principal y termino independiente.
- Valor numérico y raíces de un polinomio.
- Suma, resta y producto de polinomios.
- Identidades notables.
- División de polinomios.
- Regla de Ruffini.
- Factorización de polinomios. Polinomios irreducibles.
- Teorema del resto.

El estudio de las fracciones algebraicas es muy importante pero, por motivos de extensión de la unidad, se ha considerado más importante centrarse en los contenidos anteriores con el objetivo de afianzarlos, ya que el paso de la divisibilidad de naturales a polinomios quizás se da demasiado rápido y se dan muchas cosas por claras que no lo están, como no saber reconocer qué es o no un polinomio, confundir polinomio con la ecuación $p(x) = 0$ o el cálculo de raíces con el calculo de soluciones de la ecuación. Por tanto, hemos preferido ajustarnos a la fundamentación curricular, a los contenidos que establece el Real Decreto y al análisis de los libros, que como vimos no siempre aparece el estudio de las fracciones algebraicas en todos los manuales.

Para abordar los contenidos conceptuales tendremos en cuenta los siguientes **contenidos procedimentales**:

- Planteamiento de expresiones algebraicas.
- Calculo del valor numérico y las raíces de un polinomio.
- Operaciones con polinomios.
- Utilización de la regla de Ruffini.
- Búsqueda de la factorización en irreducibles de un polinomio.
- Utilización del teorema del resto.

Por último, consideramos los siguientes **contenidos actitudinales**, relacionados con el *bloque 1*:

- Planificación en el proceso de resolución de problemas
- Independencia y autonomía del pensamiento
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas
- Curiosidad en los conceptos y procedimientos con los que se actúa

- Valoración del aporte de las matemáticas a distintas áreas y situaciones de la vida cotidiana.

6.7. METODOLOGÍA

Según el Real Decreto 1105/2014 se definen la metodología didáctica como:

“conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.172)

Por tanto, lo primero que tiene que hacer un docente es reflexionar y planificar cuáles son las estrategias que llevarán al alumnado a alcanzar los objetivos planteados. También es importante hablar de metodologías en plural, que enriquezcan la unidad didáctica y permitan el desarrollo de diferentes aspectos de la competencia matemática. De no ser así, muchos alumnos caerán en el aburrimiento y acabarán por no interesarse por la asignatura.

Es importante notar que no por abarcar el mayor número de metodologías posibles la unidad va a ser “mejor” o más “innovadora”. Lo fundamental es establecer un equilibrio entre los objetivos que se quieren lograr, la metodología que se va a utilizar y, las actividades y recursos que se llevarán a cabo.

En el Decreto 111/2016 (pp. 15-16) aparecen las siguientes recomendaciones de metodología didáctica:

1. El proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral y, por ello, debe abordarse desde todas las materias de conocimiento. En el proyecto educativo del centro y en las programaciones didácticas se incluirán las estrategias que desarrollará el profesorado para alcanzar los objetivos previstos, así como la adquisición por el alumnado de las competencias clave.
2. Los métodos deben partir de la perspectiva del profesorado como orientador, promotor y facilitador del desarrollo en el alumnado, ajustándose al nivel competencial inicial de éste y teniendo en cuenta la atención a la diversidad y el respeto por los distintos ritmos y estilos de aprendizaje mediante prácticas de trabajo individual y cooperativo.

3. Los centros docentes fomentarán la creación de condiciones y entornos de aprendizaje caracterizados por la confianza, el respeto y la convivencia como condición necesaria para el buen desarrollo del trabajo del alumnado y del profesorado.
4. Las líneas metodológicas de los centros docentes tendrán la finalidad de favorecer la implicación del alumnado en su propio aprendizaje, estimular la superación individual, el desarrollo de todas sus potencialidades, fomentar su autoconcepto y su autoconfianza, y promover procesos de aprendizaje autónomo y hábitos de colaboración y de trabajo en equipo.
5. Las programaciones didácticas de las distintas materias del Bachillerato incluirán actividades que estimulen el interés y el hábito de la lectura, la práctica de la expresión escrita y la capacidad de expresarse correctamente en público.
6. Se estimulará la reflexión y el pensamiento crítico en el alumnado, así como los procesos de construcción individual y colectiva del conocimiento, y se favorecerá el descubrimiento, la investigación, el espíritu emprendedor y la iniciativa personal.
7. Se desarrollarán actividades para profundizar en las habilidades y métodos de recopilación, sistematización y presentación de la información y para aplicar procesos de análisis, observación y experimentación, adecuados a los contenidos de las distintas materias.
8. Se adoptarán estrategias interactivas que permitan compartir y construir el conocimiento y dinamizarlo mediante el intercambio verbal y colectivo de ideas y diferentes formas de expresión.
9. Se emplearán metodologías activas que contextualicen el proceso educativo, que presenten de manera relacionada los contenidos y que fomenten el aprendizaje por proyectos, centros de interés, o estudios de casos, favoreciendo la participación, la experimentación y la motivación de los alumnos y alumnas al dotar de funcionalidad y transferibilidad a los aprendizajes.
10. Se fomentará el enfoque interdisciplinar del aprendizaje por competencias con la realización por parte del alumnado de trabajos de investigación y de actividades integradas que le permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.
11. Las tecnologías de la información y de la comunicación para el aprendizaje y el conocimiento se utilizarán de manera habitual como herramientas integradas para el desarrollo del currículo.

Por tanto, lo que se pretende es enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, utilizar una metodología activa que favorezca la asimilación de los

conceptos, motivar al alumnado en su propio aprendizaje desde distintos enfoques y fomentar la interacción entre el alumnado.

En primer lugar, una de las metodologías que se usarán es la *metodología tradicional o transmisiva*, que se empleará para introducir cada uno de los objetos matemáticos a estudiar. El rol del alumno frente a esta metodología suele ser pasivo y puede llegar a resultarle tedioso, por ello es de vital importancia que el profesor en cada sesión intente llamar la atención de sus alumnos, motive los conceptos que va a explicar, ponga énfasis y pasión en lo que explica y, los haga partícipes de los ejemplos y las actividades que propone, preguntándoles y teniendo en cuenta las ideas que propongan.

La *gamificación* y el *uso de las TIC* también tendrá un papel muy importante. Se plantearán ejercicios de manera más divertida, que llamen la atención de los alumnos o con herramientas como Kahoot! o Quizziz, con las que se propician competiciones lúdicas online. Además, se propone el uso de Classcraft, un juego rol donde los alumnos están divididos en equipos y conforme ganan puntos sus personajes obtienen mejoras. El comportamiento, el trabajo y la actitud del alumno tendrá repercusión en su personaje de juego, ya que se definen categorías positivas, que hacen que el alumno gane puntos, como puede ser hacer los deberes, responder a una pregunta del profesor correctamente, ser de los tres primeros clasificados en Quizziz, etc o bien, categorías negativas, que hacen perder puntos: no hacer los deberes, mal comportamiento, etc. Así las clases se transforman en una batalla dentro de un juego de rol. Las ventajas que se obtienen es que los alumnos se ilusionan más al trabajar de esta manera, sintiendo que la metodología se adapta a su mundo, lo que provoca una mayor motivación.

También se dará importancia al *trabajo en grupo o en parejas*, ya que es esencial que los alumnos aprendan a trabajar de manera colaborativa, aportando ideas y respetando las opiniones de los demás integrantes del grupo. Se fomentará el *aprendizaje a través del diálogo y la discusión* proponiendo actividades que lleven al cuestionamiento de los alumnos, teniendo que desarrollar su capacidad para debatir y justificar sus ideas, llegando posteriormente a un acuerdo común. Este hecho es muy beneficioso, pues a lo largo de su vida tendrán que lidiar con situaciones en las que trabajarán con otras personas.

En la unidad se proponen actividades de *aprendizaje basado en la investigación*. El IBL es una metodología que expone a los alumnos situaciones de investigación abiertas y ricas, donde se fomenta el descubrimiento de relaciones y conexiones entre objetos matemáticos, en los que el alumnado es el centro del proceso de aprendizaje,

concediéndoles la máxima autonomía y libertad de pensamiento. Además, se busca la cooperación y la colaboración entre los alumnos.

Por último, se utilizará una metodología basada en la modelización matemática para la resolución de problemas encuadrados en contextos reales, lo que ayudará al alumno a comprender la importancia y utilidad de las matemáticas en nuestro día a día.

6.8. ACTIVIDADES Y RECURSOS

A continuación, se plantean las actividades y los recursos que se van a utilizar a lo largo de la presente unidad didáctica con el fin de que el alumnado alcance los objetivos y los contenidos propuestos en los apartados anteriores y además adquieran sus competencias asociadas.

6.8.1. Actividades

Una enseñanza estrictamente teórica de los contenidos no es adecuada para el aprendizaje del alumnado. La teoría debe ir acompañada de una serie de actividades prácticas que hagan que se conecten entre sí y que el alumno avance en el proceso de aprendizaje.

Luque (2021) señala que las actividades de enseñanza aprendizaje deben tener los siguientes requisitos:

- *Claridad*: los alumnos deben saber lo que se les pide.
- *Papel activo del alumno*: deben posibilitar la regulación del ritmo de ejecución y aprendizaje de cada alumno.
- *Adaptaciones individualizadas*: las actividades deben ser suficientes, equilibradas e idóneas.
- *Disfrutar aprendiendo*: carácter lúdico y motivante.
- *Consonancia con los intereses del alumno*: deben proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los alumnos.
- *Graduadas*: deben permitir un desarrollo gradual.
- *Distintas agrupaciones*: tienen que promover diferentes formas de agrupamientos de los alumnos.
- *Autonomía personal*: deben tener una coherencia interna para que el alumno guíe su aprendizaje y siga su razonamiento. Así se conseguirá aprendizajes significativos por sí solos.

Atendiendo a los tipos de actividades anteriores y las que añadimos nosotros, en nuestra unidad didáctica vamos a desarrollar las siguientes:

- Actividades para fomentar las TIC (TIC)
- Actividades de Introducción (INT)
- Actividades de motivación (MOT)
- Actividades de desarrollo (DES)
- Actividades de aprendizaje (AP)
- Actividades de consolidación (CON)
- Actividades de refuerzo (REF)
- Actividades de ampliación (AM)
- Actividades del tipo IBL (IBL)

Las tareas y las actividades propuestas para esta unidad didáctica se recogen en el **Anexo II: Actividades**. Se pueden encontrar actividades de consolidación de contenidos estudiados, de refuerzo, de ampliación, de aprendizaje basado en la investigación y actividades de aprendizaje a través del diálogo y la discusión (Standard Units).

6.8.2. Recursos

Para la consecución de los objetivos planteados en la siguiente unidad didáctica, se dispondrán de los siguientes recursos clasificados en cuatro tipos:

➤ *Materiales*

- Pizarra
- Libro de texto para completar las explicaciones
- Fichas de actividades propuestas
- Tijeras
- Calculadora

➤ *Nuevas tecnologías*

- Pizarra digital
- Ordenadores
- Tablets con conexión a internet

➤ *Personales*

- Profesores
- Alumnos

6.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Atendiendo al Real Decreto 1105/2014,

“La Educación Secundaria Obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad en esta etapa estarán orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y al logro de los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria y la adquisición de las competencias correspondientes y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y competencias y la titulación correspondiente.” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.176)

Los alumnos que con necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE) y que por tanto requieren una atención educativa diferente (p.175), sería por:

- Necesidades educativas especiales (NEE)
- Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH)
- Altas capacidades
- Incorporación tardía al sistema educativo
- Condiciones personales o de historia escolar

Corresponde a las Administraciones educativas regular las medidas de atención a la diversidad (p.181), entre las que se encuentran:

- Adaptación del currículo
- Integración de materias en ámbitos
- Agrupamientos flexibles
- Apoyo en grupos ordinarios
- Desdobles de grupos
- Oferta de materias específicas
- Programas de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento
- Otros programas personalizados para el alumno con necesidades específicas de apoyo educativo.

En primer lugar, la profesora necesitará conocer el nivel de cada alumno. Para ello al inicio de la unidad deberá realizar actividades para saber el conocimiento previo del alumnado. Tras conocerlo deberá adaptar las actividades hasta adecuarse al nivel educativo de los alumnos que lo necesiten. En las actividades en parejas o en grupo deberá formar grupos heterogéneos en base a la diversidad del aula.

Por tanto, la labor de la profesora en esta unidad didáctica es que, independientemente de las necesidades educativas del alumno, todos alcancen los objetivos mínimos.

En la clase que habíamos tomado como referencia no había niños con necesidades específicas de apoyo educativo, por tanto, las actividades propuestas en el Anexo II son accesibles para todos. Aún así, en dicho anexo se proponen algunas actividades de refuerzo y otras de ampliación.

6.10. TEMPORALIZACIÓN

Según el artículo 13 del Decreto 111/2016 de 14 de junio, para el curso de 3º de ESO, la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas dispone de 4 sesiones semanales, cada una de 1 hora. En principio, para el desarrollo de la unidad didáctica elegida vamos a necesitar un total de doce horas lectivas, aunque deberá adaptarse a las necesidades del alumno. Once sesiones se utilizarán para el desarrollo de la unidad y en la última sesión se realizará una prueba escrita individual.

A continuación, se presenta una posible temporalización de nuestra unidad, ya que esta debe ir adaptándose a las necesidades del alumnado. En cada tabla aparecen los objetivos, los contenidos, los criterios y las competencias que se trabajaran en dicha sesión.

Los objetivos que se recogen son los específicos de esta unidad que se encuentran en la p.68 de este trabajo, los contenidos a trabajar del bloque 1 y 2 son los que se plantean en la p.71, los criterios se ubican en el apartado 6.11.1 *Criterios de Evaluación* y las competencias son las que recoge el Real Decreto.

Además, en cada tabla aparece de forma esquematizada el desarrollo de cada sesión y las actividades recogidas en el Anexo II que se proponen para alcanzar las competencias convenientes.

SESIÓN 1	
Objetivos: 1, 12	Criterios: CE.1.8, CE.1.11, CE.2.3.
Contenidos: 1.4, 1.7, 2.10	Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP, CEC
<u>Desarrollo:</u>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ Presentación y motivación de la unidad: 	

- *Actividad 1.* Investigación histórica. (30 min)
- *Actividad 2.* Matemagia. Reto inicial. (15 min)
- **Repaso de traducción de enunciados a lenguaje algebraico.**
- *Actividad 3.* ¿Quién tiene...? Yo tengo... (15 min)

SESIÓN 2

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 13

Criterios: CE.1.2, CE.1.6, CE.2.3.

Contenidos: 1.2, 1.5, 2.10

Competencias: CMCT, CAA

Desarrollo:

- **Monomios**
 - Clase magistral en pizarra del concepto de variable o incógnita, monomio, coeficiente, parte literal, grado y monomios semejantes. *Actividad 4.* (15 min)
- **Polinomios**
 - El concepto de polinomio se hará a partir de la *Actividad 5* (15min)
 - *Actividad 6* para reconocer qué es y qué no un polinomio. (10 min)
 - A partir de los polinomios de la *Actividad 6* se definirán los conceptos de grado, coeficiente líder, término independiente, valor numérico y raíz. (20 min)
 - Para afianzar los contenidos vistos se mandará para casa la *Actividad 7.*

SESIÓN 3

Objetivos: 6

Criterios: CE.1.2, CE.2.3

Contenidos: 1.2, 2.10

Competencias: CMCT, CAA, CSC

Desarrollo:

- **Dudas y correcciones**
 - La clase comenzará preguntando quién ha hecho los ejercicios. Después se preguntará si existen dudas del día anterior y se corregirá la actividad que se dejó planteada. (10 min)
- **Operaciones con polinomios**
 - *Actividad 8.* Introducir la suma y resta de polinomios. (10 min)
 - Explicación de cómo se suman, se restan y se multiplican polinomios en pizarra. Ejemplos. (25 min)
 - *Actividad 9.* Practicar suma y producto de polinomios. (15 min)
 - *Actividad 10.* para casa.

SESIÓN 4	
Objetivos: 6, 12, 13	Criterios: CE.1.2, CE.1.11, CE.2. 3
Contenidos: 1.2 ,1.7, 2.10	Competencias: CMCT, CAA, CD
<u>Desarrollo:</u>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ Dudas y corrección <ul style="list-style-type: none"> - La sesión empieza tomando nota de quien no ha hecho los ejercicios. Se preguntan las dudas que hayan surgido. Se selecciona con Classcraft alumnos para corregir en la pizarra. (15 min) - Se muestra a los alumnos en la pizarra digital una calculadora online que permite operar polinomios. Así ellos pueden comprobar los resultados cuando estudien en casa. (10 min) https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0453-02/ed99-0453-02.html ○ Refuerzo de operaciones con polinomios o ampliación <ul style="list-style-type: none"> - <i>Actividad 11.</i> (20 min) ○ Quizziz. Repaso de todos los contenidos. (15 min) 	

SESIÓN 5	
Objetivos: 7, 12, 13	Criterios: CE.1.2, CE.1.3, CE.1.6, CE.1.11, CE2. 3
Contenidos: 1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 2.10	Competencias: CMCT, CAA, CD, SIEP, CSC
<u>Desarrollo:</u>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ Identidades notables <ul style="list-style-type: none"> - <i>Actividad 12.</i> Rompecabezas. (30 min) - Para construir la definición de las otras identidades notables se proyectará en la pizarra digital simulaciones hechas en Geogebra. (15 min) https://www.geogebra.org/m/gKVuThNN - La profesora recopilará lo visto hasta ahora de identidades notables y hará algunos ejemplos en la pizarra. (15 min) - <i>Actividad 13 y Actividad 14</i> para casa. 	

SESIÓN 6	
Objetivos: 8	Criterios: CE.1.2, CE.1.4, CE2.3
Contenidos: 1.2, 1.6, 2.10	Competencias: CMCT, CAA, CCL, SIEP, CSC

Desarrollo:

- **Corrección ejercicios día anterior**
- Se tomará nota de quien ha hecho los ejercicios y con Classcraft se seleccionarán alumnos para que corrijan la actividad. (10 min)
- **División de polinomios:** La profesora explica cómo se dividen polinomios y hace varios ejemplos en la pizarra pidiendo la ayuda de los alumnos en algunos momentos particulares. Resaltar cuando un polinomio es *divisible* por otro (25 min)
- *Actividad 15.* Posteriormente un alumno saldrá a la pizarra para resolverla e irá explicando a sus compañeros los pasos que ha ido siguiendo. (25 min).

SESIÓN 7

Objetivos: 9, 11, 13

Criterios: EA. 1.1.1, EA.1.2.3, EA.1.6.3, CE2.3

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.6, 2.10

Competencias: CMCT, CAA

Desarrollo:

- **Regla de Ruffini**
- La profesora explicará en qué consiste la regla de Ruffini y remarcará los casos en los que se puede utilizar. Aprovechará el último apartado de la *Actividad 15* donde se puede aplicar Ruffini con la Regla de Ruffini para identificar los coeficientes que se obtienen y verificar que se obtiene el mismo resultado. (20 min)
- *Actividad 16.* (15 min)
- **Teorema del resto y del factor**
- Se calcular el valor numérico del apartado c de la *Actividad 15*. ¿Coincide con el resto que encontramos con la división y la regla de Ruffini? Se enunciarán los teoremas. (15 min)
- *Actividad 17* para casa. Se empieza a hacer en clase.

SESIÓN 8

Objetivos: 5, 10, 13

Criterios: CE.1.2, CE.1.3, CE.2.3

Contenidos: 1.2, 1.6, 2.10

Competencias: CMCT, CAA

Desarrollo:

- **Polinomios irreducibles y raíces**

- Se explicará en qué consiste la factorización de polinomios haciendo la analogía con la factorización en primos de los números naturales. También se dará el concepto de polinomio irreducible en un anillo. (20 min)
- *Actividad 18.* Cálculo de raíces. (15 min)
- **Factorizar sacando factor común e identidades notables**
- Se harán ejemplos en la pizarra de como se factoriza sacando factor común e identidades notables. (20 min)
- *Actividad 19.* Se empieza en clase y se termina en casa

SESIÓN 9	
Objetivos: 9, 11, 13	Criterios: CE. 1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE2.3
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.6, 2.10	Competencias: CMCT, CAA
<u>Desarrollo:</u>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ Corrección ejercicios - La sesión empieza tomando nota de quién no ha hecho los ejercicios. Se preguntan las dudas que hayan surgido. Se selecciona con Classcraft alumnos para corregir en la pizarra. (15 min) ○ Factorizar aplicando Ruffini - La profesora explicará y hará ejemplos en la pizarra de cómo se factoriza aplicando la Regla de Ruffini. (20 min) - <i>Ejercicio 19.</i> Cluedo de polinomios. (25 min) ○ Ficha de repaso para el examen - Se fijará la fecha del examen y la profesora subirá a Classroom una batería de ejercicios resueltos de los diferentes contenidos vistos para que los alumnos puedan reforzar lo que necesiten. 	

SESIÓN 10	
Objetivos: 3, 5, 9, 10, 12, 13	Criterios: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3.CE.1.6, CE2.3
Contenidos: 1.1, 1.2, 1,6, 1.7, 2.10	Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP, CD, CCL
<u>Desarrollo:</u>	
<ul style="list-style-type: none"> ○ Tarea del tipo Standars Units 	

- *Actividad 20.* "A11 Factorising cubics" para desarrollar estrategias para la factorización de funciones cúbicas (1 hora)

SESIÓN 11

Objetivos: 1, 5, 6, 7, 10, 13

Criterios: CE.1.2, CE.1.3, CE.1.7, CE2.3

Contenidos: 1.2, 1.6, 2.10

Competencias: CMCT, CAA, CCL, CSC

Desarrollo: Esta sesión se llevará a cabo el día anterior al examen

- **Resolver dudas y reto inicial**
 - La profesora preguntará quién sabría explicar el reto inicial que se propuso en la primera sesión. Seleccionará a un alumno que tendrá que explicárselo al resto de compañeros (15 min)
 - Dudas sobre el tema o sobre la relación de ejercicios que se propuso en la Sesión 9.
- **Ejercicios de repaso y ampliación**
 - *Actividad 21.* Ejercicios de repaso de lenguaje algebraico, operaciones con polinomios, reconocer si un polinomio es irreducible y en caso contrario factorizarlo.
 - *Actividad 22.* Ampliación. Se propondrán ejercicios para aplicar la factorización de polinomios en el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios y

SESIÓN 12

Objetivos: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13

Criterios: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.6., CE2.3

Contenidos: 1.2, 1.3, 2.10

Competencias: CLL, CMCT, SIEP

Desarrollo:

- **Evaluación de la unidad**
 - Se realizará una prueba escrita para valorar si el alumno ha alcanzado los objetivos propuestos en la unidad. La prueba se realizará de forma individual. (1 hora)

6.11. EVALUACIÓN

La importancia de la evaluación no reside sólo en el hecho de otorgar una calificación al alumno, sino que sirve de base para identificar la evolución del alumnado, orienta sobre su avance y al mismo tiempo permite la toma de decisiones que ayuden a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Según lo dispuesto en la Orden de 14 de julio de 2016,

“la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado será continua, formativa, integradora y diferenciada según las distintas materias del currículo” (Consejería de Educación (2016), p.114)

A la hora de evaluar se tiene que tener en cuenta dos cosas, qué queremos evaluar y cómo lo vamos a hacer, es decir, los criterios y las herramientas de evaluación.

En cuanto a los procedimientos, técnicas e instrumentos de evaluación, la Orden de 14 de julio de 2016 establece que:

“El profesorado llevará a cabo la evaluación, preferentemente, a través de la observación continuada de la evolución del proceso de aprendizaje de cada alumno o alumna y de su maduración personal en relación con los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria y las competencias clave. A tal efecto, utilizará diferentes procedimientos, técnicas o instrumentos como pruebas, escalas de observación, rúbricas o portfolios, entre otros, ajustados a los criterios de evaluación y a las características específicas del alumnado.” (Consejería de Educación (2016), p.114)

6.11.1. Criterios de evaluación

Según el Real Decreto 1105/2014 los criterios de evaluación:

“son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.172)

En el apartado 3.1 *Análisis del currículo*, se vieron los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje asociados que se establecen para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º de ESO.

Teniendo en cuenta el bloque de “Números y álgebra” y el bloque primero a partir del cual se pretende desarrollar procesos, métodos y actitudes matemáticas, a

continuación, se muestran los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que nos interesan para evaluar esta unidad didáctica

UNIDAD 5- FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.

- EA. 1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.

CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

- EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- EA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
- EA.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.

CE.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.

- EA.1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- EA.1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.

CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.

- EA.1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
- EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.

CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos o geométricos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.

- EA1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
- EA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- EA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.

- EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.

CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.

- EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
- EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

- EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos o algebraicos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

- EA.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos o algebraicos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.

CE.2.3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola

- EA.2.3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.
- EA.2.3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.
- EA.2.3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.

6.11.2. Calificación

Tras definir los criterios y los estándares de evaluación ahora falta establecer cómo se van a evaluar, es decir, cuáles son las herramientas que se van a utilizar. A continuación, se muestra las ponderaciones propuestas para las distintas tareas desarrolladas por el alumnado a lo largo de la unidad:

- **Prueba escrita (60%):** En la última sesión de la unidad, la Sesión 12, se realizará una prueba escrita individual donde se valorarán los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad por el alumnado. Esta prueba se incluye en el Anexo III junto a su rúbrica.
- **Actitud y trabajo diario (20%):** En esta parte se valorará que el alumno adopte una actitud positiva en la materia y que no influya negativamente en el aprendizaje de sus compañeros. También se valorará el trabajo y el esfuerzo del alumno, tanto en clase como en casa. Para su evaluación se utilizará la rúbrica reflejada en la *Tabla 1* que se encuentra en el Anexo III.
- **Participación en clase (10%):** Se evaluará que el alumno se involucre y participe en las actividades que se planteen en clase, así como que exponga sus dudas y se presente voluntario en la resolución de cualquier actividad. Se seguirá la rúbrica reflejada en la *Tabla 2* ubicada en el Anexo III.
- **Trabajo en parejas o grupos (10%):** se evaluará el papel del alumno en las actividades con compañeros. Se valorará positivamente que aporte ideas, que respete la de los demás y que tenga una buena actitud. Se seguirá la rúbrica reflejada en la *Tabla 3* ubicada en el Anexo III.

Capítulo 7. Conclusiones

En el *Capítulo 2* se especificaron los *objetivos* que se pretendían alcanzar con la elaboración de este trabajo. El *objetivo principal* era aplicar los conocimientos adquiridos en el máster para diseñar una unidad didáctica sobre factorización de polinomios en 3º de ESO, para lo cual se debía describir y analizar la enseñanza y aprendizaje de esta temática. Dicho objetivo se desglosó en seis subobjetivos, de modo que la consecución de estos implica a su vez la del objetivo principal. A continuación, se irá comentando qué pasos se han realizado para lograr dichos subobjetivos y se proporcionarán las conclusiones finales extraídas en este trabajo.

Para el primer subobjetivo

O1. Poner en práctica los conocimientos adquiridos en el máster y aplicarlos al estudio de la factorización de polinomios en Educación Secundaria Obligatoria, concretamente en el tercer curso,

las diferentes asignaturas del máster cursado nos han permitido adquirir un amplio conocimiento al respecto. Por un lado, en el módulo general, se aprendió a interpretar la legislación educativa vigente y la estructura del Sistema Educativo Español, adquirir formación básica sobre los fundamentos psicológicos de los procesos de aprendizaje y desarrollo de los adolescentes y, comprender el enfoque pedagógico y sociológico en la educación. En el módulo específico, se amplió los conocimientos matemáticos, se vio la dimensión curricular en matemáticas y las diferentes teorías de aprendizaje, metodologías y recursos, elementos imprescindibles en la elaboración de nuestra unidad didáctica.

El segundo subobjetivo

O2. Realizar un análisis del currículo escolar y en qué cursos se ubican los contenidos sobre factorización de polinomios

se ha alcanzado en el *Capítulo 3* donde se han localizado los contenidos en 3º de ESO y se han desarrollado a nivel estatal y autonómico.

Por otro lado,

03. Analizar, utilizando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, la forma en que dos libros de texto, de diferentes editoriales, abordan dichos contenidos y establecer una comparativa entre ellos,

el EOS ha proporcionado un instrumento muy útil, como son las seis entidades primarias. También en el *Capítulo 3* se obtuvieron una serie de conclusiones tras el análisis y la comparativa. En ambos manuales se prestaba más atención al estudio de los procedimientos que en la profundización de conceptos, así no se llegaba a entender el concepto de factorización ni de polinomio irreducible. Así mismo no era posible establecer relaciones con la descomposición en primos estudiada en cursos anteriores. Además, en la mayoría de los ejercicios se trabajaba de manera mecánica sin proponerse situaciones de problematización y de aplicación.

En cuanto a

04. Desarrollar los contenidos curriculares relacionados con la factorización de polinomios en Educación Secundaria a partir de uno de los temas que se incluyen en el temario de oposiciones al Cuerpo de Profesores de Secundaria,

el *Capítulo 4* nos ha permitido profundizar y establecer los significados institucionales de referencia en esta temática, poniendo de manifiesto las relaciones entre primo e irreducible y la unidad en la factorización, así como ha surgido el concepto de asociado relacionado con la unicidad de irreducibles, máximo común divisor, etc.

Para alcanzar

05. Analizar varias investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre el anillo de polinomios e identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de esta temática,

en el *Capítulo 5* se seleccionaron investigaciones relacionadas con el anillo de polinomios, se realizaron las partes más importantes de dichos artículos y se extrajeron una serie de conclusiones. En cuanto al análisis de manuales, del primer artículo se vio que la ausencia de demostraciones supone conflictos semióticos y una enseñanza que puede dar lugar a conflictos y errores en el aprendizaje, más accesible o cómoda. También se puso de manifiesto que el profesor debe tomar conciencia de la tendencia a lo procedimental y la particularización, frente a los procesos de generalización que son inherentes al estudio del álgebra y la matemática, en general.

En el segundo artículo se observó que cuando en un proceso didáctico se recupera una técnica aprendida anteriormente para utilizarla en una nueva se hace de manera rígida, aunque en la enseñanza universitaria se disponga de los elementos tecnológicos para flexibilizarla. Además, el tipo de tareas matemáticas que aparecen en la enseñanza secundaria en torno al cálculo de raíces de un polinomio aparece como tareas puntuales, aisladas y rígidas. Así, se llegó a la conclusión de que las actividades deben suscitar un buen cuestionamiento y que el trabajo de la técnica debe ser un trabajo “creativo”, productor de nuevas tareas que necesiten de nuevas tecnologías y técnicas.

Por último, en relación con

O6. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje durante el diseño de la unidad didáctica la factorización de polinomios en el tercer curso de Educación Secundaria,

en el *Capítulo 6* se ha recogido todas las conclusiones de los capítulos anteriores y se ha propuesto una unidad didáctica con actividades que resulten más llamativas y amenas, a la vez que generen cuestionamientos y permitan flexibilizar la técnica, haciendo hincapié en la profundización de los conceptos para que el alumno entienda que hace más allá de la realización de un simple proceso mecánico y atendiendo siempre a diferentes metodologías que enriquezcan el aprendizaje.

Tras la realización de esta memoria, la cual es la culminación del máster, podría realizar un balance positivo de todas las herramientas adquiridas. Me he dado cuenta de que hay muchas cosas que se dan por sabidas cuando se comienza el estudio de la factorización de polinomios y de que no nos debemos quedar en lo procedimental, sino que el docente debe ahondar en los conceptos para que los alumnos entiendan lo que se está haciendo. También he comprendido que la enseñanza de las Matemáticas requiere de una sólida formación en Didáctica, ya que el proceso de enseñanza y aprendizaje es algo complejo. Así el docente debe estar en constante formación para poder transmitirle a sus alumnos, de la manera más adecuada posible, que las matemáticas forman parte de nuestro día a día y de la belleza que llevan consigo.

Referencias bibliográficas

- Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Pérez, A., Estebaranz, J., & Manuel, V. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Savia Nueva Generación. Andalucía.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J., y Colera, R. (2020) *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3 ESO*. Suma piezas. Grupo Anaya.
- Consejería de Educación (2016). *Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado*. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, no 144: 108-396. Recuperado el 26/05/2021 de <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/BOJA16-144-00479.pdf>
- Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación matemática*, 22(2), 5-34.
- García, M. (2021). *Apuntes de la asignatura Aprendizaje y enseñanza I en matemáticas*. Docencia Virtual. Universidad de Jaén
- Garzón, A. R. (2015). *Apuntes de la asignatura Álgebra I*. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, 237(2/3)-284.
- Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. Recuperado el 22 de mayo de 2021 de http://enfouqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M.M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 22 de mayo de 2021 de <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- IES Az-Zait (2020). *Plan de Centro Curso 2019/2020*. Jaén.
- Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. (Alfonso Casal et al., trad.). Madrid: Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1972)
- Luque, L. (2021). *Apuntes de la asignatura Aprendizaje y enseñanza I en matemáticas*. Docencia Virtual. Universidad de Jaén
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (37)*. Recuperado el 26 de mayo de 2021 de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Miranda, E. *Anillos de Polinomios*. Universidad de Granada. Recuperado el 15 de mayo de 2021 de <https://www.ugr.es/~bullejos/Algl/polinomios.pdf>
- Ochoviet, C. (2014). De la Resolución de Ecuaciones Polinómicas al Algebra Abstracta: un Paseo a Través de la Historia. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 8(1). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v8i1.2049>
- Ordóñez, C. (2018). *La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en algebra superior medida por un entorno informático* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Jaén, España. Recuperado el 22 de mayo de 2021 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_COrdones.pdf
- Ordóñez, C., Ordóñez, L., & Contreras, A. (2019). Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 16, 22-39.
- Sessa, C. (2005). *Introducción al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

ANEXO I. Generalidades de factorización en anillos

Para abordar el estudio del anillo de los polinomios y de su factorización, que es el tema principal en el que se centra este trabajo, antes tenemos que ver algunas nociones de anillos en general.

Definición 1. Sea A un conjunto no vacío y sean $(+)$ y (\cdot) , suma y producto respectivamente, dos operaciones internas definidas sobre A . Se dice que A tiene estructura de **anillo** respecto a las operaciones $(+)$ y (\cdot) , o bien que $(A, +, \cdot)$ es un anillo si y solo si:

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano
 - i.1. La suma es asociativa, $\forall a, b, c \in A, (a + b) + c = a + (b + c)$
 - i.2. Existe elemento neutro, $\exists 0 \in A / a + 0 = a = 0 + a, \forall a \in A$
 - i.3. Existe elemento simétrico, $\forall a \in A, \exists b \in A / a + b = 0 = b + a$
 - i.4. La suma es conmutativa, $\forall a, b \in A, a + b = b + a$
- ii) (A, \cdot) verifica que
 - ii.1. El producto es asociativo, $\forall a, b, c \in A, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- iii) Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma,
 $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Definición 2. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un anillo es **unitario** si existe elemento neutro para el producto, es decir, $\forall a \in A, \exists 1_A \in A / a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$.
Lo notaremos $(A, +, \cdot, 1_A)$.

Definición 3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un **anillo** es **conmutativo** si el producto es conmutativo, es decir, $\forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$.

Si un anillo es conmutativo y además tiene elemento neutro para el producto lo llamaremos anillo conmutativo unitario.

Definición 4. Sea A un anillo. Un elemento $a \in A$ se llama una **unidad** de A si existe $u \in A$ tal que $a \cdot u = 1_A$ y $u \cdot a = 1_A$.

El conjunto de las unidades de A se denotará $U(A)$ que tiene estructura de grupo con la operación producto. Cuando el grupo de unidades es lo mayor posible, y el anillo es conmutativo y no trivial, tenemos un cuerpo.

Definición 5. Un anillo conmutativo no trivial A es un **cuerpo** si $U(A) = A \setminus \{0\}$.

Definición 6. Sea $a \in A, a \neq 0$. Se dice que a es **divisor de cero**, si $\exists b \in A, b \neq 0 / a \cdot b = 0$.

Para el estudio de la divisibilidad comenzamos desde el dominio más general, dominio de integridad, y estableciendo definiciones y proposiciones de la forma más genérica, para después ir restringiendo a otros dominios y ver que cambios se producen.

Definición 7. Por un **dominio de integridad**, DI, entendemos un anillo conmutativo no trivial sin divisores de cero, es decir, si $ab = 0$ para $a, b \in A$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

A partir de ahora denotaremos por D a un dominio de integridad.

Definición 8. Sea A un anillo. Un subconjunto $I \subset A$ se llama **subanillo** si I con las operaciones del anillo es de nuevo un anillo.

Proposición 1. Cada subanillo de un dominio de integridad es dominio de integridad.

Definición 9. Sea A un anillo. Un subconjunto I de A es un **ideal** de A si:

- i) $(I, +)$ es un subgrupo de $(A, +)$.
- ii) para todo $a \in A$ y $x \in I$ se verifica que $a \cdot x \in I$ y $x \cdot a \in I$.

Los ideales generados por un único elemento del anillo, $\langle r \rangle$ se llaman ideales principales. Es decir, todo elemento $x \in I$ se puede escribir como $x = sr$.

Definición 10. Un dominio de integridad es **dominio de ideales principales** o DIP de manera abreviada, si todo ideal I del anillo es principal.

- *Ejemplos.*

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, dominio de integridad, pero no cuerpo.
2. \mathbb{Z}_n es un anillo conmutativo, pero, en general, no es DI. Si n es primo será un DI.

3. \mathbb{Z}_p es cuerpo, con p primo
4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son cuerpos.
5. Los ideales generados por 2 , $\langle 2 \rangle$, son los múltiplos de 2 .
6. \mathbb{Z} es un DIP.
7. $U(\mathbb{Z}) = \{+1, -1\}$, $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \{0\}$, $U(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{a}; (a, n) = 1\}$.

Definición 11. Sea $a, b \in D$. Decimos que **a divide a b** , a es divisor de b o que b es múltiplo de a y lo denotamos $a|b$, si $\exists c \in D$ tal que $a \cdot c = b$.

Si $a|b$ pero $b \nmid a$ entonces decimos que a es un **factor propio** de b .

Proposición 2. Dados $a, b \in D$, las siguientes condiciones son equivalentes.

- i) $a|b$ y $b|a$
- ii) Existe $u \in U(D)$ tal que $a = ub$
- iii) $\langle a \rangle = \langle b \rangle$

Definición 12. Dos elementos $a, b \in D$, se dicen **asociados** si satisfacen cualesquiera de las condiciones equivalentes de la proposición anterior. Usaremos la notación $a \sim b$.

Definición 13. Un elemento a de D se dirá **irreducible** si $a \neq 0$ y $a \notin U(D)$ es un elemento irreducible si $a = bc$, con $b, c \in D$, se tiene que o bien $b \in U(D)$, o bien $c \in U(D)$.

Definición 14. Se dice que $p \in D$, $p \neq 0$ y $p \notin U(D)$ es **primo** si $p|ab$ entonces $p|a$ o bien $p|b$.

Proposición 3. Si un elemento es irreducible entonces sus asociados son irreducibles.

Proposición 4. Si $p \in D$, $p \neq 0$ y p es primo entonces p es irreducible.

El recíproco de la proposición anterior no siempre es cierto. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 3 es irreducible pero no primo, ya que $9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ y $3|9$ pero no a $(2 + \sqrt{-5})$ ni a $(2 - \sqrt{-5})$.

Definición 15. Dados $a, b \in D$ un elemento $d \in D$ se dice que es un **máximo común divisor** de a y b si verifica:

- i) $d|a$ y $d|b$
- ii) si $c \in D$ tal que $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$.

Si d y d' son mcd de a y b entonces $d \sim d'$. Por tanto, el máximo común divisor es único salvo asociados.

Al máximo común divisor de a y b lo notamos (a, b) .

En un DI cualquiera puede que dos elementos no tengan *m. c. d.* En $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no existe $(6, 2(1 + \sqrt{-5}))$

Definición 16. Si $a, b \in D$ tal que $(a, b) = 1$ (unidad), se dice que a y b son **primos relativos**.

Definición 17. Sea $a, b \in D$. Un elemento $m \in D$ se dice que es un **mínimo común múltiplo** de a y b , $[a, b]$, si:

- i) $a|m$ y $b|m$
- ii) si $c \in D$ tal que $a|c$ y $b|c$ entonces $m|c$.

El *m. c. m.* es único salvo asociados y no tiene por que existir siempre.

Proposición 5. Sea D un DI y sean $a, b \in D$ tal que $a, b \neq 0$. Entonces
$$(a, b)[a, b] = ab$$

Que proporciona un método para calcular el máximo común divisor a través del mínimo común múltiplo.

Definición 18. Un DI es un **dominio de factorización única**, DFU, si todo elemento que no es una unidad ni nulo tiene una única factorización en elementos irreducibles.

Proposición 6. En un DFU existe máximo común divisor y mínimo común múltiplo y además se tiene que un elemento es primo si y solo si es irreducible

Teorema 1. Todo DIP es un DFU

Definición 19. Un dominio de integridad es **dominio euclídeo**, DE, si existe una aplicación llamada función euclídea, $\delta: D - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, que verifica:

$$\delta(ab) = \delta(a)\delta(b) \quad \forall a, b \in D - \{0\}$$

$$\forall a, b \in A \text{ si } b \neq 0, \exists q, r \in A \text{ tal que } a = bq + r, \text{ donde } \delta(r) < \delta(b) \text{ o } r = 0$$

Teorema 2. Si D es DE, entonces todo ideal de D es principal.

Corolario 1. Si D es DE. Entonces existe *m. c. d* de cada par de elementos y además si $d = m. c. d(a, b)$ existen $u, v \in D$ tales que $d = ua + vb$. La expresión anterior se llama **Identidad de Bezout**.

Teorema 3. Si D es un DE es un DFU.

Las implicaciones existentes entre los diferentes dominios podemos verla en la siguiente figura (Ordóñez, 2018, p.66), no verificándose el recíproco en cada implicación.



Figura 1. Implicaciones entre dominios

Proposición 7. Sean $a, b, q, r \in A - \{0\}$ tales que $a = bq + r$. Entonces:
 $(a, b) = (b, r)$.

Teorema 4. Algoritmo de Euclides.

Sean $a, b \in A - \{0\}$

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1; & 0 \leq r_1 < |b| \\ b = r_1q_2 + r_2; & r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3; & r_3 < r_2 \\ \dots & \dots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n; & r_n < r_{n-1} \\ \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1}; & \end{array}$$

Entonces:

- Si $r_1 = 0$, entonces b es divisor de a y, obviamente, $m. c. d(a, b) = b$.
- En otro caso, el máximo común divisor de a y b es el último resto no nulo r_n , pues $m. c. d(a, b) = m. c. d(b, r_1) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$

El algoritmo que acabamos de describir queda reflejado en la figura 2.

Cocientes	q_1	q_2	q_3	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
	a	b	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}
Restos	r_1	r_2	r_3			r_n	0

$r_n = m. c. d(a, b)$

Figura 2. Regla práctica para calcular el $m. c. d$

- Ejemplos

1. En \mathbb{Z} , 2 y -2 son asociados.
2. \mathbb{Z} es un DFU.
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es DFU ya que por ejemplo 6 tiene dos factorizaciones en irreducibles diferentes, $6 = 2 \cdot 3$ y $6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$.
4. En \mathbb{Z} los irreducibles son los números primos. En \mathbb{Z} los primos son p y $-p$. Por ejemplo, 2 y -2 son primos por ser 1 y -1 las unidades de \mathbb{Z} .
5. En el anillo de polinomios todos los asociados a ese elemento son irreducibles.
6. \mathbb{Z} es un DE con la función euclídea valor absoluto. En el anillo de los polinomios será el grado.
7. $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ es un DE para $n = -1, -2, -2, -3$.
8. Para calcular el $m. c. d(1887, 984)$ en \mathbb{Z} aplicamos el Algoritmo de Euclides.

	1	1	11	6	1	3
1887	984	903	81	12	9	3
903	81	12	9	3	0	

Como sabemos, el máximo común divisor es el último resto distinto de cero, por tanto, $m. c. d(1887, 984) = 3$. Para calcular el mínimo común múltiplo de 1887 y 984 aplicamos el Teorema 5.

$$(a, b)[a, b] = ab \Rightarrow 3[a, b] = 1887 \cdot 984$$

Por tanto, $[a, b] = 618936$.

ANEXO II. Actividades

Actividad 1. Investigación histórica

- *Objetivo:* investigar sobre la historia de las matemáticas
- *Tipo:* MOT, TIC
- *Modalidad:* grupos de 4 personas
- *Materiales:* ordenadores o tablets

Buscar en internet, en grupos de cuatro personas, información sobre el matemático que se os asigne.

En grupos de 4 personas los alumnos deben buscar en internet información sobre el matemático que les ha asignado la profesora (Euclides, Diofanto, Al- khwarizmi, Tartaglia, Cardano, Ruffini y Noether), indagando en sus aportaciones al álgebra. Se les pedirá que elaboren un pequeño resumen y que después cada grupo ponga en común con el resto lo que han averiguado. La idea es elaborar un póster con esa información sobre la evolución del álgebra a lo largo de la historia.

Actividad 2. Matemaqia. Reto inicial

- *Objetivo:* captar la atención de los alumnos y motivar la unidad
- *Tipo:* INT, MOT
- *Modalidad:* toda la clase
- *Materiales:* ninguno

“Pensad un número cualquiera y multiplicadlo por 3. Al resultado sumadle 8, y a continuación sumadle el número que habéis pensado al inicio. Dividid el valor que habéis obtenido entre dos, restadle 4 al resultado y volved a dividir entre 2.”
¿Cuál es el resultado que habéis obtenido?”

La profesora leerá poco a poco el enunciado anterior y le propondrá a toda la clase que sigan sus instrucciones. Al final cada alumno obtendrá el número que había pensado inicialmente. La profesora incitará a la reflexión sobre lo que ha ocurrido.

Posibles preguntas de la profesora

- ¿Qué ocurre al repetir los mismos pasos para diferentes números?

- ¿Por qué sucede siempre lo mismo?

La profesora dejará planteado el reto y les dirá que a lo largo del tema se verán las herramientas necesarias para responder la última pregunta.

Actividad 3. ¿Quién tiene...? Yo tengo...

- *Objetivo:* recordar el pasaje de lenguaje coloquial a lenguaje algebraico y tener una leve idea sobre el nivel inicial del alumnado
- *Tipo:* INT, MOT, DIG
- *Modalidad:* grupos de 6 personas aproximadamente
- *Materiales:* tarjetas del juego

Para esta actividad la profesora deberá hacer tarjetas como las que se muestran a continuación. Dividirá la clase en grupos pequeños y les repartirán las tarjetas. El primer alumno cogerá una tarjeta y leerá el enunciado de ¿Quién tiene...? El resto de alumnos deberán mirar sus tarjetas para ver si ese enunciado se corresponde con alguna expresión de Yo tengo... A continuación, será su turno de pregunta ¿Quién tiene...?

Durante el desarrollo de la actividad puede que varios alumnos crean que su expresión es la correcta. Esto llevará al grupo a consensuar cuál es la expresión correcta.

Mientras tanto la profesora estará pendiente de los diferentes grupos, observando el nivel de los alumnos y resolviendo las posibles dudas que vayan surgiendo, teniendo en cuenta que esta es una de las partes que más suele costar al alumnado.

<p>Yo tengo x</p> <p>¿Quién tiene? La suma de dos números diferentes</p>	<p>Yo tengo $x + y$</p> <p>¿Quién tiene? La diferencia de dos números diferentes</p>
<p>Yo tengo $x - y$</p> <p>¿Quién tiene? El cubo de un número</p>	<p>Yo tengo x^3</p> <p>¿Quién tiene? El doble de la diferencia de dos números</p>

<p>Yo tengo $2(x - y)$</p> <p>¿Quién tiene? El cuadrado de la suma de dos números</p>	<p>Yo tengo $(x + y)^2$</p> <p>¿Quién tiene? La suma de los cuadrados de dos números</p>
<p>Yo tengo $x^2 + y^2$</p> <p>¿Quién tiene? La quinta parte de un número</p>	<p>Yo tengo $x/5$</p> <p>¿Quién tiene? Un número disminuido en cuatro</p>
<p>Yo tengo $x - 4$</p> <p>¿Quién tiene? El doble de un número incrementado en seis</p>	<p>Yo tengo $2x + 6$</p> <p>¿Quién tiene? La suma de dos números consecutivos</p>
<p>Yo tengo $x + (x + 1)$</p> <p>¿Quién tiene? El área de un cuadrado cuyo lado es x</p>	<p>Yo tengo x^2</p> <p>¿Quién tiene? Un número cualquiera</p>

Actividad 4

- *Objetivo:* recordar lo aprendido sobre monomios del curso anterior
- *Tipo:* DES
- *Modalidad:* individualmente
- *Materiales:* libro (Anaya, p.101)

En cada uno de los siguientes monomios, indica el coeficiente, la parte literal, el grado y su valor numérico para $x = 2$ e $y = \frac{1}{3}$. ¿Cuáles son semejantes?

a) $-5xy$

b) $(-7x)^3$

c) $(xy)^2$

d) $\frac{-3y^2x^2}{5}$

Actividad 5

- *Objetivo:* introducir el concepto de polinomio para después formalizarlo
- *Tipo:* AP
- *Modalidad:* en parejas
- *Materiales:* enunciado de la actividad

Los alumnos de 3 de eso se van de excursión y para conseguir dinero van a vender colonias. Ana ha recaudado el doble que Tomás; Sara dos veces más que el cuadrado de lo que recaudó Tomás y Nuria el cubo de los que recaudó Sara.

¿Cómo se puede expresar lo recaudado por los cuatro amigos?

Se espera que para resolver la actividad los alumnos vayan escribiendo el dinero recaudado por cada persona en función del dinero recaudado por Tomás, que al no conocerlo lo designarán por una letra (variable). Para obtener la suma total deberán sumar todas las cantidades y agrupar los términos semejantes hasta obtener un polinomio.

Posibles preguntas de la profesora

- ¿Cuál es la variable del problema?
- ¿Qué representa cada término?
- ¿Y la expresión completa?

A partir del problema se institucionalizará la definición de polinomio.

Actividad 6

- *Objetivo:* reconocer qué es un polinomio y qué no
- *Tipo:* DES
- *Modalidad:* con el compañero de banco
- *Materiales:* copiar expresiones de la pizarra

De las siguientes expresiones decir cuáles son polinomios. Justifica tu respuesta.

a) $t^4 - 2t^3 - \frac{1}{2}t - 1$

b) $\frac{x^4-3}{x^2}$

c) $\frac{s^4-3s^3}{s}$

d) $t - t^{-2} + 5$

De acuerdo a la definición de polinomio dada a partir del ejercicio anterior, los alumnos deben encontrar expresiones que no cumplan con dicha definición al encontrar variables elevadas a exponente negativos.

Posibles preguntas de la profesora

- ¿Por qué algunas expresiones no son polinomios?
- ¿Qué condiciones debe cumplir una expresión para ser un polinomio?

A partir de los polinomios de la *Actividad 5* formalizar las definiciones de grado, coeficiente principal y término independiente

Posibles preguntas de la profesora

- ¿Cuál es el mayor exponente de las variables?
- ¿Cuál es el coeficiente de ese término?
- ¿Hay algún término con exponente 0?
- ¿Cuál es el coeficiente del término de exponente cero?

Después con las expresiones que son polinomios se calculará el valor numérico para varios valores, entre ellos alguna raíz.

Actividad 7

- *Objetivo:* Afianzar la definición de polinomio, grado, coeficiente principal, término independiente, valor numérico y raíz.
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individualmente en casa
- *Materiales:* ficha

1. Indica cual de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios y justifica tu respuesta. En las que sean polinomios indicar el grado, el coeficiente líder/principal, el termino independiente y su valor numérico para $x=2$. ¿Es 2 raíz de algún polinomio?

- a) $2x^3 - x^2 - x$
- b) $x^2 + 3x - 10$
- c) $x - 5x^{-1} + 3$
- d) $x + 3 - 2x^3$
- e) $\frac{1}{2}x^3 + x - 4$

2. Calcular el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Alguno de ellos es raíz del polinomio? Justifica tu respuesta

Actividad 8

- *Objetivo:* introducir suma de polinomios
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individualmente en
- *Materiales:* libro (Anaya página 89)

Efectúa las siguientes sumas de monomios:

- a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$
b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$
c) $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

Actividad 9

- *Objetivo:* practicar suma y producto de polinomios
- *Tipo:* AP, CON
- *Modalidad:* en pareja
- *Materiales:* ficha

Consideramos el siguiente rectángulo de lados $p(x)$ y $q(x)$.



$$q(x) = 2x^2 + 1$$

$$p(x) = 3x^3 + x^2 - x + 3$$

- a) Calcular el perímetro del rectángulo.
b) ¿Cuánto medirán las longitudes si $x=1$?
c) ¿Cuánto vale el perímetro para $x=1$?
d) Calcula el área del rectángulo.

La profesora irá preguntando para que los alumnos reflexionen sobre que ocurre con el grado de los polinomios iniciales y el producto, con los coeficientes principales de los polinomios iniciales y el producto y, con el término independiente.

Actividad 10

- *Objetivo:* practicar suma y producto de polinomios
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individuales en casa
- *Materiales:* libro (Anaya p.101)

Considera los polinomios y halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$; $B \cdot C$

$$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$$

$$C = -x^3 + 3x^2 - 7x$$

Actividad 11

- *Objetivo:* practicar suma y producto de polinomios. Ampliación
- *Tipo:* CON, AM
- *Modalidad:* en parejas
- *Materiales:* ficha

Refuerzo y consolidación

1. Completa los huecos para que se verifique la operación

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad \boxed{} + 5 \\
 + \\
 -3x^2 \quad +x \quad \boxed{} \\
 \hline
 \boxed{} \quad -2x \quad +3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 \quad +2x \quad \boxed{} \\
 - \\
 \boxed{} \quad -3x \quad +5 \\
 \hline
 2x^2 \quad \boxed{} \quad -15
 \end{array}$$

2. Dados los polinomios $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = x + 3$, calcula $-P(x) + P(x) \cdot Q(x) - 3Q(x)$.

3. Averigua el valor de k para que: $(3x - 5) \cdot (x - k) = 3x^2 + x - 10$

Ampliación

1. Hallar: $p(x) - q(x)$ y $-p(x) + q(x)$. ¿Qué relación hay entre ellos?
2. ¿Cuántos números de dos cifras cumplen que sumando sus dos cifras más el producto de estas dos nos da el número inicial? Justifica tu respuesta.

Por parejas se comenzará a hacer los ejercicios de la ficha que la profesora les reparta, según sea de refuerzo o de ampliación. La profesora irá resolviendo las dudas que surjan y ofrecerá apoyo a aquellos alumnos que más lo necesiten.

Actividad 12

- *Objetivo:* que los alumnos construyan la definición del cuadrado de la suma desde un punto de vista geométrico, basándose en la investigación y la manipulación de formas geométricas
- *Tipo:* IBL, MOT
- *Modalidad:* en parejas
- *Materiales:* fotocopia de la figura 1, tijeras

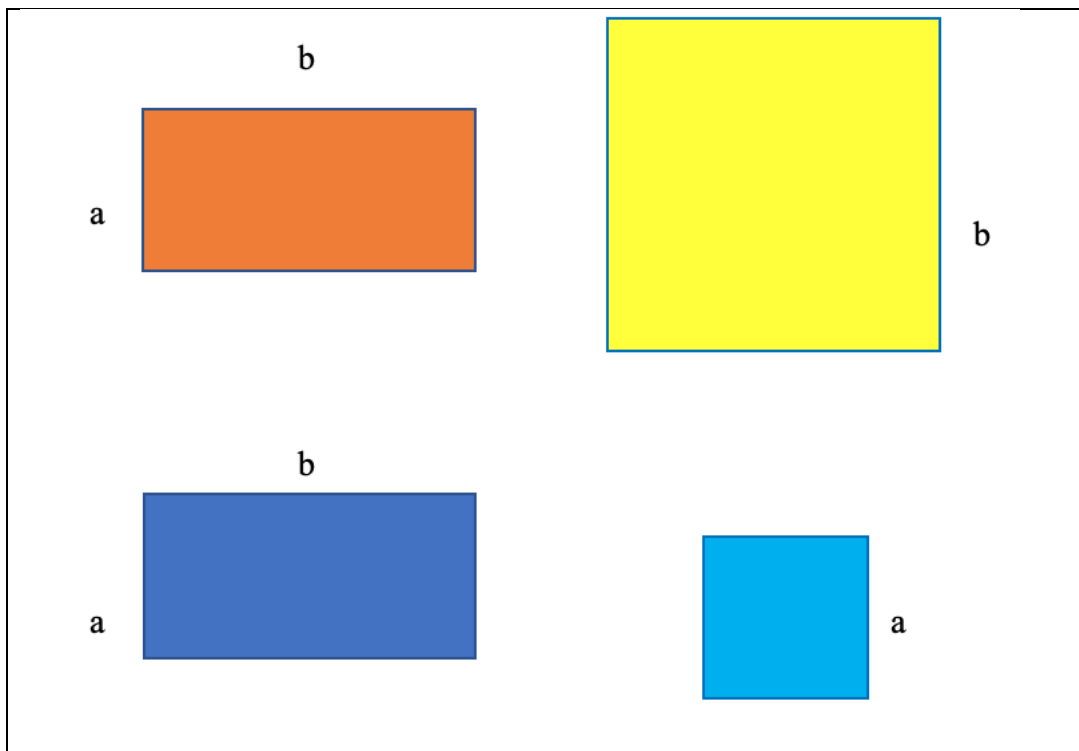


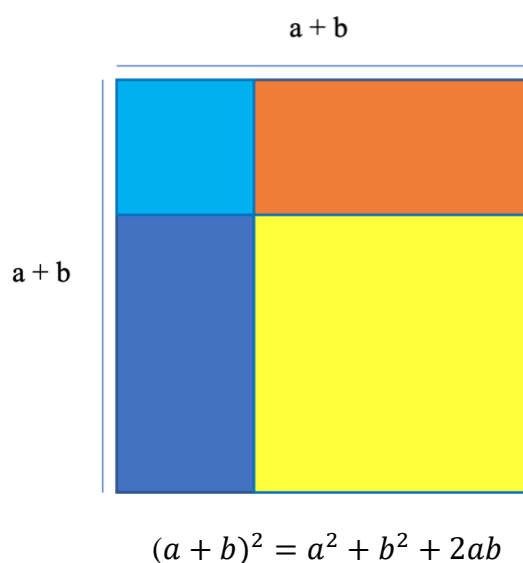
Figura 3. Ficha actividad 12

Antes de empezar la actividad se les dirá que lo que se pretende es que con esas figuras formen un cuadrado y que cuando lo consigan relacionen el área de ese cuadrado con el de las figuras que lo forman. Es decir, al área del cuadrado que han formado es $(a + b) \cdot (a + b)$ y a su vez también es la suma de las áreas de los cuadriláteros que lo forman. El área de cada rectángulo es ab , el del cuadrado amarillo b^2 y el del cuadrado azul a^2 , es decir, $a^2 + b^2 + 2ab$.

Al final los alumnos deberían de haber sido capaces de obtener la fórmula del cuadrado de la suma, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

La profesora servirá de apoyo en todo momento. Irá paseando por la clase dando indicaciones a las parejas que se encuentren más perdidas, pero siempre interviniendo lo menos posible, para que sean los alumnos los que lleguen a la solución.

Una vez que se ha establecido la relación, se comenta entre todos la actividad y se puede explicar que en las matemáticas griegas se utilizaban figuras geométricas para justificar ciertas igualdades algebraicas del tipo de la anterior. También se puede animar a los alumnos a establecer de la misma forma la diferencia de cuadrados.



Actividad 13

- *Objetivo:* practicar identidades notables
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individuales en casa
- *Materiales:* libro (Anaya p.102)

Desarrolla las siguientes identidades notables

$$\begin{array}{ll} a) (x + 6)^2 & c) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \\ b) (7 - x)^2 & d) (x + 7)(x - 7) \end{array}$$

Actividad 14

- *Objetivo:* practicar identidades notables
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individuales en casa
- *Materiales:* libro (Anaya p.102)

Reconoce las identidades notables y transfórmalas en producto

$$\begin{array}{ll} a) 49x^2 - 16 & c) 9x^2 + 12x + 4 \\ b) x^2 - 18x + 81 & d) 25 - 100y^2 \end{array}$$

Actividad 15

- *Objetivo:* practicar división de polinomios
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individuales en clase
- *Materiales:* libro (Anaya p.103)

Realizar las siguientes divisiones identificando el cociente y el resto. Expresa el dividendo en función del divisor, el cociente y el resto

$$\begin{array}{l} a) (5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) : (x^2 + x - 1) \\ b) (-x^4 + 6x^2 - 4) : (x^2 - 2x) \\ c) (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) \end{array}$$

Cuando se corrijan los aparatados la profesora hará hincapié en si algún resto es cero y en qué significa eso. Se afianzará el concepto de cuando un polinomio es divisible por otro.

Actividad 16

- *Objetivo:* aplicar Ruffini
- *Tipo:* AP
- *Modalidad:* individuales en clase
- *Materiales:* libro (Anaya p.96)

¿En qué casos el dividendo es divisible por el divisor?

a) $(3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6) : (x - 2)$

b) $(x^3 - x^2 + 2x - 8) : (x + 2)$

Actividad 17

- *Objetivo:* aplicar el Teorema del resto y el factor
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* individuales en clase/casa
- *Materiales:* ficha

1. **Verifica el resultado obtenido en el ejercicio 16 aplicando el Teorema del resto**
2. **Sin realizar la división justifica si el polinomio $p(x) = 3x^3 + 8x^2 - 9x + 28$ tiene como factor a $(x + 4)$**

Actividad 18

- *Objetivo:* calcular las raíces de un polinomio
- *Tipo:* AP
- *Modalidad:* por parejas
- *Materiales:* pizarra

Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) x^2

b) $x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

c) $x^3 - 13x + 12$

d) $x^2 + x - 6$

Tras corregir el ejercicio la profesora preguntará de que tipo son las raíces que se han obtenido, ya que todos tienen raíces enteras. Tras esto mostrará algún ejemplo de polinomios que tengan raíces racionales o reales, por ejemplo, $2x - 1$, para que los alumnos entiendan que un polinomio puede no tener raíces enteras y sí de otro tipo.

Actividad 18

- *Objetivo:* factorizar polinomios
- *Tipo:* AP, CON
- *Modalidad:* individuales
- *Materiales:* pizarra

Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común y utilizando identidades notables.

a) $p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x$

b) $p(x) = 4x^4 + 6x^2$

c) $p(x) = 4x^2 - 24x + 36$

d) $p(x) = 9x^2 + 6x + 1$

Actividad 19. Cluedo de polinomios

- *Objetivo:* consolidar la factorización de polinomios
- *Tipo:* CON
- *Modalidad:* por parejas
- *Materiales:* ficha

Resuelve los siguientes polinomios para averiguar dónde está secuestrada la profe de matemáticas y quién es su secuestrados.

Esta actividad esta inspirada en la idea original de “Who killed Mr.Quad” recuperada de <http://rmr4edu.com/>.

La profesora les entregará una ficha como la de la página siguiente a los alumnos. Conforme vayan calculando la factorización y las raíces de cada polinomio los alumnos irán descartando sospechosos y de lugares. El objetivo de esta actividad es que los alumnos trabajen la factorización de polinomios de una manera más llamativa, como un juego y que identifiquen la relación que existe entre las raíces de un polinomio y su

factorización. Mientras que los niños trabajan la profesora irá resolviendo las posibles dudas que vayan surgiendo y reforzando a aquellos alumnos que más lo necesiten.

El secuestro de la profe de matemáticas

¡Necesitamos ayuda! Vuestra profe de matemáticas ha desaparecido misteriosamente. Nadie sabe dónde está y el siguiente mensaje fue el último que nos envió:

“Ayuda. Factorizada”

<p style="text-align: center;"><i>Instrucciones:</i></p> <p>Para encontrar al secuestrador y su escondite tenéis que factorizar los siguientes polinomios.</p> <p>Los sospechosos tienen asociadas las raíces de los polinomios y el lugar, su factorización.</p> <p>Sólo un sospechoso y un lugar tienen unas raíces y una factorización que no corresponde a ningún polinomio. ¡Ese es el secuestrador y su escondite!</p> <p><i>Cuidado con los cálculos y las raíces dobles</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $x^3 + 2x^2 - x - 2$ 2. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ 3. $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$ 4. $x^4 - 16$ 	<p style="text-align: center;"><u>Sospechosos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Profe de lengua</i> {2, -2, -3} • <i>Profe de inglés</i> {1, -2} • <i>Profe historia</i> {1, -1, -2} • <i>Director</i> {2, -2} • <i>Conserje</i> {-2, -1, +1} <p style="text-align: center;"><u>Lugar</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Cafetería</i> $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$ • <i>Biblioteca</i> $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ • <i>Laboratorio</i> $(x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$ • <i>Invernadero</i> $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ • <i>Aula de tecnología</i> $(x - 2)(x + 2)(x + 3)$
---	--

<i>¿Quién es el secuestrador?</i>	<i>¿Dónde está secuestrada?</i>
--	--

Figura 4. Ficha Actividad 19

Actividad 20

- *Objetivo:* consolidar la factorización de polinomios
- *Tipo:* IN, AP
- *Modalidad:* por parejas
- *Materiales:* ficha

A continuación, se muestra una explicación detallada de la actividad.

○ **Tarea que propondría a los alumnos**

La tarea que vamos a desarrollar en este trabajo es una tarea de aprendizaje a través del diálogo y la discusión (Standards Units). La escogida es “A11 Factorising cubics”, con la que se pretende afianzar la factorización de polinomios de grado 3, reforzar el concepto de raíz y explorar las representaciones gráficas de funciones cúbicas.

Los alumnos no tendrían un enunciado de la tarea como tal, sino que la clase la irá dirigiendo la profesora escribiendo los polinomios en la pizarra y pidiéndoles que calculen sus raíces, sus factorizaciones y sus representaciones. La tarea que se plantea busca el diálogo y la discusión entre los alumnos que será moderado por la profesora en el transcurso de la tarea. La actividad se puede diferenciar en tres etapas:

- En la primera etapa se les pedirá calcular las raíces y la factorización del polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$. (Dependiendo de cómo se enteren los alumnos y del tiempo se pedirá lo mismo con otros polinomios)
- En la segunda etapa los alumnos dispondrán de las cartas de juego A que se muestran en la *Figura 7*, y se les pedirá que seleccionen las tarjetas de los factores del polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Después atendiendo a esos factores se les pedirá esbozar su grafica. (Se hará lo mismo con otros ejemplos de polinomios de grado 3)
- En la tercera etapa los alumnos dispondrán de las cartas de juego B que se muestran en las *Figuras 8 y 9*, y tendrán que decidir si son verdaderas o falsas.

○ **Posibles soluciones a la tarea**

Etapa 1. Repaso funciones grado 2

Para calcular las soluciones del polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ aplicando la fórmula de segundo grado tenemos que $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$. Las soluciones de la ecuación son $x = 3$ y $x = 2$.

También les pedimos que lo resuelvan aplicando Ruffini

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0
3		3	
	1	0	

Por tanto, las raíces son $x = 2$ y $x = 3$ y $p(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Etapa 2.

En la pizarra escribimos el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y les pedimos a cada pareja que encuentren todos los factores posibles de las tarjetas. Las raíces de este polinomio los alumnos las pueden obtener de varias maneras. Pueden ir probando a evaluar el polinomio entre los divisores del término independiente, es decir, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$$p(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 0$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 \neq 0$$

$$p(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 6 \neq 0$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = 0$$

$$p(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$$

Como el polinomio es de grado 3 tendrá como máximo 3 raíces. Sus raíces son 1, -2, 3 y la factorización sería $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

También pueden calcular las raíces aplicando Ruffini.

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

Por tanto, $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Los alumnos también podrían hacer una vez Ruffini y el cociente que queda, que es de segundo grado, factorizarlo utilizando la ecuación de segundo grado. Es decir, $p(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

Para esbozar la grafica lo único que se tendrá en cuenta es que los puntos $E=(2,0)$, $F=(1,0)$, $G=(3,0)$ y $H=(0,6)$ sean los que se ven en la figura 5, ya que son los puntos de corte con el eje X e Y, respectivamente.

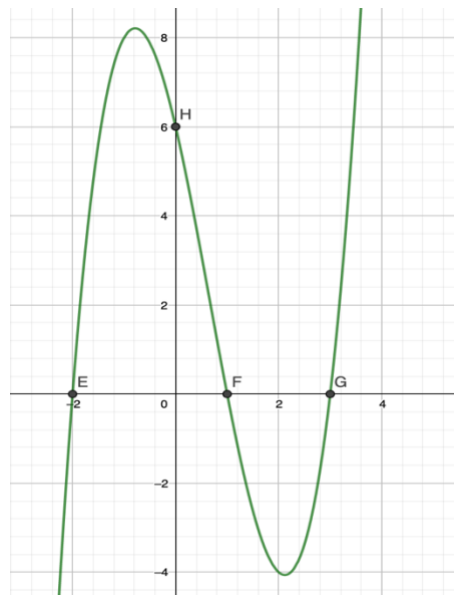


Figura 5. Gráfica de $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Etapa 3. Decidir si las cartas B son verdaderas o falsas

- A1 es falso y A2 verdadero. Si $f(2) = 0$ entonces $(x - 2)$ es factor de $f(x)$.
- B1 es verdadero y B2 es falso. Si $f(-3) = 0$ entonces $(x + 3)$ es factor de $f(x)$.
- C1 es falso y C2 verdadero. Si $f(4) = 7$ entonces $(x - 4)$ no es factor de $f(x)$, ya que si lo fuera tendría que ocurrir que $f(4) = 0$.
- D1 es falso y D2 verdadero. La grafica corta al eje X en un valor negativo y dos positivos, por tanto, tiene dos raíces positivas y una negativa, y la grafica que se corresponde con eso es la D2.
- E1 es verdadero y E2 falso. El término independiente de $f(x)$ es -3 , por tanto, la función pasa por el punto $(0, -3)$.

- F1 es falso y F2 verdadero. Para ver si es factor evaluamos la función en 3. En F1, $f(3) = 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 - 2 \neq 0$. En F2, $f(3) = 3^3 + 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 0$.
- G1 es falso y G2 verdadero. En G1, si la función se anula en 1,3 y 4 esas son las raíces, es decir, la factorización es $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$. Al multiplicarlos el termino independiente sería -12, es decir, $f(0) = -12$. En G2, la función se anula en 1,3 y -4 esas son las raíces, es decir, la factorización es $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$. Al multiplicarlos el termino independiente es 12 y por tanto $f(0) = 12$.
- H1 es falso y H2 verdadero. Tenemos que $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$, si calculamos $f(3)$ es una mala idea porque al evaluar el polinomio x^3 se anula con $-6x^2$ y ya se ve que $-3 + 6 \neq 0$.

○ **Gestión en el aula**

Al principio de la clase la profesora informa a los alumnos de que se va a hacer una actividad sobre factorización de polinomios, que se va a trabajar en una parte en parejas y que se va a ir comentando y discutiendo entre todos los resultados.

Etapas

Se empieza con ejemplos de funciones cuadráticas. Se escribe en la pizarra el polinomio $p(x) = x^2 - 5x + 6$. Se les pide a los alumnos que calculen las raíces de ese polinomio resolviendo la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$. También se les pide que factoricen el polinomio con la regla de Ruffini. Se les deja unos minutos para que trabajen y cuando tengan las soluciones la profesora las escribe en la pizarra. Los valores obtenidos por los dos métodos tienen que ser los mismos. Si alguna pareja no ha calculado correctamente los valores, se pide que expliquen cómo han llegado a ese resultado y después se le pregunta al resto del grupo dónde está el fallo y cómo se haría correctamente.

Una vez que tenemos las soluciones, con Geogebra la profesora representa la función cuadrática y se les pide a los alumnos que expresen la relación que hay entre las soluciones que han calculado y lo que ven en la pizarra digital. Así los alumnos observan que los puntos de corte con el eje OX son las raíces de la función, es decir, si evaluamos el polinomio en los valores obtenidos vale 0. También se les pregunta qué representa el término independiente 6, que es el corte con el eje y, es decir, $p(0) = 6$.

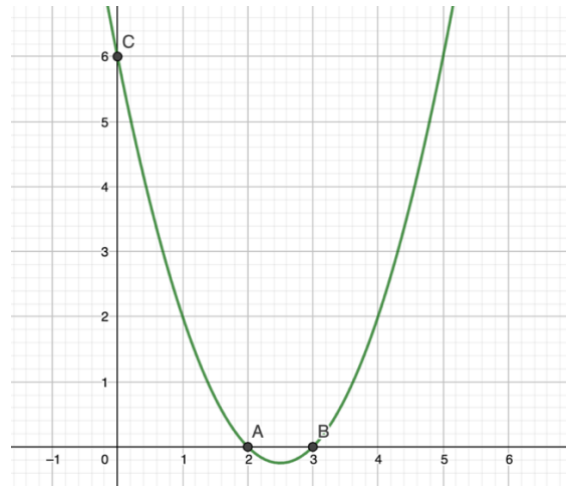


Figura 6. Gráfica de $p(x) = x^2 - 5x + 6$

Etapa 2.

Se le entrega a cada pareja las cartas A-Factores (Standards Units A11, p.5-6).

En la pizarra se escribe el polinomio de grado 3, $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y se les pide a los alumnos que encuentren todos los factores posibles utilizando las tarjetas, los cortes con el eje x y el eje y. Una vez que los han encontrado, la profesora puede ir cogiendo algunas cartas y preguntar si esos factores son interesantes o no y por qué. Una vez que los alumnos hayan elegidos los factores que creen que se corresponden con el polinomio inicial se van apuntando todos en la pizarra. Habrá muchos que coincidirán, pero seguro que alguna pareja coge alguno que no es. Se irá preguntando a las parejas por qué han elegido ese factor y también se les dará la opción de cambiar algunas de sus tarjetas elegidas si así lo deciden. Al final, el objetivo es que todas las parejas después de discutir y reflexionar en grupo el por qué de su elección, acaben teniendo los 3 factores correctos. Al acabar hacemos lo mismo con otro polinomio. También habría que estudiar las estrategias utilizadas y cuáles son las más eficaces.

Una vez obtenida la factorización $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ se les pide que esbocen una gráfica de $p(x)$ y se les pregunta cómo saben que es de esa forma iniciando una discusión entre las posibles respuestas que den las diferentes parejas. Hay que prestar especial atención a cuáles son las raíces y qué relación guardan con el + y - de los paréntesis. También se pretende que los alumnos vean que los valores de x que hacen que la función original sea cero son los mismos que los que hacen que se anulen los paréntesis en su forma factorizada

Cuando todos la tengan su esbozo se muestra en Geogebra y se comentan las respuestas obtenidas. Ver Figura 5.

Etapa 3.

Una vez que hemos trabajado varios polinomios entregamos las cartas de las Figuras 8 y 9 B-Verdadero/Falso (StandardsUnits A11, p.7-8), en la que los alumnos tendrán que decidir si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Esta vez se les dejará trabajar individualmente pensando la respuesta correcta. Tras un rato, los alumnos formarán parejas y pondrán en común sus conclusiones individuales. Cada miembro de la pareja argumentará el por qué de su elección y después, de mutuo acuerdo, deberán obtener una solución común que será la que expondrán a toda la clase.

Mientras tanto, la profesora irá controlando que todos los alumnos trabajen paseándose por la clase, pero interviniendo sólo si alguna pareja está muy perdida. En ese caso, intentará orientarla, pero sin decirle qué tiene que hacer y mucho menos dándole el resultado concreto.

Una vez que todas las parejas tienen sus respuestas se van comentando en voz alta abriéndose un debate en el que las parejas tendrán que defender su respuesta aportando argumentos coherentes. El objetivo es que al final se llegue a un acuerdo grupal.

Para terminar la clase se comentarán los resultados que se han logrado y se comentarán en grupo. La profesora también les pedirá a los alumnos que le digan qué les ha parecido la tarea, si les ha resultado interesante y si han aprendido con ella.

$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$
$(x - 4)$	$(x - 5)$	$(x - 6)$
$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 6)$
$(x - 7)$	$(x - 8)$	$(x - 9)$
$(x + 7)$	$(x + 8)$	$(x + 9)$

$(x - 10)$	$(x + 1)$	$(x + 2)$
$(x + 20)$	$(x + 1)$	$(x + 2)$
$(x - 12)$	$(x + 1)$	$(x - 2)$
$(x - 20)$	$(x + 1)$	$(x - 2)$
$(x - 24)$	$(x - 1)$	$(x + 3)$
$(x + 24)$	$(x - 1)$	$(x + 6)$
$(x + 10)$	$(x - 1)$	$(x + 5)$
$(x + 12)$	$(x - 1)$	$(x + 4)$
$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$
$(x - 4)$	$(x - 5)$	$(x - 6)$
$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 6)$
$(x - 1)$	$(x - 2)$	$(x - 3)$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 3)$
$(x - 4)$	$(x - 5)$	$(x - 6)$

Figura 7. Cartas del juego A (Standards Units A11, p.5-6)



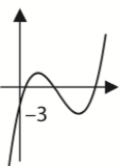

<p>A1</p> $f(2) = 0 \Rightarrow$ <p>$(x + 2)$ is a factor of $f(x)$</p>	<p>A2</p> $f(2) = 0 \Rightarrow$ <p>$(x - 2)$ is a factor of $f(x)$</p>
<p>B1</p> $f(-3) = 0 \Rightarrow$ <p>$(x + 3)$ is a factor of $f(x)$</p>	<p>B2</p> $f(-3) = 0 \Rightarrow$ <p>$(x - 3)$ is a factor of $f(x)$</p>
<p>C1</p> $f(4) = 7 \Rightarrow$ <p>$(x - 4)$ is a factor of $f(x)$</p>	<p>C2</p> $f(4) = 7 \Rightarrow$ <p>$(x - 4)$ is not a factor of $f(x)$</p>
<p>D1</p>  <p>Possible equation for this graph is:</p> $f(x) = (x - 2)(x - 5)(x - 1)$	<p>D2</p>  <p>Possible equation for this graph is:</p> $f(x) = (x - 2)(x + 5)(x - 1)$
<p>E1</p>  <p>Possible equation for this graph is:</p> $f(x) = x^3 + 6x^2 + 7x - 3$	<p>E2</p>  <p>Possible equation for this graph is:</p> $f(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 3$

Figura 8. Cartas del juego B (Standards Units A11, p.7)

<p>F1</p> <p>$(x - 3)$ is a factor of $f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$</p>	<p>F2</p> <p>$(x - 3)$ is not a factor of $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$</p>
<p>G1</p> <p>If $f(x)$ is a cubic function and if $f(1) = 0, f(3) = 0$ and $f(0) = 12$ then $f(4) = 0$</p>	<p>G2</p> <p>If $f(x)$ is a cubic function and if $f(1) = 0, f(3) = 0$ and $f(0) = 12$ then $f(-4) = 0$</p>
<p>H1</p> <p>If $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ and $f(6) = 0$ then it would be a good idea to test $f(3)$</p>	<p>H2</p> <p>If $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ and $f(6) = 0$ then it would be a silly idea to test $f(3)$</p>

Figura 9. Cartas del juego B (Standards Units A11, p.8)

Actividad 21

- *Objetivo:* reforzar contenidos del tema
 - *Tipo:* REF
 - *Modalidad:*
 - *Materiales:* ficha de actividades
1. **Expresa en lenguaje algebraico estos enunciados:**
 - a) La mitad de un número aumentado en tres
 - b) El precio de un libro después de aplicarle un 4% de IVA
 2. **Efectúa las siguientes operaciones**
 - a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x$
 - b) $(x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$
 3. **Factoriza los siguientes polinomios**
 - a) $x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
 - b) $x^3 + 3x^2 - 4$

Actividad 22

- *Objetivo:* ampliar los contenidos del tema
- *Tipo:* AM
- *Modalidad:* individualmente
- *Materiales:* ficha de actividades

1. Halla un polinomio de grado dos del que se sabe lo siguiente:

- Para $x = 0$, vale 5
- Es divisible entre $x - 1$
- Al dividirlo entre $x - 2$ da de resto -9

2. Calcula el máximo común divisor de la siguiente pareja de polinomios

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - x$$

$$q(x) = 5x^2 - x$$

3. Calcular el máximo común divisor de los polinomios del ejercicio anterior utilizando el Algoritmo de Euclides.

4. Calcula las raíces de $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Comprueba que $1/2$ es raíz.

ANEXO III. Evaluación

En el presente Anexo III se incluyen algunas propuestas de rúbricas para la evaluación de la materia: actitud y trabajo diario, participación en clase y trabajo en pareja o en grupo. También se ofrece una posible prueba de evaluación escrita que se podría hacer para nuestra unidad didáctica junto con su rúbrica.

Tabla 1. *Rúbrica actitud y trabajo diario.* (Elaboración propia)

Evaluación	Siempre (3)	A menudo (2)	A veces (1)	Nunca (0)	Total
No interrumpe la clase					
Muestra interés por la asignatura					
No falta el respeto a sus compañeros					
No perjudica el aprendizaje de sus compañeros					
Realiza las actividades que el profesor propone para casa					
Corrige los errores que comete en las actividades					
Resuelve las actividades de manera autónoma					

Tabla 2. *Rúbrica participación en clase* (Elaboración propia)

Evaluación	Siempre (3)	A menudo (2)	A veces (1)	Nunca (0)	Total
Se presta voluntario para salir a la pizarra					
Pregunta las dudas que le surgen					
Participa en las discusiones que surgen en clase					
Ayuda a sus compañeros cuando se le pide					
Pide ayuda a sus compañeros					

Tabla 3. *Rúbrica trabajo en pareja o grupos* (Elaboración propia)

Evaluación	Siempre (3)	A menudo (2)	A veces (1)	Nunca (0)	Total
Se integra en el grupo de trabajo					
Plantea soluciones					
Respeto las opiniones del resto de compañeros					
Reflexiona sobre las estrategias y los procedimientos seguidos					
Colabora con sus compañeros					
Muestra iniciativa e interés					

Rúbrica prueba escrita final

- **Pregunta 1 (1 punto):** 0,5 cada apartado correcto.
- **Pregunta 2 (2 puntos):** 1 punto cada apartado. En cada uno hay que realizar tres operaciones diferentes que se puntuaran igual (0,33).
- **Pregunta 3 (2 puntos):** en cada división 0,8 realizar la operación y 0,2 identificar el cociente y el resto.
- **Pregunta 4 (2 puntos):** sustituir el valor de la raíz en el polinomio (1), calcular correctamente el valor de k (0,5) y justificar la respuesta (0,5)
- **Pregunta 5 (2 puntos):** 1 punto cada apartado, 0,7 las operaciones y 0,3 la factorización final en irreducibles
- **Pregunta 6 (1 punto):** plantear la expresión algebraica (0,5), operar y justificar la respuesta (0,5)

La presentación (márgenes, letra legible, orden y limpieza), la redacción (coherencia y concordancia) y la ortografía se tendrán en cuenta, pudiendo la profesora bajar hasta un 1 punto de la nota del examen.

MATEMÁTICAS	3ºESO	Examen Tema 5	Grupo:	NOTA:
Nombre				
<i>“Mantén la calma y confía en ti mismo. MUCHA SUERTE”</i>				

1. Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:
 - a) La edad que tendrá el profe de Educación Física dentro de 10 años.
 - b) Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.

[1 punto]

2. Efectúa las siguientes operaciones desarrollando las identidades notables que aparecen:
 - a) $(2x - 3)(2x + 3) - (3x^2 - 9)$
 - b) $(x + 2)^2 + (2x + 1)(x - 2)$

[2 puntos]

3. Calcula el cociente y el resto en cada caso e identifícalos:
 - a) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^2 + x)$
 - b) $(x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$

[2 puntos]

4. ¿Cuál debe ser el valor de k para que -2 sea una raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 - 7x + k$? Justifica tu respuesta.

[2 puntos]

5. Factoriza en irreducibles los siguientes polinomios:
 - a) $p(x) = 3x^4 - 30x^3 + 75x^2$
 - b) $q(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2$

[2 puntos]

6. Para terminar, ¡el último reto!
Piensa un número, el que tú quieras. Multiplícalo por 3, súmale 6, divide ese resultado por 3 y por último réstale el número que elegiste al principio. ¿El resultado es 2? ¿Por qué ocurre esto? Justifica tu respuesta.

[1 punto]