



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

Sistemas de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas

Alumno/a: Cortés Romero, Benjamín

Tutor/a: Martínez Rodríguez, Ana María
Alba Fernández, María Virtudes

Dpto: Estadística e Investigación Operativa

ÍNDICE

1. RESUMEN.....	3
2. ABSTRACT	4
3. INTRODUCCIÓN.....	5
4. OBJETIVOS	7
5.1 ANÁLISIS CURRICULAR	9
5.2 ANÁLISIS LIBROS DE TEXTO	16
6. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	22
6.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA	22
6.2 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE ECUACIÓN	23
6.3 NOTACIÓN MATRICIAL	25
6.4 SISTEMAS EQUIVALENTES	26
6.5 RANGO DE UNA MATRIZ	29
6.6 SISTEMA DE CRAMER	30
6.7 MÉTODO GAUSS-JORDAN	32
6.8 TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS	36
7. DIDÁCTICA	39
8. PROYECCIÓN DIDÁCTICA.....	44
8.1 ¿SON IMPORTANTES LOS SISTEMAS DE ECUACIONES?	44
8.2 EXPLICACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO	48
8.3 OBJETIVOS	49
8.4 COMPETENCIAS CLAVE.....	52
8.5 CONTENIDOS.....	55
8.6 METODOLOGÍA	55
8.7 RECURSOS Y ACTIVIDADES	57
8.8 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD	58
8.9 TEMPORALIZACIÓN	59
8.10 EVALUACIÓN.....	74
9. CONCLUSIÓN	76
10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77
ANEXO I: ACTIVIDADES	79
ACTIVIDADES DE REFUERZO	79
ACTIVIDADES PARA ALUMNADO DE ALTAS CAPACIDADES	79
ACTIVIDADES PARA LA ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	80

1. Resumen

Este Trabajo de Fin de Máster (TFM) se enfoca en desarrollar y diseñar una unidad didáctica destinada a la enseñanza y resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en el contexto de la educación secundaria, más concretamente para segundo de ESO. La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un concepto elemental y muy importante en matemáticas ya que está relacionado con diversos campos, como la Física, la Economía y la Ingeniería. Esta unidad didáctica se ha creado con el objetivo de ayudar al aprendizaje y comprensión de este tema crucial para los alumnos.

Este TFM revisa como se enseñan los sistemas de ecuaciones en la educación secundaria desde varios aspectos: normativo y didáctico. Dentro de estos dos aspectos se van a desarrollar varios puntos: identificar las dificultades comunes que tienen que afrontar los estudiantes y las estrategias pedagógicas efectivas para abordar estos desafíos. A partir de esta revisión, se diseña una unidad didáctica que integra enfoques teóricos y prácticos para que los estudiantes comprendan mejor esta unidad.

La temporalización de esta unidad didáctica se estructura en una serie de sesiones que incluyen actividades variadas, como ejercicios prácticos, recursos didácticos y recursos digitales. Se presta especial atención a la resolución de problemas mediante resolución gráfica, con herramientas tecnológicas que enriquecen la experiencia de aprendizaje y diferentes métodos matemáticos para que los alumnos puedan tener suficientes herramientas para resolver los problemas de la forma más óptima.

En resumen, este TFM se centra en desarrollar y diseñar una unidad didáctica innovadora para la enseñanza y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Su objetivo es mejorar el rendimiento y la comprensión de los estudiantes en este importante tema, fomentando una comprensión más profunda y una aplicación más efectiva de los conceptos aprendidos en situaciones prácticas.

Palabras Clave: Sistemas de ecuaciones lineales, unidad didáctica, Matemáticas

2. Abstract

The present Master's Thesis focuses on the design and development of a didactic unit aimed at teaching the resolution of systems of linear equations with two unknowns in the context of secondary education, specifically for the second year of ESO (Compulsory Secondary Education). Solving systems of linear equations is a fundamental concept in mathematics as it has practical applications in various fields, such as Physics, Economics, and Engineering. This didactic unit has been created with the objective of facilitating the understanding and learning of this crucial topic for students.

The Master's Thesis reviews the teaching of systems of equations in secondary education from various aspects: regulatory and didactic. Within these two aspects, we will develop several interesting points, such as identifying common difficulties that students face and effective pedagogical strategies to address these challenges. Based on this review, a didactic unit is designed that integrates theoretical and practical approaches to enhance students' understanding.

The timing of this didactic unit is structured into a series of sessions that include various activities, such as practical exercises, educational resources, and digital resources. Special attention is given to problem-solving through graphical resolution, using technological tools that enrich the learning experience, and different mathematical methods so that students can have sufficient tools to solve problems in the most optimal way.

In summary, this Master's Thesis focuses on the design and development of an innovative didactic unit for teaching the resolution of systems of linear equations with two unknowns. Its objective is to improve students' understanding and performance in this important mathematical topic, fostering a deeper understanding and more effective application of the concepts learned in practical situations.

Keywords: Systems of linear equations, didactic unit, Mathematics.

3. Introducción

En este documento, se evita utilizar un lenguaje no inclusivo, pero para que la lectura no se vuelva tediosa debido al uso repetitivo de palabras, se utilizará un lenguaje genérico reconocido por la Real Academia Española (RAE). Por ejemplo, cuando se habla de alumno, se refiere a todos los alumnos y alumnas.

Después de haber completado todas las asignaturas y el periodo de prácticas de este máster a lo largo del año académico, el último paso de este máster es la realización del TFM, donde se pone en práctica todo lo aprendido en este año.

Este trabajo de investigación se centra en el campo de las matemáticas, con un enfoque particular en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables para el segundo año de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Las ecuaciones tienen un rol esencial en las matemáticas contemporáneas, dado que se emplean en muchos campos de esta área del conocimiento y facilitan la resolución de situaciones del día a día. Por esta razón, el estudio de las ecuaciones es esencial y se incluyen en los contenidos que deben enseñarse en la ESO en España. Aunque en la actualidad ya está cambiando por causa de la legislación LOMLOE, porque hasta ahora la educación se basaba en la enseñanza por competencias, y al estudiar las ecuaciones estaremos contribuyendo concretamente al desarrollo de las competencias en el área de las matemáticas y por relación, de forma secundaria en las competencias en el campo de las Ciencias y Tecnología.

Por otro lado, si se analiza la estructura de este TFM, se puede diferenciar principalmente dos partes. Dado que la finalidad de este trabajo es la elaboración de una unidad didáctica, en la primera parte se encontrará una serie de tareas fundamentales para poder llevar a cabo dicha unidad. Estas tareas incluyen:

- Fundamentación curricular: En esta sección, se examinará la normativa hasta hace poco vigente en Andalucía relacionada con el tema de estudio y se hará un análisis de diferentes libros de texto de matemáticas de segundo de ESO.
- Fundamentación epistemológica: En esta parte se desarrollará el temario teórico relacionado con nuestra unidad de estudio, las ecuaciones, métodos de resolución, base teórica, etcétera. Es crucial tener un profundo entendimiento y dominio de los conceptos matemáticos para establecer una base sólida y poder transmitir los conocimientos a los alumnos con dominio, seguridad y fluidez.
- En el apartado de didáctica, se analizan libros y artículos de investigación que se centran en la enseñanza de las ecuaciones a los estudiantes y métodos didácticos. En estos análisis se exploran temáticas relacionadas con los errores y obstáculos habituales que enfrentan los estudiantes con las ecuaciones, además de tácticas y herramientas destinadas a mejorar el rendimiento académico en esta área.

Por otro lado, el segundo bloque se concentra en la elaboración de una unidad didáctica, que representa el objetivo fundamental en este TFM. En dicha unidad, el tema que se desarrolla es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para estudiantes de segundo de ESO.

La elaboración de esta unidad didáctica tiene como objetivo principal fomentar la enseñanza de las ecuaciones, utilizando metodologías que promuevan la comprensión adecuada de los contenidos, alentando el desarrollo de las competencias correspondientes en los alumnos. Además, se busca que los estudiantes adquieran un pensamiento crítico que les permita explorar diferentes enfoques para resolver problemas, siendo conscientes de que no hay un único procedimiento correcto.

También se pretende que los problemas planteados sean relevantes para su entorno, de manera que se establezca una conexión cercana entre las matemáticas y los alumnos. Además, se fomentará la utilización de recursos tecnológicos como instrumentos para la enseñanza, así como la promoción del aprendizaje en equipo y la cooperación para inspirar a los alumnos, impulsar la colaboración y fortalecer los lazos entre compañeros en el entorno educativo.

4. Objetivos

Mediante la ejecución del presente TFM, se busca fusionar los diversos conocimientos adquiridos en las materias a lo largo de este máster y llevarlos a la práctica. El TFM, junto con la asignatura de prácticas de este máster, tienen un rol crucial en la formación, ya que permiten, elaborar la planificación del contenido educativo que se impartirá en el centro, e interactuar directamente con los estudiantes a los que va dirigida nuestra enseñanza. En este trabajo se quieren lograr varios objetivos:

- Entender y comprender el estado actual de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria.
- Familiarizarse con enfoques innovadores o alternativos al método tradicional, propuestos por expertos en la enseñanza de las matemáticas.
- Aplicar los enfoques innovadores sugeridos por los expertos en la enseñanza de las matemáticas.
- Profundizar en los contenidos matemáticos abordados en la Educación Secundaria Obligatoria.
- Familiarizarse con el currículo y elaborar una unidad didáctica basada en este.
- Crear una unidad didáctica realista teniendo en cuenta las experiencias vividas durante el período de prácticas de este máster.
- Conocer las herramientas disponibles para atender a la diversidad en el aula, y aplicarlas en situaciones específicas que puedan surgir en dicho contexto.
- Proponer estrategias para educar en competencias clave y valores definidos por el currículo, como la no violencia y la ciudadanía, etc.
- Diseñar instrumentos justos para la evaluación y calificación, en consonancia con el currículo.

Además de estos objetivos planteados, la guía docente del Máster en Profesorado de Enseñanza Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES) establece varios objetivos adicionales que buscan cumplir en la formación:

- Promover una mentalidad constructiva y analítica en el proceso de forjar la identidad profesional de los docentes, trabajando en conjunto con las personas involucradas en el campo educativo, en particular, con los líderes administrativos de las instituciones escolares.
- Combinar vivencias profesionales con actividades de enseñanza e indagación en el aula, a través de una evaluación reflexiva de las experiencias vividas y el aprendizaje adquirido.

- Facilitar la adquisición de una preparación cultural, ética, personal y social apropiada para aquellos que deseen ser docentes, manteniendo el nivel de rigurosidad científica necesario en el contexto educativo de los adolescentes.
- Estimular la apreciación, examen y cuidado de las particularidades individuales de los estudiantes, teniendo en cuenta su crecimiento a lo largo del tiempo y su entorno familiar, social y cultural.
- Comprender las habilidades específicas de cada área de enseñanza y cómo se relacionan con otras competencias mediante enfoques que atraviesan distintas disciplinas.

5. Fundamentación Curricular

En la estructura curricular se busca llevar a cabo una evaluación detallada del plan de estudios escolar. En particular, la unidad de estudio en cuestión está diseñada para estudiantes del segundo año de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), dentro de la materia de matemáticas. La temática principal se enfoca en el estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

5.1 Análisis Curricular

Con el fin de realizar una evaluación del plan de estudios de las tareas dentro de la asignatura especificada, nos remitimos al Real Decreto 1105/2014, fechado el 26 de diciembre, que establece el plan de estudios fundamental para la Educación Secundaria Obligatoria. De manera particular, en el Anexo I de dicho decreto, se puede hallar el material, los criterios para la evaluación y los niveles de logro esperados para cada uno de los temas dentro de la ESO.

La materia que será objeto de estudio, tal y como ya se ha señalado, es matemáticas enfocadas para el segundo año de la Educación Secundaria Obligatoria. De acuerdo con el Real Decreto, esta materia se subdivide a lo largo del año en 5 bloques:

- 1) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- 2) Números y álgebra
- 3) Geometría
- 4) Funciones
- 5) Estadística y probabilidad.

En específico, para este TFM, es de gran interés el bloque de números y álgebra, aunque el bloque 1, de procesos, métodos y actitudes en matemáticas se desarrollará a lo largo de todo el curso y por lo tanto se tendrá en cuenta en el desarrollo de este TFM. A continuación, se examinará el contenido que, de acuerdo con el Real Decreto 1105/2014, debe ser desarrollado en la sección mencionada, juntamente con los criterios para la evaluación y los niveles de logro esperados asociados a dichos contenidos.

Además de examinar el Real Decreto en la elaboración de este análisis del plan de estudios, se hace referencia a la Orden emitida el 14 de julio de 2016. Dicha Orden tiene como propósito detallar el plan de estudios para la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, abordando específicamente ciertos aspectos relacionados con la atención a la diversidad y estableciendo la estructura para evaluar el progreso de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. En efecto, al comparar el contenido del Real Decreto con las disposiciones establecidas en la Orden de julio de 2016, se crea un vínculo personalizado entre cada uno de los criterios de evaluación y las competencias que se fomentan en cada uno de ellos.

A continuación, en la figura 1 se recoge el bloque 2 referente a números y álgebra para 2ºESO publicado en el BOE.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y Álgebra		
Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales. Números negativos. Significado y utilización en contextos reales. Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora. Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones. Números decimales. Representación, ordenación y operaciones. Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones. Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc. Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones. Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes. Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas. Jerarquía de las operaciones. Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales. Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos. Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.	1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. 2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números. 3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental. 4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales. 6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa. 1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones. 1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos. 2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales. 2.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados. 2.3. Identifica y calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales mediante el algoritmo adecuado y lo aplica problemas contextualizados. 2.4. Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural y aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias. 2.5. Calcula e interpreta adecuadamente el opuesto y el valor absoluto de un número entero comprendiendo su significado y contextualizándolo en problemas de la vida real. 2.6. Realiza operaciones de redondeo y truncamiento de números decimales conociendo el grado de aproximación y lo aplica a casos concretos. 2.7. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas. 2.8. Utiliza la notación científica, valora su uso para simplificar cálculos y representar números muy grandes. 3.1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones. 4.1. Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema. 4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa. 5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas. 5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales. 6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. 7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma. 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Figura 1: Bloque números y álgebra para 2ºESO. Fuente: Sec. I pág. 411 BOE, enero 2015.

A continuación, en la figura 2 se recoge el bloque 1 referente a procesos, métodos y actitudes en matemáticas para 2ºESO publicado en el BOE.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos; b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Figura 2: Bloque procesos, métodos y actitudes en matemáticas para 2ºESO. Fuente: Sec. I pág. 409 BOE, enero 2015.

Durante el transcurso de este bloque se intentará desarrollar las máximas competencias posibles, pero a continuación se mencionarán solo las competencias exigidas. Estas competencias se encuentran y se explican en la Orden ECD/65/2015 del 21 de enero:

- **Competencia Matemática y competencia básica en ciencia y tecnología (CMCT):** La competencia en matemáticas implica la habilidad para utilizar el pensamiento matemático y sus herramientas para explicar, entender y prever diferentes fenómenos en su entorno. Por otro lado, con respecto a las habilidades esenciales en ciencia y tecnología se refiere a aquellas que ofrecen una aproximación al mundo físico y a la interacción responsable con él, a través de acciones tanto individuales como colectivas, orientadas hacia la preservación y mejora del entorno natural. Además, estas competencias fomentan el desarrollo del pensamiento científico, ya que incluyen la aplicación de métodos propios de la racionalidad científica y habilidades tecnológicas que conducen a la adquisición de conocimientos, la evaluación de ideas y la aplicación de descubrimientos para el beneficio de la sociedad.
- **Competencias en comunicación lingüística (CCL):** La competencia en comunicación lingüística se forma a partir de la interacción comunicativa en contextos sociales específicos, en los cuales una persona se comunica con otros participantes a través de diversos medios en distintas formas y estilos.
- **Competencia para aprender a aprender (CAA):** Esta competencia es esencial para el aprendizaje continuo a lo largo de la vida, que ocurre en diversos entornos, ya sean formales, no formales o informales. Esta competencia se caracteriza por la capacidad de comenzar, organizar y mantener el proceso de aprendizaje. En primer lugar, implica la habilidad de motivarse para aprender, lo cual se logra generando curiosidad y una necesidad intrínseca de adquirir

conocimiento. El estudiante debe sentirse como el protagonista del proceso de aprendizaje y de sus resultados, y al alcanzar las metas de aprendizaje establecidas, fortalece su autoconfianza y percepción de que puede aprender. Todo esto contribuye a motivarle para enfrentar futuros desafíos de aprendizaje.

- **Competencia social y ciudadana (CSC):** Las competencias sociales y cívicas se refieren a la habilidad y capacidad para utilizar el conocimiento y las actitudes relacionadas con la sociedad en su naturaleza dinámica, en constante cambio y compleja. Esto implica ser capaz de analizar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más variados, desarrollar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos. También implica la capacidad de interactuar con otras personas y grupos siguiendo normas basadas en el respeto mutuo y en principios democráticos. Además, estas competencias incluyen acciones que van más allá del ámbito individual y se relacionan con la participación cívica y social en un sentido más amplio.
- **Competencia digital (CD):** Esta competencia abarca la capacidad de emplear de forma innovadora, reflexiva y segura las nuevas tecnologías que se utilizan para informarnos y la comunicarnos. Además de las transformaciones que las nuevas tecnologías introducen en la alfabetización, la lectura y la escritura, esta competencia requiere un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes específicos que son esenciales en el entorno digital actual.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP):** Esta competencia se relaciona con la aptitud para transformar conceptos en pasos prácticos. Esto implica tener conciencia de la situación que demanda una acción o resolución, y tener la capacidad de elegir, organizar y gestionar de forma independiente los recursos de conocimiento, competencias y disposición requeridos para alcanzar una meta específica.
- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** Esta competencia se refiere a la capacidad de conocer, comprender, apreciar y valorar de manera crítica las diversas expresiones culturales y artísticas. Esto implica mantener una mentalidad abierta y una actitud respetuosa hacia ellas, utilizarlas como una fuente de crecimiento y reconocerlas como una parte valiosa del legado cultural de las sociedades.

A continuación, en la tabla 1 se recogen las competencias clave relacionadas a cada criterio de evaluación en el bloque 2 referente a números y álgebra para 2ºESO publicado en el Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, julio de 2016:

Bloque 2: Números y álgebra	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y	CCL, CMCT, CSC

<i>propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.</i>	
<i>2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.</i>	<i>CCL, CMCT, CSC</i>
<i>3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.</i>	<i>CMCT</i>
<i>4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.</i>	<i>CMCT, CD, CAA, SIEP</i>
<i>5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.</i>	<i>CMCT, CSC, SIEP</i>
<i>6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.</i>	<i>CCL, CMCT, CAA, SIEP</i>
<i>7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.</i>	<i>CCL, CMCT, CAA</i>

Tabla 1: competencias bloque 2 para 2ºESO. Fuente: Num. 144 pág. 209 Boletín Oficial Junta Andalucía, julio 2016.

A continuación, en la tabla 2 se recogen las competencias relacionadas a cada criterio de evaluación en el bloque 1 referente a procesos, métodos y actitudes en matemáticas para 2ºESO publicado en el Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, julio de 2016:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas	
<i>Criterio de evaluación</i>	<i>Competencias</i>
<i>1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.</i>	<i>CCL, CMCT</i>
<i>2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.</i>	<i>CMCT, SIEP</i>

3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CMCT, SIEP
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT, CSC, SIEP, CEC
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CAA, CSC, CEC
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CMCT, CD, SIEP

Tabla 2: competencias bloque 1 para 2ºESO. Fuente: Num. 144 pág. 209 Boletín Oficial Junta Andalucía, julio 2016.

5.2 Análisis libros de texto

Los libros de texto son una herramienta más en la que apoyarse durante la explicación y desarrollo de una unidad, y por lo tanto son usados por la mayoría de los centros docentes. Por ese motivo es muy importante realizar un análisis, previo al desarrollo de la unidad, sobre los libros de texto actuales de matemáticas de segundo de ESO que ofrece el mercado y los más usados en los diferentes centros, para elegir la opción que mejor se adapte a los contenidos y metodología. Hoy en día es una herramienta muy utilizada, sin embargo, sería interesante ver como en un futuro próximo estos libros van a evolucionar influenciados por los nuevos medios de información, la comunicación y el avance o aparición de las nuevas metodologías didácticas.

Es un desafío como docente elegir un libro de texto que se adapte completamente a todas las unidades que se van a impartir durante el curso, y aunque sería importante hacer un análisis completo de todas las unidades, concretamente en este TFM el análisis será enfocado a la unidad que se va a desarrollar. El primer paso que se va a seguir en este análisis es hacer un recuento de las editoriales más utilizadas en los centros públicos y concertados en Andalucía para 2 ESO en la asignatura de matemáticas para el curso 2023/2024.

Los datos se han obtenido de la página web oficial de la Junta de Andalucía donde están registrados los libros de textos de gratuidad de cada centro público y concertado y se recogen a continuación en la tabla 3:

Editorial	Anaya	Santillana	SM	Oxford	Bruño	Casals	Edelvives	Editex
Número de centros	648	237	324	69	35	16	92	6

Tabla 3: Editoriales usadas en centros de Granada. Fuente:

<https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto>.

Analizando la tabla anterior se puede observar que el libro más usado es el de la editorial Anaya y este ha sido adoptado por 648 centros educativos de Granada. En segundo lugar, está la editorial SM que ha sido usada por 324 centros, y en tercer lugar la editorial Santillana que ha sido usada por 237 centros de segundo de ESO.

Considerando los resultados de esta primera investigación, finalmente se decide llevar a cabo una evaluación y comparación de los libros de Anaya, SM y Santillana, ya que parecen ser los más utilizados en los centros de secundaria públicos y concertados en toda Andalucía. También se analizará el libro de texto de la editorial Bruño para tener una comparación con una editorial poco usada.

Los libros que se van a analizar se refieren a la materia que estamos tratando, es decir, matemáticas para segundo curso de ESO, y estos libros que se van a analizar han sido prestados por el departamento de matemáticas de mi centro de prácticas para poder llevar a cabo este análisis. Estos son los libros y ediciones que se van a analizar:

- Colera, J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2017). Matemáticas 2 ESO. Anaya.
- Nieto, M., Pérez, A., Estebaranz, J., y Alcaide, F. (2021). Matemáticas Andalucía 2 ESO. Ediciones SM.
- Almodóvar, J., García, P., Gil, J., y Nortes, A. (2012). Matemáticas 2 Curso. Santillana.
- Árias, J.M., y Maza, I. (2015). Matemáticas 2 ESO. Bruño.

El siguiente paso es hacer un análisis general del temario que abarcan estos libros de textos, y para ello se recoge en la siguiente tabla todos los temas que incluyen los libros a analizar:

Editorial	Anaya	SM	Santillana	Bruño
Tema 1	Los números naturales	Divisibilidad: Números enteros	Números naturales. Divisibilidad	Divisibilidad y números enteros
Tema 2	Los números enteros	Fracciones y decimales	Números enteros	Fracciones y números decimales
Tema 3	Los números decimales y fracciones	Potencias y raíces	Fracciones	Potencias y raíces
Tema 4	Operaciones con fracciones	Proporcionalidad y porcentajes	Números y decimales	Proporcionalidad
Tema 5	Proporcionalidad y porcentajes	Expresiones algebraicas	Potencias y raíz cuadrada	Resolución de problemas aritméticos
Tema 6	Álgebra	Ecuaciones	Iniciación al álgebra	Polinomios
Tema 7	Ecuaciones	Sistema de ecuaciones	Ecuaciones	Ecuaciones de 1 ^{er} y 2 ^o grado
Tema 8	Sistema de ecuaciones	Funciones	Proporcionalidad numérica	Sistemas de ecuaciones lineales
Tema 9	Teorema de Pitágoras	Semejanza: Teorema de Pitágoras	Figuras planas. Movimientos	Rectas e hipérbolas
Tema 10	Semejanza	Cuerpos geométricos	Proporcionalidad geométrica	Teorema de Thales y Pitágoras
Tema 11	Cuerpos geométricos	Estadística	Perímetros y áreas de figuras planas	Cuerpos en el espacio

Tema 12	Medida de volumen	Probabilidad	Cuerpos geométricos. Áreas	Áreas y volúmenes
Tema 13	Funciones	-	Volúmenes de cuerpos geométricos	Estadística
Tema 14	Estadística	-	Funciones y gráficas	Probabilidad
Tema 15	-	-	Estadística y probabilidad	

Tabla 4: Temario libros de texto 2 ESO de matemáticas. Fuente: Libros de texto Anaya, SM, Santillana y Bruño

Las diferencias iniciales que se perciben entre los cuatro libros se refieren tanto al número de temas abordados por cada libro de texto, como en la forma que están organizados estos mismos. Resaltados en tono verde, se identifican los temas pertenecientes al bloque de resolución de sistemas de ecuaciones o relacionado con este tema.

El siguiente paso es analizar el contenido que cada libro desarrolla en esta unidad y para ello se va a recoger en las siguientes tablas los apartados en los que se dividen estos temas:

Tema 8 Anaya
1) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas: - Explicación, ejemplos y ejercicios - Representación gráfica de una ecuación lineal 2) Sistemas de ecuaciones lineales: - Explicación - Sistemas compatibles e incompatibles - Ejercicios 3) Métodos para la resolución de sistemas lineales: - Método de sustitución - Método de igualación - Método de reducción - Ejercicios 4) Resolución de problemas con la ayuda de los sistemas de ecuaciones 5) Ejercicios y problemas

Tabla 5: Apartados tema 8 Anaya de matemáticas 2 ESO. Fuente: Libros de texto Anaya.

Tema 7 SM
1) Ecuaciones lineales con dos incógnitas: - Ejemplos y ejercicios - Resolución gráfica 2) Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes: - Sistemas de ecuaciones lineales - Sistema de ecuaciones equivalentes 3) Solución gráfica de un sistema: - Ejemplo y ejercicios 4) Resolución de sistemas por reducción 5) Resolución de sistemas por sustitución e igualación 6) Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones 7) Actividades finales: - Problemas y ejercicios para resolver

Tabla 6: Apartados tema 7 SM de matemáticas 2 ESO. Fuente: Libros de texto SM.

Tema 7 Santillana
1) Igualdad, identidad y ecuación 2) Ecuación: Incógnitas, grado, términos, solución 3) Ecuaciones equivalentes. Procedimientos: - Ecuaciones equivalentes - Procedimiento de la suma - Procedimiento del producto 4) Procedimientos de resolución de ecuaciones: - Ensayo-error - Empezar por el final - Transposición 5) Resolución general de ecuaciones de primer grado con una incógnita 6) Resolución de problemas utilizando ecuaciones 7) Introducción a los sistemas de ecuaciones - Breve explicación del método de sustitución, igualación y reducción. 8) Actividades del tema - Problemas y ejercicios para resolver

Tabla 7: Apartados tema 7 Santillana de matemáticas 2 ESO. Fuente: Libros de texto Santillana.

Tema 8 Bruño

- 1) Sistemas lineales. Resolución gráfica:**
 - Ecuación lineal con dos incógnitas
 - Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas
 - Resolución gráfica de un sistema lineal
 - Número de soluciones de un sistema lineal
- 2) Métodos de sustitución e igualación:**
 - Método de sustitución
 - Método de igualación
- 3) Método de reducción y qué método utilizar:**
 - Método de reducción
 - Qué método utilizar para resolver un sistema
- 4) Resolución de problemas de sistemas**
 - Procedimiento de resolución de problemas
 - Problema genérico
 - Problema numérico
- 5) Ejercicios y problemas resueltos**
- 6) Ejercicios y problemas propuestos**

Tabla 8: Apartados tema 8 Bruño de matemáticas 2 ESO. Fuente: Libros de texto Bruño.

Tras este análisis de contenido se puede hacer una primera apreciación, y es que los libros de texto de Anaya, SM y Bruño dedican una unidad exclusiva para trabajar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, aprendizaje de los conocimientos necesarios y problemas de aplicación de estos conocimientos. Y el libro de texto de Santillana es el único que no dedica una unidad para este tema, de hecho, en el tema 7 desarrolla el tema de ecuaciones donde se enfoca sobre todo en explicar las ecuaciones lineales con una incógnita y su resolución, y como anotación, decir que solo dedica un apartado a introducir los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas con una explicación muy escueta. Debo aclarar que no he podido consultar versiones más actuales del libro de texto u online de Santillana para utilizarlo en esta comparación, pero si no se han hecho evoluciones en ediciones posteriores a la 2012, puedo afirmar que es el libro de texto menos adecuado para usar de apoyo en el desarrollo de esta unidad.

La segunda apreciación que se puede sacar es que los libros de texto de Anaya, SM Bruño desarrollan más o menos los mismos contenidos, pero con un enfoque diferente. Por ejemplo, el libro de texto de SM dedica poco espacio a explicaciones, pero es el que ofrece un mayor abanico y cantidad de ejercicios propuestos. Por otro lado, el libro de texto de Bruño es todo lo contrario al de SM, es decir, da más espacio al desarrollo de los contenidos de esta unidad, pero tiene poca variedad de ejercicios y dedica un espacio muy pequeño a problemas en contextos reales de aplicación de sistemas de ecuaciones. Por último, el libro de texto de Anaya tiene un equilibrio entre desarrollo teórico y problemas.

Estos tres libros de texto tienen varios aspectos positivos, pero solo varios en común:

- El primero es que se le da importancia al desarrollo de la resolución gráfica y proponen el uso de GeoGebra para representación gráfica de sistemas.
- Se adaptan los tres libros correctamente al currículo hasta ahora vigente.

Un aspecto positivo que solo tiene el libro de Bruño es que dedica un apartado para iniciar a enseñar cuál es el método de resolución más adecuado para diferentes casos, y es un primer paso para aprender a optimizar el proceso de resolución. Un aspecto muy positivo que tiene el libro de Anaya es que tiene un gran abanico y una gran cantidad de problemas en contextos reales de aplicación de sistemas de ecuaciones.

Al igual que se han mencionado características positivas, se ha de mencionar que de forma negativa ninguno de los tres libros de texto le dedica espacio o importancia al aprendizaje por trabajos/ejercicios de forma cooperativa, colaborativa o aprendizaje por investigación (IBL, Inquiry Based Learning). Y tampoco se le da mucho espacio al razonamiento matemático, en general se fundamentan en ejercicios que requieren de un proceso mecánico, en los cuales los estudiantes resolverán de manera individual y automática, sin requerir una reflexión más allá de la aplicación de un procedimiento predefinido y mecanizado.

En resumen, los libros de Anaya, SM y Bruño se adaptan al currículo y muestran una similitud general entre ellos. La estructura, contenidos y ejercicios del tema son parecidos, pero todas las publicaciones otorgan escasa relevancia a las actividades colaborativas o a las tareas que fomenten el razonamiento matemático. Los tres libros con sus aspectos positivos y negativos son válidos para ser utilizados en clase por los alumnos y queda a criterio del docente elegir cual es el libro que mejor se adapta a su unidad además de ser más útil para sus alumnos. Como docentes sería útil utilizar estos tres libros de texto porque son un buen complemento entre ellos, y es una buena combinación que enriquece nuestras explicaciones, ejercicios propuestos y material de refuerzo.

6. Fundamentación Epistemológica

El tema de las ecuaciones es un área importante dentro del ámbito de la matemática y su enseñanza. Para desarrollar y fundamentar epistemológicamente este tema, se va a abordar varios aspectos clave.

6.1 Evolución histórica

La concepción de las ecuaciones tiene sus orígenes en tiempos muy distantes, al igual que la exploración de sus soluciones. Estas ecuaciones emergen como respuesta a la necesidad de abordar dilemas prácticos.

Hace aproximadamente 4.000 años, los antiguos babilonios dominaban la técnica para encontrar soluciones positivas de ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Durante los siglos VIII al IX, matemáticos de origen árabe avanzaron en el desarrollo del álgebra, permitiendo que el lenguaje de las matemáticas fuera notablemente pragmático. Uno de los sobresalientes entre estos sabios matemáticos fue Al-Juarismi, reconocido como el "fundador del álgebra". A él le debemos conceptos esenciales como "algoritmo" y "álgebra". Su obra en el campo del álgebra tenía el propósito de presentar un enfoque aplicado de esta disciplina para resolver cuestiones cotidianas en el contexto del antiguo imperio islámico. Dicha obra abordaba la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas.

Las primeras referencias a sistemas de ecuaciones de primer grado se encuentran en tiempos antiguos, incluso en la antigua matemática babilónica. No obstante, la solución de tales sistemas, en particular el método para eliminar incógnitas, tiene sus raíces en la antigua China. En el libro "Nueve capítulos sobre el Arte Matemático," escrito entre los siglos II al I antes de Cristo, se describe un método llamado la regla Fang-Cheng, que precede a lo que hoy se conoce como el método de Gauss-Jordan. La razón por la que se llama Gauss-Jordan se debe a que Gauss y Jordan lo aplicaron de manera frecuente para resolver problemas de mínimos cuadrados.

A pesar de que en un principio se consideraba un procedimiento relativamente sencillo, con la llegada de las computadoras, se convirtió en una herramienta esencial. La regla de Cramer ofrecía otra alternativa para calcular sistemas, pero no hacía los cálculos más simples. En general, a medida que aumentaba el número de incógnitas y ecuaciones, los métodos para resolver sistemas de ecuaciones se volvían cada vez más complejos. Un ejemplo de esto es el caso de Alan Turing, quien en 1946 necesitó dos semanas para resolver un sistema de 18 ecuaciones con 18 incógnitas. Sin embargo, el método de eliminación gaussiana requería considerablemente menos operaciones en comparación con los determinantes de Cramer, lo que llevó a su uso generalizado con la llegada de la informática.

Hoy en día, utilizamos el término "Regla de Cramer" para referirnos a un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Aunque esta regla no se debe a Cramer sino a Maclaurin, la razón por la cual se le atribuye a Cramer es principalmente por la notación que utilizó, que resultó ser más clara y concisa que la

de Maclaurin. Sin embargo, ni Cramer ni Maclaurin hicieron mención de los determinantes en sus desarrollos, y tampoco lo hizo Bézout, quien en 1779 presentó un método muy similar para resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

El avance en la resolución de estos sistemas llegó con el álgebra abstracta, las matrices y los determinantes. La introducción del concepto de rango de una matriz permitió establecer condiciones necesarias y suficientes para que un sistema tuviera solución. El matemático francés Eugène Rouché publicó un artículo en el que enunciaba el teorema que hoy en día se conoce como el teorema de Rouché-Frobenius. De manera interesante, en ese mismo año otro matemático francés presentó un resultado similar, y en Italia, Capelli también ofreció una variante del mismo concepto. Estos resultados llevaron a que el teorema tuviera múltiples nombres en diferentes países.

Las ecuaciones nos brindan la capacidad de abordar y solucionar de manera sistemática una amplia variedad de problemas que, de lo contrario, serían extremadamente laboriosos si se resolvieran únicamente mediante operaciones aritméticas simples. Una vez que hemos traducido el problema en cuestión a un conjunto de ecuaciones, la resolución de este conjunto se convierte en un proceso mecánico relativamente sencillo.

Existen diversas técnicas disponibles que nos permiten resolver de manera ordenada un sistema de ecuaciones. La elección de una u otra técnica depende principalmente de la complejidad del sistema, en términos de la cantidad de ecuaciones e incógnitas involucradas. Para sistemas que consisten en dos o tres ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas respectivamente, los métodos clásicos como la sustitución, la igualación y la reducción son apropiados. No obstante, a medida que el número de ecuaciones e incógnitas aumenta, estos métodos se vuelven menos adecuados y se usarán otros métodos.

6.2 Definición y clasificación de ecuación

Una ecuación lineal con n incógnitas se expresa generalmente como una igualdad en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ y b son elementos de un cuerpo conmutativo K donde en la mayoría de los casos $K = \mathbb{R}$. Un ejemplo de ecuaciones lineales sería:

$$3x + 4y = 0 \quad 2x - 3y + z = 13$$

Y ejemplos de ecuaciones que no son lineales serían:

$$3x^2 + 4y = 0 \quad x^*y + 4z = 0 \quad \text{sen}(x) - 3y + z = 13$$

Los elementos " $a_1, a_2, \dots, a_n$ " se llaman coeficientes, " b " es el término independiente y las letras " $x_1, x_2, \dots, x_n$ " representan las incógnitas en la ecuación. Las soluciones de

Figura 5: Sistema homogéneo. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Cada sistema homogéneo tiene la solución trivial, es decir cuando todas sus incógnitas tienen valor 0 ($x_i = 0$). Por este motivo un sistema homogéneo es siempre compatible, ya depende que sea compatible determinado si solo tiene la solución trivial o que sea compatible indeterminado si tiene además otras soluciones.

[illegible]

Figura 6: Sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Partiendo de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas como el de la imagen anterior, se llamará matriz de coeficientes del sistema a la matriz A de orden $m \times n$. Esta matriz se forma colocando el coeficiente a_{ij} del sistema de ecuaciones en la posición ij en la matriz de coeficientes A . También partiendo de este mismo sistema se puede obtener la matriz B de términos independientes colocando los términos independientes i en columna en la posición i :

Figura 7: Matriz de coeficientes y de términos independientes. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Otra propiedad interesante es que se pueden generar sistemas de ecuaciones equivalentes a partir de uno inicial al que se le van aplicando las siguientes transformaciones elementales:

- Proposición:**

Demostración:

- La primera afirmación es obvia, ya que si se intercambian dos ecuaciones entre si se obtienen los mismos valores en sus vectores solución n ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$). Si es verdad que cambiará el orden en que se encuentran estos valores, por ejemplo, si se intercambian el orden entre la ecuación 1 y 2 de un sistema de ecuaciones, y sea n_1 ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) el vector solución del sistema inicial y sea n_2 ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$) el vector solución después de intercambiar el orden de las ecuaciones, se obtiene que todos los valores son iguales en n_1 y n_2 , pero no coincide el orden y por lo tanto $\alpha_1 = \mu_2$ y $\alpha_2 = \mu_1$.
- La segunda afirmación, multiplicar una ecuación por un numero diferente de cero, es obvia también y no necesita demostración. Sin embargo, es importante mencionar que la condición para que $a = b$ en el contexto de los elementos a , b y c de un conjunto, donde c no es igual a cero, es que $ac = bc$.
- La tercera afirmación, agregar una ecuación a otra después de multiplicarla por un número del conjunto necesita una demostración. Para ello se considera el siguiente sistema:

[illegible]

27

Y también se considerará el sistema resultante de sumar k veces la j -ésima ecuación a la i -ésima ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & & \cdots \\ (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n & = & b_i + kb_j \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n & = & b_j \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Figura 13: Sistema resultante. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Es necesario demostrar que ambos sistemas de ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones. Se va a suponer que la asignación de valores $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ es una solución válida para el primer sistema de ecuaciones propuesto. Se puede notar que esta asignación de valores también satisface el segundo sistema de ecuaciones propuesto. Dado que los dos sistemas solo difieren en la i -ésima ecuación, simplemente se necesita verificar que $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ cumple con la i -ésima ecuación del segundo sistema de ecuaciones propuesto. Dado que ya se ha establecido que es una solución para el primer sistema de ecuaciones propuesto, se puede concluir que:

$$\begin{array}{rcl} a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n & = & b_i \\ a_{j1}c_1 + \cdots + a_{jn}c_n & = & b_j \end{array}$$

Figura 14: Demostración. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Multiplicando por k la segunda igualdad y sumando se obtiene:

$$\begin{aligned} (a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n) + k(a_{j1}c_1 + \cdots + a_{jn}c_n) &= b_i + kb_j \\ \downarrow \\ (a_{i1} + ka_{j1})c_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})c_n &= b_i + kb_j \end{aligned}$$

Figura 15: Demostración. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Es decir, $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ es solución del segundo sistema de ecuaciones propuesto como se quería comprobar. Recíprocamente, si $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ es solución del segundo sistema de ecuaciones propuesto, entonces:

$$\begin{aligned}(a_{i1} + ka_{j1})c_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})c_n &= b_i + kb_j \\ a_{j1}c_1 + \cdots + a_{jn}c_n &= b_j\end{aligned}$$

Figura 16: Demostración. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Restando a la primera igualdad k veces la segunda se obtiene:

$$a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n = b_i$$

Figura 17: Demostración. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Esto es, $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ es solución del primer sistema de ecuaciones propuesto.

Después de esto se puede afirmar que dos matrices A y B son equivalentes por filas, si se puede pasar de una a otra a través de una sucesión de transformaciones elementales por filas.

Si se parte de una matriz A se llamará forma normal de Hermite por filas de A a la única matriz escalonada reducida por filas que se obtiene de A por transformaciones elementales de filas. La matriz de Hermite se denota con H .

6.5 Rango de una matriz

Si se considera una matriz A con dimensiones $m \times n$, se llama rango de A al número de filas no nulas de su forma normal de Hermite por filas y se denota por $\text{rg}(A)$. En otras palabras, el rango son el número de vectores linealmente independientes de un sistema.

Se comenzará con un ejemplo para que se comprenda mejor como se calcula el rango de una matriz. Se parte de la siguiente matriz A que se obtiene como notación alternativa de un sistema de ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 17: Matriz. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

A continuación, se realizarán transformaciones elementales por filas hasta llegar a un sistema equivalente más sencillo como es su forma normal de Hermite:

Figura 18: Transformaciones elementales equivalentes. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Como aclaración decir que no es necesario calcular la forma normal de Hermite para calcular el rango de una matriz A , sino que es suficiente con llegar a una matriz escalonada por filas equivalente a A . Esto es cierto porque para pasar de una matriz escalonada a una reducida en forma de Hermite no cambia el número de filas no nulas tal como se puede ver en el anterior ejemplo.

Un sistema lineal que tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, es decir, un sistema lineal con un tamaño $n \times n$, se llama sistema lineal cuadrado. En este tipo de sistemas, la matriz de coeficientes, A , tiene un número igual de filas y columnas, lo que la hace una matriz cuadrada. Cuando esta matriz es no singular, lo que significa que su determinante $|A|$ es diferente de cero, el sistema se conoce como un sistema de Cramer. Además, todo sistema de Cramer es compatible determinado por el Teorema de Rouché-Frobenius que se verá más adelante.

Figura 19: Sistema de ecuaciones. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

30

matriz X de incógnitas y la matriz B de términos independientes. Se puede resolver un sistema de Cramer a partir de estos de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots; x_n = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Figura 20: Sistema de Cramer. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Para entenderlo mejor se va a hacer el siguiente ejemplo. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales se calcularán sus incógnitas:

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ x & +y & +2z & = & 3 \end{cases}$$

Figura 21: Sistema de ecuaciones. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

A partir del sistema se obtiene la siguiente matriz de coeficientes A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Figura 22: Matriz de coeficientes. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Para no alargar mucho el ejemplo se aporta que el valor del determinante de la matriz A, por lo tanto, $\det(A) = 4 \neq 0$. Como el valor del determinante no es 0, se puede afirmar que es regular y por tanto es un sistema de Cramer cuya solución es la siguiente:

$$x = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}$$

Figura 23: Resolución por Cramer. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

6.7 Método Gauss-Jordan

A continuación, se examinará el proceso para solucionar un conjunto de ecuaciones lineales. La esencia de los enfoques de Gauss y Gauss-Jordan es muy sencilla, y lo que pretende es que, a partir de un sistema inicial, obtener uno equivalente que sea más sencillo, y se repite este proceso sucesivamente hasta llegar a un sistema con las mismas soluciones que el original, pero que sus soluciones sean de conocimiento inmediato. Para entenderlo mejor se pondrá un ejemplo partiendo del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 10z = 18 \\ 2x + 3y + 12z = 23 \\ + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

Figura 24: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Se van a realizar transformaciones elementales para conseguir un sistema equivalente más simple. La primera transformación evidente es dividir entre 2 la primera ecuación quedando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 9 \\ 2x + 3y + 12z = 23 \\ + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

Figura 25: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

El siguiente paso es intentar eliminar la incógnita x de la segunda ecuación para ir escalonando el sistema de ecuaciones. Para ello se va a multiplicar la primera ecuación por 2 y se le va a restar la segunda ecuación quedando el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 9 \\ + y + 2z = 5 \\ + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

Figura 26: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

A continuación, se va a intentar eliminar la incógnita y de la tercera ecuación para ir escalonando el sistema de ecuaciones. Para ello se va a multiplicar la segunda ecuación

por 2 y se le va a restar la tercera ecuación quedando el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 9 \\ y + 2z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

Figura 27: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Ya se ha conseguido un sistema escalonado y en este momento se pueden seguir dos caminos:

- El primer camino es aplicar el método de Gauss, es decir, sustituir regresivamente el valor de $z = 1$ de la tercera ecuación en la segunda ecuación, donde despejando se obtiene que $y = 3$. Del mismo modo se sustituye en la primera ecuación el valor de $y = 3$ y el de $z = 1$, y despejando se obtiene que $x = 1$. De este modo se resuelve el sistema de ecuaciones lineales.
- El segundo camino es aplicar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en seguir simplificando el sistema mediante transformaciones elementales. A continuación, se va a intentar eliminar la incógnita z de la primera y segunda ecuación y para ello se va a multiplicar la tercera ecuación por 2 y se le va a restar a la segunda ecuación. También se va a multiplicar por 5 la tercera ecuación y se le va a restar a la primera ecuación quedando el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Figura 28: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Por último, se va a eliminar la incógnita y de la primera ecuación y para ello se va a restar la segunda ecuación a la primera quedando el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Figura 29: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Es evidente que será necesario llevar a cabo un análisis un poco más detallado de este tema. En primer lugar, se debe recordar que las modificaciones realizadas en el ejemplo anterior son adecuadas, es decir, que generan sistemas de ecuaciones que son equivalentes al sistema original tal como se demostró anteriormente en el apartado “6.4 Sistemas equivalentes”. Por otro lado, es necesario concretar un método para convertir un sistema en escalonado reducido, es decir, un sistema equivalente más simple. Los pasos para conseguir un sistema escalonado serían los siguientes:

- El procedimiento comienza seleccionando una ecuación que tenga un coeficiente distinto de cero para la incógnita x_1 y colocándola en la parte superior del sistema.
- El segundo paso es dividir esta primera ecuación por el coeficiente de x_1 de forma que se obtenga coeficiente 1 para x_1 .
- En el tercer paso se intenta eliminar la incógnita x_1 de las demás ecuaciones, restando a estas últimas una versión adecuadamente multiplicada de la primera ecuación. De esta manera, la incógnita x_1 solo aparecerá en la primera ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Figura 30: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

- Después, se procede a repetir estos pasos para las ecuaciones restantes y la incógnita x_2 , manteniendo la primera ecuación inalterada.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & +a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b'_m \end{array} \right.$$

Figura 31: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

- Este proceso se repite de manera iterativa mientras sea posible, logrando así la formación de un sistema de ecuaciones escalonado. Además, es importante notar que la ecuación $0 = 0$ es válida para cualquier asignación de valores a las incógnitas y, por lo tanto, puede ser eliminada si aparece en el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1'' \\ & x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2'' \\ & \dots & \\ & x_r + \dots + a_{rn}x_n & = b_r'' \end{array} \right.$$

Figura 32: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

No obstante, existe la posibilidad de simplificar aún más. Se designarán como "incógnitas principales" a aquellas incógnitas que se presentan como la primera incógnita en alguna de las ecuaciones, mientras que las restantes se denominarán "incógnitas libres" o "secundarias". Cada incógnita principal de una ecuación puede ser eliminada de las demás, dando lugar así a un sistema de ecuaciones escalonado reducido.

Sin embargo, es importante destacar que simplificar un sistema hasta obtener un sistema escalonado reducido no garantiza que todos los sistemas escalonados reducidos sean tan simples como el ejemplo anterior. Pueden presentarse las siguientes situaciones:

- El primer escenario que puede surgir es una ecuación de la forma $0 = b$, donde $b \neq 0$. En este caso, el sistema es incompatible, ya que ninguna asignación de valores a las incógnitas puede satisfacer esta ecuación.
- El segundo escenario posible es que, si todas las incógnitas son principales, entonces, para que el sistema sea considerado escalonado reducido, debe seguir necesariamente el siguiente patrón:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & & = b_1 \\ & x_2 & = b_2 \\ & & \ddots \\ & & x_n = b_n \end{array} \right.$$

Figura 33: Resolución por Gauss. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Este sistema es compatible determinado con una solución única.

- La tercera situación que puede surgir es que, si hay incógnitas libres presentes en el sistema, entonces las incógnitas principales pueden expresarse en términos de las libres. En consecuencia, existe una solución para el sistema de ecuaciones para cualquier selección que se haga de los valores de las incógnitas libres. En este caso, el sistema se considerará compatible de manera indeterminada, y la solución general del sistema se logrará asignando un parámetro a cada una de las incógnitas libres.

6.8 Teorema de Rouché-Frobenius

[illegible]

Figura 34: Sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Partiendo de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas como el de la imagen anterior, se va a obtener su matriz A de coeficientes y su matriz ampliada $(A|B)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Figura 35: Matrices de coeficientes y ampliada. Fuente: Libro texto Álgebra Lineal con métodos elementales ed. Paraninfo.

Partiendo de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya matriz de coeficientes es A y su matriz ampliada es $(A|B)$, se puede afirmar que:

- El sistema es compatible si, y solo si, el rango de la matriz A es igual al rango de la matriz ampliada $(A|B)$.
- El sistema es compatible determinado si, y solo si, el rango de la matriz de coeficiente A es igual al rango de la matriz ampliada $(A|B)$ y al número de incógnitas ($\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$).
- El sistema es incompatible si el rango de la matriz ampliada A es menor al rango de la matriz ampliada $(A|B)$.

Demostración:

Para demostrarlo se van a estudiar diferentes suposiciones:

- Si se hace la suposición de que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$, es porque al aplicar el método de Gauss-Jordan a las matrices A y $A|B$, se ha llegado haciendo transformaciones elementales hasta a una matriz equivalente de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ & & 1 & \cdots & 0 & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 1 & \beta_n \end{array} \right)$$

Figura 36: Matriz sistema compatible determinado. Fuente: Libro texto Métodos Matemáticos ed. Aljibe

Como está transformada a su forma más simple equivalente de Hermite, pues directamente se tiene la solución del sistema de ecuaciones, es decir, se tiene que $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$,..... $x_n = b_n$. Como se puede ver, todas las incógnitas del sistema tienen solución directa.

- Si se hace la suposición de que el $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) \neq n$, es porque al aplicar el método de Gauss-Jordan a las matrices A y A|B, se ha llegado haciendo transformaciones elementales hasta a una matriz equivalente de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ & & & & 1 & \alpha_{2n_1+2} & \cdots & \alpha_{2n_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ & & & & & & & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ & & & & & & & & & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ & & & & 0 & & & & & & & 1 & \alpha_{rn_r+2} & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

Figura 37: Matriz sistema compatible indeterminado. Fuente: Libro texto Métodos Matemáticos ed. Aljibe

Se ha llegado a una matriz con una forma más simple equivalente donde sus pivotes son 1. Transformando a su forma algebraica se obtendría que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x_{m_1} = \beta_1 - (\alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n_1}x_{n_1}), \\ x_{m_2} = \beta_2 - (\alpha_{2n_1+2}x_{n_1+2} + \cdots + \alpha_{2n_2}x_{n_2}), \\ \vdots \\ x_{m_r} = \beta_r - (\alpha_{rn_r+2}x_{n_r+2} + \cdots + \alpha_{rn}x_n). \end{cases}$$

Lo que se ha obtenido es un sistema compatible indeterminado, ya que este sistema tiene muchas soluciones al depender el valor de las incógnitas de varias variables.

- Si se hace la suposición de que el $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|B)$, es porque al aplicar el método de Gauss-Jordan a las matrices A y A|B, se ha llegado haciendo transformaciones elementales hasta a una matriz equivalente de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \hline & & & & 1 & \alpha_{2n_1+2} & \cdots & \alpha_{2n_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \hline & & & & & & & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ & & & 0 & & & & & & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & & & 1 & \alpha_{rn_r+2} & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ \hline & & & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Figura 38: Matriz sistema incompatible. Fuente: Libro texto Métodos Matemáticos ed. Aljibe

Se ha llegado a una matriz con una forma más simple equivalente donde sus pivotes son 1. Transformando a su forma algebraica se obtendría que una de sus ecuaciones sería $0 = 1$, hecho que es imposible que pueda suceder, por lo tanto, el sistema es incompatible y no tiene solución.

No hay más suposiciones fuera de estos 3 casos, por lo tanto, la proposición queda demostrada mediante este método.

7. Didáctica

La exploración en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, es decir, en cómo los estudiantes adquieren conocimientos en matemáticas, es difícil y muy amplia para abordarla en su plenitud. En particular, será enfocada en comprender cómo los alumnos asimilan y comprenden los conceptos relacionados con el tema de este TFM que es la resolución de sistemas de ecuaciones.

Asimismo, resulta crucial identificar los fallos y errores más frecuentes entre ellos, para priorizar la corrección de dichos errores al desarrollar esta unidad didáctica, con el propósito de minimizar estos errores entre los estudiantes de nuestra clase. Sin embargo, en este contexto no se buscará realizar un extenso análisis del estado actual de la educación, sino examinar brevemente algunos estudios previos que pueden ofrecer una comprensión más profunda del tema que se está abordando.

El primer estudio que es interesante es el de Sánchez et al. (2014). En este trabajo de investigación, se exploraron las complicaciones que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a la tarea de resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando dos enfoques cognitivos distintos: el enfoque sintético-geométrico y el enfoque analítico-aritmético. Este estudio se basó en los resultados previamente formulados por la investigadora Anna Sierpiska.

Anteriormente, el enfoque sintético-geométrico precedió cronológicamente al enfoque analítico-aritmético. Sin embargo, es importante destacar que esto no implica que uno deba reemplazar al otro ni que uno sea superior al otro en términos de relevancia. Ambos enfoques cognitivos poseen un valor igualmente significativo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y la meta es que los estudiantes sean capaces de alternar entre ambos sin enfrentar dificultades significativas.

El modo de pensamiento sintético-geométrico se caracteriza por representar objetos directamente en la mente a través de figuras geométricas, planos y líneas, mientras que el enfoque analítico-aritmético los representa de manera indirecta, construyéndolos a partir de sus elementos principales y tratando los objetos como conjuntos de números. El propósito es encontrar soluciones para los sistemas de ecuaciones lineales.

Existe una brecha perceptible entre estos dos modos de pensamiento y requiere ser abordada para permitir que los estudiantes utilicen ambos sin dificultad. La mayoría de los libros de texto tienden a favorecer el enfoque analítico-aritmético, y son pocos los que apuestan por ambos enfoques y normalmente continúan utilizando el enfoque analítico-aritmético en la resolución de ejemplos. Esta preferencia se debe a su facilidad para aplicar procesos algorítmicos.

El enfoque principal debe centrarse en mejorar la calidad del aprendizaje en lugar de enfocarse únicamente en premiar a los estudiantes que retienen una gran cantidad de información. Es esencial encontrar un equilibrio entre la enseñanza instructiva y la

formación, ya que en muchas ocasiones se recompensa a quienes simplemente recuerdan datos en detrimento de aquellos que realmente han adquirido un conocimiento más profundo. Esta situación puede tener un impacto negativo en la formación del alumnado.

A pesar de que los beneficios de comprender conceptos matemáticos mediante la visualización son ampliamente reconocidos, muchos estudiantes muestran resistencia a este enfoque y a menudo tienden al pensamiento analítico-aritmético. Uno de los motivos de esta preferencia es que el pensamiento geométrico demanda un mayor esfuerzo cognitivo, ya que implica el desarrollo de algoritmos. Por lo tanto, es natural que los estudiantes tiendan a evitar el enfoque sintético-geométrico.

Cada sistema de ecuaciones lineales se basa en conceptos que pueden interpretarse gráficamente. Sin embargo, muchos estudiantes no pueden resolver estos problemas porque no saben relacionar las representaciones visuales con los conceptos algebraicos. Elegir el representar gráficamente para resolver un problema depende tanto de la naturaleza del problema como de las preferencias personales del estudiante. Cambiar del pensamiento analítico-aritmético al sintético-geométrico resulta más difícil, ya que desde una etapa temprana de su educación, se les ha enseñado a seguir procedimientos mecánicos, lo que genera una resistencia significativa a este cambio.

Los resultados obtenidos al brindar a los estudiantes una explicación detallada sobre los diferentes enfoques para afrontar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, así como su relación con diversas disciplinas, como física, química y economía, fueron muy positivos. Los estudiantes quedaron fascinados al relacionar la teoría con la práctica, y expresaron comentarios como:

- Tendría un mayor interés por las matemáticas si me hubieran explicado esto antes.
- La “X” y la “Y” no son solo valores de una solución, sino que corresponden con algo de la realidad
- Me parece más sencillo ahora
- Seguro que hubiese entendido muchas más cosas si me lo hubiesen explicado así

Estos comentarios muestran que los estudiantes pueden transitar entre ambos enfoques de pensamiento cuando cuentan con una guía adecuada. Es evidente que no pueden cambiar de un enfoque sintético a uno analítico si no se les ha enseñado cómo hacerlo. Se les brindó instrucciones sobre cómo representar gráficamente rectas dentro de unos ejes de coordenadas, pero nunca se les enseñó cómo sacar una ecuación a partir de una gráfica, lo que resalta la importancia de proporcionar una orientación completa en el proceso de aprendizaje.

En definitiva, con este estudio llegamos a la conclusión de que es de vital importancia incluir las representaciones gráficas como otra herramienta más de resolución de

sistemas de ecuaciones y que los alumnos puedan entender la relación que hay entre resoluciones gráficas y numéricas.

El segundo estudio que es de gran interés es el de Radatz (1979), y aunque no se hable concretamente de errores en resolución de sistemas de ecuaciones, en este estudio se habla de los errores que se cometen en general en matemáticas y propone una manera sistemática de categorizar los fallos. El primer tipo de error se relaciona con la necesidad de traducir conceptos del lenguaje natural al lenguaje formal de las matemáticas. El segundo tipo de error surge cuando se intenta representar conceptos mediante imágenes espaciales. El tercer tipo de error, identificado por el investigador, se refiere a las carencias en el conocimiento previo que los estudiantes poseen. Un cuarto tipo de error está relacionado con la rigidez del pensamiento o la falta de flexibilidad para asimilar nueva información. El quinto y último tipo de error ocurre cuando los estudiantes aplican reglas o estrategias de manera inapropiada en contextos de contenido diferente.

El tercer estudio que es de gran interés es el de Chavarría (2014) donde expone los resultados de una investigación cuyo propósito radicó en examinar las complicaciones experimentadas por estudiantes de secundaria en la resolución de problemas algebraicos representados mediante ecuaciones lineales de una variable. Los protagonistas de este estudio fueron alumnos con un desempeño académico limitado en matemáticas y se utilizaron diversas técnicas, tales como la observación en el aula, la aplicación de cuestionarios a los estudiantes, entrevistas no estructuradas con la profesora, y entrevistas clínicas con los alumnos. Entre los hallazgos más destacados se identificaron las principales razones detrás de las dificultades de los estudiantes al aprender a resolver problemas algebraicos, que incluyen aspectos emocionales, carencias en conocimientos previos, escasa comprensión de las relaciones, fatiga, distracción, dificultades en la comprensión de la lectura y una inadecuada utilización de la terminología.

Estos dos estudios nos dan una idea de las dificultades y errores que probablemente pueden tener un alto porcentaje de nuestros alumnos durante el transcurso del curso, por lo que sería ideal detectarlos lo más pronto posible para poder aplicar las medidas necesarias para nuestros alumnos y de esta manera poder adaptar o añadir material específico a nuestras unidades.

Para tener más información concreta sobre las dificultades específicas que pueden tener alumnos de secundaria al resolver sistemas de ecuaciones creí interesante escuchar la opinión y la experiencia de docentes que durante varios años hayan impartido la asignatura. Por ese motivo durante mi periodo de prácticas he preguntado a varios profesores del departamento cuales han sido las dificultades que han ido observando en sus alumnos en la resolución de sistemas de ecuaciones a lo largo de toda su experiencia como docentes. Aquí recojo las razones más comunes:

- **Nueva abstracción matemática:** Las ecuaciones representan una abstracción matemática que puede ser nueva para los estudiantes de segundo de la ESO. A menudo, es la primera vez que se introducen a conceptos algebraicos más

avanzados, como las incógnitas y las operaciones con letras en lugar de números concretos.

- **Falta de base matemática:** Si los estudiantes no tienen una base sólida en aritmética y álgebra básica, es posible que tengan dificultades para comprender los conceptos más complejos relacionados con las ecuaciones. La resolución de ecuaciones implica aplicar reglas algebraicas y aritméticas, por lo que una base deficiente puede dificultar el proceso.
- **Falta de práctica:** Resolver ecuaciones es una habilidad que requiere práctica constante para desarrollarla. Si los estudiantes no están expuestos a una variedad de problemas de ecuaciones y tienen soltura, es natural que les resulte más difícil resolverlas.
- **Abstracción de pasos intermedios:** La resolución de ecuaciones a menudo implica varios pasos intermedios, como combinar términos semejantes, despejar variables y simplificar expresiones. La capacidad de visualizar y seguir estos pasos puede ser complicada para algunos estudiantes. También está el caso extremo de alumnos que creen dominar el proceso, y por rapidez se saltan pasos que le hacen errar.
- **Falta de comprensión conceptual:** Si los estudiantes están resolviendo ecuaciones sin entender completamente lo que están haciendo o si están siguiendo ciertos pasos, es probable que enfrenten dificultades. Es importante que los estudiantes comprendan el significado de una ecuación y cómo sus operaciones afectan.
- **Ansiedad matemática:** Algunos estudiantes pueden experimentar ansiedad al enfrentar problemas matemáticos más desafiantes, lo que puede dificultar su capacidad para concentrarse y pensar con claridad al resolver ecuaciones.
- **Enfoque en la solución mecánica:** Si los estudiantes se centran únicamente en memorizar pasos y procedimientos para resolver ecuaciones en lugar de comprender los conceptos subyacentes, es más probable que tengan dificultades cuando se enfrenten a problemas ligeramente diferentes a los que han memorizado.

Para ayudar a los estudiantes a superar estas dificultades, es importante brindarles una base sólida en matemáticas desde las etapas anteriores, fomentar la comprensión conceptual sobre los procedimientos mecánicos y proporcionar oportunidades regulares de práctica y resolución de problemas.

Por último, quería aportar mi percepción y corta experiencia como docente. Es verdad que solo he estado un mes y medio de prácticas en el instituto, pero llevo más de 10 años impartiendo clases particulares de matemáticas, y aunque los alumnos son diferentes con distintas capacidades y dificultades, he podido apreciar generalmente las siguientes dificultades:

- Por lo general a los alumnos que he impartido clases particulares, en caso de que supiesen resolver sistemas de ecuaciones, lo resolvían de forma mecánica y siempre por el método que era más fácil para ellos. Tienen mucha dificultad para aplicar el método más eficiente para cada caso y siempre aplican el método que saben hacer y se sienten seguros.
- Siempre tienen una gran dificultad para pasar de una representación verbal a una algebraica y sobre todo si le sumas que tienen que interpretar los problemas.
- Los alumnos en cuanto ven que no entienden la lección o no les salen los ejercicios se frustran muy rápidamente y desconectan de la materia. He tenido muchos alumnos que sus profesores los han dado por casos perdidos, o que no se han parado a ayudarles como ellos necesitaban. Se que es mucho más difícil conseguir enseñar a 30 alumnos a la vez, que solo a una persona particularmente, pero es de vital importancia que los docentes seamos pacientes, nos impliquemos y tratemos de conseguir que todos nuestros alumnos comprendan la lección. Además, no todos los alumnos comprenden los conocimientos de la misma manera, y es necesario explicar un mismo conocimiento o concepto de formas diferentes para intentar llegar a todo nuestro alumnado. Trabajar en sistema cooperativo o colaborativo ayuda a que el docente pueda tener momentos en los que pueda dedicar tiempo particular con los alumnos que más lo necesitan, así que es una solución para tratar de corregir este problema.

8. Proyección didáctica

Se ha elegido desarrollar el tema de “Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas” en esta unidad didáctica para alumnos de segundo de ESO. He escogido este tema porque he trabajado durante varios años impartiendo clases particulares de matemáticas a alumnos de este curso, y he observado que en general, la resolución de sistemas de ecuaciones es uno de los temas que más les cuesta a los alumnos asimilar y se les presentan dificultades para superar esta unidad. Además, durante mi periodo de prácticas tuve que impartir este tema a varios cursos de segundo de la ESO, entre ellos a un grupo de PMAR, que me ha dado una nueva perspectiva de la docencia.

8.1 ¿Son importantes los sistemas de ecuaciones?

El primer fundamento para justificar la importancia de los sistemas de ecuaciones es la fundamentación curricular anteriormente mencionada, en la que se lleva a cabo un examen del plan de estudios donde se destacan los temas abordados en el módulo de números y álgebra, así como en el primer módulo de procesos, métodos y actitudes matemáticas y que se desarrolla a lo largo del curso. Este trabajo será enfocado principalmente al módulo de números y álgebra, del cual se extraerán los aspectos que se abordarán en esta unidad didáctica. Es necesario señalar que no se abordarán todos los contenidos de este módulo y nos concentraremos únicamente en los temas relacionados con la resolución de sistemas de ecuaciones.

El Real Decreto 1105/14, de 26 de diciembre y la Orden de 14 de julio de 2016, se establecen los contenidos que se deben enseñar en el curso de matemáticas de segundo curso de secundaria. Específicamente, en relación con los contenidos de los sistemas de ecuaciones lineales, la Orden de 14 de julio de 2016 establece lo siguiente:

"Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas"

Estos contenidos están vinculados a los siguientes criterios de evaluación:

- Emplear el lenguaje algebraico para representar y solucionar problemas a través de la formulación de ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de ecuaciones. Esto se logra al aplicar métodos algebraicos o representaciones gráficas y luego comparar o verificar los resultados obtenidos.

El anterior criterio de evaluación es el que está directamente relacionado con la evaluación de sistemas de ecuaciones, aunque hay más criterios de este bloque que se pueden evaluar en esta unidad como los siguientes:

- Emplear números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes simples, junto con sus operaciones y propiedades, para recopilar, transformar y compartir información, así como para resolver situaciones cotidianas.

- Desarrollar la competencia en el uso de cálculos combinados como un proceso que sintetiza una secuencia de operaciones matemáticas, aplicando correctamente la jerarquía de operaciones o estrategias de cálculo mental en casos simples.
- Seleccionar el método de cálculo más adecuado, ya sea mentalmente, por escrito o con una calculadora, empleando diversas estrategias que simplifiquen las operaciones involucrando números enteros, fracciones, decimales y porcentajes, y evaluando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.
- Aplicar diversas estrategias (como la utilización de tablas, el cálculo de la constante de proporcionalidad, la reducción a la unidad, entre otras) para deducir valores desconocidos en problemas basados en situaciones de la vida real que impliquen cambios porcentuales y relaciones directa o inversamente proporcionales.

Además, en el Real Decreto 1105/2014, se puede hallar los estándares de aprendizaje que se pueden medir en relación con los criterios de evaluación concretamente relacionados con nuestro tema:

- Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.
- Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Finalmente, en la Orden de 14 de julio de 2016 también se puede ver las competencias que se van a desarrollar durante el transcurso de esta unidad, pero concretamente las competencias que se van a desarrollar directamente con los sistemas de ecuaciones son:

- Competencia Matemática y competencia básica en ciencia y tecnología (CMCT).
- Competencias en comunicación lingüística (CCL)
- Competencia para aprender a aprender (CAA).

Indirectamente se desarrollan más competencias como:

- Competencia social y ciudadana (CSC).
- Competencia digital (CD)
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)
- Conciencia y expresiones culturales (CEC)

El segundo fundamento para justificar la importancia de los sistemas de ecuaciones es que tienen una amplia variedad de aplicaciones en la vida diaria en numerosos campos. Algunas de las aplicaciones más comunes:

- **Economía y Finanzas:** Los sistemas de ecuaciones se utilizan para modelar y resolver problemas financieros, como la planificación de inversiones, el cálculo de tasas de interés, la optimización de carteras de inversión y la planificación de presupuestos.
- **Ingeniería:** En ingeniería, los sistemas de ecuaciones se emplean para analizar y diseñar sistemas complejos, como circuitos eléctricos, estructuras, sistemas de control, y más. Ayudan a encontrar soluciones óptimas y a predecir el comportamiento de sistemas en diferentes condiciones.
- **Biología:** Los sistemas de ecuaciones se aplican en biología para modelar la dinámica de poblaciones, el crecimiento de organismos, la propagación de enfermedades y la interacción entre especies en un ecosistema.
- **Química:** En química, se emplean sistemas de ecuaciones para equilibrar reacciones químicas, calcular concentraciones de sustancias en soluciones, y estudiar la cinética de reacciones químicas.
- **Ciencias Sociales:** Los sistemas de ecuaciones se usan para analizar datos en ciencias sociales, como encuestas, estudios de mercado y análisis económicos. Ayudan a tomar decisiones informadas en áreas como la política, la sociología y la psicología.
- **Tecnología de la Información:** En informática y tecnología de la información, los sistemas de ecuaciones se aplican en algoritmos de procesamiento de señales, compresión de datos, redes de comunicación, y en la resolución de problemas en inteligencia artificial y aprendizaje automático.
- **Medicina:** Los sistemas de ecuaciones se utilizan en la medicina para modelar procesos biológicos, como el transporte de oxígeno en la sangre, la propagación de enfermedades infecciosas y la farmacocinética de medicamentos.
- **Logística y Transporte:** En la gestión de la cadena de suministro, la planificación de rutas de transporte y la optimización de inventarios, los sistemas de ecuaciones ayudan a tomar decisiones eficientes para minimizar costos y maximizar la eficiencia.
- **Educación:** Los sistemas de ecuaciones son una parte fundamental del currículo de matemáticas y se enseñan a estudiantes en todo el mundo como una herramienta para resolver problemas del mundo real y desarrollar habilidades de resolución de problemas.

En resumen, los sistemas de ecuaciones son una herramienta poderosa y versátil que se utiliza en una amplia gama de disciplinas y situaciones en la vida diaria para modelar, analizar y resolver problemas. Su aplicación es esencial para tomar decisiones informadas y optimizar procesos en numerosos campos.

Aunque habría más motivos, el último fundamento para justificar la importancia de los sistemas de ecuaciones es que aprender a resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas afecta en el futuro académico de un alumno. Aprender a resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas es una habilidad fundamental en matemáticas que puede tener un impacto significativo en el futuro académico de un alumno. Algunas formas en las que esta habilidad puede influir en el futuro académico de un alumno:

- **Fundamentos matemáticos:** Resolver sistemas de ecuaciones es una habilidad básica en álgebra y proporciona una base sólida para comprender conceptos más avanzados en matemáticas. Estas habilidades se utilizan en una variedad de campos, desde álgebra lineal en matemáticas superiores hasta resolución de problemas en ciencias y tecnología.
- **Desarrollo del pensamiento lógico:** Resolver sistemas de ecuaciones requiere un enfoque lógico y analítico para identificar las soluciones correctas. Esta habilidad de pensamiento crítico es esencial en muchas áreas de estudio y en la vida cotidiana.
- **Aplicación en ciencias y tecnología:** En campos como la física, la ingeniería, la economía y la informática, se utilizan sistemas de ecuaciones para modelar y resolver problemas del mundo real. El conocimiento de cómo resolver sistemas de ecuaciones es esencial para abordar estos problemas de manera efectiva.
- **Habilidades de resolución de problemas:** Aprender a resolver sistemas de ecuaciones ayuda a los alumnos a desarrollar habilidades generales de resolución de problemas. Estas habilidades son transferibles a diversas disciplinas académicas y profesionales.
- **Preparación para niveles educativos superiores:** En la educación superior, especialmente en carreras relacionadas con matemáticas, ciencias, ingeniería y economía, es probable que los alumnos encuentren sistemas de ecuaciones más complejos. Dominar los sistemas de ecuaciones de dos incógnitas en etapas anteriores de la educación prepara a los estudiantes para abordar problemas más avanzados en el futuro.
- **Mejora de la confianza:** A medida que los alumnos adquieren habilidades en la resolución de sistemas de ecuaciones, ganan confianza en sus habilidades matemáticas en general. Esto puede llevar a un mayor interés y participación en matemáticas y ciencias, lo que puede influir en su elección de carreras y estudios posteriores.

En resumen, aprender a resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas es una habilidad fundamental en matemáticas con aplicaciones amplias en diversas disciplinas académicas y profesionales. Puede influir positivamente en el éxito académico y en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico que son valiosas en la educación y en la vida en general.

8.2 Explicación y contextualización del centro

El IES Federico García Lorca se encuentra en Churriana de la Vega, provincia de Granada. Este es el único centro de secundaria de la localidad, y cuenta con más o menos 1200 alumnos y en torno a 100 profesores, y concretamente el departamento de mi especialidad está compuesto por 11 docentes. En este centro se recogen alumnos de la localidad de Churriana de la Vega y de algunas localidades colindantes, conviviendo alumnos de diferentes razas y culturas.



Figura 39: (2017). IES Federico García Lorca. Ahora Granada.

<https://www.ahoragranada.com/noticias/la-ampliacion-del-instituto-de-churriana-de-la-vega-dara-capacidad-a-180-alumnos-mas/>

El centro cuenta con 7 líneas en todos los cursos desde primero de ESO hasta cuarto de ESO, 3 líneas en primero y segundo de bachiller, además del ciclo de formación agraria. También cuenta con las instalaciones de una edificación reciente con varios laboratorios de física y química, varios talleres de tecnología, sala de informática y robótica, gimnasio, 4 pistas deportivas, aulas con proyector y pizarras electrónicas, etc.

Por último, en el centro se desarrollan varios programas para la mejora del alumnado y del centro:

- Programa de robótica aplicada en el aula
- Programa pensamiento computacional
- Programa investigación aeroespacial en el aula
- Programa ALDEA para la educación ambiental para la comunidad educativa
- Programa escuela de paz
- Programa bilingüe en inglés
- Programa Erasmus+
- Programa aula de jaque
- Programa prácticas de alumnado universitario

- Programa de acompañamiento escolar
- Programa forma joven
- Programa comunica

He elegido este centro, porque es un centro público con un gran nivel de enseñanza, buenas instalaciones y porque lo conozco de primera mano por haber estudiado secundaria y bachillerato como alumno, además de conocerlo como docente de prácticas.

Esta unidad didáctica se enfoca en el segundo año de Educación Secundaria Obligatoria de la asignatura de matemáticas. La he enfocado a una clase normal que te puedes encontrar como docente en este centro, y me he inspirado en mis alumnos del grupo de segundo A bilingüe, que es un grupo de estudiantes compuesto por un total de 30 personas.

En cuanto a la diversidad dentro de la clase, en términos generales, tanto las características físicas como las psicológicas de los estudiantes se ajustan a los estándares típicos de un grupo de su edad, en la que conviven alumnos de distintas culturas y razas. En este grupo de alumnos no hay diagnosticado ningún estudiante con necesidades especiales conocidas, pero hay grandes indicios de que uno de ellos tenga Asperger y otro déficit de atención.

Inicialmente, el resto de los integrantes de la clase parecen estar adecuadamente preparados para mantener el ritmo de las lecciones, aunque como en todas las clases, hay alumnos con más dificultades que otros en esta asignatura, más trabajadores o menos y unos más implicados que otros.

Al ser estudiantes de segundo de la ESO, es relevante notar que estos adolescentes, debido a la fase en la que se hallan, experimentan significativos cambios tanto físicos como mentales y cognitivos. Este período representa una transición crucial entre la niñez y la etapa adulta, por lo que es una edad sumamente delicada. También, hay que tener en cuenta que ya no tienen el temor con el que comienzan el primer año de instituto, y suelen ser más rebeldes.

Además de alcanzar las habilidades establecidas en el plan de estudios, es de vital importancia prestar atención a los desafíos y obstáculos que suelen surgir entre los estudiantes en este período. Aunque estos problemas puedan parecer insignificantes para el profesor, su resolución es esencial para evitar la dispersión del estudiante.

8.3 Objetivos

En esta sección se establecerán los objetivos, que representan los logros a los que se aspira que los estudiantes alcancen al concluir la unidad. Este proceso comenzará con una perspectiva general, conforme a las directrices establecidas en la normativa, y luego se irá detallando para concretar los objetivos específicos de esta unidad de enseñanza.

Empezaremos mencionando los objetivos generales de esta etapa, es decir, los logros que se espera que los estudiantes hayan abordado durante todo su tiempo en la Educación secundaria y que hayan alcanzado al completarla. Se recogen a continuación en la figura 4 y estos objetivos se encuentran establecidos en el Real Decreto 1105/2014, específicamente en el artículo 11. Este artículo desarrolla las habilidades que los estudiantes deben adquirir en la Educación Secundaria Obligatoria.

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.*
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.*
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.*
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.*
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.*
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.*
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.*
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.*
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.*
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.*
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.*
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.*

Figura 40: Objetivos de la educación secundaria. Fuente: Art. 11 BOE, enero 2015.

Todos los objetivos son importantes, pero destacaría el objetivo b, f y g, que son los objetivos que más específicamente podemos desarrollar en esta asignatura. En relación con este último comentario, los objetivos específicos de la asignatura de

matemáticas en general los podemos encontrar en la Orden de 14 de julio del 2016 y se recogen a continuación en la figura 5:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Figura 41: Objetivos de la asignatura de matemáticas. Fuente: Núm. 144 Pág. 190 Boletín oficial de la Junta de Andalucía, julio 2016.

Se ha hecho hasta ahora una recopilación de los objetivos generales que hay que tener en cuenta en el desarrollo de la asignatura, pero a partir de ellos se desarrollarán los objetivos específicos que se cumplirán en el desarrollo de esta unidad didáctica:

- Conocer y comprender los conceptos de ecuación, incógnitas, sistemas de ecuaciones, representación de ecuaciones y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.
- Saber representar e interpretar la representación gráfica de un sistema de ecuaciones y utilizarlo como método de resolución gráfica de un sistema de ecuaciones.
- Saber interpretar y transcribir el enunciado de un problema al lenguaje algebraico para obtener un sistema de ecuaciones y, a partir de ella, saber resolverlo.
- Conocer y entender los conceptos de sistema compatible e incompatible.
- Saber distinguir y utilizar los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones
- Saber aplicar los conocimientos adquiridos sobre sistemas de ecuaciones a problemas de la vida diaria que describen dicho problema y encontrar solución a esos problemas cotidianos.
- Fomentar durante el aprendizaje de la unidad el uso de software de representación o herramientas TIC, para la representación gráfica de sistemas de ecuaciones
- Razonar y ser críticos en las resoluciones de los problemas, examinando la opción más óptima y coherente.
- Reflexionar si el resultado obtenido es lógico

8.4 Competencias clave

En el artículo 2 del BOE de enero de 2015 define las competencias clave como *“capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”*

El propósito de las competencias es fomentar en los estudiantes una gama de saberes, capacidades, destrezas y aptitudes que les capaciten para su futuro profesional, laboral y personal. Estas habilidades serán adquiridas a través de la creación de actividades de enseñanza, de modo que los estudiantes puedan desarrollar múltiples competencias simultáneamente.

Anteriormente en el apartado de fundamentación curricular se han recogido y fundamentado las competencias que se tienen que desarrollar a lo largo de todo el bloque de números y álgebra. En este bloque es donde se encuentra el tema de resolución de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, pero me gustaría aclarar que esto no significa que tenemos que desarrollar las siguientes competencias solo en esta unidad, sino que se tienen que desarrollar a lo largo de todas las unidades que componen el bloque. Las competencias de este bloque son las siguientes:

- Competencia Matemática y competencia básica en ciencia y tecnología (CMCT).
- Competencias en comunicación lingüística (CCL)
- Competencia para aprender a aprender (CAA).
- Competencia social y ciudadana (CSC).
- Competencia digital (CD)
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)
- Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Las competencias están estrechamente relacionadas con los objetivos recogidos en el apartado de objetivos, por eso, a partir de ellos se intentará desarrollar las máximas competencias posibles. A continuación, se relacionarán los objetivos con las competencias que se desarrollan:

- El primer objetivo es conocer y comprender los conceptos de ecuación, incógnitas, sistemas de ecuaciones, representación de ecuaciones y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. En este objetivo se trabajarán las competencias CMCT, CAA y CD. Las dos primeras se ven claramente, pero la competencia digital se quiere alcanzar enseñando a los alumnos a resolver sistemas de ecuaciones como método de comprobación con calculadora y con software de cálculo libre como WolframAlpha.
- En el objetivo de saber representar e interpretar la representación gráfica de un sistema de ecuaciones y utilizarlo como método de resolución gráfica de un sistema de ecuaciones se trabajarán las competencias CMCT, CAA y CD. Para desarrollar su competencia digital les enseñaré a usar GeoGebra para representar funciones.
- En el objetivo de saber interpretar y transcribir el enunciado de un problema al lenguaje algebraico para obtener un sistema de ecuaciones y, a partir de ella, saber resolverlo se trabajarán las competencias CMCT y CAA.
- En el objetivo de conocer y entender los conceptos de sistema compatible e incompatible se trabajarán las competencias CMCT y CAA.
- En el objetivo de saber distinguir y utilizar los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se trabajarán las competencias CMCT, CAA CD y SIEP. Las dos primeras se ven claramente, pero la competencia digital se quiere alcanzar con la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales y su comprobación con la calculadora. El sentido de iniciativa lo desarrollarán

eligiendo el método más fácil y óptimo para la resolución de cada sistema que deban afrontar.

- En el objetivo de saber aplicar los conocimientos adquiridos sobre sistemas de ecuaciones a problemas de la vida diaria que describen dicho problema y encontrar solución a esos problemas cotidianos se trabajará sobre todo la competencia de SIEP al interpretar el problema y tratar de usar las herramientas y los conocimientos aprendidos. Trabajarán más competencias, pero dependerá del camino seguido en su resolución
- En el objetivo de fomentar durante el aprendizaje de la unidad el uso de software de representación o herramientas TIC, para la representación gráfica de sistemas de ecuaciones se trabajará sobre todo la competencia de CD.
- En el objetivo de razonar y ser críticos en las resoluciones de los problemas, examinando la opción más óptima y coherente se trabajará sobre todo la competencia de SIEP.
- En el objetivo de reflexionar si el resultado obtenido es lógico se trabajará sobre todo la competencia de SIEP.

Durante el desarrollo de la clase de esta unidad se pueden desarrollar más competencias. Por ejemplo, para desarrollar las competencias en comunicación lingüística (CCL) se propone fomentar tiempos en que los alumnos lean en voz alta las instrucciones de ejercicios, con el fin de comprender completamente su significado y extraer información de manera efectiva con la ayuda de sus compañeros y el profesor. También se desarrollará durante el proceso de revisar ejercicios, al expresarse verbalmente para plantear preguntas, explicar el desarrollo de una actividad o proporcionar la solución a un ejercicio. Por último, se propondrá trabajar en sistema cooperativo o colaborativo, así que durante el transcurso de las tareas o actividades en equipo, los estudiantes interactuarán, expresarán sus puntos de vista y los respaldarán con argumentos.

Para desarrollar la competencia social y ciudadana (CSC) se propone trabajar en sistema cooperativo o colaborativo, además de usar unas pocas normas claras y efectivas para crear un buen ambiente de respeto en clase. De esta manera se establecen buenas relaciones entre los compañeros y el profesor, que permiten estar en clase de manera relajada y tranquila, evitando cualquier forma de tensión. También se conseguirá una comunicación efectiva entre los compañeros durante las actividades en grupo, contribuyendo activamente a su resolución. Sería muy positivo promover la conversación y el respeto, creando un ambiente positivo en el aula donde los alumnos puedan exponer su punto de vista sin temor, respaldándolo con argumentos sin menospreciar las opiniones de los demás.

La competencia que es más difícil de desarrollar en esta unidad es la de conciencia y expresiones culturales (CEC). Para desarrollarla podría ser útil hacer una breve introducción al inicio de la unidad enumerando las diferentes aplicaciones que tiene la

resolución de sistemas de ecuaciones en la actualidad y la importancia que tiene en el día a día. Además, sería motivador para el alumnado, ya que serían conscientes que lo que van a aprender es útil.

8.5 Contenidos

Los contenidos son el conjunto de saberes, capacidades, aptitudes y disposiciones que contribuyen al cumplimiento de los objetivos a cada nivel de educación y al desarrollo de competencias, es decir, los contenidos están relacionados con las competencias y los objetivos.

Anteriormente en el apartado evaluación del currículo se han recogido y fundamentado los contenidos del Real Decreto 1105/2014 que se tienen que desarrollar a lo largo de todo el bloque de números y álgebra. Como he dicho anteriormente, eso no significa que todos esos contenidos se tengan que incluir en esta unidad didáctica, por lo que a continuación, se escribirán los contenidos de este bloque que están incluidos en esta unidad:

- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

También en el bloque de procesos, métodos y actitudes en matemáticas hay contenidos que deben ser desarrollados a lo largo del curso, por lo que a continuación, se escribirán los contenidos de este bloque que están incluidos en nuestra unidad:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

Matizando este último apartado de utilización de medios tecnológicos se incluye en los contenidos de esta unidad el aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineal con dos incógnitas con calculadora como método de comprobación y usar software de representación gráfica como método de resolución gráfica, como podría ser Geogebra.

8.6 Metodología

En esta unidad didáctica, no se limitará al uso de una sola metodología, sino que se emplearán diversas estrategias con el propósito de enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes y facilitar la comprensión de conceptos.

En general, cada sesión comenzará con una metodología más tradicional, donde el profesor ofrecerá una explicación completa de los contenidos del tema, presentando todos los conceptos y propiedades necesarios para que los alumnos avancen en la unidad. Aunque esta metodología puede percibirse como más densa y monótona para el alumno, resulta esencial, ya que proporciona la base teórica necesaria sin la cual no sería posible avanzar. Lo ideal sería que el profesor incluyese recursos y dinámicas en sus explicaciones que amenicen y refuercen los conocimientos transmitidos. Estas actividades ayudarán a los alumnos a consolidar su comprensión del temario visto en clase.

Sería muy recomendable que se grabaran las explicaciones y la resolución de problemas de cada sesión con una tablet y se subiesen al campus virtual de la clase, para que los alumnos puedan repasar los conceptos que necesitan asentar, para que puedan comprender los conceptos que no hayan entendido bien o hayan olvidado, para que los alumnos que tienen dificultad en la asignatura y necesitan más tiempo para asimilar conceptos puedan trabajar en casa y también es una gran solución para los alumnos que no han podido asistir a clase puedan tener los recursos necesarios para poder avanzar al mismo ritmo que sus compañeros.

Durante esta parte de la sesión, los estudiantes tendrán un rol principalmente pasivo, centrándose en las explicaciones o en la toma de notas. No obstante, es responsabilidad del profesor mantener el entusiasmo de los estudiantes, empleando un enfoque apasionado en sus explicaciones y promoviendo debates y preguntas abiertas para mantener un alto nivel de atención en el aula.

Tras la explicación del profesor, se buscará en general implementar una metodología activa en el resto de la sesión durante todas las sesiones de la unidad. Esto estimulará el pensamiento crítico, fomentará la reflexión desde una perspectiva crítica, y la libre expresión de opiniones. Además, impulsará la autonomía, la iniciativa y la participación de los estudiantes en la clase, convirtiéndolos en actores fundamentales en el proceso de aprendizaje y permitiendo una comunicación bidireccional entre docentes y alumnos, así como entre los propios estudiantes.

Uno de los aspectos más destacados de esta unidad didáctica es la importancia de trabajar de manera cooperativa o colaborativa en grupos reducidos. Por esta razón, la mayoría de las actividades se llevarán a cabo en equipos pequeños de 4 alumnos. Esto se debe a la naturaleza social de los seres humanos y a la necesidad de que los alumnos aprendan a colaborar y aprender juntos. Lo recomendable según Domínguez y Molina (2020) sería que en el grupo haya 1 alumno que domine la materia, otro con dificultades de aprendizaje de la materia y dos alumnos que tengan el nivel medio de la clase. De este modo el primero que hemos mencionado, es muy probable que tome un rol más importante en ayudar a sus compañeros, pero a la vez reforzará sus conocimientos mientras explica o ayuda a sus compañeros y sentirá un gran refuerzo positivo al sentirse realizado, frente a una metodología tradicional en la que estaría aburrido en clase. Además, con la enseñanza entre iguales, conseguiremos que los alumnos con dificultades puedan avanzar, además de que el profesor estará disponible para ayudar personalmente a los alumnos con más necesidad. En el contexto del

trabajo en grupo, es esencial fomentar la valoración de la diversidad de opiniones que puede surgir en un entorno colaborativo.

A lo largo de la unidad, se hará uso de herramientas tecnológicas (TIC) de dos maneras. En primer lugar, se utilizarán para buscar información y en segundo lugar, se aprovecharán aplicaciones y recursos web para mejorar la comprensión y asimilación de los conceptos teóricos del tema. Es fundamental que los estudiantes desarrollen la capacidad de evaluar críticamente la información obtenida en la red, ya que están expuestos a una gran cantidad de datos. Deben aprender a filtrar y seleccionar solo la información relevante. En cuanto al uso de aplicaciones y recursos web, estos pueden hacer que el aprendizaje sea más atractivo para los estudiantes, aumentando su motivación y entusiasmo hacia la materia, pero siempre tratando de promover una convivencia digital ética y segura, donde Internet se convierta en un entorno sano y protegido.

Dado que el trabajo en grupo es central en esta unidad, el aprendizaje dialógico cobra gran relevancia. Se busca un diálogo igualitario entre los estudiantes, donde interactúen de manera tolerante y equitativa. Se promoverán debates y discusiones a lo largo de la unidad, alentando a los alumnos a expresar sus opiniones de manera coherente y respetuosa hacia las opiniones de los demás. La capacidad de debatir y llegar a acuerdos en grupo es esencial, ya que estas habilidades pueden ser cruciales tanto en la vida personal como en la profesional.

Por último, se abordará alguna actividad de aprendizaje por investigación (IBL) ya que es más efectiva para enseñar ciencias y matemáticas, porque reta a los alumnos a situaciones abiertas y ricas donde poder investigar. Los estudiantes deben recurrir a sus conocimientos previos, utilizar una variedad de procesos y disfrutar de una mayor autonomía y libertad de pensamiento que en otras metodologías y fomenta la cooperación y colaboración entre estudiantes para encontrar soluciones conjuntas. Con esto, se busca hacer el aprendizaje más atractivo y motivar a los estudiantes para que comprendan la relevancia de las matemáticas en su vida cotidiana, reconociendo su importancia para abordar problemas comunes.

8.7 Recursos y actividades

En este apartado procederemos a listar los recursos y actividades que se emplearán durante la unidad didáctica. El propósito de estos es que los estudiantes fortalezcan su comprensión de los temas tratados y logren adquirir de manera efectiva las habilidades y contenidos que se detallan en las regulaciones regionales.

Para ejecutar la unidad y llevar a cabo las actividades planificadas, se requerirán varios tipos de recursos:

- Libro de texto. Yo sugiero el libro de texto “Matemáticas 2 ESO de Anaya”, ya que se complementa bastante bien a esta unidad didáctica, y se propondrán actividades de este libro en la temporalización.

- Tablet: Es un recurso que recomendaría bastante usar a los profesores en sus explicaciones y correcciones de ejercicios, ya que te permite grabar las clases momentáneamente y te permite proyectar la pantalla de la tablet duplicada para tus alumnos a la vez puedan seguir las anotaciones y recursos usados en la explicaciones.
- Libreta o archivador donde los alumnos puedan hacer ejercicios o tomar apuntes si lo necesitan.
- Pizarra
- Pizarra digital o proyector para usar de apoyo en las explicaciones, para proyectar los ejercicios propuestos y para poder proyectar la tablet.
- Calculadora
- Ordenadores suficientes para cada grupo de trabajo con conexión a la red de internet.
- Campus virtual para subir las clases grabadas, material de apoyo, ejercicios propuestos y noticias importantes.
- Aula del centro
- Software de representación. Concretamente recomiendo usar GeoGebra, que es software libre y con una versión web para que cualquier alumno pueda usarlo sin problemas.
- Software matemático. Concretamente recomiendo usar WolframAlpha, que es software libre y con una versión web para que cualquier alumno pueda usarlo sin problemas.
- Kahoot: Es un programa con versión web que se puede usar como actividad lúdica de refuerzo. El profesor debe crear una serie de preguntas para esta actividad, y después los alumnos se conectan de forma online para participar de este juego. El programa da una puntuación en función del acierto y la rapidez de respuesta.

Por otro lado, para ejecutar la unidad y llevar a cabo las actividades planificadas también se necesitarán actividades. Se utilizarán actividades del libro de texto, actividades propias o actividades IBL que se desarrollarán en el apartado de temporalización. Además en el anexo I se podrán encontrar más actividades de refuerzo y de atención a la diversidad.

8.8 Atención a la diversidad

Como educadores, el objetivo principal es asegurar que todos los estudiantes alcancen los objetivos mínimos establecidos, sin importar sus necesidades educativas individuales. Con el fin de alcanzar este objetivo, es necesario ofrecer programas destinados a atender la diversidad, los cuales deben incluir actividades de refuerzo o ampliación diseñadas según las necesidades individuales de cada alumno.

Durante las primeras sesiones de la unidad, el profesor debe analizar el nivel de competencia de cada estudiante, mediante la observación de los alumnos en el aula. Esta evaluación continuará a lo largo de la unidad para ajustar las actividades según los progresos y desafíos individuales.

Los programas de atención a la diversidad no se limitan a actividades de refuerzo o ampliación. Hay que tener en cuenta que también son importantes para estudiantes con asignaturas suspensas de cursos anteriores o que son repetidores. En tales casos, se proporcionarán actividades específicas para reforzar su conocimiento de forma personalizada.

Para los ejercicios/actividades de refuerzo o ampliación adaptadas al nivel de cada estudiante, el docente debe seleccionar actividades que se proponen en el anexo I y las adaptará según cada caso a sus necesidades educativas.

Dado que el trabajo en grupo es esencial en esta unidad, se formarán grupos siguiendo el criterio del profesor para fomentar la diversidad en todos los aspectos, incluyendo la diversidad de los estudiantes en el aula. Puede ser útil consultar la confección de estos grupos con otros profesores que conozcan a los alumnos para establecer grupos óptimos.

8.9 Temporalización

La siguiente temporalización de esta unidad didáctica necesita un total de 10 horas lectivas, y la última se dedica para realizar una evaluación a través de un examen escrito de una hora de duración. Cada una de estas sesiones tendrá una hora de duración, por lo que se necesitarán 10 horas de clase para completar y desarrollar toda la unidad didáctica. Esta unidad didáctica coincide con el tema 8 del libro de Anaya para segundo de ESO, por lo que se impartirá en el tercer trimestre. En este apartado se añadirán los ejercicios y recursos que se podrían utilizar en cada sesión.

Sesión 1: Ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- En los próximos 10 min el docente hará una breve introducción al tema de resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas explicando las aplicaciones y usos actuales de los sistemas de ecuaciones. En la explicación se debe hacer hincapié en la utilidad en nuestra vida diaria de la resolución de los sistemas de ecuaciones, para que los alumnos entiendan que lo que están aprendiendo es útil.
- Durante los próximos 45 min de esta sesión se explicará que es una ecuación lineal con dos incógnitas, que son los sistemas de ecuaciones y que son compatibles e incompatibles.

Hay que recordar, que el material extra, temario, material de apoyo y sesión grabada del día se deben subir al campus virtual si no se ha hecho.

Sesión 2: Método de Sustitución

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- Después se utilizarán otros 5 min de clase para hacer un breve repaso de lo que se impartió en la sesión 1.
- En los próximos 20 min se explicará el método de sustitución apoyándonos de ejemplos para facilitar su comprensión.
- En los siguientes 20 min se trabajará en sistema colaborativo por grupos de 4 personas. Propondremos ejercicios resolviendo sistemas de ecuaciones por el método de sustitución para asentar conocimientos. Mientras los alumnos trabajan se debe estar ayudando a los alumnos con más dificultades y resolviendo las dudas que surjan personalmente.
- En los últimos 10 min de clase se les enseñarán como pueden resolver sistemas de ecuaciones con la herramienta WolframAlpha. Creo que es útil para que ellos puedan trabajar en casa y comprobar si sus resoluciones son correctas.
- Como tarea en casa se mandarán 2 ejercicios para que lo resuelvan por el método de sustitución y comprueben el resultado con WolframAlpha.

Hay que recordar que hay que subir al campus virtual la sesión grabada del día, los ejercicios propuestos en clase resueltos y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

El enlace web para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con WolframAlpha es el siguiente: <https://es.wolframalpha.com/calculators/system-equation-calculator>

Por otro lado, los ejercicios que se proponen para hacer en clase son del libro de texto que se utilizará en clase, concretamente el de matemáticas 2ESO de Anaya. Se harán en clase los 4 apartados del ejercicio número 1 del tema 8, página 163. El ejercicio que se propone para hacer en casa y subir resuelto al campus virtual es el ejercicio 2 de la misma página, pero además que comprueben la solución con el programa WolframAlpha.

1. Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$
 $y = 3$

b) $x = 4$
 $y = 2$

c) $x = 9$
 $y = 10$

d) $x = 2$
 $y = -1$

2. Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$
 $y = 4$

b) $x = 3$
 $y = 5$

c) $x = 5$
 $y = -2$

d) $x = -1$
 $y = -4$

Figura 42: Ejercicios por método de sustitución. Fuente: Pág. 163 Matemáticas 2 ESO Anaya

Sesión 3: Resolución de sistemas de ecuaciones gráficamente
- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase. - Después se utilizarán otros 10 min de clase para hacer un breve repaso de lo que se impartió en la sesión 2 y también se dedicarán a resolver las dudas que los alumnos hayan tenido en la resolución de las tareas de la sesión 2. Este es un tiempo estimado a mi experiencia, pero si no es suficiente se ampliará sobre la marcha, ya que es más importante resolver dudas para que la base de sus conocimientos sea estable frente a dar mucho temario con muchas dudas y sin interiorizar. - En los próximos 25 min se explicará la resolución de sistemas de ecuaciones gráficamente apoyándose en la herramienta de representación Geogebra y se resolverán algunos sistemas de ejemplo. Es importante relacionar los contenidos adquiridos en la sesión 1 con el método gráfico, ya que por ejemplo entenderán mucho mejor por qué un sistema es compatible o incompatible. - En los siguientes 10 min se trabajará en sistema colaborativo en grupos de 4 teniendo un portátil con acceso a internet por grupo. Se resolverá gráficamente con Geogebra dos ejercicios de la tarea de la sesión 2. Los alumnos tendrán otra herramienta más para verificar y resolver sus ejercicios, además de que les ayudará a comprender mejor los sistemas de ecuaciones, sus resoluciones y por qué los sistemas pueden ser incompatibles, con solución o infinitas soluciones. Mientras los alumnos trabajan se estará ayudando a los alumnos con más dificultades y resolviendo las dudas que surjan personalmente. - En los últimos 10 min de clase se les hará un Kahoot en el que habrá preguntas sobre la teoría que se ha visto en clase y algunos ejercicios de sistemas de ecuaciones que podrán resolver rápidamente con software o manualmente.

El grupo que más puntos consiga tendrá 0.50 puntos más en su examen, 0.25 el segundo y 0.10 el tercero. Creará competitividad y hará que se lo tomen en serio a la vez que se divertirán aprendiendo y asentando conocimientos.

- Como tarea en casa se mandará 1 ejercicio para que lo resuelvan por el método de sustitución, gráficamente con GeoGebra y comprueben además el resultado con WolframAlpha.

Hay que recordar que se subirá al campus virtual la sesión grabada del día, los ejercicios propuestos en clase resueltos y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

EJERCICIO TAREA CASA SESIÓN 3

Resolver por el método de sustitución, gráficamente mediante la herramienta Geogebra y por WolframAlpha el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

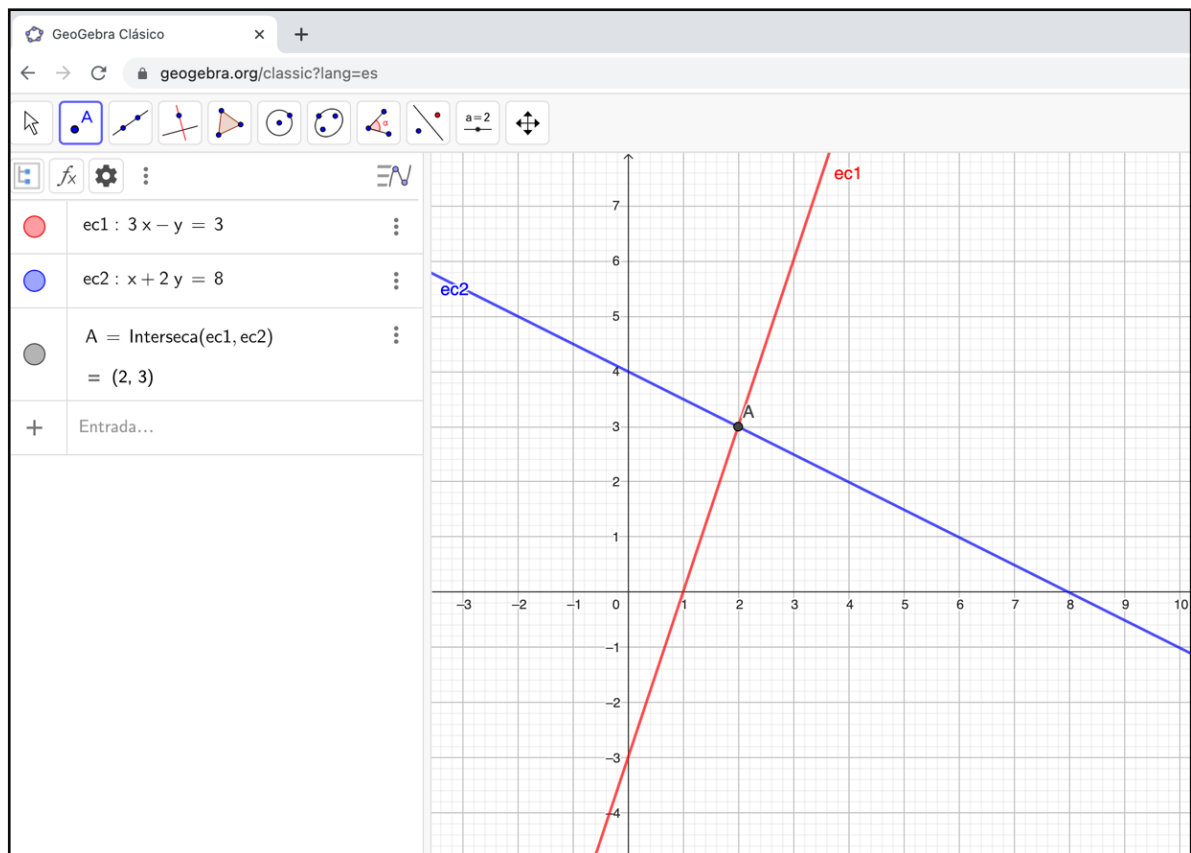


Figura 43: Resolución gráfica del sistema. Fuente: GeoGebra Web

Por otro lado, el enlace web para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con GeoGebra de forma gráfica es el siguiente: <https://www.geogebra.org/classic?lang=es>

Sesión 4: Método de Igualación

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- Después se utilizarán otros 5 min de clase para hacer un breve repaso de lo que se impartió en la sesión 3.
- En los próximos 25 min se explicará la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de igualación.
- En los siguientes 25 min se trabajará en sistema colaborativo en grupos de 4 y con un portátil con acceso a internet por grupo. Se resolverán ejercicios mediante el método de igualación y verificarán el resultado gráficamente con GeoGebra. Mientras los alumnos trabajan se debe estar ayudando a los alumnos con más dificultades y resolviendo las dudas que surjan personalmente.
- Como tarea en casa se mandará 1 ejercicio para que lo resuelvan por el método de igualación y gráficamente con GeoGebra.

Hay que recordar que hay que subir al campus virtual la sesión grabada del día, los ejercicios propuestos en clase resueltos y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

Los ejercicios que se proponen para hacer en clase son del libro de texto que se utiliza en clase. Se harán en clase los 4 apartados del ejercicio número 3 del tema 8, página 164. El ejercicio que se propone para hacer en casa y subir resuelto al campus virtual es el ejercicio 4 de la misma página, pero además que comprueben la solución con el programa WolframAlpha.

3. Resuelve por igualación y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} x = y \\ x = 3y - 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3x \\ y = 5x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 5$

b) $x = 2$

c) $x = 5$

d) $x = -1$

$y = 5$

$y = 6$

$y = -1$

$y = -4$

4. Resuelve por igualación y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 4$

b) $x = -1$

c) $x = -2$

d) Sin

$y = 1$

$y = -2$

$y = 5$

solución.

Figura 44: Ejercicios por método de igualación. Fuente: Pág. 164 Matemáticas 2 ESO Anaya

Sesión 5: Método de Reducción

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- Después se utilizarán otros 5 min de clase para hacer un breve repaso de lo que se impartió en la sesión 4.
- En los próximos 25 min se explicará la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de reducción.
- En los siguientes 25 min se trabajará en sistema colaborativo en grupos de 4 y con un portátil con acceso a internet por grupo. Se resolverán ejercicios mediante el método de reducción y verificarán el resultado gráficamente con GeoGebra. Mientras los alumnos trabajan se debería ayudar a los alumnos con más dificultades y resolver las dudas que surjan personalmente.
- Como tarea en casa se mandará 1 ejercicio para que lo resuelvan por el método de reducción y gráficamente con GeoGebra.

Hay que recordar que hay que subir al campus virtual la sesión grabada del día, los ejercicios propuestos en clase resueltos y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

Los ejercicios que se proponen para hacer en clase son del libro de texto que se utilizará en clase. Se resolverán en clase los ejercicios número 5 y 6 del tema 8, página 165. El ejercicio que se propone para hacer en casa y subir resuelto al campus virtual es el ejercicio 7 de la misma página, pero además que se compruebe la solución con el programa WolframAlpha.

5. Resuelve por reducción sumando o restando directamente las ecuaciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 4y = 17 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

6. Resuelve por reducción siguiendo las instrucciones.

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + y = 1 \\ x - 3y = 10 \end{cases} \quad (\text{Multiplica la 1.ª ecuación por } +3).$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \quad (\text{Multiplica la 1.ª ecuación por } +5 \text{ y la 2.ª por } +3).$$

7. Resuelve por el método de reducción y comprueba las soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + 7y = -8 \\ 5x - 3y = 21 \end{cases}$$

SOLUCIONES

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x = 2 & \text{b) } x = -1 & \text{c) } x = 3 & \text{d) } x = 3 \\ y = -2 & y = 1 & y = -1 & y = -2 \end{array}$$

Figura 45: Ejercicios por método de reducción. Fuente: Pág. 165 Matemáticas 2 ESO Anaya

Sesión 6: Resolución de Problemas

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- Después se utilizarán otros 5 min de clase para hacer un breve repaso de lo que se impartió en la sesión 5.
- En los próximos 10 min se explicará la resolución de sistemas de ecuaciones con una calculadora no programable como las que permiten usar en selectividad.
- Durante 15 min se explicará el primer tipo de ejercicios de aplicación práctica de los conocimientos aprendidos, usando cualquier método aprendido para resolverlos. A partir de aquí se irá introduciendo y trabajando la optimización y el uso del método más adecuado para cada caso.
- En los siguientes 25 min se trabajará en sistema colaborativo en grupos de 4 y con un portátil con acceso a internet por grupo. Se resolverán ejercicios prácticos por cualquier método y se verificará el resultado con software. Mientras los alumnos trabajan se debe estar ayudando a los alumnos con más dificultades, resolviendo las dudas que surjan personalmente y revisando sus progresos.
- Como tarea en casa se mandarán 5 problemas prácticos para que lo resuelvan por el método óptimo y comprobarlo con software.

Hay que recordar que hay que subir al campus virtual la sesión grabada del día, los ejercicios propuestos en clase resueltos y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

Los ejercicios que se proponen para hacer en clase son del libro de texto que se utilizará en clase. Se resolverán en clase los ejercicios número 1 y 2 del tema 8, página 166.

1. Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

EDAD DE PEPA $\rightarrow x$ EDAD DE ENRIQUE $\rightarrow y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{EDAD DE PEPA} = \text{EDAD DE ENRIQUE} + 5 \\ \text{EDAD DE PEPA} + \text{EDAD DE ENRIQUE} = 21 \end{array} \right\}$$

2. En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

CHICOS $\rightarrow x$ CHICAS $\rightarrow y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CHICAS} = \text{CHICOS} + 3 \\ \text{CHICOS} + \text{CHICAS} = 29 \end{array} \right\}$$

Figura 46: Ejercicios de aplicación. Fuente: Pág. 166 Matemáticas 2 ESO Anaya

Los ejercicios que se proponen para hacer en casa y subir resueltos al campus virtual son los ejercicios 9-13 de la página 171 del libro de texto, pero además que comprueben la solución con software.

9.  La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9. ¿Cuáles son esos números?
10.  Calcula dos números sabiendo que su diferencia es 16 y que el doble del menor sobrepasa en cinco unidades al mayor.
11.  Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,50 €, ella tendría el doble. ¿Cuánto lleva cada uno?
12.  Una caña de bambú, de 4,80 m de altura, se quiebra por la acción del viento, y el extremo superior, ahora apuntando hacia el suelo, queda a una altura de 60 cm. ¿A qué altura se ha quebrado la caña?
13.  Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?

Figura 47: Ejercicios de aplicación. Fuente: Pág. 171 Matemáticas 2 ESO Anaya.

Sesión 7: Resolución de Problemas

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- Después se utilizarán otros 5 min de clase para hacer un breve repaso de lo que se impartió en la sesión 5.
- Durante 25 min se explicará el primer tipo de ejercicios de aplicación práctica de los conocimientos aprendidos, usando cualquier método aprendido para resolverlos. Se seguirá trabajando la optimización y el uso del método más adecuado para cada caso.
- En los siguientes 25 min se trabajará en sistema colaborativo en grupos de 4 y con un portátil con acceso a internet por grupo. Resolveremos ejercicios prácticos por cualquier método y verificarán el resultado con software. Mientras los alumnos trabajan se ayudará a los alumnos con más dificultades y se resolverán las dudas que surjan personalmente.
- Como tarea en casa se mandará ejercicios para que lo resuelvan por el método óptimo y comprobarlo gráficamente.

Hay que recordar que hay que subir al campus virtual la sesión grabada del día, los ejercicios propuestos en clase resueltos y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

Los ejercicios que se proponen para hacer en clase son del libro de texto que se utilizará en clase. Se resolverán en clase los ejercicios número 4 y 5 del tema 8, página 167 y el ejercicio 6 de la página 168.

4. En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?
5. La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.
Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €. ¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

Figura 48: Ejercicios de aplicación. Fuente: Pág. 167 Matemáticas 2 ESO Anaya

6. ¿Qué cantidades de café, uno de calidad superior, a 13 €/kg, y otro de calidad inferior, a 8 €/kg, hay que utilizar para conseguir 30 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
C. SUPERIOR	x	13	$13x$
C. INFERIOR	y	8	$8y$
MEZCLA	30	10	300

Figura 49: Ejercicios de aplicación. Fuente: Pág. 168 Matemáticas 2 ESO Anaya

Los ejercicios que se proponen para hacer en casa y subir resueltos al campus virtual son los ejercicios 22-24 de la página 171 del libro de texto, pero además que comprueben la solución con software.

22. En siete saltos, la rana avanza tanto como el saltamontes en cinco. Si da seis saltos cada uno, el saltamontes habrá superado a la rana en 144 cm. ¿Cuánto avanza la rana en cada salto? ¿Y el saltamontes?
23. Cristina tiene el triple de edad que su prima María, pero dentro de diez años solo tendrá el doble. ¿Cuál es la edad de cada una?

	HOY	DENTRO DE 10 AÑOS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

24. El doble de la edad de Javier coincide con la mitad de la edad de su padre. Dentro de cinco años, la edad del padre será tres veces la de Javier. ¿Cuántos años tiene hoy cada uno?

Figura 50: Ejercicios de aplicación. Fuente: Pág. 171 Matemáticas 2 ESO Anaya

Sesión 8: Resolución de Problemas

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos, se revisará la asistencia a clase y se les anunciará que en la próxima clase se dedicará a resolución de dudas y para resolver los ejercicios que propongan, por lo que es importante que estudien, repasen y traigan las dudas y ejercicios para proponer apuntados.
- Durante 15 min se explicarán el último tipo de ejercicios de aplicación práctica de los conocimientos aprendidos, usando cualquier método

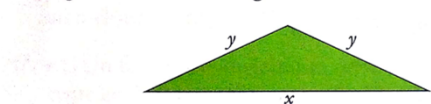
aprendido para resolverlos. Se seguirá trabajando la optimización y el uso del método más adecuado para cada caso.

- En los siguientes 40 min se trabajará en sistema cooperativo en grupos de 4 y con un portátil con acceso a internet por grupo. Se pondrá el reto de resolver un problema por aprendizaje basado en investigación (IBL). El grupo que más puntos consiga tendrá 0.50 puntos más en su examen, 0.25 el segundo y 0.10 el tercero. Creará competitividad y hará que se lo tomen en serio a la vez que irán asentando conocimientos.
- Como tarea en casa se mandarán ejercicios para que lo resuelvan por el método óptimo y comprobarlo gráficamente.

Hay que recordar que hay que subir al campus virtual la sesión grabada del día y abrir el enlace para que puedan entregar la tarea.

Los ejercicios que se proponen para hacer en casa y subir resueltos al campus virtual son los ejercicios 8 y 9 de la página 169 del libro de texto, pero además que comprueben la solución con software.

- 8.** En un triángulo isósceles, el perímetro mide 29 cm y la suma de los lados iguales supera en 3 cm al lado desigual. Calcula la longitud de cada lado.



- 9.** Un rectángulo es 7 cm más largo que ancho y ocupa una superficie de 98 m². Calcula la longitud de sus lados.

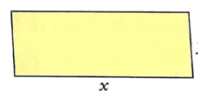


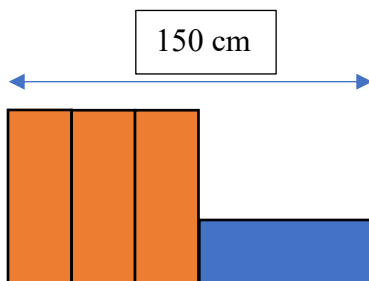
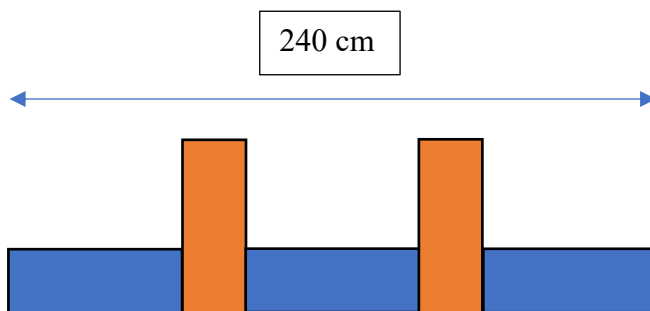
Figura 51: Ejercicios de aplicación. Fuente: Pág. 169 Matemáticas 2 ESO Anaya

EJERCICIO CLASE IBL

OPCIÓN 1:

Se necesita enviar 5 paquetes iguales de dimensiones desconocidas por una empresa de correos. Para que puedan entregarnos un presupuesto del coste del envío esta empresa nos pide las dimensiones del alto y ancho de los 5 paquetes.

Buscamos en casa un metro para medirlas, pero solo encontramos uno muy desgastado en el que solo se pueden ver muy pocas medidas. Intentamos medir las cajas individualmente, pero no podemos medirlo con este metro, pero si podemos medir las siguientes longitudes:



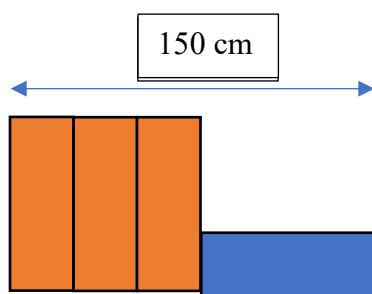
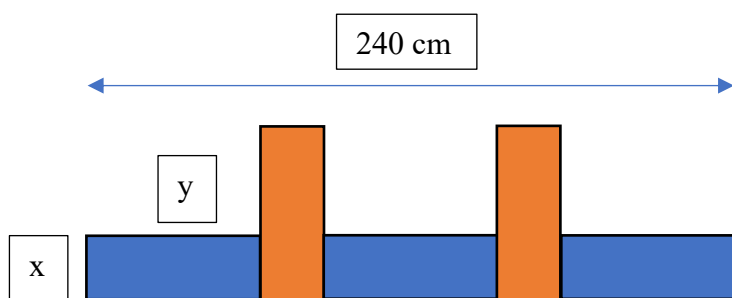
¿Podemos averiguar con estos datos cuanto miden las cajas? ¿Cuánto miden en ese caso?

OPCIÓN 2:

Sería el mismo problema que la opción 1, pero no se les proporcionarían ningún dato. Se les llevaría físicamente 5 cajitas y un metro en el que solo puedan medir dos combinaciones de cajas. En este problema los alumnos tienen que pensar que midiendo varias cajas pueden obtener una solución, buscar la combinación de cajas para que lo puedan medir con el metro, plantear el sistema de ecuaciones y resolver el problema.

Posible solución o soluciones

La resolución de este problema es fácil, solo hay que plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo. En primer lugar, se va a designar la incógnita “y” para el alto de la caja y la incógnita x para el ancho:



A continuación, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$3y + 2x = 240$$

$$y + 3x = 150$$

Por último, se resuelve el sistema de ecuaciones por cualquier método obteniendo que $x=30$ cm e $y=60$ cm.

Curso y conexión con el currículo

- **Curso:** 2 de ESO
- **Competencias a desarrollar:** Evaluar si un número o conjunto de números constituyen soluciones viables para una ecuación o sistema dado. Expresar

situaciones de la vida real a través de ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y ser capaz de resolverlos y analizar los resultados utilizando métodos algebraicos.

- **Objetivos:** Emplear el lenguaje algebraico para representar y resolver problemas, formulando ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de ecuaciones. Aplicar métodos algebraicos o gráficos para resolverlos y verificar los resultados obtenidos.
- **Contenidos/saberes básicos:** Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, métodos algebraicos para su resolución, método gráfico y aplicación práctica en la resolución de problemas.

Plan de clase

Se va a hacer el plan de clase de la opción 2, que creo que es la que más juego daría y con la que más aprenderían. Esta actividad se plantea hacerla al finalizar el tema de resolución de sistemas de ecuaciones en 2 de ESO, que según el libro de Anaya corresponde al tema 8, por lo que se llevará a cabo más o menos en el tercer trimestre.

Sería ideal que esta tarea lo trabajen en sistema cooperativo en grupos de 4. Para darle competitividad, además de que los alumnos se lo tomen en serio, se les diría que el grupo que lo resuelva antes correctamente obtendrá cada miembro 0.5 puntos más en el examen final, 0.25 para el grupo que acabe segundo y 0.1 para el que acabe tercero.

Una vez creado el interés se les dirá que solo pueden utilizar para realizar la tarea calculadora, papel, boli y sus cerebros... Lo ideal sería que no utilicen internet para que no encuentren pistas o un ejercicio similar resuelto. Una vez dicho esto se les dejará que comiencen a investigar.

Intuyo que lo primero que harán será intentar medir directamente una caja, pero verán que no es posible medirlas. A continuación, me iré acercando a los grupos viendo cómo van evolucionando y que me vayan contando sus primeras ideas. A los grupos que lo necesiten les soltaré sutilmente algunas pistas como: "Chicos/as es verdad que es imposible medir una caja con este metro, al igual que es imposible medir el grosor de un folio con una regla, pero si puedes medir con una regla un paquete de 500 folios y sacar el grosor de un folio a partir de esa medida.... ¿Creéis que se puede utilizar el mismo método para calcular el grosor y la altura de una cajita?"

Lo más probable es que después de soltar las pistas, empezarán a probar combinaciones de cajitas hasta encontrar las dos opciones que les permitirán sacar las dos medidas tal como he hecho en el planteamiento de la opción 1.

El siguiente obstáculo para ellos será razonar que necesitan plantear un sistema de ecuaciones o al menos preguntarse cómo pueden averiguar la altura y ancho de la cajita con las medidas obtenidas. Así que de nuevo iré acercándome a los grupos e iré preguntándoles cómo van evolucionando y en función de sus respuestas les ayudaré más o menos dándoles pequeñas pistas. Por ejemplo, les podría decir: “Chicos/as, está claro que hasta ahora tenemos 2 medidas de 2 combinaciones diferentes de cajas, y no podemos obtener directamente sus medidas ya que en las combinaciones aparecen el alto y ancho de las cajas. Así que en conclusión tenemos 2 medidas y dos incógnitas para nosotros que son la altura y el ancho... ¿Creéis que podemos aplicar las herramientas que hemos aprendido en este tema para resolver este problema?”

Creo que una vez planteado el sistema de ecuaciones podrán resolver fácilmente el problema con alguno de los métodos aprendidos.

Sesión 9: Resolución de Dudas y Refuerzo

- Durante los primeros 5 min de clase se dará la bienvenida a los alumnos y se revisará la asistencia a clase.
- En esta sesión se resolverá cualquier duda que los alumnos puedan tener relacionado con el tema. El resto de clase se dedicará a hacer los ejercicios que los alumnos propongan hacer porque necesiten reforzar esos conocimientos.

Sesión 10: Examen

En esta sesión se hará un examen de una hora de duración en la que se evaluará la unidad. Para los cursos bilingües se les añade una pregunta extra en inglés, que si la resuelven correctamente le suman 1 punto extra a la nota del examen, pero nunca les resta puntuación.

Examen matemáticas Resolución Sistema de Ecuaciones Lineales 15/05/2023

Alumno: _____

- 1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por alguno de los métodos de resolución aprendidos. (3 Puntos)

a)
$$\begin{cases} 4x + 6y = 26 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 8x - 2y = -2 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6x + 8y = -2 \\ 2x - 10y = 12 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$

- 2) Resuelve el siguiente problema y justifica la respuesta. (2 Puntos)

Pepe es frutero desde hace más de 20 años y vende fruta con un precio fijo por unidad, es decir, todas las piezas de una misma fruta valen lo mismo independientemente de que sean más grandes o pequeñas. Sara compra en esta frutería 4 melones y 3 sandías que le cuestan 18€ y Pedro por 5 melones y 2 sandías paga 15€. ¿Cuál es el precio de la unidad de un melón? ¿Cuál es el precio de la unidad de una sandía?

- 3) Resuelve el siguiente problema y justifica la respuesta. (2,5 Puntos)

Rodolfo tiene una tienda de videojuegos. Como necesita espacio para vender los nuevos videojuegos que le han llegado, pone a la venta 100 videojuegos en oferta a 40€ la unidad. Cuando lleva vendido una buena parte de los videojuegos decide hacer una nueva rebaja a 25€ hasta que se vendieron todos los videojuegos. El dinero que ha ganado en total ha sido 4000€. ¿Cuántos videojuegos vendió a 40€ y cuantos vendió a 25€?

- 4) Resuelve el siguiente problema y justifica la respuesta. (2,5 Puntos)

El doble de la edad de José coincide con la mitad de la edad de su padre. Dentro de 5 años, la edad del padre será tres veces la de José. ¿Cuántos años tiene cada uno?

- 5) Solve this problem. (+ 1 Point)

There are 150 kilometers distance between Granada and Malaga. At a certain moment, a car departs from Granada to Málaga at 110 km/h, and at the same time, a truck departs from Málaga to Granada at 70 km/h. How far does each one travel until they meet?

8.10. Evaluación

Cuando se trata de definir la forma en que se evalúa el desempeño de los estudiantes en esta unidad didáctica, es esencial considerar qué aspectos específicos se van a evaluar y de qué manera se llevarán a cabo esa evaluación. En términos más simples, se debe reflexionar sobre los criterios de evaluación que se aplicarán y las herramientas que se emplearán para llevar a cabo esta evaluación. Además, al evaluar a un estudiante, es fundamental no solo tomar en cuenta los conocimientos adquiridos en el tema, sino también las habilidades fundamentales que han desarrollado los alumnos.

Anteriormente en el apartado evaluación del currículo se han recogido y fundamentado los criterios de evaluación del Real Decreto 1105/2014 que se tienen que desarrollar a lo largo de todo el bloque de números y álgebra. Eso no significa que todos esos criterios haya que incluirlos en esta unidad didáctica, por lo que a continuación, se escribirán los criterios de evaluación de este bloque que están incluidos en nuestra unidad:

- Explicar de manera fundamentada el procedimiento seguido al solucionar un problema de forma oral.
- Aplicar procesos de razonamiento y estrategias de solución de problemas, incluyendo los cálculos necesarios y la verificación de las soluciones.
- Transformar situaciones de la vida cotidiana en contextos matemáticos mediante la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la vida real.
- Reconocer el valor de la modelización matemática como un recurso para abordar problemas de la vida cotidiana, evaluando la efectividad y limitaciones de los modelos empleados o creados.
- Fomentar y desarrollar actitudes personales relacionadas con el trabajo matemático.
- Superar obstáculos y dudas al enfrentar situaciones desconocidas.
- Reflexionar sobre las decisiones tomadas y aprender de ellas para situaciones similares en el futuro.
- Utilizar herramientas tecnológicas apropiadas.
- Aplicar operaciones y propiedades de números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes básicos para recopilar, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.
- Emplear lenguaje algebraico para representar y resolver problemas mediante la formulación de ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de ecuaciones, aplicando métodos algebraicos o gráficos y verificando los resultados obtenidos.

En resumen, estos criterios de evaluación son necesarios para verificar que se han adquirido las competencias clave y los objetivos necesarios. Para evaluarlos se valorará y se tendrán en cuenta lo siguiente:

- **Examen escrito (50%):** Se ha dedicado una sesión para realizar un examen escrito individualmente, necesario para evaluar que cada alumno haya adquirido los conocimientos y habilidades que se esperan en esta unidad. Será igual para toda la clase, a excepción de algunos alumnos que necesiten una adaptación curricular. En este examen no se valorará solo que el resultado obtenido sea correcto, sino que se valorarán más aspectos como procedimientos, justificación de los resultados obtenidos, justificación del procedimiento seguido, limpieza, orden y buen manejo de los conceptos matemáticos.
- **Trabajo en casa (30%):** Esta puntuación se obtendrá con las tareas que se habilitan en el campus virtual. Por ejemplo, como en esta unidad se han mandado 14 ejercicios para hacer en casa, cada ejercicio tendrá más o menos un valor del 2% de la nota final de esta unidad. Obtendrá ese valor si entrega la tarea hecha y justificando los procedimientos y resultados. De esta manera se incentivará a trabajar y estudiar poco a poco todos los días, y además surgirán dudas cuando se enfrenten solos a los problemas que podrán solventarse en clase. Además, es importante que se valore el trabajo continuo y no que dependa su puntuación solo de un examen final para animarlos a trabajar y estudiar en la asignatura y quitarles presión en el examen final.
- **Comportamiento en clase (10%):** Todos los alumnos partirán con el valor completo, y se le restará puntuación por cada comportamiento negativo que el profesor vaya anotando.
- **Trabajo en clase (10%):** Todos los alumnos partirán con el valor completo, y se le restará puntuación si no trabajan en clase.

9. Conclusión

En conclusión, este Trabajo de Fin de Máster ha abordado de manera exhaustiva la creación y temporalización de una unidad didáctica centrada en la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. A lo largo de este proceso, se ha examinado detenidamente los objetivos de aprendizaje, las estrategias pedagógicas y las herramientas didácticas utilizadas para mejorar la comprensión de este importante tema matemático.

Una unidad didáctica bien diseñada puede ser una herramienta efectiva para facilitar el aprendizaje, y concretamente en esta unidad, el objetivo es facilitar la resolución de sistemas de ecuaciones, promoviendo el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la colaboración entre los estudiantes. Con la evaluación se podrá demostrar si aplicando esta unidad se produce un aumento significativo en el rendimiento y la comprensión de los estudiantes en relación con este tema después de la implementación de la unidad didáctica.

Además, se ha destacado la importancia de la adaptación de los recursos y estrategias didácticas a las necesidades específicas de los estudiantes, promoviendo un enfoque personalizado en la enseñanza de las matemáticas. Este enfoque puede ayudar a abordar las dificultades individuales de los estudiantes y fomentar un ambiente de aprendizaje inclusivo.

En resumen, esta unidad didáctica es un recurso valioso para mejorar la comprensión y el rendimiento de los estudiantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la educación es un campo en constante evolución, y es necesario seguir investigando y adaptando enfoques pedagógicos para satisfacer las cambiantes necesidades de los estudiantes y los desafíos educativos del siglo XXI. Este trabajo contribuye a esta tarea al proporcionar una base sólida para la enseñanza efectiva de este importante concepto matemático.

10. Referencias Bibliográficas

- Dominguez, F.J., y Molina, M.D. (2020). Sociedad, Familia y Educación. UJA Editorial.
- Merino, L., y Santos, E. (2010). Álgebra Lineal con métodos elementales. Paraninfo.
- Alberca, P., y Martín, D. (2001). Métodos matemáticos, álgebra lineal y geometría. Ediciones Aljibe.
- Colera, J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2017). Matemáticas 2 ESO. Anaya.
- Nieto, M., Pérez, A., Estebaranz, J., y Alcaide, F. (2021). Matemáticas Andalucía 2 ESO. Ediciones SM.
- Almodóvar, J., García, P., Gil, J., y Nortes, A. (2012). Matemáticas 2 Curso. Santillana.
- Árias, J.M, y Maza, I. (2015). Matemáticas 2 ESO. Bruño.
- Contreras, I; Fernández, I; Pérez, J.L. y Uriondo, J.L. (2012). Matemáticas 2 ESO. Oxford Educación.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education.
- (26 de julio de 2016). Boletín Oficial de la Junta de Andalucía. Juntadeandalucia.es.
<https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/BOJA16-144-00479.pdf>
- (3 de enero de 2015). Boletín Oficial del Estado Español. Boe.es.
<https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Oaxaca, J.A., De la Cruz, J., y Sánchez, J.M. Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Universidad Nacional Autónoma de México.
<http://www.dcb.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/ponencias/41.pdf>
- Chavarria, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales. Universidad Nacional de Costa Rica.
<https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/6009/5907>.
- (2017). IES Federico García Lorca. Ahora Granada.
<https://www.ahoragranada.com/noticias/la-ampliacion-del-instituto-de-churriana-de-la-vega-dara-capacidad-a-180-alumnos-mas/>

- (2023). Gratuidad de libros de textos en centros públicos y concertados de la provincia de Andalucía. Junta de Andalucía. <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto>.
- (2023). ¿Para qué sirven las ecuaciones en la vida diaria?. Udoe News. <https://udoe.es/para-que-sirven-las-ecuaciones-en-la-vida-diaria/>
- Oteiza, M. (2019). Enseñanza del Álgebra en Secundaria: Estado actual y propuestas didácticas. Universidad de Islas Baleares. https://dspace.uib.es/xmlui/bitstream/handle/11201/151008/tfm_2018-19_MFPR_mob868_2544.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- García, J. (2010). Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos. Universidad de Granada. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf
- (Septiembre 2018). La enseñanza de la ciencia basada en indagación. Una revisión sistemática de la producción española. Revista de educación. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:af742299-bb50-4c35-b990-24af7fe010b1/10aguileraesp-ingl-pdf.pdf>

Anexo I: Actividades

Actividades de refuerzo

En resumen, las actividades de refuerzo tienen como objetivo principal fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, abordar las dificultades individuales, prepararlos para niveles educativos posteriores y fomentar la confianza en sí mismos. Estas actividades son una herramienta importante para ayudar a los estudiantes a alcanzar su máximo potencial académico reforzando los conocimientos impartidos en clase.

A continuación, se adjuntan los enlaces de los solucionarios de los libros de texto recomendados. En estos solucionarios se pueden encontrar muchos ejercicios propuestos junto con sus soluciones, y queda a elección del docente suministrar este material como considere más adecuado. Sería interesante tener algunos ejercicios subidos directamente en el campus virtual con sus soluciones para que el alumnado pueda realizar más ejercicios similares a los que se hacen en clase o se mandan como tarea, para reforzar los conocimientos y ellos mismos puedan verificar sus resultados. Y por otro lado sería interesante suministrar algunas de estas actividades sin soluciones ni ayudas en el proceso, para que aprendan a enfrentarlos ellos solos como en el examen.

- Nieto, M., Pérez, A., y Alcaide, F. (2023). Solucionario tema 7 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial SM. https://solucionarios10.com/wp-content/uploads/TEMA-7-Sistemas-de-ecuaciones-solucionarios10.com_.pdf
- Colera, J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2017). Solucionario tema 8 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial Anaya. <https://solucionarios10.com/wp-content/uploads/Matematicas-2-ESO-Anaya-tema-8-Sistemas-de-ecuaciones.pdf>
- Colera, J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2017). Solucionario autoevaluación tema 8 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial Anaya. <https://solucionarios10.com/wp-content/uploads/Tema-8-Autoevaluacion-2-ESO-Matematicas-Anaya.pdf>
- Árias, J.M, y Maza, I. (2017). Solucionario tema 9 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial Bruño. https://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-2/Resueltos/Bruno/09_sistemas.pdf
- (2023). Solucionario tema 7 Sistemas de ecuaciones lineales. Editorial Santillana. https://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-2/Resueltos/Santillana/07_sistemas_ecuaciones.pdf

Actividades para alumnado de altas capacidades

Dentro de la atención a la diversidad está el alumnado con altas capacidades, que es aquel que exhiben habilidades destacadas o potenciales que indican un alto nivel de

habilidad en áreas del ámbito académico como la inteligencia, la creatividad, etc. Un plan educativo efectivo debe promover el óptimo desarrollo de las capacidades individuales de cada estudiante y por ellos se buscarán medidas que identifiquen las aptitudes matemáticas sobresalientes de los alumnos y se contribuirá a su progreso en áreas de conocimiento específicas. Resumiendo, el enriquecimiento curricular se fundamenta en tres principios esenciales:

- Profundizar en los contenidos del currículo.
- Ampliar los contenidos del currículo.
- Evitar anticipar contenidos correspondientes a cursos superiores.

Para ello se le suministrará al alumno con altas capacidades material extra. Queda a criterio del docente cuando y como entregar esos ejercicios, pero una opción es darle este material extra cuando acabe los ejercicios que se realicen durante los periodos de clase, ya que seguramente los resuelva con anterioridad, y es un material que le ayudará a retarse y a ampliar sus conocimientos.

A continuación, se adjuntan unos enlaces con material de ampliación, pero también se pueden utilizar los ejercicios con mayor dificultad de las actividades de refuerzo planteadas en el apartado anterior, o utilizar los ejercicios de refuerzo aumentando su dificultad para adaptarlos a sus necesidades.

- Nieto, M., Pérez, A., y Alcaide, F. (2023). Actividades de ampliación tema 7 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial SM. https://iesaricel.org/javierpl/Archivos/Eso2/Ampliacion%20SM/2ESOMAPI_AM_ESU07.pdf
- (2023). Actividades de ampliación Tema 8 Sistema de ecuaciones lineales. Oxford Educación. https://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-2/Resueltos/Ampliacion/8_sistemas_de_ecuaciones.pdf

Actividades para la atención a la diversidad

La atención a la diversidad en un aula se refiere a la práctica educativa de reconocer, valorar y abordar las diferencias individuales y las necesidades variadas de los estudiantes que forman parte de un grupo diverso de aprendices. En un contexto de secundaria, esta diversidad puede manifestarse en varias formas como por ejemplo con diferencias de habilidades, estilos de aprendizaje, cultural, lingüística, necesidades especiales, intereses, talentos o socioeconómica.

Para abordar la diversidad en un aula de secundaria, los docentes suelen utilizar estrategias pedagógicas flexibles y diferenciadas que se adaptan a las necesidades de los estudiantes. Esto puede incluir la individualización del plan de estudios, el uso de métodos de enseñanza variados, la provisión de apoyo adicional cuando sea necesario y la promoción de un ambiente inclusivo y respetuoso.

Es imposible suministrar un material concreto para cada situación de diversidad que se pueda encontrar en clase, ya que el espectro es muy amplio y además es específico en

cada caso y puede ser diferente para cada alumnado con necesidades especiales similares. A continuación, adjunto material específico para la atención a la diversidad en el aula, pero es de vital importancia la labor de los docentes de detectar cuales son las necesidades de cada alumno para aportarle el material y la ayuda necesaria. Como he dicho anteriormente, el espectro es muy amplio, ya que por ejemplo puedes encontrarte por un lado alumnos con altas capacidades y por otro lado alumnos con grandes dificultades de aprendizaje. Así que además de este material, se puede utilizar las actividades y ejercicios propuestos en los apartados anteriores y adaptarlos a las necesidades de cada alumno.

- Colera, J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2017). Ficha de Atención a la diversidad tema 8 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial Anaya.
https://drive.google.com/file/d/1UpMCigXQE6cJWtcWSwJCb_Whuj983Pmy/view
- (2023). Repaso y apoyo tema 7 Sistemas de ecuaciones lineales. Editorial Santillana.
<https://drive.google.com/file/d/1j7U580sVEiBtNKPfI83qwEiLDjogZElf/view>
- Árias, J.M, y Maza, I. (2017). Fichas de repaso tema 9 Sistema de ecuaciones lineales. Editorial Bruño.
https://drive.google.com/file/d/1onM30E1svNIP4Te3opl-8TSG4j_ns-Yt/view