



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Alumno/a: **Gámez Pérez, Antonia**

Tutor/a: Prof. D^a. Consuelo Rosales Ródenas
 Prof. D^a. Cristina Rodríguez Montealegre

Dpto: Matemáticas Aplicadas
 Matemáticas

Junio, 2020

INDICE

1.	INTRODUCCIÓN	2
2.	OBJETIVOS	3
3.	FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	5
3.1.	INTRODUCCIÓN	5
3.2.	LA VISUALIZACIÓN EN EL CONTEXTO EDUCATIVO	6
3.2.1.	Antecedentes	6
3.2.2.	La visualización en la geometría	7
3.2.3.	Conceptos geométricos elementales	9
3.3.	ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS	10
3.3.1.	Conocimientos geométricos emergentes en un problema espacial	11
3.3.2.	Exploración de conocimientos relativos a visualización de objetos tridimensionales	13
3.4.	INVESTIGACIONES SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL	17
3.5.	CONCLUSIÓN	18
4.	FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA	20
4.1.	INTRODUCCIÓN	20
4.1.1.	Geometría y Topología	20
4.1.2.	El origen de la geometría	21
4.2.	PRELIMINARES: VISION ESPACIAL, DEFINICIONES DIEDRO Y TRIEDRO	22
4.2.1.	Definición de diedro	23
4.2.2.	Definición de triedro	24
4.3.	DEFINICIÓN DE SUPERFICIE POLIEDRICA Y POLIEDRO CONVEXO. ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN DE POLIEDROS	25
4.3.1.	Elementos y clasificación de poliedros	25
4.4.	TEOREMA DE EULER	28
4.4.1.	TEOREMA. Sólo existen 5 sólidos platónicos: tetraedro, cubo octaedro, icosaedro y dodecaedro	29
4.4.2.	Teorema de las características de Euler	31
4.5.	GEOMETRÍA EN EL PLANO. POLÍGONOS REGULARES	34
4.6.	SÓLIDOS PLATÓNICOS	34
4.6.1.	Origen	34

4.6.2.	Dualidad entre los sólidos platónicos.....	36
4.6.3.	Relación entre los sólidos platónicos y la razón áurea	39
4.7.	SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS.....	45
5.	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	48
6.	PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA	61
6.1.	TÍTULO	61
6.2.	JUSTIFICACIÓN.....	61
6.3.	CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA	62
6.3.1.	Situación geográfica del centro	63
6.3.2.	Aspectos demográficos y socioeconómicos del municipio	63
6.3.3.	Características generales del alumnado.....	64
6.3.4.	Descripción del centro. Instalaciones y materiales	64
6.3.5.	Descripción del aula.....	65
6.4.	OBJETIVOS	66
6.4.1.	Objetivos generales de la etapa	67
6.4.2.	Objetivos en el área de matemáticas de 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.....	67
6.4.3.	Objetivos concretos de la unidad	69
6.5.	COMPETENCIAS CLAVE.....	69
6.6.	CONTENIDOS	72
6.6.1.	Contenidos de la unidad didáctica	72
6.6.2.	Contenidos interdisciplinares y transversales.....	73
6.7.	METODOLOGÍA.....	73
6.8.	ACTIVIDADES Y RECURSOS	75
6.8.1.	actividades.....	75
6.8.2.	Recursos.....	77
6.9.	ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	77
6.10.	TEMPORALIZACIÓN	79
6.11.	EVALUACIÓN	90
6.11.1.	Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.....	90
6.11.2.	Criterios de calificación	90
7.	CONCLUSIONES.....	92

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94
ANEXO 1. INVESTIGACIONES SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL	98
ANEXO 2. DESARROLLO DE ACTIVIDADES	112
ANEXO 3. PLAN DE CLASE DE SESIONES 10, 11, 12 y 13	163
ANEXO 4. CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES EN LA UNIDAD DIDÁCTICA	181
ANEXO 5. RÚBRICAS DE EVALUACIÓN	184
REFERENCIAS DE IMÁGENES Y TABLAS.....	193

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster se elabora con el objetivo de poner en práctica los conocimientos adquiridos en el *“Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”*, en la especialidad de Matemáticas, durante el curso 2019/2020.

En una primera fase, previa a la elaboración de este documento, se ha llevado a cabo un amplio trabajo de investigación sobre la importancia de la geometría espacial y la visualización en la resolución de problemas y situaciones en distintos contextos. El objetivo es alcanzar conocimientos, técnicas y herramientas adecuadas para una mejora del desarrollo de la actividad del docente, derivadas de mis propias inquietudes y expectativas hacia una futura vida profesional y aplicando los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del máster en las distintas áreas y asignaturas impartidas.

El trabajo se centra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos relativos a las figuras geométricas en el currículo de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 3º de Educación Secundaria Obligatoria, según el Real Decreto (RD) 1105/2014.

En primer lugar se muestra el análisis realizado de las investigaciones sobre el papel de la visualización y razonamiento espacial, así como su metodología de enseñanza y aprendizaje en el contexto educativo. A continuación, se desarrolla el tema de oposiciones relacionado con las figuras geométricas y se presenta una comparativa de varios libros de texto de distintas editoriales que tratan unidades didácticas referentes al tema elegido. Por último, se realiza una unidad didáctica sobre cuerpos geométricos, con la finalidad de ofrecer al alumnado recursos que le ayuden a adquirir las herramientas necesarias para poder enfrentarse a distintos problemas surgidos en diversos contextos (educativos y cotidianos), utilizando para ello métodos de enseñanza-aprendizaje motivadores y prácticos.

PALABRAS CLAVE

Matemáticas, cuerpos geométricos, visualización espacial, motivación, modelización.

ABSTRACT

This Final Master's Project has been prepared with the aim of putting into practice the knowledge acquired in the *“Master's Degree in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching”*, in the speciality of Mathematics, during the 2019 / 2020.

The first phase, prior to the preparation of this document, extensive research has been carried out on the importance of spatial geometry and visualization in solving problems and situations in different contexts. The objective is to achieve adequate knowledge, techniques and tools to improve the development of the teacher's activity, derived from my own concerns and expectations towards a future professional life and applying the knowledge acquired during the development of the master's degree in the different areas and subjects taught.

The work focuses on the teaching-learning process of the contents related to geometric figures in the mathematics curriculum oriented to the academic teachings of the 3rd year of Compulsory Secondary Education, according to Royal Decree (RD) 1105/2014.

Firstly, it shows the analysis that has been made of the investigations on the role of visualization and spatial reasoning, as well as its teaching and learning methodology in the educational context. Next, the subject of oppositions related to geometric figures is developed and a comparison of several textbooks from different publishers that deal with didactic units referring to the chosen topic is presented. Finally, a didactic unit on geometric bodies is carried out, in order to offer students resources that help them acquire the necessary tools to face different problems that arise in various contexts (educational and daily), using teaching methods -motivating and practical learning.

KEYWORDS

Mathematics, geometric bodies, spatial visualization, motivation, modelling.

1. INTRODUCCIÓN

Se redacta el presente Trabajo Fin de Máster (TFM) como finalización del Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”, en la especialidad de Matemáticas, durante el curso 2019/2020. Se efectúa un análisis detallado tanto de investigaciones relativas a los problemas de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de las matemáticas como a la integración de nuevos recursos en el aula, con la finalidad de mejorar la motivación del alumnado, poniendo en práctica los conocimientos adquiridos durante la realización del Máster en las distintas asignaturas impartidas.

El documento está centrado en el contenido relativo a “*Cuerpos geométricos*” en el 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria, según el Real Decreto 1105/2014, está estructurado en una serie de fundamentaciones teóricas previas al desarrollo posterior de la unidad didáctica.

Se estructura este trabajo en dos partes fundamentales. La primera, en la que se desarrollan los fundamentos Didácticos, Epistemológicos y Curriculares y una segunda parte en la que se diseña una unidad didáctica teniendo en cuenta lo desprendido del análisis de los fundamentos anteriores.

En la primera parte, se analizarán diversas investigaciones sobre el proceso de visualización espacial en el contexto educativo, especialmente en la geometría, la conexión entre visualización y razonamiento espacial y cómo los problemas espaciales, planteados como una actividad de modelización espacio-geométrica, pueden constituir un posible fundamento de la geometría elemental. También se profundizará en la formación del pensamiento matemático-científico a través del desarrollo de un tema matemático íntimamente relacionado con la Unidad Didáctica a desarrollar (Cuerpos geométrico) y se realizará un exhaustivo análisis de libros de texto, examinando si

contienen los requisitos matemáticos necesarios para que el alumnado adquiriera diversas competencias.

En la segunda parte del TFM, se realiza una Unidad Didáctica en la que se reflejan, los contenidos seleccionados y los objetivos que se plantean para el desarrollo de las competencias clave que estipula el RD1105/2014.

Para el diseño de las sesiones de la Unidad Didáctica, se han aplicado metodologías motivadoras, el razonamiento y la visualización como herramientas muy útiles en la resolución de problemas. Además, están dirigidas a fomentar el pensamiento crítico mediante procedimientos abiertos que no requieran una respuesta inmediata ni preestablecida, poniendo en juego un enorme conjunto de conocimientos.

En la aplicación de estas metodologías activas, que suponen una dinamización del aula, se ha buscado integrar y fomentar la participación del alumnado en su proceso de aprendizaje, con el objetivo de que vaya desarrollando una mayor autonomía.

El tema en torno al cual se ha estructurado esta Unidad Didáctica es el de cuerpos geométricos. Se ha tenido en cuenta que el aprendizaje de la geometría tiene como base la comprensión de las características, propiedades y relaciones de los objetos, ofreciendo al alumnado la posibilidad de crear una red de conexiones con el mundo que les rodea. La geometría forma la esencia de la creación, del diseño, de la arquitectura, del arte, biología, geología, química, física o ingeniería.

El conocimiento de la geometría es un instrumento útil para generar formas geométricas, proporciones, medidas, transformaciones, simetrías, repeticiones... Así mismo, permite obtener una visión global de los problemas en la búsqueda de soluciones y proporciona la capacidad para organizar datos, generar o buscar patrones útiles para la resolución de problemas en distintas áreas. Además, contribuye al desarrollo en el alumnado de habilidades de visualización, pensamiento crítico, resolución de problemas, capacidad de conjeturar, crear argumentos lógicos, imprescindibles en otras áreas de las matemáticas, como el razonamiento deductivo necesario en la búsqueda de la solución de una situación cualquiera.

Las tareas y actividades propuestas en la Unidad Didáctica, basadas en situaciones reales, fomentarán la motivación y el aprendizaje significativo, estructurando de manera interdisciplinar y transversal los conocimientos adquiridos.

2. OBJETIVOS

El presente TFM se ha elaborado aplicando los conocimientos adquiridos durante la realización de este Máster y persiguiendo los siguientes objetivos:

- Ahondar en mi formación, orientada a la adecuada capacitación como docente, investigando sobre todas las herramientas imprescindibles para el correcto funcionamiento de la clase.
- Profundizar en la investigación educativa y reconocer la importancia de los procesos de innovación docente en sus distintos campos para modificar y mejorar la realidad educativa existente.

- Proponer actividades y tareas docentes que responden a los conocimientos adquiridos durante la realización del máster y el proceso de investigación previo a la realización de la Unidad Didáctica.
- Investigar sobre distintas estrategias y procesos de enseñanza y aprendizaje que transformen las matemáticas en una asignatura más abierta enriquecedora en la formación del alumnado, resaltando los aspectos creativos para despertar su interés.
- Presentar tareas que vayan a suponer para el alumnado una oportunidad de aprender a modelizar la realidad del mundo que les rodea, propiciando un “aprendizaje funcional”.
- Utilizar técnicas de aprendizaje cooperativo en las diversas tareas propuestas, teniendo en cuenta la diversidad y los distintos ritmos de aprendizaje.
- Conocer y utilizar las herramientas TIC que posibilitan una mejora en los procesos de comprensión y visualización de diversas áreas matemáticas.
- Profundizar en la práctica y hacer una propuesta de planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito de las matemáticas, utilizando recursos didácticos y tareas oportunos, atendiendo al nivel de conocimiento previo del alumnado así como a las distintas necesidades especiales de apoyo educativo.
- Realizar un análisis de las presencias y carencias presentes en la educación actual enfocado en la especialidad de matemáticas.
- Realizar un estudio sobre la influencia de la visualización y el razonamiento espacial en la adquisición de saberes para la mejora de la competencia matemática.
- Aportar ideas para fomentar la motivación del alumnado, lo que redundará en un mejor aprendizaje y en un aumento de su autoestima.
- Promover la interdisciplinariedad y la capacidad del alumnado para investigar y resolver problemas en distintos entornos desconocidos o nuevos.
- Conocer las distintas características del alumnado, motivaciones, contexto social para conseguir una mejora en su adecuado desarrollo personal y académico.
- Hacer una propuesta de unidad Didáctica que fomente establecer un adecuado clima en el aula, favorecer la convivencia y el aprendizaje del alumnado.
- Conocer los contenidos curriculares relacionados con las matemáticas, sus objetivos y estándares de aprendizaje.
- Conocer, comprender y utilizar la normativa así como la institución que representa el sistema educativo estatal y autonómico.

3. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

3.1. INTRODUCCIÓN

Este estudio está motivado por la conveniencia de realizar un análisis del proceso de transposición didáctica, para el alumnado de secundaria, de los contenidos sobre geometría espacial.

En principio, cabe destacar que el aprendizaje de la Geometría ofrece la posibilidad de crear una red de conexiones con el mundo que nos rodea y parte de la comprensión de las características, propiedades y relaciones de los objetos. La geometría forma la esencia de la creación del diseño, de la Arquitectura. El aprendizaje de la geometría espacial conlleva la capacidad de poder crear y percibir la información en tres dimensiones e iniciarse en los enriquecedores procesos de creatividad espacial.

La geometría es un instrumento para generar formas geométricas, aportar proporciones y medidas, poder realizar transformaciones que generen simetrías, repeticiones... Asimismo, permite obtener una visión global de los problemas para la búsqueda de soluciones, proporciona la capacidad para organizar datos, generar o buscar patrones en los que basarse para la resolución de problemas de otras áreas. También es una herramienta para formular conjeturas que puedan después ser validadas y debidamente argumentadas. Es por ello, que su conocimiento contribuye al desarrollo en el alumnado de habilidades de visualización, pensamiento crítico, resolución de problemas, de la capacidad de conjeturar y crear argumentos lógicos, imprescindibles en otras áreas de las matemáticas y las ciencias en general. Contribuye a fortalecer el razonamiento deductivo, necesario para aplicarlo en la búsqueda de soluciones de una gran variedad de problemas.

En esta investigación se han analizado los textos de A. Gutiérrez (2011), J.D. Godino, M. Gonzato, A. Contreras, T. Fernández (2013), S. Pérez y G. Guillén (2007), C. Rojas, T. Sierra (2018), T. Fernández (2013) y la tesis de T. Fernández (2011).

Se comienza con un análisis de distintas investigaciones que tratan el papel de la visualización en la geometría y la importancia que adquieren los procesos de enseñanza y aprendizaje utilizados por el docente. El profesorado ha de considerar la visualización como una capacidad a la que se debe prestar especial interés, al igual que se impulsa la aptitud numérica y el razonamiento lógico.

A continuación, se realiza un análisis de varios textos en los que sus autores son partidarios de comenzar la enseñanza de la geometría en las aulas partiendo del mundo de los sólidos, considerando éste más cercano al alumnado que las figuras en el plano. Sin embargo, en el curriculum actual se antepone la geometría plana a la geometría espacial.

Posteriormente, se analizan varios textos en los que sus autores concluyen que en la búsqueda de la solución de un problema espacial, emergen conocimientos geométricos previos contenidos en el curriculum.

Seguidamente, se analiza un estudio en el que mediante un cuestionario, se determinan los aspectos relevantes a tener en cuenta, sobre el conocimiento especializado en la visualización de objetos tridimensionales de futuros profesores de primaria.

Para finalizar, en el Anexo 1 se realiza un análisis sobre las principales investigaciones publicadas en relación a los procesos de visualización y el razonamiento espacial en el campo de la educación.

3.2. LA VISUALIZACIÓN EN EL CONTEXTO EDUCATIVO

3.2.1. Antecedentes

Durante mucho tiempo, se ha mantenido la idea de que los seres humanos somos diferentes en cuanto a lo que llamamos inteligencia. Platón hace más de 2000 años habló sobre variaciones similares de este concepto.

Sobre la naturaleza de ésta, las primeras teorías contenían uno o varios de los siguientes conceptos: La capacidad del ser humano de aprender, los conocimientos adquiridos previamente por una persona y la habilidad determinada de adaptarse con mayor o menor éxito a nuevas situaciones y a la generalidad del ambiente.

Desde hace tiempo venimos asistiendo a cambios muy importantes para integrar el papel de la inteligencia como parte del proceso educativo, concretamente para trabajarla dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se han realizado numerosos estudios sobre la inteligencia con el objetivo de poner en común los diversos criterios a tener en cuenta para enfatizar la posibilidad de “aprender a ser inteligente”, dentro de un contexto global, yendo más allá de las puntuaciones estandarizadas que determinan el cociente intelectual.

En este sentido, la “Teoría de inteligencias múltiples” de Gardner (1983,1999), plantea una propuesta determinada de aplicación al proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del contexto de la escuela. En ella se establece la existencia de al menos ocho inteligencias separadas: Lingüístico-Verbal, Lógico-Matemática, Visual-espacial, Musical, Corporal-Kinestésica, Interpersonal, Intrapersonal, Naturalista, Emocional, Existencial, Creativa y Colaborativa. Por otro lado, la perspectiva más actual otorga a la inteligencia diversas facetas e implica una jerarquía de distintas habilidades, situándose unas en la cima y otras específicas en unos niveles inferiores de dicha jerarquía. (Sternberg, 2000).

El concepto de inteligencia para el éxito es otra propuesta que defiende que la inteligencia puede moldearse en los procesos de enseñanza-aprendizaje (Sternberg, 1996, 2000, 2002), definida como “*habilidad para adaptarse, compartir y seleccionar ambientes*”, resolviendo que los contextos educativos son responsables de una formación integral del alumnado.

El concepto de inteligencia espacial, como ya hemos mencionado, surge de la teoría de las Inteligencias Múltiples (IM). La inteligencia espacial engloba habilidades de percepción del mundo visual, para poder realizar modificaciones y transformaciones

a lo que se percibe inicialmente y conseguir recrear experiencias visuales propias, incluso sometidas a la ausencia de apropiados estímulos físicos. En particular, la capacidad espacial ha interesado, desde hace muchos años a los investigadores y educadores matemáticos, ya que es una cualidad muy relacionada con la geometría y con las matemáticas a nivel general.

Se han tratado términos como “percepción visual”, “razonamiento visual”, “imaginación espacial”, “visión espacial”, “visualización” “imaginación” o “pensamiento espacial”, como modelo de referencia teórico.

3.2.2. La visualización en la geometría

Como indica A. Gutiérrez (2011), la enseñanza de la geometría tanto en educación primaria como en educación secundaria es un desempeño difícil y complejo para los agentes intervinientes en el proceso de enseñanza de las matemáticas, derivado de los múltiples variables que intervienen en el proceso. En la actualidad existe un consenso entre didactas y profesores en la idea de que la enseñanza de la geometría, tiene que partir de metodologías que propicien las actividades de descubrimiento y exploración de parte del alumnado. Para instruir al profesorado sobre cómo gestionar y planificar este tipo de clases, existen distintos modelos teórico-prácticos que localizan y organizan los distintos elementos que forman parte de los diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la actualidad el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, es el marco principal de referencia para estructurar la enseñanza de la geometría y poder evaluar y comprender el aprendizaje del alumnado. Distintas publicaciones (NCTM, 2003, Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1996, Corberán y otros, 1994), recogen ejemplos de cómo aplicar dicho modelo. Como puntualiza A. Gutiérrez (2011), el aprendizaje es caracterizado por Van Hiele como un resultado del acopio de suficientes experiencias adecuadas, cobrando un papel primordial la educación matemática para proporcionar distintas experiencias adicionales (bien ordenadas), que completen la insuficiencia detectadas y generen al individuo un completo desarrollo de las capacidades de razonamiento. Las fases de aprendizaje planteadas por Van Hiele, (cuya función es sugerir al profesor la forma de realizar esta organización) deben ser realizadas por los estudiantes para adquirir las experiencias que los transporten a un nivel de razonamiento superior, ayudados por el profesor para que sean capaces de construir una red mental formada por los diferentes contenidos matemáticos que el alumnado tiene que aprender, incluidas las formas de razonamiento correspondiente al nivel de razonamiento abordado.

En primer lugar, el alumnado deberá adquirir de una forma comprensiva los distintos conocimientos básicos que sean necesarios (propiedades, nuevos conceptos, vocabulario...), con estos conocimientos deberán trabajar para posteriormente centrar su actividad principal en aprender a cómo usarlos y combinarlos entre ellos. Van Hiele propone las siguientes fases de aprendizaje.

Primera fase: INFORMACIÓN. El profesor ha de informar al alumnado cual es el campo de estudio del futuro trabajo, los problemas que van a abordar y los materiales y recursos que van a utilizar (el alumnado deberá aprender a utilizar el material y adquirirá determinados conocimientos básicos que serán imprescindibles para comenzar el trabajo matemático). Es también una fase de información para el propio profesor pues le servirá para averiguar los conocimientos previos del alumnado, especialmente en el tema a abordar, aprovechando las experiencias extraescolares para motivar al alumnado, es imprescindible no hacer un trabajo repetitivo ni intentar cosas ya conocidas por el alumnado. Esto es igualmente aplicable cuando se trata un tema que el alumnado ya ha estudiado anteriormente, es primordial que el profesor conozca el grado de conocimiento de los diferentes contenidos que posee el alumnado (especialmente el nivel de razonamiento adquirido).

Segunda fase: ORIENTACIÓN DIRIGIDA. El alumnado comienza a explorar el campo objeto de estudio mediante investigaciones que tienen su base en los recursos o materiales que se le han proporcionado. El principal objetivo es que el alumnado descubra, aprenda y comprenda los conceptos, figuras, propiedades..., intervinientes en el área geométrica objeto de estudio. Los elementos básicos que configurarán la red de las distintas conexiones del nuevo nivel, se construirán en esta fase, por ello el profesorado deberá proponer actividades dirigidas hacia estos conceptos, figuras, propiedades estructuradas progresivamente. Afirma Van Hiele, cuando se refiere a esta fase, que *“las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior”*. (Van Hiele, 1986, p.97).

Tercera fase. EXPLICITACIÓN. En esta fase el alumnado deberá intercambiar experiencias (interesando establecer puntos de vista entre ellos que sean divergentes, potenciando que el alumnado analice, ordene y exprese sus ideas con claridad), comentar las regularidades observadas, explicar el desarrollo de la resolución de los problemas, fomentando el dialogo en el propio grupo, interesando establecer puntos de vista entre ellos que sean divergentes, potenciando que el alumnado analice, ordene y exprese sus ideas con claridad.

La misión de esta fase es que el alumnado termine el aprendizaje del nuevo vocabulario derivado del nuevo nivel de razonamiento que están desarrollando.

Cuarta fase. ORIENTACIÓN LIBRE. En esta fase el alumnado tendrá que aplicar el lenguaje y conocimientos adquiridos a investigaciones distintas, debiendo perfeccionar el conocimiento del campo de estudio. Para ello el profesor debe plantear problemas que conlleven distintas soluciones o se puedan plantear de distintas formas, se dispondrán indicios que enseñen el camino a seguir, pero dejando libertad al alumnado para que combinándolos convenientemente, aplique los conocimientos y el proceso de razonamiento adquiridos previamente en las fases anteriores, deben ser problemas abiertos que presenten situaciones nuevas y distintas formas de resolución. Gracias a estas tareas se completará la red de relaciones comenzada en las fases previas, estableciendo las relaciones más importantes y complejas.

Quinta fase. INTEGRACIÓN. Los nuevos conocimientos y habilidades adquiridos deben complementarse con una visión general también de los contenidos y los métodos disponibles y establecer relaciones entre estos nuevos conocimientos y los ya adquiridos previamente en otros campos, deben unir en un todo lo explorado en su pensamiento. Aquí el profesor debe hacer un compendio, comparar y combinar conocimientos globales, sin aportar conceptos nuevos.

3.2.3. Conceptos geométricos elementales

Según Gutierrez A. (2011) es importante la convicción del docente de que la visualización no es una capacidad secundaria y que, al igual que se impulsa la aptitud numérica y razonamiento lógico (asociado a demostraciones y uso de estrategias para resolver un problema) en todos los currículum, debe prestarse especial interés a la aptitud espacial. Es por esto, que se deben potenciar los contenidos geométricos que se encuentran asociados a la capacidad espacial, aptitud no demasiado valorada en la enseñanza de las matemáticas en la década de los sesenta y setenta, al imperar la denominada “Matemática moderna” en exceso formalista y al efecto de la algebraización producida en la geometría.

Normalmente en los libros de texto, como se ha analizado en el “punto 5. Fundamentación curricular” de este trabajo, cuando se introduce un tema de geometría, como por ejemplo el tema de cuerpos geométricos, las distintas editoriales recurren a uno de estos métodos de enseñanza:

- Plantean el enunciado de una determinada definición de los conceptos matemáticos y proponen tareas o problemas de memorizar y reconocer determinadas figuras, o
- Presentan al alumnado figuras o ejemplos representativos del concepto, describen posteriormente sus características matemáticas, enuncian la definición de los conceptos y, finalmente plantean tareas o problemas de memorizar y reconocer determinadas figuras.

Según S. Vinner (1991), el profesor normalmente pone más énfasis en la explicación de las definiciones, sin percatarse de que los ejemplos conllevan un efecto mental mucho más permanente y duradero en el alumnado. Cuando se nos transmite un concepto se nos viene a la mente un conjunto determinado de representaciones visuales tanto imágenes como experiencias o impresiones, denominado “imagen conceptual”.

El alumnado debe aprender y comprender conceptos, propiedades y relaciones en el área de la geometría como ocurre en las demás áreas matemáticas, pero en geometría existe un soporte gráfico y visual mucho más importante. Por tanto, los procesos de enseñanza y aprendizaje estarán más relacionados con la utilización de figuras, objetos y diagramas. La imagen conceptual en este caso, cobrará una gran importancia, comprendiendo figuras, representaciones o dibujos; ejemplos que recuerdan al alumnado los distintos conceptos y propiedades asociadas (tanto matemáticas como físicas).

En ocasiones, existen discrepancias entre las definiciones y las imágenes asociadas a un concepto y sus propiedades, pues en las formaciones de estas imágenes

cobran importancia la experiencia propia y los ejemplos utilizados (en ocasiones escasos y con características visuales peculiares, que los convierten en prototipos difíciles de comparar con nuevos casos por el alumnado).

Se pone así en evidencia, que maximizando la variedad de ejemplos y detectando los errores de las imágenes del concepto que se generan en el alumnado, se mejora la aportación de dichas imágenes al conocimiento.

Es también importante destacar que la mayoría del alumnado no basa sus principales razonamientos en definiciones verbales, sino en sus imágenes del concepto, sin embargo, gran parte del profesorado consideran mucho más importantes las definiciones y relegan a un lugar secundario las imágenes asociadas al concepto.

3.3. ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

Según G. Guillén (2010), es evidente la riqueza que pueden generar los sólidos para reflejar distintos aspectos relativos a la geometría (constructivos, de la forma, topológicos, de relación de las transformaciones, de cálculo, de lenguaje, histórico, lógico) y para abordar los contenidos curriculares.

Existen diversos autores que apuestan por el tratamiento de la geometría en las escuelas comenzando por los conceptos espaciales, ya que son ideas más cercanas a su propio mundo.

Freudenthal (1973) es partidario de comenzar a enseñar la geometría a partir del mundo de los sólidos, considerando que el mundo de los sólidos en el espacio es más concreto que las figuras en el plano.

Para Puig y Guillén (1983), los razonamientos lógicos relacionados con la geometría, conllevan procesos matemáticos distintos como clasificar, probar, analizar, definir, conjeturar, demostrar, además de requerir capacidades de particularizar o generalizar.

Guillén y Puig (2001, 2006), destacan que el interés despertado por los poliedros para la enseñanza de la geometría es derivado de que se enmarca en un mundo tridimensional, que ofrece diversas posibilidades para el desarrollo de un trabajo intuitivo-experimental, potenciando el pensamiento lógico e inductivo.

Exponen cómo en el estudio de los sólidos se empieza con una aproximación muy intuitiva de los conceptos (al contrario que ocurre con las figuras planas) y opinan que es necesario el aprendizaje de la geometría en todos los niveles, pues en cada nivel hay una geometría que se aprende intuitivamente.

En diferentes trabajos se ha investigado sobre este tema, como por ejemplo el realizado por G. Guillén y S. Pérez (2007). En él se muestran los resultados de un estudio exploratorio que parte de la realización de una encuesta a 19 profesores de secundaria con cuestiones relacionadas con datos teóricos y experimentales sobre geometría. En el mismo se tratan cuestiones sobre el gusto de los profesores y/o estudiantes hacia esta materia, los contenidos y bloques geométricos que son priorizados en el currículum, se indaga sobre la causa por la que no se completa la enseñanza de la geometría recogida en el currículum y se tratan, además, otras cuestiones relativas a la enseñanza y la formación y aprendizaje del alumnado.

Además, se corroboran los resultados de los estudios desarrollados en primaria (Barrantes y Blanco, 2004; Guillén y Figueras, 2005) o en secundaria (Gil y Rico, 2003). Las conclusiones se exponen en la siguiente tabla (Tabla 1):

CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES DE SECUNDARIA SOBRE LA GEOMETRÍA Y SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE	
1.	La geometría no disgusta a los profesores, piensan que presenta mucha utilidad práctica, que conecta perfectamente con el entorno cotidiano, que se relaciona con distintas áreas del curriculum y que es útil para el desarrollo de ciertas capacidades.
2.	En cursos de la ESO, al igual que ocurre en primaria, no se estudian todos los conceptos y propiedades geométricas propuestas en el curriculum, la mayoría del profesorado culpa de este hecho a la falta de tiempo.
3.	Se da prioridad a los contenidos de medición con respecto a los procesos matemáticos que se usan para clasificar o describir. Anteponiéndose la enseñanza de la geometría plana a la enseñanza de geometría espacial o de sólidos.
4.	La enseñanza de la geometría en los cursos de la ESO, está reducida a lo establecido en libros de texto, cuadernos de ejercicios, actividades de ampliación y refuerzo e instrumentos de dibujo.
5.	Los profesores destacan las características y la dificultad relacionada con la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Tabla 1. Concepciones de profesores de secundaria sobre geometría y su enseñanza y aprendizaje

3.3.1. Conocimientos geométricos emergentes en un problema espacial

En este punto vamos a analizar la investigación realizada por C. Rojas y T. Sierra (2018) para comprobar si es correcta la hipótesis de que emergen diversos conocimientos geométricos en la resolución de un problema espacial concreto. Para ello, utilizan una metodología empírica, implementando un dispositivo didáctico.

Existen múltiples investigaciones previas en las que estos autores se basan para el desarrollo de su estudio.

Antecedentes

En estudios anteriores (Gascón, 2003, 2004) partiendo de las limitaciones que establece la encorsetada estructura curricular, plantea diversas opiniones sobre la nula participación del profesor en la organización del desarrollo del curriculum. Su papel se limita a exponer los temas y esto conlleva la práctica imposibilidad de desarrollar ciertos saberes que se deberían de abordar en la escuela, sobre todo en lo relativo a determinados conocimientos geométricos que deberían ser enseñados en E.S.O.

Por otro lado, (Berthelot y Salin, 2000, Bloch y Salin, 2004, 2005) exponen que cuando se aborda un problema espacial, en la búsqueda de su solución, casi siempre es necesario recurrir a conocimientos geométricos previos y a presentar los problemas dentro de un contexto geométrico. Es necesario evitar respuestas inmediatas y promover que surjan conocimientos geométricos más abstractos que nos ayuden a

buscar una solución más eficaz a cada problema espacial. Determinados autores llaman a este fenómeno “*modelización-espacio-geométrica*”

Además, analizan una de las investigaciones desarrolladas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD); teoría que se gesta como una extensión de la idea de transposición didáctica (Chevallard, 1985), centrada en las actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desarrolladas en las aulas. La TAD profundiza también sobre el proceso generado desde la creación del saber matemático hasta su presentación en dichas aulas como saber enseñado, estando ligada desde siempre con la formación del profesorado.

En dicha investigación desarrollada en el marco de la TAD se evidencia que hay diversas cuestiones que no están presentes en la enseñanza de la geometría en E.S.O y que se deberían abordar. Surge del análisis de varios libros de texto en el que se determina que, las tareas propuestas en ellos presentan un carácter repetitivo y procedimientos diseñados para resolver los problemas de manera preestablecida. Se concluye que una forma de recuperar determinadas “*razones de ser*” de la geometría elemental puede provenir del planteamiento, identificación y resolución de determinados problemas espaciales con soluciones abiertas, que posibiliten diversas formas de resolución e involucren distintos saberes geométricos incluidos en el currículum de la E.S.O.

Así mismo, en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), la actividad matemática se concibe como una “*actividad de modelización*”, (Barquero, Bosch, y Gascón, 2011), con el objetivo de comprender y responder cuestiones que no requieren una respuesta inmediata, se conciben como herramientas que puedan utilizarse para dar respuestas a cuestiones complicadas.

Este tipo de matemáticas implicará, para el alumnado, modelizar ciertos fenómenos de distintos niveles de complejidad, poniendo en juego un enorme conjunto de conocimientos.

Desarrollo de la investigación sobre la hipótesis de que emergen diversos conocimientos geométricos en la resolución de un tipo de problema espacial

La investigación para testar la hipótesis de la emergencia de determinados conocimientos geométricos en la resolución de un problema espacial concreto (C. Rojas y T. Sierra, 2018) se lleva a cabo mediante la implementación de un REI (Recorridos de Estudio e Investigación).

Los llamados Recorridos de Estudio e Investigación (REI), son procesos de estudio propuestos por la TAD, que conllevan el aprendizaje de las matemáticas mediante la modelización, partiendo de una “*cuestión generatriz*”. Dicha cuestión, debe ser abierta y rica y de ella derivaran diversas cuestiones, denominadas “*cuestiones cruciales*”, pues ayudan a conseguir la respuesta del problema planteado por la cuestión generatriz, involucrando un conjunto de saberes durante la búsqueda de las distintas soluciones que no están previamente facilitadas.

La implementación de un REI conlleva ciertas restricciones que están documentadas (Rodríguez Quintana, 2005): espacios limitados de tiempo para el profundo estudio del tema o el criterio imperante de que los problemas tienen respuestas preestablecidas.

La investigación empírica de C. Rojas y T. Sierra (2018) se basa en el análisis, diseño y construcción de un envase. En dicho trabajo se ponen a prueba las hipótesis que avalan la emergencia de conocimientos geométricos cuando se está resolviendo un problema de tipo espacial. Las hipótesis que quieren poner a prueba son las siguientes:

1. En secundaria los problemas espaciales, planteados como una actividad determinada de modelización espacio-geométrica, pueden constituir un posible fundamento de la geometría elemental.
2. Los conocimientos que surgen en la resolución de problemas espaciales planteados en secundaria, están poco relacionados con técnicas de modelización, que son realmente las que tienen un gran potencial para la resolución dichos problemas de una forma más adecuada y enriquecedora.
3. Los estudiantes de secundaria renuncian a modificar técnicas ya adquiridas para la resolución de problemas espaciales, negando la posibilidad de construir o articular nuevas técnicas.

C. Rojas y T. Sierra (2018), concluyen, tras el análisis de los resultados, lo expresado en la siguiente tabla (Véase tabla 2):

CONCLUSIONES. RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN (REI)
Cuando se resuelve un problema espacial emergen conocimientos geométricos contenidos en el curriculum, aunque se generan visiones segregadas sobre las aplicaciones de estos contenidos, debido a las limitaciones impuestas por la estructuración de los conocimientos en dicho curriculum.
En los procesos de estudio propuestos en secundaria deberían priorizarse aquellos que conlleven la elaboración de técnicas por parte del alumnado para resolver las tareas.
Es importante, el proceso de descripción, explicación y justificación de las distintas técnicas que el alumnado ha empleado en la resolución de las tareas propuestas, así como la búsqueda de las conexiones entre dichas técnicas.
Igualmente es necesario plantear tareas en las que las técnicas utilizadas por el alumnado fracasen, potenciando la necesidad de recurrir a nuevas técnicas para la correcta resolución de los problemas.
Se generan condiciones óptimas en las dinámicas de estudio creadas en los entornos de implementación de un REI, cuando se consigue la implicación de todo el alumnado en la búsqueda de soluciones y nuevas técnicas para resolver las tareas propuestas. Se genera así un “ <i>aprendizaje funcional</i> ”, pues como respuesta a las cuestiones planteadas surgen los conocimientos matemáticos.

Tabla 2. Conclusiones REI. C. Rojas y T. Sierra (2018)

3.3.2. Exploración de conocimientos relativos a visualización de objetos tridimensionales

Cualquier persona que se dirija hacia la formación en matemáticas debe ser consciente de la importancia y de la gran utilidad de la geometría y la posible implicación en la capacidad de adaptación del alumnado a la realidad.

En el estudio realizado por A. Contreras, T. Fernández, J.D. Godino, M. Gonzato, (2013), en el que se analizan los aspectos relevantes a tener en cuenta sobre el conocimiento especializado de los futuros docentes en la visualización de objetos tridimensionales, se presentan las respuestas ofrecidas por una muestra de 241 futuros profesores de primaria.

Este estudio es muy interesante ya que se centra en la identificación y evaluación de las “habilidades espaciales” de estudiantes de magisterio, que serán los responsables de la formación del alumnado en etapas básicas.

En educación matemática, existe un campo de investigación que cobra cada vez mayor interés, sobre la formación matemática y didáctica que poseen y deben poseer los futuros profesores, tanto de primaria como de secundaria, centrándose principalmente en determinar cuáles son los conocimientos matemáticos y didácticos que se requieren para poder enseñar.

Tal y como indica Godino (2009), hasta el momento se habían venido utilizando modelos en las investigaciones de conocimientos matemáticos que estudiaban características en aspectos globales y no arrojaban datos detallados de los diferentes tipos de conocimientos implicados en la obtención de una efectiva enseñanza.

La visualización de objetos tridimensionales (Battista, 2007) requiere de una serie de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial, destrezas que no sólo se circunscriben a la habilidad de “ver” los objetos tridimensionales en el espacio, sino que requieren de la capacidad para reflexionar sobre su representación, los objetos en sí, y cómo se relacionan sus estructuras y sus partes. Además implica la habilidad de poder examinar, imaginar y comprender sus posibles transformaciones.

Como puntualiza Gorgorió, (1998) estas habilidades también son importantes para poder interpretar y aprender a comunicar la información espacial, gráficamente, verbalmente o combinando ambas.

El estudio realizado por Godino (2009), basado en *“el modelo, la evaluación y el desarrollo del conocimiento didáctico”*, se centra en aplicar un cuestionario para analizar y explorar los aspectos más relevantes que intervienen en el conocimiento didáctico y matemático. Todo ello, en relación a la visualización requerida para el entendimiento de objetos tridimensionales plasmados en el plano, centrando la atención en el análisis de la faceta epistemológica, con una aplicación del “Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemática”, (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007), Godino (2012).

El análisis se centra en una muestra de 241 estudiantes, en una investigación de tipo mixta, utilizando un enfoque metodológico (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Castro y Godino, 2012).

El cuestionario consta de 5 ítems, generando respuestas abiertas.

La primera tarea consiste en, dada una imagen de un personaje en una escena, determinar e identificar desde que posición se han generado determinadas perspectivas de la escena. También se propone dibujar un objeto desde una perspectiva propuesta.

La segunda tarea consiste, en identificar y dibujar un objeto en perspectiva dada su planta, alzado y sección. Además, se propone dadas las vistas de un objeto en perspectiva formado por cubos, investigar si es posible eliminar algún cubo manteniéndose las mismas vistas de planta, alzados y sección.

La tercera tarea consiste en identificar entre varios desarrollos, cual es el que corresponde a un cubo y finalmente dibujar dos posibles soluciones del desarrollo de un sólido dado en perspectiva.

La cuarta tarea consiste en justificar como se podría partir un cilindro en ocho partes iguales y la justificación de cómo se puede generar un sólido en perspectiva a partir de dos piezas determinadas.

La quinta tarea consiste en relacionar unas determinadas figuras planas con los cuerpos de revolución que generan y, por último, dibujar la figura plana y el eje de rotación a partir del cual se engendra un sólido determinado (toro), haciendo girar dicha figura 360°.

En todas las tareas se plantea, igualmente, la identificación de los conocimientos puestos en juego y la indicación de cómo se podría modificar el enunciado para que resultara una tarea más fácil o difícil para un niño de primaria.

El cuestionario se les facilitó a 241 alumnos de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada, con conocimientos previos relativos a la formación básica, así como la adquirida en el primer curso de dicho Grado, en particular en la asignatura de Geometría.

Tras el análisis de las respuestas, los conocimientos identificados en los alumnos fueron organizados según la categoría del EOS “Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemática” (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos).

Las variaciones sugeridas por los estudiantes en las tareas propuestas se clasifican según el tipo de cambio sugerido (en el lenguaje o artefactos visuales, el procedimiento visual involucrado, longitud de cada tarea o descripción de los objetos). (Véase tabla 3).

RESULTADOS OBTENIDOS. CONOCIMIENTO DE FUTUROS MAESTROS SOBRE VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES.	
Conocimientos argumentativos	En las respuestas de los alumnos predominan las resoluciones académicas empíricas, puestas en relación con validaciones perceptivas de los objetos, principalmente de tipo visual (tamaño, grosor, etc.).
	En las resoluciones deductivo-informales planteadas, existe una íntima conexión entre la plasmación visual del objeto y la aplicación del conocimiento analítico del mismo. Esto produce respuestas que, aunque no sean explicitadas por el alumno, le permite formular afirmaciones correctas sobre las respuestas dadas e incluso en ocasiones llegar a una justificación de las mismas.
	Se concluye que, a nivel general, los alumnos reconocen e identifican un amplio espectro de conocimientos integrados en los

Identificación de conocimientos	ejercicios visuales propuestos en relación a propiedades, procesos y conceptualización. A modo de ejemplo, en referencia a conceptos, mencionan la volumetría, generatriz, secciones o ejes de revolución. En cuanto a la identificación y uso de procedimientos, también citan el paso de figuras de dos a tres dimensiones o el giro de figuras sobre un eje. Finalmente, respecto a las propiedades, hacen referencia entre otras a la proporcionalidad entre figuras de 2 y 3 dimensiones o la simetría.
	A nivel individual, el conocimiento especializado demostrado por el alumnado es ciertamente básico. En este sentido, realizan un estudio analítico cualitativo sobre las respuestas obtenidas en relación a los conocimientos aplicados por el alumno en cada pregunta e igualmente un análisis cuantitativo, diferenciando <i>el grado de pertinencia</i> respecto a los conocimientos identificados.
	Los resultados detallan un conocimiento muy básico por parte del alumnado en relación con la identificación de los conocimientos implicados en la totalidad de las respuestas, siendo la evaluación media sobre este apartado de 3,6 sobre 10.
	Los conocimientos identificados por el alumnado son generalmente básicos y de tipo conceptual, por lo general recogidos en el propio enunciado de las actividades propuestas.
Modificaciones del enunciado de las tareas	Sobre las modificaciones propuestas se vuelve a repetir lo observado en la identificación de conocimientos, pues si bien, a nivel general los alumnos plantean cambios de calado significativo y pertinente, a nivel individual presentan un escaso conocimiento de especialización con respecto a plantear e introducir potenciales variaciones de actividades visuales.
	La media de la evaluación del grupo en referencia al grado de pertinencia es de 3,0 sobre 10, lo que indica un escaso conocimiento especializado en relación a las propuestas de tareas visuales.

Tabla 3. Resultados obtenidos en encuesta en “Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales”.

CONCLUSIONES

Los resultados alcanzados en el cuestionario, indican que el estudiante que se forma para ser profesor presenta efectivas dificultades en la realización de tareas relacionadas con determinados conocimientos especializados del contenido didáctico.

En cuanto a las justificaciones que proponen los futuros profesores respecto a tareas de tipo visual, utilizan un vocabulario cotidiano y se basan principalmente en fundamentos de tipo perceptivo mediante argumentos deductivo-informales.

Es necesario que este alumnado, destinado a transmitir conocimientos superiores en la etapa primaria, sea capaz de realizar una prueba deductivo-formal como guía y forma de argumentación.

Parzysz (2006) manifiesta que los alumnos que se están formando para ser profesores no disponen de un conocimiento efectivo que es imprescindible para una demostración rigurosa lejos de argumentaciones de tipo perceptivo.

Es necesario, por tanto, que en la formación del alumnado que será profesor se incida en desarrollar capacidades para realizar análisis didácticos y sistémicos de las variables de una actividad visual y de sus conexiones con otros conceptos matemáticos.

Las carencias detectadas demandan la adecuada formación de este alumnado en relación a la visualización, incidiendo además en actividades formativas concretas que potencien el conocimiento didáctico-matemático. Si bien el camino hacia estas pautas y *especialización en el conocimiento queda ciertamente allanado gracias a la investigación y desarrollo de textos sobre “el análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos”* (Godino, 2009; Font, Godino y Gallardo, 2013)."

3.4. INVESTIGACIONES SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

Como establece T. Fernández (2013), la visualización en el campo de la educación es una cuestión relevante e investigada desde hace muchos años tanto en lo relativo a los conocimientos como al proceso de enseñanza, incrementándose el uso de elementos visuales en las distintas áreas de la enseñanza matemática, no solo en la geometría. Pero en los últimos veinte años es cuando se ha producido un resurgimiento en las investigaciones relativas a este tema (Arcavi, 2003; Battista, 1990, 2007; Bishop, 1983, Clements, 1983; Gutiérrez, 1991, 1996a; Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Lean y Clements (1981); Presmeg, 1989, 1991, 2006a, 2008; Zimmerman y Cunningham, 1991) debido principalmente a 2 razones:

1. La introducción de distintos conceptos, relaciones, propiedades y formas mediante nuevos entornos y elementos relacionados con el aprendizaje, derivados del cambio hacia una sociedad altamente tecnológica. Dichos avances se transforman en herramientas tecnológicas-matemáticas muy potentes capaces de generar entidades mucho más dinámicas.

La visualización se convierte, por tanto, en un conocimiento fundamental para analizar, entender y predecir distintas situaciones generadas en el nuevo entorno tecnológico. Esto produce cambios en los distintos recursos semióticos y en las representaciones y viceversa, generando procesos visuales objeto de investigación (Rivera, 2011, p.10).

2. Los cambios relativos a la concepción de la naturaleza propia de la matemática, que la sitúan como una búsqueda de patrones. La visualización es una herramienta fundamental en el reconocimiento de estos patrones (Hershkowitz et al., 1996, p. 163).

Por otro lado, la propia definición de visualización y los diversos nombres con los que está asociada ha sido uno de los principales problemas en la investigación.

Según Arcavi (2003, p.216), la principal característica asociada a la visualización es que “ofrece un método de ver lo invisible”, refiriéndose a la posibilidad de percibir un universo abstracto. La visualización nos transmite reflexiones, conceptos, objetos y entidades que la tecnología no nos ofrece ni es capaz de ver por nosotros.

En el Anexo 1 se realiza un análisis sobre las distintas investigaciones relacionadas con la visualización y el razonamiento espacial.

3.5. CONCLUSIÓN

Tras el análisis de las distintas investigaciones sobre la importancia de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se concluye que:

La geometría es un área de las matemáticas que potencia la creatividad, el conocimiento y la visualización del espacio tridimensional, fomenta la capacidad para inspirar formas de diseño y generar proporciones, simetrías, repeticiones e ideas para generar obras cada vez más bellas.

Su conocimiento, posibilita la resolución de problemas de distinta índole, permite comprender un mundo en el que se hallan una gran variedad de formas geométricas en los distintos escenarios posibles, tanto en la naturaleza, como en la arquitectura, la escultura, la pintura o el arte. La geometría es un pilar fundamental en la formación cultural y académica, debido a la gran utilidad de sus contenidos para crear, modelar o resolver problemas en distintos contextos de situaciones reales y la capacidad que presenta como herramienta para formar el razonamiento lógico.

Es primordial su contribución en el desarrollo de habilidades de visualización, intuición, pensamiento crítico y otras aptitudes imprescindibles en otras áreas de las matemáticas, ya que fomenta el razonamiento deductivo. También contribuye a la formación de la capacidad de conjeturar, justificar y argumentar lógicamente los procesos que determinarán la solución de situaciones problemáticas.

Existe evidencia de que dichas habilidades pueden enseñarse en la escuela y que para la reconstrucción mental de objetos 3D, se requieren ciertas habilidades no enseñadas en la educación académica tradicional.

Así mismo, es muy importante el uso de herramientas tecnológicas para la mejora de la visualización y razonamiento espacial, que permite crear, manipular y transformar objetos, aportando una mejora exponencial en el aprendizaje.

Los contenidos de geometría que se establecen en el sistema de educación actual, se presentan normalmente, como un fin en la actividad matemática, manteniendo al margen o situando en un segundo lugar los procesos dirigidos al razonamiento y construcción de los conocimientos implicados.

Por tanto, debemos enseñar la geometría centrando el interés en el proceso de adquisición del conocimiento e integrándola con las demás áreas de las matemáticas.

En ocasiones, la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estos niveles, se centra en el proceso memorístico de definiciones, propiedades, teoremas y cálculo de áreas y volúmenes. Esto hace que el alumnado que destaca en habilidades de visualización no se posicione, en determinados casos, dentro del sistema escolar como un estudiante de éxito, pues la mayoría de las actividades propuestas por los libros de

texto estimulan el uso de representaciones planas que generan los objetos, conceptos y transformaciones básicas.

Además, en la educación secundaria se constata que algunos docentes priorizan la opción de enseñar otras áreas de las matemáticas en detrimento de la geometría.

Es poco frecuente, para la enseñanza del espacio geométrico, el uso de representaciones gráficas enmarcadas en un contexto matemático real. Estas representaciones solamente se utilizan para ilustrar las figuras, lo que puede llevar a errores de concepto, pues las imágenes que genera el alumnado deben ser analizadas dentro del contexto del aula, en continua interacción con el profesor.

En algunas de las investigaciones analizadas, se pone de manifiesto que en la enseñanza de contenidos matemáticos, los argumentos visuales se presentan como introductorios a las definiciones, propiedades o teoremas. Esto puede llevar a que el alumnado no los perciba como una herramienta básica para entender las matemáticas.

La enseñanza y aprendizaje de la geometría dependerá de la aptitud del profesor, si éste pone el interés del alumnado en los procesos deductivos, la visión transmitida sobre la geometría será muy limitada. Sin embargo, si el profesor tiene una perspectiva más rica y abierta resaltarán los aspectos creativos que despertarán el interés del alumnado y harán que vea las matemáticas desde un punto de vista más enriquecedor, floreciendo el verdadero ser de las matemáticas.

En este sentido, diversos autores son partidarios de comenzar la enseñanza de la geometría en las aulas, partiendo del mundo de los sólidos, considerando que los conceptos espaciales están más cercanos al mundo del alumnado que las figuras en el plano. Así mismo, algunas investigaciones destacan que cuando se resuelve un problema espacial, en la búsqueda de su solución, emergen conocimientos geométricos previos contenidos en el currículum.

Por otro lado, es interesante la posibilidad de poder presentar las tareas como una oportunidad para modelizar la realidad del mundo que nos rodea. El profesor deberá propiciar un *“aprendizaje funcional”*, pues como respuesta a las cuestiones planteadas surgen los conocimientos matemáticos.

Queda patente la importancia de los procesos de descripción, explicación y justificación de las distintas técnicas empleadas por el alumnado en la resolución de tareas, así como la búsqueda de conexiones entre las mismas. Sin embargo, a estos procesos no se les da la importancia que poseen en sistema educativo actual.

Igualmente, se desprende de las investigaciones analizadas que las tendencias actuales de enseñanza y aprendizaje están encaminadas a una enseñanza participativa, dirigiendo los procesos hacia la obtención de una visión contextualizada de la geometría. Esta tendencia contrasta con la enseñanza de la geometría tradicional, claramente verbal, que hace que el alumnado entienda la materia como algo difícil y con muy poca utilidad, enmarcada en una visión sesgada o parcial y reducida.

Tras el estudio que he realizado, considero evidente que debemos dejar espacio para la experimentación y la discusión, cobrando especial protagonismo el ensayo y error como una herramienta más del proceso de enseñanza y aprendizaje, el estudiante debe tener un papel principal, una actitud activa, creando intereses por la reflexión y la investigación, que le genere una motivación hacia la búsqueda del conocimiento.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.

"Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza, la profunda belleza de la naturaleza... Si quieres aprender sobre la naturaleza, apreciar la naturaleza, es necesario aprender el lenguaje en el que habla." Richard Freynman

En este apartado se desarrolla el Tema 45. "Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos", del temario de oposiciones de profesorado de Secundaria de la especialidad de Matemáticas, según se estipula en el BOE de 21 de septiembre de 1993, en el Anexo III de la Orden de 9 de septiembre de 1993, regulado mediante el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio.

Se comenzará con una introducción una Introducción en la que se definen los términos geometría y topología y se hará un breve resumen sobre el origen de la geometría. Seguidamente se establecerán unas consideraciones preliminares sobre el concepto de diedro y triedro, así como los conceptos superficie poliédrica, poliedro convexo y elementos y clasificación de los poliedros. Se expondrá el Teorema de Euler y sus corolarios y terminaremos explicando los sólidos platónicos y sus condiciones de dualidad y relación con las proporciones áureas y los sólidos Arquimedianos.

4.1. INTRODUCCIÓN

4.1.1. Geometría y Topología

La **geometría** puede ser definida como: "Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio". (Real Academia Española. s.f., definición 1).

"La geometría (del latín geometría, y este del griego γεωμετρία de γῆ gē, 'tierra', y μετρία metría, 'medida') es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, politopos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.)". (Wikipedia s.f)

La **topología** puede ser definida como: "Rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella, como las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma". (Real Academia Española. s.f., definición 1)

La topología (del griego τόπος, 'lugar', y λόγος, 'estudio') es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Es una disciplina que

estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. La topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad o metrizabilidad, entre otros. (Wikipedia s.f)

4.1.2. El origen de la geometría

No es posible hablar de un unívoco origen de la geometría, sino de múltiples orígenes a lo largo de la historia, a través de diferentes pueblos y culturas. A día de hoy no existe duda de que gran parte del conocimiento matemático y geométrico atribuido originariamente a los primeros griegos era ya utilizado por los egipcios y los babilonios desde muchos siglos antes, no obstante, fueron los griegos quienes preservaron estos conocimientos, los desarrollaron de forma exponencial y los difundieron.

Una de las principales explicaciones de esa dispar evolución entre civilizaciones se encuentra en que mientras los egipcios utilizaban la escritura ideogramática (signos gráficos que representan un concepto o idea de forma sintética y no por análisis de sonidos o formas), los griegos usaron un alfabeto ya que fueron plenamente conscientes de que difícilmente la geometría podría desarrollarse adecuadamente sin su uso. Lo cierto es que en la geometría, es fundamental la existencia de ese doble sistema de escritura gráfica y alfabetizada, unido a un tercero, el imprescindible universo de lo abstracto. El mundo de los sentidos es limitado, nos engaña, por ello esta abstracción fue una de las principales aportaciones de los griegos, que abandonan el practicismo empírico de babilonios y egipcios, para desarrollar teorías y teoremas basados en razonamientos deductivos fundamentados en axiomas, la instauración en definitiva de un método científico.

No obstante, también ha de abordarse, al menos, otra razón de tipo sociocultural a esa diferencia evolutiva entre ambas culturas y es que, mientras las civilizaciones babilonias y egipcias fueron sociedades fuertemente jerarquizadas, donde gran parte de ese conocimiento estaba en mano de un reducido estatus, muy limitado, lo que dificultó la posterior propagación de los conocimientos adquiridos; no sucedió así en las ciudades y asentamientos griegos, donde llegaron a crearse numerosas escuelas de pensamiento filosófico y científico que contribuyeron de forma definitiva a su exponencial desarrollo y transmisión.

Es importante reparar en que la filosofía y la ciencia pura tienen fines y estructuras comunes, de ahí que para su desarrollo fuera necesario e inevitable hacer uso entre ambas disciplinas de escaleras conectivas que siempre habían estado allí esperando para ser usadas. Por ello es fundamental una excelsa formación de los docentes en estas materias a efectos de que sepan, a modo de ejemplo, transmitir a sus alumnos la sustancial diferencia entre un objeto geométrico y su representación,

ahondando en la importante diferencia entre el mundo de los sentidos, con sus engaños y limitaciones y el universo de lo abstracto, tan necesario y real como el primero.

El hombre ha utilizado, desde la Edad Antigua, en sus construcciones todo tipo de cuerpos geométricos.

Cuánto mayor ha sido el conocimiento sobre dichos cuerpos ha posibilitado la creación de construcciones más bellas y más complejas.

Por mi profesión, llevo bastantes años diseñando espacios habitacionales, investigando nuevas soluciones que favorezcan el uso poliédrico para generar espacios determinantes en nuestras vidas, utilizando figuras y cuerpos geométricos para el diseño y composición de edificio.

Es un mundo fascinante, desde el básico cubo (lugar geométrico donde se sitúan nuestras unidades básicas de habitabilidad) hasta las soluciones más complejas (Guggenheim, construcciones de Santiago de Calatrava).

También encontramos formas geométricas en la Naturaleza como en los granos de polen y en las semillas de las plantas, basadas fundamentalmente en pentágonos y hexágonos. Algunos virus forman cristales con formas geométricas.

Platón y sus discípulos se obsesionaron con los 5 Poliedros regulares (poliedros convexos en los que todas sus caras están formadas por polígonos regulares iguales entre sí y sus ángulos sólidos son iguales).

Platón en su obra, Timaius, afirmaba que cada partícula minúscula de cada uno de los elementos tiene una forma geométrica determinada, así estableció conjeturas acerca de cada uno de los cuatro elementos que los antiguos griegos pensaban que constituían el universo físico, así asociaron:

- Octaedro con el aire
- Icosaedro con el agua.
- Cubo con el fuego.
- Tetraedro con el fuego
- Dodecaedro con el origen del Universo.

Los orígenes históricos de los poliedros se inician en los tiempos prepitagóricos y su estudio sigue vivo hasta nuestros días, ya que se siguen elaborando nuevas clasificaciones y se siguen realizando nuevos descubrimientos.

4.2. PRELIMINARES: VISION ESPACIAL, DEFINICIONES DIEDRO Y TRIEDRO

Es innegable la importancia de la visión espacial y de la capacidad de visualización, ya que aporta una visión global de determinadas áreas matemáticas. El sentido espacial es imprescindible para comprender el mundo y desarrollar determinadas competencias.

4.2.1. Definición de diedro.

Dados dos semiplanos α y β , ambos con un borde común r , pero no coplanarios (véase Figura 1), llamaremos Diedro Convexo al conjunto de puntos comunes a los semiespacios que delimitan los planos α y β , conteniendo respectivamente a α y β . La arista del diedro quedará definida por la recta r , y las caras del diedro serán los definidos por α y β .

El ángulo que delimitan dos semirrectas OA y OB, resultantes de la intersección del diedro con un plano λ perpendicular a r (arista del diedro), se llama ángulo rectilíneo del diedro.

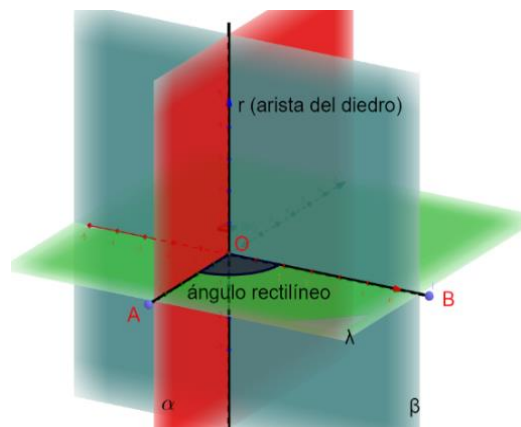


Figura 1: Diedros convexos (elaboración propia)

Consecuencias o propiedades

- Dos planos secantes dividen el espacio en cuatro diedros convexos.
- El semiplano que determinan las aristas del diedro r y un punto interior a éste tiene todos sus puntos pertenecientes al diedro.
- El segmento que une dos puntos que están situados cada uno en una cara del diedro convexo, corta a todo semiplano interior al mismo.
- Cada semiplano interior a un diedro convexo divide al mismo en dos diedros. veáse Figura 2)

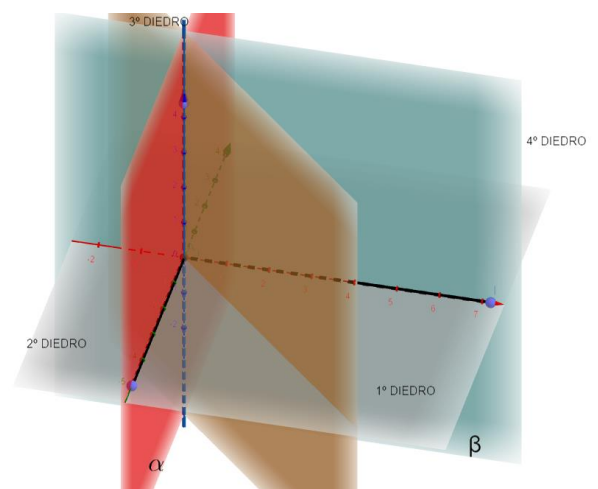


Figura 2. División del espacio en diedros (elaboración propia)

Definiciones:

- Dos diedros serán Adyacentes si poseen una cara común y las otras opuestas.
- Un diedro convexo y sus dos diedros adyacentes formarán un Diedro Cóncavo.
- Dos diedros Adyacentes forman un semiespacio, Diedro plano.

4.2.2. Definición de triedro

Sean tres semirrectas, r , s y t que no estén en el mismo plano, con origen común en el punto O , llamaremos Triedro al conjunto de puntos comunes a los semiespacios delimitados por los semiplanos formados por las rectas r y s ; s y t ; t y r respectivamente, y además cada uno de ellos contiene a la semirrecta restante. Se llaman caras del triedro a los ángulos formados por Ors , Ost y Otr , (ángulos convexos), se llama vértice al punto O .

También se puede generalizar la definición anterior a n semirrectas con un origen común de la siguiente manera:

Llamamos Ángulo Poliedro Convexo o Anguloide Convexo al conjunto de puntos comunes a los semiespacios definidos por n semirrectas $r_1, r_2, \dots, r_n$, no coplanarias y que tienen su origen en O , que verifican que el espacio que delimitan cada dos rectas consecutivas deja a las demás en un mismo semiespacio.

Se llamarán aristas del ángulo poliedro a las semirrectas, las caras estarán determinadas por los ángulos convexos y los diedros del ángulo poliedro por los diedros convexos definidos por cada dos caras consecutivas.

El sistema de coordenadas cartesiano espacial es un triedro trirrectángulo (véase Figura 3). En la axonometría ortogonal el espacio queda dividido en ocho triedros trirrectángulos u octantes. El punto O es el origen de coordenadas, y los ejes del sistema quedan representados por las aristas OX , OY y OZ .

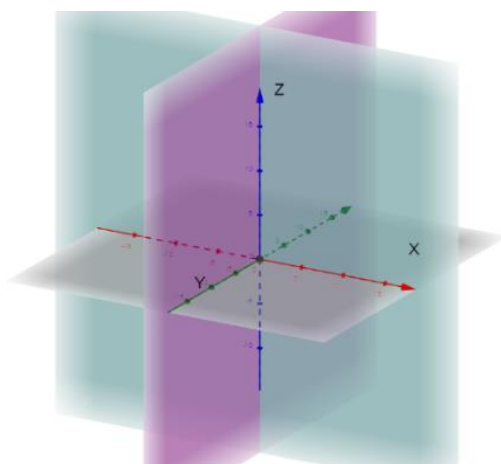


Figura 3. Triedro trirrectángulo (elaboración propia)

4.3. DEFINICIÓN DE SUPERFICIE POLIEDRICA Y POLIEDRO CONVEXO. ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN DE POLIEDROS.

Una **superficie poliédrica** será el conjunto de un número finito de polígonos, que llamaremos caras, tal que cada lado de una cara pertenezca ésta y sólo a otra cara, ambas caras, que serán contiguas, estarán en distintos planos.

Dicha **superficie poliédrica será convexa** si, además de lo anterior, verifica que el plano definido por cada cara deja en el mismo semiespacio a todas las demás. Los lados y vértices de las caras serán las aristas y vértices del poliedro, es decir, al prolongar cualquiera de sus caras no corta el poliedro (véase Figura 4), en caso contrario, al prolongar sus caras cortan al poliedro lo llamaremos poliedro cóncavo (véase Figura 5).

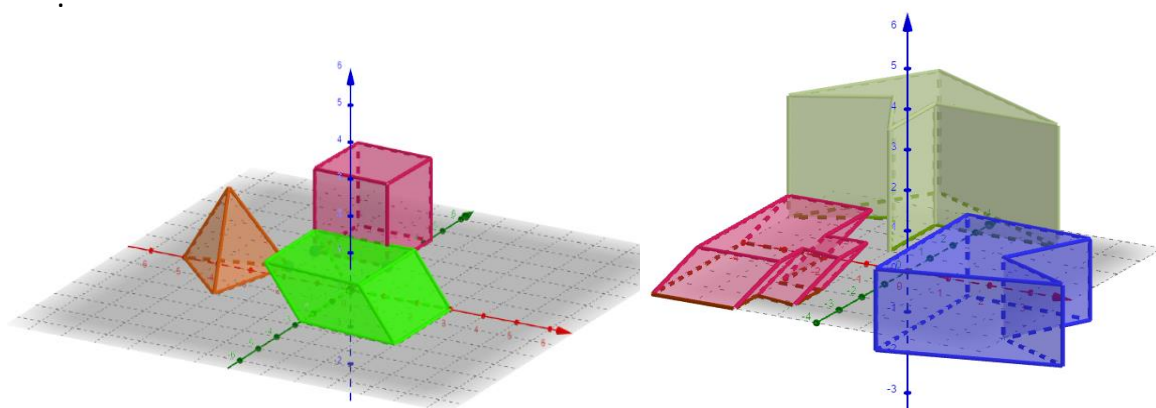


Figura 4. Poliedros convexos (elaboración propia)

Figura 5. Poliedros Cóncavos (elaboración propia)

4.3.1. Elementos y clasificación de poliedros.

Los elementos que determinan un poliedro son los siguientes (véase Figura 6):

Caras del poliedro: Conjunto finito de polígonos que constituyen el poliedro.

Arista del poliedro: Dos caras consecutivas del poliedro se cortan en una arista formando un ángulo diedro.

Diagonal del poliedro: Recta que une dos vértices no pertenecientes a la misma cara. Dos vértices estarán conectados por la arista.

Los puntos no situados en la superficie poliédrica formada las caras (polígonos convexos) se llaman puntos interiores, los demás serán puntos exteriores.

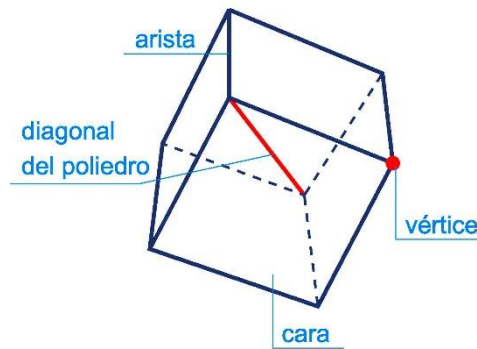


Figura 6. Elementos de un poliedro (elaboración propia)

Una recta del espacio cortará a un poliedro convexo en dos y sólo dos puntos, pues una vez trazado un plano cualquiera que pase por dicha recta, cortará al poliedro generando un polígono convexo al que dicha recta cortará igualmente en dos puntos pertenecientes al poliedro.

PROPOSICIÓN

Todo espacio dividido por un poliedro convexo generará dos regiones una convexa (el propio poliedro) y una cóncava.

Demostración

La demostración está basada en que toda semirrecta cuyo origen está en un punto interior del poliedro, corta su superficie en un único punto.

Sea r , una semirrecta con origen en un punto interior al poliedro P . Si determinamos un plano por la recta r y un punto de una arista del poliedro que se cruce con ella, la intersección será un polígono convexo, que contendrá a P en su interior. La semirrecta r por tanto, corta al contorno en un punto Q perteneciente a la superficie del poliedro.

No puede existir otro Q' , ya que si fuera así uno de los dos puntos Q o Q' , separaría al otro punto de P , hecho que contradice la definición de poliedro convexo.

PROPOSICIÓN

Todo poliedro convexo, como mínimo tiene cuatro vértices, cuatro caras y seis aristas.

Demostración

Sea V un vértice del poliedro, entonces en este concurren al menos tres caras y tres aristas. Si a es una de las aristas que acometen en V , y V' el otro vértice de dicha arista a , a V' también acometerán al menos tres caras y tres aristas; aunque sólo dos de las caras pueden contener a la arista a . Por tanto, existe al menos una cara de las que acometen en V' que no acometen en V .

Cada una de las tres aristas que concurren en V , tienen otro vértice. Es decir, hay además de V , tres vértices más que forman una arista con V . Por tanto, hay al menos cuatro vértices, lo que supondrá que existen al menos cuatro caras.

Además, como cada cara tiene como mínimo tres aristas, tendremos doce aristas y al ser cada arista compartida por dos caras, habrá como mínimo seis aristas.

Se pueden establecer las siguientes familias de poliedros (véase Tabla 4):

FAMILIA O GRUPO	Nº de poliedros que la forman	CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES
Poliedros regulares o SÓLIDOS PLATÓNICOS	5	Todas sus caras son polígonos regulares e iguales. En todos sus vértices concurren el mismo número de caras. Todas las aristas tienen idéntica longitud en un sólido platónico
PIRÁMIDES y variantes: troncos de pirámide, oblicuas, bipirámides, elongadas...	Infinitos	Tienen una base (cualquier polígono) y sus caras laterales están formadas por triángulos, terminan en un vértice llamado cúspide
PRISMAS. Antiprismas, oblicuos, truncados, compuestos...	Infinitos	Poseen 2 bases (cualquier polígono) y sus caras laterales están formadas por cuadriláteros (excepto el antiprisma que son pirámides).
SÓLIDOS DE JOHNSON	92	No poseen bases diferenciadas, son convexos y sus caras son polígonos regulares (distintos o iguales). No se incluyen en esta clasificación los sólidos platónicos
SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS	13	Son convexos. Se obtienen a partir de los sólidos platónicos, sus caras son polígonos regulares (distintos o iguales).
SÓLIDOS DE CATALÁN	13	Son los poliedros duales de los sólidos Arquimedianos
SÓLIDOS DE KEPLER-POINSONT	4	Son cóncavos, son poliedros regulares excepto en sus ángulos.
OTROS POLIEDROS	Existen otros tipos de poliedros, aunque nos e consideran familias o grupos, se pueden agrupar por poseer unas características especiales	
POLIEDROS QUIRALES		
DELTAEDROS		
POLIEDROS DUALES (O Conjugados)		
TRAPEZOEDROS (o deltoedros)		
POLIEDROS ESTRELLADOS (Cóncavos)		
ESFERAS Y CÚPULAS GEODÉSICAS		

Tabla 4: Familias de poliedros (elaboración propia)

4.4. TEOREMA DE EULER.

Dado un poliedro convexo, la suma del número de caras C , más el número de vértices V excede en dos unidades al número de aristas A .

$$C + V = A + 2$$

Demostración 1:

Dado un poliedro, dibujaremos sobre el mismo una línea poligonal cerrada formada por aristas

Sean C , V y A el número de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo. Veamos que:

$$C + V = A + 2$$

Realizaremos la demostración por inducción sobre C , el número de caras.

Consideramos el poliedro más sencillo, un tetraedro ($C=4$, $V=4$, $A=6$), eliminamos una de sus caras y deformamos la superficie restante hasta extenderla sobre un plano. Las áreas conformadas por sus caras y los ángulos de las mismas se modificarán, pero la superficie contendrá igual número de vértices y aristas que en el poliedro original, mientras que habrá disminuido en uno el número de caras. Entonces se dará que ($C=3$, $V=4$, $A=6$). Probando que en esta red plana $C+V=A+1$, se probará que en el poliedro original $C+V=A+2$.

Supongamos, por inducción que la expresión $C+V=A+1$ es válida para $A= n-1$ y sea ahora una red plana formada por $A= n$ aristas, C caras y V vértices.

Eliminaremos una arista que no sea frontera, que no sea común a otra cara. Entonces, la nueva red plana tendrá $C-1$ caras, V vértices y $A-1$ aristas y por hipótesis de inducción tendremos que:

$$(C-1) + V = (A-1) + 1 \text{ de aquí podemos observar que } C + V = A + 1$$

Por tanto, en el poliedro original se verifica que; $C + V = A + 2$ (véase Figura 7)

$$C= 12$$

$$V=20$$

$$A=30$$

$$C + V = A + 2$$

$$12 + 20 = 30 + 2$$

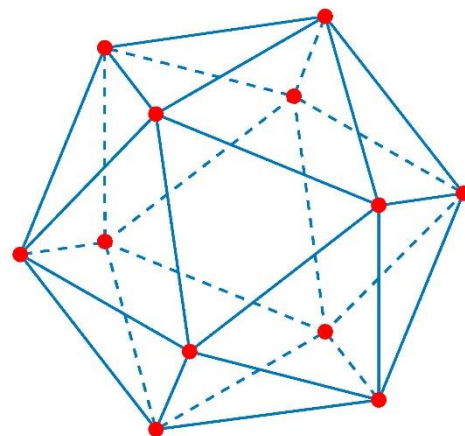


Figura 7. Fórmula de Euler (elaboración propia)

Consecuencias del teorema de Euler

1. Al contener cada cara tres o más aristas, y cada arista pertenece a dos caras tenemos:

$$a \geq \frac{3c}{2} \Rightarrow 3c \leq 2a$$

2. En cada vértice concurren tres o más aristas, y cada una tiene dos vértices:

$$a \geq \frac{3v}{2} \Rightarrow 3v \leq 2a$$

4.4.1. TEOREMA. Sólo existen 5 sólidos platónicos: tetraedro, cubo octaedro, icosaedro y dodecaedro.

Demostración topológica.

Partimos de la Fórmula de Euler para S:

$$C + V = A + 2$$

Donde C es el número de caras de S

V es el número de vértices de S

A es el número de aristas de S

Si partimos de un sólido platónico cualquiera S

Por tanto tenemos que:

$$C + V = A + 2 \quad (1)$$

Sólido platónico

S= sólido platónico

$S \equiv \{p, q\}$ símbolos de Schläfi de S

P=número de lados que tiene cada cara S, $p \geq 3$

q= número de aristas que acometen a cada vértice de S. $q \geq 3$

Por ser regular se cumple que, el número aristas que acometen a cada vértice por el número de vértices es igual al número de lados que tiene cada cara por el número de caras e igual a dos veces el número de aristas.

$$qV = pC = 2A$$

Sustituyendo en (1), poniendo los términos en función del número de aristas, tenemos que:

$$\frac{2A}{p} + \frac{2A}{q} = A + 2$$

Dividiendo por 2A:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

Como el número de aristas es mayor que 0 tenemos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

De aquí deducimos que:

Si $p \geq 6 \Rightarrow p \leq 5$ esto es una incongruencia por lo tanto, p no puede ser ≥ 6 .

Si $p = 3$; $q = 3, q = 4, q = 5$, q no puede ser mayor o igual a 6 (véase tabla 5)

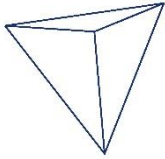
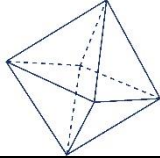
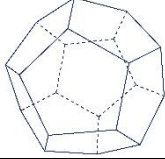
p=3		
q= 3	$S \equiv \{3,3\}$ Tetraedro	
q= 4	$S \equiv \{3,4\}$ Octaedro	
q= 5	$S \equiv \{3,5\}$ Dodecaedro	

Tabla 5. Sólidos platónicos con $p=3$, $q=3$, tetraedro; con $p=3$, $q=4$, octaedro; con $p=3$, $q=5$ dodecaedro

Si $p = 4$; $q = 3$, q no puede ser mayor o igual a 4 (véase Tabla 6)

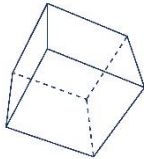
p=4		
q= 3	$S \equiv \{4,3\}$ Cubo	

Tabla 6. Sólidos platónicos con $p=4$, $q=3$, cubo

Si $p = 5$; $q = 3$, q no puede ser mayor o igual a 4 (véase Tabla 7)

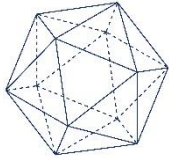
p=5		
q= 3	$S \equiv \{5,3\}$ Icosaedro	

Tabla 7. Sólidos platónicos con $p=5$, $q=3$, icosaedro

4.4.2. Teorema de las características de Euler

Para llegar a la demostración de este teorema vamos a definir enumerar algunos conceptos previos.

Definición de n-esfera

Partimos de la primera definición de esfera que es de origen geométrico. Llamaremos esfera de dimensión n , S^n o n -esfera al conjunto de vectores unitarios pertenecientes al espacio Euclideo de dimensión $n+1$, E^{n+1} .

$$S^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

Por tanto, la esfera S^1 (la 1-esfera) es la circunferencia y la esfera S^2 (la 2-esfera) es la superficie esférica, pero encontramos dificultades para dibujar o imaginar $S^n > 2$. Esto es debido a que es imposible representar una esfera con $S^n > 2$ en el campo visual que genera un espacio tridimensional, igual que también es imposible incrustar una superficie esférica en el plano.

Definición y aplicación de homeomorfismo

Dos objetos son topológicamente iguales, es decir son **homeomorfos**, cuando podemos transformar uno en otro sin romperlo y sin pegar partes, estirando, encogiéndolo, doblando, etc.

Así, dos objetos que posean distinto número de agujeros no serán homeomorfos, por ejemplo un balón de fútbol (no tiene agujeros) y un flotador jamás se podrán deformar uno en otro, por tanto, no son homeomorfos.

Si partimos de una pelota de fútbol, que sería un cuerpo de dimensión 2, podemos manipularlo de la forma que queramos y siempre seguirá siendo una 2-esfera. El criterio utilizado para comprobar si una variedad es o no una 2-esfera o no lo es, es imaginarse una goma elástica deformable apoyada en la superficie del balón, si podemos comprimir la goma, sin salirse de la superficie, hasta formar un solo punto en cualquier parte de dicha superficie, podemos asegurar que el balón es una 2-esfera y además podemos decir que es simplemente conexa.

En el siglo XIX fue resuelto el problema de la clasificación de las variedades en el espacio usando como criterio el concepto de homeomorfismo. Así se dedujo que la esfera es una variedad de dimensión 2, cerrada y simplemente conexa y se llegó a establecer que toda variedad de dimensión 2, cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera.

El matemático francés, Henri Poincaré (1854-1912) conjeturó posteriormente que ese resultado que se había obtenido para la 2-esfera tenía un análogo para la 3-esfera de dimensión 4, enunciando la famosa CONJETURA DE POINCARÉ (1904):

“Toda 3-variedad compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera”.

Esta conjetura no consiguió ser probada por Poincaré, fue tal el interés que despertó esta conjetura que se convirtió en el problema más notable abierto en el campo de la topología geométrica, llegándose a convertir en uno de los problemas del Milenio.

El matemático ruso Grigori Perelmán consiguió resolver la hipótesis de Poincaré, hecho que generó múltiples polémicas. Perelmán rechazó la medalla Fields, considerada como el Nobel de las Matemáticas, por sentirse maltratado por algunos de sus colegas.

Una vez desarrollada esta explicación podemos afirmar que:

- **Todos los polígonos (regulares o no) son homeomorfos a la circunferencia.**
- **Todos los poliedros (regulares o no) son homeomorfos a la esfera.**

TEOREMA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE EULER

Un grafo es un conjunto de puntos llamados vértices y determinados segmentos llamados arista o arcos que unen pares de dichos puntos.

Se denomina orden del grafo al número de vértices del mismo y se denomina grado de un vértice al número de aristas que entran o salen de dicho vértice.

Para cualquier grafo conexo del plano, se cumple que:

$$V - A + C = 2$$

Donde V es el número de vértices

A es el número de aristas, y

C es el número de regiones (contando la exterior)

Demostración:

Para el caso más sencillo:

a) un solo vértice



$$V=1$$

$$A=0$$

$$V - A + C = 2$$

$$2-1+1=2$$

$$C=1$$

b) 2º caso



$$V=2$$

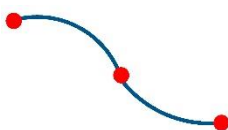
$$A=1$$

$$V - A + C = 2$$

$$2-1+1=2$$

$$C=1$$

c) 3º caso



$$V=3$$

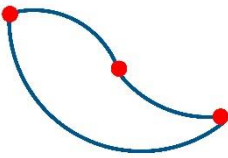
$$A=2$$

$$V - A + C = 2$$

$$3-2+1=2$$

$$C=1$$

d) 4º caso



$$V=3$$

$$A=3 \quad V - A + C = 2$$

$$C=2$$

$$3-3+2=2$$

Corolario:

Todos los grafos son homeomorfos.

Corolario:

Todo poliedro homeomorfo a una esfera verifica que:

$$V - A + C = 2$$

Donde V es el número de vértices,

A es el número de aristas, y

C es el número de caras

De aquí podemos deducir que, un ejemplo de sólido que no cumple la fórmula de Euler es por ejemplo, este poliedro toroidal (véase Figura 8), ya que no es homeomorfo a la esfera.

$$V=24$$

$$A=48 \quad V - A + C = 0$$

$$24-48+24=0$$

$$C=24$$

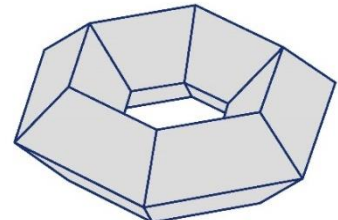


Figura 8. Poliedro toroidal

Por tanto, si tenemos un poliedro modelado en un toro, la fórmula de Euler se modificaría a: $C - A + V = 0$

Para cualquier superficie de tipo doble toro

La fórmula es sería : $C - A + V = -2$

(véase Figura 9)

Para cualquier superficie de tipo triple toro

La fórmula es: : $C - A + V = -4$

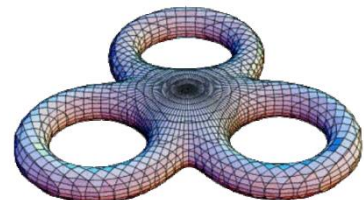


Figura 9. Doble Toro y triple toro

En general, para un con g agujeros, la fórmula es: : $C - A + V = 2 - 2g$

Tampoco cumplen la fórmula de Euler los poliedros de Császár y Szilassi

4.5. GEOMETRÍA EN EL PLANO. POLÍGONOS REGULARES.

La Wikipedia define polígono regular como: “polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Los polígonos regulares de tres y cuatro lados se llaman triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente. Para polígonos de más lados, se añade el adjetivo regular (pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, etc)”. Wikipedia (s.f). (véase Figura 10)

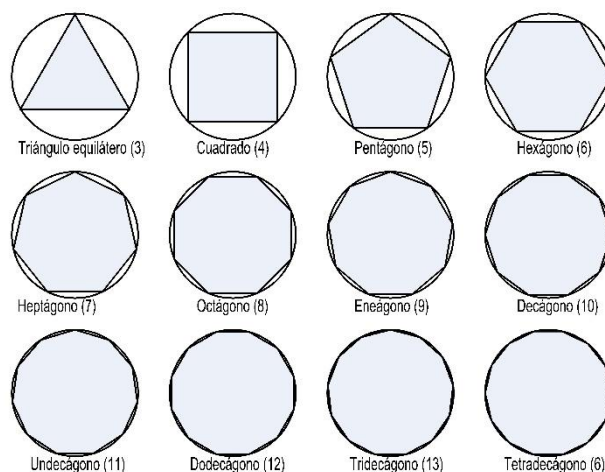


Figura 10. Tipos de polígonos regulares (elaboración propia)

Vemos que el polígono regular se va asemejando más a la circunferencia a medida que crece el número de lados.

4.6. SÓLIDOS PLATÓNICOS

4.6.1. Origen

El primero que mencionó los 5 sólidos platónicos fue el filósofo griego Platón en el 360 A. C en su diálogo matemático “Timeo”.

Las ideas expresadas por Platón en su diálogo contienen tres principios que poseen gran importancia para el desarrollo y el avance de la ciencia; la primera la unión de ciencia y belleza; la segunda la aplicación de reglas matemáticas y objetos conocidos a procesos y situaciones de la vida desconocidas y la tercera la capacidad de construir cosas complejas a partir de elementos mucho más simples.

Las características principales de los sólidos platónicos son:

- Todas sus caras son polígonos regulares iguales.
- En todos sus vértices concurren el mismo número de caras.
- Todas las aristas tienen idéntica longitud en un sólido platónico.

Cabe destacar que poseen la característica de ser fuertemente simétricos.

Existen 5 sólidos platónicos (véase Tablas 8, 9, 10, 11 y 12)

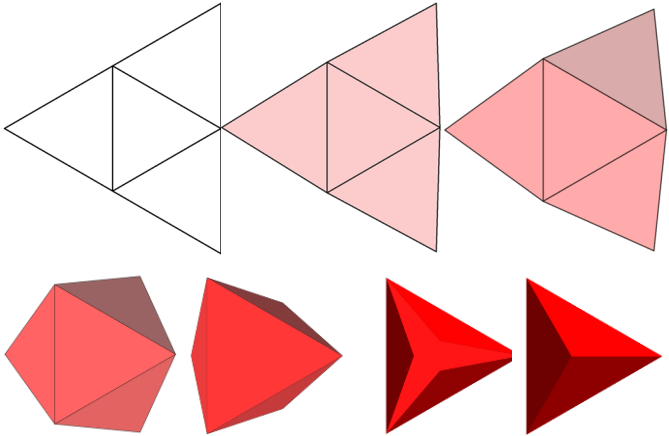
TETRAEDRO (del griego τέτταρες 'cuatro' y ἔδρα 'asiento, base de apoyo o cara') es un poliedro de cuatro caras)		
Número de caras	4	
Polígonos que forman las caras	Triángulos equiláteros	
Número de aristas	3	
Número de vértices	4	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	3	

Tabla 8. Desarrollo del tetraedro. Extraído de Wikiwand.com

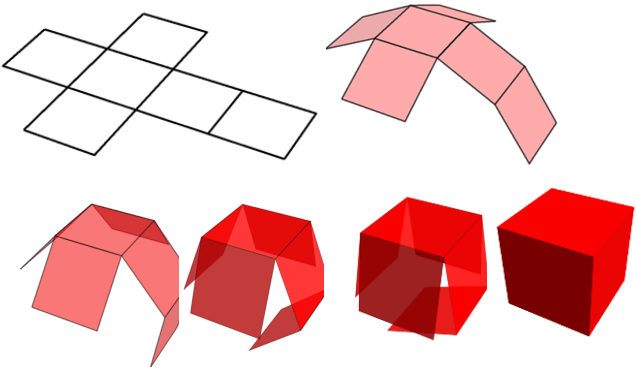
CUBO es un hexaedro y también se puede clasificar como un paralelepípedo, recto y rectangular		
Número de caras	6	
Polígonos que forman las caras	Cuadrados	
Número de aristas	12	
Número de vértices	8	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	4	

Tabla 9. Desarrollo del cubo. Extraído de Wikiwand.com

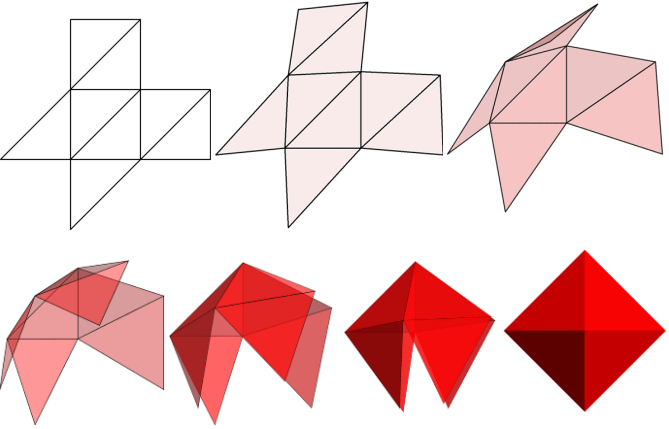
OCTAEDRO (del griego ὀκτώ "ocho" y ἔδρα "asiento" o "cara")		
Número de caras	6	
Polígonos que forman las caras	Triángulos equiláteros	
Número de aristas	12	
Número de vértices	6	
Caras concurrentes en cada vértice	4	
Vértices contenidos en cada cara	3	

Tabla 10. Desarrollo del octaedro. Extraído de Wikiwand.com

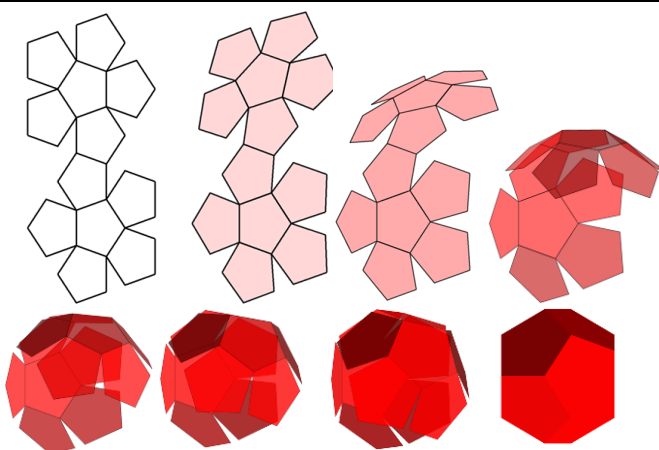
DODECAEDRO (del griego δώδεκα, 'doce' y ἔδρα; 'asiento', 'posición', en geometría 'cara')		
Número de caras	12	
Polígonos que forman las caras	Pentágonos regulares	
Número de aristas	30	
Número de vértices	20	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	5	

Tabla 11. Desarrollo del dodecaedro. Extraído de Wikiwand.com

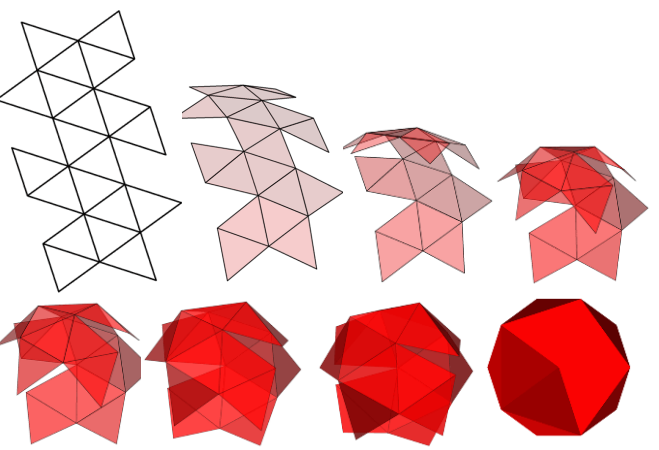
ICOSAEDRO		
Número de caras	12	
Polígonos que forman las caras	Pentágonos regulares	
Número de aristas	30	
Número de vértices	20	
Caras concurrentes en cada vértice	3	
Vértices contenidos en cada cara	5	

Tabla 12. Desarrollo del icosaedro. Extraído de Wikiwand.com

4.6.2. Dualidad entre los sólidos platónicos

Leonhard Euler fue un matemático y físico suizo considerado el principal matemático del siglo VXIII y uno de los más influyentes y grandes matemáticos de todos los tiempos.

Como consecuencia de las investigaciones realizadas por Euler se produjo un cambio fundamental en la visión histórica sobre los poliedros.

Estudió los poliedros, prestando atención a sus elementos fundamentales, número de caras, vértices y aristas, no en cuanto a su dimensión y medidas sino al número de éstos.

A partir del número de elementos que poseen (véase tabla 13), existe una dualidad entre algunos de los sólidos platónicos, pudiéndose establecer parejas de sólidos duales que intercambian el número de caras y el número de vértices y poseen el mismo número de aristas que su pareja dual.

SÓLIDO	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ISOSAEDRO
Nº DE CARAS	triángulos equiláteros	cuadrados	triángulos equiláteros	pentágonos regulares	triángulos equiláteros
	4	6	8	12	20
Nº DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
Nº DE ARISTAS	6	12	12	30	30

Tabla 13. Elementos de sólidos platónicos y dualidad (elaboración propia)

La dualidad es un concepto muy general, que puede ser aplicado no sólo a los poliedros sino también a los grafos, como veremos más adelante.

Dualidad cubo y el octaedro.

Ambos sólidos platónicos intercambian el número de caras y el número de vértices y tienen el mismo número de aristas.

Para construir un poliedro dual de un cubo tomamos un punto cualquiera de cada una de sus caras que serán los vértices del poliedro dual.

Trazamos las aristas, uniendo los vértices de las caras contiguas que conformarán el sólido dual. Así cada vértice del poliedro original se corresponderá con una cara del dual.

Cuando hablamos de sólidos platónicos, consideraremos el punto del centro de cada una de las caras y así podremos obtener otro sólido platónico.

En el interior de un cubo se puede situar un octaedro, haciendo coincidir cada vértice del octaedro con el centro de las caras del cubo (véase Figura 11).

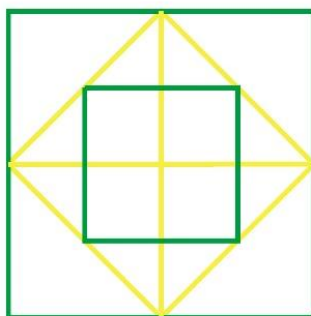


Figura 11. Dualidad cubo - octaedro (elaboración propia)

Igualmente se puede inscribir un cubo en un octaedro.

Además, si trazamos una esfera circunscrita en el cubo, dicha esfera estará inscrita en el tetraedro.

Determinados poliedros, principalmente los sólidos platónicos, se pueden inscribir en una esfera. Se llama esfera circunscrita a dicha esfera y tocara todos los vértices del poliedro.

Llamaremos circunradio al radio de la circunferencia circunscrita. En el caso del cubo, la diagonal espacial del cubo será el diámetro de la esfera circunscrita.

Dualidad Icosaedro-Dodecaedro.

Ambos sólidos intercambian el número de vértices y caras (20 y 30) y poseen el mismo número de aristas, por tanto, son sólidos duales. (véase Figura 12)

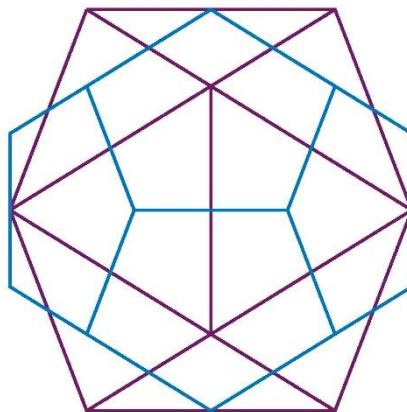


Figura 12. Dualidad Icosaedro - Dodecaedro. (elaboración propia)

Dualidad Tetraedro-Tetraedro

El sólido dual de un tetraedro es otro tetraedro pues posee 4 caras y 4 vértices (véase Figura 13).

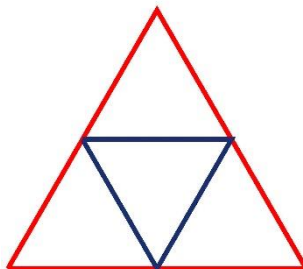


Figura 13. Dualidad Tetraedro-Tetraedro. (elaboración propia)

Los cinco poliedros regulares pueden inscribirse unos dentro de otros, el omnipoliedro es una composición de los cinco sólidos platónicos.

En el interior se sitúa el octaedro cuyos vértices se sitúan en el centro de las caras del tetraedro. Los vértices del tetraedro son coincidentes con cuatro vértices del cubo.

Las aristas del cubo serán las diagonales del pentágono del dodecaedro que se insertará dentro del poliedro exterior, el icosaedro. (véase Figura 14)

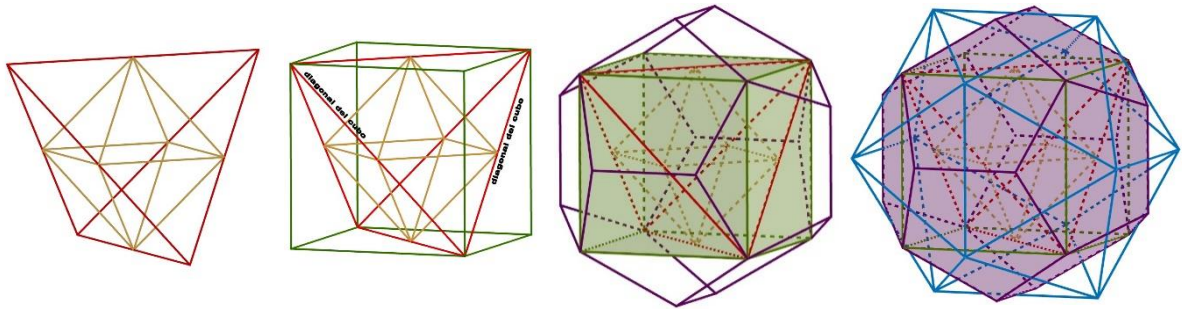


Figura 14. Dualidad entre sólidos platónicos (elaboración propia)

Dualidad entre grafos

“En teoría de grafos, un grafo dual G' de un grafo planar G es un grafo que tiene un vértice por cada región de G , y una arista por cada arista de G uniendo a dos regiones vecinas”. Wikipedia. (véase Figura 15)

Planar es porque si hubiese dos aristas que se intersectarían sería un punto de corte de la curva y habría faltado definir un vértice.

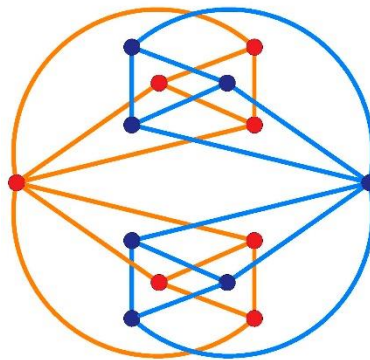


Figura 15: Grafos duales (elaboración propia)

El grafo dual cumplirá las siguientes propiedades:

Si G es un grafo planar, entonces su grafo dual G' también será un grafo planar (pudiendo ser un multigrafo o tener bucles).

Si el dual de G es G' , entonces el grafo dual de G' será G .

Puede que no exista un grafo dual G' de G único, pues G puede tener grafos duales no isomorfos, dependerá de cómo se distribuyan los planos.

4.6.3. Relación entre los sólidos platónicos y la razón áurea

“El número áureo (también llamado número de oro, razón extrema y media, razón áurea. Razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción es un número irracional, representado por la letra ϕ (Phi) (en minúscula) o Φ (Phi) (en mayúscula) en honor del escultor griego Fidias.” (Wikipedia s.f.)

Tiene un valor numérico de:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988749894$$

Es un número algebraico que presenta muchas propiedades, descubierto en la antigüedad, como la relación o proporción que existe entre dos segmentos de una recta, representando una construcción geométrica.

La longitud total, resultante de la suma de los dos segmentos a y b, es al segmento mayor, lo que este segmento a es al segmento menor, es decir:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

Dicha proporción está presente en determinadas figuras geométricas así como en la Naturaleza, arquitectura, arte...

A los objetos que guardan la proporción áurea se les atribuye un carácter estético.

Proporción áurea en el pentágono.

Partimos de la figura del pentágono para establecer la relación existente entre este polígono regular y la razón áurea y a continuación establecer las relaciones existentes entre los sólidos platónicos y la proporción áurea.

Llamemos A, B, C, D, E a los vértices del pentágono regular, de lado **L** y **Dg** a la diagonal del pentágono. Sea además Q es el punto de corte de las diagonales AC y BE (véase Figura 16).

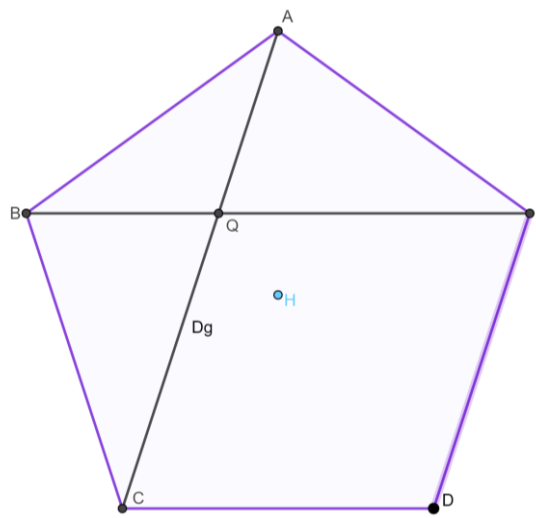


Figura 16. Lado y diagonal de un pentágono regular (elaboración propia)

Como cada diagonal es paralela a un lado del pentágono, se tiene que el cuadrilátero QCDE es un paralelogramo y, por tanto:

$$QE = L$$

$$QB = Dg - L.$$

Como los triángulos CQB y CDA son semejantes (tienen los lados paralelos), se cumple que (véase Figura 17):

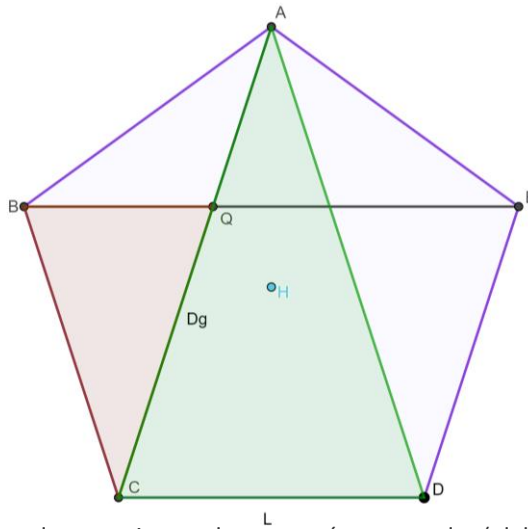


Figura 17. Triángulos semejantes de un pentágono regular (elaboración propia)

$$\frac{EQ}{CD} = \frac{BC}{AC}$$

Si sustituimos el valor de cada segmento en términos de L y Dg, tenemos que:

$$\frac{Dg - L}{L} = \frac{L}{Dg}$$

Esta expresión podemos transformarla hasta convertirla en una ecuación de segundo grado cuya incógnita es la razón entre la diagonal y el lado del pentágono.

$$\frac{Dg - L}{L} = \frac{L}{Dg} \rightarrow \frac{Dg}{L} - 1 = \frac{L}{Dg}$$

Multiplicando todos los términos por $\frac{Dg}{L}$ obtenemos:

$$\frac{Dg^2}{L^2} - \frac{Dg}{L} = 1 \rightarrow \left(\frac{Dg^2}{L}\right) - \frac{Dg}{L} - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{Dg}{L} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1 * (-1)}}{2 * 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solución será la positiva, es decir:

$$\frac{Dg}{L} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

Por tanto, en un pentágono regular la razón entre la diagonal y el lado es la razón aurea.

Ahora vamos a ver las relaciones que existen entre los sólidos platónicos teniendo en cuenta la razón áurea.

Partimos de un rectángulo áureo. El rectángulo AEFD es áureo porque sus lados DC y CF están en proporción áurea.

Se puede realizar un cubo de dimensión DF, en el que se puede inscribir un Icosaedro cuya arista mida DC y un Dodecaedro cuya arista mida CF.

Dibujando las vistas en plantas de ambas figuras, ciertas aristas del icosaedro y la arista del dodecaedro estarán en verdadera magnitud. (véase Figura 18).

Podemos ver que las aristas del icosaedro con respecto a las del dodecaedro están en proporción áurea.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{DC}{CF} = \phi$$

Además tenemos que la arista del icosaedro sería la diagonal del pentágono del dodecaedro, por tanto, con respecto a la proporción áurea establecida en el punto anterior en el pentágono tenemos que:

$$\frac{DC}{CF} = \frac{Dg}{L} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

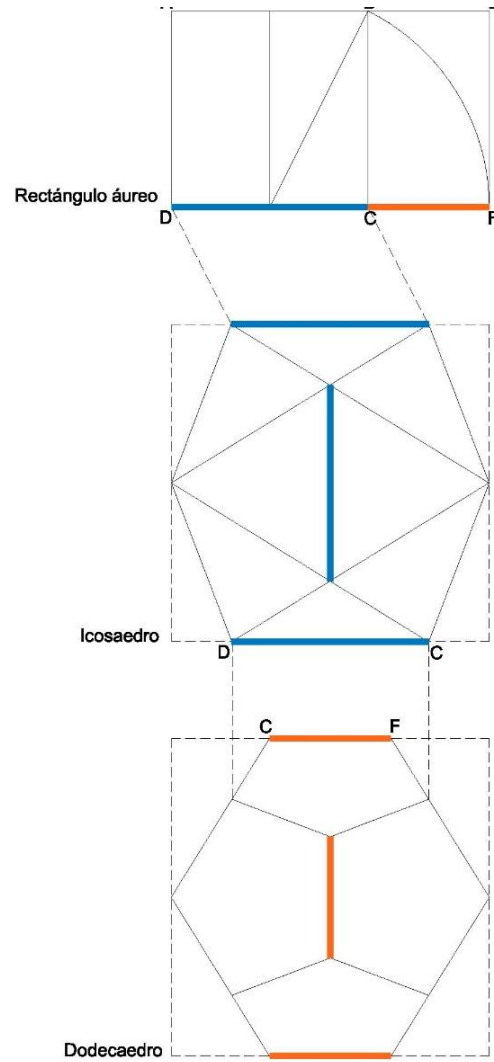


Figura 18. Proporción áurea icosaedro-dodecaedro (elaboración propia)

Por otro lado, podemos ver que dos cubos homotéticos (relacionados en proporción áurea), involucran a todos los demás poliedros regulares, dando lugar al omnipoliedro, realizado con los armazones de los sólidos platónicos, de forma que los cinco poliedros están inscritos dentro de otros.

Dibujando ambos cubos y los cinco poliedros regulares inscritos en los mismos, estableceremos la relación existente en ellos con respecto al número áureo, además de la proporción áurea del icosaedro y el dodecaedro.

En este caso existen numerosas relaciones áureas, como son por ejemplo las establecidas entre los segmentos:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{x}{y} = \frac{h}{x} = \frac{t}{s} = \frac{p}{o} = \frac{v}{z} = \frac{v+z}{l} = \phi$$

Todas estas relaciones vienen derivadas de la relación continua que se presenta entre la diagonal y el lado del pentágono (véase Figura 19).

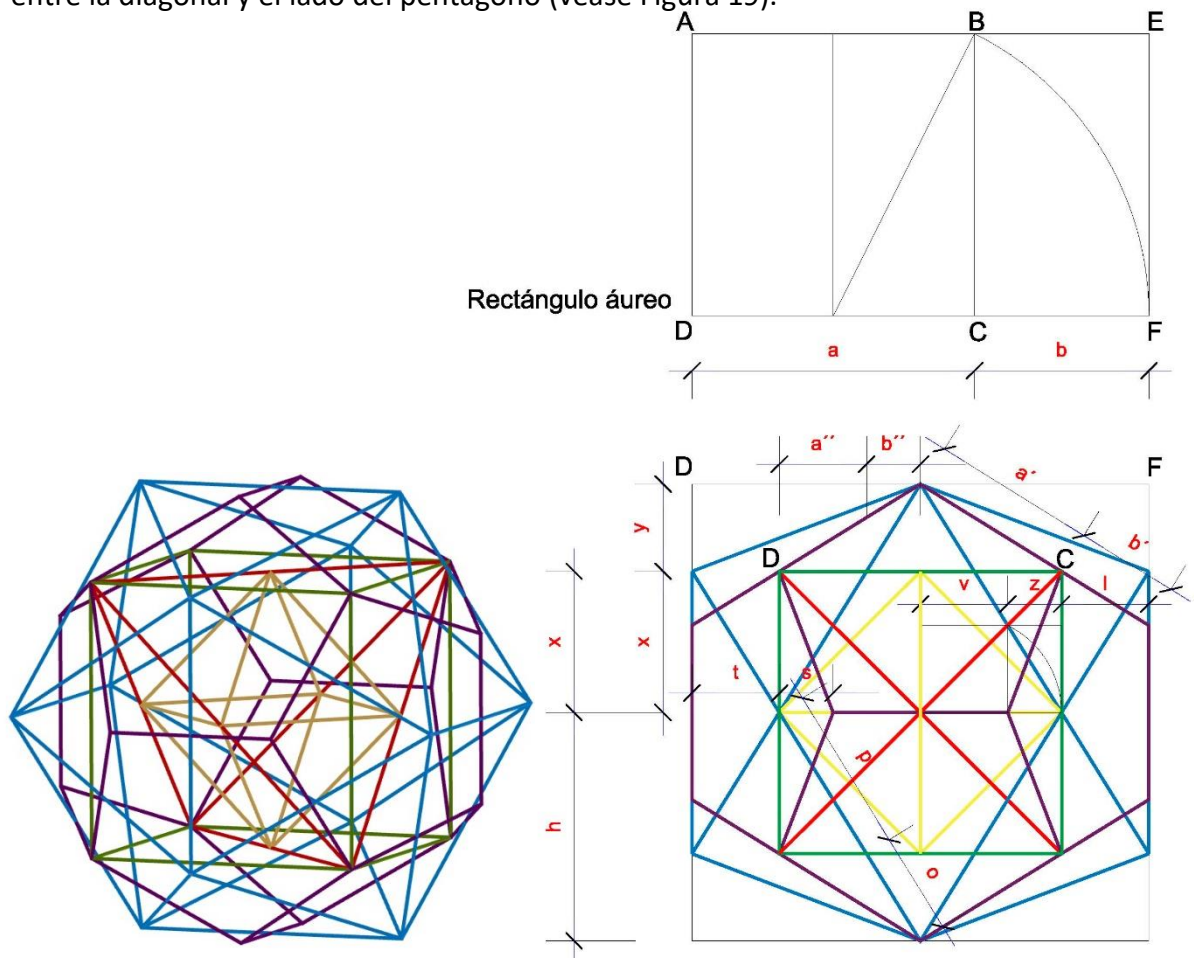


Figura 19. Omnipoliedro. Relaciones áureas entre poliedros regulares (elaboración propia)

Utilizando segmentos áureos (ver Figura 20), y sus segmentos cortos y largos podemos hacer una construcción cuyos vértices unidos de una forma determinada forman un dodecaedro (véase Figura 21).

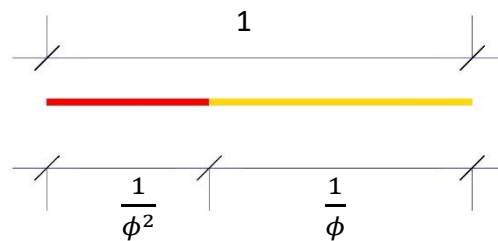


Figura 20. Segmentos áureos (elaboración propia)

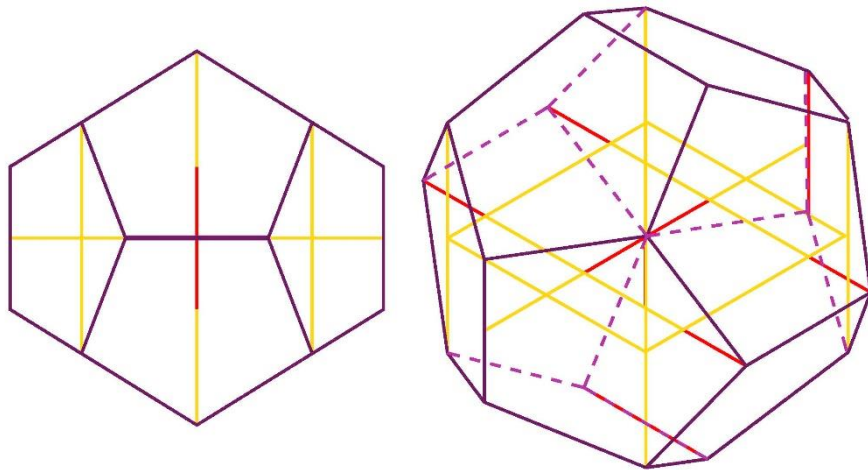


Figura 21. Dodecaedro formado con segmentos áureos (elaboración propia)

Igualmente, utilizando segmentos áureos podemos formar un icosaedro (véase Figura 22).

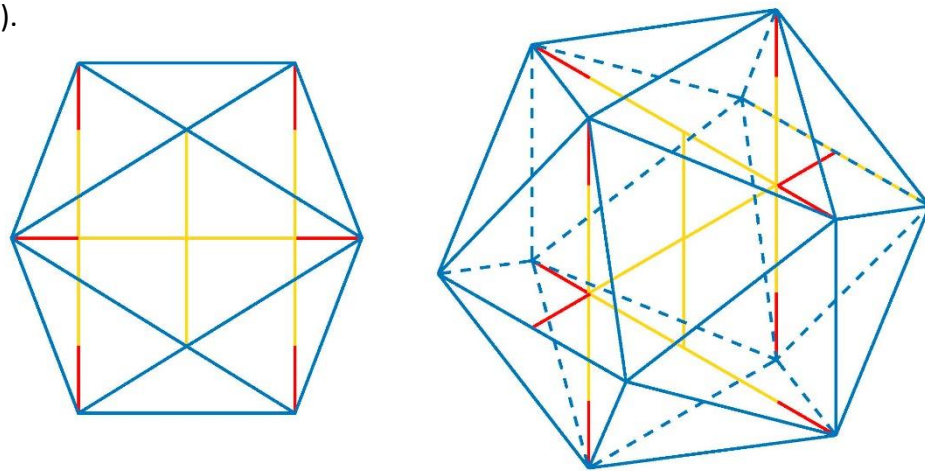


Figura 22. Icosaedro formado con segmentos áureos (elaboración propia)

Como podemos comprobar, los vértices de un icosaedro se pueden obtener a partir de tres rectángulos áureos colocados perpendicularmente entre sí (véase Figura 23).

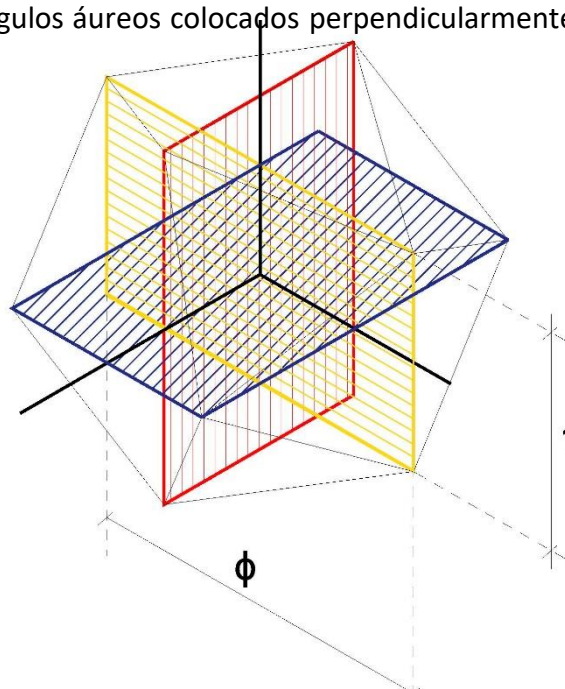


Figura 23. Icosaedro. Rectángulos áureos (elaboración propia)

4.7. SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS.

A los poliedros convexos que están formados por caras regulares, pero no tienen el mismo número de lados, se les llama poliedros Arquimedianos.

Arquímedes fue el que los describió, identificó e indicó el número de polígonos concurrentes en cada vértice, así como el número de lados, de ahí su nombre.

Por otro lado, Kepler fue quién dio nombre a estos poliedros, demostrando la existencia de 13 poliedros semirregulares, además de dos poliedros de caras regulares, prismas y antiprismas.

Suma de los ángulos de las caras de un poliedro convexo.

La suma de los lados de un poliedro convexo, si el poliedro tiene C caras, y siendo, respectivamente, los números de lados de sus caras $n_1, n_2, \dots, n_c$ será la siguiente:

$$S = (n_1 + n_2 + \dots + n_c - 2c) * 2R$$

Donde S es la suma de los ángulos de las caras de un poliedro.

R es la medida de un ángulo recto (grados).

Por otro lado tenemos que la suma de los números de lados de cada cara es el doble del número de aristas.

$$n_1 + n_2 + \dots + n_c = 2A$$

Tendremos que, aplicando la fórmula de Euler:

$$S = 4(A - C) * R = 4(V - 2) * R$$

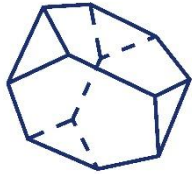
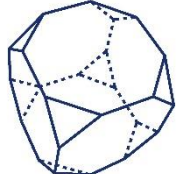
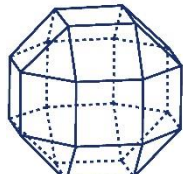
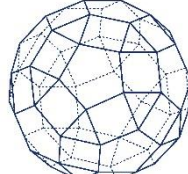
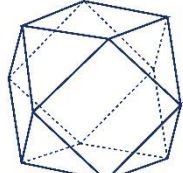
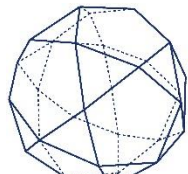
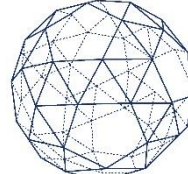
“La suma de los ángulos de las caras de un polígono convexo es igual a tantas veces cuatro rectos como vértices tiene el poliedro menos dos”.

Además se verifica en los poliedros arquimedianos las siguientes propiedades:

- Sus caras podrán ser de dos o tres tipos distintos (es imposible que tengan cuatro tipos de caras, pues sumarian más de cuatro ángulos rectos).
- Sus ángulos poliedros podrán estar formados únicamente por tres, cuatro o cinco caras (es imposible que tengan seis ángulos, pues sumarian más de cuatro ángulos rectos).

Por estas condiciones y propiedades de los sólidos arquimedianos salen un total de 15 posibilidades, pero consideraremos sólo 13 ya que las otras dos posibilidades serían una en la que no se cierra el espacio y la otra sería cualquier prisma de base regular que tenga cinco o más lados y caras laterales cuadradas.

Los sólidos arquimedianos son los siguientes: (véase Tabla 14)

NOMBRE	CARACTERÍSTICAS	IMAGEN
I. TRONCO-TETRAEDRO O TETRAEDRO TRUNCADO.	Un triángulo y dos hexágonos en cada vértice. Resultado de truncar hasta $\frac{1}{3}$ de la arista del tetraedro	
II. TRONCO-CUBO O CUBO TRUNCADO	Un triángulo y dos octógonos en cada vértice. Resultado de truncar los vértices de un cubo hasta $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ de la arista	
VIII TRONCO-DODECAEDRO O DODECAEDRO TRUNCADO	Un triángulo y dos decágonos en cada vértice. Resultado de truncar los vértices de un dodecaedro hasta $\frac{1}{\phi^2+1}$	
V. ROMBICUBOCTAEDRO O ROMBICOCTAEDRO MENOR	Un triángulo y tres cuadrados en cada vértice. Resultante de truncar los vértices de un cubo hasta $(2 - \sqrt{2})$	
XI. ROMBICOSIDODECAEDRO O ROMBICOSIDODECAEDRO MENOR	Un triángulo, dos cuadrados y dos pentágonos en cada vértice. Resultante de truncar un dodecaedro $\frac{2}{3}$ del borde	
III. CUBOCTAEDRO	Dos triángulos y dos cuadrados en cada vértice. Resultante de truncar hasta el punto medio de cada arista los vértices de un cubo.	
IX. ICOSIDODECAEDRO	Dos triángulos y dos pentágonos. Resultado de truncar hasta el punto medio de cada arista los vértices de un dodecaedro o un icosaedro	
VII. CUBO ROMO	Cuatro triángulos y un cuadrado (a partir del hexaedro u octaedro)	
XIII. DODECAEDRO ROMO	Cuatro triángulos y un pentágono (a partir del dodecaedro o icosaedro)	

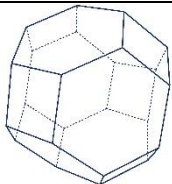
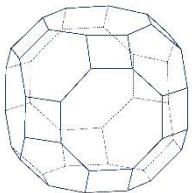
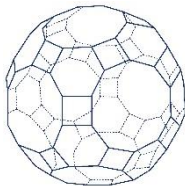
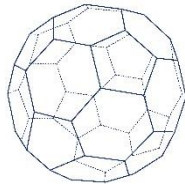
IV. TRONCO-OCTAEDRO O OCTAEDRO TRUNCADO	Un cuadrado y dos hexágonos. Resultado de truncar los vértices de un octaedro hasta $\frac{1}{3}$ de la arista.	
XII. TRONCOCUBOCTAEDRO O CUBOCTAEDRO TRUNCADO	Un cuadrado, un hexágono y un octógono en cada vértice. Resultado de truncar un cuadrado hasta $2 - \sqrt{2}$ y truncar los bordes pequeños $1 - \sqrt{\frac{2}{2}}$	
VI. TRONCOICOSIDODECAEDRO O ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO	Un cuadrado, un hexágono y un decágono. Resultado de truncar los vértices de un dodecaedro.	
X. TRONCOICOSAEDRO O ICOSAEDRO TRUNCADO	Un pentágono y dos hexágonos en cada vértice. Resultado de truncar los vértices de un icosaedro a $\frac{1}{3}$ de la arista	

Tabla 14. Sólidos Arquimedianos (elaboración propia)

Al prolongar las caras y/o aristas de cada uno de ellos generan los sólidos platónicos.

A la vez, los sólidos arquimedianos se obtienen con el truncamiento de los vértices y/o aristas de los cinco sólidos platónicos.

El truncamiento es la operación consistente en cortar las esquinas de los poliedros regulares, obteniendo poliedros que tienen todas las caras regulares. Los cortes de los vértices tienen que realizarse por un plano perpendicular al eje de rotación del poliedro que pasa por dichos vértices. Otra condición es que todos estos cortes tienen que ser equidistantes a dichos vértices.

Existen dos tipos de truncamiento:

Tipo I: El corte es realizado por planos que tienen que pasar por los puntos medios de las aristas concurrentes en cada vértice.

Tipo II: El corte es realizado a una distancia establecida tal que el polígono regular que resulta debe tener el doble número de lados que el polígono inicial.

5. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

“La escuela comercia con ella misma, aprendemos los conocimientos aportados por la escuela solamente para tener éxito en la escuela, no para comprender las situaciones del mundo y actuar inteligentemente, justamente, eficazmente en su seno.” Chevallard (2006).

La teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985), se refiere a la adaptación de un determinado conocimiento para transformarlo posteriormente en otro para ser enseñado. Es el proceso basado principalmente en la modificación de un determinado saber para ser enseñado, adaptándolo al nivel del alumnado.

En este proceso, el saber tiene varias fases: el saber sabio, el saber enseñar y el saber enseñado.

Chevallard (1994), tras las innumerables críticas hacia su teoría de Transposición Didáctica, plantea una extensión de la misma. Ofrece una generalización de dicha teoría, introduciendo que un determinado saber, no solamente se lleva a cabo mediante las 3 formas originales establecidas en su teoría (saber sabio, saber a enseñar y saber enseñado). Muestra que la enseñanza nos remite a un saber “laico”, un saber que supone aprender a vivir “fuera de la escuela” (Chevallard, 1994, p. 167). Por tanto, es importante que ese saber “laico” o también denominado “Saber de referencia”, tenga que ser reconocido por toda la sociedad: *“la escuela sufre para cumplir su misión cuando ella está muy débilmente apoyada por la sociedad”*. (Chevallard, 1994, p. 168).

Por otro lado, según la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1997), no es posible la existencia de una posición paradigmática privilegiada desde la que podamos analizar, observar y juzgar el mundo de los distintos saberes. Aunque es necesario el uso de sistemas de referencia relativos, que se adecuen a cada problema y cada situación. Por tanto, es importante destacar que debemos tomar como hipótesis de trabajo, los modelos epistemológicos, constantemente revisados, que construyen la Didáctica de las Matemáticas, de ahí la importancia de la realización de un completo diseño curricular, ya que son los sistemas de referencia de los centros para llevar a cabo esta transposición didáctica.

La unidad a desarrollar en el presente trabajo, es la correspondiente a Cuerpos Geométricos, en concreto la unidad didáctica dirigida al alumnado de 3º de E.S.O. de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Los contenidos que deben ser transmitidos al alumnado, así como los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, para cada materia desarrollada durante las etapas de E.S.O. y Bachillerato, están contenidos en el Anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Según establece el RD 1105/2014, la materia está estructurada en torno a 5 bloques: Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas (bloque común y transversal que se ha de llevar simultáneamente al resto de los bloques y que es el fundamental eje de la asignatura de matemáticas, pues su articulado se basa en procesos básicos e imprescindibles para el desarrollo del quehacer matemático), Bloque 2: Números y Álgebra, Bloque 3: Geometría, Bloque 4: Funciones, y Bloque 5: Estadística y Probabilidad. La unidad didáctica objeto de análisis, va a incluir los contenidos

mínimos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables establecidos en los Bloques 1 y 3.

Con el objetivo de tener una visión general de cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza concretado en los recursos utilizados por el profesorado, se realiza un análisis y comparativa de la unidades didácticas de Cuerpos geométricos de 3º de E.S.O. de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de tres libros de texto de distintas editoriales. En concreto, hemos analizado los libros de las editoriales SM (Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E. 2019a), Anaya (Colera, J., Colera, R., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. 2016a) y Edelvives (Mejías, D., Ocaña, J.M., Romero, R. 2019a).

Se ha realizado una comparativa entre los contenidos de los tres libros que se muestra en la siguiente tabla (Tabla 15).

SM	Anaya	Santillana
Unidad 9. Cuerpos geométricos.	Unidad 11. Cuerpos geométricos.	Unidad 12. Cuerpos geométricos. Unidad 13. Cuerpos de revolución.
1. Elementos de la geometría en el espacio. Puntos, rectas y planos. 2. Poliedros. Fórmula de Euler. Prismas. Pirámides. Poliedros regulares. 3. Cuerpos de revolución. Cilindro. Cono. Tronco de cono. Esfera. Partes de la esfera. 4. Áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución. Prismas. Pirámides. Cilindros. Conos. Esfera y partes de la esfera. 5. Áreas y volúmenes de otros cuerpos geométricos. 6. Simetrías en cuerpos geométricos. 7. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas.	1. Poliedros regulares y semirregulares. Poliedros regulares. Dualidad. Fórmula de Euler. Poliedros semirregulares. 2. Truncando poliedros. Truncando poliedros regulares. Otros tipos de truncamiento. 3. Planos de simetría de una figura. 4. Ejes de giro de una figura. 5. Superficie de los cuerpos geométricos. Área de un poliedro. Área de un cilindro. Área de un cono. Área de un tronco de cono. 6. Volumen de los cuerpos geométricos. Prismas y cilindros. Pirámides y conos. Esfera. Volumen de una zona esférica. 7. Coordenadas geográficas. Husos horarios.	Tema 12. Cuerpos geométricos. 1. Poliedros. Formula de Euler. Poliedros regulares. Simetría central, axial y especular. Área y volumen de poliedros regulares. 2. Prisma. Área del prisma. Volumen del prisma. 3. Paralelepípedos. Área de paralelepípedo. Volumen de paralelepípedo. 4. Pirámide y tronco de pirámide. Área de la pirámide y del tronco de pirámide. Volumen de la pirámide y del tronco de pirámide. Tema 13. Cuerpos de revolución. 1. Cuerpos de revolución. 2. Cilindro. Área de un cilindro. Volumen de un cilindro 3. Cono. Área de un cono. Volumen de un cono. 4. Tronco de cono. Área de un tronco de cono. Volumen de un tronco de cono. 5. Esfera. Área de una esfera. Volumen de una esfera. Intersección de plano y esfera. Relaciones métricas de la esfera. 6. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Husos horarios.

Tabla 15. Comparativa de contenidos entre SM, Anaya y Edelvives

Como podemos observar, los contenidos de los libros de texto analizados de 3º de E.S.O de Matemáticas Académicas, responden a los mínimos establecidos en el RD 1105/2014, respecto al bloque 3, introduciendo algunos textos conceptos contenidos en las exigencias mínimas del currículo de 4º de E.S.O. Con respecto a los mínimos recogidos en el bloque 1, dependerá en cierta medida de la capacidad de transposición didáctica del docente.

Atendiendo a la contextualización de dichos contenidos con respecto a la establecida en el bloque de geometría del currículo, podemos destacar que en los libros de texto de SM y Anaya se introducen en temas anteriores aspectos de proporcionalidad, teorema de Tales, figuras planas, y lugares geométricos, contextualizando el teorema de Tales y la división de un segmento en partes proporcionales con anterioridad a la enseñanza de los conceptos básicos de geometría del plano, al contrario de lo establecido en el Real Decreto. Sin embargo, en el libro de texto de Edelvives, aunque se estructura el contenido en dos temas distintos, se sigue el orden de los contenidos tal y como se establece en el currículo, geometría del plano, lugar geométrico, teorema de Tales, movimientos en el plano (traslaciones, simetrías, giros y composición de movimientos), cuerpos geométricos (planos de simetría de poliedros), la esfera y su intersección con planos, el globo terráqueo (coordenadas geográficas y husos horarios, longitud y latitud), para finalizar con un apartado dedicado al uso de herramientas tecnológicas que faciliten la comprensión del tema.

Las tres editoriales comienzan sus libros de texto con una introducción histórica del tema de cuerpos geométricos, aunque el enfoque es bien distinto.

El de la editorial SM parte de definir el origen de los sólidos platónicos, relata un poema de Gabriel Celaya homenaje a Kepler, muy evocador “Así se escribe la ciencia” donde introduce cuestiones que harán al alumnado mirar el tema desde un punto de vista crítico y participativo, invitándoles a buscar relaciones entre los sólidos platónicos y la naturaleza.

En el de la editorial Anaya, se hace una introducción sobre Platón y el origen de los sólidos platónicos y Arquímedes y su relación con los sólidos arquimedianos, que acerca al alumnado el conocimiento de las aportaciones de estos personajes a la cultura y al pensamiento, reflejando cómo la experimentación y la construcción de objetos fue para Arquímedes una vía para el estudio y comprensión de propiedades matemáticas y fenómenos físicos. Resulta muy interesante para el alumnado el procedimiento de cálculos utilizado, de la misma forma que hizo Arquímedes, para la obtención de las fórmulas del área del círculo y el volumen de la esfera. Dicho método, llamado método de exahución, está basado en considerar que la figura puede dividirse en infinitas piezas infinitamente pequeñas, siendo este proceso el principio del cálculo infinitesimal.

En el libro de texto de la editorial Edelvives, en otro sentido, se muestra en las dos primeras páginas de cada tema imágenes de edificios o construcciones con determinadas formas geométricas, llamando la atención del alumnado sobre la relación de los cuerpos geométricos con la arquitectura o la escultura, pero carece de una introducción histórica que los acerque al origen y a los acontecimientos históricos que han determinado la evolución del estudio y uso de estos cuerpos, perdiendo la posibilidad de despertar el interés del alumnado en este sentido.

Los contenidos del tema en el texto de la editorial SM comienzan con una introducción en la que se especifica cuáles son los elementos básicos de la geometría: puntos, rectas y planos, así como las posiciones relativas de dos rectas en el espacio, de una recta y un plano y de dos planos entre sí, ángulos diedros y perpendicularidad en el espacio. Me parece una buena introducción para que el alumnado sea consciente de cuáles son los elementos generadores de los cuerpos geométricos, sin embargo, en los textos de Anaya y Edelvives se comienza el tema directamente con la definición de poliedros.

Para facilitar al alumnado el aprendizaje de los poliedros, las tres editoriales desarrollan en sus textos el concepto de poliedros mediante distintas definiciones, estableciendo igualmente las siguientes diferencias relativas al contenido (ver tabla 16):

Poliedros. Definiciones. Fórmula de Euler	
Libro de texto SM	Definición de poliedro: <i>“Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos. Sus elementos son: cara, vértice y arista”.</i> Tras la exposición en el punto 1 de las posiciones relativas de rectas y planos, así como las definiciones de ángulo diedro y su medida, en este punto, se introduce la definición de poliedro convexo: <i>“Un poliedro es convexo cuando todos sus ángulos diedros son menores de 180°”.</i> Previa la definición de poliedro convexo, establece la fórmula de Euler de la forma siguiente: <i>“En cualquier poliedro convexo, se cumple la siguiente relación entre el número de caras, C, aristas, A, y vértices, V”</i> $C+V=A+2$ Se relacionan las definiciones de prismas y pirámides y sus elementos. Definición de poliedro regular: <i>“Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y todos sus vértices concurren en el mismo número de aristas. Sólo existen cinco poliedros regulares”.</i> No se presentan definiciones referentes a dualidad entre poliedros ni conceptos relativos a truncamiento de poliedros.
Libro de texto Anaya	Definición de poliedro regular: <i>“Un poliedro se llama regular cuando cumple las dos condiciones siguientes:</i> <i>1. Sus caras son polígonos regulares idénticos.</i> <i>2. En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.</i> <i>Sólo hay cinco poliedros regulares”.</i> Igualmente invita a los alumnos a investigar en la web la justificación de por qué sólo hay cinco poliedros regulares.

	Posteriormente explica los poliedros duales, planteando ejercicios de reflexión muy interesantes sobre la obtención de poliedros duales a partir de los centros de poliedros regulares. Al no tener una previa explicación de posiciones relativas de rectas y planos, de ángulos diedros, ni poliedros convexos, la definición de la fórmula de Euler se establece de la siguiente manera: <i>“Si en un poliedro simple (que no tiene orificios) se cuentan el número de caras (c), de vértices (v) y de aristas (a), se cumple lo siguiente:</i> <i>Fórmula de Euler: $c + v - a = 2$”</i> Define los poliedros semirregulares para introducir conceptos de truncamiento de poliedros regulares. Este conocimiento es muy útil para la comprensión de cómo se van generando distintas figuras y espacios al ser cortados mediante distintos planos los vértices de los poliedros, y no aparece en las demás editoriales, como tal aunque si se intuye en algún ejercicio de SM.
Libro de texto Edelvives	Definición de poliedro: <i>“Un poliedro es un cuerpo geométrico cerrado, limitado por polígonos. Los elementos de un poliedro son: caras, aristas y vértices.</i> Define también, ángulo diedro, ángulo poliedro, diagonal del poliedro, plano diagonal y diagonal de una cara. Definición de poliedro convexo: <i>“un poliedro es convexo cuando el segmento que une dos puntos cualesquiera está contenido en el poliedro, en caso contrario el poliedro es cóncavo”.</i> Esta definición da pie a la introducción de la fórmula de Euler en la siguiente terminología: <i>“En todos los poliedros convexos, el número de caras, C, más el número de vértices, V, es igual al número de aristas, A, más dos:</i> $C + V = A + 2$” Definición de poliedros regulares: Un poliedro regular debe cumplir las siguientes condiciones: - Todas sus caras deber ser polígonos regulares e iguales entre sí. - En cada vértice debe concurrir el mismo número de caras, que como mínimo deben ser tres. - La suma de los ángulos que convergen cada vértice debe ser menor de 360°. Aparecen las fórmulas de áreas y volúmenes de los cinco sólidos platónicos, no vistas en las otras dos editoriales. Tampoco se muestran conceptos de dualidad ni truncamiento.

Tabla 16. Comparativa de contenidos entre SM, Anaya y Edelvives

En cuanto al esquema de clasificación de los cuerpos geométricos, SM es la editorial que establece con más claridad este criterio en su libro de texto, en el de Anaya no se define ni se clasifican los cuerpos de revolución, detallando sus áreas y superficies junto con los poliedros en un punto común que engloba todos los cuerpos geométricos. En el texto de Edelvives sí se distingue, incluso en temas distintos, los poliedros de los cuerpos de revolución, pero no hay un hilo conductor que ayude al alumnado a comprender que los cuerpos de revolución son un tipo de cuerpos geométricos, incluso podría llevar a un error de concepto el titular el Tema 12: Cuerpos geométricos y el Tema 13: Cuerpos de revolución. Además, podemos observar este error de contextualización en las siguientes definiciones: (Véase tabla 17)

Definición de cuerpos de revolución	
SM	<i>“un cuerpo geométrico es un cuerpo de revolución si se puede obtener al girar una figura plana alrededor de un eje”</i>
Anaya	No existe
Edelvives	<i>“Los cuerpos de revolución se originan al girar una figura 360° alrededor de un eje”</i>

Tabla 17. Comparativa de definición de cuerpos de revolución incluida en los libros de SM, Anaya y Edelvives (elaboración propia)

En relación a la estructuración de conceptos y contenidos sobre cuerpos geométricos, áreas y volúmenes y su desarrollo, igualmente existen diferencias en las estructuras de los distintos libros de texto:

En el de SM se presenta, en primer lugar, definiciones, clasificación y elementos de poliedros, prismas, pirámides y poliedros regulares, en segundo lugar definiciones, clasificación y elementos de cuerpos de revolución y, posteriormente, se indican las áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución en un mismo punto del temario, generando un documento claro y sencillo para la consulta del alumnado.

En el de Anaya se exponen en primer lugar, los poliedros regulares, centrándose mucho más en sus propiedades como la dualidad, el truncamiento (conceptos más complejos), sin detenerse en ideas previas de prismas ni pirámides (considerándolos conocimientos adquiridos por el alumnado en etapas inferiores). Posteriormente, se concretan mediante un apartado claro y diferenciado en dos puntos, las áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos.

En el texto de Edelvives, como ya se ha mencionado, se estructuran estos mismos contenidos en dos temas. En el Tema 12 los cuerpos geométricos y en el Tema 13 los cuerpos de revolución. En primer lugar, expone claramente los elementos de un poliedro, los poliedros regulares y se exponen las fórmulas de áreas y volúmenes de los cinco sólidos platónicos (no incluidas en las demás editoriales). Por otro lado, contiene en distintos puntos conceptos más desarrollados, pero de un carácter demasiado básico en comparación con los de las otras dos editoriales, como son: la clasificación, elementos y relaciones métricas, de prismas, paralelepípedos, pirámides y troncos de pirámide. El texto sí muestra el teorema de Pitágoras en el espacio, como un contenido a destacar dentro del desarrollo del tema. (véase Figura 24)

Diagonal “D” del ortoedro recto

$$D^2 = d^2 + c^2$$

La diagonal del ortoedro queda en

Función de la diagonal de su base:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

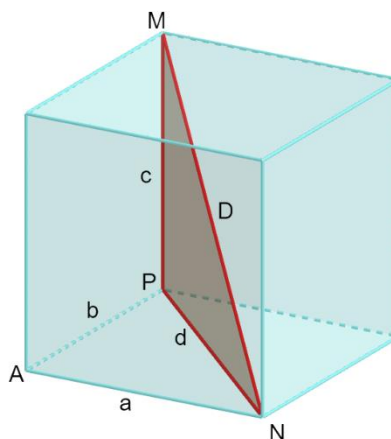


Figura 24. Teorema de Pitágoras en el espacio desarrollado en Edelvives. Elaboración con Geogebra

En los libros de texto de las tres editoriales aparecen las fórmulas de Áreas y Volúmenes con el esquema del desarrollo del poliedro y su figura en 3 dimensiones; descomponiendo el poliedro para el cálculo de su área total en la suma del área de sus caras laterales y de las caras que conforman la base o bases del mismo.

En el de SM, esto sólo se especifica para el área de poliedros rectos (prismas y pirámides), sin embargo en el de Anaya y Edelvives, además, se descomponen en áreas laterales y áreas de las bases tanto los poliedros rectos como los poliedros de revolución. Todas las editoriales introducen en sus textos el concepto de que el área lateral del cilindro es igual al área de la esfera inscrita en él, pero sólo en el de Anaya puntualiza la relación puesta de manifiesto por Arquímedes de que el área total del cilindro es 1,5 veces el área de la esfera circunscrita, y que el volumen total del cilindro es 1,5 veces el volumen de la esfera circunscrita, es más, introduce el concepto de que *“cualquier figura que dibujemos en la esfera, al proyectarla sobre el cilindro da lugar a otra figura que puede ser muy distinta pero tiene la misma superficie”*, haciendo al alumnado reflexionar sobre la relación de áreas entre distintas superficies.

En el texto de Anaya, tras abordar la relación del volumen del cilindro con la esfera circunscrita, se demuestra fácilmente la relación entre distintos volúmenes: (ver Figura 25)

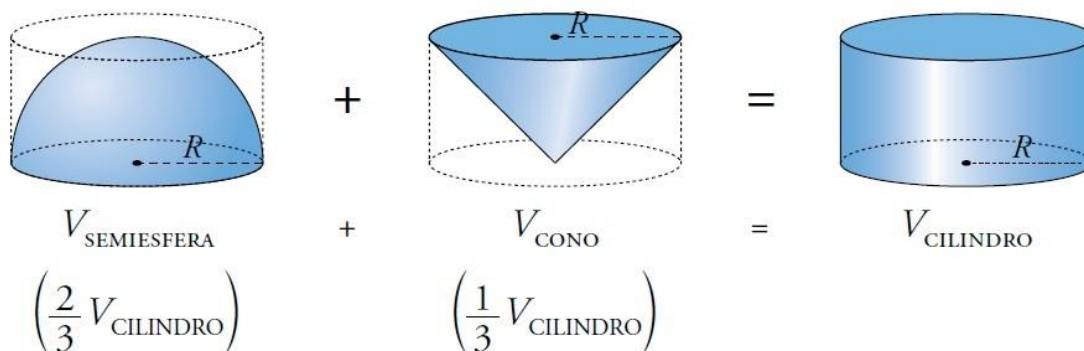


Figura 25. Relación entre el volumen de la esfera el cono y el cilindro. Anaya (J. Colera, et al., 2016a)

Y cómo se deduce el volumen de una zona esférica de la siguiente forma (Véase Figura 26):

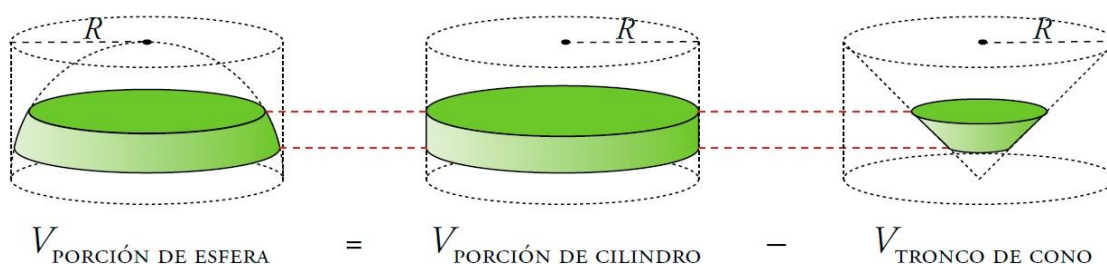


Figura 26. Relación entre el volumen entre figuras geométricas. Anaya (J. Colera, et al., 2016a)

En el texto de SM, al no contemplar la definición anterior, se muestra directamente el área del casquete esférico, anotando que *“los áreas de la zona esférica y del casquete esférico de una esfera corresponden al área lateral del trozo de cilindro que la envuelve”*, lo que supone una introducción de la fórmula menos intuitiva y que puede presentar mayor dificultad de comprensión y resolución de problemas. En el texto de Edelvives ni siquiera se menciona el área ni el volumen del casquete esférico.

El texto de SM presenta un apartado de áreas y volúmenes de otros cuerpos geométricos, relatando que *“el área y el volumen de un cuerpo geométrico complejo, se divide en cuerpos simples, se obtienen los volúmenes y las áreas, sin tener en cuenta las áreas de las caras de las uniones, y se suman los resultados.”*, que resulta muy útil para comprender y calcular áreas y volúmenes de figuras complejas.

En cuanto a simetrías en cuerpos geométricos, en el de SM se describen y definen los conceptos de tres tipos de simetrías: Central, Axial y Especular, centrándose posteriormente en el cubo y reflejando estas simetrías, utilizando distintos esquemas que facilitan la comprensión de los conceptos de simetría (Véase Figura 27):

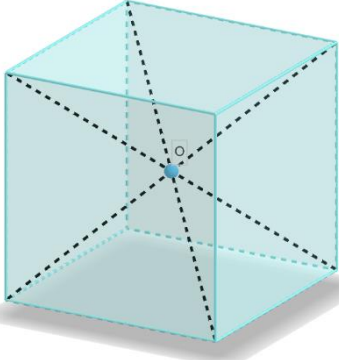
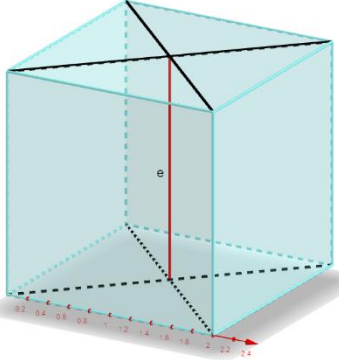
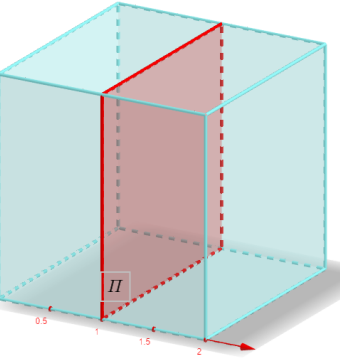
Simetría central	Simetría Axial	Simetría especular
		
El punto O: centro de simetría	La recta e: eje de simetría.	El plano π : plano de simetría.
<i>“Todos los ejes y todos los planos de simetría de un cuerpo geométrico, contienen al centro de simetría. Todos los planos de simetría contienen algún eje de simetría.”</i>		

Figura 27: Esquema de simetrías basado en el que aparece en SM (elaboración con Geogebra).

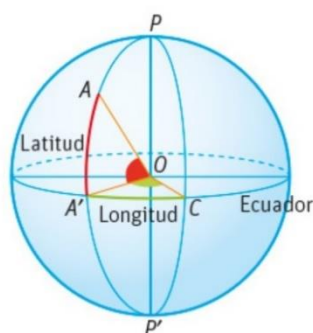
El de Anaya sólo menciona la simetría axial, pero esquematiza con figuras en 3 dimensiones los distintos planos de simetría del cubo, prisma pentagonal y cilindro. Como se había introducido anteriormente el concepto de dualidad, se incluyen ejercicios relativos a los planos de simetrías de poliedros duales muy interesantes.

En el de Edelvives se abordan las definiciones sin ningún tipo de esquema explicativo, con lo que no quedan claramente transmitidos los conceptos de simetrías de cuerpos geométricos pese a la importancia que simetrías y ejes de giro representan. Hay que tener en cuenta que constituyen un pilar fundamental para la comprensión de transformación de poliedros y la concepción de visión espacial (Un ejemplo de esta cualidad la encontramos en el desarrollo del cubo de Rubik).

Otro contenido incluido en el currículo y que es importante analizar cómo lo desarrollan los distintos libros de texto para que el alumnado lo comprenda, es el relativo al globo terráqueo y la relación con las coordenadas geográficas.

En los libros de texto de las tres editoriales se definen paralelos terrestres, ecuador, trópicos de Cáncer y Capricornio de forma análoga, como las circunferencias resultantes de la sección de planos perpendiculares al eje de rotación y los meridianos como las circunferencias resultantes de planos que pasan por los dos puntos situados en los polos. A continuación, también se desarrollan conceptos como los elementos geométricos de la esfera terrestre: zonas, hemisferios y husos horarios.

Igualmente, en los tres textos analizados se definen de forma clara los conceptos de longitud y latitud (véase Figura 28), así como sus criterios de medida y se incluyen desarrollos parecidos para la explicación de husos horarios. Así, se explica cómo, centrado en el meridiano 0, se forma un huso esférico de $15''$ ($360''/24h = 15''$ cada hora). En ese huso determinado serán las 12 cuando el Sol pase por el meridiano $0''$.



La longitud del punto A es el ángulo $A'OC$, y la latitud, el ángulo $A'OA$.

Figura 28: esquema de longitud y latitud SM (F. Alcaide, J. Hernández, E. Serrano. 2019a)

En los textos de las tres editoriales plantean actividades a realizar con herramientas tecnológicas, en concreto, en los de SM y Anaya se utiliza Geogebra, y en el de Edelvives se desarrolla de manera mucho más didáctica como construir poliedros y cuerpos de revolución con Wiris.

Al finalizar la unidad didáctica, el texto de SM contiene un apartado dedicado a Matemagia, que motiva al alumnado para investigar cómo hacer elipses e hipérbolas con papiroflexia y les instruye sobre el teorema de las características de Euler para grafos (véase Figura 29), relatando además una pequeña biografía suya.

El texto de Anaya introduce un taller de matemáticas en el que invita al alumnado a investigar sobre cómo llenar el espacio con distintas formas geométricas, señalando, como es evidente, que el cubo es el mejor cuerpo para apilar y deduciendo a partir de

éste otras formas de minimizar el espacio como, por ejemplo, cortando las esquinas de los poliedros

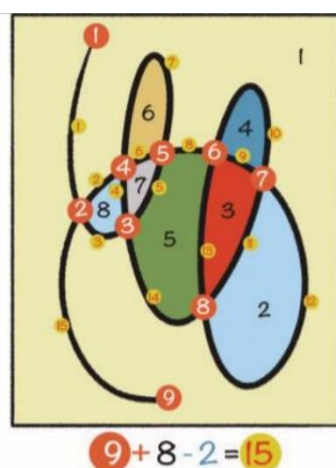


Figura 29: Teorema de las características de Euler para grafos SM
(F. Alcaide, J. Hernández, E. Serrano. 2019a)

A continuación, en la siguiente tabla (véase tabla 18) se exponen las principales diferencias en los contenidos de los libros de texto de cada una de las editoriales analizadas:

Diferencias significativas entre los contenidos de los textos de las tres editoriales			
	SM	Anaya	Edelvives
Concepto de posiciones relativas de rectas y planos	Sí	No	No
Concepto de ángulo diedro	Sí	No	Sí
Poliedros Arquimedianos	No	Sí	No
Concepto de ángulo poliedro	Sí	No	Sí
Concepto de poliedro convexo	Sí	No	Sí
Concepto de poliedros duales	Se intuye en algún problema	Sí	No
Definición de simetría central, axial y especular	Sí	Sólo simetría axial	Sí
Deducción y fórmulas de áreas y volúmenes de poliedros regulares	No	No	Sí
Descomposición de área lateral + área de la base en poliedros de revolución	No	Sí	Sí
Deducción fórmula de Euler para grafos	Sí	No	No
Esquema plano del globo terráqueo haciendo referencia al sistema cartesiano	Sí	No	Sí
Exposición de teorema de Pitágoras en el espacio	No	No	Sí
Herramientas tecnológicas	Geogebra	Geogebra	Wiris
Esquema resumen del tema	Sí	No	Sí

Tabla 18. Diferencias significativas entre los contenidos de SM, Anaya y Edelvives. (Elaboración propia)

En relación a los ejercicios planteados en cada uno de los libros de texto, la siguiente tabla se resume el análisis que se ha realizado sobre los contenidos de los problemas (véase tabla 19):

Análisis de los contenidos de problemas planteados	SM	Anaya	Edelvives
Ejercicios teóricos (identificación de cuerpos geométricos, características, elementos, Fórmula de Euler)	12	5	21
Ejercicios resueltos	18	10	3
Ejercicios de rectas y planos que cortan los poliedros	5	-	-
Ejercicios de dibujar el desarrollo de cuerpos geométricos	4	Investigación web	1
Ejercicios de truncamientos de poliedros	Se plantea un ejercicio de investigación	9	-
Ejercicios de planos de simetría	2	6	-
Ejercicios de ejes de simetría	2	5	-
Ejercicios de dualidad de poliedros	Sólo se intuye en un ejercicio	4	-
Problemas de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos	11	34	60
Problemas de áreas y volúmenes contextualizados	7	8	24
Problemas de coordenadas geométricas y husos horarios	13	12	-
Problemas de identificación de cuerpos geométrico con objetos cotidianos	-	-	5
Problemas de investigación o emprendimientos	Diversas investigaciones en la Web	Diversas investigaciones en la Web	Diversas investigaciones en la Web
Problemas de asociación de ideas	2	3	2
Construcción de poliedros con polidron o similar	-	-	1
Problemas de construcción de poliedros con herramientas tecnológicas (geogebra o Wiris)	Representación de los cuerpos geométricos con Geogebra	Áreas y volúmenes con Geogebra	Wiris 4
TOTAL	81	96	128

Tabla 19. Análisis de problemas contenidos en SM, Anaya y Edelvives (Elaboración propia)

Nota: La tabla de análisis de problemas contiene los ejercicios del texto de Edelvives incluidos en los dos temas en los que se estructura el contenido de figuras geométricas.

Tras el análisis de los contenidos que se trabajan en los problemas que se incluyen en los tres libros de texto analizados, se constata que:

En el texto de SM, aunque es el que menos ejercicios aporta, incluye más problemas resueltos y teóricos sobre las características de los poliedros y la fórmula de Euler, aunque los conceptos de dualidad y truncamiento sólo se intuyen en dos ejercicios sin que se haga referencia a las existencia de estas propiedades. Por otro lado, sí se introducen algunos ejercicios muy interesantes de intersección de poliedros con planos y rectas y problemas de áreas y volúmenes. También se propone como tareas de investigación y emprendimiento en la web, la búsqueda de simetrías en la naturaleza y la elaboración de un mural donde se comparen las proyecciones de Peter y Mercator para la elaboración de un planisferio o un mapa de la Tierra plano. Además, este libro de texto, plantea tareas de representación de los cuerpos geométricos con Geogebra.

En el texto de Anaya se incluyen una mayor variedad de ejercicios, también se abordan conceptos más complejos. Así, se plantean ejercicios muy interesantes sobre dualidad, truncamientos, planos y ejes de simetría, además de los problemas de áreas y volúmenes. También, se propone al alumnado una investigación en la web sobre el desarrollo de los cinco sólidos platónicos y cuál es la justificación de que sólo existan esos cinco poliedros regulares. Asimismo, se proponen investigaciones sobre el desarrollo de figuras geométricas, prisma y antiprisma, cuboctaedro e icosidodecaedro y de los cinco poliedros regulares truncados. Se plantean también investigaciones teóricas como las relacionadas con Arquímedes y el volumen de la esfera y se proponen tareas de cálculo de áreas y volúmenes así como distintos problemas sobre recipientes para desarrollar con Geogebra.

En el texto de Edelvives, aunque es el que más ejercicios contiene, se abordan menos tipos de problemas y más básicos, abordando la gran mayoría cuestiones sobre características y elementos de los cuerpos geométricos y de áreas y volúmenes. Además, se plantea la investigación sobre diferentes figuras y curvas que se pueden obtener al cortar un cono por un plano y sobre Apolonio de Perga y sus secciones cónicas. En referencia al uso de herramientas tecnológicas se opta por la construcción con Wiris de un octaedro y un cono, previa explicación detallada de cómo se representa un tetraedro y un cilindro.

Igualmente se han analizado la dificultad de los problemas que contienen cada una de las editoriales, para tratar de establecer conclusiones tanto sobre la idoneidad del contenido en relación con lo establecido en el currículo como sobre el proceso de transposición didáctica de los dichos contenidos en cada una de ellas y su mayor o menor complejidad o adecuación a los mínimos exigidos por la legislación.

El análisis realizado (véase tabla 20), desprende los siguientes resultados:

Nivel de dificultad de problemas propuestos /Proporción	SM	Anaya	Edelvives
Bajo	30 / 38%	29 / 30%	74 / 58%
Medio	46 / 56%	61 / 64%	53 / 41%
Alto	5 / 11%	6 / 13%	1 / 2%
Total	81	96	128

Tabla 20. Análisis del nivel de dificultad de los problemas y proporción. Elaboración propia

A continuación, se muestra en la grafica (Véase Figura 30), los porcentajes de cada editorial en relación a la dificultad de los problemas planteados en los libros de texto:

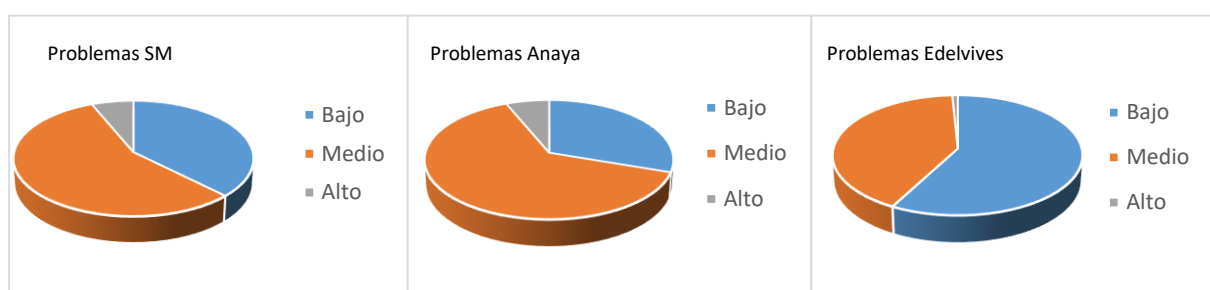


Figura 30. Porcentajes de la dificultad de los problemas planteados en SM, Anaya y Edelvives

En relación a los problemas incluidos en los libros de texto se puede destacar que:

- En los de SM y Anaya la mayoría de los problemas presentan un porcentaje de dificultad de grado medio, si bien incluyen algunas tareas de dificultad elevada, lo que supone un enriquecimiento en el aprendizaje del alumnado.
- En el de Edelvives, sin embargo, la mayoría de los problemas que se proponen tienen una dificultad baja o media, no contiene apenas ejercicios de dificultad alta, empobreciendo en ciertos aspectos el aprendizaje del alumnado.

Conclusiones

Tras el análisis realizado de las tres editoriales se puede concluir lo siguiente:

El libro de texto de la editorial **Anaya** presenta mayor contenido, pues introduce conceptos mucho más complejos que las otras dos editoriales cómo la dualidad o el truncamiento de poliedros regulares (principio de generación de los sólidos arquimedianos), siendo la única editorial donde se mencionan estas figuras, generando sobre el alumnado una visión mucho más amplia sobre la clasificación y características de los cuerpos geométricos. De esta manera se potencia y se da una mayor importancia al desarrollo de la visión espacial para la resolución de problemas, pues la visualización de la figura tridimensional por el alumnado es fundamental para la comprensión y resolución de problemas de espacios geométricos.

El libro de texto de la editorial **SM**, pese a no contemplar los contenidos anteriormente descritos, sí plantea algunas tareas relacionadas con ellos e introduce también aspectos importantes que hacen reflexionar al alumnado. Se comienza abordando el origen de los sólidos platónicos y detalla los procesos sobre cómo se generan los cuerpos geométricos y espacios a partir de rectas y planos e intersecciones entre ambos; desarrolla ampliamente definiciones sobre planos y ejes de simetría bien estructurados e introduce al final de la unidad el teorema de las características de Euler para grafos.

Edelvives al presentando un contenido más amplio lo hace sobre aspectos mucho más básicos, pues no contempla contenidos complejos que puedan enriquecer al alumnado. Sin embargo, si incluye tareas de manipulación con polydron y tareas de observación que mejoran la visión espacial e imaginativa, herramientas muy útiles para la comprensión de cuerpos geométricos, y no utilizadas por sus competidoras.

Las tres editoriales incluyen el uso de tecnologías para enriquecer el currículo, proponiendo tareas realizadas con el uso de los programas Geogebra o Wiris lo que aporta un aspecto muy interesante para el desarrollo de la visión espacial.

En cuanto a actividades de carácter manipulativo, muy útiles para el desarrollo de la visión espacial, sólo aparecen en Edelvives. En las tres editoriales se echa en falta la inclusión de tareas de carácter colaborativo que fomenten el razonamiento del alumnado, los anime a involucrarse más con el aula y les ayude a desarrollar un pensamiento mucho más profundo y a establecer conexiones entre distintas áreas que les ofrezcan la posibilidad de resolver cuestiones prácticas de la vida cotidiana.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado del TFM se va a desarrollar una unidad de 3º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, se va a contextualizar en el centro donde se plantea su desarrollo, estructurar mediante unas determinadas actividades, recursos, temporalización, evaluación e incluirá medidas generales de atención a la diversidad.

6.1. TÍTULO

Se realiza el desarrollo de la unidad didáctica “Cuerpos Geométricos”, impartida en el curso de 3º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, según lo establecido en el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

6.2. JUSTIFICACIÓN

En este apartado se analiza la importancia y la razón por la que es fundamental trabajar los contenidos y los criterios de evaluación de esta U.D.

El estudio de cuerpos geométricos o geometría del espacio, es una rama de las matemáticas englobada dentro de la geometría, estudiada en 3º de E.S.O. según lo

establecido en el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Según lo establecido en este Real Decreto, se reflejan en esta U.D. los contenidos establecidos en la asignatura, referentes a los Bloques 1 y 3. (Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Bloque 3: Geometría).

Su estudio forma parte del curriculum de cursos superiores, sin embargo, es en este curso donde se introducen en una misma U.D. los conceptos fundamentales para la comprensión de una manera global y generalizada de la visualización espacial de los cuerpos geométricos.

Como se ha analizado en el apartado de documentación didáctica, la geometría y en particular la geometría del espacio, es un área de las matemáticas que potencia la creatividad, el conocimiento y la visualización del espacio tridimensional. Son habilidades de gran importancia en los procesos de intuición, pensamiento crítico, creación, modelización o resolución de problemas surgidos tanto en contextos académicos como en situaciones reales.

La presente unidad didáctica se ha elaborado teniendo en cuenta el análisis realizado de las distintas investigaciones en la fundamentación didáctica. Las distintas sesiones se han planteado con la pretensión de ofrecer un aprendizaje interdisciplinar y transversal, dirigidas hacia mejorar las habilidades de visualización, razonamiento espacial, pensamiento crítico y reflexivo del alumnado, fomentando la construcción de aprendizajes significativos con el diseño de tareas sobre la vida real. Se ha dado un papel principal a los procesos de descripción, explicación y justificación de las técnicas o procedimientos empleados en la resolución de tareas.

Se ha pretendido fomentar la capacidad del alumnado para transformar los conocimientos adquiridos en propios, proporcionándoles las herramientas necesarias para abordar cualquier situación en múltiples contextos complejos. Igualmente se han diseñado sesiones de carácter cooperativo, dejando espacio para la experimentación y la discusión, priorizando la metodología de formulación de hipótesis y ensayo y error, favoreciendo un proceso de aprendizaje más rico y abierto.

En general, la visualización espacial es de gran utilidad para todo el alumnado que desee estudiar Ciencias y Tecnología, especialmente arquitectura, ingeniería o diseño.

El estudio y comprensión de los cuerpos geométricos ha generado el avance en ciencia y tecnología. Su uso contribuye a aportar belleza a las obras de arte, estando muy presente en innumerables obras de arquitectura e ingeniería básicas y complejas.

6.3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL CENTRO Y DEL AULA

La presente U.D. se contextualizará en el Colegio Sagrado Corazón de Bailén. Es el centro en el que he realizado mi periodo de prácticas docentes establecido en el Máster. En concreto, dicha U.D. se desarrollará para aplicarla en 3º de E.S.O. de Matemáticas aplicadas a las enseñanzas académicas. Como he mencionado en este trabajo, es el curso en el que se estructura una visión generalizada de los cuerpos geométricos.

6.3.1. Situación geográfica del centro

El colegio Sagrado Corazón está situado en la Calle Isabel la Católica, Nº 27 de la localidad de Bailén (Jaén).

Bailén se ubica en la comarca de Sierra Morena, a 38 Km de la capital (Jaén), posee una extensión de 117,6 Km² de superficie. Es destacable su posición geográfica como cruce de caminos entre la A4 (Madrid-Sevilla) y la A44 (Bailén-Granada) (véase Figura 31), enlazando el centro y norte de la península con el sur y oriente con occidente.

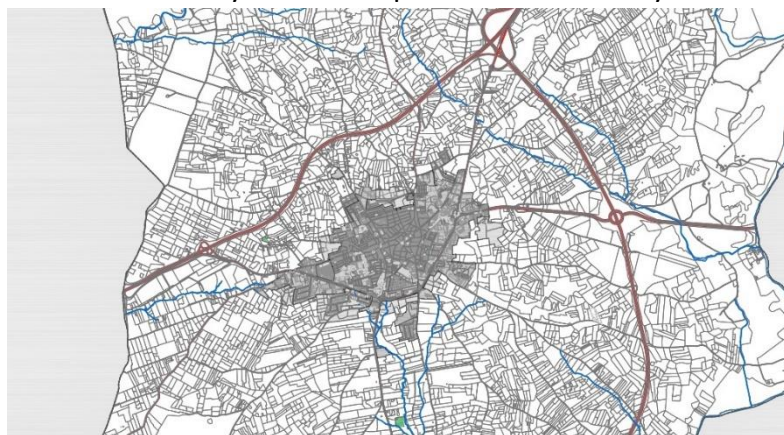


Figura 31. Mapa de situación Bailén

Posee una población de 17.600 habitantes aproximadamente. El término municipal de Bailén limita al norte con Guarromán y Baños de la Encina, al este con Linares, al sur con Jabalquinto y Espeluy y al oeste con Villanueva de la Reina. El colegio se ubica en la zona casco histórico de la localidad (véase Figura 32).

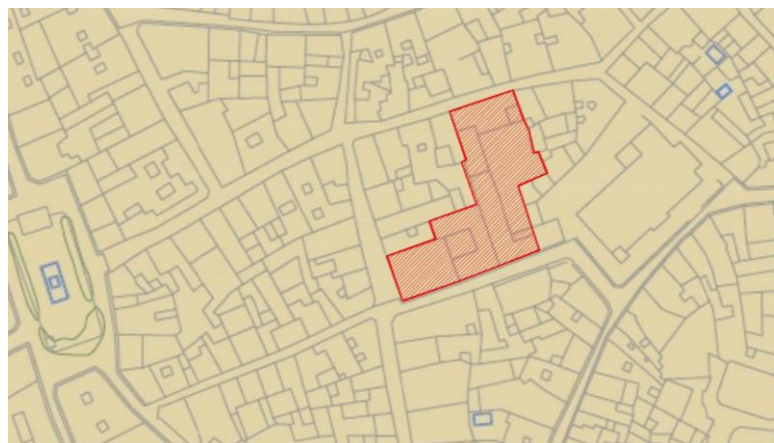


Figura 32. Mapa de localización del centro

6.3.2. Aspectos demográficos y socioeconómicos del municipio

En el municipio de Bailén se ha producido un descenso de la población en los últimos años, motivado principalmente porque la mayoría de sus habitantes se empleaban en el trabajo en las fábricas de ladrillos y debido a la crisis inmobiliaria y al cierre de una gran mayoría de ellas, su población emigró, buscando oportunidades laborales a otras ciudades.

Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la renta media per cápita en 2017 era de 7.438 €, la renta media por hogar de 20.940 €, la tasa de paro era de 20,39 %.

El término municipal de Bailén tiene su principal fuente de riquezas en la Industria Cerámica, los transportes y la Agricultura y en menor medida desde la desviación de la Nacional IV en la Hostelería.

6.3.3. Características generales del alumnado

El nivel socioeconómico de las familias de los alumnos/as es medio. Existe un número considerable de familias desestructuradas, ya sea a causa de las nuevas problemáticas sociales que viven, u otros condicionantes personales y familiares, aunque se observa positivamente que tienen grandes expectativas respecto al futuro de sus hijos e hijas.

El alumnado que pertenece al centro es muy diverso, siendo mínimo el número de alumnos inmigrantes. Prácticamente la totalidad del alumnado que titula en educación secundaria en este centro, continúan estudios superiores y la tasa de abandono escolar es muy baja.

En referencia al alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE), es relevante el aumento en los últimos años.

Las modalidades que más se presentan en el centro son las Necesidades Educativas Especiales (NEE), Dificultades de Aprendizaje (DIA) y acciones de carácter Compensatorio (COM).

6.3.4. Descripción del centro. Instalaciones y materiales

El centro en el que se ha desarrollado el periodo de prácticas es el Colegio Sagrado Corazón de Bailén, es un centro concertado que se define como católico, de Hijas de la Caridad. Es un colegio bilingüe y busca la calidad integral, adaptando su gestión al modelo EFQM (European Foundation for Quality Management) de calidad del cual dispone, involucrando los criterios de excelencia a todos los niveles. Además de éste, hay varios centros educativos en Bailén: 2 de infantil, 2 con infantil y primaria, y dos IES.

En total, el colegio tiene casi 700 alumnos y alumnas en las diferentes etapas educativas (Infantil, Primaria y Secundaria). Se ubica en la zona centro del municipio (véase Figura 33)



Figura 33. Fachada del centro

Con 100 años de presencia en la localidad, desde siempre ha pertenecido a la Congregación de las Hijas de la Caridad, que dividen España en diferentes provincias canónicas. El colegio pertenece a la provincia de España Sur, por tanto los máximos responsables del colegio son la Visitadora y Consejera de enseñanza junto con su Equipo de Titularidad. En el centro se imparten tres niveles de enseñanza: Infantil, Primaria y Secundaria.

El Centro está acogido al régimen de conciertos educativos regulado en el Título IV de la LODE y el Título IV de la LOE en sus normas de desarrollo.

El nivel de concierto del Colegio abarca:

- Educación Infantil: 6 unidades
- Educación Primaria: 12 unidades.
- Educación Secundaria Obligatoria: 8 unidades.
- Unidad de Apoyo a la Integración: 2 unidades.

Las instalaciones destacadas que contiene el Centro son:

- 26 aulas ordinarias, dotadas con pizarra digital, un ordenador para el profesorado y acceso wifi.
- Un aula de educación especial así como un aula de audición y lenguaje.
- Salón de actos, utilizado para ciclos de conferencias, proyecciones audiovisuales, representaciones teatrales y como espacio deportivo cubierto.
- Dos patios, uno de ellos utilizado exclusivamente por el alumnado de E.S.O. y otro por el alumnado de Infantil y Primaria.
- Recibidor, Portería, Sala de profesores, Aula de informática (con ordenadores y tablets), Aula de plástica y Música, Aula Taller, Biblioteca, Laboratorio, Sala de profesores y una capilla.
- Diversos despachos dedicados a la Dirección, Jefatura de Estudios, Orientación y Secretaría.

6.3.5. Descripción del aula

6.3.5.1- Espacios y material en el aula

El aula donde se llevará a cabo la unidad didáctica, en concreto la correspondiente a 3º de E.S.O presenta forma rectangular y tiene unas medidas de 9,00 metros de fondo y 6,60 metros de ancho arrojando una superficie total de 54,40 m².

Posee dos puertas de acceso, encontrándose frente a dichos accesos dos grandes huecos acristalados que aportan una adecuada iluminación natural. Cercano a uno de los accesos se sitúa un armario usado como ropero.

La disposición del mobiliario es objeto de posibles modificaciones, en general las mesas estarán organizadas en 5 filas de 3 mesas por fila y dos sillas por mesa (15 mesas y 30 sillas)

En la parte delantera del aula se ubica una mesa para el profesor, una pizarra blanca, una pizarra digital, un proyector y dos papeleras cercanas a las puertas de acceso. (véase Figura 34)

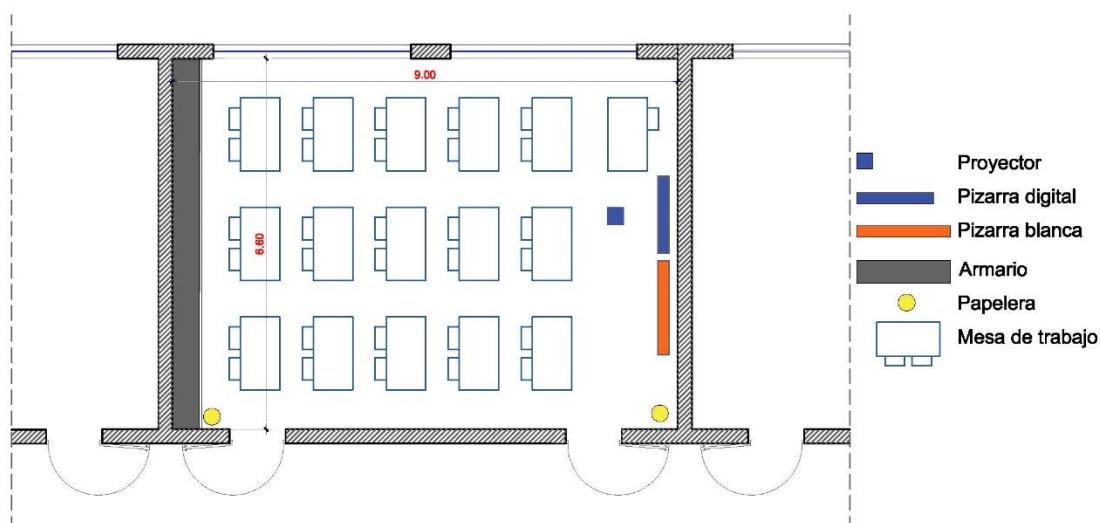


Figura 34. Planta del aula (elaboración propia)

El aula de informática tiene idénticas dimensiones a la descrita anteriormente. En ella se disponen tres filas de mesas colocadas horizontalmente, posee una capacidad para 25 alumnos. La agrupación puede variar desde la individual (alumno-ordenador) hasta formar grupos de cuatro.

6.3.5.2- Perfil del alumnado

El alumnado de 3º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas al que va dirigido esta U.D, está compuesto por un grupo de 11 alumnos y 13 alumnas. El grupo es bastante homogéneo, el 50% son alumnos con buen nivel de comprensión, el 25% son trabajadores y con ello con capaces de responder bien, obteniendo unos resultados aceptables y el resto más que presentar problemas de comprensión son alumnos que tienen falta de motivación porque los conocimientos presentados no le generan ningún tipo de interés.

Destacamos en el grupo un alumno que presenta altas capacidades y tiene mucho interés por aprender cosas nuevas, destacando sus habilidades espaciales y prácticas por encima del lenguaje y la expresión.

Además en el grupo existen dos alumnos con problemas de aprendizaje que requerirán ejercicios adicionales para aprobar la asignatura y alcanzar las competencias clave establecidas en el currículo.

6.4. OBJETIVOS

En este punto, se presentan los objetivos pretendidos en la Unidad Didáctica, estructurándolos según distintos grados de concreción, comenzando por los objetivos generales de etapa, objetivos del área de matemáticas y finalmente los objetivos concretos de la unidad, es decir de lo más general hasta lo más concreto.

6.4.1. Objetivos generales de la etapa

Los objetivos de esta etapa son los establecidos como logros que deberá alcanzar el alumnado cuando finalice la misma, derivados del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se planifica, organiza y estructura este proceso para superar dichos objetivos.

Según lo establecido en el artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (L.O.E), modificada por la ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E) y por el artículo 11 de Real Decreto RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O y del Bachillerato, la presente Unidad Didáctica se debe centrar en los siguientes objetivos generales:

- Estructurar y potenciar hábitos de disciplina, estudio, así como el desarrollo del trabajo individual y colaborativo que contribuyen al desarrollo de un aprendizaje efectivo, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- El desarrollo de habilidades básicas para la correcta utilización de fuentes de información como herramienta para adquirir, mediante el sentido crítico, nuevos conocimientos, así como adquirir una formación básica en el uso de tecnologías.
- Integrar en el proceso de aprendizaje y enseñanza el conocimiento científico estructurado en las distintas disciplinas, aplicando diversos métodos para identificar problemas en distintos campos.
- Desarrollar la capacidad de aprender a aprender, desarrollar el espíritu emprendedor y la seguridad en sí mismos así como el sentido crítico y la iniciativa propia. Desarrollar igualmente la capacidad de tomar decisiones y asumir su responsabilidad.
- Identificar y comprender los distintos elementos y procesos involucrados en la investigación y en los métodos científicos. Valorar con una mirada crítica, el papel de la ciencia y la tecnología en los cambios acaecidos en las condiciones de vida, así como despertar y comprender la importancia del respeto hacia el medio ambiente.
- Conocer, respetar y valorar particularidades básicas de los procesos culturales e históricos y del patrimonio cultural y artístico.
- Valorar la creación artística, así como comprender el lenguaje en el que se expresan las distintas formas de arte, usando distintos medios de representación y expresión.

6.4.2. Objetivos en el área de matemáticas de 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Tal y como indica la Orden de 14 de julio de 2016, que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria de la comunidad Autónoma de Andalucía, la enseñanza en 3º de E.S.O. de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas contribuirá al desarrollo en el alumnado de capacidades que le permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Objetivos concretos de la unidad

Los objetivos concretos previstos para esta unidad didáctica serán los que indicamos a continuación:

1. Expresar verbalmente de forma razonada, el proceso seguido para resolver el problema.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, comprobando las soluciones obtenidas.
3. Planificar de forma adecuada el proceso de investigación.
4. Desarrollar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
5. Superar posibles bloqueos ante la resolución de situaciones desconocidas.
6. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo para la resolución de futuras situaciones similares.
7. Emplear las herramientas tecnológicas para analizar y comprender los cuerpos geométricos y ubicar un punto en el globo terráqueo.
8. Identificar los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.
9. Calcular áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y aplicarlos para resolver problemas contextualizados.
10. Identificar centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.
11. Situar sobre el globo terráqueo Ecuador, polos, meridianos y paralelos, y ser capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.
12. Identificar los problemas y situaciones de la vida cotidiana resueltos mediante la geometría espacial.
13. Valorar y comprender la importancia de la visualización en el proceso de resolución de problemas matemáticos de cualquier materia.
14. Fomentar, mediante las tareas en grupo y la participación en clase el trabajo colaborativo.
15. Comprender la presencia de los cuerpos geométricos en distintos contextos (la naturaleza, la arquitectura, la escultura, la pintura, el arte).

6.5. COMPETENCIAS CLAVE

El artículo 2.2 del RD 1105/2014, de 26 de diciembre, establece que las siguientes competencias clave contenidas en el currículo serán las siguientes:

- a) Comunicación lingüística (CCL)
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

- c) Competencia digital (CD)
- d) Aprender a aprender (CAA)
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC)
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC)

En el Anexo I de la Orden ECD/65/2015, de 29 de enero, se describen las competencias clave. En esta U.D. se va a contribuir al desarrollo integrado de las siguientes competencias (véase Tabla 21):

Competencia clave	Desarrollo de competencias
CCL	Comprender y extraer de un enunciado los principales datos para la resolución de las actividades
	Comprender las definiciones, conceptos y procedimientos
	Expresar verbalmente y de forma razonada el procedimiento utilizado para la resolución de las actividades
	Expresar, utilizando un lenguaje matemático, las ideas e investigaciones realizadas
	Describir y analizar entornos geométricos desde una visión crítica
	Exponer y debatir ideas científicas
	Exponer ante los compañeros conjeturas y conclusiones que surjan de los razonamientos y estrategias involucrados en las resoluciones, potenciando el trabajo colaborativo
CMCT	Expresar, utilizando un lenguaje matemático, los conceptos y procedimientos involucrados en la resolución de problemas
	Identificar cuerpos geométricos en los distintos entornos
	Resolver con ayuda de la habilidad de visualización las actividades planteadas en entornos geométricos
	Identificar y aplicar correctamente las fórmulas
	Comprender la existencia de las matemáticas en objetos cotidianos
	Expresar e interpretar los resultados obtenidos
CD	Uso de las TIC para realizar distintas actividades
	Uso de programas informáticos (Geogebra, Google Earth)
CAA	Estructurar la información adquirida de los cuerpos geométricos para la resolución de actividades
	Usar estrategias como mapas conceptuales y visionado espacial para la resolución de actividades
	Utilizar técnicas de aprendizaje cooperativo en las tareas propuestas
	Tomar iniciativa para conjeturar y estructurar los procesos involucrados en la resolución de actividades
	Capacidad para involucrarse en procesos de investigación por propia iniciativa
	Planificar proyectos, marcarse metas y ser capaz de gestionar sus habilidades o destrezas
	Integrar conocimientos generales en la resolución de situaciones matemáticas y viceversa

	Tomar conciencia del carácter interdisciplinar y práctico del saber matemático
	Adquirir habilidades para transformar lo aprendido en conocimiento propio, relacionarlo con conocimientos previos y aplicarlo a diferentes situaciones más o menos complejas en todo tipo de contextos
CSC	Relacionar los conocimientos matemáticos básicos con la resolución de diversos problemas sociales
	Confianza en sus habilidades y destrezas matemáticas
	Presentar una actitud asertiva y constructivista que conlleve la toma de decisiones responsables
	Escuchar y respetar las diferencias individuales de sus compañeros
	Participar activamente en las actividades de modelización grupales, propiciando el diálogo, el buen ambiente y el aprendizaje
	Adquirir una visión crítica sobre las informaciones ofrecidas por los medios de comunicación, analizándolas desde un punto de vista científico-matemático.
	Adquirir base científica para desenvolverse en una sociedad cada vez más tecnológica
	Ayudar a los compañeros ofreciendo explicaciones adicionales a aquellos que lo requieran
SIEP	Adquirir iniciativa y confianza en las tareas menos estructuradas, donde el alumnado adquiere un papel más significativo en el aula
	Adquirir una mayor comprensión del entorno y de los objetos cotidianos tras ser relacionados con los contenidos explicados
	Utilizar el aprendizaje adquirido como herramienta necesaria para resolver todo tipo de situaciones nuevas y complejas.
	Comprender la importancia de las investigaciones científicas o matemáticas en la evolución de las sociedades
	Adquirir espíritu crítico para enfrentarse a determinadas cuestiones
	Adquirir capacidad para elaborar el trabajo cooperativo
	Adquirir capacidad de liderazgo, indispensable en cualquier tipo de actividad emprendedora
CEC	Adquirir una visión global de la aplicación de la geometría espacial en entornos reales
	Comprender las diversas manifestaciones culturales (arquitectura, escultura, pintura, cine) dentro de un contexto matemático-científico
	Despertar el interés por la conservación del patrimonio artístico y cultural
	Adquirir habilidades de creatividad e imaginación durante la resolución de actividades
	Comprender el origen y la evolución histórica de conceptos matemáticos

Tabla 21. Competencias clave (elaboración propia)

6.6. CONTENIDOS

6.6.1. Contenidos de la unidad didáctica

Los contenidos trabajados en esta Unidad Didáctica de Cuerpos Geométricos, están indicados en el Real Decreto 1105/2014. En particular, se trabajarán los contenidos estructurados en el bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas y en el bloque 3. Geometría. Los contenidos referidos serán los siguientes: (véase Tabla 22):

Contenidos establecidos en el Real Decreto 1105/2014	
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
1.1.	Planificación del proceso de resolución de problemas.
1.2.	Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos para buscar regularidades y leyes, etc.
1.3.	Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
1.4.	Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos geométricos.
1.5.	Práctica de los procesos de matematización y modelización en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
1.6.	Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
1.7.	Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.
Bloque 3. Geometría	
3.1	Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.
3.2	La esfera. Intersecciones de planos y esferas.
3.3	El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.
3.4	Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 22. Competencias clave (RD 1105/2014)

6.6.2. Contenidos interdisciplinarios y transversales

El artículo 6 del Decreto 111/2016 trata los elementos transversales, entendidos como pilar fundamental en la educación sin perjuicio del tratamiento específico de otras materias de Educación Secundaria Obligatoria, quedando vinculados los mismos a los siguientes elementos:

- Educación en el respeto a los derechos y libertades fundamentales y al Estado de Derecho.
- Educación en el fomento de conductas y valores acordes a los principios de no discriminación, accesibilidad e igualdad de oportunidades.
- Educación social para la participación en los valores de democracia, igualdad, libertad, pluralismo político y justicia.
- Educación en la crítica y autocontrol del uso de las tecnologías de comunicación e información.
- Educación activa en valores viales, emergencias y catástrofes.
- Educación en formación deportiva, vida saludable, incluyendo consumo y salud laboral.
- Educación en autoestima, imagen corporal, autorrealización, rechazo y prevención del acoso escolar, discriminación o maltrato y protección y seguridad de toda la comunidad educativa.
- Educación económica y empresarial, desarrollo sostenible, utilidad social y concienciación de la importancia de la cumplir las obligaciones tributarias.
- Educación en asuntos globalizados como salud, pobreza internacional, desigualdad, importancia de los recursos naturales, calentamiento global; fomentando conductas que conserven y mejoren el entorno y calidad de vida.
- Educación en empatía, escucha activa y acuerdo.
- Educación en el fomento a la tolerancia, diversidad, otros pueblos y culturas, educación en la paz, libertad de conciencia, respeto a las víctimas del terrorismo y prevención de la violencia.
- Educación en igualdad efectiva y real entre hombres y mujeres, análisis de desigualdad por razón de sexo y soluciones, respeto a la orientación e identidad sexual, rechazo de cualquier tipo de sexismo y prevención de violencia de género y explotación sexual.

6.7. METODOLOGÍA

En conformidad con lo establecido en el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se entiende por metodología didáctica el *“conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.”*

El Anexo II de la Orden ECD/65/2015 sobre Orientaciones para facilitar el desarrollo de estrategias metodológicas que permitan trabajar por competencias en el aula, establece que:

- Los métodos didácticos se seleccionarán en función de los condicionantes y metas propuestas.
- El profesor debe ajustarse a los condicionantes de su alumnado para propiciar un aprendizaje competencial.
- La metodología debe partir de que profesor debe ejercer como orientador, facilitador y promotor de la evolución competencial del alumnado, ejecutando tareas con un fin concreto. Igualmente ha de tenerse en cuenta la diversidad y diferentes ritmos de aprendizaje mediante trabajos individuales y cooperativos.
- Cualquier metodología elegida por el docente debe ajustarse al nivel competencial del alumnado, siendo necesario igualmente avanzar desde aprendizajes más simples a más complejos.
- Es fundamental motivar adecuadamente el aprendizaje del alumnado, lo que lleva a un nuevo planteamiento del papel del alumno, responsable de su aprendizaje.
- La metodología utilizada por el profesorado debe generar curiosidad al alumnado, debiendo además procurar que comprenda lo aprendido, ilustrarlos para que lo aprenden y hacer que lo usen en distintos contextos.
- Es necesario metodologías activas y contextualizadas que promuevan la participación y complicitad del alumnado, fomentando la utilización de los conocimientos en situaciones reales.
- Las metodologías activas deben sustentarse en estructuras cooperativas de aprendizaje.
- Para el aprendizaje-enseñanza competencial las estructuras interactivas son las más apropiadas, pues permiten construir y compartir el conocimiento y dinamizan la clase.
- Especial importancia adquiere el trabajo por proyectos para el aprendizaje de competencias. Con esta tarea se favorece en el alumnado la crítica, realización de hipótesis, la investigación y la reflexión; constituye un aprendizaje orientado a la acción en las que se integran diversas áreas y los alumnos hacen uso de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes personales.
- Igualmente es importante el uso del portfolio que fomenta la motivación y el desarrollo del pensamiento reflexivo y crítico del alumnado.
- Los recursos y materiales didácticos deben seleccionarse por el profesorado implicándose en su diseño y elaboración en función de los diferentes niveles, ritmos de aprendizaje y estilos del alumnado, concediéndole una especial importancia a los medios tecnológicos de la comunicación e información y a los recursos virtuales.
- Por último, debe existir una adecuada coordinación entre el profesorado sobre la metodología didáctica utilizada, con la finalidad de construir una mejor colaboración y desarrollo del conocimiento.

La Orden del 14 de Julio de 2016, establece que las estrategias metodológicas, en el proceso de enseñanza y aprendizaje están caracterizadas por la integración, el dinamismo y la transversalidad.

A lo largo del desarrollo de la unidad didáctica en el curso se fomentará el pensamiento racional y crítico. Para ello se plantean actividades cooperativas e individuales, desarrollar investigaciones, que el alumnado trabaje con lecturas y se esfuerce en expresarse correctamente. Se han seleccionado metodologías que impulsen la participación del alumnado. Así mismo, se necesitarán distintas estrategias metodológicas para instruir en competencias clave, no solo para conocer sino para que sepan aplicar lo sabido en distintos contextos, como (Calleja,2016; Luque,2020):

- Promover el uso de metodologías activas, que proponen dinamizar el aula integrando y fomentando la participación del alumnado en su personal proceso de aprendizaje, con el objetivo de que vaya desarrollando una mayor autonomía.
- Fomentar la interacción del alumnado con el aula (integración, reflexión y crítica de su propio aprendizaje), promoviendo el aprendizaje vertical, pero también horizontal.
- Promover la interdisciplinaridad, procurando que relacione el conocimiento adquirido en diversas materias.
- Fomentar la motivación del alumnado, lo que redundará en un aprendizaje más fácil y aumento de su autoestima, siendo importante también poner en valor el esfuerzo diario del alumno en el aula.
- Fomentar la construcción de aprendizajes significativos con el uso de tareas sobre la vida real, fuera del entorno del alumnado y utilizando de manera interdisciplinar y transversal los conocimientos adquiridos.
- Asegurar el realismo fomentando un aprendizaje gradual y análisis crítico de la realidad por parte del alumnado con contenidos estructurados y apropiados al aula.
- Procurar enfoques no uniformes y homogéneos, es decir dirigidos a diferentes tipos de alumnos y sus diferentes razonamientos y ejecuciones.
- Promover grupos flexibles de trabajo y tareas diferenciadas, atendiendo a la heterogeneidad del alumnado.

6.8. ACTIVIDADES Y RECURSOS

Las actividades y recursos incluidos en esta unidad didáctica considero que son los más apropiados para satisfacer el cumplimiento de los objetivos establecidos en la legislación.

6.8.1. actividades

En relación con los contenidos a impartir en la presente unidad didáctica se han diseñado y seleccionado aquellas actividades consideradas más adecuadas para lograr los objetivos y competencias clave, que puedan ayudar al alumnado a superar las dificultades encontradas en dichas competencias.

Todas las actividades propuestas para la Unidad didáctica de Cuerpos geométricos correspondiente a 3º curso de Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas, vienen recogidas en el Anexo 2. Las actividades se han diseñado cumpliendo los siguientes requisitos (véase Tabla 23) (Luque-Cañada, 2020):

REQUISITOS BÁSICOS DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS	
Claridad	El alumnado debe conocer lo que se le exige en cada actividad
Papel activo del alumno	El alumno debe ser el protagonista y se le debe permitir una regulación adecuada a su ritmo de ejecución y aprendizaje.
Adaptaciones individualizadas	Las actividades han de ser idóneas, equilibradas y suficientes, de forma individual en función de las necesidades del alumno.
Disfrutar aprendiendo	Debe primar el carácter lúdico y motivador
Consonancia intereses del alumno	El Aprendizaje debe tratar de captar el interés del alumnado y motivarlo, partiendo de su nivel y aprendizaje anteriores
Graduadas	Debe efectuarse un desarrollo gradual de los contenidos, proponiendo distintos grados de dificultad
Distintas agrupaciones	Promover la familiarización del entorno y las posibles formas de agrupamiento del alumnado
Autonomía personal	Coherencia interna destinada a que el alumno guíe su aprendizaje y razonamientos, facilitándole además que realicen aprendizajes significativos por sí mismos

Tabla 23: Requisitos básicos de las actividades propuestas Luque-Cañada, 2020.

En el desarrollo de las distintas sesiones, estructuradas en la Temporalización, se refleja los tipos en los que podemos clasificar las actividades planteadas en la unidad didáctica. Los distintos tipos se reflejan en la siguiente tabla (véase Tabla 24):

TIPO DE ACTIVIDAD	IDENT.	FINALIDAD
Actividad de diagnóstico	(DIAG)	Realizar un análisis de conocimientos previos
Actividad de introducción	(INT)	Adaptación al ritmo de trabajo posterior
Actividad de motivación	(MOT)	Conseguir implicación y “motivación”
Actividad de aprendizaje	(AP)	Adquirir destrezas conceptuales y procedimentales
Actividad de desarrollo	(DES)	Permiten desarrollar y fijar los contenidos
Actividad de consolidación	(CON)	Buscan reforzar los aprendizajes
Actividades creativas	(CRE)	Posibilitan desarrollar la creatividad a partir de una idea
Actividad de conclusión	(CONC)	Permiten ser conscientes de los objetivos conseguidos
Actividad de síntesis	(SIN)	Diferencian los objetivos más importantes a conseguir
Actividad resumen	(RESU)	Permiten al alumnado observar los procesos obtenidos
Actividad de evaluación	(EV)	Destinada a quienes no alcanzan los objetivos
Actividad de recuperación	(RECU)	Permiten individualizar la tarea
Actividad de ampliación	(AMP)	

Tabla 24: Tipos de actividades propuestas Luque-Cañada, 2020.

6.8.2. Recursos

Los principales recursos para el desarrollo de los contenidos descritos y la correcta resolución de las actividades y tareas propuestas, en la presente unidad didáctica de cuerpos geométricos serán:

Libro de texto: Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º E.S.O; Editorial: Anaya; Autor: Colera, J., Colera, R., Gaztelu, I., Oliveira, M.J., 2016a.

Cuaderno de trabajo

Recursos en papel: Libro de texto: Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º E.S.O; Editorial: Anaya; Autor: Colera, J., Colera, R., Gaztelu, I., Oliveira, M.J., 2016a.

Cuaderno de trabajo

Material fotocopiado para tareas

Recursos audiovisuales: Pizarra digital, proyector

Recursos tecnológicos: Ordenador, Tablet, móviles

Recursos informáticos: Geogebra, Google Earth, vídeos y cortometrajes

Recursos dotacionales: Aula ordinaria, Aula TIC, Patio para la actividad de construcción del Omnipoliedro y la cúpula geodésica.

Recursos específicos de actividades:

En la sesión 5: Omnipoliedro.

Tubos de PVC de distintos colores con cáncamos cerrados en los extremos y bridas

En la sesión 10: Primera aproximación. El balón de fútbol.

Ficha tarea, papel y lápiz, Tijeras, Pegamento, Plantillas de formas geométricas, kit de construcción de barras y uniones.

En la sesión 11: Transformación de poliedros.

Ficha tarea, papel y lápiz, Tijeras, Pegamento, Plantillas de formas geométricas, kit de construcción de barras y uniones.

En las sesiones 12 y 13: Cúpula Geodésica.

Barras de PVC, uniones modelizadas previamente en impresora 3D, destornilladores.

6.9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Las medidas generales de atención a la diversidad son las diferentes actuaciones orientadas a la promoción del aprendizaje y de la consecución de logros de todo el alumnado.

Se destacan las siguientes medidas generales de atención a la diversidad:

- Adaptaciones curriculares
- Medidas organizativas
- Utilización de metodologías con base en el trabajo cooperativo, organizando grupos heterogéneos
- Refuerzos y apoyos

El centro donde está contextualizada esta unidad didáctica dispone de un Plan de Atención a la Diversidad integrado en el Plan de Centro.

Atendiendo a la orden 25 de julio de 2008 por la que se regula la atención a la diversidad, estos planes se estructuran con unos principios generales de atención a la diversidad e implementan una serie de medidas ordinarias:

- La aplicación de diversas estrategias de carácter preventivo.
- La detección temprana, para el alumnado que presente dificultades en el desarrollo y en el aprendizaje y para aquellos que presenten altas capacidades.
- Definir criterios de organización flexible en los espacios y tiempos, así como en los recursos personales y materiales dando respuesta a las diversas necesidades educativas del alumnado.
- Fomentar el trabajo colaborativo en grupos heterogéneos, tutoría entre iguales, aprendizaje por proyectos y otras formas de trabajo que promuevan el principio de inclusión.
- Realizar acciones personalizadas tanto de seguimiento como de acción tutorial y actividades grupales que ofrezcan al alumnado un entorno acogedor y seguro.
- Incluir actividades de refuerzo educativo como mejora de la adquisición de competencias clave del alumnado.
- Incluir actividades de profundización de contenidos que permiten desarrollar al máximo la capacidad y motivación del alumnado.
- Incluir programas de enriquecimiento que serán aplicados por el profesorado en su disponibilidad horaria.
- Permanecer un año más en un mismo curso, cuando se han agotado todas las medidas generales.
- Incluir programas de refuerzo de áreas o de distintas materias instrumentales básicas.
- Incluir igualmente, programas de refuerzo con el objetivo de recuperar aprendizajes no adquiridos

En el aula de 3º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se contextualizarán diversas actividades dirigidas al alumnado con dificultad de aprendizaje y altas capacidades.

En referencia al alumnado con dificultades de aprendizaje, el profesor prestará especial atención en la resolución de dudas y se le asignarán determinadas actividades de refuerzo para afianzar y mejorar los conocimientos, motivándolos para enfrentarse a las actividades. En las actividades grupales se integrarán en grupos heterogéneos para que se enriquezcan de los conocimientos de sus compañeros.

Para el alumnado de altas capacidades se diseñará un programa de enriquecimiento curricular que se desarrollará en el aula, en la que permanecerá con sus compañeros. Este programa se incluirá en su currículum y se compondrá de actividades enriquecedoras. Por ejemplo, se le ha diseñado especialmente para ellos una actividad de tensegridad que le permitirá ahondar e investigar sobre el contenido de la unidad didáctica de cuerpos geométricos. El programa será desarrollado en las horas que el profesor tenga disponibles y, además, se pedirá al alumnado que realice determinadas actividades de mayor complejidad.

En el Anexo 2 se especifican las actividades y tareas propuestas para este alumnado.

6.10. TEMPORALIZACIÓN

La planificación de las sesiones para el curso 2019/2020 se ha hecho con la finalidad de facilitar al alumnado una correcta organización y distribución de su tiempo. Esta planificación posee un carácter flexible entre las sesiones asignadas a las distintas unidades didácticas dentro de la programación.

En la tabla 25, se muestra la temporalización del curso de 3º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. (véase Tabla 25)

BLOQUES	UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	NÚMERO DE SESIONES (140 total)
Números y álgebra	1	Fracciones y decimales	12
	2	Potencias y raíces	8
	3	Problemas aritméticos	12
	4	Progresiones	12
	5	El lenguaje algebraico	8
	6	Ecuaciones	8
	7	Sistemas de ecuaciones	8
Funciones	8	Funciones y gráficas	8
	9	Funciones lineales	8
Geometría	10	Problemas métricos	12
	11	Cuerpos geométricos	15
	12	Transformaciones gráficas	8
Estadística y probabilidad	13	Tablas y gráficos estadísticos	8
	14	Parámetros estadísticos	4
	15	Azar y probabilidad	9

Tabla 25. Temporalización de 3º E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (elaboración propia)

La unidad didáctica que se desarrolla en el presente documento en concreto la correspondiente a cuerpos geométricos, se desarrollará en 15 sesiones. Comenzarán a desarrollarse en clase el 13 de Abril y terminarán el 5 de Mayo, estructurándose en un total de 15 horas (Véase Tabla 26).

SEMANA 1					
HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
8,15- 9,15			Sesión 3		
9,15 -10,15		Sesión 2			
10,15-11,15	Sesión 1				
11,15-11,45	R E C R E O				
11,45-12,45					Sesión 4
12,45-13,45					
13,45-14,45					
SEMANA 2					
HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
8,15- 9,15			Sesión 7		
9,15 -10,15		Sesión 6			
10,15-11,15	Sesión 5				
11,15-11,45	R E C R E O				
11,45-12,45					Sesión 8
12,45-13,45					
13,45-14,45					
SEMANA 3					
HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
8,15- 9,15			Sesión 11		
9,15 -10,15		Sesión 10			
10,15-11,15	Sesión 9				
11,15-11,45	R E C R E O				
11,45-12,45					Sesión 12
12,45-13,45					Sesión 13
13,45-14,45					
SEMANA 4					
HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
8,15- 9,15					
9,15 -10,15		Sesión 15			
10,15-11,15	Sesión 14				
11,15-11,45	R E C R E O				
11,45-12,45					
12,45-13,45					
13,45-14,45					

Tabla 26. Temporalización de la U.D. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas
(elaboración propia)

En el Anexo 2, se desarrollan y referencian las actividades enumeradas en la siguiente tabla de temporización.

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN	
Desarrollo: La primera sesión sobre el tema comenzará con la actividad 1.1. que consistirá en el visionado de un cortometraje basado en los patrones geométricos existentes en el mundo https://vimeo.com/354924827 (4 min), y un cortometraje muy inspirador sobre la obra de M.C. Escher y como las figuras geométricas están presentes en nuestras vidas https://vimeo.com/36296951 (4 min). Tras el visionado, haremos un intercambio de ideas, donde el alumnado exprese los diversos puntos y reflexiones sobre los cortometrajes, desde una perspectiva crítica. (22 min). Seguidamente el profesor expondrá la Actividad 1.2: Test conceptos previos sobre cuerpos geométricos, para evaluar los conocimientos previos sobre cuerpos geométricos del alumnado (25 min) Para finalizar, el profesor pedirá al alumnado que, para la siguiente sesión busque información sobre los poliedros regulares, origen, número, caras, aristas, vértices... así como un ejemplo de objetos de la Naturaleza, arte o arquitectura que presentan la forma de dichos cuerpos (5 min).	
Objetivos: 4, 7, 13, 15	Tipo de actividades: DIAG, INT, MOT
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 3.1	Evaluación: Inicial
Organización: Individual	Recursos: Tablet y proyector
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC	
Metodología: Durante el visionado de los cortometrajes, expositiva y motivadora. Durante el debate activa e interactiva	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión: El profesor pedirá al alumnado que busque información sobre los poliedros regulares, origen, número, caras, aristas, vértices... así como un ejemplo de objetos de la Naturaleza, arte o arquitectura que presentan la forma de dichos cuerpos.	

Tabla 27. Desarrollo de la sesión 1 (elaboración propia)

SESIÓN 2: CUERPOS GEOMÉTRICOS_POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS
Desarrollo: Se proyectará un video sobre el origen de los sólidos platónicos https://youtu.be/RfZS3yhknw (3.52 min) y se planteará un debate sobre ello y la investigación realizada por el alumnado en la tarea anterior (15 min) El profesor facilitará al alumnado un esquema con la clasificación de los cuerpos geométricos y explicará, con ayuda de Geogebra, las características, elementos y propiedades de poliedros regulares y semirregulares, prismas https://www.geogebra.org/m/zuej5jyw, pirámides y cuerpos de revolución https://www.geogebra.org/m/Ks7BfPSx (cilindro, cono, tronco de cono, esfera y partes de la esfera https://www.geogebra.org/m/jQAcCGDP). (20 min).

El profesor explicará, con de ayuda de la pizarra electrónica y el libro de texto, en primer lugar las posiciones relativas de una recta y un plano y en segundo lugar el concepto de ángulos diedros y poliedros cóncavos y convexos (10 min).	
El alumnado individualmente deberá realizar la actividad 2.1. y un alumno de manera voluntaria deberá realizarlo en la pizarra.(15 min)	
Objetivos: 2, 4, 7, 8	Tipo de actividades: AP, DES, RESU
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.4	Evaluación: CE 1.1, CE 1.2, CE 1.8, CE 3.5
Organización: Individual	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, CEC	
Metodología: Transmisiva, activa	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión:	

Tabla 28. Desarrollo de la sesión 2 (elaboración propia)

SESIÓN 3: POLIEDROS REGULARES, VÉRTICES Y ARISTAS. FÓRMULA DE EULER	
Desarrollo: Con ayuda de Geogebra el profesor explicará los desarrollos de los cinco poliedros regulares https://www.geogebra.org/m/y7RK2fwS (10 min). El alumnado en grupos de cuatro, deberá realizar la actividad 3.1, consistente en completar una ficha con el número de caras, vértices y aristas de los poliedros regulares y deducir la relación entre la cara y vértices con el número de aristas de los mismos (Fórmula de Euler) (30 min). $C + V = A + 2$ Para finalizar la actividad, se solicitará a cada grupo que exponga los resultados y se creará un debate en clase sobre las conclusiones, dando paso a la explicación de la fórmula de Euler y la introducción del concepto de dualidad. (15 min) El profesor propondrá, tras recordar al alumnado la definición de poliedro semirregular explicada en la sesión anterior, la realización de la actividad 3.2. donde se trabajará la fórmula de Euler en los poliedros. Dicha actividad se finalizará en casa (5 min)	
Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14, 15	Tipo de actividades: MOT, AP, DES
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7, 3.1, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.3.5
Organización: Grupos e individual	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra
Competencias: CCL, CMCT	
Metodología: Transmisiva, activa	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión: El profesor pedirá al alumnado finalizar la actividad 3.2. en casa	

Tabla 29. Desarrollo de la sesión 3 (elaboración propia)

SESIÓN 4: POLIEDROS REGULARES, VÉRTICES Y ARISTAS. FÓRMULA DE EULER	
Desarrollo: Se comenzará la clase resolviendo las posibles dudas surgidas de lo explicado en las sesiones anteriores y se corregirá la actividad 3.2. por un miembro del alumnado de forma voluntaria. (10 min). El profesor explicará con ayuda de Geogebra los conceptos de dualidad entre los poliedros regulares, introducidos en la sesión anterior https://www.geogebra.org/m/exVwHtmk. (10 min) Se realizará el visionado de un video para la explicación del truncamiento de poliedros regulares https://vimeo.com/81951494 , identificando dichos poliedros en el esquema facilitado en la sesión anterior sobre los cuerpos geométricos (15 min). El alumnado realizará, individualmente la actividad 4.1. sobre dualidad y 4.2 sobre truncamiento de poliedros regulares. Al finalizar, las actividades serán resueltas en la pizarra por un alumno voluntario. (25 min)	
Objetivos: 1,2,4,5,8,	Tipo de actividades: CON, AP, DES
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.2, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5
Organización: Individual	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra
Competencias: CCL, CMCT	
Metodología: Transmisiva, activa	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión: El profesor pedirá que repasen en casa lo explicado en la sesión	

Tabla 30. Desarrollo de la sesión 4 (elaboración propia)

SESIÓN 5: OMNIPOLIEDRO	
Desarrollo: El profesor expondrá al alumnado la actividad 5.1. “El omnipoliedro” se trata de un poliedro realizado con los armazones de los poliedros regulares o sólidos platónicos, de forma que los cinco poliedros están inscritos unos dentro de otros. Dicha tarea se plantea para trabajar conceptos de visualización y dualidad. En primer lugar con la ayuda de Geogebra https://www.geogebra.org/m/gga7YxpU#material/BAe2CPuC, el profesor explicará en el aula, los pasos a seguir para la construcción del poliedro. Posteriormente, la construcción se llevará a cabo en el patio del centro, con el material y los recursos facilitados por el profesor: Tubos de PVC de distintos colores con cáncamos cerrados en los extremos y bridas. (60 min)	
Objetivos: 1,2,3,4,5,8,10,13,14,15	Tipo de actividades: MOT, AP, CRE, SIN

Contenidos: 1.1, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 3.1, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.4, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.5
Organización: Grupos	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra, Tubos de PVC con cáncamos y bridas
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC	
Metodología: Transmisiva, modelización, activa, colaborativa	

Tabla 31. Desarrollo de la sesión 5 (elaboración propia)

SESIÓN 6: SIMETRÍAS	
Desarrollo: El profesor iniciará la actividad 6.1, se propondrá un debate para comentar la actividad realizada en la sesión anterior sobre la construcción del Omnipoliedro, afianzando conceptos de visualización, dualidad, proporción, fórmulas, medidas, relaciones y especialmente llamando la atención del alumnado la versatilidad de problemas que pueden ser resueltos a través de la geometría del espacio. (15 min). El alumnado, en grupos de 4 deberá realizar la actividad 6.2. Simetrías en Cuerpos geométricos con la ayuda de Geogebra. Al finalizar la actividad, el profesor dirigirá un debate donde un miembro de cada grupo deberá exponer en la pizarra los resultados de las actividades (40 min). El profesor explica al alumnado la actividad 6.2 sobre simetrías, que deberán terminar en casa, debiendo igualmente elaborar una tabla con las superficies de las figuras planas (cuadrado, triángulo, pentágono, octógono y círculo. (5 min)	
Objetivos: 1,2,3,4,5,6,7,8,10, 13,14	Tipo de actividades: MOT, AP,DES
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.5
Organización: Grupos e individual	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra
Competencias: CCL, CMCT, CD	
Metodología: Transmisiva, activa, uso de herramientas TIC	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión: Terminar la actividad 6.2 sobre simetrías de cuerpos geométricos y hacer una tabla con las superficies de determinadas figuras planas.	

Tabla 32. Desarrollo de la sesión 6 (elaboración propia)

SESIÓN 7: ÁREA Y VOLÚMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS	
Desarrollo: El profesor preguntará al alumnado si hay alguna duda respecto a lo explicado en las sesiones anteriores y pedirá a un alumno voluntario que escriba en la pizarra las superficies de las figuras solicitadas para realizar en casa (10 min). Comenzará con la explicación de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, con ayuda de Geogebra https://www.geogebra.org/m/tRCJY8Eg#material/MvbDgxmm, deduciendo las fórmulas del área total como la suma del área lateral más el área de la base o bases, posteriormente realizará la actividad 7.1 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos en la pizarra, para apoyar la explicación anterior. (30 min) A continuación, explicará mediante la Actividad 7.2. Cilindro y Esfera, la relación entre la esfera y el cilindro descubierta por Arquímedes que le ayudará a resolver múltiples problemas, resolverá en la pizarra dicha actividad (15 min). Para finalizar, el profesor propondrá al alumnado la realización de la actividad 7.3. sobre áreas y superficies, que deberá ser terminada en casa. (5min) y propondrá la actividad 7.4. para el alumnado de altas capacidades .	
Objetivos: 1,2,4,5,8,9,13	Tipo de actividades: CON, AP, DES
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.2, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5
Organización: Grupos e individual	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra
Competencias: CCL, CMCT	
Metodología: Transmisiva, activa	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión: Terminar la actividad 7.3 sobre áreas y volúmenes de cuerpos geométricos en casa	

Tabla 33. Desarrollo de la sesión 7 (elaboración propia)

SESIÓN 8: ÁREA Y VOLÚMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS II
Desarrollo: Como continuación de la sesión anterior, el profesor preguntará al alumnado si hay alguna duda respecto a lo explicado y pedirá a un alumno voluntario que resuelva en la pizarra la actividad 7.3. (10 min). El alumnado en grupos de dos, deberá resolver la actividad 8.1. Áreas y Volumen de cuerpos geométricos, después el profesor los resolverá en la pizarra digital. (35 min). El profesor explicará con ayuda de Geogebra https://www.geogebra.org/m/beh2vwm9#material/Zk25FNfr los conceptos de Ecuador, meridianos, trópicos, polos y los elementos geométricos de la esfera terrestre, casquetes, hemisferios y husos horarios, así como las coordenadas geográficas (longitud y latitud) y resolverá la actividad 8.2. El globo terráqueo, en la

pizarra, indicando al alumnado que deberán realizar la actividad 8.3 Coordenadas Geográficas en casa (15 min).	
Objetivos: 1,2,4,5,8,9,10,11,13	Tipo de actividades: CON, AP, DES
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.2, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5, CE.3.6
Organización: Individual y parejas	Recursos: proyector, pizarra, Geogebra
Competencias: CCL, CMCT	
Metodología: Transmisiva, activa	
Tarea a desarrollar en casa para la siguiente sesión: Realizar la actividad 8.3. Coordenadas Geográficas	

Tabla 34. Desarrollo de la sesión 8 (elaboración propia)

SESIÓN 9: GOOGLE EARTH	
Desarrollo: Esta sesión se llevará a cabo en el aula de informática, se va a desarrollar la actividad 9.1. Google Earth, comenzará con la explicación del profesor sobre el funcionamiento del programa Google Earth Education y la utilidad de este programa para el aprendizaje y enseñanza. Posteriormente, se le explicará en que consiste la actividad que tendrán que desarrollar en grupos de 4. Dicha actividad les permitirá localizar puntos geográficos en el globo terráqueo, identificar cuerpos geométricos y medir la distancia entre dos puntos de la esfera terrestre dada su longitud y su latitud. El alumnado deberá entregar la actividad una vez terminada la sesión, indicando el proceso realizado y las soluciones obtenidas. (55 min) El profesor explicará la actividad 13.1. Repaso, consistente en una serie de ejercicios que el alumnado tendrá que resolver en una semana, ya que serán corregidos en la sesión 13. Además en la sesión 14 el alumnado deberá entregar la libreta para que sea corregida por el profesor (5 min)	
Objetivos: 2, 4,5,6,7,11,13,14	Tipo de actividades: MOT, AP, DES
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 3.1, 3.3, 3.4	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE. 1.11, CE.3.5, CE. 3.6
Organización: Grupos	Recursos: Aula de informática, proyector, pizarra
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC	
Metodología: Transmisiva, activa, colaborativa, contextualizada	

Tabla 35. Desarrollo de la sesión 9 (elaboración propia)

SESIÓN 10: PRIMERA APROXIMACIÓN_EL BALÓN DE FÚTBOL

Desarrollo:

En las sesiones 10, 11, 12 y 13 se van a trabajar una serie de tareas para que el alumnado experimente y mediante ensayo y error, plantee distintas hipótesis para descubrir cómo se van modelando los cuerpos geométricos para generar espacios. Así, partiendo de un sólido platónico (icosaedro) se generarán distintos cuerpos geométricos cada vez más complejos y esféricos aumentando su resistencia y rigidez. En las últimas sesiones se realizará la construcción de una cúpula geodésica.

Además en estas sesiones, se pretende que el alumnado tome conciencia del carácter interdisciplinar y práctico del saber matemático, se fomentará el aprendizaje significativo, la crítica, la realización de hipótesis, la investigación y la reflexión.

En esta sesión se va a trabajar la tarea 10_Primera aproximación, el balón de fútbol. En la tarea se plantearán las siguientes preguntas:

1. ¿Es redondo un balón de fútbol?
2. Construye una forma geométrica análoga a la que tiene un balón de fútbol ¿De qué polígonos está formado y como se unen entre sí? Los recursos que se pondrán a disposición del alumnado serán los definidos en el plan de clase.
3. ¿Cumple este poliedro la fórmula de Euler?
4. ¿Por qué se utiliza este modelo para el balón?
5. ¿Podéis investigar que es el Jabulani y qué problemas ocasionó?

El alumnado trabajará en primer momento individualmente, y en unos minutos se agruparán en grupos de 4.

Se pretende que den la solución mediante la construcción del balón (bien a través de las plantillas de polígonos o bien mediante el kit de construcción de barras y uniones facilitado), para ello, tendrán que visualizar como tienen que unirse esos polígonos para generar el volumen buscado y llevar a cabo posteriormente el conteo de los polígonos utilizados.

Al finalizar la tarea, el alumnado deberá exponer ante los compañeros conjeturas y conclusiones que surjan de los razonamientos y estrategias involucrados en las resoluciones, potenciando el trabajo colaborativo.

En el Anexo 3 se desarrolla el plan de clase de esta tarea

Objetivos: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13,14,15	Tipo de actividades: MOT, AP, DES, CRE
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 3.1	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.5, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5
Organización: Grupos	Recursos: Tijeras, pegamento, Ficha tarea, kit de construcción, fichas con formas geométricas
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP	
Metodología: Modelización, activa, creativa, colaborativa, contextualizada	

Tabla 36. Desarrollo de la sesión 10 (elaboración propia)

SESIÓN 11: TRANSFORMACIÓN DE POLIEDROS. CONDICIONES DE CURVATURA Y RIGIDEZ. PRIMERA APROXIMACIÓN A LAS CÚPULAS GEODÉSICAS	
Desarrollo: Como continuación de la tarea anterior se comienza con la presente sesión donde se va a desarrollar la tarea 11. La sesión comenzará con las siguientes preguntas: 1. ¿Crees que es el poliedro de la sesión anterior es el más esférico que se puede construir? 2. ¿Cómo podríamos hacer para que este poliedro fuera más esférico? Constrúyelo. Se dispondrá de los recursos definidos en el plan de clase. 3. ¿Cómo podríamos hacer para que el poliedro tuviera mayor rigidez y fuera menos deformable? Al igual que en la sesión anterior, se pretende que el alumnado plantee distintas hipótesis como solución a las cuestiones. Se trabajará en primer momento individualmente, y en unos minutos se agruparán en grupos de 4. Mediante la construcción del poliedro (kit de construcción de barras y uniones facilitado), el alumnado deberá descubrir los elementos que contribuyen a que un poliedro sea cada vez más esférico, rígido y estable. Al finalizar la tarea el alumnado deberá exponer ante los compañeros conjeturas y conclusiones utilizando un lenguaje matemático, para transmitir las ideas e investigaciones realizadas. En el Anexo 3 se desarrolla el plan de clase de esta tarea	
Objetivos: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13,14,15	Tipo de actividades: MOT, AP, DES, CRE
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 3.1	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.5, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5
Organización: Grupos	Recursos: Tijeras, pegamento, Ficha tarea, kit de construcción
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP	
Metodología: Modelización, activa, creativa, colaborativa, contextualizada	

Tabla 37. Desarrollo de la sesión 11 (elaboración propia)

SESIÓN 12 y 13_ CONSTRUCCIÓN DE CÚPULA GEODÉSICA. BARRAS Y VÉRTICES GENERADORAS DE ESPACIO	
Desarrollo: Como continuación de la sesión anterior se comienza con la presente tarea que se llevará a cabo en dos sesiones continuas. Tras una explicación (desarrollada en el plan de clase), se le mostrará al alumnado los recursos disponibles para la construcción de una cúpula geodésica de determinadas características en el patio de centro. Se pretende que el alumnado adquiera estrategias como el visionado espacial para la resolución de determinadas situaciones reales y que comprendan la existencia de las ciencias y las matemáticas en objetos cotidianos. Igualmente, se pretende que sean capaces de desarrollar habilidades para transformar lo aprendido en conocimiento propio, relacionarlo con conocimientos previos y así poder aplicarlo a diferentes situaciones más o menos complejas en todo tipo de contextos.	
Objetivos: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13,14,15	Tipo de actividades: MOT, AP, DES, CRE
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 3.1	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.3, CE.1.5, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5
Organización: Grupos	Recursos: proyector, pizarra, patio, barras y uniones 3D
Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP	
Metodología: Transmisiva, Modelización, activa, creativa, colaborativa, contextualizada	

Tabla 38. Desarrollo de la sesión 12 (elaboración propia)

SESIÓN 14_ REPASO Y DUDAS EXAMEN	
Desarrollo: El alumnado voluntario corregirá en la pizarra las actividades 9.2 Repaso, interviniendo el profesor durante dicha corrección para asegurarse de que todo el alumnado comprende los ejercicios planteados (45 min) El profesor resolverá las posibles dudas al alumnado (15 min)	
Objetivos: 1,2,4,5,8,9,10,11,13	Tipo de actividades: MOT, AP, DES, CRE
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 3.3	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5, CE.3.6
Organización: Individual	Recursos: Proyector, pizarra
Competencias: CCL, CMCT	
Metodología: Transmisiva, activa	

Tabla 39. Desarrollo de la sesión 13 (elaboración propia)

SESIÓN 15_ EXAMEN	
Desarrollo: Se desarrollará una prueba escrita. La prueba contendrá 5 ejercicios en los que se plantearán cuestiones explicadas durante las sesiones correspondiente a la unidad didáctica (55 min) El profesor recogerá las libretas para su corrección (5 min)	
Objetivos: 1,2,4,5,8,9,10,11,13	Tipo de actividades: EV final
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 3.3	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.5, CE.3.6
Organización: Individual	Recursos: Prueba escrita
Competencias: CCL, CMCT	
Metodología: Autónoma	

Tabla 40. Desarrollo de la sesión 14 (elaboración propia)

6.11. EVALUACIÓN

6.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

En el anexo 4 se muestran los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 3º de E.S.O de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en relación a los bloques 1 y 3 que van a ser utilizados en la unidad didáctica de Cuerpos geométricos, de acuerdo con el RD 1105/2014.

6.11.2. Criterios de calificación

En los proyectos curriculares y en la programación de la materia, se especifican los criterios de evaluación que serán el referente para hacer una valoración de las competencias clave adquiridas y si se ha conseguido el logro de objetivos.

Para la valoración de la evaluación se tendrá en cuenta las tareas o trabajos realizado por el alumno, en clase y en casa; el proceso de aprendizaje, la participación, la actitud y las pruebas orales o escritas realizadas al alumno.

En los procesos de evaluación continua, se establecerán medidas que sirvan de refuerzo para el alumnado que no progresa adecuadamente.

Se llevará a cabo una evaluación inicial a principios de curso para analizar las competencias clave adquiridas por el alumnado y junto con los informes personales realizados en el curso anterior adoptar medidas de refuerzo, ampliación o recuperación.

También se realizará una evaluación inicial al comienzo de cada unidad didáctica para valorar los conocimientos previos del alumnado y adaptar los contenidos a las necesidades evaluadas.

Los criterios de calificación de los estándares de aprendizaje se evaluarán dependiendo del escenario en el que desarrollen las actividades a evaluar, atendiendo a la realización del trabajo individual o en grupo.

Para ello, se realizan unas rúbricas para evaluar al alumnado, incluidas en el Anexo 5, cuya ponderación y criterios de corrección serán conocidas de antemano por el alumno. Las ponderaciones de rúbricas que se han elaborado para esta unidad didáctica serán las siguientes (véase Tabla 41):

RUBRICA	PONDERACIÓN
RÚBRICA 1: EVALUACIÓN DE LA LIBRETA	10%
RÚBRICA 2: EVALUACIÓN DE LA ACTITUD	10%
RÚBRICA 3: VALORACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS	20%
RÚBRICA 4: EVALUACIÓN DE LAS PRUEBAS ESCRITAS	30%
RÚBRICA 5: INTERVENCION EN CLASE	10%
RÚBRICA 6: TRABAJO INDIVIDUAL	10%
RÚBRICA 7: TRABAJO EN GRUPO	10%

Tabla 41. Ponderación de rúbricas (elaboración propia)

Los resultados de la evaluación de las materias serán aplicados a las Actas de Evaluación, en el expediente académico y el historial del alumnado, como queda establecido en el correspondiente expediente académico del alumnado, según lo establecido en el artículo 18 de la Orden de 14 de julio de 2016.

Las calificaciones se expresarán en valores numéricos, considerando positivas las iguales o superiores a 5, quedando establecidas en los siguientes términos (véase Tabla 42):

CALIFICACIÓN	NOTA NUMÉRICA
Sobresaliente (SB)	9 o 10
Notable (NT)	7 u 8
Bien (BI)	6
Suficiente (SU)	5

Tabla 42. Calificaciones numéricas (elaboración propia)

Durante la evaluación continua se valorará el progreso según el alumnado adquiera las competencias clave y consiga el logro de los objetivos de la etapa, tomando como referente los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

Se realizará al final de cada unidad didáctica un examen para valorar los conocimientos adquiridos. En caso de no superar dicho examen el alumno realizará, unos días después, un examen de recuperación.

Se evaluará según el principio de inclusión, al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, participando en dicha evaluación el departamento de orientación, que elaborará un informe especificando las adaptaciones para facilitar el acceso a una evaluación positiva.

En el Anexo 4 se muestran los criterios de evaluación establecidos en la Unidad Didáctica.

7. CONCLUSIONES

Para la elaboración de este TFM he estudiado, analizado y profundizado los conocimientos adquiridos durante el Máster de profesorado durante el curso 2019/2020. También he estudiado e interpretado la legislación educativa vigente para su desarrollo, según el nivel educativo del alumnado y atendiendo a la diversidad y a los distintos contextos que se pueden presentar en el aula.

Se han analizado las unidades didácticas con contenidos relativos a cuerpos geométricos de tres editoriales y se ha realizado un estudio comparativo entre los contenidos presentados y las actividades propuestas en cada una de ellas. Del análisis se desprende que imperan diferencias significativas entre las mismas. Así, se ha detectado que existen conceptos básicos que no se incluyen en los contenidos que presentan, también que pueden generar en el alumnado distintas visiones más o menos amplias sobre las características y la clasificación de los cuerpos geométricos.

Destaca en la conclusión de este análisis la ausencia de actividades de carácter cooperativo, que puedan motivar al alumnado a involucrarse más en el aula, estimular su razonamiento y desarrollar un pensamiento más profundo. Estas actividades cooperativas podrían facilitar asimismo que el alumnado estableciera conexiones entre las distintas áreas para potenciar la capacidad de resolución de cuestiones prácticas de la vida cotidiana.

Se ha hecho un estudio sobre las investigaciones realizadas sobre visualización y razonamiento espacial, considero que adquirir estas competencias es primordial para alumnado. Son básicas para ser capaz de percibir un universo abstracto, les permite comprender conceptos, objetos y reflexiones que de otra manera no serían capaces de ver. Su conocimiento fomenta la creatividad, agudiza los sentidos para evidenciar proporciones, simetrías, repeticiones y, en general, ayuda a la resolución de problemas de distinta índole. Estas habilidades pueden y deben enseñarse en la escuela.

En este sentido, diversos autores son partidarios de comenzar la enseñanza de la geometría en las aulas, partiendo del mundo de los sólidos, considerando que los conceptos espaciales están más cercanos al propio mundo del alumnado que el de las figuras en el plano. Así mismo, algunas investigaciones destacan su importancia, pues consideran que cuando se resuelve un problema espacial, en la búsqueda de su solución, emergen diversos conocimientos geométricos.

Además, se han analizado los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, destacando que los contenidos de esta disciplina que se establecen en el sistema de educación actual se presentan normalmente como un fin en la actividad matemática, situando en un segundo lugar los procesos de aprendizaje. Sin embargo, las nuevas tendencias van encaminadas hacia una enseñanza participativa frente a la enseñanza tradicional, siendo cada vez más frecuente el uso de modelizaciones enmarcadas en un contexto matemático real que fomenten la motivación del alumnado y la participación activa del mismo en el aula.

En referencia a las actividades y tareas propuestas en la Unidad Didáctica, se han intentado plantear actividades que generen motivación en el alumnado y despierten el

interés por las matemáticas y la búsqueda del conocimiento. Con ellas, se ha pretendido poner en evidencia la importancia de la geometría como pilar fundamental en la formación cultural y académica, que les abra cauces para llegar a comprender un mundo en el que se hallan multitud de formas geométricas en la naturaleza, la arquitectura y el arte entre otras.

Se han planteado las sesiones con la pretensión de ofrecer un aprendizaje interdisciplinar y transversal, dirigidas hacia mejorar las habilidades de pensamiento crítico y reflexivo del alumnado, fomentando la construcción de aprendizajes significativos con el diseño de tareas sobre la vida real. Se ha pretendido fomentar la capacidad del alumnado para transformar los conocimientos adquiridos en propios, proporcionándoles las herramientas necesarias para abordar cualquier situación en múltiples contextos complejos.

Se han planteado varias sesiones en las que se ha pretendido ofrecer al alumnado una estrategia que mejore la visualización espacial, transmitiéndoles la necesidad de “aprender a ver”, “imaginar” o “transformar” ideas abstractas en objetos geométricos.

En estas sesiones, he pretendido que cobrara especial importancia la mirada crítica, la formulación de hipótesis, ensayo y error, la reflexión y la investigación.

Se ha mostrado al alumnado las posibilidades de teselar el espacio y cómo se puede generar una superficie cada vez más esférica para concluir con la construcción de una cúpula geodésica y la introducción de principios de rigidez, estabilidad y tensegridad (estructura estable muy interesante desde el punto de vista matemático).

Mediante el diseño de la Unidad Didáctica, fundamentada en la normativa estatal y autonómica, en los artículos e investigaciones realizadas y en el análisis de los libros de texto, se ha pretendido llevar a cabo un proceso de enseñanza más rico y abierto. Se han resaltado los aspectos creativos para lograr despertar hacia el verdadero ser de las matemáticas.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E. (2019a), *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Madrid. Grupo SM.
- Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.
- Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: AIQUE Grupo Editor.
- Colera, J., Colera R., I. Gaztelu, M.J. Oliveira (2019a). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Madrid. Grupo Anaya, S.A.
- Contreras, A., Fernández, T., Godino, J. D., Gonzato, M., y (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.
- Cornelio, L., Marcela, D., (2016). Los orígenes de la geometría: de la necesidad pragmática a la búsqueda apodíctica. *Revista de ciencias Facultad de ciencias y exactas Universidad del Valle*, 99-108
- Duarte, J. (2015). *Cúpula Geodésica*. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>
- Fernández, F., García, F., Gómez, J., Navarro, J., Pina, E., Rodríguez, H., (2017). Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas. Murcia. Mad. 7 editores
- Fernández, T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial* (Tesis Doctoral), Universidad de Santiago de Compostela (Galicia).
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Canadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. Lopez-Martin (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.
- Gutiérrez, A. (2010). Introducción al Seminario I sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 17-19). Lleida: SEIEM.

- Gutiérrez, A. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-14). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Martínez, F. (2018). Domos poliédricos Regulares. En STLE, *VII Simposio Latinoamericano de Tensoestructuras: La enseñanza de las Tensoestructuras y su rol en respuesta a desastres*. (pp. 2-11). Lima: Universidad Ricardo Palma.
- Mejías, D., Ocaña, J.M., Romero, R. (2019a). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Madrid. Grupo Edelvives
- Muñoz. J.L. (2018). Matemáticas en tierra de cine: Las cúpulas del trueno. En *XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 1-4). Almería: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
- Peña. Et.al., (2013). Las Matemáticas cotidianas de Ana. En M. Parra (coord.). *Otra mirada de las Matemáticas. Guía Didáctica*. (pp. 23,24). Murcia. Museo de la ciencia y el agua y Ayuntamiento de Murcia.
- Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Gijón: SEIEM.

APUNTES DE CLASE

- Luque Cañada, L. (2020). Aprendizaje y enseñanza de la materia de matemáticas. Universidad de Jaén.
- García, F.J. (2020). Aprendizaje y enseñanza de la materia de matemáticas. Universidad de Jaén.
- Castro, I. (2020). Complementos de formación disciplinar en matemáticas. Universidad de Jaén

LEGISLACIÓN

- España. Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. BOE, núm. 122, p. 27-45 (2016)
- España. Decreto 327/2010, de 13 de julio, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria. BOJA núm. 139, p. 8-34 (2010).
- España. Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. BOJA núm. 252, p. 1-60 (2007).

España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E). BOE núm. 295, p. 1-64 (2013).

España. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. BOJA núm. 144, p. 108-194 (2016).

España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. BOE núm. 25, p. 6986-7003 (2015).

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE núm. 3, p. 391-394 (2015).

VIDEOS

De la Fuente, A. (2013 Diciembre 15). Sólidos truncados. [Archivo de video]. Recuperado de <https://vimeo.com/81951494>

Gallego, M. (2013 Enero 29). Historia de los sólidos platónicos. [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=RfZS3yhknnw&feature=youtu.be>

García. J.A. (2014). Construcción de un omnipoliedro. IES Miguel Hernández. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=DOT1kKozTpQ&feature=youtu.be>

Romañach. J. (2012). Algo pasa con phi. Capítulo 1-El pentágono mágico y el número áureo.

Vila, C. (2019 Agosto 20). Infinite Patterns. [Archivo de video]. Recuperado de <https://vimeo.com/354924827>

Vila, C. (2012 Febrero 12). Inspiration. [Archivo de video]. Recuperado de <https://vimeo.com/36296951>

GEOGEBRA

Arranz, J.M.. (2019). Coordenadas geográficas: latitud y longitud. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/beh2vwm9#material/Zk25FNfr>

- Arranz, J.M. (2019). Esfera y sus elementos. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/iQAcCGDP>
- Arranz, J.M. (2019). Superficies de revolución. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/Ks7BfPSx>
- Comino, A., Torres, V.M (2019). Los cinco poliedros regulares y sus duales. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/exVwHtmk>
- Eliseli, J. (2019). Poliedros regulares y su desarrollo. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/y7RK2fwS>
- Martínez, M. (2019). Elementos y características de los poliedros. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/zuej5jyw>
- Mateseve, A. (2019). Pirámide. Volumen y área. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/tRCJY8Eg#material/MvbDgxmm>
- Mora, J.A. (2019). Omnipoliedro. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/gga7YxpU#material/BAe2CPuC>

PÁGINAS WEB

- ArchDaily (2019). Plataforma Arquitectura. Estructuras de Tensegridad: qué son y qué esperar de ellas. Recuperado de <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/895913/estructuras-de-tensegridad-que-son-y-que-esperar-de-ellas>
- Cardil, R (2019). MatemáticasVisuales. Recuperado de <http://www.matematicasvisuales.com/html/complementos/contacto.html>
- Hspencer (discusión contribuciones).(2010). Casiopea. Richard Buckminster Fuller.: Estructura Tensegridad y cúpula goedésica. Recuperado de https://wiki.ead.pucv.cl/RICHARD_BUCKMINSTER_FULLER:_ESTRUCTURA_TENSEGRIDAD_Y_C%3%9APULA_GEODESICA_/ER

ANEXO 1. INVESTIGACIONES SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

En el Anexo 1 se realiza un análisis sobre las distintas investigaciones relacionadas con la visualización y el razonamiento espacial.

Conexión entre visualización y razonamiento espacial

En este punto, se hace un análisis de los estudios realizados por distintos autores en referencia a las conexiones existentes entre visualización y razonamiento espacial (VRE). (véase Tabla 43)

CONEXIÓN ENTRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL	
Gutierrez (1998b), Usiskin (1987) y Yakimanskaya (1991)	Indican que la mayoría de los investigadores y educadores matemáticos destacan la importancia de la visualización pues mejora las distintas visiones (globales e intuitivas). También mejora la comprensión de muchas áreas matemáticas (cálculo, álgebra, estadística, geometría)
Clements y Battista (1992, p. 420)	Definen el razonamiento espacial como el conjunto de procesos cognitivos mediante los que se representan mentalmente objetos espaciales, sus relaciones y las posibles transformaciones para ser contruidos y manipulados.
Usiskin (1987)	Realiza la descripción de cuatro dimensiones en la geometría: 1. Dibujo, construcción y visualización de figuras. 2. El análisis de aspectos espaciales que generan el mundo físico. 3. El uso de la geometría para la representación de distintos conceptos matemáticos que no sean visuales y la conexión existente entre ellos. 4. La representación de un sistema matemático formal. Las tres primeras dimensiones requieren el uso, según el autor, del razonamiento espacial.
Battista (2007,p. 843)	Expone que la base fundamental del pensamiento geométrico es el razonamiento espacial (capacidad de examinar, ver y reflexionar sobre distintos objetos e imágenes, las relaciones entre ellas y sus posibles transformaciones espaciales).
Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989, pp. 54-55)	Destaca que la visualización tiene un papel principal en el razonamiento matemático, sobre todo en lo referente al razonamiento proporcional y deductivo-inductivo; es el hilo conductor entre comprender y poder desarrollar un razonamiento inductivo cuando se trabaja con patrones numéricos o patrones representados en distintas configuraciones geométricas. Es especialmente importante para el alumnado visualizar, organizar datos, generar o buscar patrones o ser capaces de

	formular conjeturas debidamente argumentadas que después puedan ser validadas.
Teoría de Van Hiele	Es el marco teórico dominante cuando se habla de didáctica de la geometría. Según (Clements y Battista, 1992, p 433; Gutiérrez, 1998b, p.3) dicha teoría posee implicaciones muy fuertes en el contexto de la instrucción en geometría a la hora de organizar distintas unidades de enseñanza y poder evaluar la manera en la que se produce el progreso de los estudiantes. La visualización se posiciona en el primer plano de razonamiento, como imprescindible para el desarrollo del pensamiento geométrico.
Arrieta, (2006); Bishop, (1983); De Guirre (1982)	Existen diversas investigaciones que establecen una relación entre habilidad espacial y la capacidad geométrica.
Vinner, 1983	Para este autor, la visualización es responsable de los éxitos conceptuales geométricos tanto porque es imposible formar una imagen sin visualizar sus distintos elementos, como porque los diferentes elementos visualizados pueden limitar los conceptos.
IMPLICACIONES CURRICULARES	
Del Grande, 1987; Freudental, 1973; Schoenfeld, 1986; Usiskin, 1987)	Desde hace más de veinte años, los educadores matemáticos implicados en los currículum manifestaron la necesidad ofrecer cursos de intuición visual geométrica previo al comienzo del curso deductivo.
(Arcavi, 2003; Battista, 2007; Cunningham, 1991; Guillén, 2000; Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, Laborde, 1993, 1998; Mariotti 1995, 2001, Parzysz, 1991; Stylianou, 2001).	Para una adaptación correcta a la nueva y emergente sociedad tecnológica es necesaria la educación visual y por tanto debe recogerse en proposiciones curriculares.

Tabla 43. Conexión entre visualización y razonamiento espacial. (T. Fernández 2011)

Metodologías y conceptos teóricos utilizados en visualización y razonamiento espacial (VRE)

En este apartado se analizan diferentes métodos y teorías de distintos autores en relación a la visualización y el razonamiento espacial. (véase Tabla 44)

METODOLOGÍAS Y CONCEPTOS TEÓRICOS EN VRE	
Existen distintos enfoques teóricos y metodologías. La visualización espacial ha recibido diferentes nombres: “percepción visual”, “razonamiento visual”, “imaginación espacial”, “visión espacial”, “visualización” “imagería” o “pensamiento espacial”. Algunos ejemplos son:	
Hershkowitz (1990, p. 75)	Define la visualización como <i>“aquello que generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual”</i> .
Presmeg (1997, p. 304)	<i>“el proceso implicado en la construcción y transformación de imágenes mentales”</i> .
Yakimanskaya (1991, p. 21)	<i>“el pensamiento espacial es una forma de actividad mental la cual hace posible crear imágenes mentales y manipularlas cuando se están resolviendo problemas prácticos y teóricos”</i> .
Arcavi (2003)	<i>“La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión (p. 217).”</i>
Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996)	<i>“La visualización es un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre un constructo interno y algo a lo que se accede a través de los sentidos. Tal conexión puede ser hecha en ambas direcciones. Un acto de visualización puede consistir en la construcción mental de objetos o procesos que un individuo asocia con objetos o eventos percibidos como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, sobre algunos medios externos como el papel, la pizarra o la pantalla del ordenador, de objetos o eventos que el individuo identifica con objetos o procesos en su mente (p. 441).”</i>
Duval (1999)	Hace la distinción entre visión y visualización, diferenciando que visión hace referencia a percepción visual y que consta de dos funciones, la “epistemológica”

En todas las concepciones recogidas de visualización espacial, se sitúa en una posición central el concepto de imagen. Se puede diferenciar cuatro elementos que son básicos en las distintas concepciones y definiciones de visualización espacial;

1. ***Imágenes mentales***
2. ***Representaciones externas***
3. ***Procesos para manipular imágenes***
4. ***Habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes.***

Tabla 44. Metodologías y conceptos teóricos en VRE. (T. Fernández 2011)

Elementos básicos en las concepciones de visualización espacial

En este apartado se desarrollan las aportaciones de distintos autores sobre los cuatro elementos básicos presentes en las definiciones de visualización espacial, descritos en el punto anterior (véase Tabla 45).

ELEMENTOS BÁSICOS EN LAS CONCEPCIONES DE VISUALIZACIÓN ESPACIAL	
1. IMÁGENES MENTALES	
Presmeg (1986b, pp. 43-44)	Cita diversos tipos de imágenes mentales: <i>"Imágenes concretas pictóricas"</i>. Son imágenes figurativas correspondientes a objetos físicos. <i>"Imágenes de fórmulas"</i>. Visualización de fórmulas o relaciones esquemáticas que reflejan cómo se representarían en un libro de texto. <i>"Imágenes de patrones"</i>. Son esquemas visuales derivados de relaciones abstractas. Se visualiza una representación gráfica de su significado, no de la relación. <i>"Imágenes cinéticas"</i>. Imágenes físicas-mentales, presenta una gran importancia el movimiento de manos, cabeza,... 5. <i>"Imágenes dinámicas"</i>. Se desplazan los objetos o los elementos que los componen.
2. REPRESENTACIONES EXTERNAS	
Goldin (1998, 2002)	Define una representación como un signo determinado o una configuración de signos, objetos o caracteres que pueden simbolizar, dar una imagen, codificar o representar algo diferente a él mismo. Determinados sistemas de representación externos pueden ser formales y notacionales (sistemas de numeración, expresiones de álgebra, programación...). Visuales o gráficos. (Operaciones de rectas, gráficos de sistemas de coordenadas polares o cartesianas, diagramas geométricos...). Pueden describir objetos, propiedades, relaciones, acciones o formas abstractas.

Goldin (1998, p.147)	Indica que las representaciones externas incluyen además entornos de aprendizaje, por ejemplo los que usan concretos materiales manipulativos o herramientas tecnológicas.
Mesquita (1992, 1998)	Esta autora, llama a la ambigüedad que conllevan las representaciones externas el “<i>doble status de los objetos geométricos</i>” (abstracto o particular). La tipicidad de una determinada representación externa se centra en que se asocian más fácilmente algunas representaciones externas, dado un problema, que otras. Esto determina la importancia de elegir bien los ejemplos expuestos al alumnado, utilizando figuras prototípicas (regulares, simétricas, bordes cerrados...) Pueden tener funciones heurísticas (muestra las transformaciones que conllevan a la solución) o descriptiva (muestra propiedades y relaciones).
Duval (1999, p. 15)	Indica cómo el alumnado puede construir una determinada figura pero sin ser capaz de construir la configuración global. Hace una distinción entre gráficos y figuras geométricas.
Parzysz (1988, 1991)	Utiliza el término figura para la definición de una creación de nuestra imaginación y dibujo cuando se refiere a una ilustración. Diferencia entre dos niveles cuando se representa una figura: Nivel 1 (<i>representación cercana</i>) la representación tiene la misma dimensión que la figura geométrica que representa, corresponde a: Geometría plana 2D dibujo. Geometría espacial 2D modelo. Nivel 2 (<i>representación distante</i>) la representación tiene una dimensión inferior a la figura geométrica que representa, que corresponde a: Geometría plana 2D no existe. Geometría espacial 2D dibujo. En secundaria no se utilizan para la enseñanza del espacio geométrico las representaciones gráficas dentro de un contexto matemático real, solamente se utilizan para ilustrar las figuras, generando errores de concepto.
Bills y Gray (1999, p.120)	Las imágenes generadas por el alumnado tienen que analizarse en el contexto del aula, interaccionando con el profesor, el alumnado genera una imagen es un compendio de información con contenido verbal y no verbal, derivados de lo que perciben de las representaciones realizadas por el profesor

3. PROCESOS PARA MANIPULAR IMÁGENES	
Explicado en el punto 3.4.4. en la faceta cognitiva.	
4. HABILIDADES ESPACIALES	
El estudio de las habilidades se desarrolla a partir de los años cuarenta y cincuenta, pues los actores implicados en la educación matemática se empezaron a interesar por el campo de la visualización y comenzaron a estudiar las relaciones existentes entre el espacio y el desarrollo de actividades matemáticas.	
Bishop (1983, p. 181)	Describe que diversos investigadores matemáticos como Murray (1949), Wrigley (1958) y Barakat (1951) se percataron de que los test de habilidades espaciales estaban más correlacionados con las habilidades propias de la geometría que las del álgebra. Por otro lado, MacFarlane Smith (1964) concluyó que un aspecto imprescindible en las habilidades matemáticas eran las habilidades espaciales.
(Bishop, 1983), Clements, (1981),	Señala que debido a que los problemas de definición que constituyen las pruebas espaciales no reflejan fielmente las capacidades ni habilidades espaciales de los sujetos, pues parten de estímulos figurativos y de un vocabulario propio que es una fuente de problemas para determinados estudiantes.
Entre los factores que se creen determinantes para la mejora de la visualización espacial existen varios investigadores que se posicionan a favor de la capacidad de manipulación de la imagen y otros partidarios de la capacidad de razonar y resolver problemas.	
Clements y Battista (1992, p. 443)	Destacan que muchos investigadores parten de que las personas que poseen habilidades espaciales tendrían que poseer la capacidad de imaginar disposiciones espaciales de distintos objetos colocados en distintas posiciones y de manipular dichas imágenes visuales.
Kutetskii (1976)	Realizó una distinción entre el <i>“tipo analítico de persona”</i> y <i>“el tipo geométrico”</i> , distinción utilizada igualmente por Lean y Clements, (1981) El tipo analítico es en el que predomina un mejor desarrollo del componente lógico-verbal sobre un componente pictórico-visual débil. Utilizan esquemas abstractos y no requieren visualizar modelos u objetos para resolver problemas. El tipo geométrico es en el que predomina el componente pictórica-visual, son ingeniosos, expresan visualmente las relaciones matemáticas abstractas.
Las distintas concepciones sobre habilidades espaciales surgen de la insuficiencia de definiciones, por ejemplo:	

Kosslyn (1983) y Poltrock y Brown (1984),	Mencionan que entre los varios componentes independientes y que están directamente relacionados con la comprensión matemática, estarían <i>“la capacidad de descomponer/recombinar y la habilidad de transformar imágenes”</i> .
Brown y Wheatley (1997),	Definen la habilidad de descomposición/recombinación anteriormente mencionada, de la forma siguiente: <i>“habilidad de descomponer una imagen visual es la habilidad para romper esa imagen en partes simples y entonces recombinar aquellas partes en una nueva imagen que es más útil para la solución de un problema, pero manteniendo una equivalencia fundamental”</i> (p. 47); y entienden como habilidad de transformación las modificaciones geométricas básicas (simetría, giro, traslación y homotecia).
Lean y Clements (1981)	Aportan una definición de “habilidad espacial” entendida como la habilidad para construir imágenes mentales y transformarlas mentalmente.
McGee (1979, p. 891),	Establecen, en base a resultados obtenidos en investigaciones previas sobre habilidades espaciales, diez habilidades distintas englobadas en dos grupos: <i>“Habilidades de visualización espacial”</i> 1. Habilidad para imaginar la rotación de un objeto, representar, desarrollar, transformaciones en objetos 3D. 2. Habilidad para visualizar un conjunto en el que se efectúa un determinado movimiento entre alguna de sus partes. 3. Habilidad para entender posibles movimientos o transformaciones imaginarias en 3D y poder manipular mentalmente los objetos 4. Habilidad para transformar o manipular una imagen de un determinado patrón espacial para disponerlo de una forma diferente. <i>Habilidades de orientación espacial</i> 1. Habilidad para relacionar diferentes objetos espaciales; 2. Habilidad para reconocer un determinado objeto desde ángulos distintos o en movimiento; 3. Habilidad para establecer distintas relaciones espaciales en las que es esencial la orientación del observador; 4. Habilidad para descubrir patrones espaciales y ser capaz de hacer una comparación entre los mismos; 5. Capacidad para seguir las distintas orientaciones que puede presentar un objeto espacial; 6. Habilidad para percibir patrones en el espacio o conservar la orientación respecto de los objetos en el espacio.
Hoffer (1977)	Relaciona unas determinadas capacidades físico-psicológicas que son importantes para el aprendizaje de las matemáticas: <i>“coordinación ocular, percepción de una figura dentro de un trasfondo, constancia</i>

	<i>perceptual, percepción de posiciones en el espacio, percepción de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual.”</i>
Del Grande (1987, p. 127)	“Coordinación motriz de los ojos”. Habilidad de ser capaz de coordinar la visión cuando nos movemos. “Identificación visual”. Habilidad para poder reconocer un objeto fuera de su contexto, útil cuando el objeto tiene varias partes o se muestran objetos superpuestos. Constancia perceptual. Habilidad que te permite reconocer que determinadas propiedades de cualquier objeto (real o una imagen mental) no dependen de la textura, color, tamaño o posición. Igualmente te permite reconocer que cualquier objeto o imagen mantiene su forma aunque dejemos de verlo total o parcialmente, como puede ser el hecho de que se haya ocultado o girado. Percepción de posiciones espaciales. Es la habilidad para establecer un relación entre la posición de un determinado objeto o imagen mental con uno igual o con otro objeto, que actúe de punto de referencia. Percepción de relaciones espaciales. Es la habilidad que capacita para identificar de forma correcta las características de relaciones entre distintos objetos, imágenes mentales o dibujos, entre ellos o dentro de uno mismo. Esta habilidad te permite identificar que son perpendiculares, están girados, simétricos. Está relacionada con la percepción anterior en multitud de tareas. Discriminación visual. Es la habilidad que te permite comparar varios objetos, imágenes, dibujos, e identificar diferencias o similitudes entre ellos. Memoria visual. Es la habilidad usada para recordar las distintas características visuales y de posición que poseían un conjunto de objetos puestos a la vista en un momento dado, pero que en este momento no se ven o han sido cambiados de posición. Rotación mental. Es la habilidad para reproducir imágenes mentales dinámicas y visualizar igualmente una configuración de las mismas en movimiento. Existen otras muchas habilidades resultado de la combinación de varias de las indicadas anteriormente. Según Del Grande (1987, p.129), las habilidades más importantes para el adecuado desarrollo del alumnado en la escuela son las habilidades de percepción, siendo esenciales para el desarrollo de la escritura, lectura, aritmética, geometría, pintura, deportes, música...

Tabla 45. Elementos básicos en las concepciones de visualización espacial. (T. Fernández 2011)

Investigación en educación matemática sobre visualización y razonamiento espacial (VRE)

Tal y como expone T. Fernández (véase tabla 46), se puede establecer una revisión bibliográfica sobre los diferentes estudios desarrollados sobre visualización y razonamiento espacial a través del estudio de las cuatro facetas, en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007).

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL (VRE)	
FACETA EPISTÉMICA	
Argumentación y demostración	Se produce una dualidad entre los que piensan que la argumentación visual es fundamental, y otros que son reacios a que aparezca en sus discursos. Algunas investigaciones, destacando la de Soto-Andrade (2008), señalan que aunque el razonamiento visual forma parte de los currículum, normalmente se presenta como un argumento introductorio o auxiliar. Por tanto, no lo entienden como un razonamiento básico muy importante para su formación ni tampoco lo entienden como una herramienta básica para hacer matemáticas.
Representación	En la psicología de la resolución de problemas y del aprendizaje matemático, hay que considerar configuraciones internas del individuo y configuraciones externas. Las primeras son rechazadas por las corrientes conductistas y las segundas por las corrientes constructivistas. Existen dos puntos de vista distintos en la educación matemática, el primero el tradicional, centrado en el rendimiento académico y sus logros y el segundo centrado en los procesos cognitivos y cualitativos. Para Godin (2007) su interacción es fundamental para la correcta enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
FACETA COGNITIVA	
Basada en el análisis de las distintas teorías relacionadas con el aprendizaje geométrico. El marco teórico que domina la didáctica de la geometría es la teoría de Van Hiele, diversos investigadores Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1998, Gutiérrez (1992), Battista (2008), Laborde (193), Presmes (1997), Duval (1995), siguiendo esta teoría sitúan la visualización ocupando la primera posición de razonamiento en el ámbito del pensamiento geométrico.	

Se pueden distinguir tres aspectos en los que se centran los investigadores:		
1. Aprendizaje de conceptos 2. Procesos y estrategias 3. Preferencias del método		
1. Aprendizaje de conceptos	Vinner y Hershkowitz (1983,p.20)	Exponen que cuando tratamos con la formación de conceptos existen dos dificultades muy importantes: la noción propia del concepto y como determinar la formación del concepto en la mente.
	Hershkowitz (1990, p.81)	Destaca que en los procesos de formación de imágenes de un concepto son fundamentales los procesos visuales, especialmente en objetos tridimensionales.
	Fischbein (1993)	Indica que la geometría maneja figuras geométricas con características tanto conceptuales como figurales.
	Fischbein y Nachlieli (1998),	Se centran en la existencia de figuras invariantes y figuras que varían.
	Presmeg (1992, p. 607)	Señala como base de los distintos conceptos matemáticos, las imágenes de patrones.
2. Procesos y estrategias	Existe una relación entre proceso y visualización entendida como “verbo”.	
	Bishop (1989, p. 177)	Indica que las imágenes mentales, físicas o visuales son los objetos generados tras ser manipulados mediante la visualización. Dicha manipulación se lleva a cabo según estos dos tipos de procesos: Interpretación de información figurativa (IFI): Proceso para extraer información de las representaciones visuales tras comprenderlas e interpretarlas. Incluyendo manipulaciones y transformaciones de las distintas representaciones e imágenes visuales percibidas. El procesamiento visual (VP): proceso de transformación de una determinada información no figurativa o abstracta percibida en imágenes visuales o proceso de transformar imágenes constituidas y formadas en otras distintas.
	Burden y Coulson (1981),	Manifiesta que en toda estrategia resolutoria de un problema espacial intervienen tres características: el modo de representarlo, sobre qué centra el sujeto su atención y los concretos medios auxiliares.

	Gorgorió (1998)	Expone que en toda estrategia resolutive de un problema existen tres aspectos diferentes: la estructuración determinada de la estrategia, el procesamiento efectuado en la estrategia y el centro de atención dentro de la estrategia.
	McGee (1979, pp. 896-897)	Define dos clases de capacidad espacial relacionadas con VP e IFI: Visualización Espacial: <i>“capacidad de manipular, rotar, retorcer o invertir mentalmente un objeto bi o tridimensional”.</i> Orientación espacial: conlleva <i>“la comprensión de la disposición de elementos dentro de un patrón de estímulo visual y la aptitud de no confundirse por el cambio de orientaciones en las que una configuración espacial puede ser presentada”.</i>
	Duval (1995)	Distingue cuatro tipos distintos de estrategia: <i>“aprehensión perceptiva, secuencial, discursiva y operativa.”</i>
	Soto-Andrade (2008, pp. 5-6)	<i>“la visualización es provocada por la activación de metáforas previas que implican un cambio de modo cognitivo del estudiante”.</i>
	Gal y Linchewski (2010, p. 166)	Estudian las dificultades en los procesos del aprendizaje en la geometría mediante tres fases: <i>“la organización perceptiva, la fase de reconocimiento y la fase de representación”.</i>
3. Preferencia de método	Las investigaciones tratan de realizar un análisis de las características de los individuos visualizadores y el efecto que conlleva una enseñanza visual contra una enseñanza no visual, en referencia al rendimiento VRE. Un problema matemático implica razonamiento y lógica para ser resuelto y un método resulta visual cuando implica imágenes visuales.	
	Woolner (2004, p. 450).	Analiza las razones por las que el alumnado que destaca en visualización no se posiciona como estudiante de éxito. Concluye que el estilo de aprendizaje en el que destacan los visualizadores no está en concordancia con el estilo que prevalece en la enseñanza tradicional, claramente verbal.

	Presmeg (1986a, pp. 103-105)	Indica como posible causa para este fenómeno los distintos factores externos (limitación de tiempos, libros de texto, la naturaleza intrínseca de las matemáticas o los distintos métodos utilizado en la enseñanza) y a factores internos (es necesaria una mayor carga cognitiva).
FACETA INSTRUCCIONAL		
Ben- Chaim, Lappan y Houang (1988, p. 68)	Indican que <i>“los efectos de la instrucción para incrementar las habilidades de visualización espacial proporcionan evidencia que soporta la noción de que esa habilidades puedes ser enseñadas y aprendidas”</i> .	
Hershkowitz et al. (1996)	Formulan tres proyectos educativos basados de forma principal en la perspectiva visual, proponiendo a los alumnos la matematización de su entorno visual mediante variadas y múltiples herramientas y propuestas matemáticas.	
Pittialis, Mousoulides y Christou (2009)	Plantean que para la reconstrucción espacial de objetos tridimensionales desde figuras bidimensionales se requieren determinados requisitos convencionales no enseñados en la educación académica tradicional.	
Malara (1998)	Propone un método de introducción de ejercicios de sólidos geométricos basados en la previa discusión y comprobación empírica por parte del profesorado en relación a la potencia, dificultad y problemática de los mismos.	
Pallascio, Allaire y Mongeau (1993, pp. 8-9)	Establecen una dicotomía en la visualización de imágenes mentales; por un lado las basadas en la competencia analítica (percepción) y por otro, las derivadas de las competencias sintéticas (representación). Proponen tareas que abarquen ambas.	
Cohen (2003, p.229)	Plantea la diferencia entre la visualización mental de poliedros y sólidos curvos, ya que la representación en el plano de estos últimos difiere mucho en relación a su aspecto. Por tanto, propone potenciar la visualización global mediante actividades consistentes en plegar y desplegar planos.	
Gutiérrez (1996b)	Resalta la importancia del uso de herramientas tecnológicas para la visualización dinámica en pantalla de representación de sólidos, su creación, manipulación y transformación, lo que aporta una potente mejora exponencial en el aprendizaje de los mismos.	
Guillén (2001, 2005)	Propone actividades didácticas en función de la clasificación de sólidos, lo que es de gran utilidad en la construcción dinámica de familias de sólidos	
Acuña y Larios (2008)	Abordan dos problemas que obstaculizan la visualización: Por un lado, la incomprensión del alumnado ante los procesos intermedios en una transformación, cuando solo considera la construcción previa y la final tras ser modificada.	

	Por otro lado, la incapacidad de internalizar un sentido coherente matemático.
Sinclair (2003)	Analiza los diagramas plasmados en los libros académicos constatando una pérdida de proyección visual con respecto al uso de imágenes en geometría dinámica.
Orton (1997)	Investiga modelos de visualización de figuras bidimensionales en orientaciones distintas mediante la proyección y variación mental de estas.
White y Mitchelmore (2003, p.403)	Proponen abordar el concepto de ángulo desde una doble perspectiva, una práctica y otra abstracta.
Pratt y Davison (2003)	Abogan por el uso de herramientas tecnológicas también para la geometría plana, para ayudar a un adecuado conocimiento y transmisión de conceptos.
De Villiers, (1998) Markopoulus y Potari, (1996)	Inciden en que el uso de estas herramientas tecnológicas permiten profundizar en las conexiones entre los objetos y sus propiedades que facilitan el paso entre fases de van Hiele.
Healy y Hoyles, (2001); Mariotti, (2001); Marrades y Gutiérrez, (2000)	Coinciden en que el fin de la geometría dinámica es establecer una relación cognitiva conexa entre justificación y demostración.
FACETA ECOLÓGICA	
Recoge las investigaciones referentes a distinciones de género y culturales en relación al rendimiento implicado en test de VRE y estudios donde la visualización trabaja con contenidos no referentes a aspectos espaciales.	
Gutiérrez (1998)	Su investigación otorga una mayor capacidad de visualización al hombre que a la mujer; no así en cuanto al raciocinio lógico, que sería similar entre ambos géneros.
Arrieta (2003,2006), Presmeg y Bergsten (1995)	Sus conclusiones en referencia a la capacidad de visualización y rozamiento lógico otorgan mayor capacidad a las mujeres en determinadas etapas.
Clements y Battista (1992) y Gorgorió (1996, 1998)	Inciden en lo importante de conocer la diferencia de géneros, significando que aun concluyendo que no existe distinción en cuanto a capacidad, no se puede descartar que ambos géneros utilizaran diferentes procesos para su resolución.
Pratt y Davison (2003)	Abogan por el uso de herramientas tecnológicas también para la geometría plana, para ayudar a un adecuado conocimiento y transmisión de conceptos.
Bishop (1983) y Mitchelmore(1980)	Detectan que el alumnado no occidental presenta escasas capacidades de visualización espacial y ello debido sobre todo a su desconocimiento de protocolos asentados en occidente.
Presmeg (1989)	Destaca la importancia de la visualización en las clases multiculturales como una herramienta fundamental de transmisión y desarrollo del

	conocimiento, pues la lengua utilizada no es la nativa de muchos alumnos.
(Arcavi, 2003; Battista, 2007; Cunningham, 1991; Phillips et al., 2010; Guillén, 2000; Hershkowitz et al., 1996; Mariotti, 2001; Rivera, 2011; Stylianou, 2001)	Defienden que es esencial la formación previa en visualización geométrica con anterioridad a la educación deductiva, considerándola además fundamental para una correcta integración en el actual mundo tecnológico. Así mismo, destacan la importancia de incluir esta formación visual como propuesta curricular.
Ben-Chaim et al. (1989), Hershkowitz, et al. (1996)	Destacan la gran trascendencia que las imágenes visuales tienen en ciclos de formación tempranos (educación infantil y primaria), donde el alumnado presenta una fuerte vinculación con este tipo de lenguaje sensorial/representativo.
Para Bishop (1989, p. 11)	Hay que tener en cuenta una adaptación personalizada del alumnado en relación a las individuales capacidades existentes de representación visual, proponiendo así mismo diversidad de actividades y estimulaciones.
Fischbein (1990, pp. 155-156)	Mediante la <i>“teoría de los conceptos figurales”</i> , concluye que la integración la visualización geométrica mental no es un proceso de surgimiento automático e igual en todo el alumnado, por lo que debe ser abarcado desde la debida atención por parte del profesorado.
Presmeg (1989, p. 20)	Teoriza sobre la conveniencia de introducir visualmente conceptos propios arraigados de cada cultura.
Diezmann y Lowrie (2009, p. 423)	Proponen seis modos de introducción curricular: Potenciar la capacidad de visualización espacial y sus variedades; fomentar el uso y de conceptos lingüísticos espaciales, favorecer el entorno para su uso, promover el desarrollo de estas capacidades espaciales mediante distintos ejercicios (visualización en zonas oscuras, orientaciones y posicionamiento de formas, memoria visual); hacer uso de ejemplos que faciliten la comprensión visual del alumnado, apoyando su correlación con experiencias anteriores; efectuar un adecuado seguimiento del alumnado en relación a su problemática de comprensión y fallos y por último sacar partido del uso de herramientas tecnológicas, y figuras 3D, que potencien su uso en ambientes informales.

Tabla 46. Investigación en educación matemática sobre visualización y razonamiento espacial (VRE). (T. Fernández 2011)

ANEXO 2. DESARROLLO DE ACTIVIDADES

En el presente Anexo, se desarrollan las actividades propuestas en la unidad didáctica de Cuerpos geométricos.

SESIÓN 1. INTRODUCCIÓN

ACTIVIDAD 1.1_ REFLEXIÓN Y DEBATE

Se proyectará en el visionado de dos cortometrajes basado en la geometría. El primero de un cortometraje basado en los patrones geométricos existentes en el mundo <https://vimeo.com/354924827> (3,44 min) y el segundo cortometraje muy inspirador sobre la obra de M.C. Escher y como las figuras geométricas y la importancia de la capacidad de visualizar <https://vimeo.com/36296951> (3,51 min)

Tras el visionado, haremos un intercambio de ideas donde el alumnado exprese los diversos puntos y reflexiones sobre los cortometrajes, desde una perspectiva crítica. El profesor pretenderá explorar los conocimientos previos del alumnado dirigiendo el debate hacia el despertar de la motivación y el interés sobre ciertos aspectos de mejora de la capacidad visual (22 min). Se mostrarán las siguientes imágenes del cortometraje como hilo del debate, posteriormente se hará referencia a alguna de ellas en las sesiones siguientes (véase Figura 35).



Figura 35. El mundo de M.C. Escher. Extraída de <https://vimeo.com/36296951>

ACTIVIDAD 1.2_ TEST CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se efectuará un test para evaluar los conocimientos previos sobre cuerpos geométricos del alumnado. El test incluirá 18 preguntas (20 min) a responder usando una tablet.

Las cuestiones que componen el test son las siguientes (véase figura 36):



Usted se dirige al museo de arte, donde encuentra diversos cuadros de pinturas muy reconocidas pero a usted le llama mucho la atención el cuadro que se muestra en la imagen, ¿De qué está constituido?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

b) de colores

c) figuras geométricas

a) cuerpos geométricos

Siguiente



Margarita necesita de su ayuda, ella se encontró con estas dos pequeñas pirámides pero está confundida ya que no sabe si son figuras o cuerpos geométricos, ¿Qué respuesta le darían ustedes?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

son cuerpos geométricos porque tienen una base y anchura, por consiguiente tienen un volumen y en el cuerpo se pueden apreciar figuras geométricas en sus caras.

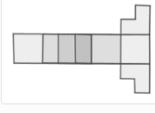
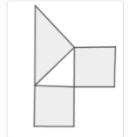
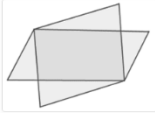
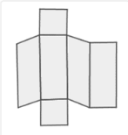
son figuras geométricas por que sus caras lo dicen todo, dependen de ellas para saben que son

Anterior

Siguiente

¿Con cuál de los siguientes desarrollos planos se puede construir un poliedro?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:



Anterior

Siguiente

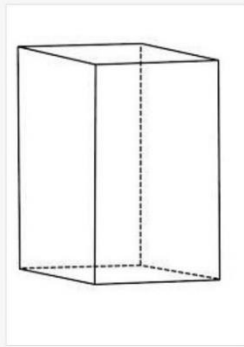
Un cubo tiene más cantidad de caras que un prisma rectangular.

Selecciona uno de los siguientes:

VERDADERO

FALSO

Siguiente

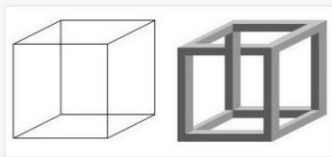


¿Qué nombre recibe este cuerpo geométrico?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

Anterior

Siguiente



¿Cuántas caras tiene un cubo?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

Anterior

Siguiente

El cono no es un cuerpo geométrico.

Selecciona uno de los siguientes:

Siguiente



¿Qué cuerpo geométrico es?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

Anterior

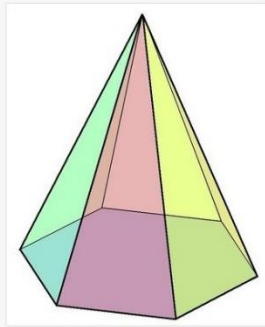
Siguiente



Este cuerpo geométrico es una pirámide.

Selecciona uno de los siguientes:

Siguiente



Una pirámide pentagonal tiene 5 vértices.

Selecciona uno de los siguientes:

VERDADERO

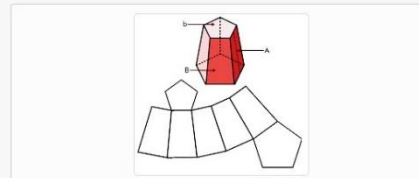
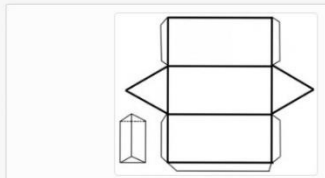
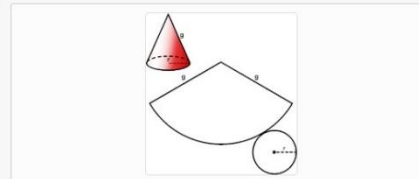
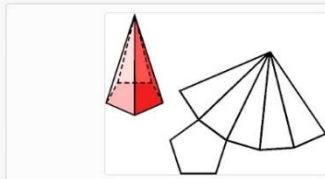
FALSO

Anterior

Siguiente

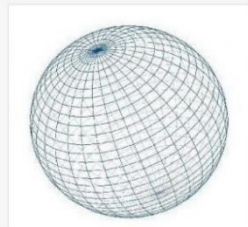
¿Cuál de los siguientes cuerpos no es poliedro?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:



Anterior

Siguiente



La esfera es una figura plana.

Selecciona uno de los siguientes:

VERDADERO

FALSO

Siguiente

¿Cuál de los siguientes polígonos no forma un poliedro regular?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

Pentágono regular

Cuadrado.

Hexágono regular.

Triángulo equilátero.

Anterior

Siguiente

¿Cuántas caras tienen los prismas rectangulares?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

4

5

6

8

Anterior

Siguiente

¿Cuál de los siguientes cuerpos NO es un poliedro?:

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

Cubo.

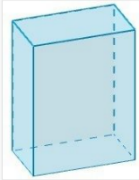
Cono.

Pirámide.

Paralelepípedo.

Anterior

Siguiente



Este cuerpo es un prisma .

Selecciona uno de los siguientes:

VERDADERO

FALSO

Siguiente

A los poliedros regulares se los conoce también como sólidos Platónicos. (Ya eran conocidos por Platón). ¿Cuántos hay?

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

4

12

Infinitos

5

Siguiente

La ley de Euler plantea en un poliedro:

Selecciona una de las siguientes respuestas posibles:

$V + A = C + 2$

$V + C = A + 2$

$C - V = A - 2$

$C + A = V + 2$

Anterior

Siguiente

Figura 36. Test, recuperado de <https://www.goconqr.com/>

ACTIVIDAD 2.1.- POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS.

El alumnado realizará ejercicios sobre posiciones relativas de rectas y planos en el espacio, que serán resueltos por un voluntario en la pizarra. (véase Figura 37).

1. Observa a tu alrededor el aula donde te encuentres e indica donde ves:

- a) Planos que sean secantes.
 - b) Planos que sean paralelos.
 - c) Planos que sean perpendiculares.
 - d) Rectas que sean secantes.
 - e) Rectas que sean paralelas.
 - f) Rectas secantes a un plano.
 - g) Rectas paralelas a un plano.
 - h) Rectas contenidas en un plano.
- a) Los planos formados por el suelo y las paredes son secantes.
 - b) El suelo y el techo son dos planos paralelos.
 - c) Los planos formados por el suelo y la pared son perpendiculares, igualmente ocurre con el techo y las paredes.
 - d) La recta de la intersección de dos paredes con la línea de intersección del techo con una de esas paredes.
 - e) Los lados izquierdo y derecho de una pared.
 - f) El lado derecho o izquierdo de la pared es secante al suelo.
 - g) La recta de la intersección del suelo con la pared es paralela al plano del techo.
 - h) La recta de la intersección o del suelo con la pared es una recta contenida en el plano del suelo.

2. Observa el siguiente cuerpo geométrico e indica:

- a) Dos planos paralelos.
- b) Dos planos secantes.
- c) Dos planos perpendiculares.
- d) Dos aristas perpendiculares.

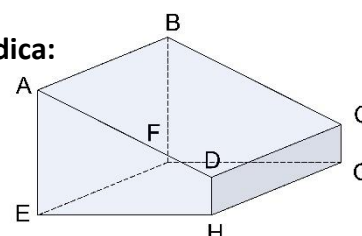


Figura 37. Act. 2.1. (elaboración propia)

- a) Dos planos paralelos son los formados por ABEF y DCHG o también los formados por ADEH y BCFG.
- b) Dos planos secantes son los formados por ABCD y EFGH.
- c) Dos planos perpendiculares son los formados por ABEF y ADEH por ejemplo.

- d) Dos aristas perpendiculares son por ejemplo las aristas, AE – EH, DH-HG entre otras.

SESIÓN 3_ POLIEDROS REGULARES, VÉRTICES Y ARISTAS. FÓRMULA DE EULER

ACTIVIDAD 3.1.-

Con ayuda de Geogebra el profesor explicará los desarrollos de los cinco poliedros regulares <https://www.geogebra.org/m/y7RK2fwS>

Se repartirá al alumnado (agrupados en equipos de 4) el material necesario para realizar la actividad de investigación sobre poliedros regulares, descrita a continuación:

Se repartirá a cada grupo una ficha con la siguiente información para completarla:

Poliedros regulares

1. Completa la tabla adjunta (véase tabla 47) con la figura que forman a los distintos sólidos platónicos, el número de caras, vértices y aristas.
2. Investiga qué relación existe entre el número caras y vértices de los distintos poliedros, colorea del mismo color las celdas de los poliedros que intercambien el número de caras y vértices.
3. ¿Qué relación encuentras entre la suma de caras y vértices con el número de aristas de cada uno de los poliedros?

SÓLIDO	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ISOSAEDRO
FIGURA GEOMÉTRICA					
Nº DE CARAS					
Nº DE VÉRTICES					
Nº DE ARISTAS					
Nº CARAS + Nº VÉRTICES					

Tabla 47. Actividad 3.1. Poliedros regulares, vértices y aristas. Fórmula de Euler (elaboración propia.)

El alumnado deberá dar el siguiente resultado, encontrando la relación entre caras y vértices en relación con la Fórmula de Euler: $C + V = A + 2$.

Igualmente, con la indicación de colorear las celdas de los poliedros que intercambian caras y vértices se pretende que intuyan el concepto de dualidad (Tetraedro-tetraedro, Cubo-Octaedro, Dodecaedro-Icosaedro), que será posteriormente explicado por el profesor. La tabla resultante será la siguiente: (véase tabla 48)

SÓLIDO	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ISOSAEDRO
FIGURA GEOMÉTRICA	triángulos equiláteros	cuadrados	triángulos equiláteros	pentágonos regulares	triángulos equiláteros
Nº DE CARAS	4	6	8	12	20
Nº DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
Nº DE ARISTAS	6	12	12	30	30
Nº CARAS + Nº VÉRTICES	8	14	14	32	32

Tabla 48. Actividad 3.1 .Solución (elaboración propia.)

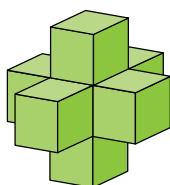
Se solicitará a cada grupo que exponga los resultados y se creará un debate en clase sobre las conclusiones, dirigiendo el profesor dicho debate hacia la explicación de la fórmula de Euler y al concepto de dualidad de poliedros regulares deduciendo la relación entre un poliedro regular y su dual al unir con segmentos los centros de cada dos caras contiguas. (15 min).

ACTIVIDAD 3.3.- PROBLEMAS FÓRMULA DE EULER.

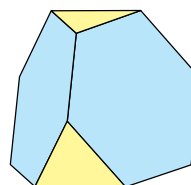
El alumnado realizará unos ejercicios propuestos en la sesión que tendrán que terminar en casa (Colera, J. et al., 2019a).

1. Explica por qué cada uno de los siguientes poliedros no es regular. ¿Son semirregulares? Comprueba si se verifica el teorema de Euler en cada uno:

a)



b)



a) El poliedro no es semirregular y, por tanto, tampoco regular, ya que no en todos los vértices concurre el mismo número de caras.

Tiene 30 caras, 32 vértices y 60 aristas, por lo que sí cumple el teorema de Euler,
 $30 + 32 - 60 = 2$.

b) El poliedro no es regular porque todas sus caras no son iguales, pero sí es semirregular.

Tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas; sí cumple el teorema de Euler,
 $8 + 12 - 18 = 2$.

SESIÓN 4_ DUALIDAD Y TRUNCAMIENTO

ACTIVIDAD 4.1.- Dualidad

Se realizarán los siguientes ejercicios sobre dualidad entre poliedros regulares. (Colera, J. et al., 2019a).

2. Hemos señalado en rojo los centros de las caras “frontales” de estos poliedros, y en color más claro, los centros de algunas caras “ocultas”. Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno. (véase Figura 38)

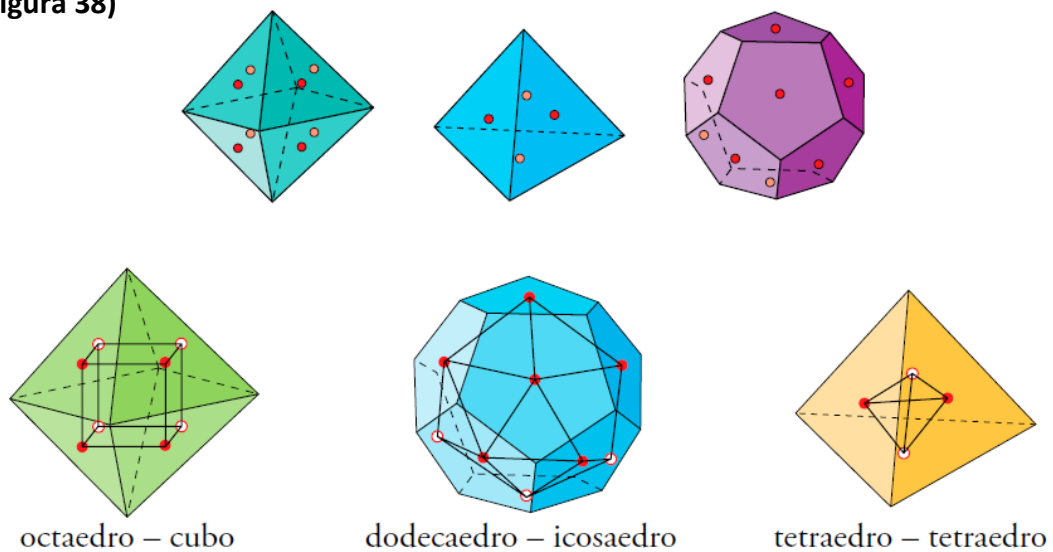


Figura 38. Actividad 4.1. Dualidad (Colera, J. et al., 2019a).

ACTIVIDAD 4.2.- Truncamiento

3. Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas adyacentes, los restantes poliedros regulares.

- Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?
- El resultado de truncar el octaedro también es conocido. ¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se le llama cuboctaedro?
- ¿Qué figura resulta de truncar un icosaedro? Compárala con el resultado de truncar un dodecaedro que has visto antes y explica por qué es un poliedro semirregular (recuerda, se llama icosidodecaedro).
- Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en el epígrafe anterior.

a) La figura que se obtiene es un octaedro (veáse Figura 39)

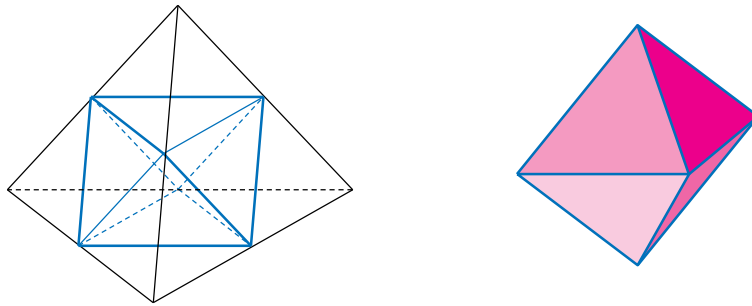


Figura 39. Actividad 4.2. Ej. 2. Truncamiento (Colera, J. et al., 2019a).

b) La figura que se obtiene es un cuboctaedro. (veáse Figura 40)

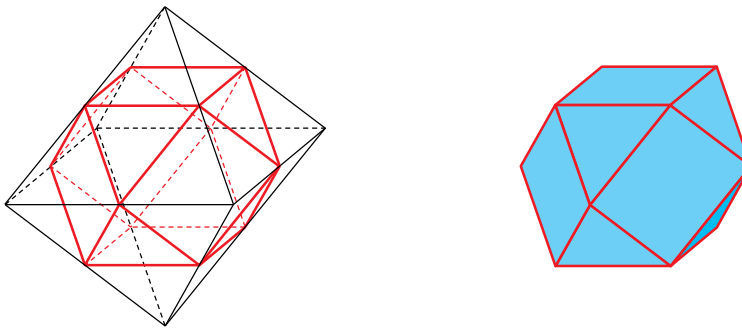


Figura 40. Actividad 4.2. Ej. 2. Truncamiento (Colera, J. et al., 2019a).

c) Al truncar un icosaedro se obtiene un icosidodecaedro, que se compone de pentágonos regulares y de triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen dos pentágonos y dos triángulos (es un poliedro semirregular).

Al truncar un dodecaedro también se obtiene un icosidodecaedro. (véase Figura 41)

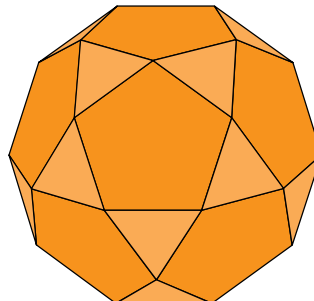


Figura 41. Actividad 4.2. Ej. 2. Truncamiento (Colera, J. et al., 2019a).

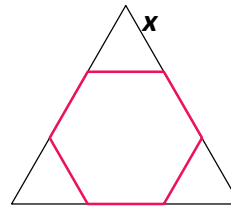
d) La figura que resulta al truncar dos poliedros duales es la misma.

4. Explica por qué al truncar los poliedros regulares, excepto el tetraedro, se obtienen siempre poliedros semirregulares. (Colera, J. et al., 2019a).

Obtenemos poliedros semirregulares porque al truncar siguiendo el patrón que se indica en la teoría, las caras que aparecen son dos tipos de polígonos regulares y en todos los vértices concurren el mismo número de caras.

5. ¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular? (véase Figura 42)

$x = \frac{1}{3}l$, donde l es el lado del triángulo.



6. Describe el tetraedro truncado.

¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices?

¿Cuántas aristas?

¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

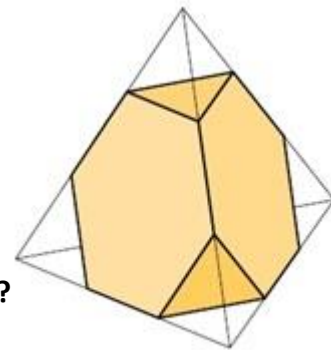


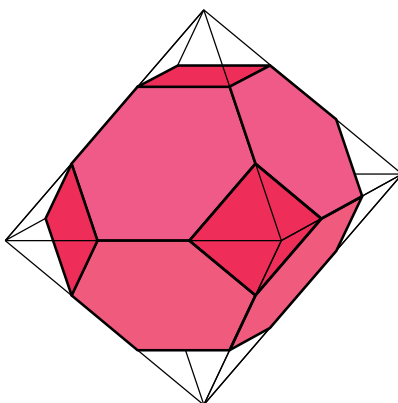
Figura 42. Actividad 4.2. Ej. 5. Truncamiento (Colera, J. et al., 2019a).

Tiene 8 caras, 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros.

Tiene 12 vértices donde concurren dos hexágonos y un triángulo.

Tiene 18 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del tetraedro original.

6. Describe el octaedro truncado. (véase Figura 43).



Caras, tipos. Vértices. Aristas.

Tiene 14 caras, 8 hexágonos y 6 cuadrados.

Tiene 24 vértices donde concurren dos hexágonos y un cuadrado.

Tiene 36 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de 3 la arista del octaedro original.

Figura 43. Actividad 4.2. Ej. 6. Truncamiento (Colera, J. et al., 2019a).

7. Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado. (Colera, J. et al., 2019a).

Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros. Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo. Tiene 90 aristas.

8. Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado. (Colera, J. et al., 2019a).

Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

SESIÓN 5_ OMNIPOLIEDRO

ACTIVIDAD 5.1.- Omnipoliedro

Para trabajar la capacidad de visualización, conceptos de dualidad, proporciones, medidas, fórmulas y relaciones, el profesor explicará con ayuda de Geogebra, <https://www.geogebra.org/m/gga7YxpU#material/BAe2CPuC>, la construcción del Omnipoliedro. Se trata de un poliedro realizado con los armazones de los poliedros regulares o sólidos platónicos, de forma que los cinco poliedros están inscritos dentro de otros (20 min) Las aristas del cubo rigidizan el dodecaedro.

A continuación el alumnado saldrá al patio para la construcción del Omnipoliedro con los recursos facilitados por el profesor: Tubos de PVC de distintos colores con cáncamos cerrados en los extremos y bridas.

El alumnado, guiados por el profesor, deberá seguir los siguientes pasos:

PASO 1.- En primer lugar habrá que construir el tetraedro, uniendo mediante bridas que tensionen los cáncamos que hay en los extremos de las barras. (véase Figura 44)

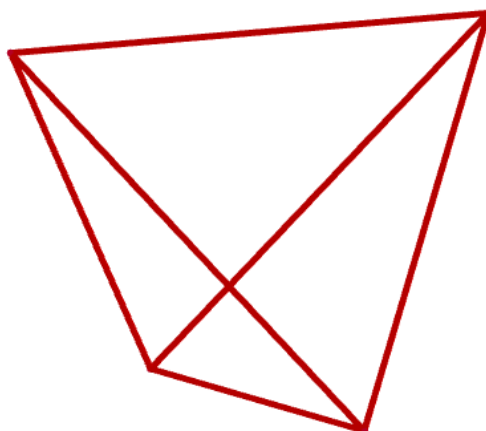


Figura 44. Omnipoliedro. Paso 1 (elaboración propia)

PASO 2.- A continuación hay que construir el octaedro. Se insertará el octaedro dentro del tetraedro, de forma que los vértices del octaedro coincidan con los puntos medios de las aristas del tetraedro. (véase Figura 45)

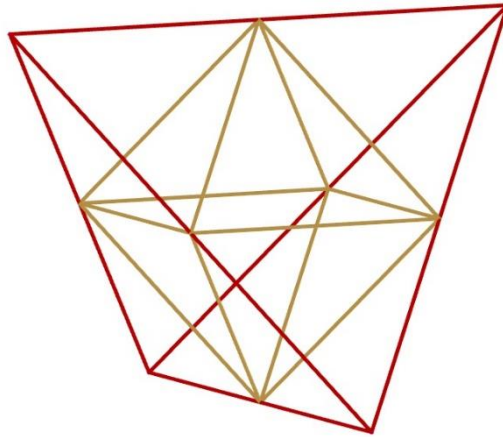


Figura 45. Omnipoliedro. Paso 2 (elaboración propia)

PASO 3.- Tenemos que construir el cubo de forma que las aristas del tetraedro sean las diagonales de las caras del cubo y sus vértices sean coincidentes. (véase Figura 46)

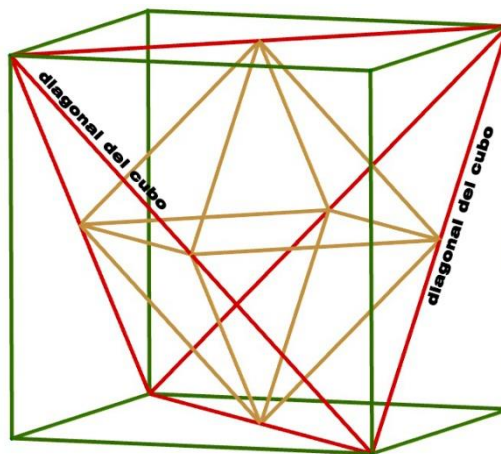


Figura 46. Omnipoliedro. Paso 3 (elaboración propia)

PASO 4.- El alumnado construirá el dodecaedro, sabiendo que en cada vértice del cubo acometen tres aristas del dodecaedro. Así se formarán las doce caras pentagonales del dodecaedro, sabiendo además que las aristas del cubo son una diagonal del pentágono y que rigidizan al dodecaedro. (véase Figura 47)

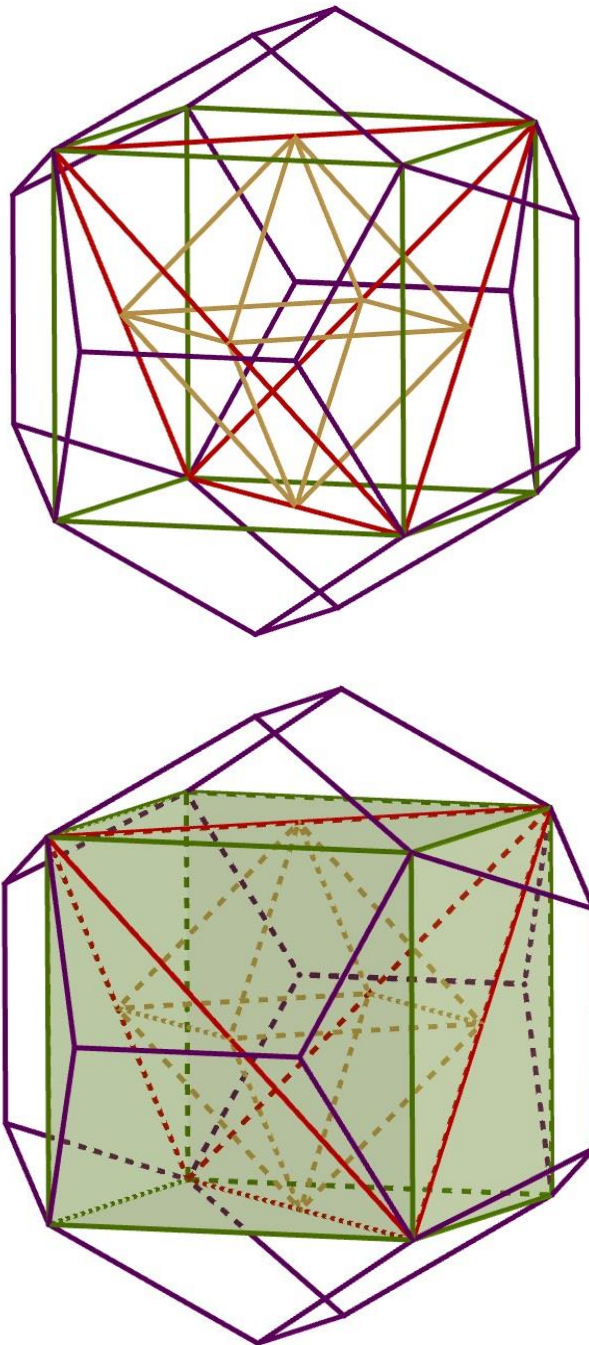


Figura 47. Omnipoliedro. Paso 4 (elaboración propia)

PASO 5.- En último lugar, habrá que construir el icosaedro, esta figura será la que de rigidez a la estructura formada por el omnipoliedro.

El icosaedro hay que construirlo sabiendo que cada vértice del icosaedro está en el centro de un pentágono y sus se cortan en los puntos medios de ambas. (véase Figura 48)

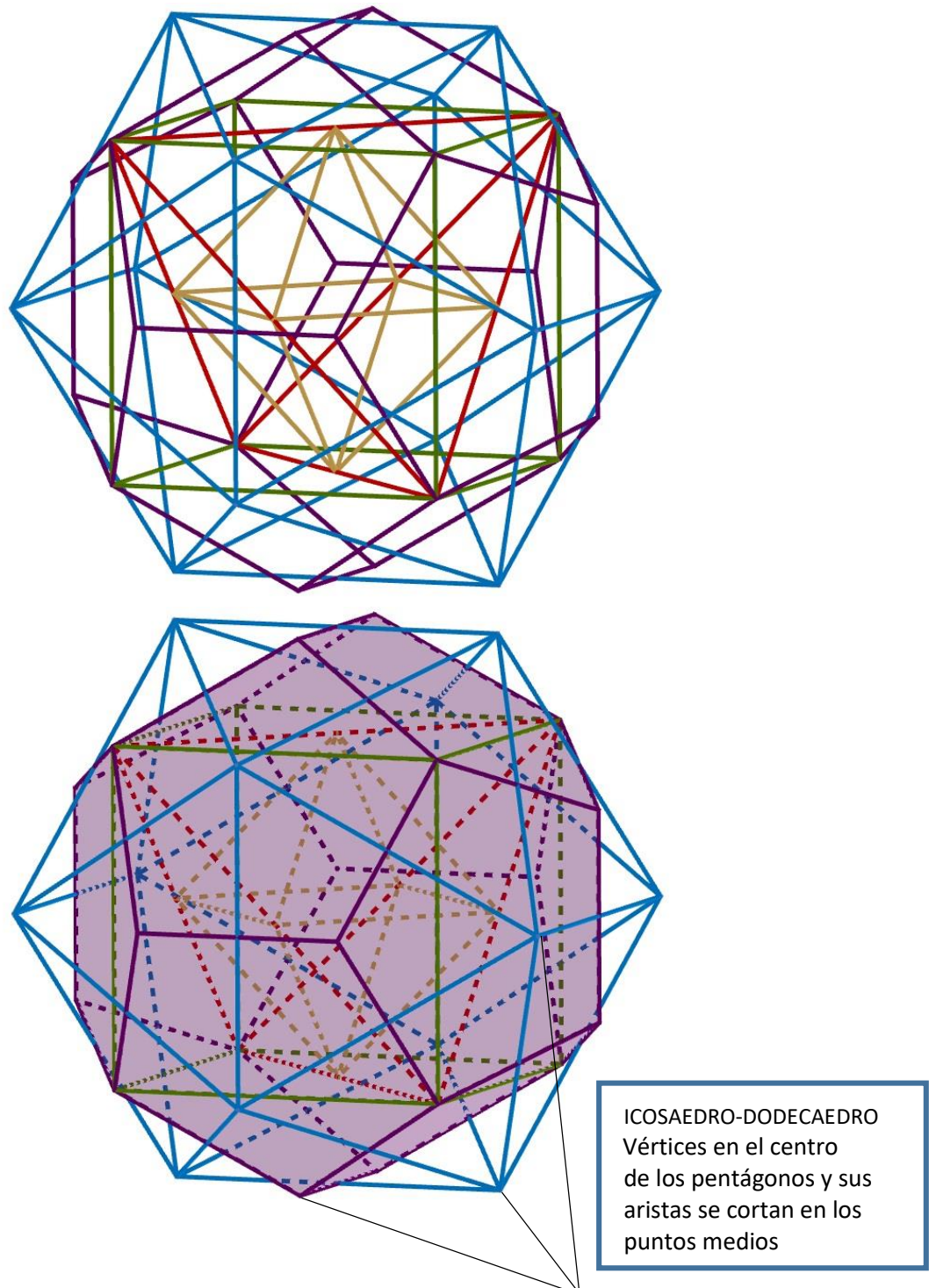


Figura 48. Omnipoliedro. Paso 5 (elaboración propia)

SESIÓN 6_ SIMETRÍAS – CUERPOS DE REVOLUCION

ACTIVIDAD 6.1.- Reflexiones y conclusión

Se abrirá un debate para comentar la actividad realizada en la Sesión anterior sobre la construcción del Omnipoliedro, afianzando conceptos visualización, dualidad y proporción, fórmulas, medidas y relaciones y especialmente llamar su atención sobre los problemas que pueden ser resueltos a través de la geometría del espacio.

Son especialmente destacados y originales los diseños de Leonardo Da Vinci de armazones de poliedros en su libro *“La divina proporción”*.

Se analizará el porqué de las medidas de las barras y sus relaciones entre caras, aristas y vértices.

Con el debate se pretende la reflexión sobre planos de simetría y ejes de rotación como introducción al siguiente punto de estudio. (15 min)

ACTIVIDAD 6.2.- SIMETRÍAS EN CUERPOS GEOMÉTRICOS (40 min)

Simetrías en un cubo (veáse Figura 49)

El cubo o hexaedro es el poliedro regular que más se ha estudiado a lo largo del tiempo, tiene múltiples simetrías.

Antes de comenzar a utilizar Geogebra, contesta a las siguientes preguntas:

¿Cuántos planos de simetría piensas que tiene un cubo? ¿Cuántos ejes de rotación piensas que tiene un cubo?

Usando Geogebra responde a las siguientes cuestiones:

- El cubo presenta dos tipos de planos de simetría, el primero los planos formados por los puntos medios de cada cuatro aristas paralelas, indica de qué color están en el esquema y cuántos existen.
- El segundo tipo ¿cómo se podría determinar y cuántos posee el cubo?.
- En cuanto a los ejes de simetría hay tres tipos: uno de ellos es el determinado por las rectas que unen los puntos medios de cada par de caras opuestas, indica de qué color están en el esquema y cuántos existen.
- Determina una característica que defina a los otros dos tipos, partiendo de los elementos que forman el cubo.

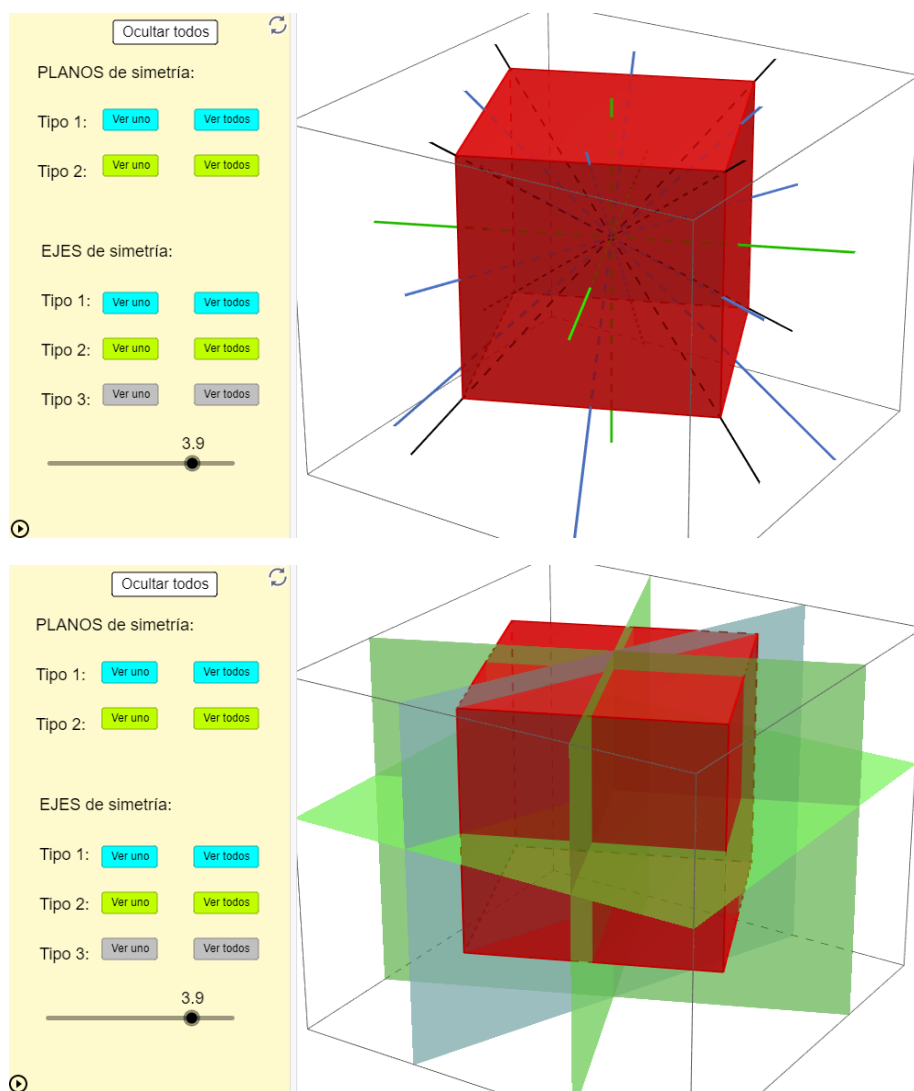


Figura 49. Actividad 6.1. Simetrías de un cubo (Alcaide, F. et al., 2019a)

- Completa la siguiente tabla: (véase Tabla 49)

EJES DE ROTACIÓN - CUBO		
Determinados por...	Orden	Cantidad
Puntos medios de cada par de caras opuestas	4	
	Total	

Tabla 49. Simetrías en un cubo

Simetrías en un tetraedro regular (véase Figura 50)

Antes de comenzar a utilizar Geogebra, contesta a las siguientes preguntas:

¿Cuántos planos de simetría piensas que existen en un tetraedro? ¿Cuántos ejes de rotación piensas que tiene un tetraedro?

Usando Geogebra responde a las siguientes cuestiones:

- Describe las posiciones de los planos de simetría del tetraedro en relación a sus elementos. ¿Cuántos planos de simetría presenta el tetraedro?
- En cuanto a los ejes de simetría hay dos tipos: uno de ellos es el determinado por las rectas que unen cada vértice con el baricentro de su cara opuesta, indica de qué color están en el esquema y cuántos existen. Indica el orden de simetría.

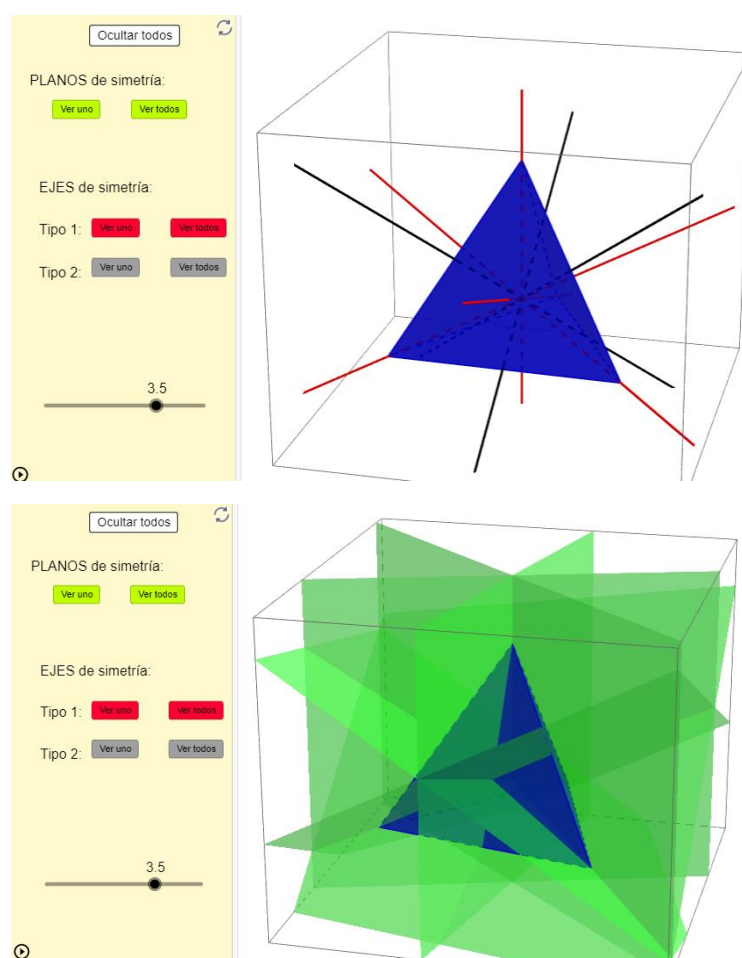


Figura 50. Actividad 6.1. Simetrías de un tetraedro (Alcaide, F. et al., 2019a)

- Completa la siguiente tabla:

EJES DE ROTACIÓN EN EL TETRAEDRO REGULAR		
Determinados por...	Orden	Cantidad
Cada vértice y el baricentro de la cara opuesta	4	
	Total	

Tabla 50. Simetrías en un tetraedro

Simetrías en el octaedro (véase Figura 51)

Antes de comenzar a utilizar Geogebra, contesta a las siguientes preguntas:

¿Cuántos planos de simetría piensas que tiene un octaedro? ¿Cuántos ejes de rotación piensas que tiene un octaedro?

¿Cuántos planos de simetría tiene un octaedro? ¿Y ejes de rotación?

Usa la aplicación y responde:

- El octaedro presenta dos tipos de planos de simetría, el primero los planos formados por los grupos de cuatro aristas consecutivas, contenidas en un mismo plano (plano que divide el octaedro en dos pirámides cuadrangulares). Indica de qué color están en el esquema y cuántos existen.
- Respecto al segundo tipo ¿cómo se podría determinar a razón de los elementos del octaedro y cuántos posee?.
- En cuanto a los ejes de simetría hay tres tipos: uno de ellos es el determinado por las rectas definidas por la unión de los baricentros de cada par de caras opuestas. Estos ejes de rotación son de orden 3. Indica de qué color están en el esquema y cuántos existen.
- Indica y define los otros dos tipos partiendo de los elementos que componen el octaedro. ¿Cuántos son y de qué color aparecen?.

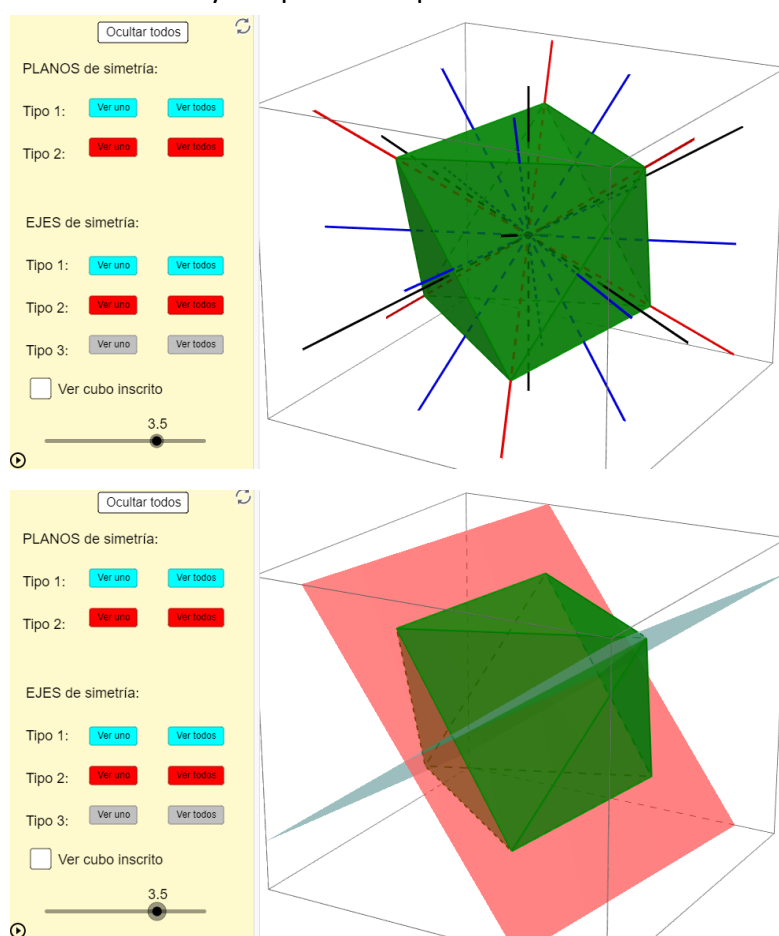


Figura 51. Actividad 6.1. Simetrías de un octaedro (Alcaide, F. et al., 2019a)

- Completa la siguiente tabla (véase Tabla 51):

EJES DE ROTACIÓN EN EL OCTAEDRO		
Determinados por...	Orden	Cantidad
Baricentro de cada par de caras opuestas	3	
	Total	

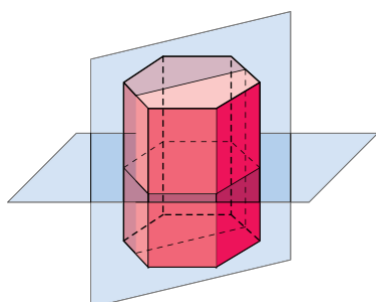
Tabla 51. Simetrías en un octaedro

Para terminar la actividad se abrirá un debate para exponer los resultados y las conclusiones extraídas de los mismos.

ACTIVIDAD 6.2.- EJERCICIO DE SIMETRÍAS.

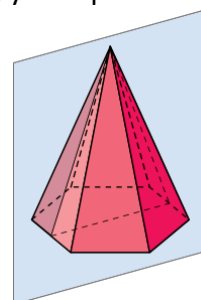
El alumnado realizará los siguientes ejercicios en casa.

9. Dibuja un prisma hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene? ¿Y cuántos tiene una pirámide hexagonal regular? (Colera, J. et al., 2019a).



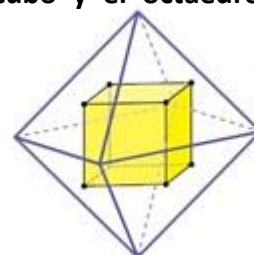
El prisma hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases, y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.

La pirámide hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.



10. Recuerda la relación de dualidad entre el cubo y el octaedro (caras-vértices).

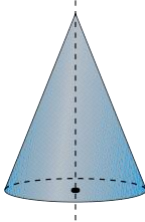
(Colera, J. et al., 2019a).



Basándote en los planos de simetría del cubo, describe todos los planos de simetría del octaedro.

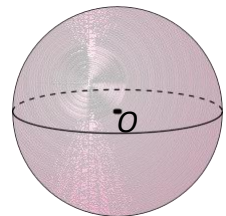
Todos los planos de simetría del cubo inscrito en el octaedro son también planos de simetría del octaedro. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de planos de simetría.

11. ¿Qué planos de simetría tiene un cono? ¿Y una esfera? (Colera, J. et al., 2019a).



Cualquier plano que contiene al eje del cono es plano de simetría de este. Hay, pues, infinitos.

Cualquier plano que contenga al centro de la esfera es un plano de ésta. Hay, pues, infinitos



12. ¿Qué ejes de giro tiene una pirámide hexagonal regular? ¿De qué órdenes son?

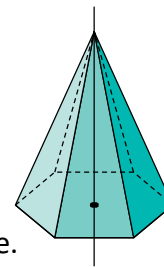
¿Y un prisma hexagonal regular? (No pases por alto algunos de orden 2).

(Colera, J. et al., 2019a).

PIRÁMIDE HEXAGONAL

Hay solo un eje de giro de orden 6.

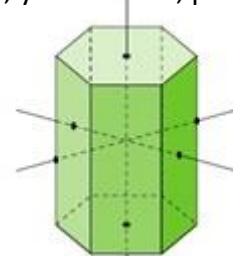
Pasa por el centro de la base y el vértice de la pirámide.



PRISMA HEXAGONAL

Hay un eje de giro de orden 6, el que pasa por el centro de las dos bases.

Hay 6 ejes de giro de orden 2: todos ellos son paralelos a las bases. 3 de ellos pasan por el punto medio de las dos caras laterales opuestas, y los otros 3, por las aristas opuestas.



SESIÓN 7_ ÁREAS DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

El profesor realizará los siguientes ejercicios en la pizarra (véase Figura 52)

1. Dado un cono rectangular (altura=radio) de radio 12 cm, calcular el área total. ¿Cuál es el ángulo del sector circular con el que se construye dicho cono?

- Hallamos la generatriz.

$$g = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16.97 \text{ cm}$$

- Hallamos el área lateral, área base y el área total.

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi * 12 * 16.97 \approx 639.43 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi * 12^2 \approx 452.39 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 639.43 + 452.39 \approx 1091.82 \text{ cm}^2$$

- Hallamos el perímetro de la base del cono.

$$\rightarrow 2 * \pi * 12 = 75.40 \text{ cm}$$

La generatriz mide 16,97 cm, por tanto ese será el radio del sector.

Como sabemos el radio podemos saber lo que mide la circunferencia completa:

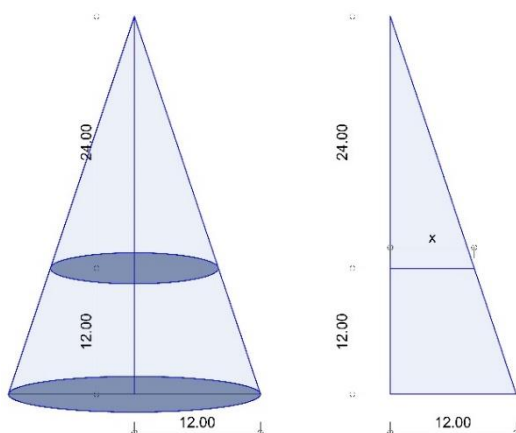
$$l = 2 * \pi * 16.97 = 106.62 \text{ cm}$$

Por tanto, se puede establecer la proporción siguiente **Figura 52. A. 7.1** (elab. propia)

Para determinar el ángulo del sector.

$$\frac{\alpha}{75.40} = \frac{360^\circ}{106.62} \rightarrow \alpha = 254^\circ 58'$$

2. Un cono cuya base mide 12 cm de radio y su altura mide 36 cm se corta con un plano paralelo a la base a 10 cm de la misma. ¿Qué figura se genera?. Calculo su volumen.



Primero calcularemos el radio de la base menor

$$\frac{36 - 12}{x} = \frac{36}{12} \rightarrow x = \frac{24 * 12}{36} = 8 \text{ cm}$$

La figura que se genera es un tronco de cono.

Calculamos el volumen

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO MAYOR}} - V_{\text{CONO MENOR}}$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \pi 12^2 * 36 - \frac{1}{3} \pi 8^2 * 24 = 5428.68 - 1608.50 = 3820.18 \text{ cm}^3$$

ACTIVIDAD 7.2.- EJERCICIOS

El profesor realizará la explicación y las actividades siguientes:

ÁREAS EN LA ESFERA.

El área de una superficie esférica cualquiera es igual al área lateral del cilindro que envuelve dicha esfera. Igualmente ocurre con la relación de las superficies de estos dos cuerpos comprendidas entre distintas secciones planas paralelas. (véase Figura 53)

ARQUIMEDES. ESFERA Y CILINDRO

"El área lateral del cilindro es igual al área de la esfera inscrita".

¿Cuál es el área total del cilindro?

$$4\pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2 = 6\pi r^2$$

$$A_{TOTAL\ CILINDRO} = 1,5 + A_{ESFERA}$$

$$A_{TOTAL\ CILINDRO} = 1,5 + A_{ESFERA}$$

Podemos *comprobar* que lo mismo ocurre con respecto a la relación de los volúmenes de estas figuras:

$$V_{CILINDRO} = 1,5 + V_{ESFERA}$$

Relaciones descubiertas por Arquímedes.

Es más se sabe que: "cualquier figura dibujada en la esfera y proyectada sobre el cilindro dará generar otra figura que tendrá idéntica superficie".

1. Cortamos una esfera de 15 cm de radio por dos planos paralelos que distan del centro 5 y 10 cm., respectivamente. ¿Qué figura se genera?. Calcula su volumen.

El esquema para resolver el ejercicio sería el siguiente: (véase Figura 54)

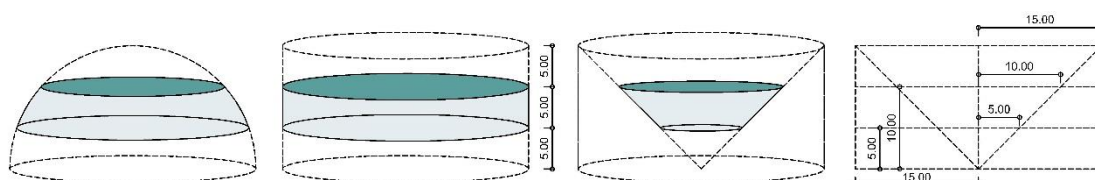


Figura 54. Act. 7.2. (elaboración propia).

Como podemos observar la figura que se genera es una porción de esfera

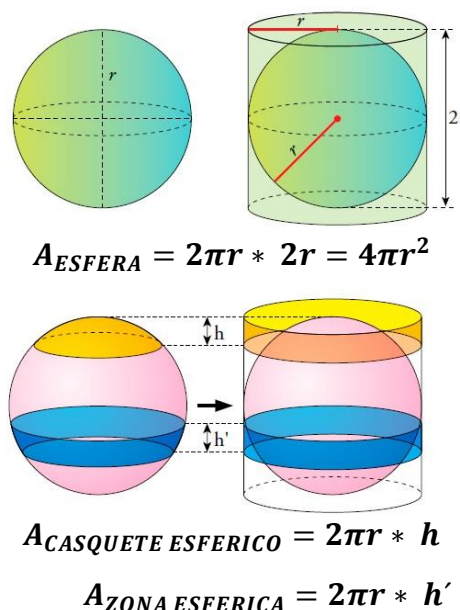


Figura 53. Act. 7.2. (Colera, J. et al., 2019a).

$$V_{\text{PORCIÓN DE ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$$

$$V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} = \pi 15^2 * 5 = 3534,30 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \pi 10^2 * 10 - \frac{1}{3} \pi 5^2 * 5 = 1047,20 - 130,90 = 916,30 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PORCIÓN DE ESFERA}} = 3534,30 - 916,30 = 2618,0 \text{ cm}^3$$

ACTIVIDAD 7.3.- ÁREAS Y VOLÚMENES

El profesor planteará el siguiente ejercicio para resolver en casa, insistiendo en la necesidad de dibujar la figura descrita para la resolución del problema.

1. Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a) Octaedro regular de 12 cm de arista.

b) Prisma de altura 15 cm cuya base es un rombo cuyas diagonales miden 20 y 10 cm. respectivamente.

c) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista básica 6 cm.

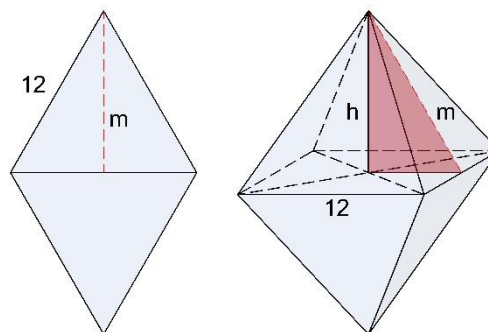
d) Cilindro cuya circunferencia de la base tiene 42 cm de longitud y tiene una altura de 20 cm.

e) Semiesfera de radio 25 cm.

- Para este tipo de ejercicios es importante dibujar la figura para comprender que datos tenemos y que datos debemos calcular.

a) Octaedro regular de 12 cm de arista.

- Primero tenemos que dibujar la figura descrita para ver de qué datos disponemos y cuales debemos calcular.



- Calcularemos la altura de las caras, m, y el área de las mismas.

$$m = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10,39 \text{ cm}$$

$$A_{OCTAEDRO} = 8 * A_{CARA} = 8 * \frac{12 * 10,39}{2} = 498,72 cm^2$$

- El volumen del octaedro será igual al volumen de la pirámide de la base cuadrada multiplicado por dos.

La altura de la pirámide (h) será:

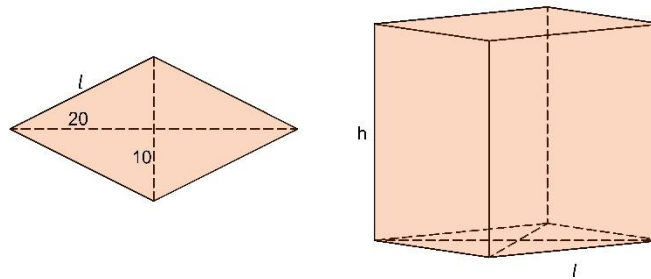
$$h = \sqrt{10,39^2 - 6^2} = 8,48 cm$$

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} A_{BASE} * h = \frac{1}{3} 12^2 * 8,48 = 407,04 cm^3$$

$$V_{OCTAEDRO} = 2 * 407,04 = 814,08 cm^3$$

b) Prisma de altura 15 cm cuya base es un rombo cuyas diagonales miden 20 y 10 cm. respectivamente.

- La figura que habrá que calcular será la siguiente.



- Para comenzar a resolver el problema debemos calcular el lado del rombo l .

$$l = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 cm$$

- Seguidamente calculamos el área de la base y lateral

$$A_{BASES} = 2 * \frac{20 * 10}{2} = 200 cm^2$$

$$A_{LATERAL} = 4 * 11,18 * 15 = 670,80 cm^2$$

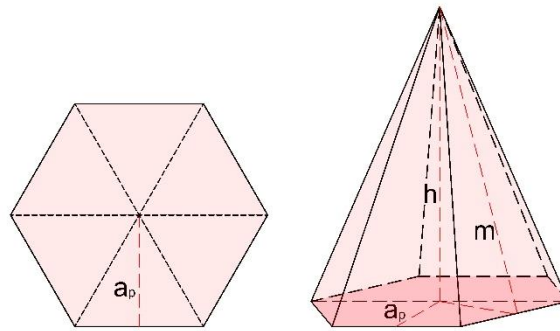
$$A_{TOTAL} = A_{BASES} + A_{LATERAL}$$

$$A_{TOTAL} = 200 + 670,80 = 870,80 cm^2$$

El volumen de la figura será el siguiente:

$$V_{TOTAL} = A_{BASE} * h = 100 * 15 = 1500 cm^3$$

c) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista básica 6 cm.



- Para comenzar debemos calcular la apotema del hexágono que conforma la base a_p , y la apotema de la pirámide m .

$$a_p = \sqrt{6^2 + 3^2} = 5,20 \text{ cm}$$

$$m = \sqrt{15^2 - 3^2} = 14,70 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{6 * 6 * 5,20}{2} = 96,60 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = 6 * \frac{6 * 14,70}{2} = 264,60 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASES} + A_{LATERAL}$$

$$A_{TOTAL} = 96,60 + 264,60 = 361,20 \text{ cm}^2$$

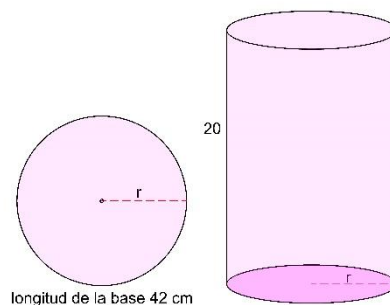
Para calcular el volumen debemos calcular la altura de la pirámide

$$h = \sqrt{14,70^2 - 5,20^2} = 13,74 \text{ cm}$$

$$V_{TOTAL} = \frac{1}{3} A_{BASE} * h = \frac{1}{3} 96,60 * 13,74 = 442,43 \text{ cm}^3$$

d) Cilindro cuya circunferencia de la base tiene 42 cm de longitud y tiene una altura de 20 cm.

- Primero debemos calcular el radio de la base, sabemos que la longitud es 42 cm, por tanto, el radio será:



$$l = 2 * \pi * r \rightarrow r = \frac{l}{2 * \pi} = \frac{42}{2 * \pi} = 6,68 \text{ cm}$$

- Ahora calcularemos el área

$$A_{BASES} = 2 * \pi * r^2 = 2 * \pi * 6,68^2 = 280,37 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = 42 * 20 = 840 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 280,37 + 840 = 1120,37 \text{ cm}^2$$

$$V_{TOTAL} = A_{BASE} * h = 140,32 * 20 = 2806,40 \text{ cm}^3$$

e) Semiesfera de radio 25 cm.

$$A_{SEMIESFERA} = \frac{4 * \pi * r^2}{2} = \frac{4 * \pi * 25^2}{2} = 3927 \text{ cm}^2$$

$$V_{SEMIESFERA} = \frac{\frac{4}{3} * \pi * r^3}{2} = \frac{\frac{4}{3} * \pi * 25^3}{2} = 32725 \text{ cm}^3$$

ACTIVIDAD 7.4.- EJERCICIOS ALTAS CAPACIDADES

Se planteará el siguiente ejercicio para el alumnado de altas capacidades, que realizará en clase si termina el resto de actividades antes que sus compañeros o en casa.

1. Dado un prisma triangular regular de base 10 cm de lado y altura 12 cm, lo cortamos por un plano que pasa por el punto medio de dos de sus aristas y por otra arista opuesta.

Hallar la superficie total y el volumen de cada una de las porciones resultantes. (véase Figura 56).

¿Qué figuras resultan del corte?

- Para comenzar el problema debemos dibujar la figura (véase Figura 55)

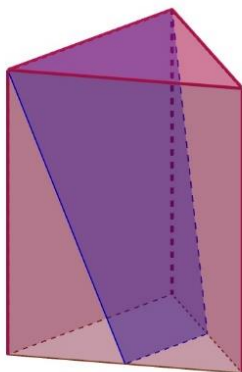
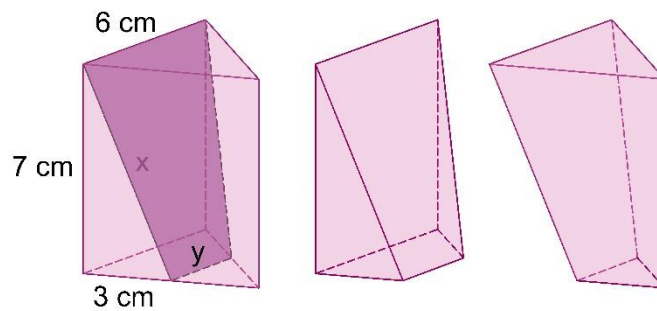


Figura 55. Prisma triangular – intersección de un plano determinado. (elaboración propia).

- Podemos observar las dos figuras que se generan tras el corte.

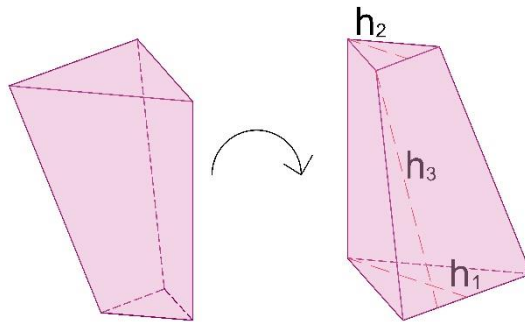


- Tenemos que calcular las longitudes de los cortes del plano, x e y .

$$x = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7,61 \text{ cm}$$

$$y = 3 \text{ cm}$$

- Observamos que una de las figuras que se genera es un tronco de pirámide, la giramos para verlo más claro.



- Calculamos el área del tronco de pirámide. Para ello debemos conocer las siguientes alturas:

Altura de la base (triángulo grande), h_1

Altura de la base (triángulo pequeño), h_2

Altura lateral h_3

$$h_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,20 \text{ cm}$$

$$h_2 = \sqrt{3^2 - 1,5^2} \approx 2,60 \text{ cm}$$

$$h_3 = \sqrt{7,61^2 - 1,5^2} = 7,46 \text{ cm}$$

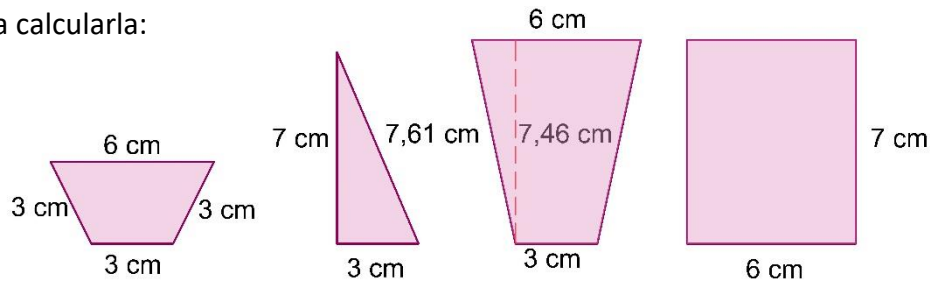
- Calculamos las áreas

$$A_{BASES} = \frac{6 * 5,20}{2} + \frac{3 * 2,60}{2} = 19,50 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = 2 * \frac{6+3}{2} * 7 + \frac{6+3}{2} * 7,46 = 96,57 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 19,50 + 96,57 = 116,07 \text{ cm}^2$$

- Calculamos el área de la otra mitad de la figura, vamos a desarrollar sus caras para calcularla:



$$A_{CARA 1} = \frac{6 \cdot 5,20}{2} - \frac{3 \cdot 2,60}{2} = 11,70 \text{ cm}^2$$

$$A_{CARA 2} = \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,50 \text{ cm}^2$$

$$A_{CARA 3} = \frac{6 + 3}{2} \cdot 7,46 = 23,50 \text{ cm}^2$$

$$A_{CARA 4} = 6 \cdot 7 = 42 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 11,70 + 2 \cdot 10,50 + 23,50 + 42 = 98,20 \text{ cm}^2$$

- Para el cálculo del volumen de tronco de pirámide restaremos al volumen de la pirámide grande el volumen de la pirámide pequeña.

- Comenzaremos calculando las alturas de ambas pirámides. Como sabemos que los triángulos que se forman entre las apotemas, las alturas y las bases son semejantes, lo utilizaremos para calcular las alturas.

$$\frac{z}{0,87} = \frac{z + 7,46}{1,73} \rightarrow 1,73 z = 0,87 z + 6,49 \rightarrow z \approx 7,46$$

$$x = \sqrt{7,46^2 - 0,87^2} = 7,40 \text{ cm}$$

Si observamos el triángulo, vemos que del triángulo grande es el doble de la del pequeño, por tanto, la y también medirá 7.40 cm.

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5,20}{2} \cdot (2 \cdot 7,40) - \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2,60}{2} \cdot 7,40 =$$

$$= 76,96 - 9,62 = 67,34 \text{ cm}^3$$

- Para calcular el volumen de la otra figura, tenemos que restar al volumen del cuerpo completo el volumen del tronco de pirámide.

$$V_{PRISMA} = \frac{6 \cdot 5,20}{2} \cdot 7 = 109,20 \text{ cm}^3 \rightarrow V = 109,20 - 67,34 = 41,86 \text{ cm}^3$$

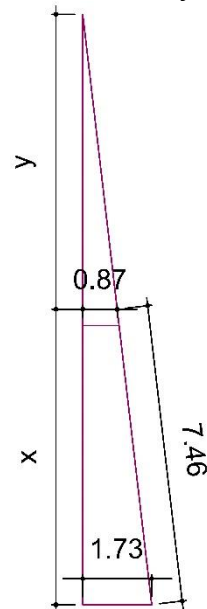


Figura 56. Figuras esquemas del problema. (elaboración propia).

SESIÓN 8_ ÁREAS Y SUPERFICIES

ACTIVIDAD 8.1.- ÁREAS Y SUPERFICIES 2

1. En un vaso vacío de 5 cm de radio, el camarero echa 4 cubitos de hielo. Cada cubito tiene aristas de 4 cm. ¿A qué altura subirá el agua en el vaso cuando se derritan los cubitos?

- En primer lugar debemos calcular el volumen de los cubitos.

$V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$ cada cubito; como hay 4 cubitos el volumen total será:

$$V = 4 \times 64 = 256 \text{ cm}^3$$

El vaso es cilíndrico, por tanto el volumen del mismo será:

$$V = \pi R^2 h = \pi 5^2 h = 256 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{256}{\pi 5^2} = 3.26 \text{ cm}$$

- El vaso se llenará de agua hasta una altura de 3.26 cm.

2. Si queremos cubrir una de las caras de una piscina de 7 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de profundidad con baldosas cuadradas de 20 cm de lado. ¿Cuántas baldosas harán falta para ello?.

- Calculamos el área a de las paredes de la piscina a cubrir por las baldosas.

$$A_{PISCINA} = A_{BASE} + 2 A_{LATERAL 1} + 2 A_{LATERAL 2} A_p = 7 \times 5 \times 2 = 70 \text{ m}.$$

$$A_{PISCINA} = 7 * 5 + 2(7 * 2) + 2(5 * 2) = 83 \text{ m}$$

- Posteriormente calculamos el área de cada baldosa.

$$A_{BALDOSA} = 0,2 * 0,2 = 0,04 \text{ m}$$

- El número total de losetas será:

$$\frac{A_{PISCINA}}{A_{BALDOSA}} = \frac{83}{0,04} = 2075 \text{ baldosas}$$

3. Calcula el área y el volumen de los cuerpos geométricos siguientes: (véase Figura 57)

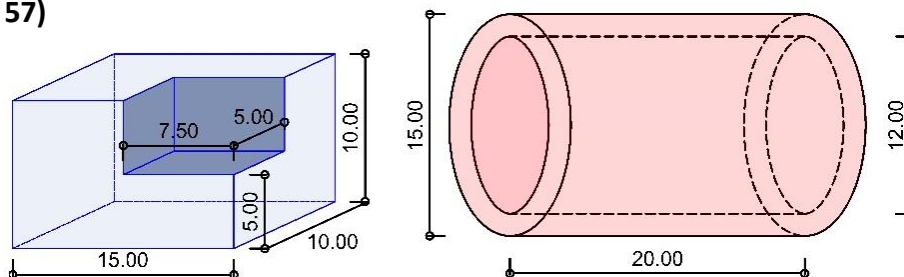


Figura 57. Cuerpos geométricos (elaboración propia).

a) Comenzamos con el cálculo de áreas del primer cuerpo geométrico. Antes de comenzar este tipo de ejercicios, debemos pensar como resulta más sencillo el cálculo de sus áreas y volúmenes. En determinadas ocasiones, es más sencillo calcular el área y

volumen de la figura completa y restarle posteriormente el área y volumen del cuerpo geométrico que le hemos quitado.

- Para ello descomponemos la figura en dos prismas.

Calculamos el área del prisma mayor

$$A_{PRISMA MAYOR} = (2 * 15 * 10) + (2 * 15 * 10) + (2 * 10 * 10) = 300 + 300 + 200 = 800 \text{ cm}^2$$

- Calculamos el área del prisma menor.

$$A_{PRISMA MENOR} = (2 * 7,5 * 5) + (2 * 7,5 * 5) + (2 * 5 * 5) = 75 + 75 + 50 = 200 \text{ cm}^2$$

- El área total será la diferencia entre las áreas de los dos cuerpos geométricos.

$$A_{PRISMA} = A_{PRISMA MAYOR} - A_{PRISMA MENOR} = 800 - 200 = 600 \text{ cm}^2$$

- El volumen se calcula igualmente.

$$V_{PRISMA MAYOR} = A_{BASE} * h = 15 * 10 * 10 = 1500 \text{ cm}^3$$

$$V_{PRISMA MENOR} = A_{BASE} * h = 7,5 * 5 * 5 = 187,50 \text{ cm}^3$$

- Por tanto, el volumen total será la diferencia entre el volumen del prisma mayor y el menor.

$$V = 1500 - 187,50 = 1312,50 \text{ cm}^3$$

- b) En este caso, descomponemos el cuerpo geométrico en dos cilindros.

$$A_{CILINDRO EXTERIOR} = 2 \pi R h + 2 \pi R^2 = 2 \pi 15 20 + 2 \pi 15^2 = 1884,96 + 1413,72 = 3298,68 \text{ cm}^2$$

$$A_{CILINDRO INTERIOR} = 2 \pi R h + 2 \pi R^2 = 2 \pi 12 20 + 2 \pi 12^2 = 1507,20 + 904,75 = 2411,95 \text{ cm}^2$$

- El área total del cuerpo geométrico será la resultante de la diferencia entre el área del cilindro exterior e interior.

$$A = 3298,68 - 2411,95 = 886,73 \text{ cm}^2$$

$$V_{CILINDRO EXTERIOR} = A_{BASE} * h = \pi R^2 h = \pi 15^2 20 = 14157 \text{ cm}^3$$

$$V_{CILINDRO INTERIOR} = A_{BASE} * h = \pi r^2 h = \pi 12^2 20 = 9047,81 \text{ cm}^3$$

- Igualmente, el volumen total del cuerpo geométrico será la resultante de la diferencia entre el volumen del cilindro exterior e interior.

$$V = 14157 - 9047,81 = 5109,19 \text{ cm}^3$$

4. Se introducen tres balones de fútbol de 22 cm de diámetro, dentro de un tubo cilíndrico en el que encajan hasta el borde. Hallar el volumen de la parte vacía del tubo. (véase Figura 57).

- Para comenzar debemos calcular la altura del cilindro.

$$h = 22 * 3 = 66 \text{ cm}$$

- Posteriormente calculamos el volumen del cilindro

$$V_{CILINDRO} = A_{BASE} * h = \pi R^2 h = \pi 11^2 66 = 25088,82 \text{ cm}^3$$

- Calculamos el volumen de los tres balones

$$V_{BALONES} = 3 * \frac{4}{3} \pi R^3 = 3 * \frac{4}{3} \pi 11^3 = 3 * 5575,29 = 16725,88 \text{ cm}^3$$

El volumen de la parte vacía será la diferencia entre los 2 volúmenes

$$V_{PARTE VACÍA} = V_{CILINDRO} - V_{BALONES}$$

$$V_{PARTE VACÍA} = 25088,82 - 16725,88 = 8362,94 \text{ cm}^3$$

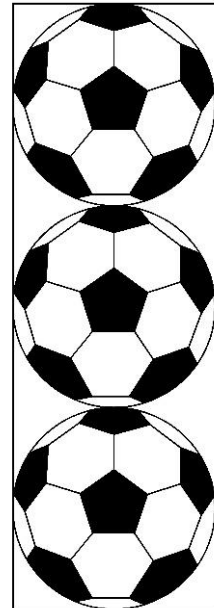


Figura 57. Esquema. (elab. propia).

ACTIVIDAD 8.2.- EL GLOBO TERRÁQUEO

El profesor explicará con ayuda de Geogebra <https://www.geogebra.org/m/beh2vwm9#material/Zk25FNfr> los conceptos de Ecuador, meridianos, trópicos, polos y los elementos geométricos de la esfera terrestre, casquetes, hemisferios y husos horarios, así como las coordenadas geográficas (longitud y latitud). (véase Figura 58)

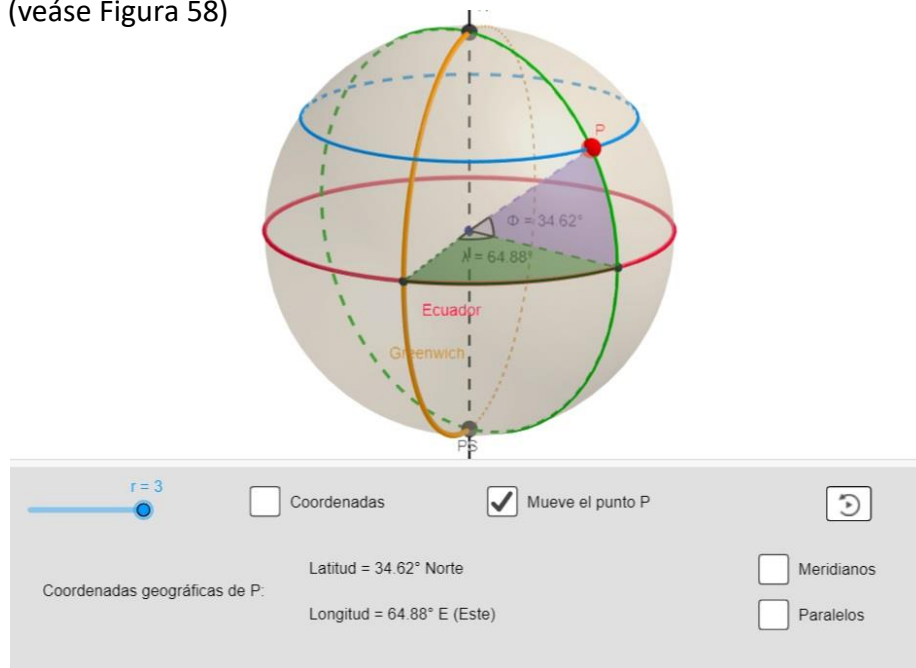


Figura 58. Actividad 8.2. El globo terráqueo (Geogebra)

ACTIVIDAD 8.3.- COORDENADAS GEOGRÁFICAS

El alumnado realizará los siguientes ejercicios en casa:

1. Si sabemos que en el huso 0 son las 4 a.m. Determinar:

- La hora en el cuarto huso al E.
- La hora en el segundo huso al O.

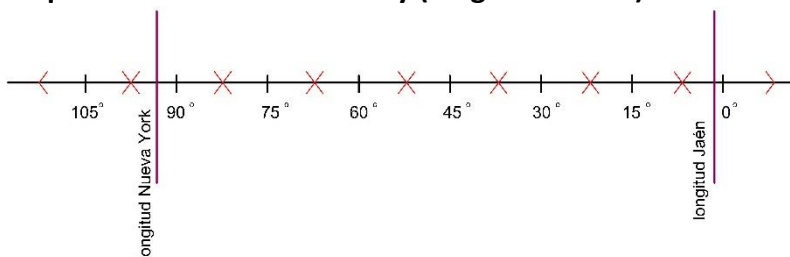
En el huso 4° E son cuatro horas más, es decir, las 8 a.m.

En el huso 5° O son dos horas menos, es decir, las 2 a.m.

Si en Jaén (longitud 3°) son las 8 de la mañana, utilizando el esquema adjunto, ¿Qué hora es en Nueva York?

2. Sabemos que en Bilbao (longitud 3° O) son las 9 de la mañana. Utilizando el siguiente esquema, indica qué hora será en Monterrey (longitud 100° O).

Utilizando el esquema vemos que en Nueva York, hay 6 horas menos que en Jaén, por tanto, allí serán las 3 de la mañana.



3. Un avión sale de Málaga (Málaga está en el primer huso al E) para volar a Nueva York (que está en el quinto huso al O). Si el avión sale de Málaga a las 9 a.m, y tarda 10 horas en llegar ¿a qué hora llegará a Nueva York?

Como Málaga está en el huso 1 al E y Nueva York en el huso 5 al Oeste, la diferencia horaria entre ambas ciudades es de 6 horas, 5+1

Por tanto, si el avión sale a las 9 a.m

9 a.m + 10 horas=19 horas → 7 p.m hora en Málaga

7 p.m – 6 horas= 1 p.m. → En Nueva York serán las 1 p.m

4. El metro se definía antiguamente como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Sabiendo que el radio de la Tierra des 6371 Km., comprueba si la definición es correcta.

Como el radio de la Tierra es 6371Km, el cuadrante del meridiano será:

$$CC = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi \cdot 6371}{4} = 10007,54 \text{ Km} = 10007540 \text{ m}$$

Calculamos la diezmillonésima parte de esta cantidad

$$\frac{10007540}{10000000} = 1,000754 \text{ m}$$

Por tanto, la definición es correcta.

SESIÓN 9_ COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Esta actividad se llevará a cabo en el aula de informática, comenzará con la explicación del profesor sobre el funcionamiento del programa Google Earth Education y la utilidad de este programa para el aprendizaje y enseñanza. Se les explicará que es un programa de información geográfica de Google, que es muy útil no sólo para aprender geografía sino como herramienta de apoyo para el aprendizaje de otras materias.

El programa te permite ir a un lugar específico del planeta, mostrándote imágenes en 3D, con la posibilidad de habilitar o deshabilitar esta opción. Podrás desplazarte entre las distintas ciudades y visitar edificios y espacios de interés midiendo distancias entre distintos puntos. Además, el programa ofrece datos de latitud y longitud (Véase Figura 59).

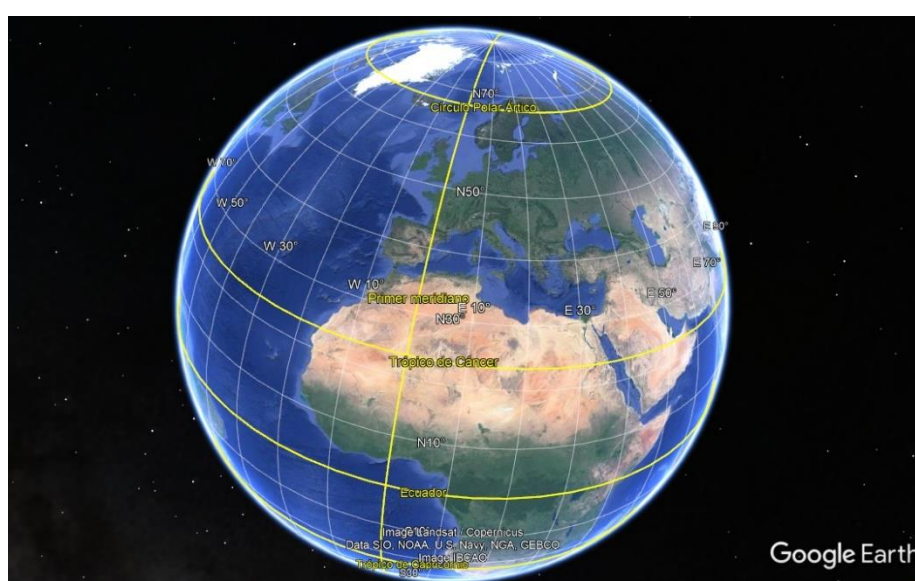


Figura 59. El globo terráqueo (Google Earth)

Organizamos a los alumnos en grupos de 4 y planteamos el siguiente ejercicio para desarrollarlo en la sesión 9.

El profesor, realizará a modo de ejemplo, lo que se pretende conseguir con esta actividad. Mostrará al alumnado el funcionamiento del programa y las posibilidades de aprendizaje que posee, así partiendo de la imagen de dos edificios la actividad consistirá en lo siguiente:

Dadas una pareja de imágenes de edificios, y sus coordenadas de latitud y longitud:

- Localizar el edificio en Google Earth.
- Identificar y hacer una breve descripción de las características de los sólidos y formas geométricas identificadas en los mismos.
- Medir la distancia entre ambos puntos, mediante el programa.

Se valorará igualmente, la aportación o descubrimiento de edificios distintos a los propuestos, que presenten alguna característica geométrica de forma o volumen que sea destacable por alguna razón, según lo aprendido.

Una vez abierto el programa, es muy sencilla la localización de cualquier punto, conocidas su dirección o coordenadas geográficas. Para ello, es necesario introducir las coordenadas la latitud y longitud, separadas por comas en el buscador en el lugar señalado con un círculo rojo en la imagen y automáticamente el programa te dirige la zona definida por esas coordenadas.

Una vez definido el punto, es posible etiquetarlo mediante el icono señalado con el círculo verde y el sitio quedará grabada en la aplicación para posteriores usos, pudiendo ser recuperada en la ventana "Sitios", señalada en la imagen con un círculo azul (véase Figura 60).

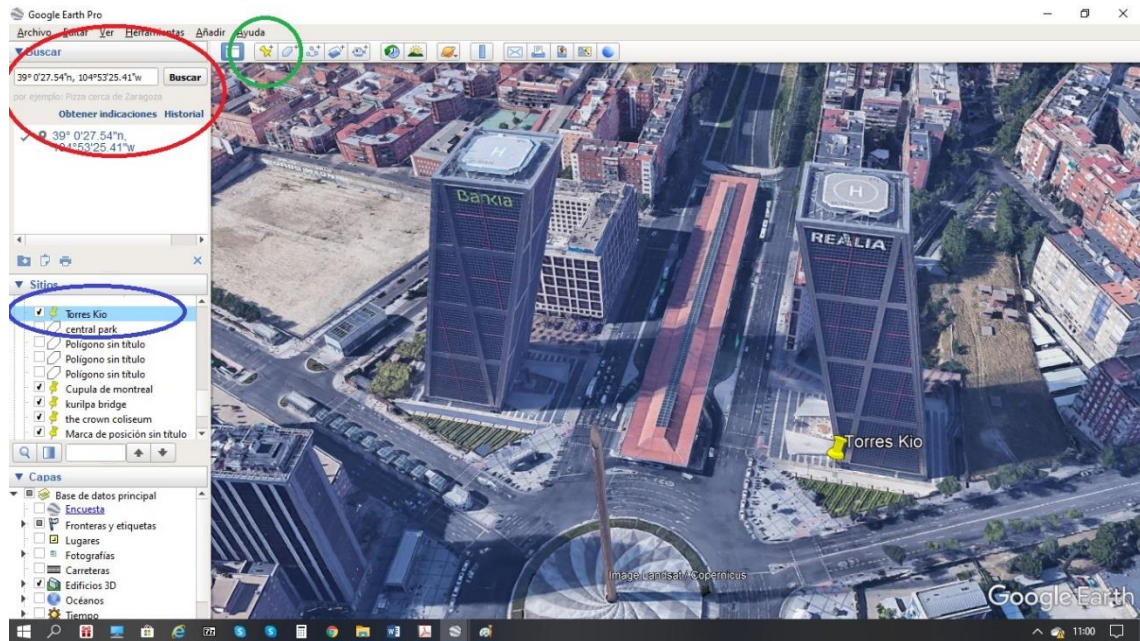
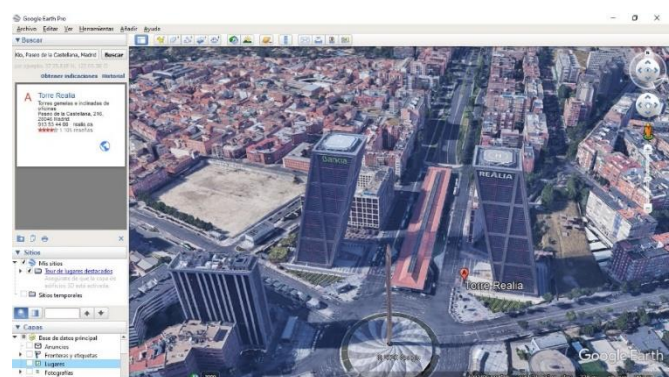
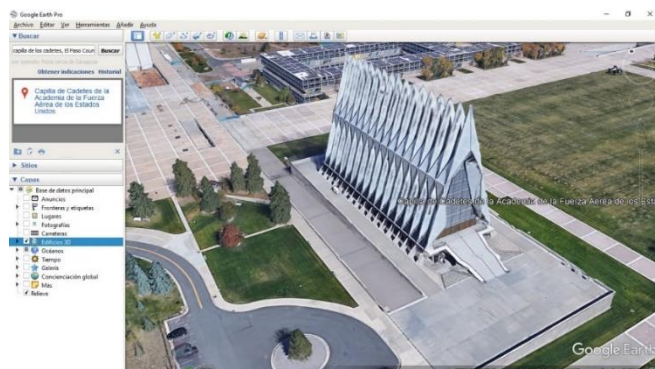


Figura 60. Localización de un punto geográfico (Google Earth)

Por ejemplo la localización de estos 2 edificios, sería la siguiente (véase Figura 61):



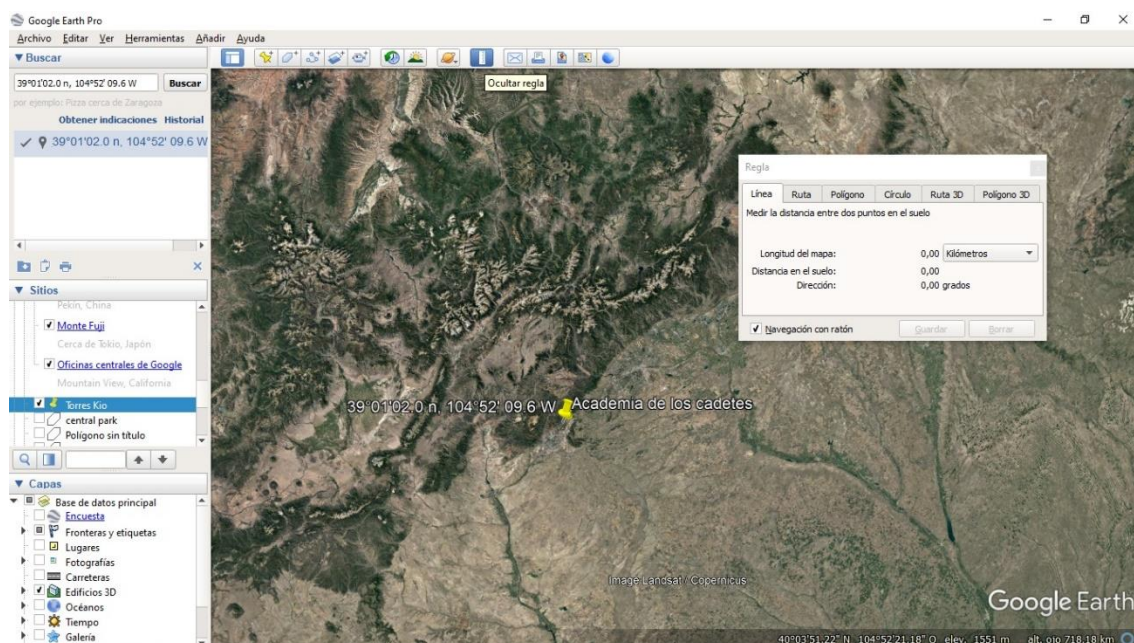


Prisma Triangular
Capilla de los cadetes de la academia
de la fuerza aérea (EEUU)

Imagen Google Earth

Figura 61. Imágenes de edificios (Google Earth)

Para medir la distancia entre estas dos ubicaciones, basta con pulsar el icono de medir e introducir los dos puntos grabados en la ventana “Sitios” (véase Figura 62)



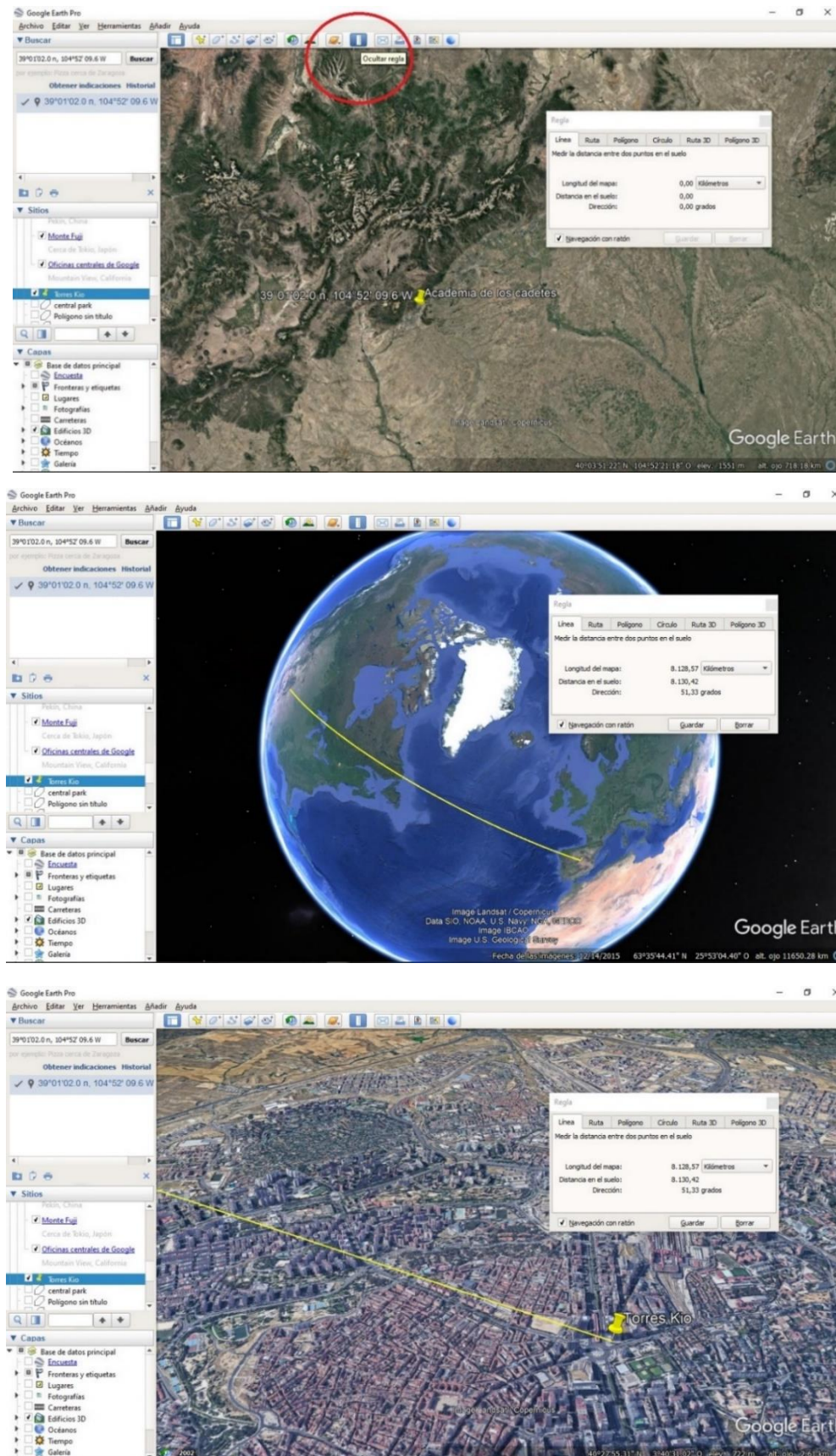


Figura 62. Imágenes de medición de distancias (Google Earth)

En la ventana auxiliar aparecen las distancias entre los puntos.

ACTIVIDAD 9.1.- GOOGLE EARTH

Dadas las siguientes coordenadas geográficas de parejas de edificios deberá hacer lo siguiente:

Tras localizar los edificios propuestos mediante Google Earth, el alumnado deberá:

- Determina la distancia existente entre cada par de edificios.
- Identificar y hacer una breve descripción de las características de los sólidos y formas geométricas identificadas en los mismos.
- Descubre edificios distintos a los propuestos que presenten alguna característica geométrica de forma o volumen que sea destacable por alguna razón, según lo aprendido.

Se deberá ir tomando nota sobre el proceso seguido para la resolución de la actividad, al finalizar la misma un miembro del grupo deberá exponerla ante sus compañeros.

Las parejas de edificios vienen definidas en la siguiente tabla (véase Tabla 52):

	EDIFICIOS	LATITUD	LONGITUD
GRUPO 1	Torres Kio (Madrid)	40°27'59.63"N	3°41'18.07"W
	Academia de los Cadetes (Colorado)	39° 0'27.54"N	104°53'25.41"W
GRUPO 2	Torre Prisma (Ciudad de México)	19°26'9.68"N	99°12'44.41"W
	Oficina Municipal Leyweg La Haya (Holanda)	52° 2'40.65"N	4°16'51.51"E
GRUPO 3	Entrada del Museo del Louvre (París)	48°51'39.02"N	2°20'9.45"E
	Catedral de Maringa. Paraná (Brasil)	23°25'35.75"S	51°56'20.09"W
GRUPO 4	Edif. en Bratislava (Eslovaquia)	48° 9'15.17"N	17° 6'53.83"E
	Spaceship Earth de Epcot, en Orlando	28°22'30.14"N	81°32'57.92"W
GRUPO 5	Pirámide de Keops. El Cairo (Egipto)	29°58'40.07"N	31° 8'5.31"E
	Biblioteca de la Universidad de Aberdeen, Escocia	57° 9'54.95"N	2° 6'20.70"W
GRUPO 6	Biblioteca de Minsk. Bielorrusia	53°55'51.90"N	27°38'46.15"E
	Inst.Tecnológico Eduardo Torroja (Madrid)	40°28'21.77"N	3°40'14.87"W
GRUPO 7	Catedral de Río de Janeiro	22°54'39.62"S	43°10'50.65"W
	Frankfurt Westhafen Tower)	25° 0'24.33"N	48°12.45"W

Tabla 52. Actividad 9.1. Latitud y longitud. (elaboración propia)

Las siguientes imágenes se mostrarán cuando se desarrolle la exposición de la actividad, no se mostrará al alumnado inicialmente, ya que ellos deberán descubrir el edificio mediante el programa.

Edificios propuestos. (véase Figura 63)



Torre Prisma (Ciudad de México)



Oficina Municipal Leyweg La Haya (Holanda)



Entrada del Museo del Louvre (París)
(París)



Proyecto triangular de Herzog & de Meuron



Edificio en Bratislava (Eslovaquia)



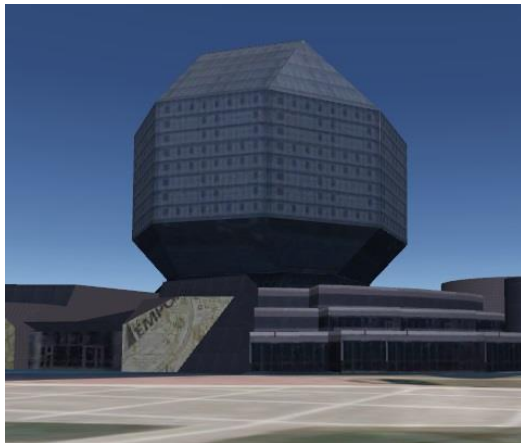
Spaceship Earth de Epcot, en Orlando



Pirámide de Keops. El Cairo (Egipto)



Biblioteca de la Universidad de Aberdeen, en Escocia.



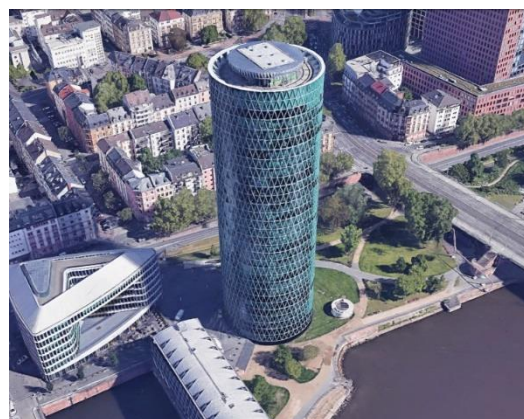
Biblioteca de Minsk. Bielorrusia



Inst.Tecnológico Eduardo Torroja (Madrid)



Catedral (Río de Janeiro)



Frankfurt Westhafen Tower

Figura 63. Edificios propuestos (Google Earth)

SESIONES 10, 11, 12 Y 13

Las actividades se va a dividir en 4 sesiones. Lo que se pretende con las distintas tareas es proporcionar al alumnado una estrategia que mejore la visualización espacial, área de gran importancia adquirida en gran medida mediante la geometría, transmitir la necesidad de aprender a ver, a imaginar y a transformar las ideas abstractas que tenemos en la mente en objetos geométricos espaciales.

La geometría, es una disciplina que nos posibilita explorar el espacio tridimensional existente en nuestro entorno, y el sentido espacial es una herramienta muy potente para comprender el mundo, la naturaleza, los espacios...

Igualmente, se pretende que el alumnado imagine y visualice cuándo y cómo un conjunto de planos, que puede estar determinado por aristas y vértices, sin necesidad de que las caras sean superficies que delimiten el espacio, tienen el potencial de generar lugares habitables y cómo esa obviada condiciona cada una de los momentos de nuestras vidas.

En conclusión se trata de demostrar al alumnado que vivimos en un universo repleto de formas y espacios tridimensionales, presentes en objetos y en elementos de la Naturaleza. Este juego de espacios evoluciona desde las formas esenciales sólidas hasta los espacios más complejos, yendo de lo concreto a lo abstracto.

Además en estas sesiones, se pretende que el alumnado tome conciencia del carácter interdisciplinar y práctico del saber matemático, se fomentará el aprendizaje significativo, la crítica, la realización de hipótesis, la investigación y la reflexión.

SESIÓN 10_ PRIMERA APROXIMACIÓN. EL BALÓN DE FÚTBOL

La tarea comenzará con las siguientes preguntas:

1. ¿Es redondo un balón de fútbol?
2. Construye una forma geométrica análoga a la que tiene un balón de fútbol ¿De qué polígonos está formado y como se unen entre sí? Los recursos que se pondrán a disposición del alumnado serán los definidos en el plan de clase.
3. ¿Cumple este poliedro la fórmula de Euler?
4. ¿Por qué se utiliza este modelo para el balón?
5. ¿Podéis investigar que es Jabulani y qué problemas ocasionó?

Lo que se pretende con esta tarea es que el alumnado experimente y plantee hipótesis sobre las cuestiones planteadas. El objetivo principal es que piensen y encuentren que herramientas matemáticas podrían tener para resolver el problema.

El alumnado trabajará en primer momento individualmente, y en unos minutos se agruparán en grupos de 4. Para comenzar, algunos partirán de la premisa de que es redondo, pero pronto empezarán a razonar y concluirán que no es completamente redondo, que está formado por polígonos. En este punto comenzarán a debatir si está formado sólo por pentágonos o por pentágonos y hexágonos y deberán llegar a la conclusión de que está formado por la combinación de ambos polígonos. Al tener aire

en su interior que comprime la superficie de sus caras, el balón presenta esa apariencia esférica, pero si tenemos un balón un poco desinflado podrá apoyarse en el suelo sobre una de sus caras.

Se pretende que den la solución mediante la construcción del balón (bien a través de las plantillas de polígonos o bien mediante el kit de construcción de barras y uniones facilitado), para ello tendrán que visualizar como tienen que unirse esos polígonos para generar el volumen buscado y llevar a cabo posteriormente el conteo de las caras cuestionado.

Igualmente sería importante que fueran capaces de llegar a la conclusión de que en realidad este poliedro es un icosaedro truncado.

El icosaedro truncado es un poliedro formado por 12 pentágonos y 20 hexágonos, en la tabla adjunta se enumeran el número de cada uno de los polígonos que lo componen, así como el número de aristas. El número de vértices es 60. (véase Tabla 53)

ICOSAEDRO TRUNCADO	Nº de polígonos	Nº de aristas	Nº total de aristas
Pentágonos	12	5	60
Hexágonos	20	6	120
TOTAL			180
	Considerando que dos polígonos comparten aristas el total habría que considerar la mitad de aristas		90

Tabla 53. Icosaedro Truncado (elaboración propia)

En la siguiente cuestión se les pregunta si cumple el poliedro la fórmula de Euler. Deberán comprobar lo siguiente:

$$V - A + C = 2$$

Siendo:

V= Número de vértices = 60

A= Número de aristas = 90

C= Número de Caras = 32

La comprobación de la fórmula es la siguiente:

$$60 - 90 + 32 = 2$$

Por lo tanto, cumple la fórmula de Euler.

La solución a la tercera pregunta sería que existen otros poliedros más esféricos que el icosaedro truncado, por ejemplo el rombicododecaedro es un sólido arquimediano que tiene 62 caras y 120 aristas, pero hay que tener en cuenta que las aristas son costuras a realizar, por tanto, su fabricación es más cara. Esa es la razón por la que se utilizan este tipo de poliedros para estos objetos, es decir, la solución de la cuarta pregunta.

La idea es que intuyan, como más adelante le explicará el profesor, que conforme se vaya añadiendo caras al poliedro, éste será cada vez más esférico y a la vez más rígido y menos deformable. (Primera aproximación a las cúpulas geodésicas).

En cuanto a la pregunta sobre El Jabulani es un balón que Nike diseñó para la Copa del Mundial FIFA 2010 de Sudáfrica, estaba realizado mediante una tecnología innovadora. El balón estaba recubierto por 8 paneles 3-D EVA formados anteriormente con forma esférica y paneles TPU moldeados conjuntamente. Como resultado se consiguió un balón perfectamente redondo pero, parece ser que era muy impredecible ya que tras ser golpeado con fuerza, hacía una parábola ascendente para después caer prácticamente a plomo, lo que causaba muchos problemas a los porteros.

En el Anexo 3 se desarrolla el Plan de clase de estas actividades.

SESIÓN 11_ TRANSFORMACIÓN DE POLIEDROS. CONDICIONES DE CURVATURA Y RIGIDEZ. PRIMERA APROXIMACIÓN A LAS CÚPULAS GEODÉSICAS

La tarea (desarrollada en el plan de clase) comenzará con estas preguntas.

1. ¿Crees que es el poliedro de la sesión anterior el más esférico que se puede construir?
2. ¿Cómo podríamos hacer para que este poliedro fuera más esférico? Constrúyelo. Se dispondrán de recursos definidos en el Apéndice I.
3. ¿Cómo podríamos hacer para que el poliedro tuviera mayor rigidez y fuera menos deformable?

Con esta tarea se quiere conseguir que el alumnado plantee distintas hipótesis como solución a las cuestiones. Se pretende que mediante ensayo y error sean conscientes de que a medida que vamos dividiendo sus caras se construye un poliedro cada vez más esférico y cada vez más estable y rígido.

Con el material proporcionado (kit de barras y uniones esféricas), deben llegar a la conclusión de que la superficie más parecida a un balón de fútbol y que sea cada vez más esférica es la que se genera al dividir cada poliedro (pentágono y hexágono) en porciones mediante radios internos que unan el centro de cada uno de ellos con sus vértices.

Además, para darle curvatura, los centros de las figuras deberán ser desplazados hacia afuera como si tiráramos de ellos con un elástico, desplazándose hacia el exterior de la circunferencia circunscrita en el mismo (como explicaré en la siguiente sesión, es la estructura utilizada para realizar una cúpula geodésica de grado 3V).

Esta es la base para explicarles que es una cúpula geodésica, como funcionan, como se construyen y la relación que existe entre el aumento de las frecuencias, que son las divisiones de los triángulos generados, y el hecho de que cada vez posean una mayor curvatura y se vayan aproximando más a una esfera.

Introduciremos además el concepto de que a mayor triangulación mayor resistencia de la estructura.

SESIÓN 12 y 13_ CONSTRUCCIÓN DE UNA CÚPULA GEODÉSICA. BARRAS Y VÉRTICES GENERADORAS DE ESPACIO

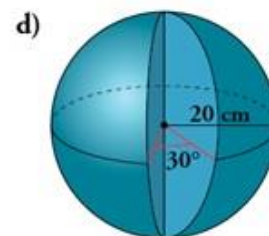
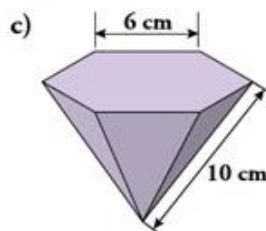
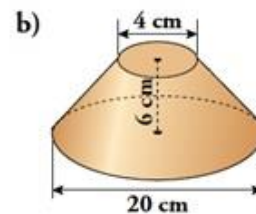
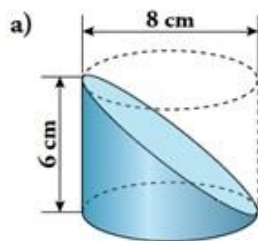
Tras una explicación (desarrollada en el plan de clase) y tras mostrarle al alumnado el material del que disponen para su construcción, deberán construir una cúpula geodésica de unas determinadas características (expuestas por el profesor) en el patio del centro.

El resultado esperado con esta tarea es la construcción de la cúpula geodésica, tras comprender después de la explicación teórica que son estructuras recíprocas, domos y cúpulas geodésicas, cómo funcionan y cómo se construyen. El alumnado debe participar en la construcción de la misma, con la coordinación del profesor.

SESIÓN 14_ REPASO

ACTIVIDAD 13.1.- Repaso

1. Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos. (Colera, J. et al., 2019a).



a) Primero calculamos el radio de la base inclinada, r.

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm} \rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$A_{BASES} = \pi * 4^2 + \pi * 5^2 = 128,81 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{2\pi * 4 * 6}{2} = 75,4 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 128,81 + 75,4 = 204,21 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi * 4^2 * 6}{2} = 150,8 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos primero la generatriz, g

$$g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

$$A_{BASES} = \pi * 10^2 + \pi * 2^2 = 326,73 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{2\pi * 10 + 2\pi * 2}{2} * 10 = 376,99 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 326,73 + 376,99 = 703,72 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del tronco de cono restaremos el volumen del cono grande del volumen del cono pequeño. Para ello, debemos conocer la altura del cono pequeño, x

$$\frac{x}{2} = \frac{6+x}{10} \rightarrow 10x = 12 + 2x \rightarrow x = 1,5 \text{ cm}$$

$$V_{T.CONO} = \frac{1}{3}\pi * 10^2 * 7,5 - \frac{1}{3}\pi * 4^2 * 1,5 = \frac{1}{3}\pi * 10^2 * 7,5 + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \pi * 726 = 760,27 \text{ cm}^3$$

c) Calculamos la apotema de la base, ap, la apotema de la pirámide, m, y la altura de la pirámide, h.

$$ap = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,2 \text{ cm}$$

$$m = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,2 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{9,54^2 - 5,2^2} \approx 8 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{6 * 6 * 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = 6 * \frac{6 * 9,54}{2} = 171,72 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 93,6 + 171,72 = 265,32 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} * 93,6 * 8 = 249,6 \text{ cm}^3$$

d) Debemos observar que la porción de esfera que estamos eliminando es $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ de la esfera completa, y que al calcular el área debemos añadir dos semicírculos de radio 20 cm.

$$A = \frac{11}{12} 4\pi * 20^2 + \pi * 20^2 \approx 4607,67 + 1256,64 \approx 5864,31 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{11}{12} * \frac{4}{3} \pi * 20^3 \approx 30717,79 \text{ cm}^3$$

2. Introducimos una esfera de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista. Dicho recipiente está lleno de agua hasta el borde, cuando se mete la esfera en el recipiente se derrama agua. Calcula:

- El agua que se ha derramado del recipiente.
- Cuando se retira el cuerpo esférico, la altura que alcanza el agua en el mismo.

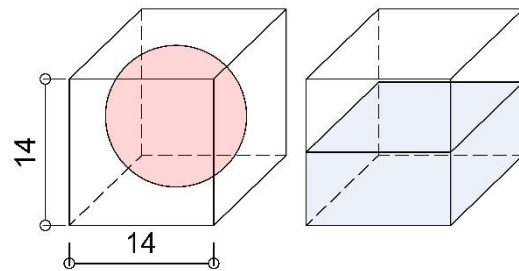
$$V_{\text{cubo}} = 14^3 = 2744 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \pi * 7^3 \approx 1436,76 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{AGUA NO DERRAMADA}} = 2744 - 1436,76 = 1307,24 \text{ cm}^3$$

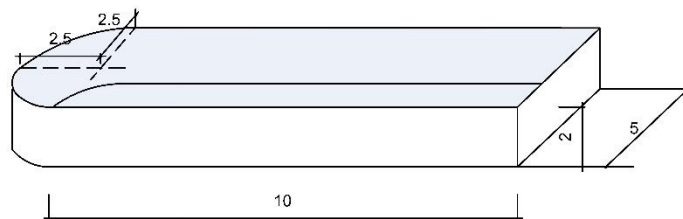
Altura que alcanza el agua:

$$1307,24 = 14^3 * h \rightarrow h = 6.67 \text{ cm}$$



3. Cuando finaliza la temporada de verano, se decide utilizar el agua de la piscina que está llena para regar. Para ello, se abre un desagüe que desaloja un caudal de 0,5 litros por segundo.

¿Se podrá regar durante 5 horas con el agua que tiene la piscina?



Capacidad de la piscina

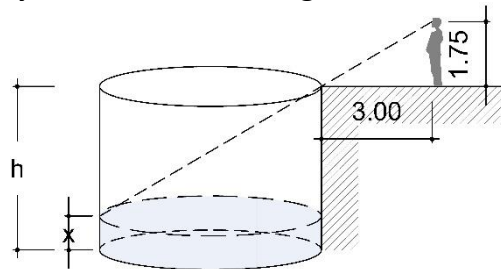
$$5 * 10 * 2 + \frac{\pi * 2,5^2 * 2}{2} = 119,63 \text{ cm}^3 = 11963 \text{ litros}$$

Gasto en 5 horas con un caudal de 0,5 l/s

$$\text{Gasto} = 0,5 * 60 * 60 * 5 = 9000 \text{ litros}$$

El gasto de agua en 5 horas es inferior a la contenida en la piscina, por tanto se podrá regar durante esas 5 horas.

4. Queremos saber que profundidad de agua hay en una pozo cilíndrico de 6 m. de diámetro y con una capacidad de 125 m^3 , pero no podemos medirla porque está muy baja. De hecho, si una persona que tiene los ojos a una altura de 1,75 m, se aleja 3 metros del borde ya no ve el nivel del agua. Calcular el nivel del agua.



- Si h es la profundidad del pozo y su volumen es 125 m^3 , podemos determinar la altura del mismo.

$$V_{\text{POZO}} = 125 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{125}{\pi r^2} = \frac{125}{\pi 3^2} = 4,42 \text{ m}$$

- Existe una relación entre los triángulos que se forman entre la distancia a la que se posiciona la persona y su altura y la altura del pozo y su radio. Por tanto, si x es la profundidad del agua:

$$\frac{1,75}{3} = \frac{4,42 - x}{6} \rightarrow x = 0,92 \text{ m. El nivel del agua es } 0,92 \text{ m}$$

5. El trapecio isósceles dado, gira alrededor de una recta perpendicular a sus bases uniendo sus puntos medios, generando un tronco de cono. Calcula su área y volumen.

- Primero hemos de calcular la generatriz del tronco de cono, g .

$$g = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,32 \text{ cm}$$

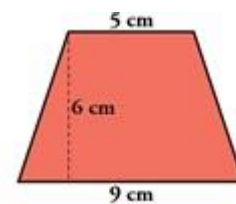
$$A_{\text{BASES}} = \pi * 4,5^2 + \pi * 2,5^2 \approx 83,25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi * (4,5 + 2,5) * 6,32 \approx 138,98 \text{ cm}^2$$

- El volumen se hallará restando los volúmenes del cono grande y del cono pequeño.

- Para comenzar, debemos hallar la altura del cono pequeño.

$$\frac{x}{2,5} = \frac{x + 6}{4,5} \rightarrow 4,5x = 2,5x + 15 \rightarrow x = 7,5 \text{ cm}$$



$$V = \frac{1}{3} \pi * 4,5^2 * (6 + 7,5) - \frac{1}{3} \pi * 2,5^2 * 7,5 = 237,19 \text{ cm}^3$$

6. Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y volumen. (Colera, J. et al., 2019a).

- Calculamos el lado del tetraedro

$$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow l = 14,14 \text{ cm}$$

- Recordamos que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

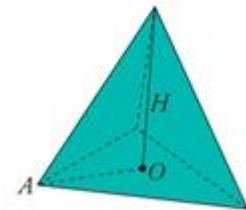
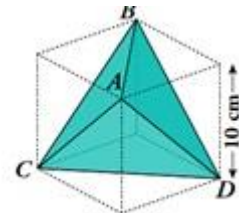
$$h^2 = 14,14^2 - 7,07^2 \rightarrow h = 12,24 \text{ cm}$$

$$H^2 = 14,14^2 - \left(\frac{2}{3} * 12,24\right)^2 = 133,29 \rightarrow H = 11,54 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} * 14 * 14 * 12,24 = 86,54 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = 4 * 86,54 = 346,15 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_{BASE} * H = \frac{1}{3} * 86,54 * 11,54 = 332,89 \text{ cm}^3$$



7. Calcula la longitud de una milla marina sabiendo que la “milla marina” es la distancia existente entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1’.

$$1' = \frac{1}{60} \text{ Grados; radio de la Tierra: } R=6370 \text{ Km}$$

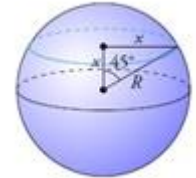
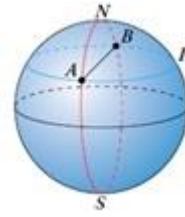
$$\text{Milla marina} \rightarrow \frac{2\pi R \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21600} \approx \frac{2\pi 6370}{360} \approx 1,85 \text{ Km}$$

8. Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (APB) o siguiendo la ruta polar (ANB). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto. (Colera, J. et al., 2019a).

Hallamos el radio del paralelo 45°:

$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6370}{\sqrt{2}} = 4504,27 \text{ Km}$$



9. Dos ciudades tienen la misma longitud, 15°E; y sus latitudes son 37°25'N y 22°35'S ¿Cuál es la distancia entre ellas? (Colera, J. et al., 2019a).

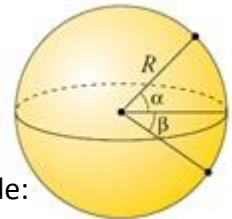
$$A = 37^\circ 25'$$

$$B = 22^\circ 35'$$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de:

$$\alpha + \beta = 37^\circ 25' + 22^\circ 35'$$

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi 6370 60^\circ}{360^\circ} \approx 6670,65 \text{ Km}$$



10. Alejandría, Nueva Orleans y Houston tienen todas la misma latitud, 30° N. Sus longitudes son, respectivamente, 30° E, 90° O y 95° O. ¿Qué distancia recorrería un avión que va de Alejandría a Nueva Orleans por el paralelo 30° N? ¿Y de Alejandría a Houston? Sabemos que el paralelo 30° tiene una longitud de 34 646 km aproximadamente. (Colera, J. et al., 2019a).

Entre Alejandría y Nueva Orleans hay un arco de $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; por tanto, la distancia entre ellos es de:

$$\frac{34346}{360^\circ} * 60^\circ \approx 5724,33 \text{ Km}$$

Entre Alejandría y Houston hay un arco de $95^\circ - 30^\circ = 65^\circ$; por tanto, la distancia entre ellos es de:

$$\frac{34346}{360^\circ} * 65^\circ \approx 6201,36 \text{ Km}$$

SESIÓN 15_ EXAMEN

1. Define y enumera el número de caras, vértices y aristas de los poliedros regulares o sólidos platónicos.

¿Qué relación existe entre la suma de caras y vértices con el número de aristas?

¿Qué poliedros intercambian caras y vértices y por qué?

¿Existe algún poliedro construido con los armazones de los poliedros regulares de forma que todos queden inscritos unos dentro de otros?.

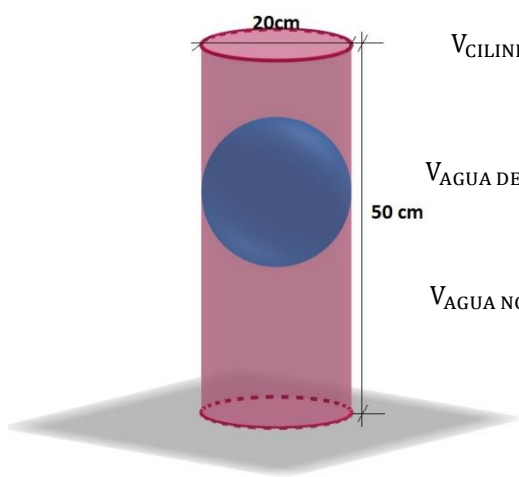
2. Indica los planos de simetría y los ejes de simetría de un cubo. ¿Cuántos tipos hay? Identifícalos determinando una característica de cada uno de los tipos y dibújalos.

Indica igualmente los planos de simetría y los ejes de simetría del poliedro dual del cubo. Identifícalos determinando una característica de cada uno de los tipos y dibújalos.

3. Introducimos una bola metálica de 20 cm de diámetro en un bidón cilíndrico de 20 cm de diámetro y 50 cm de altura, lleno de agua. Posteriormente retiramos la bola. Calcula:

a) ¿Qué cantidad de agua se ha derramado?

b) ¿Qué altura alcanzará el agua en el bidón una vez retirada la bola?.



$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} * h = \pi r^2 * h = \pi 10^2 * 50 = 15.708,00 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi 10^3 * 90 = 4.188,80 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{AGUA NO DERRAMADA}} = 15.708,00 \text{ cm}^3 - 4.188,80 \text{ cm}^3 = 11.519,20 \text{ cm}^3$$

4. Dos ciudades tienen la misma longitud 20° E, y sus latitudes son $45^\circ 35'$ N y $23^\circ 25'$ S

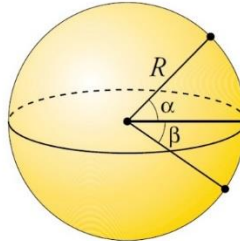
Sabiendo que el radio de la Tierra es 6370 Km

- a) ¿Qué distancia hay entre ellas?
 b) ¿Qué programas informáticos podríamos utilizar para resolver el problema?. Explica la respuesta.

a)

$$\alpha = 45^\circ 35'$$

$$\beta = 23^\circ 25'$$



En primer lugar hay que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de:

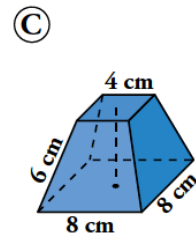
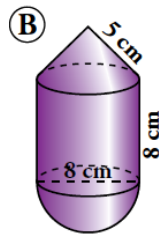
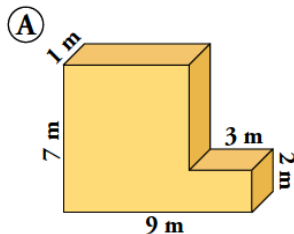
$$\alpha + \beta = 45^\circ 35' + 23^\circ 25' = 69^\circ$$

La distancia entre los dos puntos será:

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R * 69^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi R * 69^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi 6370 * 69^\circ}{360^\circ} = 7.7671,26 \text{ Km}$$

b) El programa que se puede utilizar es el Google Earth, buscando los puntos en el mismo, etiquetándolos y utilizando el comando medir para descubrir la distancia existente entre ambos.

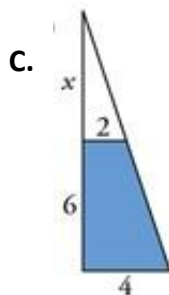
5. Calcula el volumen de estos cuerpos:



A. $V = 7 * 6 * 1 + 3 * 2 * 1 = 48m^2$

B. *Altura del cono:* $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$

$$V = \frac{1}{3}\pi * 4^3 * 3 + \pi * 4^2 * 8 + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \pi * 4^3 = 50,27 + 402,12 + 134,04 = 586,42 \text{ cm}^3$$



$$\frac{4}{6+x} = \frac{2}{x} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3} * 8^2 * 12 - \frac{1}{3} * 4^2 * 6 = 224cm^3$$

SESIÓN 10_ Primera aproximación. El balón de fútbol.

Fase de inicio e introducción de la tarea

El profesor explicará a la clase, en primer lugar, en que consiste la actividad a desarrollar en la Sesión 10. Se intenta partir de una tarea fácilmente accesible a todos los estudiantes.

Se les plantearán las preguntas y tendrán que debatir sobre sus posibles soluciones, que conllevarán a establecer conexiones entre distintas áreas del conocimiento. Se les dará una copia de la actividad por grupo que contendrá además de las preguntas una plantilla con las diferentes formas geométricas para la resolución del problema.

El profesor anunciará el objetivo de la clase:

- Hoy vamos a trabajar de una forma diferente, vamos a buscar conexiones matemáticas entre objetos de la vida cotidiana, como puede ser algo tan común como un balón de fútbol y vamos a indagar en cuestiones relativas a qué decisiones llevan a hacer este tipo de objetos con determinadas formas en lugar de otras.
- Tenéis distintas maneras de abordar las cuestiones planteadas, utilizando los distintos materiales y recursos que están a vuestra disposición.

El material será el siguiente:

- Papel y lápiz
- Tijeras
- Pegamento
- Plantillas de formas geométricas
- Kit de construcción

A continuación, se leerá en voz alta las preguntas y nos aseguraremos de que el alumnado entienda que tiene que hacer, por ejemplo:

- De qué tipo de balón estamos hablando
- Si recuerdan la fórmula de Euler

Además se les indicará que no se precipiten y dediquen el tiempo necesario a comprender el problema.

Fase de exploración y desarrollo de la tarea

Se dispondrán las mesas formando una U, para fomentar la participación y la fluidez de la clase, así como para promover el trabajo colaborativo, en el que el alumnado pueda compartir ideas y a la vez facilitar la ayuda del profesor cuando sea necesario.

Se pondrá a disposición del alumnado el material necesario para construir el objeto requerido, y poder determinar el tipo y número de polígonos, caras y vértices que lo componen.

En primer lugar se les solicitará que trabajen individualmente para que todo el alumnado participe en la actividad. Pasados unos minutos, dividiremos la clase en

grupos de 4 alumnos para que articulen las posibles soluciones a las preguntas y la estrategia a tener en cuenta para resolverlas.

Siempre se le intentará fomentar el análisis crítico de las respuestas, animando al alumnado para que aprendan de sus errores.

El profesor irá circulando entre los grupos para ver cómo se desarrolla la sesión, intentando no intervenir demasiado pronto, evitando darles alguna instrucción sobre que sería más conveniente hacer para resolver las cuestiones, sí formulará preguntas para promover el razonamiento y la comunicación, así como la colaboración de todos los miembros del grupo.

El alumnado puede tomar distintos puntos de partida, por ejemplo un grupo puede recurrir a intentar imaginarse como es un balón, dibujarlo y plantear el problema antes de construir la maqueta del balón con las figuras geométricas de cartón o con el material de barras y uniones esféricas (Creator 3D), otros probarán a ir uniendo barras y mediante ensayo y error llegar a la solución.

Se valorará el proceso por el que el alumnado llega a la respuesta más que si la respuesta es la correcta o no.

El profesor les dejará libremente elegir el sistema para resolver el problema, prestando atención a los grupos que estén atascados para que no se desaminen y haciéndole preguntas que configuren un punto de andamiaje para continuar con su labor del tipo:

- ¿Cómo podemos abordar el problema?
- ¿Qué estáis intentando hacer?
- ¿Os habéis planteado como se pueden unir distintas superficies?
- ¿Podrías imaginar distintos tipos de superficies esféricas tridimensionales?

Si el profesor observa que algún grupo está atascado en alguna cuestión en particular o está haciendo algo incorrecto se intentará reconducir al grupo para que vuelvan atrás y retomen la situación.

Para la resolución de la última pregunta sobre el Jabulani, se le entregará una Tablet por grupo para que busquen la respuesta en la red.

Fase de discusión y síntesis

El profesor solicitará a los alumnos que elijan un miembro del grupo para exponer sus conjeturas y anotarlas en la pizarra junto con las posibles respuestas de los problemas. Conforme el alumnado vaya exponiendo se pedirá que hagan una valoración de las respuestas de sus compañeros y si su estrategia para resolver el problema ha sido más o menos efectiva. Cuando un grupo esté exponiendo la solución del problema se le harán preguntas del tipo:

- ¿Podéis explicar que método habéis usado para resolver las preguntas?
- ¿Habéis estado todos de acuerdo en el método utilizado?

Fase de sistematización

El profesor organizará los conocimientos matemáticos introducidos con esta actividad, insistiendo en que las matemáticas están presentes en la mayoría de objetos y reconduciendo los conceptos que serán necesarios para la siguiente sesión como son:

En relación a los conocimientos matemáticos, destacaremos:

- Nombre y propiedades de cuerpos geométricos: Icosaedro truncado, Rombicoidodecaedro.
- Conceptos de aristas, vértices, caras
- Fórmula de Euler

En relación a los procedimientos:

- Formulación de hipótesis
- Visualización espacial
- Desarrollo de un cuerpo geométrico
- Generación de espacios
- Argumentación y prueba
- Medida
- Descubrimiento de conexiones y relaciones

SESIÓN 11 _ Transformación de poliedros. Condiciones de curvatura y rigidez. Primera aproximación a las cúpulas geodésicas.

Fase de inicio e introducción de la tarea

El profesor para comenzar explicará a la clase en que consiste la actividad a desarrollar en la Sesión 2. Se les planteará las preguntas y tendrán que debatir, igualmente que en la Sesión anterior. Se les dará una copia de la actividad por grupo.

El profesor anunciará el objetivo de la clase:

- En esta tarea vamos a partir de lo que vimos en la sesión anterior. Tendréis que construir un cuerpo más esférico que el famoso balón de fútbol pero partiendo de éste, y ver en qué medida podéis hacerlo más estable y más resistente a las deformaciones.
- Tenéis distintas maneras de abordar las cuestiones planteadas, utilizando los distintos materiales y recursos que están a vuestra disposición.

El material será el siguiente:

- Papel y lápiz
- Tijeras
- Pegamento
- Kit de construcción

A continuación, se leerá en voz alta las preguntas y nos aseguraremos de que el alumno entienda que tiene que hacer.

- ¿Sabéis que significa que un cuerpo es la estabilidad?
- ¿Y rígido?

Fase de exploración y desarrollo de la tarea

La clase se dispondrá de igual manera que en la sesión anterior, trabajando primero el alumnado individualmente para agruparlos pasados unos minutos en grupos de 4 alumnos.

Se pondrá a disposición del alumnado el material necesario para construir la forma poliédrica pretendida, comentándoles el material que tienen a su disposición:

Se comentará lo siguiente:

- Primero tenéis que pensar qué condiciones debe tener un poliedro para ser cada vez más esférico, de qué planteamiento debéis partir para la construcción del mismo.
- Podéis utilizar para su construcción el material que tenéis a vuestra disposición.
- Recordad que al final tenéis que explicar cómo habéis construido el poliedro, así que es importante ir anotando los pasos seguidos para poder exponerlos posteriormente.

El profesor dejará a los alumnos durante unos minutos trabajar sin hacerles ninguna pregunta, posteriormente, irá recorriendo cada uno de los grupos realizando las siguientes preguntas:

- ¿Qué conocimientos matemáticos crees que te podrían acercar a las soluciones del problema?
- ¿Me interesaría saber qué habéis pensado hacer?
- Intentad pensar que objetos que tenéis en mente siguen estos criterios y en qué os puede ayudar a desarrollar este problema
- Cómo andamiaje el profesor puede plantear estas preguntas:
- Recordad que el enunciado indica que se debe partir del balón de fútbol que como vimos la sesión anterior es un icosaedro truncado, y a partir de esa forma modelada en 3D pensar que podríais hacer para que sea cada vez más esférica, qué hace que un balón parezca más redondo de lo que es realmente.
- Pensad en objetos que se deforman por ejemplo en una rueda de una bicicleta, una telaraña... ¿qué elementos hacen que sean más rígidas y se deformen menos?

Una vez que los grupos empiecen a plantear hipótesis el profesor irán dando ideas como por ejemplo:

- ¿Conocéis alguna construcción o algún objeto de la naturaleza que posea estas formas esféricas?

Fase de discusión y síntesis

El profesor seguirá el mismo criterio que en la sesión anterior, solicitará a los alumnos que elijan un miembro del grupo para exponer en la pizarra las posibles respuestas de los problemas y realizará el mismo tipo de preguntas.

Conforme el alumnado vaya exponiendo se pedirá que hagan una valoración de las respuestas de sus compañeros y si su estrategia para resolver el problema ha sido más o menos efectiva, llamando la atención sobre las hipótesis que han asumido y los resultados obtenidos.

Cuando un grupo esté exponiendo la solución del problema se le harán preguntas del tipo:

- ¿Podéis explicar que método habéis usado para resolver las preguntas?
- ¿En qué os habéis basado para plantear esta hipótesis?
- ¿Qué conclusiones sacáis respecto a cómo rigidizar un cuerpo geométrico?
- ¿Habéis pensado en qué objetos reales se utilizan estas estructuras?

Como conclusión se les comunicará al alumnado que para la sesión 3 vamos a utilizar el poliedro construido.

Fase de sistematización

El profesor organizará los conocimientos matemáticos más importantes que resultan de la resolución de las cuestiones planteadas.

En relación a los conocimientos matemáticos, destacaremos:

- Nombre y propiedades de cuerpos geométricos: Icosaedro truncado, Rombicosidodecaedro.
- Proporciones y medidas.
- Conceptos de aristas, vértices, caras.

En relación a los procedimientos:

- Formulación de hipótesis
- Modelización
- Visualización espacial
- Desarrollo de un cuerpo geométrico
- Generación de espacios
- Argumentación y prueba
- Medida
- Descubrimiento de conexiones y relaciones

SESIÓN 12 y 13 _ Construcción de cúpula geodésica. Barras y vértices generadoras de espacio.

Fase de inicio e introducción de la tarea

El profesor explicará a la clase en primer lugar, en que consiste la actividad a desarrollar en la Sesión 3. Esta sesión será más larga que las anteriores, ya que se requiere más tiempo para su desarrollo.

El profesor anunciará el objetivo de la clase:

- Hoy vamos a intentar ordenar lo aprendido en la clase anterior y llevar a la práctica los conocimientos adquiridos en las dos sesiones.
- Vamos a construir una cúpula geodésica en el patio. Suena complicado ¿verdad?
- Pues vamos a coger los poliedros de la sesión 2, intentad partir visualmente ese poliedro por la mitad, y aquí ya tenemos una cúpula geodésica.

El profesor explicará a los alumnos, sentados en esta ocasión individualmente, que es una cúpula geodésica y como podrán construirla con el material que ha seleccionado previamente para este fin.

En el aula se explicará lo siguiente:

1. ESTRUCTURAS RECÍPROCAS

Las estructuras recíprocas son aquellas que están formadas por un conjunto de elementos que trabajan auto-apoyados formando parte de un circuito cerrado. (véase Figura 64).

La forma más sencilla de este tipo de estructuras es tres barras superpuestas que se apoyan una sobre otra alcanzando un sencillo y sorprendente equilibrio estructural.

Surgen como solución al problema de la creación de superficies mediante elementos que posean unas limitadas dimensiones. Nos recuerda a la imagen vista en el comienzo del tema con el cortometraje de M.C. Escher (Figura 65)

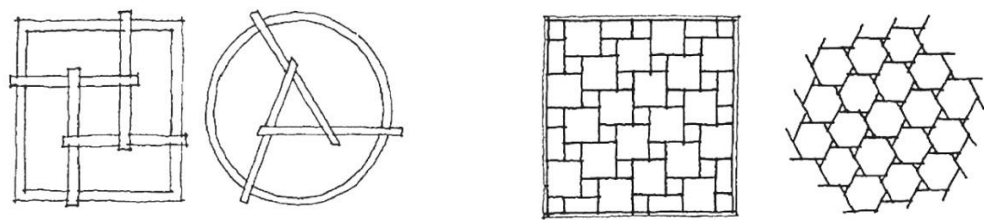


Figura 64. Domos poliédricos Regulares. Recuperado de <http://wiki.ead.pucv.cl/>.



Figura 65. Imagen de estructura Recíproca. Recuperada de <https://vimeo.com/36296951>

Los primeros en establecer estudios estructurales y geométricos referentes a la reciprocidad fueron Sebastiano Serlio y Leonardo Da Vinci aproximadamente sobre el año 1500.

El matemático y escultor Rinus Roelofs, ideó unas piezas en pequeño formato, para realizar distintas cúpulas (Veáse Figura 66)



Figura 66.. Recuperada de <http://www.rinusroelofs.nl/structure/dome-bp/dome-bp-00.html>

Hay una versión escolar para el montaje de este tipo de cúpulas, son piezas de dimensiones más reducidas (véase Figura 67). Con estas piezas, se generan estructuras que son teselaciones del plano.

Teselar una superficie plana es recubrirla con regularidades o algún patrón determinado de manera que no queden espacios y que las figuras utilizadas para dicha teselación no se superpongan unas a otras. Son teselaciones por ejemplo algunos mosaicos.

Teselar la esfera, sin embargo, es utilizar poliedros regulares deformados de forma esférica para cubrir dicha superficie.

Existen muchísimas teselaciones, pero estas piezas permiten la construcción de las 11 teselaciones distintas, (véase Figura 68).

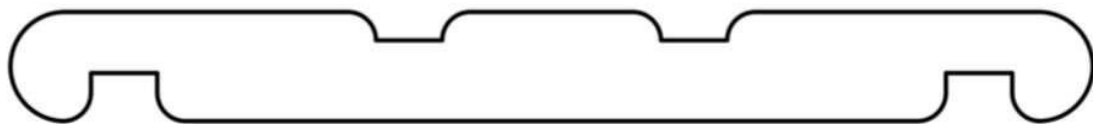


Figura 67. Versión escolar de estructura. Recuperado de <https://thales.cica.es/xviceam/actas/pdf/ta21.pdf>

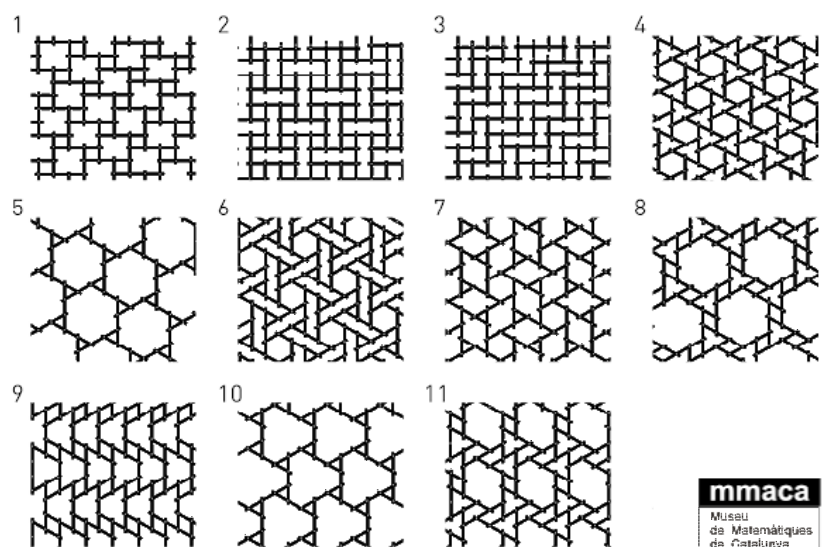


Figura 68. Teselaciones. Recuperado de <https://thales.cica.es/xviiceam/actas/pdf/ta21.pdf>

Leonardo Da Vinci realizó estudios y diseñó estas estructuras. Este es un ejemplo de una cúpula de este tipo, es muy sencilla de construir sólo hay que ir encajando las piezas a modo de mecano y se va formando el volumen esférico gracias a la disposición y al diseño de las mismas. Como podéis comprobar a partir de piezas planas se pueden construir estructuras con volumen (véase Figura 69).



Figura 69. Estructura Leonardo. Recuperado de <https://thales.cica.es/xviiceam/actas/pdf/ta21.pdf>

Sin embargo, nosotros vamos a construir otro tipo de cúpula que es la más parecida a un balón de fútbol y está relacionada con la sesión anterior.

2. DOMOS DE POLIEDROS REGULARES ¿Cómo hacer una cúpula geodésica?

Las cúpulas geodésicas o domos son estructuras autoportantes tridimensionales generadas partiendo de la proyección de un poliedro a la esfera que está circunscrita en él. Generalmente se forman partiendo del sólido platónico icosaedro. Aunque también se pueden generar cúpulas a partir del resto de sólidos platónicos. Son estructuras aerodinámicas, muy resistentes a tormentas y vendavales, incluso son utilizadas en proyectos de la NASA.

Se puede generar un domo a partir de cada uno de los sólidos platónicos, siendo más esférico a medida que se divide cada una de las correspondientes caras de los sólidos. (véase Figura 70)



Figura 70. Domos poliédricos Regulares. Recuperado de <http://wiki.ead.pucv.cl/>.

Se aumenta la curvatura conforme se van dividiendo las caras del poliedro, lo que conlleva además a una mayor resistencia estructural del mismo.

Cúpula Geodésica Icosaédrica

La cúpula geodésica generada a partir de un icosaedro es el domo más común. Esta variedad podemos encontrarla en la mayoría de las cúpulas.

Partiendo de esto ya podemos puntualizar los pasos para construir una cúpula geodésica.

Existen muchos modelos de cúpulas geodésicas icosaédricas en función de la frecuencia, los más usuales son los 1V, 2V, 3V y 4V (véase Figura 71).

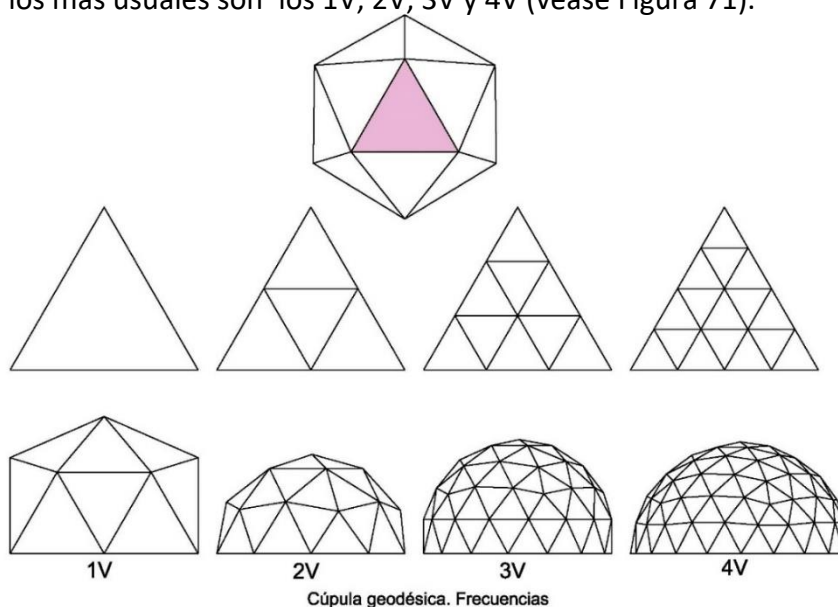


Figura 71. Desarrollo de cúpulas geodésicas según el número de frecuencias (elaboración propia)

Vamos a desarrollar y construir la cúpula geodésica 3 V, dicha estructura es la más parecida a un balón de fútbol en la que unimos los centros de los hexágonos y los pentágonos que componen la superficie esférica con cada uno de los vértices de éstos y tiramos de ellos para darle unos ángulos a esos radios para construir la superficie esférica.

La cúpula 3V está compuesta por una superficie de estas características (véase Figura 72)

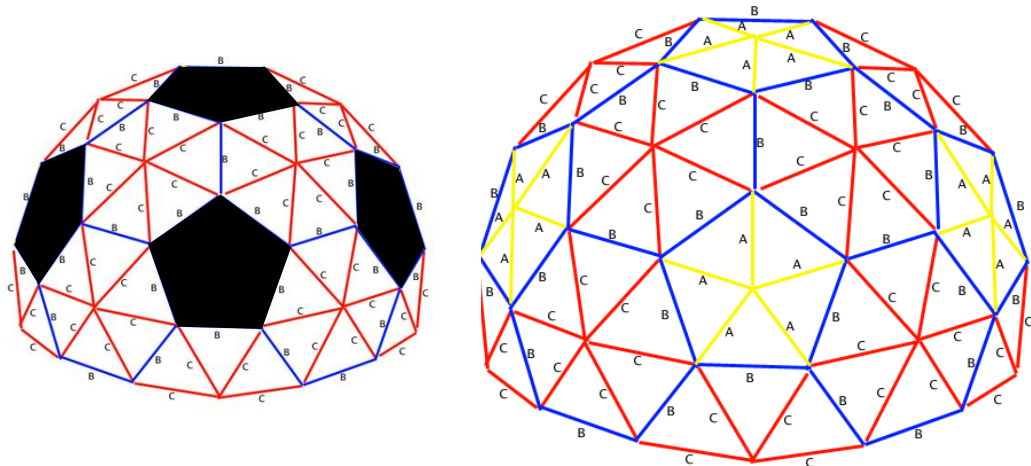


Figura 72. Estructura Domo. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>

Existen 3 tipos de barras, que son las siguientes:

Barra A (Amarilla): Son las barras que conectan los centros de los pentágonos con los vértices.

Barra B (Azul): Son las barras que forman las aristas de pentágonos y hexágonos.

Barra C (Roja): Son las barras que conectan los centros de hexágonos con los vértices.

Tenemos que tener en cuenta además que, para conformar la curva las uniones entre las distintas barras deberán presentar un ángulo determinado que será el siguiente:

Barra A: 10°

Barras B y C: 12°

Con estos materiales, tenemos barras y uniones que constituyen un mecano con el que será mucho más sencillo construir esta cúpula.

Se puede hacer una matriz para sacar las dimensiones que debe tener cada barra, en función del radio que deseamos que presente la cúpula.

Pero en esta ocasión, os facilitó el trabajo, ya que con una impresora 3D he modelizado las uniones (véase Figura 73), con los ángulos determinados para hacer la cúpula que debería quedar como se muestra a continuación (véase Figura 74).

Manos a la obra, vamos al patio y os invito a que empecéis la construcción.

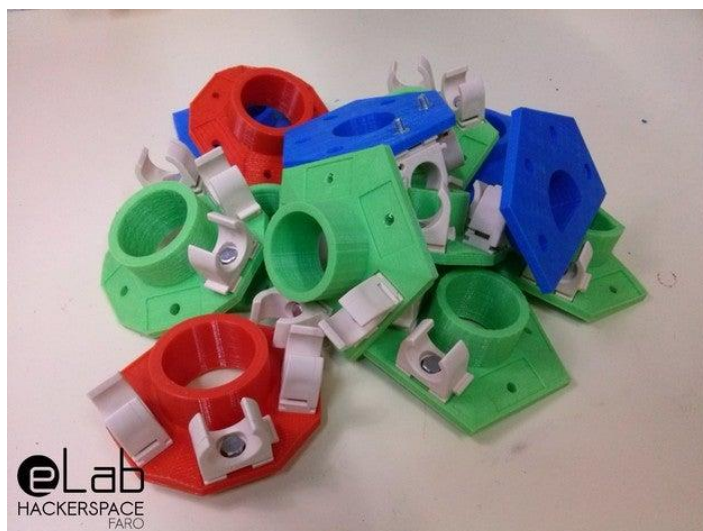


Figura 73. Uniones. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>



Figura 74. Domos poliédricos Regulares. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>

Ya en el exterior y con todo el material disponible allí, el profesor dejará a los alumnos que empiecen a plantear como van a llegar a cabo el montaje de la cúpula durante unos cinco minutos para, posteriormente organizar a los alumnos en grupos de 4 y asignarle a cada grupo una misión en la construcción de la misma, ya que deberán ponerse todos de acuerdo para ello. La construcción se llevará a cabo con la coordinación del profesor, ya que el trabajo se puede hacer por módulos que luego uniremos para la composición total de la estructura.

Se podrán hacer preguntas del tipo:

- ¿Cómo comenzaríais la tarea?
- ¿Creéis que será lo suficientemente estable?

Fase de discusión y síntesis

En esta sesión, tras la construcción de la cúpula, el alumnado deberá exponer a los compañeros que le ha parecido la tarea y que ha aprendido con la realización de ésta.

Fase de sistematización

El profesor organizará los conocimientos matemáticos introducidos con esta actividad, que este caso son:

En relación a los conocimientos matemáticos, destacaremos:

- Propiedades de cuerpos geométricos: Superficies esféricas
- Proporciones y medidas.
- Ángulos
- Teselaciones.
-

En relación a los procedimientos:

- Modelización
- Visualización espacial
- Desarrollo de un cuerpo geométrico
- Generación de espacios
- Argumentación y prueba
- Medida
- Descubrimiento de conexiones y relaciones
- Visualización espacial
- Generación de espacios
- Teselaciones
- Superficies esféricas
- Cúpulas geodésicas

AMPLIACIÓN DE ACTIVIDAD

Para los alumnos de altas capacidades y aquellos que quieran ampliar la actividad anterior se les facilitará la siguiente información sobre las estructuras tensegríticas.

TENSEGRIDAD

La tensegridad es un principio estructural basado en las estructuras recíprocas, concepto explicado en la sesión 12.

Consiste en crear formas mediante el uso de mallas poligonales, que se denominan estructuras tensegríticas. Estas estructuras están basadas en el empleo de componentes comprimidos (generalmente barras) que no se tocan entre sí unidos únicamente mediante componentes traccionados (normalmente cables o gomas), estos componentes delimitan espacialmente un volumen. El equilibrio formado por barras y cables dan rigidez y forma a la estructura. (véase Figura 75)

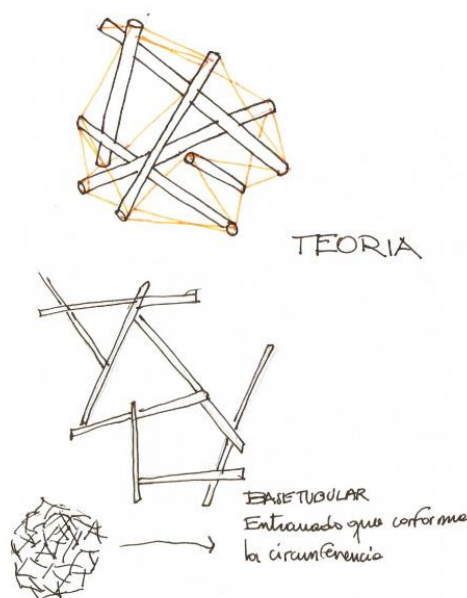


Figura 75. Principio de tensegridad. Extraído de <https://wiki.ead.pucv.cl/>

Son estructuras muy utilizadas en el campo de la arquitectura y de la ingeniería, tienen su origen en los años 60 y han evolucionado mucho en los últimos 20 años debido al uso de los ordenadores.

Hay tres personas que son consideradas los padres de esta disciplina, Richard Buckminster Fuller, David Georges Emmerich y Kenneth D. Snelson (véase Figura 76).

Kenneth Snelson, exploró este concepto con la construcción de esculturas. Kenneth Snelson, exploró este concepto con la construcción de esculturas, como Needle Tower (1968), que posee 18 metros de altura formada por un conjunto de varillas entrecruzadas y sujetas por finos alambres tensados.

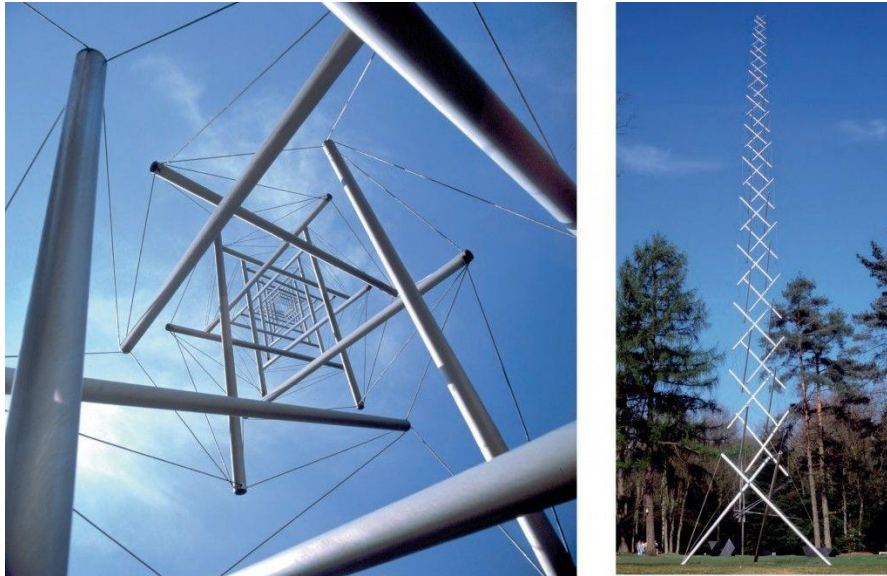


Figura 76. Estructura tensegrítica. Extraído de <https://wiki.ead.pucv.cl/>

El arquitecto Fuller fue el primero en acuñar el término de tensegridad, como consecuencia de la contracción de los términos tensional e integrity, que se tradujo como “integridad tensional”.

Existen un amplio número de estructuras arquitectónicas que utilizan este sistema “Diseñar es hacer lo máximo con lo mínimo”, subrayó Fuller.

Así, Fuller definió el término Tensegrity como *“estructuras autotensionadas compuestas por estructuras rígidas y cables, con fuerzas de tracción y compresión, que forman un todo integrado”*. (véase Figura 77).

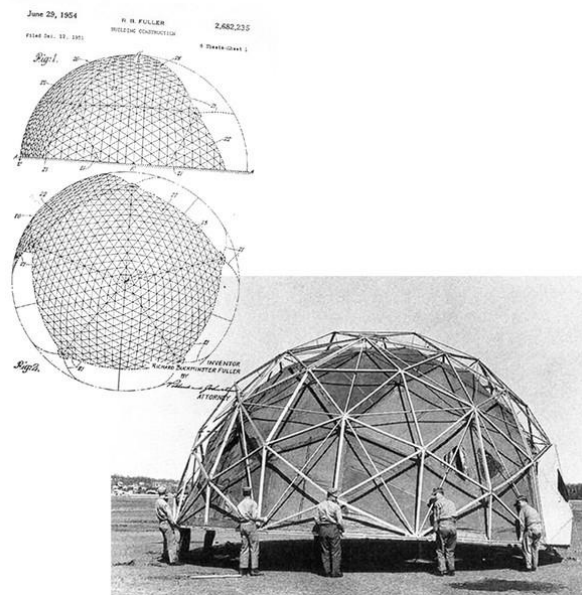


Figura 77: Primeras cúpulas Geodésicas de Buckminster Fuller extraída de <https://www.revistaad.es/>

Existe un cierto paralelismo entre el comportamiento de las cúpulas geodésicas y el cuerpo humano, como el sistema compuesto por huesos (barras) y músculos (cables), interconectados trabajan en unión fortaleciéndose unos a otros, existiendo un amplio campo de estudio en este sentido).

Fuller, aunque no fue el que inventó las cúpulas geodésicas, sí las patentó y las popularizó, construyendo estructuras simples, como tetraedros (forma mínima que encierra un volumen), octaedros y diferentes conjuntos de esferas, que funcionan gracias a las tensiones de tracción y compresión. Estas estructuras que son gracias a este sistema muy ligeras y estables, surgieron de la investigación de las construcciones naturales.

Fuller proyectó grandes cúpulas geodésicas basadas en el principio de la tensegridad, algunas del tamaño de un campo de fútbol. La Biosfera de Montreal, cúpula del pabellón de los Estados Unidos, edificio proyectado la Exposición Mundial de 1967, es su cúpula más famosa. Aunque hay ciertos críticos que creen que dicha estructura no se basa en el principio de la tensegridad.

El matemático Miguel de Guzmán estudio este fenómeno y lo definió como (véase Figura 78):

Consideramos una configuración geométrica constituida por un número finito de puntos y por unos cuantos segmentos que unen estos puntos. Una estructura de tensegridad consiste en asignar vectores a los puntos, en las direcciones de los segmentos que concurren en ellos de forma que:

- *La resultante en cada punto es nula.*
- *Para cada segmento, la suma de los vectores asignados a sus extremos es cero.*

Figura 78. Definición de Tensegridad M. de Guzmán, extraída de <https://naukas.com/>

Esta clase de construcciones tensegríticas combina muchas posibilidades de diseño derivados de su gran resistencia, su ligereza y economía de materiales.

Por ejemplo, este es el sistema utilizado por las tiendas de campaña Quechua. (véase Figura 79)



Figura 79. Estructura tensegrítica tienda de campaña. Extraída de <http://seconds.quechua.com>

El principio de tensegridad es muy útil para la construcción de poliedros, se planteará al alumnado que realice la siguiente actividad, como podemos ver en los siguientes ejemplos: (véase Figura 80)

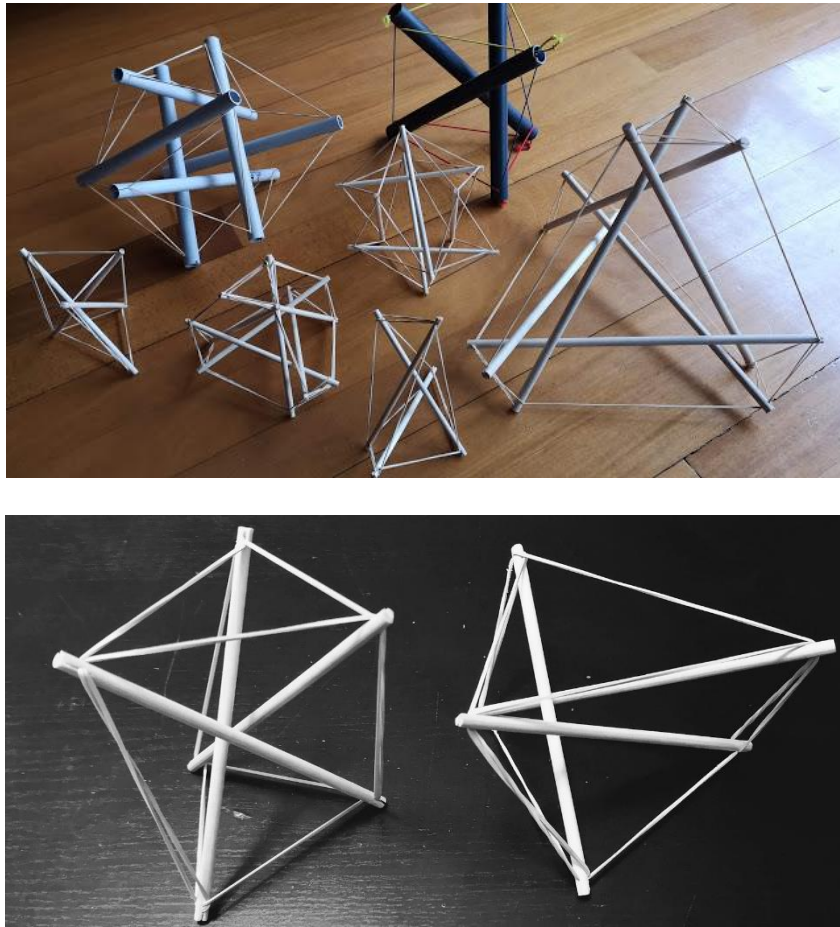


Figura 80. Poliedros. Estructura tensegrítica. Extraída de <https://pelandintecno.blogspot.com/2020/02/islas-de-compresion-en-un-oceano-de.html>

La estructura tensegrítica básica es denominada Simplex, esta constituida por 6 nudos, unidos mediante 3 elementos que trabajan a compresión (barras) y 9 elementos que trabajan a tracción (cables). (véase Figura 81)

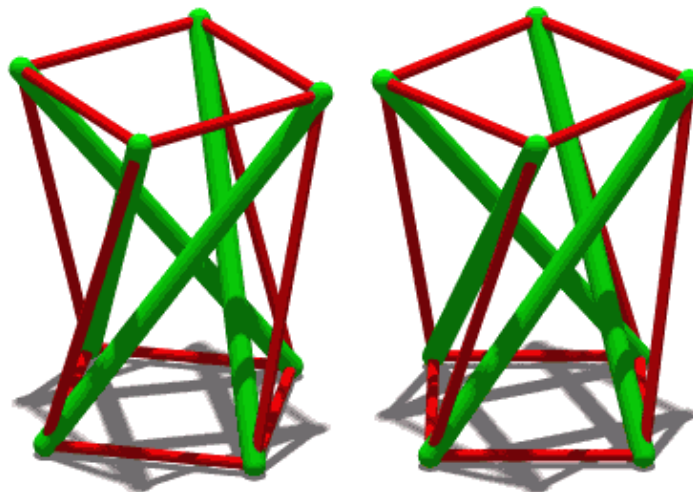


Figura 81. Simplex. Extraída de <https://es.qwe.wiki/wiki/Tensegrity>

El profesor propondrá al alumnado de altas capacidades y a aquel que quiera participar de forma voluntaria la construcción de un icosaedro con el principio de tensegridad. Para ello se les mostrará el siguiente video <https://www.youtube.com/watch?v=YaPNBdaMrHc> y se les dará los pasos a seguir, la sesión se llevará a cabo en la disponibilidad horaria del profesor. (véase Figura 82)

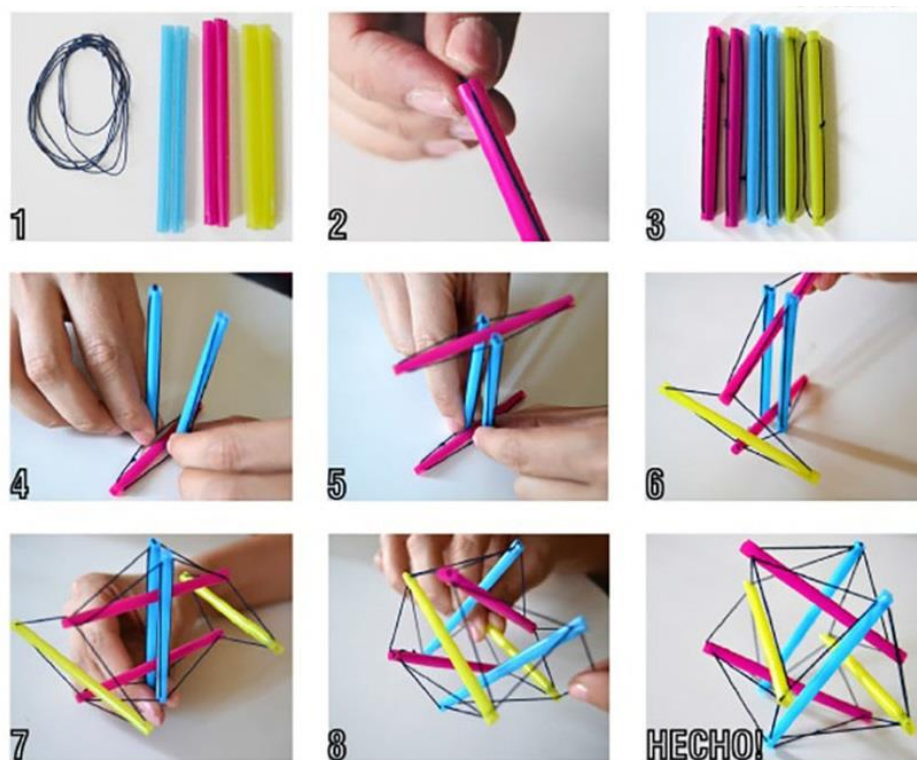


Figura 82. Construcción de un icosaedro por tensegridad. Extraída de https://www.enelajo.es/portfolio_page/taller-tensegrity/

Kit de construcción (se entregará uno por grupo). (véase Figura 83)

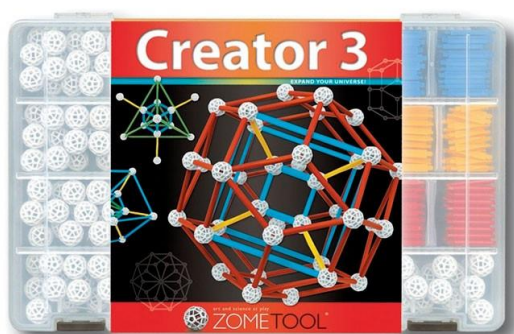


Figura 83. Kit de construcción. Extraída de <https://juguetaria.com/construcciones/417-zometool-creator-3.html>

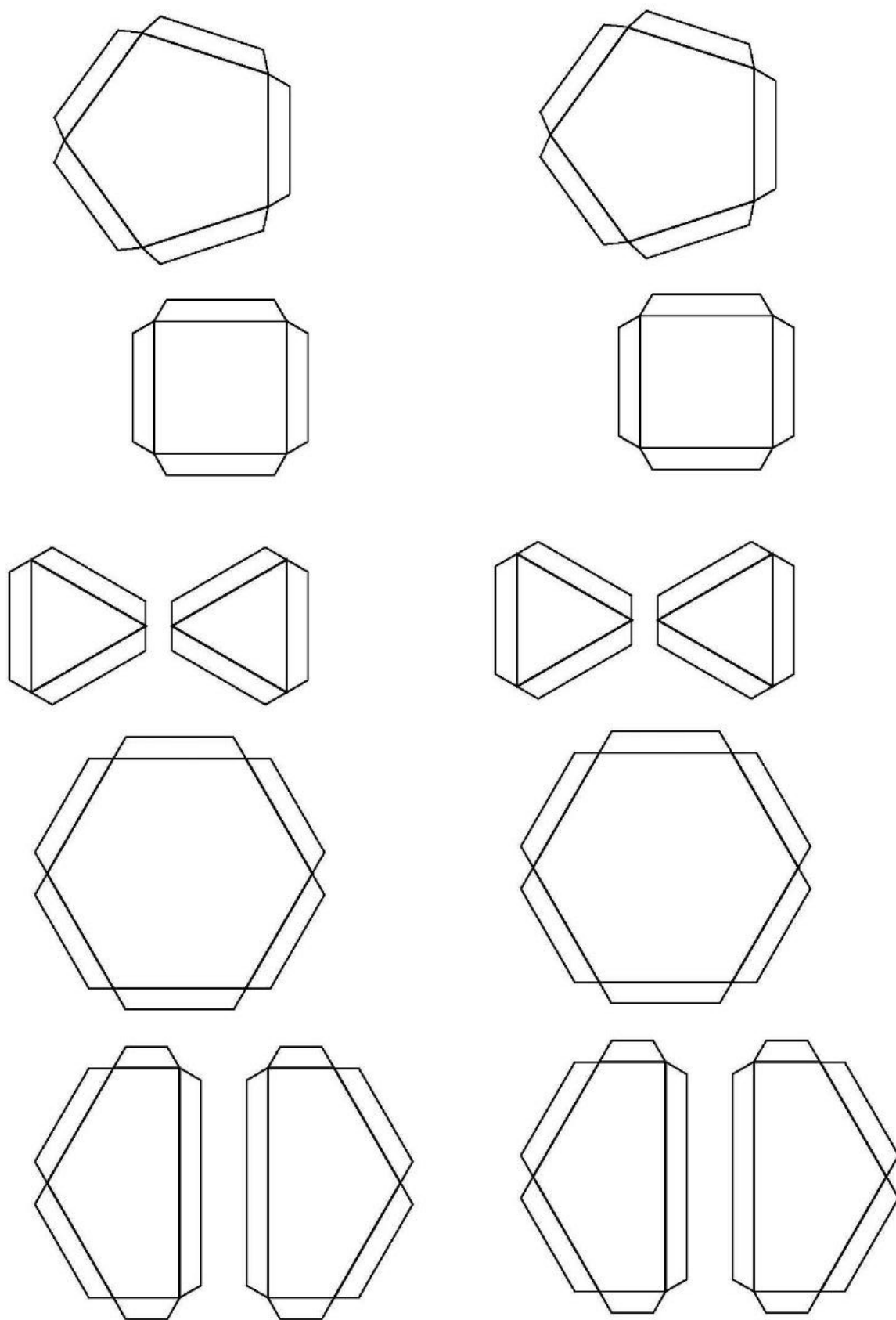


Figura 84. Plantilla para construcción. (elaboración propia)

ANEXO 4. CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES EN LA UNIDAD DIDÁCTICA

Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 3º de E.S.O de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en relación a los bloques 1 y 3 que van a ser utilizados en la unidad didáctica de Cuerpos geométricos, de acuerdo con el RD 1105/2014 (Véase Tabla 54) son los siguientes:

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
CE.1.1 Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	EA.1.1.1 Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.	CMCT
CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). EA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. EA.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. EA.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas	CMCT CAA
CE.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	EA.1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	CCL CMCT CAA
CE.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	EA.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico- probabilístico.	CCL CMCT CAA SIEP

CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	EA.1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. EA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. EA.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. EA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. EA.1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.	CMCT CAA CSC SIEP
CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	EA.1.7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CMCT CAA
CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	CMCT

CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CMCT CAA SIEP
CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	EA.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. EA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. EA.1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	CMCT CD CAA
Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	
Bloque 3. Geometría		
CE.3.5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	EA.3.5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. EA.3.5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. EA.3.5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.	CMCT
CE.3.6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas	EA.3.6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.	CMCT

Tabla 54. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables en la unidad didáctica

ANEXO 5. RÚBRICAS DE EVALUACIÓN

RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LA LIBRETA. (véase Tabla 55)

RÚBRICA 1: EVALUACIÓN DE LA LIBRETA						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
ORDEN	Enumera las páginas y los trabajos están ordenados cronológicamente	Suele enumerar las páginas y la mayoría de los ejercicios están ordenados cronológicamente	Ausencia de numeración en algunas de las páginas y algunas actividades están desordenadas	No pone la fecha y las actividades están desordenadas	15%	
LIMPIEZA	No hay tachones, respeta ambos márgenes e interlineados	No hay exceso de tipp-ex, respeta sólo el margen izquierdo	Hay algunos tachones y exceso de tipp-ex. No respeta el interlineado y líneas de la libreta, no siempre respeta los colores	Hay muchos tachones, no usa tipp-ex, letra ilegible y no respeta los colores	15%	
ORTOGRAFÍA	No tiene más de dos faltas de ortografía por página	Hay un máximo de cinco faltas ortográficas y las ha corregido. O hay un máximo de tres faltas sin corregir	Hay un máximo de diez faltas ortográficas y las ha corregido. O hay un máximo de cinco faltas sin corregir	Hay más de diez faltas ortográficas sin corregir por cada página	20%	
TRABAJO DIARIO	Lleva las tareas al día y corrige las actividades	A veces olvida las tareas pero las termina antes de la revisión. Normalmente corrige las actividades	A veces olvide tanto traer las tareas como presentarlas el día de la revisión	Nunca realiza las tareas ni las tiene terminadas el día de la revisión, tampoco las corrige	50%	

Tabla 55. Rúbrica de Evaluación de la libreta. Extraída de <https://www.orientacionandujar.es/>

RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LA ACTITUD. (véase Tabla 56)

RÚBRICA 2: EVALUACIÓN DE LA ACTITUD						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
PARTICIPACIÓN EN CLASE	Interviene y aporta ideas de forma constante	A menudo interviene y aporta nuevas ideas durante las clases	Es necesario requerir su participación para realizar aportaciones	Se mantiene al margen y no interviene a pesar de solicitar su participación	20%	
RESPECTO DE TURNOS	Siempre respeta el turno de palabra en: debates, coloquios, corrección de actividades	A veces respeta el turno de palabra en: debates, coloquios, corrección de actividades	Le cuesta respetar el turno de palabra en: debates, coloquios, corrección de actividades	No suele respetar el turno de palabra en: debates, coloquios, corrección de actividades	20%	
COMPAÑERISMO	No impone sus ideas y respeta siempre las opiniones ajenas. Se muestra colaborativo para cualquier tarea colectiva	No impone sus ideas y respeta siempre las opiniones ajenas. A menudo se muestra colaborativo para cualquier tarea colectiva	A veces impone sus ideas y respeta siempre las opiniones ajenas. No siempre se muestra colaborativo para cualquier tarea colectiva	Rara vez respeta las opiniones ajenas. No se muestra colaborativo para cualquier tarea colectiva	20%	
ACTITUD DURANTE CLASES	Su comportamiento siempre es correcto permitiendo el desarrollo de la clases sin dificultades	Su comportamiento es correcto, entorpeciendo rara vez el trabajo de sus compañeros	Su comportamiento es mejorable. A veces distrae a sus compañeros y al docente	No permite dar clases con normalidad. Dificulta el trabajo de sus compañeros	20%	

Tabla 56. Rúbrica de Evaluación de actitud. Extraída de <https://www.recursosep.com>

RÚBRICA DE VALORACIÓN DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. (véase Tabla 57)

RÚBRICA 3: VALORACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
LECTURA Y COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA	Lee el enunciado adecuadamente identificando e interpretando los datos necesarios que se dan en él, ya sea de forma narrativa, por medio de gráficos, tablas, diagramas, etc., además, localiza los elementos a resolver, así como los posibles elementos intermedios necesarios para llegar a estos.	Lee el enunciado adecuadamente identificando e interpretando los datos necesarios que se dan en él, ya sea de forma narrativa, por medio de gráficos, tablas, diagramas, etc., además, localiza los elementos a resolver, pero le cuesta ver los posibles elementos intermedios necesarios para llegar a estos.	Lee el enunciado e identifica los datos que se dan en él, aunque le cuesta los que no son dados de forma narrativa. Presenta dificultades para entender cuáles son los elementos a resolver.	Tiene muchas dificultades para extraer los datos, incluso con ayuda. La verbalización sobre la situación problemática planteada es inexistente o incorrecta.	20%	
SELECCIÓN Y APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra la total comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, ya que, de todas las estrategias trabajadas en clase, elige de forma individual la más eficiente y efectiva sin necesidad de ayuda. Además, relaciona en todo momento los datos con las cantidades desconocidas y deja rastro de lo que va a hacer.	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra comprensión de los conceptos matemáticos involucrados, ya que elige de forma individual la más efectiva, pero no relaciona los datos con las cantidades desconocidas o no deja rastro de lo que va a hacer.	La selección y la aplicación de la estrategia elegida demuestra comprensión parcial de los conceptos matemáticos involucrados, ya que la estrategia elegida no es la más adecuada en esta ocasión.	No es capaz de generar posibles estrategias para la resolución del problema o el desarrollo de la estrategia elegida es incorrecto y no repara en ello.	30%	

SOLUCIÓN	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y/o a su interpretación.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos y ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y/o a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada.	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos y ayudándose, si es necesario de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta.	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula que utiliza no es correcta.	20%	
ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN	Comprueba si la solución es coherente, sustituyendo el valor obtenido en el razonamiento inicial y viendo que es válida, tanto matemáticamente como en la realidad a la que el enunciado se refiere, dando una frase que responde a la pregunta planteada.	Da la solución, comprobando previamente si es coherente, sustituyendo el valor obtenido en el razonamiento inicial y viendo que es válida matemáticamente, pero no comprueba si tiene sentido en la realidad a la que el enunciado se refiere.	Da la solución del problema, pero no comprueba si es coherente en ningún caso.	No explicita la solución ni la contrasta.	30%	

Tabla 57. Rúbrica Valoración de la resolución de problemas. Extraída de <https://www.recursosep.com>

RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LAS PRUEBAS ESCRITAS. (véase Tabla 58)

RÚBRICA 4: EVALUACIÓN DE LAS PRUEBAS ESCRITAS						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
PRESENTACIÓN	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	10%	
CORRECCIÓN ORTOGRÁFICA	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su edad.	20%	
VOCABULARIO EMPLEADO	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque con palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	10%	
CONTENIDO	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito con algún error.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito) con diversos	60%	

Tabla 58. Rúbrica de Evaluación de pruebas escritas. Extraída de <https://www.recursosep.com>

RÚBRICA DE INTERVENCIÓN EN CLASE. (véase Tabla 59)

RÚBRICA 5: INTERVENCION EN CLASE						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
PRONUNCIACIÓN Y ENTONACIÓN	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	10%	
VOLUMEN Y CONTACTO VISUAL	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes y algunas oyentes del grupo.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	10%	
RECURSOS Y APOYOS	Utiliza diversos apoyos visuales y referencias al trabajo realizado a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	Utiliza algunos apoyos visuales a lo largo de su exposición y referencias al trabajo realizado que	Utiliza pocos apoyos visuales a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	No utiliza apoyos visuales en su exposición o apenas lo hace.	30%	
CONTENIDO	Demuestra un completo dominio del tema tratado, destacando claramente los aspectos importantes, exponiéndolo de manera clara y correcta, y utilizando un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo, no siendo certero en las respuestas a las preguntas del grupo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	50%	

Tabla 59. Rúbrica de intervención en clase. Extraída de <https://www.recursosep.com>

RÚBRICA DE TRABAJO INDIVIDUAL. (véase Tabla 60)

RÚBRICA 6: TRABAJO INDIVIDUAL						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
BÚSQUEDA DE LA INFORMACIÓN	Utiliza correctamente los recursos y/o medios a su alcance para buscar toda la información.	Utiliza algún recurso y/o medio a su alcance para buscar toda la información.	Utiliza algún recurso y/o medio a su alcance para buscar parte de la información.	Utiliza algún recurso y/o medio para buscar la información con la ayuda del docente o de otro	20%	
OBTENCIÓN DE LA INFORMACIÓN	Obtiene todos los datos necesarios para dar respuesta a la actividad, ajustándose a los tiempos establecidos.	Obtiene bastantes datos para dar respuesta a la actividad, ajustándose a los tiempos establecidos.	Obtiene algunos datos para dar respuesta a la actividad, con dificultades para ajustarse a los tiempos establecidos.	Obtiene algunos datos con la ayuda del docente o de otro alumno/a sin ajustarse a los tiempos establecidos.	15%	
TRATAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	Analiza la información obtenida de las fuentes consultadas, extrayéndola de manera rigurosa y ordenándola sistemáticamente.	Analiza la información obtenida de las fuentes consultadas, extrayéndola y ordenándola correctamente.	Analiza parte de la información obtenida de las fuentes consultadas, ordenándola de manera adecuada.	Realiza con apoyo alguno de las tareas correspondientes al tratamiento y análisis de la información.	15%	
INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS	Realiza valoraciones y/o emite juicios sobre la información obtenida de un modo riguroso.	Realiza valoraciones y/o emite juicios sobre la información obtenida.	Realiza alguna interpretación sobre la información obtenida.	Realiza alguna interpretación con la ayuda del docente o de otro alumno/a.	20%	
EXPOSICIÓN DE CONCLUSIONES	Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado de manera clara, rigurosa y coherente respecto a los datos obtenidos.	Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado.	Expone/presenta algunos hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado.	Expone con mucha dificultad alguna de las informaciones obtenidas.	30%	

Tabla 60. Rúbrica de Evaluación de trabajo individual. Extraída de <https://www.recursosep.com>

RÚBRICA DE TRABAJO EN GRUPO. (véase Tabla 61)

RÚBRICA 7: TRABAJO EN GRUPO						
	EXCELENTE (9-10)	BUENO (7-8)	ADECUADO (5-6)	MEJORABLE (1-4)	PONDERACIÓN	VALORACIÓN
ACTITUD PREVIA	Muestra mucho interés en la realización del proyecto. Es proactivo, está ilusionado	Muestra bastante interés en la realización del proyecto.	No muestra demasiado interés. Lo percibe como un trabajo más de clase, su meta es realizarlo sin más	No muestra ningún interés por el proyecto	10%	
ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	Colabora muy activamente en las labores de organización de los resultados del trabajo de campo.	Colabora en las labores de organización de los resultados del trabajo de campo	Colabora en las labores de organización de los resultados del trabajo de campo, pero con un constante empuje por parte del docente	Su colaboración es mínima, pese al constante empuje del docente	20%	
ELABORACIÓN DEL PRODUCTO FINAL	Colabora muy activamente en la elaboración del trabajo final	Colabora en la elaboración del trabajo final	Colabora en la elaboración del trabajo final, pero con un constante empuje por parte del docente	Su colaboración es mínima, pese al constante empuje del docente	15%	
CONTRIBUCIÓN GENERAL AL PROYECTO	Siempre aporta al logro de los objetivos. Busca y sugiere soluciones a los problemas	Casi siempre aporta al logro de los objetivos. Casi siempre busca y sugiere soluciones a los problemas	Pocas veces aporta al logro de los objetivos. Pocas veces busca y sugiere soluciones a los problemas	No aporta al logro de los objetivos. Muy pocas veces o ninguna busca y sugiere soluciones a los problemas	20%	

INTEGRACIÓN AL GRUPO	Siempre trabaja para lograr las metas, cumple con las normas y se adapta a los cambios del equipo	Casi siempre trabaja para lograr las metas, cumple con las normas y se adapta a los cambios del equipo	Pocas veces trabaja para lograr las metas ni cumple con las normas ni se adapta a los cambios del equipo	Nunca trabaja para lograr las metas, muy pocas veces o nunca cumple con las normas y se adapta a los cambios del equipo	15%	
DESTREZAS SOCIALES	Siempre demuestra tener habilidad para manejar las relaciones entre los miembros del grupo y establece lazos de comunicación. Trata con respeto y amabilidad a sus compañeros	Casi siempre demuestra tener habilidad para manejar las relaciones entre los miembros del grupo y establece lazos de comunicación. Casi siempre trata con respeto y amabilidad a sus compañeros	Pocas veces demuestra tener habilidad para manejar las relaciones entre los miembros del grupo y establece lazos de comunicación. Pocas veces trata con respeto y amabilidad a sus compañeros	Nunca demuestra tener habilidad para manejar las relaciones entre los miembros del grupo. Muy pocas veces o nunca establece lazos de comunicación y trata con respeto y amabilidad a sus compañeros	10%	
ACTITUD ANTE LA CRÍTICA	Siempre está receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo	Casi siempre está receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo	Pocas veces está receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo	Muy pocas veces o nunca está receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo	10%	

Tabla 61. Rúbrica de trabajo en grupo. Extraída de <http://www.edu.xunta.gal/>

REFERENCIAS DE IMÁGENES Y TABLAS

IMÁGENES

- Vila, C. (2012). El mundo de M.C. Escher. [Figura 35]. Recuperado de <https://vimeo.com/36296951>
- Gocork (s.f). Test. [Figura 35]. Recuperado de <https://www.goconqr.com/>
- Google (s.f), Versión 7.3.3 Google Earth [Figura 59]. Descargado de <https://www.google.es/earth/download/gep/agree.html>
- Google (s.f), Versión 7.3.3 Google Earth [Figura 60]. Descargado de <https://www.google.es/earth/download/gep/agree.html>
- Google (s.f), Versión 7.3.3 Google Earth [Figura 61]. Descargado de <https://www.google.es/earth/download/gep/agree.html>
- Google (s.f), Versión 7.3.3 Google Earth [Figura 62]. Descargado de <https://www.google.es/earth/download/gep/agree.html>
- Google (s.f), Versión 7.3.3 Google Earth [Figura 63]. Descargado de <https://www.google.es/earth/download/gep/agree.html>
- Martínez, F. (2018). Domos poliédricos Regulares. [Figura 64]. Recuperado de <http://wiki.ead.pucv.cl/>
- Vila, C. (2012). Inspiration. [Figura 65]. Recuperado de <https://vimeo.com/36296951>
- Rinus Roelofs (2020). Estructura. [Figura 66]. Recuperada de <http://www.rinusroelofs.nl/structure/dome-bp/dome-bp-00.html>
- Muñoz. J.L. (2018). Matemáticas en tierra de cine: Las cúpulas del trueno. Versión escolar de estructura [Figura 67]. Recuperado de <https://thales.cica.es/xviiceam/actas/pdf/ta21.pdf>
- Muñoz. J.L. (2018). Matemáticas en tierra de cine: Las cúpulas del trueno. Teselaciones [Figura 68]. Recuperado de <https://thales.cica.es/xviiceam/actas/pdf/ta21.pdf>
- Muñoz. J.L. (2018). Matemáticas en tierra de cine: Estructura Leonardo. [Figura 69]. Recuperado de <https://thales.cica.es/xviiceam/actas/pdf/ta21.pdf>
- Martínez, F. (2018). Domos poliédricos Regulares. [Figura 70]. Recuperado de <http://wiki.ead.pucv.cl/>
- Martínez, F. (2018). Estructura domo [Figura 72]. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>
- Martínez, F. (2018). Uniones. [Figura 73]. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>

- Martínez, F. (2018). Domos poliédricos Regulares. [Figura 74]. Recuperado de <https://www.elab-hackerspace.org/2015/09/08/cupula-geodesica/>
- Martínez, F. (2018). Principio de tensegridad. [Figura 75]. Recuperado de <http://wiki.ead.pucv.cl/>.
- Agudelo J.A. (2019). Estructura tensegrítica. [Figura 76]. Recuperado de <https://estructurando.net/2014/12/09/estructuras-tensegriticas-que-son-como-se-calculan-y-un-programa-para-jugar-con-ellas/>
- Architectural Digest AD. (2019). Primeras cúpulas geodésicas. [Figura 77]. Recuperado de <https://www.revistaad.es/>
- Naukas (2019). Definición de tensegridad M. Guzmán, [Figura 78]. Recuperado de <https://www.revistaad.es/>
- Decathlon (2019). Estructura tensegrítica tienda de campaña. [Figura 79]. Recuperado de <http://seconds.quechua.com>
- Landin, P. (2019). . Poliedros. Estructura tensegrítica [Figura 80]. Extraída de <https://pelandintecno.blogspot.com/2020/02/islas-de-compresion-en-un-oceano-de.html>
- Wikipedia (s.f). Simplex [Figura 81]. Extraída de <https://es.qwe.wiki/wiki/Tensegrity>
- AJO taller de arquitectura S.L.P (2019). Construcción de un icosaedro por tensegridad. [Figura 82]. Extraída de https://www.enelajo.es/portfolio_page/taller-tensegrity/
- Jugueteria. (2019). Kit de construcción. [Figura 83]. Extraída de <https://juguetaria.com/construcciones/417-zometool-creator-3.html>
- Tetraedro (s.f). En Wikiwand. Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://www.wikiwand.com/es/Tetraedro>
- Cubo (s.f). En Wikiwand. Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://www.wikiwand.com/es/Cubo>
- Octaedro (s.f). En Wikiwand. Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://www.wikiwand.com/es/Octaedro>
- Dodecaedro (s.f). En Wikiwand. Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://www.wikiwand.com/es/Dodecaedro>
- Icosaedro (s.f). En Wikiwand. Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://www.wikiwand.com/es/Icosaedro>
- Geometría (s.f). En Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa>
- Topología (s.f). En Wikipedia. Recuperado el 5 de Abril de 2020 de <https://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa>

Grafo Dual (s.f). En Wikipedia. Recuperado el 12 de Mayo de 2020 de https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo_dual

Número áureo (s.f). En Wikipedia. Recuperado el 12 de Mayo de 2020 de https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo

Real Académica Española. (s.f). Geometría. En Diccionario de la lengua española (2019). Recuperado de <https://dle.rae.es/geometr%C3%ADa>

Real Académica Española. (s.f). Topología. En Diccionario de la lengua española (2019). Recuperado de <https://dle.rae.es/topolog%C3%ADa>

TABLAS

Des-educando (s.f). Rúbrica de Evaluación de la libreta [Tabla 55]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>

Des-educando (s.f). Rúbrica de Evaluación de actitud [Tabla 56]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>

Des-educando (s.f). Rúbrica Valoración de la resolución de ejercicios [Tabla 57]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>

Des-educando (s.f). Rúbrica de Evaluación de pruebas escritas [Tabla 58]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>

Des-educando (s.f). Rúbrica de intervención en clase [Tabla 59]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>

Des-educando (s.f). Rúbrica de Evaluación de trabajo individual [Tabla 60]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>

Des-educando (s.f). Rúbrica de trabajo en grupo [Tabla 61]. Recuperado de <https://www.orientacionandujar.es/>