



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Alumno/a: Jiménez Molero, Víctor

Tutor/a: Prof. D. Francisco Javier García García
Prof. D. Juan Antonio Espinosa Pulido

Dpto: Didáctica de las Matemáticas

Septiembre 2023

Índice

Resumen.....	4
Abstract	4
1. Introducción	5
2. Objetivos	6
3. Fundamentación Epistemológica	7
3.1. Introducción	7
3.2. Estudio Global de funciones.....	8
3.2.1. Dominio y recorrido	8
3.2.2. Simetría	9
3.2.3. Periodicidad.....	10
3.2.4. Puntos de corte con los ejes coordenados.....	12
3.2.5. Continuidad	12
3.2.6. Derivabilidad	16
3.3. Monotonía de una función. Extremos relativos y absolutos.....	17
3.3.1. Máximos y mínimos absolutos de una función.....	17
3.3.2. Máximos y mínimos relativos de una función.....	20
3.3.3. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de funciones.....	24
3.4. Puntos de inflexión. Convexidad y concavidad	28
3.5. Ramas Infinitas. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas	32
3.6. Representación gráfica de funciones	35
4. Fundamentación Curricular.....	40
4.1. Análisis del currículo	40
4.2. Análisis de libros de texto.....	47
5. Fundamentación Didáctica. Investigaciones sobre situaciones de enseñanza/aprendizaje	55
6. Proyección Didáctica. Elaboración de una Unidad Didáctica	62
6.1. Título.....	62
6.2. Justificación	62
6.2.1. Justificación curricular.....	63
6.2.2. Justificación social	65
6.2.3. Justificación didáctica.....	66
6.2.4. Justificación cultural.....	67
6.3. Contextualización del centro y del aula	68
6.4. Objetivos	70
6.4.1. Objetivos generales de etapa.....	70
6.4.2. Objetivos del área de las matemáticas.....	72

6.4.3. Objetivos de la Unidad Didáctica	73
6.5. Competencias clave.....	74
6.6. Contenidos	78
6.7. Metodología.....	79
6.8. Actividades y recursos.....	81
6.9. Atención a la diversidad	84
6.10. Temporalización.....	87
6.11. Evaluación	93
7. Conclusiones	99
8. Bibliografía	100
Anexo 1: Actividades Propuestas	103

Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1 Objetivos del presente TFM. Fuente: Elaboración propia.....	7
Ilustración 2 Función con simetría par. Fuente: Elaboración propia con software Geogebra.	9
Ilustración 3 Función con simetría impar. Fuente: Elaboración propia con software Geogebra.	10
Ilustración 4 Gráfica de la función $f(x) = \sin(x)$. Fuente: Elaboración propia.	11
Ilustración 5 Gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$. Fuente: Elaboración propia.....	11
Ilustración 6 Estudio de la continuidad de una función. Fuente: Elaboración propia.....	13
Ilustración 7 Estudio de discontinuidad evitable de una función. Fuente: Elaboración propia..	13
Ilustración 8 Estudio de discontinuidad inevitable de salto finito de una función. Fuente: Elaboración propia	14
Ilustración 9 Estudio de discontinuidad inevitable de salto infinito de una función. Fuente: Elaboración propia	14
Ilustración 10 Derivada en un punto representada geoméricamente. Fuente: Elaboración propia.	16
Ilustración 11 Teorema de Weierstrass de forma gráfica. Fuente: https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/calculo/teorema-weierstrass.html	20
Ilustración 12 Extremos relativos y absolutos. Fuente: https://matematicasies.com/Extremos-maximos-y-minimos-de-una-funcion	20
Ilustración 13 Teorema de Rolle representado gráficamente. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Rolle	23
Ilustración 14 Teorema del Valor Medio de Lagrange representado gráficamente. Fuente: https://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/segundo_ciencias/teorema_derivadas/teoria/teorema_valor_medio.html	24
Ilustración 15 Funciones estrictamente creciente y decreciente respectivamente. Fuente: Elaboración propia	25
Ilustración 16 Función convexa y función cóncava. Fuente: https://www.rankia.com/blog/invertir-con-cabeza/4775157-negocios-convexos	29
Ilustración 17 Punto de inflexión de una función. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_de_inflexi%C3%B3n	31

Ilustración 18 Asíntota vertical de una función racional. Fuente: Elaboración propia con Software Geogebra.	33
Ilustración 19 Estudio de asíntotas horizontales. Fuente: Elaboración propia con Software Geogebra.....	33
Ilustración 20 Estudio de asíntotas oblicuas. Fuente: Elaboración propia.....	35
Ilustración 21 Estudio de crecimiento y decrecimiento. Fuente: Elaboración propia con software Geogebra.....	37
Ilustración 22 Representación gráfica de una función. Fuente: Elaboración propio con software Geogebra.....	39
Ilustración 23 Objetivos de etapa. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en la ESO en Andalucía. Fuente: Elaboración propia.....	41
Ilustración 24 Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Fuente: R.D. 1105/2014, del 26 de diciembre.....	43
Ilustración 25 Bloque 4: Funciones. 4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Fuente: R.D. 1105/2014, del 26 de diciembre.....	44
Ilustración 26 Bloque 1. Criterios de evaluación y competencias. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016. Elaboración propia.	46
Ilustración 27 Bloque 4. Criterios de evaluación y competencias. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.	47
Ilustración 28 Comparativa entre índices de libros de texto de Anaya y SM. Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia.	50
Ilustración 29 Contenidos que comparten ambos libros de texto de Anaya y SM. Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia.....	51
Ilustración 30 Contenidos que no comparten ambos libros de texto de Anaya y SM. Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia.....	51
Ilustración 31 Función a trozos con errores en la imagen para un mismo punto del dominio. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.66).....	58
Ilustración 32 Ramas verticales en representación parabólica. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.65).....	59
Ilustración 33 Representación de asíntotas. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.66).....	59
Ilustración 34 Uso de escala desproporcionada. Fuente: Arce y Ortega (2013, p. 67).....	60
Ilustración 35 Rama infinita no creciente. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.68).....	60
Ilustración 36 Criterios de Evaluación. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016.....	63
Ilustración 37 Estándares de aprendizaje evaluables. Fuente: Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre.....	64
Ilustración 38 Movimiento parabólico lanzamiento pelota. Fuente: https://www.um.es/phi/aguirao/EntreParticulas/PDF/2021%20abril13.pdf	67
Ilustración 39 Puente de la Barqueta (Sevilla). Fuente: https://www.tripadvisor.es/Attraction_Review-g187443-d8837800-Reviews-Puente_de_la_Barqueta-Seville_Province_of_Seville_Andalucia.html	68
Ilustración 40 Ubicación C.D.P. La Milagrosa (Úbeda). Fuente: Google Maps. Elaboración propia.....	68
Ilustración 41 Entrada C.D.P. La Milagrosa (Úbeda). Fuente: https://cadenaser.com/emisora/2019/09/20/radio_ubeda/1568983289_176480.html	69
Ilustración 42 Objetivos Generales de la Etapa de ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre.....	71

Ilustración 43 Objetivos de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas aplicadas. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016.....	73
Ilustración 44 Competencias Clave. Fuente: Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre	74
Ilustración 45 Contenidos de la Unidad Didáctica relacionados con el Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. Fuente: Elaboración propia.....	78
Ilustración 46 Contenidos de la Unidad Didáctica relacionados con el Bloque 4. Funciones. Fuente: Elaboración propia.	78
Ilustración 47 Recursos para la Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia.....	83
Ilustración 48 Unidad Didáctica. Sesión 1. Fuente: Elaboración propia.....	88
Ilustración 49 Unidad Didáctica. Sesión 2. Fuente: Elaboración propia.....	88
Ilustración 50 Unidad Didáctica. Sesión 3. Fuente: Elaboración propia.....	89
Ilustración 51 Unidad Didáctica. Sesión 4. Fuente: Elaboración propia.....	89
Ilustración 52 Unidad Didáctica. Sesión 5. Fuente: Elaboración propia.....	90
Ilustración 53 Unidad Didáctica. Sesión 6. Fuente: Elaboración propia.....	90
Ilustración 54 Unidad Didáctica. Sesión 7. Fuente: Elaboración propia.....	91
Ilustración 55 Unidad Didáctica. Sesión 8. Fuente: Elaboración propia.....	91
Ilustración 56 Unidad Didáctica. Sesión 9. Fuente: Elaboración propia.....	92
Ilustración 57 Unidad Didáctica. Sesión 10. Fuente: Elaboración propia.....	92
Ilustración 58 Unidad Didáctica. Sesión 11. Fuente: Elaboración propia.....	93
Ilustración 59 Estándares de aprendizaje del bloque 1 relacionados con la Unidad Didáctica. Fuente: Real Decreto 1105/2014.	94
Ilustración 60 Estándares de aprendizaje del bloque 4 relacionados con la Unidad Didáctica. Fuente: Real Decreto 1105/2014.	95
Ilustración 61 Bloque 1. Criterio de Evaluación 1. Fuente: Elaboración propia.	95
Ilustración 62 Bloque 1. Criterio de Evaluación 2. Fuente: Elaboración propia.	96
Ilustración 63 Bloque 1. Criterio de Evaluación 3. Fuente: Elaboración propia.	96
Ilustración 64 Bloque 1. Criterio de Evaluación 6. Fuente: Elaboración propia.	96
Ilustración 65 Bloque 1. Criterio de Evaluación 7. Fuente: Elaboración propia.	97
Ilustración 66 Bloque 1. Criterio de Evaluación 11. Fuente: Elaboración propia.	97
Ilustración 67 Bloque 4. Criterio de Evaluación 1. Fuente: Elaboración propia.	97
Ilustración 68 Bloque 4. Criterio de Evaluación 2. Fuente: Elaboración propia.	98
Ilustración 69 Criterios de Calificación. Fuente: Elaboración propia.....	99

Resumen

El propósito principal del presente Trabajo Fin de Máster será desarrollar una unidad didáctica de Matemáticas mediante la aplicación de los conocimientos obtenidos durante el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, enfocándose específicamente dentro de la rama de Matemáticas. La unidad didáctica se centra en el tema de funciones y gráficas, abordando de específicamente dicho bloque temático.

Por una parte, dentro de la justificación epistemológica se examina un tema de las oposiciones con gran rigor matemático, dentro de la justificación del currículum se realiza un estudio de la normativa actual y del contenido de diferentes libros de texto empleados en diferentes centros educativos, y, por último, en la fundamentación didáctica pondremos énfasis en diferentes investigaciones realizadas en el campo de las matemáticas.

Asimismo, se elabora una unidad didáctica dirigida a los estudiantes de 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la especialidad de Matemáticas Aplicadas, la cual se centra en el bloque de funciones y gráficas. En este proceso, se examinan diversas técnicas pedagógicas, se describen los objetivos a alcanzar, los contenidos y las competencias clave, entre otros aspectos relevantes.

PALABRAS CLAVE: Funciones y gráficas, Unidad Didáctica, Matemáticas, Educación Secundaria Obligatoria

Abstract

The main purpose of this Master's Thesis is to develop a Mathematics didactic unit by applying the knowledge acquired during the University Master's Degree in Secondary Education and Baccalaureate Teaching, Vocational Training and Language Teaching, specifically focusing on the Mathematics specialty. The didactic unit focuses on the topic of functions and graphs, specifically addressing that thematic block.

On one hand, the epistemological justification examines a topic from the competitive examinations with great mathematical rigor; in the curricular justification, an analysis is carried out of the current curriculum and the content of different textbooks used in various educational centers; and finally, in the didactic foundation, emphasis is placed on research conducted in the field of mathematics.

Likewise, a didactic unit is developed aimed for de 4th year of Compulsory Secondary Education in the specialty of Applied Mathematics, which focuses on the topic of functions and graphs. In this process, various pedagogical techniques are examined,

objectives to be achieved, content, and key competencies are described, among other relevant aspects.

KEYWORDS: Functions and graphs, Didactic Unit, Mathematics, Compulsory Secondary Education

1. Introducción

El principal propósito de este Trabajo Fin de Máster es adquirir las habilidades profesionales esenciales para el profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, siendo el principal objetivo de poder aplicarlas en el diseño y desarrollo de futuras programaciones y experiencias didácticas en el aula, para cada una de las unidades que conforman la materia de una especialidad. Esto se llevará a cabo, en consonancia con las competencias requeridas por la legislación vigente, a nivel estatal y a nivel autonómico.

La primera parte de este Trabajo Fin de Máster se subdivide en tres bloques:

En primer lugar, se realiza una fundamentación epistemológica que implica el análisis de un tema del temario de oposiciones con un alto grado de complejidad matemática. En este caso, se realiza un estudio exhaustivo sobre las funciones y su representación gráfica.

En el segundo bloque se expondrá la fundamentación curricular en la cual se realizará un análisis pormenorizado del plan de estudios vigente en España, junto con un análisis detallado de algunos libros de texto relevantes relacionados con el tema escogido. Se lleva a cabo un breve estudio sobre la situación actual del tema y se concluye con una comparación entre dos casas diferentes de libros de texto.

En el tercer bloque se desarrolla la fundamentación didáctica, en la que se profundiza en los principales errores que cometen tanto los alumnos como los docentes en el proceso enseñanza/aprendizaje de funciones y gráficas, con el objetivo de identificar los escollos más comunes y plantear soluciones didácticas que permitan prosperar en la comprensión de los conceptos. Se hace una revisión de algunas de las investigaciones relevantes en el área y se analizan distintas metodologías que puedan ser útiles en la enseñanza de estas temáticas.

Por último, se elabora una unidad didáctica centrada en el bloque de funciones y gráficas para un grupo de estudiantes de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) dentro de la modalidad de Matemáticas Orientadas a las enseñanzas Aplicadas en el C.D.P. La Milagrosa de Úbeda, donde realicé prácticas docentes por un período de cinco semanas. El diseño de esta Unidad Didáctica estará guiado por todos los apartados

desarrollados anteriormente de manera que todos los apartados del presente TFM queden interconectados entre sí.

Durante la elaboración de este Trabajo Fin de Máster, se han utilizado diversos recursos bibliográficos para contextualizar la coyuntura actual en la enseñanza de Matemáticas, lo que ha permitido identificar las limitaciones que enfrenta el sistema educativo español en comparación con el de otros países.

2. Objetivos

El objetivo principal del presente TFM es el desarrollo de una Unidad Didáctica regulada por el currículum vigente.

Así mismo, la elaboración del presente TFM nos propone el reto de desarrollar los siguientes objetivos que se enumeran a continuación:

Objetivos a desarrollar
Indagar en la normativa curricular vigente sobre qué se debe enseñar acerca de las funciones en 4º curso de la ESO
Analizar la propuesta que diferentes editoriales hacen respecto a la enseñanza de las funciones en 4º de ESO
Desarrollar, con cierto rigor matemático, un tema del temario oficial de oposiciones de profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato en la especialidad de Matemáticas relacionado con los contenidos incluidos en la Unidad Didáctica. En este caso, el tema 28 "Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones", que está relacionado con gráficas y funciones.
Analizar algunas investigaciones que hayan abordado aspectos relacionados con el aprendizaje y/o la enseñanza de las Matemáticas y, en concreto, el Análisis Matemático para conocer los errores más comunes que suele presentar el alumnado, así como también las posibles dificultades que presenten.
Elaborar una Unidad Didáctica, que en este caso será para el alumnado de 4º ESO de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.
Utilizar diversas metodologías existentes en la enseñanza que incrementen la motivación del alumnado frente al aprendizaje.

Elaboración de una serie de actividades que permitan conseguir las competencias y los objetivos necesarios.
Desarrollar estrategias y actividades para alumnos con ciertas dificultades respecto al progreso esperado del grupo.
Realizar una temporalización con el número de sesiones que se llevarán a cabo y la distribución de contenidos y actividades entre ellas.
Evaluar adecuadamente los contenidos desarrollados en la Unidad Didáctica haciendo uso de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Ilustración 1 Objetivos del presente TFM. Fuente: Elaboración propia.

3. Fundamentación Epistemológica

Este bloque tiene como objetivo explicar el desarrollo de un tema relacionado con las funciones que está incluido en la Orden de 9 de septiembre de 1993. Esta orden establece los planes de estudio para los procedimientos de acceso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para ciertas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, que son regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. En particular, se aborda el tema 28, que se titula “Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones”.

3.1. Introducción

En este apartado, nos ceñiremos al estudio general de funciones y en descubrir los distintos elementos y propiedades que puede tener una función para conseguir finalmente su representación gráfica. Todo ello centrado en las funciones reales con variable real, que constituyen el armazón de la Matemática actual y, por tanto, de la ciencia en general.

El análisis de funciones resulta fundamental no solamente en el campo de matemáticas, sino por supuesto en disciplinas como las ciencias. Esto se debe a que las funciones pueden describir diversos fenómenos que se rigen por leyes expresables en forma de funciones y gráficas. Al interpretar la evolución de estas funciones, se pueden obtener conclusiones prácticas y extrapolables a situaciones reales. Por lo tanto, la capacidad de trabajar con funciones es esencial para comprender y aplicar conocimientos en una variedad de campos.

Es por esta razón que, desde una perspectiva educativa, las funciones son uno de las partes más críticas en el campo de las matemáticas. Es fundamental que los estudiantes

aprendan a expresar y utilizar de manera efectiva todos los aspectos relacionados con las funciones, lo cual les permitirá adquirir habilidades matemáticas sólidas y un entendimiento más profundo de los conceptos matemáticos y sus aplicaciones en otros campos. Además, el conocimiento de las funciones también es esencial para el éxito en exámenes y pruebas estandarizadas. Por lo tanto, es importante que los estudiantes dominen el concepto de las funciones para tener éxito en su educación y en sus futuras carreras.

3.2. Estudio Global de funciones

Para dar inicio al contenido, abordaremos en una primera instancia el concepto de función que, después de una evolución prolongada a lo largo de los años, empleamos en la actualidad.

Definición 1: Concepto de función

Considerando \mathbb{C} como un subconjunto no vacío perteneciente a \mathbb{R} , se establece que f se tomará una función real de variable real y definida en \mathbb{C} si a cada elemento presente en \mathbb{C} se le asigna exclusivamente un número real. En esta circunstancia, la notación empleada será:

$$f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Se afirma que x será la variable independiente y que y será la variable cuyos valores son determinados por x , es decir, la variable dependiente.

En los próximos apartados, nos adentraremos en las propiedades generales de las funciones y sus definiciones y demostraciones.

3.2.1. Dominio y recorrido

Definición 2: Dominio de una función

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. El conjunto de valores para los cuales hay al menos un valor y que satisface la ecuación $f(x) = y$ se denominará dominio de la función f , y se representa como $Dom(f)$.

Definición 3: Recorrido de una función

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. El grupo de valores de y que se obtienen como resultado de aplicar f a algún elemento en el dominio $Dom(f)$ es conocido como el recorrido o conjunto imagen de la función f , representado por $Im(f)$.

De manera intuitiva, podemos concebir una función como una representación tabular que contiene dos series de datos, en la que cada entrada se compone de un par de valores ordenados (x, y) . La serie correspondiente a los valores de x constituye el $Dom(f)$, mientras que la serie vinculada a los valores de y representa el recorrido de f , $Im(f) = \{f(x) / x \in Dom(f)\} \equiv f(Dom(f))$.

3.2.2. Simetría

Una característica que puede manifestarse en ciertas funciones reales con una variable real es lo que se conoce como simetría. Dentro del ámbito matemático, es posible categorizar las funciones en función de su simetría, las cuales pueden ser identificadas como funciones pares, impares, o carecer de cualquier forma de simetría. A continuación, exploraremos las definiciones y propiedades específicas asociadas a cada una de estas clasificaciones.

Definición 4: Simetría par

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Identificaremos a la función f con simetría par cuando ésta presente una simetría con respecto al eje vertical (eje de las ordenadas).

$$\forall x \in Dom(f)$$

$$i) -x \in Dom(f)$$

$$ii) f(-x) = f(x)$$

Desde una perspectiva geométrica, podemos afirmar que una función exhibe simetría par cuando, al realizar una reflexión sobre el eje vertical (eje de ordenadas) y plegar el plano, la interpretación gráfica de la función se superpone en sí misma.

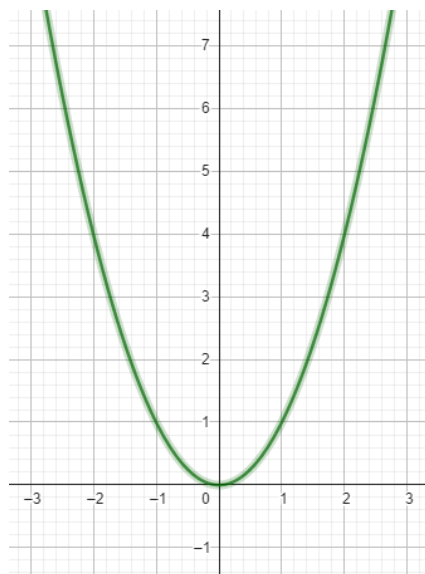


Ilustración 2 Función con simetría par. Fuente: Elaboración propia con software Geogebra.

Definición 5: Simetría impar

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Identificaremos a la función f con simetría impar cuando la gráfica de la función atesora simetría rotacional respecto al origen. En definitiva, su gráfica no sufrirá variación al realizarse una rotación de 180° respecto al origen.

$$\forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$i) -x \in \text{Dom}(f)$$

$$ii) f(-x) = -f(x)$$

En términos geométricos, una función posee simetría impar cuando, al realizar una reflexión sobre el eje vertical (eje de ordenadas) seguida de una reflexión en el eje horizontal (eje de las abscisas), la interpretación gráfica de la función se superpone en sí misma.

Si una función es simétrica, su estudio se reduce a $\mathbb{R}^+ \cap \text{Dom}(f)$ o $\mathbb{R}^- \cap \text{Dom}(f)$, y teniendo en cuenta la simetría, se completa el estudio a todo $\text{Dom}(f)$.

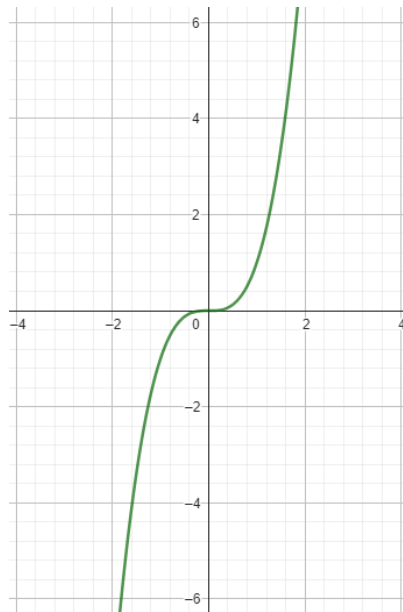


Ilustración 3 Función con simetría impar. Fuente: Elaboración propia con software Geogebra.

3.2.3. Periodicidad

Una propiedad adicional presente en las funciones reales con una variable real es la periodicidad, la cual es una cualidad que se observa en las funciones trigonométricas.

Por intuición, podemos afirmar que una función presenta periodicidad cuando su representación gráfica se reproduce en un patrón idéntico cada vez que la variable x atraviesa un intervalo específico.

Definición 6: Periodicidad

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Se dice que una función f es periódica si,

$x \in \text{Dom}(f)$, entonces:

i) $x + T \in \text{Dom}(f)$

ii) $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots$

Al menor T , se le llama periodo.

De esta manera, basta estudiar f en un periodo, después aplicando $f(x) = f(x + T)$, se extiende a todo el dominio.

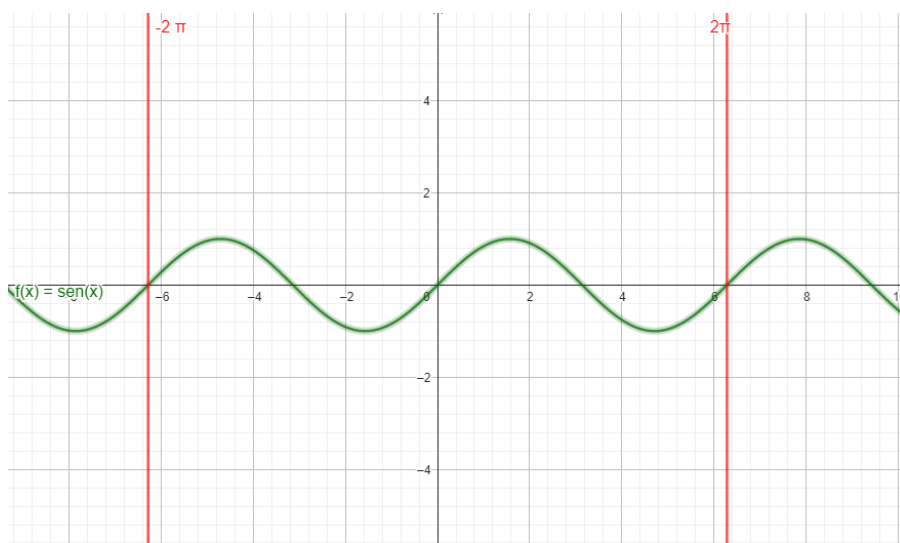


Ilustración 4 Gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$. Fuente: Elaboración propia.

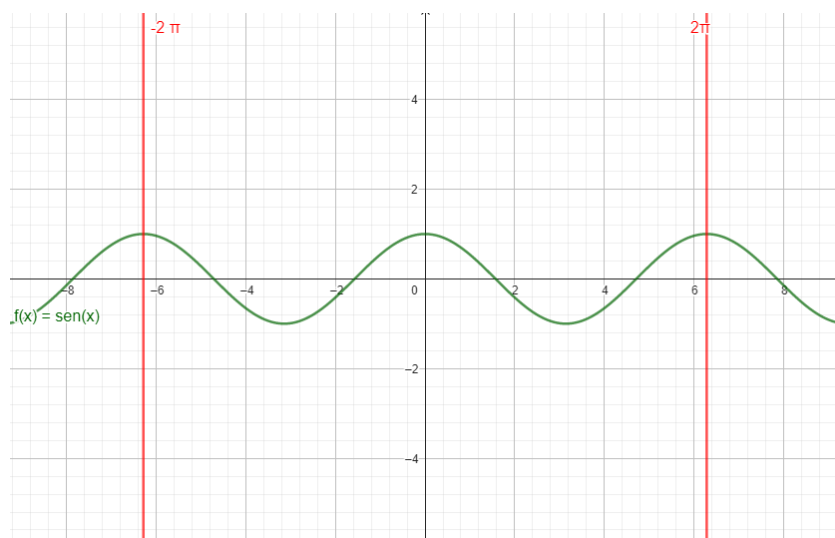


Ilustración 5 Gráfica de la función $f(x) = \text{cos}(x)$. Fuente: Elaboración propia.

3.2.4. Puntos de corte con los ejes coordenados

Los puntos en los que una función corta los ejes coordenados juegan un papel protagonista en la comprensión visual y en la adquisición de información sobre las características de la función. Estos puntos no solo contribuyen a la visualización y al entendimiento de la función, sino que también son fundamentales para su representación gráfica de manera eficaz.

En los puntos en los que la función se corta con el eje vertical (eje de las ordenadas), el valor de la variable independiente se vuelve cero, dado que este eje se describe mediante la ecuación $x = 0$. Consecuentemente, la representación gráfica de una función f se corta con el eje de las ordenadas en ubicaciones donde x toma el valor de cero. Estos puntos de intersección se expresarán en el formato $(0, y)$, donde y corresponde a $f(0)$.

En los puntos en los que la función se corta con el eje horizontal (eje de las abscisas), es la variable dependiente la que se vuelve cero, ya que este eje es definido por la ecuación $y = 0$. Por lo tanto, la interpretación gráfica de una función f intersecta el eje de las abscisas en ubicaciones donde los valores de y son igual a cero, es decir, donde $f(x) = 0$. Estos puntos de intersección se expresarán en el formato $(x, 0)$, donde x toma el valor correspondiente.

3.2.5. Continuidad

Una característica exhaustivamente analizada en relación a una función es su propiedad de continuidad. Desde una perspectiva visual e intuitiva, una función se considera continua si su representación gráfica carece de discontinuidades bruscas, rupturas o fluctuaciones indeterminadas. No obstante, existe el riesgo de ser inducido a error por la apariencia gráfica de una función. Para evitar esta eventualidad, resulta fundamental establecer una definición precisa de lo que implica la continuidad en un punto.

Definición 7: Continuidad

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Consideraremos que la función f presenta continuidad en el punto c , que es un elemento del conjunto \mathbb{C} , si se dan las condiciones que se enumeran a continuación:

- La función f está definida en el punto c , lo que implica la existencia de un valor $f(c)$.
- Los límites laterales de la función en el punto c son idénticos, lo que se expresa como:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

c) Además, coinciden los valores de la primera y segunda condición:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Para conseguir que la función presente continuidad en el punto c , se deben cumplir todas las condiciones anteriores simultáneamente. En caso de que no se cumpla alguna de ellas, diremos que la función es discontinua en $c \in \mathbb{C}$.

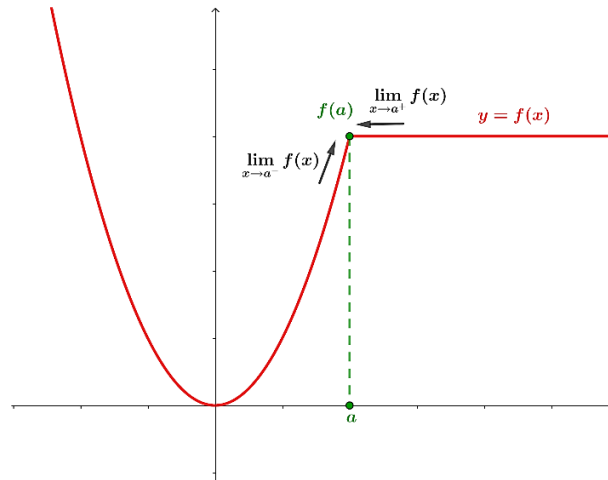


Ilustración 6 Estudio de la continuidad de una función. Fuente: Elaboración propia.

Seguidamente, estudiaremos los tipos de discontinuidades que se pueden dar en caso de que la función no presente continuidad en punto $c \in \mathbb{C}$.

Definición 8: Discontinuidad evitable

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos afirmar que la función posee una discontinuidad evitable en el punto $c \in \mathbb{C}$, en el caso en el que podamos calcular el límite en ese punto y, además, no es infinito, pero no es coincidente con el valor que arroja la función en dicho punto:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$$

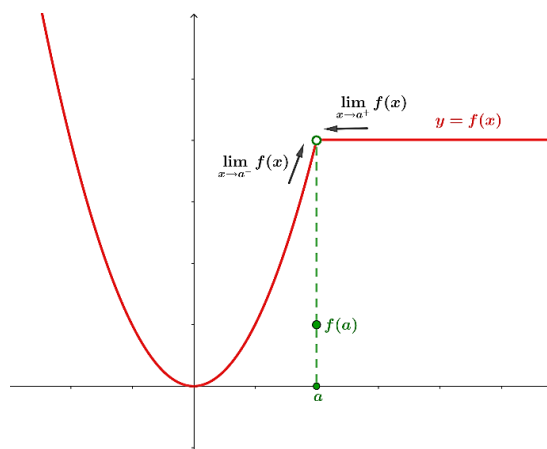


Ilustración 7 Estudio de discontinuidad evitable de una función. Fuente: Elaboración propia.

Definición 9: Discontinuidad inevitable

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que la función tiene una discontinuidad inevitable en el punto $c \in \mathbb{C}$, si se pueden calcular los límites laterales, pero estos no coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

En este caso, se denomina salto a la diferencia en los límites laterales.

Dentro de este tipo de discontinuidad, podemos distinguir entre dos tipos: **discontinuidad inevitable de salto finito**, si el valor del salto es un número no infinito y **discontinuidad inevitable de salto infinito**, en caso de que el salto que se produzca sea infinito.

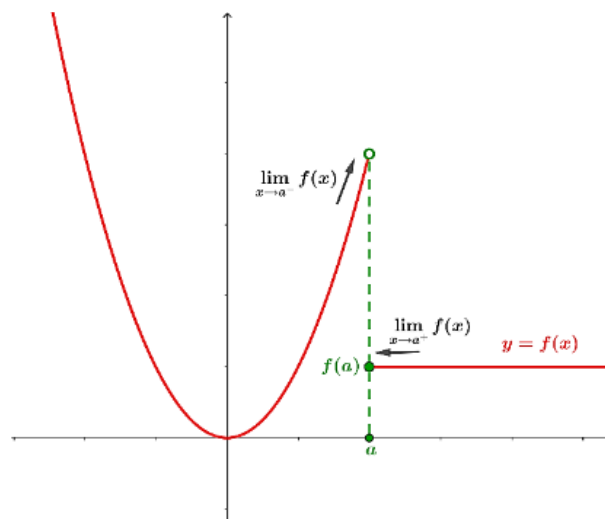


Ilustración 8 Estudio de discontinuidad inevitable de salto finito de una función. Fuente: Elaboración propia

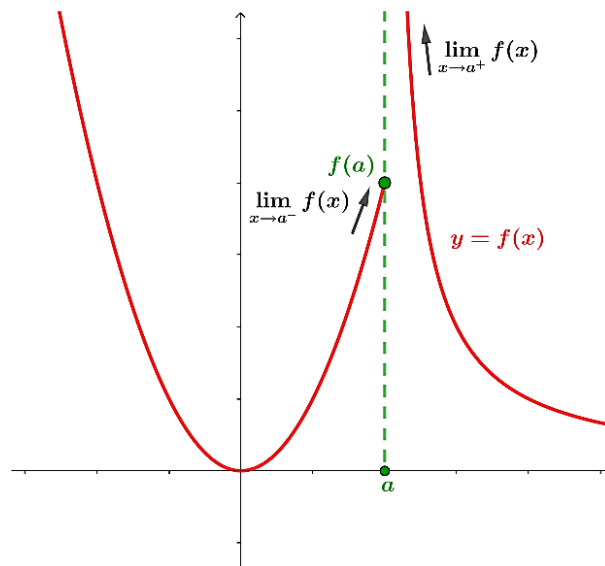


Ilustración 9 Estudio de discontinuidad inevitable de salto infinito de una función. Fuente: Elaboración propia

Hasta este momento, hemos establecido la descripción de la continuidad de una función genérica en un punto concreto y hemos presentado una visión concisa de las diversas formas de discontinuidad que pueden aparecer en una función en un punto concreto. No obstante, en los desarrollos posteriores, será una premisa común la suposición de que la función presente continuidad en un intervalo. Específicamente, cuando el dominio presenta la forma de un intervalo cerrado $[a, b]$, el análisis de los límites laterales no es viable.

Definición 10: Continuidad en un intervalo

- Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos decir que la función presenta continuidad en el intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{C}$ si presenta continuidad en cada punto de dicho intervalo
- Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos afirmar que la función es continua en dicho intervalo si la misma presenta continuidad en todos los puntos del intervalo (a, b) y,

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Teorema de Bolzano

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Además, f presenta continuidad en el intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{C}$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, por tanto, $\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$.

Demostración

Para demostrar el teorema del Bolzano, partimos de la siguiente observación:

$$\text{Si } f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow f(a) < 0 < f(b) \text{ o } f(b) < 0 < f(a)$$

Vamos a partir de la suposición de que $f(a) < 0 < f(b)$.

Como partimos de que $f(a) < 0$, y sabiendo que f es continua en a , existirá un $\delta > 0$ tal que si $x \in [a, a + \delta]$, tendremos que $f(x) < 0$.

Por otro lado, si se define el conjunto,

$$A = \{s \in [a, b] ; f(x) < 0 \forall x \in [a, s]\}$$

Como este conjunto se considera *no vacío* y está acotado superiormente,

$$\exists \sup A = c$$

A continuación,

- $c < b$ porque si suponemos que $c = b$, como $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) > 0$, entonces c no podría ser $\sup A$.

- 2) Si $f(c) > 0$, $\exists \delta > 0 / \forall x \in [c - \delta, c + \delta]$ obtenemos que $f(x) > 0$. Del mismo modo que en el punto 1), $\nexists s \in A / s \in [c - \delta, c + \delta]$. Por tanto, c no podría ser $\sup A$.
- 3) Argumentando del mismo modo, si $f(c) < 0 \rightarrow c < \sup A$.

Finalmente, sólo queda la posibilidad de que $f(c) = 0$.

3.2.6. Derivabilidad

Es importante observar que, en contraposición a lo establecido en la Definición 10, no se procede a definir la derivabilidad de una función dentro de un intervalo cerrado $[a, b]$, sino únicamente en un intervalo que no incluye sus extremos (a, b) . Esta elección se fundamenta en el hecho de que, como se expondrá, la condición esencial en todos los resultados subsiguientes será la derivabilidad de la función dentro de un intervalo abierto (a, b) .

Definición 11: Derivabilidad

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Se puede decir que dicha función es derivable en el punto $c \in \mathbb{C}$ si existe el límite y es finito:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

El límite anterior se expresará por $f'(c)$ y será la **derivada** de la función en el punto c .

Consideraremos que la función f será derivable en dicho intervalo abierto (a, b) , que está contenido en el conjunto \mathbb{C} , si y solo si la derivada de f existe en cada punto dentro de dicho intervalo (a, b) .

Desde una perspectiva geométrica, la derivada de cualquier función en un punto específico es equivalente a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. De esta manera, considerando una función f , la ecuación que describe la recta tangente a su representación gráfica en el punto $(a, f(a))$ se formula como:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

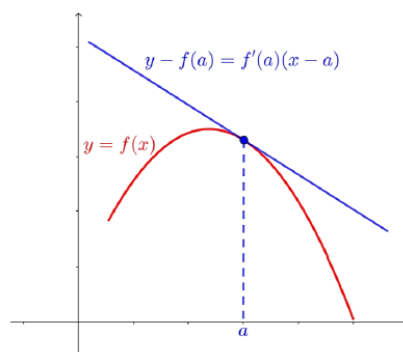


Ilustración 10 Derivada en un punto representada geoméricamente. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, podemos afirmar que cuando una función es derivable en un punto particular a , esto automáticamente implica que también es continua en ese mismo punto. Sin embargo, la relación inversa no puede asumirse como verdadera.

3.3. Monotonía de una función. Extremos relativos y absolutos

En este apartado, procederemos a exponer y ubicar tanto los máximos como los mínimos relativos de una función real con variable real. Además, abordaremos la tarea de analizar su comportamiento de crecimiento y decrecimiento, lo que se conoce como monotonía.

3.3.1. Máximos y mínimos absolutos de una función

Definición 12: Máximo y mínimo absoluto

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos decir que existe un máximo absoluto en $d \in \mathbb{C}$ si se cumple que $f(x) \leq f(d)$; $\forall x \in \mathbb{C}$.

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos decir que existe un mínimo absoluto en $c \in \mathbb{C}$ si se cumple que $f(x) \geq f(c)$; $\forall x \in \mathbb{C}$.

En apartados posteriores, se realizará la demostración de un teorema relevante; si la función f muestra continuidad en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces definitivamente toma valores máximos y mínimos absolutos dentro de dicho intervalo. Esta proposición es conocida como el Teorema de Weierstrass y deducirá como resultado del Lema que se presenta a continuación.

Lema

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real y continua. Como consecuencia, la función está acotada en el intervalo $[a, b]$:

$$\exists K > 0 / |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$$

Demostración del lema

Se va a realizar la demostración razonando por reducción al absurdo. Para proceder con este razonamiento, suponemos que la función no estará acotada en el intervalo $[a, b]$.

Suponemos el valor k_1 el punto central del intervalo. Por tanto, el valor de $k_1 = \frac{a+b}{2}$. Siguiendo con el razonamiento que hemos supuesto, como la función no está acotada en el intervalo, tampoco lo estará, al menos, en alguno de los dos intervalos resultantes $[a, k_1]$; $[k_1, b]$. A continuación, denominaremos $[a_1, b_1]$ al intervalo resultante donde no está acotada la función. En caso de que la función no esté acotada en ninguno de los intervalos, podremos tomar como el intervalo $[a_1, b_1]$ el que sea de los dos intervalos.

Supondremos ahora el valor k_2 como el punto central del intervalo $[a_1, b_1]$. Por tanto, el valor de $k_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Siguiendo el razonamiento anterior, como la función no se

encuentra acotada en el intervalo $[a_1, b_1]$, tampoco lo estará, al menos, en alguno de los dos intervalos resultantes $[a_1, k_2]; [k_2, b_1]$. Continuando con el razonamiento, denominaremos $[a_2, b_2]$ al intervalo resultante donde no está acotada la función. En caso de que la función no esté acotada en ninguno de los intervalos, podremos tomar como el intervalo $[a_2, b_2]$ el que sea de los dos intervalos.

Análogamente, se realiza el proceso tantas veces como sea necesarias, hallando una serie de intervalos cerrados donde la función no se encuentra acotada.

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$$

De la sucesión anterior, podemos deducir que la amplitud de todos estos intervalos es igual a la mitad de sus respectivas amplitudes previas. Por lo tanto, la amplitud del rango $[a_n, b_n]$ puede expresarse como $\frac{b-a}{2^n}$. Por tanto, podemos deducir que esta sucesión tiende a 0, es decir, las longitudes de los intervalos tienden a hacerse nulas.

Basándonos en el Axioma de Cantor de los intervalos encajados, podemos deducir que

$$\exists k \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De este modo, k forma parte de todos los intervalos.

Continuando, al ser la función continua en k , obtenemos que $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$. Por tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 \quad / \quad |f(x) - f(k)| < \varepsilon \quad \forall x \in (k - \delta, k + \delta)$$

Si se considera $\varepsilon = 1$, podemos reducir la expresión anterior

$$\exists \delta > 0 \quad / \quad |f(x) - f(k)| < 1 \quad \forall x \in (k - \delta, k + \delta)$$

Esto supone que

$$|f(x)| < 1 + |f(k)| \quad \forall x \in (k - \delta, k + \delta)$$

Por tanto, la función estaría acotada en el intervalo por el valor $1 + |f(k)|$. No obstante, como se ha calculado anteriormente, el intervalo $[a_n, b_n]$ sería $\frac{b-a}{2^n}$ y, además, $k \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y suponiendo n_0 lo suficientemente grande, obtenemos que $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (k - \delta, k + \delta)$. Por tanto,

$$|f(x)| < 1 + |f(k)| \quad \forall x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$$

Y finalmente, se llega al desenlace de que se contradice que la función esté acotada en el intervalo $[a_{n_0}, b_{n_0}]$. Se llega a una contradicción, ya que partimos de suponer que la función no está acotada dentro del intervalo $[a, b]$. Por tanto, el lema queda probado.

Partiendo del lema anterior, probaremos que si una función presenta continuidad en un intervalo $[a, b]$, esta función tendrá un máximo absoluto y un mínimo absoluto en este intervalo.

Teorema 1: Teorema de Weierstrass

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real y continua. Habrá dos puntos $c, d \in [a, b]$ tal que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b]$$

Demostración

Basándonos en la hipótesis inicial, podemos afirmar que la función presenta continuidad en el intervalo $[a, b]$. Por este motivo, basándonos en el lema anterior, podemos decir la función estará acotada.

A continuación, demostraremos que existe el punto $d \in [a, b]$ de modo que:

$$f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b]$$

Para continuar con la demostración, denotaremos N a la cota superior menor de la función y reduciremos al absurdo.

Vamos a suponer que $\nexists d \in [a, b]$ y, por tanto,

$$f(d) = N \rightarrow f(x) < N \quad \forall x \in [a, b]$$

Por este motivo, la función $g(x) = N - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Además, se verifica que la función $\frac{1}{g(x)}$ presentará continuidad en el intervalo $[a, b]$.

Basándonos de nuevo en el lema anterior, obtendremos que

$$K > \frac{1}{g(x)} > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$K > \frac{1}{N - f(x)} \rightarrow \frac{1}{K} < N - f(x) \rightarrow f(x) < N - \frac{1}{K} < N \quad \forall x \in [a, b]$$

Así, se obtiene que $N - \frac{1}{K}$ es una cota superior en la función dentro del intervalo $[a, b]$. Esto supone una contradicción porque tal y como hemos indicado la cota superior menor de f es N .

Por tanto, obtenemos que

$$\exists d \in [a, b] / f(d) = N$$

Al comienzo hemos indicado que la función tiene una cota superior en N , podemos afirmar que

$$f(x) \leq f(d) = N \quad \forall x \in [a, b]$$

Para realizar la demostración de que habrá un punto $c \in [a, b]$ / $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ procederíamos análogamente, pero considerando M como una cota inferior mayor y reduciríamos al absurdo.

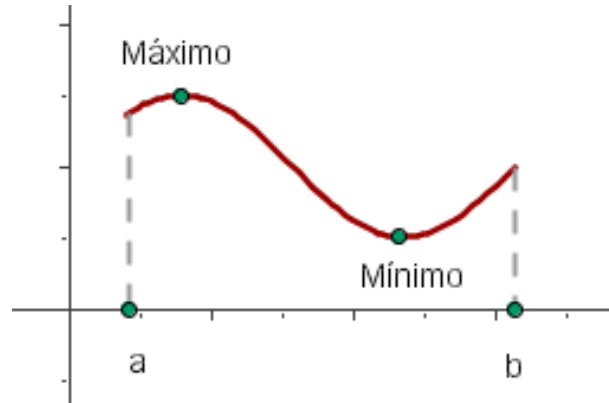


Ilustración 11 Teorema de Weierstrass de forma gráfica. Fuente: <https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/calculo/teorema-weierstrass.html>

3.3.2. Máximos y mínimos relativos de una función

Definición 13: Máximo y mínimo relativo

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos decir que existe un máximo relativo en $d \in \mathbb{C}$ si $\exists \delta \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ / $f(x) \leq f(d)$; $\forall x \in (d - \delta, d + \delta) \cap \mathbb{C}$.

Análogamente, consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos decir que existe un mínimo relativo en $c \in \mathbb{C}$ si $\exists \delta \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ / $f(x) \geq f(c)$; $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap \mathbb{C}$.

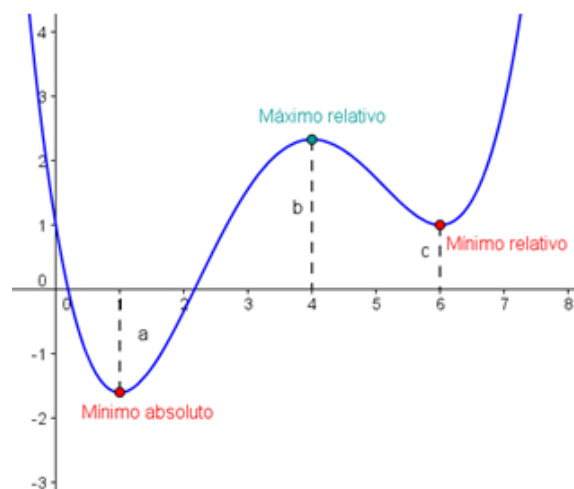


Ilustración 12 Extremos relativos y absolutos. Fuente: <https://matematicasies.com/Extremos-maximos-y-minimos-de-una-funcion>

Para obtener los extremos de una función, se suele derivar la función y ver donde se anula esta derivada. A continuación, vamos a enunciar y demostrar un teorema que demuestra esta relación. Anteriormente se definirá lo que supone el punto crítico de dicha función.

Definición 14: Punto crítico de una función

Consideremos $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real y derivable. Podremos afirmar que existe un punto $c \in (a, b)$ y que además si se cumple que $f'(c) = 0$, este punto será un punto crítico de dicha función.

Teorema 2

Consideremos $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real y derivable. Si la función posee un extremo relativo en un punto crítico que denominaremos $d \in (a, b)$, se cumplirá que $f'(d) = 0$.

Demostración

Vamos a partir de la suposición de que la función tendrá un máximo relativo en un punto que denominaremos d .

Basándonos en la propia definición de máximo relativo, obtenemos que

$$\exists \delta / f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in (d - \delta, d + \delta) \subset (a, b)$$

En el caso en el que $x \in (d, d + \delta)$, obtenemos:

$$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} \leq 0$$

En el caso en el que $x \in (d - \delta, d)$, obtenemos:

$$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} \geq 0$$

Por tanto, los límites laterales en el punto d serán:

$$\lim_{x \rightarrow d^+} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow d^-} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} \geq 0$$

Como hemos impuesto que la función es derivable en el punto d , los límites serán iguales:

$$\lim_{x \rightarrow d^+} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} = \lim_{x \rightarrow d^-} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} \rightarrow f'(d) = 0$$

Análogamente, seguiríamos el mismo razonamiento en caso de calcular un mínimo relativo.

Es importante indicar que, si la derivada de la función toma valores nulos en un punto, esto no quiere decir que en ese punto vaya a haber un extremo relativo.

Teorema 3: Teorema de Rolle

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable en el intervalo (a, b) de modo que $f(a) = f(b)$. Existirá un punto $c \in (a, b)$ y se verifica que $f'(c) = 0$.

Demostración

Como hemos supuesto que la función presenta continuidad en el intervalo $[a, b]$, basándonos en el Teorema de Weierstrass, podemos decir que habrá dos puntos $c, d \in [a, b]$ tal que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b]$$

Supondremos que el punto $c \in (a, b)$ y $\exists \delta > 0$ de modo que

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$$

De este modo, la función posee un mínimo relativo en el punto c . Por el teorema demostrado anteriormente tendremos que $f'(c) = 0$

De forma análoga, si el punto d pertenece al intervalo, obtendremos que $f'(d) = 0$.

Por último, nos quedaría centrarnos en el caso en el que el mínimo y máximo se obtengan en los extremos de dicho intervalo.

$$a = c ; b = d$$

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$$

Como hemos supuesto al inicio del teorema que $f(a) = f(b)$, obtenemos que

$$f(a) = f(x) = f(b) \quad \forall x \in [a, b]$$

La función sería constante en el intervalo, es decir

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

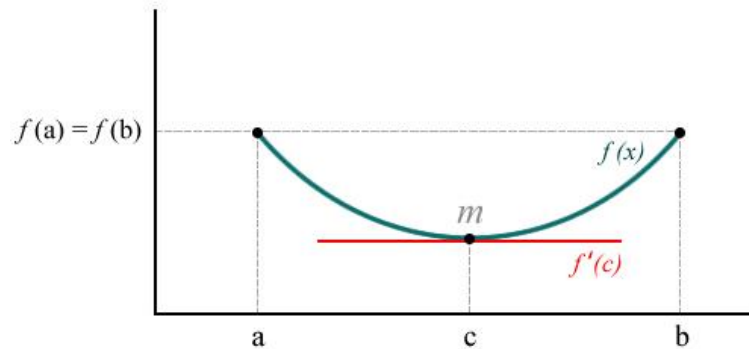


Ilustración 13 Teorema de Rolle representado gráficamente. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Rolle

Posteriormente, enunciaremos y demostraremos el Teorema del Valor Medio de Lagrange basándonos en el Teorema de Rolle.

Teorema 4: Teorema del Valor Medio de Lagrange

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable en el intervalo (a, b) . Basándonos en esta hipótesis, existirá al menos un punto $c \in (a, b)$ que verifique que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración

Partiremos de una función auxiliar $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = [f(b) - f(a)] \cdot x - (b - a) \cdot f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Basándonos en las hipótesis iniciales, la derivada de la función será la siguiente:

$$g'(x) = [f(b) - f(a)] - (b - a) \cdot f'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Además, se puede comprobar rápidamente que $g(a) = g(b)$

Como $g(a) = g(b)$ podemos aplicar el Teorema de Rolle a dicha función obteniendo,

$$\exists c \in (a, b) \quad / \quad g'(c) = 0$$

$$g'(c) = [f(b) - f(a)] - (b - a) \cdot f'(c) = 0$$

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

De manera visual, este teorema establece que la recta tangente a la función en un punto c tiene la misma inclinación que la recta que conecta los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En consecuencia, la pendiente de ambas líneas es idénticas, lo que implica que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

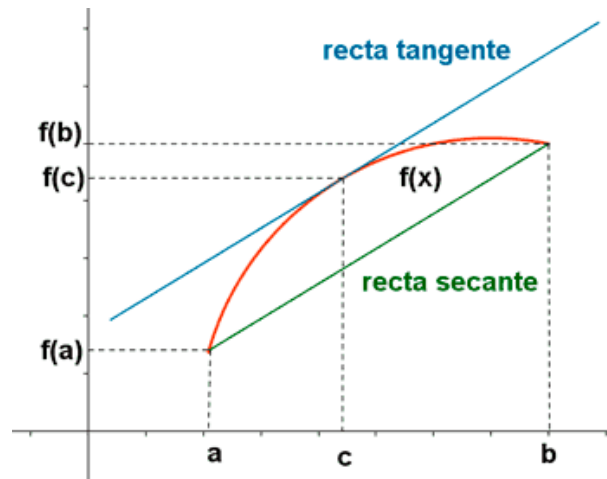


Ilustración 14 Teorema del Valor Medio de Lagrange representado gráficamente. Fuente: https://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/segundo_ciencias/teorema_derivadas/teoria/teorema_valor_medio.html

3.3.3. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de funciones

Definición 15: Crecimiento y decrecimiento de funciones

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que la función crece en un intervalo $I \subseteq \mathbb{C}$ cuando para dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo, y siendo $x_1 < x_2$ sea cierto que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Podemos afirmar que la función es estrictamente creciente cuando para los puntos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo, y siendo $x_1 < x_2$ sea cierto que $f(x_1) < f(x_2)$.

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que la función decrece en un intervalo $I \subseteq \mathbb{C}$ cuando para dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo, y siendo $x_1 < x_2$ sea cierto que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Podemos afirmar que la función es estrictamente decreciente cuando para los puntos x_1, x_2 pertenecientes a dicho intervalo, y siendo $x_1 < x_2$ sea cierto que $f(x_1) > f(x_2)$.

Introducidas las definiciones de crecimiento y decrecimiento, introduciremos la definición de monotonía de una función.

Definición 16: Monotonía de funciones

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que la función es monótona dentro un intervalo $I \subseteq \mathbb{C}$ cuando dicha función sea creciente o decreciente en dicho intervalo. Siguiendo el mismo razonamiento, la función será estrictamente monótona en dicho intervalo si el crecimiento o decrecimiento de la función es estricto en este intervalo.

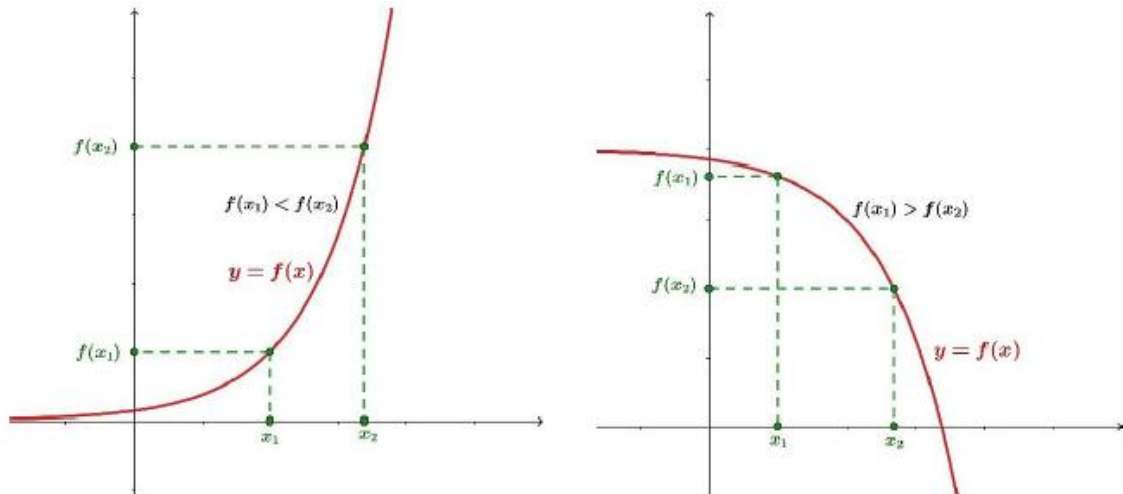


Ilustración 15 Funciones estrictamente creciente y decreciente respectivamente. Fuente: Elaboración propia

Tal como hemos expuesto con anterioridad, es posible obtener la monotonía de una función analizando el signo de la derivada. A continuación, enunciaremos y demostraremos varios teoremas que lo estudian.

Teorema 5: Teorema de la primera derivada

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable en el intervalo (a, b) . Podemos afirmar:

- 1) La función es creciente en (a, b) si y solo si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- 2) La función es decreciente en (a, b) si y solo si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- 3) La función será constante en el intervalo $[a, b]$ cuando $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Demostración

- 1) Partimos de la hipótesis de que la función crece en dicho intervalo. Tenemos que demostrar:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Tomamos el punto $x \in (a, b)$.

Consideramos $k > 0 / x + k \in (a, b)$. Como hemos considerado la función creciente,

$$f(x + k) \geq f(x) \rightarrow f(x + k) - f(x) \geq 0 \rightarrow \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(x + k) - f(x)}{k} \geq 0$$

Como supuesto que la función es derivable en el intervalo (a, b) , podremos afirmar que existirá,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x + k) - f(x)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(x + k) - f(x)}{k}$$

Por tanto, obtenemos que,

$$f'(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x + k) - f(x)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(x + k) - f(x)}{k} \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Partiendo del resultado anterior, debemos demostrar que la función será creciente en dicho intervalo.

Supongamos dos puntos $x, y \in (a, b)$ / $x < y$. Basándonos en el Teorema del Valor Medio, podemos afirmar que,

$$\exists c \in (a, b) \quad / \quad x < c < y$$

Y, por tanto,

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$$

Como sabemos que $f'(c) \geq 0$ y, además, $x < y$, obtenemos que,

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall x < y$$

Finalmente se demuestra que la función crece en el intervalo (a, b) .

- 2) Análogamente se demostraría este punto.
- 3) Queda demostrado con los puntos 1 y 2.

Teorema 6

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable en el intervalo (a, b) . Podemos afirmar:

- 1) En el caso en que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, la función será estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$
- 2) En el caso en que $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$, la función será estrictamente decreciente en el intervalo $[a, b]$

Demostración

Para desarrollar esta demostración, nos basaremos en el Teorema del Valor Medio o de Lagrange.

- 1) Tal y como se ha enunciado, debemos demostrar que la función es estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$

$$f(x) < f(y) \rightarrow a \leq x < y \leq b$$

Vamos a partir de la suposición de que $x < y$ para aplicar el Teorema de Lagrange a dicho intervalo.

Asimismo, tendremos que,

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) \rightarrow x < c < y$$

Como hemos partido de la hipótesis de que $f'(c) > 0$ y que $x < y \rightarrow y - x > 0$, sucede exactamente lo mismo con $f(y) - f(x)$, por tanto

$$f(x) < f(y) \rightarrow x < y$$

Quedaría demostrado que la función es estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$.

2) Análogamente se realizaría la demostración de este punto.

A continuación, vamos a enunciar y demostrar un corolario para el uso de la derivada primera para el estudio de los extremos de una función.

Corolario 1

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable en el intervalo (a, b) , menos en un punto que vamos a denominar $c \in (a, b)$. Podemos afirmar:

1) En el caso en que $f'(x)$ cambie de signo positivo a negativo en el punto c , la función poseerá un máximo relativo en dicho punto, ya que,

$$\exists \delta > 0 / f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c) ; f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

2) En el caso en que $f'(x)$ cambie de signo negativo a positivo en el punto c , la función poseerá un mínimo relativo en dicho punto, ya que,

$$\exists \delta > 0 / f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c) ; f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

Demostración

1) Basándonos en el teorema 6 y por las hipótesis iniciales, tenemos una función que crece estrictamente en el intervalo $(c - \delta, c)$ y que decrece estrictamente en el intervalo $(c, c + \delta)$. Por tanto,

$$f(x) < f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$$

La función poseerá un máximo relativo en dicho punto.

2) Análogamente se demostraría este punto.

De este modo, usando el signo de la derivada en el entorno de un punto, podemos analizar si dicho punto, es un máximo, un mínimo o, aunque tenga derivada nula, no es ni máximo ni mínimo.

A continuación, enunciaremos y demostraremos otro teorema para analizar los extremos de una función estudiando el signo de la segunda derivada.

Teorema 7: Teorema de la segunda derivada

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo, derivable dos veces en el intervalo (a, b) y que posea un punto crítico $c \in (a, b) \rightarrow f'(c) = 0$. Podemos afirmar:

- 1) En el caso en que $f''(x) > 0$, esta función poseerá un mínimo relativo en el punto crítico
- 2) En el caso en que $f''(x) < 0$, esta función poseerá un máximo relativo en el punto crítico

Demostración

- 1) Partimos de la suposición de que $f''(c) > 0$. Hemos partido de la hipótesis de que $f'(c) = 0$. Partiendo de la definición de la segunda derivada:

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

Basándonos en la definición pura de límite,

$$\exists \delta > 0 / \frac{f'(x)}{x - c} > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) ; x \neq c$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

Basándonos en el Corolario 1, la función poseerá un mínimo relativo en el punto crítico.

3.4. Puntos de inflexión. Convexidad y concavidad

A continuación, procederemos a un breve análisis acerca de las características cóncavas y convexas de las representaciones gráficas de las funciones, comenzando por sus definiciones.

Definición 17: Función convexa y función cóncava

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos afirmar que la función es convexa en el intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{C}$ si se cumple lo siguiente,

$$f((1 - \delta) \cdot a + \delta \cdot b) \leq (1 - \delta) \cdot f(a) + \delta \cdot f(b) \quad \forall \delta \in (0, 1)$$

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podremos afirmar que la función es cóncava en el intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{C}$ si se cumple lo siguiente,

$$f((1 - \delta) \cdot a + \delta \cdot b) \geq (1 - \delta) \cdot f(a) + \delta \cdot f(b) \quad \forall \delta \in (0, 1)$$

Analíticamente puede parecer complejo de comprender, pero geoméricamente es bastante sencillo.

Como aclaración, cuando δ va tomando valores dentro del intervalo $(0, 1)$, el punto $((1 - \delta) \cdot a + \delta \cdot b), (1 - \delta) \cdot f(a) + \delta \cdot f(b)$ toma valores del segmento entre los

puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Podemos ver que, si la gráfica de una función en este intervalo está por debajo de dicho segmento, la función será convexa y viceversa.

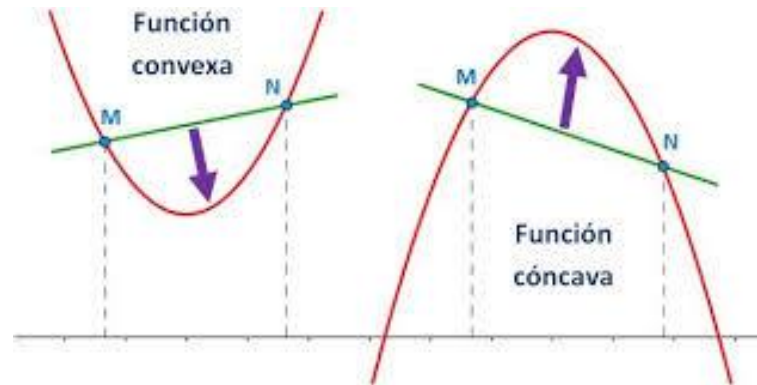


Ilustración 16 Función convexa y función cóncava. Fuente: <https://www.rankia.com/blog/invertir-con-cabeza/4775157-negocios-convexos>

Como se ha comentado anteriormente, el signo de la segunda derivada también determinará la curvatura de la función. A continuación, se enunciará y demostrará un teorema que relacionará la curvatura de la función con el signo de las derivadas de la misma.

Teorema 8: Teorema de la derivada para la curvatura

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable en el intervalo (a, b) . Podemos afirmar:

- 1) En el caso en que $f'(x)$ sea creciente en el intervalo (a, b) , la función es convexa en este intervalo
- 2) En el caso en que $f'(x)$ sea decreciente en el intervalo (a, b) , la función es cóncava en este intervalo

Demostración

- 1) Debemos demostrar que la función es convexa en el intervalo (a, b) . Para ello, tomamos,

$$x = (1 - \delta) \cdot a + \delta \cdot b ; 0 < \delta < 1$$

$$f(x) \leq (1 - \delta) \cdot f(a) + \delta \cdot f(b)$$

Como tenemos que,

$$f(x) = (1 - \delta) \cdot f(x) + \delta \cdot f(x)$$

Podemos decir que,

$$(1 - \delta) \cdot (f(x) - f(a)) \leq \delta \cdot (f(b) - f(x))$$

A continuación, aplicaremos dos veces el Teorema de Lagrange, para obtener que existirán dos puntos c, d tales que $a < c < x$ y $x < d < b$, de modo que,

$$f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x - a)$$

$$f(b) - f(x) = f'(d) \cdot (b - x)$$

Como hemos partido de la hipótesis de que la primera derivada de la función es creciente en el intervalo (a, b) , podemos llegar a la conclusión de que $f'(c) \leq f'(d)$, y

$$(1 - \delta) \cdot (x - a) = \delta \cdot (b - x)$$

Finalmente obtenemos,

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \cdot (f(x) - f(a)) &= (1 - \delta) \cdot f'(c) \cdot (x - a) \cdot \delta \cdot f'(d) \cdot (b - x) \\ &= \delta \cdot (f(b) - f(x)) \end{aligned}$$

Quedaría demostrado el teorema y la función será convexa en el intervalo (a, b) .

2) Análogamente se demostraría este punto

Corolario 2

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable dos veces en el intervalo (a, b) . Podemos afirmar:

- 1) En el caso en que $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ la función será convexa en dicho intervalo
- 2) En el caso en que $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ la función será cóncava en dicho intervalo

Demostración

- 1) Partimos de la suposición de que $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Aplicando el Teorema 5 podemos ver que $f'(x)$ será creciente en dicho intervalo y que por el Teorema 8 la función será convexa en dicho intervalo.
- 2) Análogamente se razonaría este punto

Definición 18: Punto de inflexión

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que la función posee un punto de inflexión en un punto $c \in (a, b)$ si, $\exists \delta > 0$ de modo que la función será convexa en el intervalo $(c - \delta, c)$ y cóncava en el intervalo $(c, c + \delta)$ y viceversa.

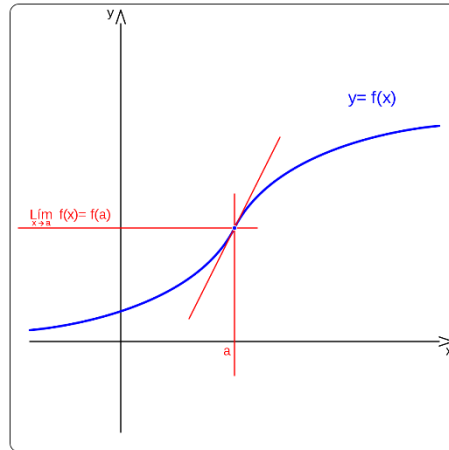


Ilustración 17 Punto de inflexión de una función. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_de_inflexi%C3%B3n

Geoméricamente, cuando tenemos un punto de inflexión de una función, la recta tangente a dicha función en este punto corta la gráfica de la función.

En el siguiente Corolario, vamos a ver que para que una función tenga un punto de inflexión, será condición necesaria que la segunda derivada de esta función en dicho punto sea nula, en el caso de que exista esta.

Corolario 3

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real continua en dicho intervalo y derivable dos veces y continua en el intervalo (a, b) . En caso de que el punto $c \in (a, b)$ sea un punto de inflexión de la función, $f''(c) = 0$.

Demostración

Vamos a partir de la suposición de que $f''(c) > 0$ y reduciremos al absurdo para demostrar el corolario.

Como hemos partido de la hipótesis de que la segunda derivada será continua en el intervalo (a, b) y $c \in (a, b)$, podemos decir que,

$$\exists \delta > 0 / f''(x) > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$$

Basándonos en el Corolario 2, la función será convexa en el intervalo $c \in (a, b)$ y, por tanto, el punto $c \in (a, b)$ no puede ser un punto de inflexión de la función.

Análogamente se puede demostrar para la suposición de que $f''(c) < 0$.

Finalmente, demostramos que $f''(c) = 0$.

Tal y como se indicó anteriormente, esto es una condición necesaria, aunque no suficiente. Al igual que para el estudio de la monotonía, se puede dar algún caso en el que $f''(c) = 0$ y no exista ningún punto de inflexión en c .

3.5. Ramas Infinitas. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Podemos definir una asíntota como una línea recta que se aproxima infinitamente a una curva determinada en el límite, es decir, cuando la distancia entre esta curva y la recta se acerca a cero. Por esta razón, las asíntotas se clasifican en tres tipos: vertical, cuando se trata de una línea recta vertical de la forma $x = a$, horizontal, cuando se trata de una línea recta horizontal de la forma $y = a$, y oblicua, cuando se trata de una línea recta de la forma $y = mx + n$.

Asíntotas verticales

Definición 19: Asíntota vertical

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que posee una asíntota vertical que pertenece a la recta $x = a$ si,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Se puede entender a partir de esta definición que al mismo tiempo que la curva se acerca a la recta, el punto donde se tocan se encuentra a una distancia infinita, lo que significa que la curva y la recta no se cruzan en ningún punto finito. Dentro de esta situación, se pueden distinguir cuatro límites laterales diferentes.

Por ejemplo, para la función $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ tendrá una asíntota vertical en $x = 4$, ya que el

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-4} = \infty.$$

Estudiando los límites laterales vemos hacia donde tiende la función:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-4} = -\infty$$

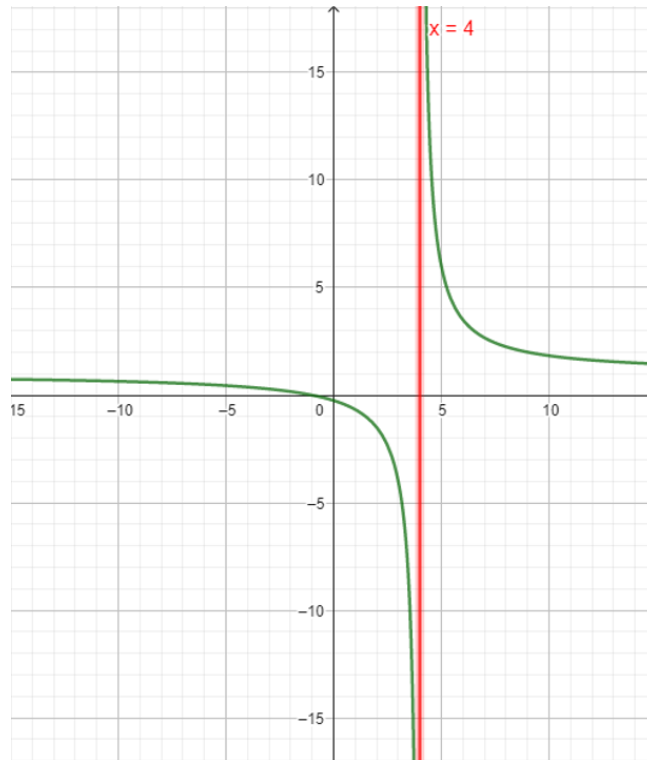


Ilustración 18 Asíntota vertical de una función racional. Fuente: Elaboración propia con Software Geogebra.

Asíntotas Horizontales

Definición 20: Asíntota Horizontal

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que posee una asíntota horizontal en la recta $y = b$ si,

$$\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x) = b \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x) = b$$

El análisis de las asíntotas horizontales es totalmente independiente en $-\infty$ y $+\infty$, es decir, puede haber asíntota horizontal en uno de los extremos y en el otro no y viceversa. Además, en el caso de haber asíntota en los dos extremos, esta no tiene por qué ser la misma

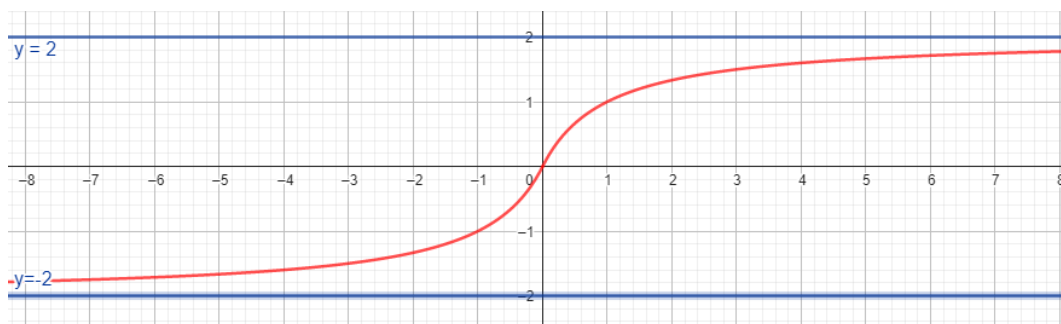


Ilustración 19 Estudio de asíntotas horizontales. Fuente: Elaboración propia con Software Geogebra

Asíntotas Oblicuas

Definición 21: Asíntota oblicua

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. Podemos afirmar que posee una asíntota horizontal en la recta $y = m \cdot x + n \quad \forall m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$ si,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

Proposición 1

Consideremos $f: \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función real con variable real. En el caso en el que la recta $y = m \cdot x + n \quad \forall m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$ sea una asíntota oblicua de la función, se deben cumplir una de estas dos condiciones:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = n \end{aligned}$$

Demostración

Partimos de la suposición de que la función posee una asíntota oblicua en la recta $y = m \cdot x + n \quad \forall m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$. Por la definición anterior, se debe cumplir,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

Vamos a continuar con el caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$. De este caso obtenemos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (m \cdot x + n)$$

Dividiendo entre x ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot x + n}{x} = m$$

Como por definición $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} n = n$$

Análogamente se podría demostrar para el caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

Del mismo modo que para el cálculo de asíntotas horizontales, el análisis de asíntotas oblicuas se realiza por separado en ambos extremos. Puede darse el caso de que exista asíntota oblicua en un extremo y en otro no o viceversa o darse el caso de que haya asíntota oblicua en ambos extremos, pero estas no sean iguales.

Por último, es importante indicar que la presencia de asíntotas horizontales implica la no existencia de asíntotas oblicuas por la propia definición de estas.

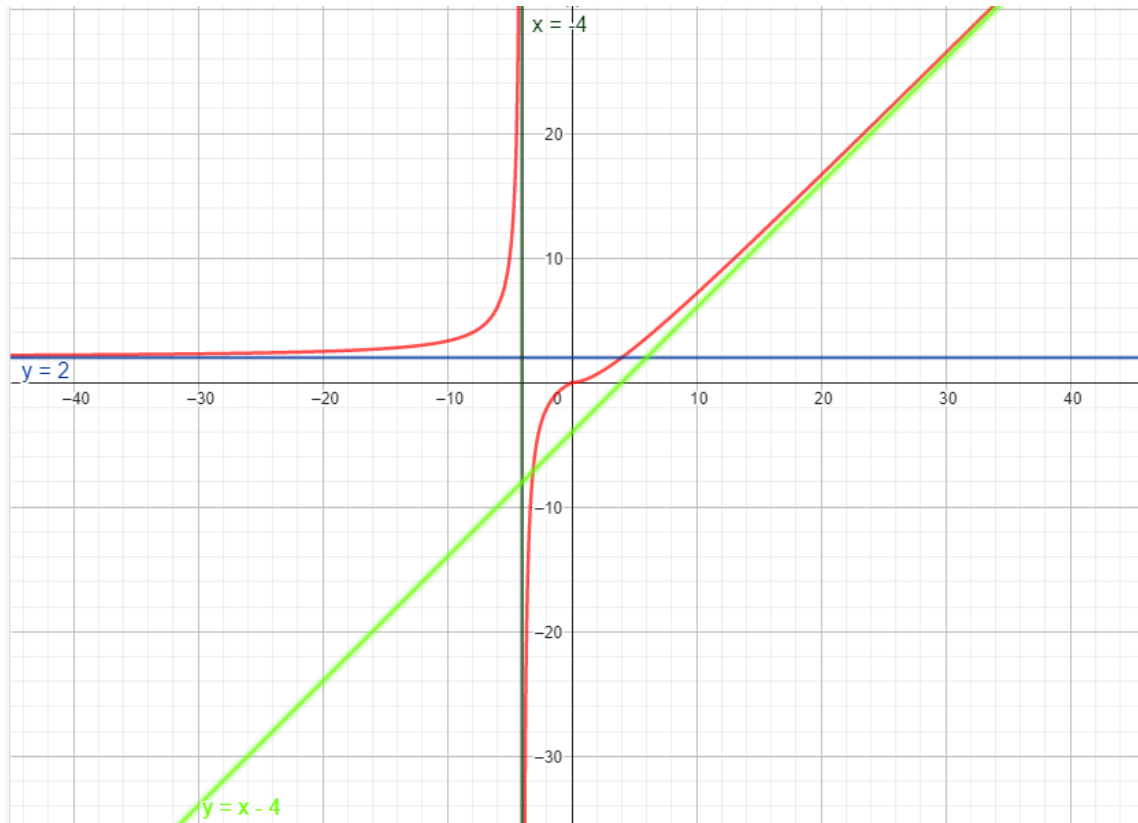


Ilustración 20 Estudio de asíntotas oblicuas. Fuente: Elaboración propia

3.6. Representación gráfica de funciones

Para finalizar con el análisis de funciones reales de variable real, vamos a introducir su representación gráfica.

Definición 22: Representación gráfica de una función

Consideremos una función real con variable real. Definiremos la gráfica de dicha función como la representación del conjunto $\{(x, f(x)) ; x \in Dom(f)\}$.

Toda la información que se ha ido desarrollando en los apartados previos resulta de gran utilidad para la representación gráfica de una función. Para representar gráficamente una función es muy importante conocer el dominio de la misma, puntos de corte con los ejes coordenados, si existen simetrías o no, etc.

Representación gráfica de una función basándonos en un ejemplo

Se deben seguir los pasos siguientes:

1) Definición y análisis de la función

La función escogida para realizar el ejemplo es un polinomio de grado 3:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$$

2) Estudio del dominio, simetría y periodicidad de la función

- El dominio de la función es \mathbb{R} ya que la función es continua en todo su dominio
- No existe periodicidad en esta función
- Para el estudio de la simetría, se deben valorar las siguientes opciones:
 - Simetría par $\rightarrow f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$
 $x^3 + 2x^2 - x + 2 \neq -x^3 + 2x^2 + x + 2 \rightarrow$ No hay simetría par.
 - Simetría impar $\rightarrow -f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$
 $-x^3 - 2x^2 + x - 2 \neq -x^3 + 2x^2 + x + 2 \rightarrow$ No hay simetría impar.

3) Cortes con ejes y extremos relativos y absolutos

- Los puntos de corte con el *eje x* tendrán la forma $(x_0, 0)$. Para hallar los cortes con el *eje x*, se sustituye 0 por *y* y se resuelve la ecuación:

$$0 = x^3 + 2x^2 - x + 2 \rightarrow x_1 = -2,659$$

La función corta al *eje x* únicamente en el punto $(-2,659, 0)$, calculado anteriormente.

- Los puntos de corte con el *eje y* tendrán la forma $(0, y_0)$. Para halla los puntos de corte con el *eje y*, se debe calcular $f(0)$, es decir, sustituir 0 por *x*.

$$f(0) = y = 0 + 0 + 0 + 2 \rightarrow y = 2$$

La función corta al *eje y*, en el punto $(0, 2)$.

4) Crecimiento y decrecimiento de la función. Monotonía.

Para estudiar el comportamiento de la monotonía de una función, es necesario identificar los puntos singulares de la misma. Para ello, se analizan aquellos puntos donde la pendiente de la recta tangente sea igual a cero, es decir, donde la derivada de la función se anule:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 4x - 1 &= 0 \\ x_1 &= \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} = 0,215 \\ x_2 &= -\frac{2 + \sqrt{7}}{3} = -1,55 \end{aligned}$$

Hemos obtenido la coordenada *x* de los puntos singulares, para hallar la coordenada *y* basta con sustituir en la función original:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right) &= 1,887 \rightarrow (0.215, 1.887) \\ f\left(-\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right) &= 4,631 \rightarrow (-1.55, 4.631) \end{aligned}$$

Una vez que se han identificado los puntos críticos de la función, es necesario examinar su monotonía, es decir, determinar en qué intervalos la función presenta crecimiento o decrecimiento.

Se procede a determinar la monotonía de la función analizando el signo de su derivada a los dos extremos de cada punto crítico. En este caso, se han elegido los puntos críticos $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$. Si la derivada de la función es positiva en un punto, la función tendrá un comportamiento creciente en el intervalo que corresponda, mientras que si la derivada es negativa, la función tendrá un comportamiento decreciente en dicho intervalo.

$$f'(-2) = +3 \rightarrow \text{La función es creciente en el intervalo } (-\infty, -1.55)$$

$$f'(0) = -1 \rightarrow \text{La función es decreciente en el intervalo } (-1.55, 0.215)$$

$$f'(1) = +6 \rightarrow \text{La función es creciente en el intervalo } (0.215, +\infty)$$

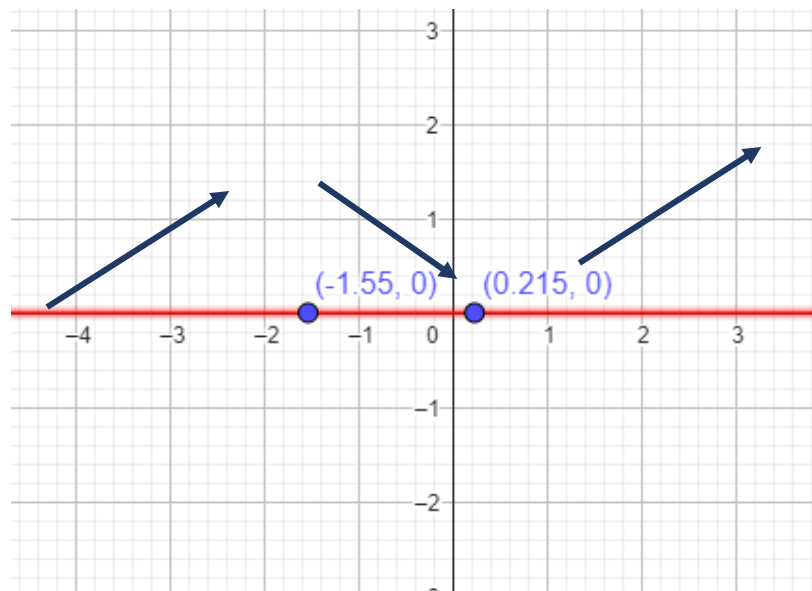


Ilustración 21 Estudio de crecimiento y decrecimiento. Fuente: Elaboración propia con software Geogebra

Por último, podemos afirmar que la función tiene un máximo relativo en el punto $(-1.55, 4.631)$ y un mínimo relativo en el punto $(0.215, 1.887)$.

5) Análisis de concavidad y convexidad. Cálculo de puntos de inflexión.

Para determinar la convexidad y concavidad de la función, es necesario analizar los posibles puntos de inflexión. Esto se consigue al igualar la segunda derivada de la función a cero y encontrar los valores de x que satisfagan la ecuación.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x + 4 &= 0 \\ x_1 &= \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Hemos calculado un posible punto de inflexión en el punto:

$$\left(-\frac{2}{3}, f\left(-\frac{2}{3}\right)\right) \rightarrow \left(-\frac{2}{3}, 3.26\right)$$

A continuación, se procede al análisis de la curvatura de la función a ambos lados del posible punto de inflexión. Si la segunda derivada de la función estudiada en ese punto es positiva, la función tendrá curvatura convexa, y si la segunda derivada es negativa, la función tendrá curvatura cóncava en ese punto.

$$\text{Estudio del signo de } f''(x) \begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow \text{Convexa} \\ f''(x) < 0 \rightarrow \text{Cóncava} \end{cases}$$

Para ello, estudiamos el valor de $f''(x)$ en los puntos -1 y 0.

$$\begin{aligned} f''(-1) &= -2 \rightarrow \text{Cóncava} \\ f''(0) &= +4 \rightarrow \text{Convexa} \end{aligned}$$

Con este cálculo, confirmamos que existe un punto de inflexión en el punto $\left(-\frac{2}{3}, 3.26\right)$, ya que la función sufre un cambio de curvatura, pasa de cóncava a convexa.

6) Representación gráfica de la función

Por último, se utiliza toda la información recopilada anteriormente para generar una representación gráfica completa de la función. Esto incluye los puntos singulares, la monotonía, así como la concavidad y convexidad de la función. Utilizando esta información se puede dibujar la curva correspondiente en el plano cartesiano y obtener una representación visual de la función estudiada. Aquí se presenta el gráfico resultante del análisis realizado:

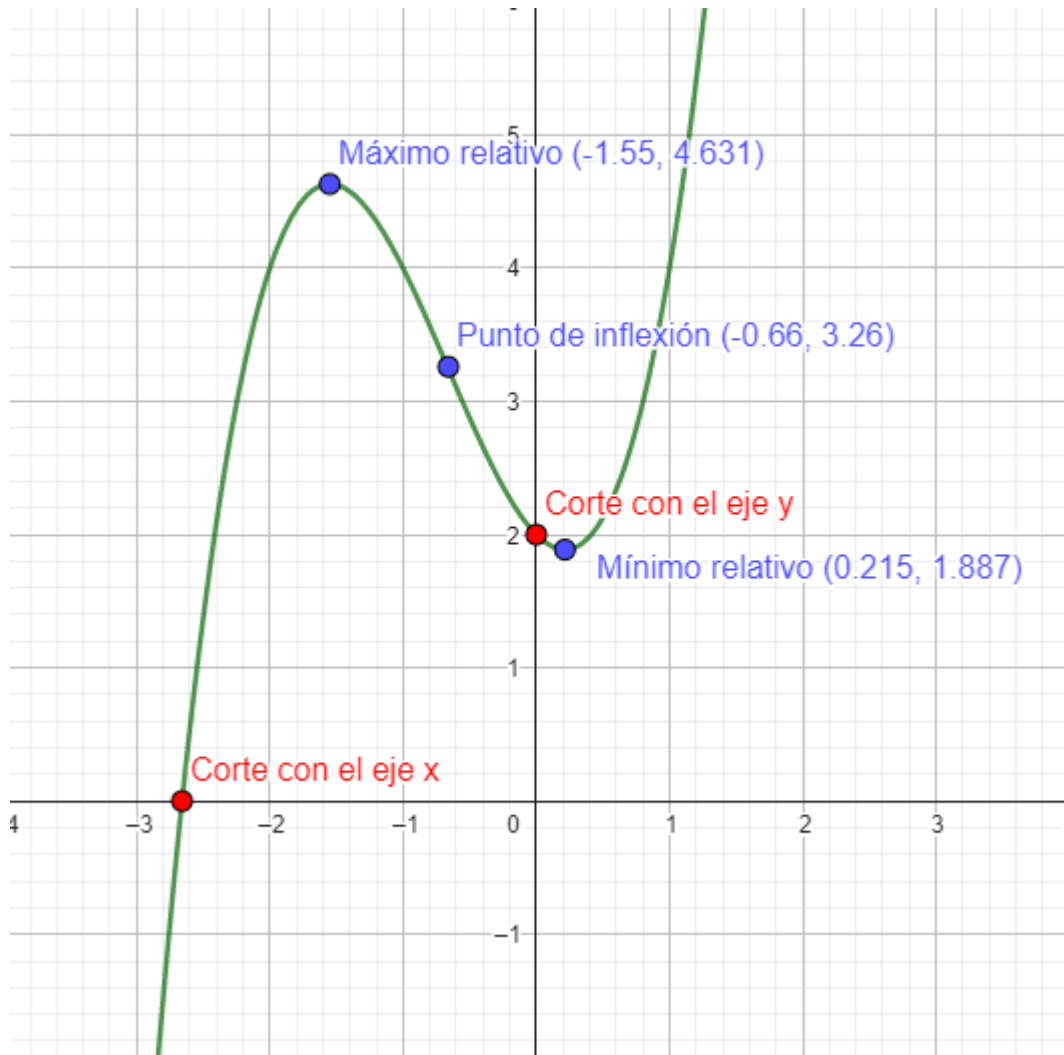


Ilustración 22 Representación gráfica de una función. Fuente: Elaboración propio con software Geogebra

4. Fundamentación Curricular

En el presente apartado se busca realizar, por un lado, una evaluación del currículo escolar y, por otro lado, un análisis de los libros de texto, todos ellos relacionados con la unidad didáctica abordada en este trabajo de fin de máster. Con estos análisis, se pretende evaluar la normativa actual y los libros de texto que tiene a su alcance el profesorado para realizar una crítica constructiva y poder desarrollar la Unidad Didáctica con conocimiento de causa.

Particularmente, la unidad didáctica escogida está enfocada para alumnos de 4º de ESO de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, concretamente sobre el bloque de estudio de funciones.

4.1. Análisis del currículo

En primer lugar, me gustaría indicar que el análisis curricular que se va a realizar será bajo el marco legislativo de la LOMCE ya que, aunque la LOMLOE ya ha sido aprobada por el gobierno central, aún no se está aplicando a los cursos pares en la actualidad y, por tanto, en el curso escolar actual, en 4º de ESO se está impartiendo la docencia bajo el marco legislativo de la LOMCE.

Para llevar a cabo una evaluación del currículo actual en relación con las funciones en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas para 4º de ESO, nos basamos en el R.D. 1105/2014, del 26 de Diciembre, que establece el marco curricular básico para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Específicamente, en el Anexo I de dicho decreto, se pueden encontrar los contenidos, estándares de aprendizaje y criterios de evaluación para cada una de las asignaturas de la ESO y el Bachillerato.

La materia que será objeto de nuestro análisis, como se ha mencionado previamente, es la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas para el cuarto curso de ESO. De acuerdo con el Real Decreto, esta asignatura se estructura a lo largo del año en 5 grandes bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; números y álgebra; geometría; funciones; estadística y probabilidad. Concretamente, en este trabajo de fin de máster, nos interesan dos áreas temáticas en particular: el gran bloque, que trata los procesos, métodos y actitudes matemáticas, ya que éste complementa todos las demás y debe ser abordada en el estudio de cualquier otro bloque; y el bloque cuarto, denominado funciones, ya que recoge los contenidos relacionados con las funciones y sus representaciones gráficas.

En relación a los objetivos establecidos para esta etapa, a continuación, presentamos los objetivos específicos para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en la ESO en Andalucía, correspondientes al cuarto curso de la ESO, según lo expuesto en la Orden del 14 de julio de 2016:

Objetivos Matemáticas Aplicadas en ESO (Andalucía)	
1)	Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2)	Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3)	Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4)	Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presente en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5)	Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y valorar su belleza.
6)	Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) para realizar cálculos, buscar, tratar y representar informaciones de indole diversa y como ayuda en el aprendizaje.
7)	Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8)	Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9)	Manifiestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10)	Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11)	Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Apremiar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Ilustración 23 Objetivos de etapa. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en la ESO en Andalucía.
Fuente: Elaboración propia

De todos estos objetivos específicos podemos relacionar con la Unidad Didáctica a desarrollar en el presente TFM todos los objetivos, pero especialmente los nº3, 4 y 6 por su conexión con el tema de funciones y gráficas. Estos objetivos están más vinculados con la temática de este TFM por su conexión y utilidad en el bloque de funciones y gráficas en cuanto a cuantificar, identificar y desarrollar elementos matemáticos y el uso de herramientas TIC para optimizar los recursos disponibles.

A continuación, procederemos a examinar los contenidos que, de acuerdo con lo establecido en el Real Decreto 1105/2014, requieren ser abordados en los dos bloques previamente mencionados, en conjunto con los estándares de aprendizaje y criterios de evaluación asociados a dichos elementos.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
<p>Planificación del proceso de resolución de problemas.</p> <p>Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.</p> <p>Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda otras formas de resolución, etc.</p> <p>Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.</p> <p>Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.</p> <p>Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:</p> <p>a) la recogida ordenada y la organización de datos.</p> <p>b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.</p> <p>c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.</p> <p>d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.</p> <p>e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.</p> <p>f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.</p>	<p>1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.</p> <p>2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.</p> <p>3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.</p> <p>4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.</p> <p>5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.</p> <p>6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.</p> <p>7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.</p> <p>8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.</p> <p>9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.</p> <p>10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.</p> <p>11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.</p> <p>12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.</p>	<p>1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.</p> <p>2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).</p> <p>2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.</p> <p>2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.</p> <p>2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.</p> <p>3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.</p> <p>4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.</p> <p>4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.</p> <p>5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.</p> <p>6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.</p> <p>6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.</p> <p>6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.</p> <p>6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.</p> <p>6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.</p> <p>7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.</p> <p>8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.</p> <p>8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.</p> <p>8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adoptar la actitud adecuada para cada caso.</p> <p>8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.</p> <p>9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.</p> <p>10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.</p>

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
		<p>11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.</p> <p>11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.</p> <p>11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.</p> <p>11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.</p> <p>12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.</p> <p>12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.</p> <p>12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.</p>

Ilustración 24 Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. 4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Fuente: R.D. 1105/2014, del 26 de diciembre

Este bloque, podríamos decir que no tiene una Unidad Didáctica como tal designada, pero se trata de un bloque vehicular para todas las Unidades Didácticas a implementar en una programación didáctica de la asignatura de matemáticas, es decir, el bloque 1 se trabaja transversalmente en todas unidades didácticas de dicha programación. Por este motivo, tal y como se ha comentado, no tiene sentido pensar que una unidad didáctica pueda desarrollar todos estos “Procesos, métodos o actitudes”.

En cuanto al estudio de qué criterios estarían más íntimamente conectados a la Unidad Didáctica a elaborar en el presente TFM, en mi opinión, resulta fundamental el uso de la modelización de problemas cotidianos para resolverlos matemáticamente y obtener una solución aproximada de la realidad. Por otro lado, otro criterio a desarrollar sería el uso de las TICs puesto que estas serían susceptibles de ser usadas en cualquier Unidad Didáctica de la materia de matemáticas.

En cuanto al bloque 4 de funciones, podemos observar a continuación que algunos de los criterios de evaluación, contenidos y estándares de aprendizaje relativos a este curso académico se mantienen de cursos académicos previos, si bien es cierto que también aparecen muchos de ellos como novedad. Esto viene a decirnos que, en cuarto curso de ESO, se realiza cierto repaso de cursos anteriores y se añaden nuevos conocimientos para cerrar esta etapa educativa.

Bloque 4. Funciones		
<p>Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.</p>	<p>1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarla, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.</p>	<p>1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial. 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). 1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. 1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales. 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión. 2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.</p>

Ilustración 25 Bloque 4: Funciones. 4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Fuente: R.D. 1105/2014, del 26 de diciembre

Adicionalmente a recurrir al Real Decreto para llevar a cabo este análisis curricular, además se ha revisado la Orden de 14 de julio de 2016, la cual recoge el currículo que corresponde a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, regula temas específicos de la atención a la diversidad y establece el sistema de evaluación del proceso de enseñanza/aprendizaje del alumnado. De hecho, al comparar el Real Decreto con la Orden de 14 de julio de 2016, se constituye una relación directa entre todos los criterios de evaluación y las competencias clave correspondientes que se exponen en cada uno de ellos.

Seguidamente, se presentan los criterios de evaluación correspondientes a los bloques uno y cuatro, junto con las competencias clave asociadas a cada uno de ellos:

Bloque 1. "Procesos, métodos y actitudes en matemática"	
Criterios de evaluación	Competencias
1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema	CCL; CMCT
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas	CMCT; CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones	CCL; CMCT; CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT; CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación	CCL; CMCT; CAA; SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad	CMCT; CAA; CSC; SIEP

7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos	CMCT; CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas	CMCT; CAA; SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras	CMCT; CAA; SIEP
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas	CMCT; CD; CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción	CCL; CMCT; CD; CAA

Ilustración 26 Bloque 1. Criterios de evaluación y competencias. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

Bloque 4. "Funciones"	
Criterios de evaluación	Competencias
1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica	CMCT; CD; CAA
2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales	CMCT; CD; CAA

Ilustración 27 Bloque 4. Criterios de evaluación y competencias. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

4.2. Análisis de libros de texto

Previo a proceder con un análisis de los libros de texto, resulta relevante situar en perspectiva el impacto de estas herramientas en el sistema educativo de España, dado que este recurso es extensamente empleado por los estudiantes en todos los niveles educativos obligatorios, e incluso post obligatorios.

En primer lugar, Piedrahita (1999) resalta el papel de los libros de texto como un recurso que promueve la equidad de oportunidades entre los estudiantes. Este recurso permite a aquellos estudiantes rezagados, que han faltado a clases por enfermedad u otras razones, o simplemente no han comprendido la lección impartida por el profesor, mantenerse al ritmo del grupo a través del trabajo independiente en casa, utilizando los diversos recursos disponibles (como teoría, ejercicios, entre otros) que el libro de texto brinda.

Por otro lado, Campanario (2001) emplea una apreciación igualmente favorable de los libros de texto, señalando que estas herramientas son una fuente de conocimiento tanto para los docentes como para los estudiantes. Además, proporcionan una variedad de ejercicios y problemas que promueven el aprendizaje activo. Por último, los libros de texto también brindan una amplia gama de cuestiones y problemas de evaluación que ayudan a medir el progreso y comprensión de los alumnos.

Por el contrario, al examinar el aspecto negativo, varias investigaciones establecen una conexión entre el libro de texto y el entorno social en el que se crea y se usa. En este

sentido, se han planteado debates controvertidos acerca de cómo se seleccionan determinados contenidos y se excluyen otros, influenciados por contextos referentes a la ideología, así como las restricciones didácticas y los alicientes comerciales que desfiguran el propósito original de los materiales educativos impresos. Estas prácticas también pueden inhibir la capacidad investigadora y crítica de los estudiantes, al proporcionarles todo el conocimiento de antemano (Palop, 2017).

Adicionalmente, al realizar una reflexión autocrítica sobre la participación de España en diversas "organizaciones internacionales que buscan fomentar y desarrollar nuevas iniciativas de evaluación de sistemas educativos con el propósito de obtener información para la mejora" (López Varona y Moreno Martínez, 1997, p. 5), los resultados han sido decepcionantes. Entre estas iniciativas, destaca el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), llevado a cabo por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), en el cual España ha participado en los años 2000, 2003 (centrándose especialmente en la competencia matemática de los estudiantes), 2006, 2008 y 2012, entre otras.

En todas estas instancias de evaluación, las conclusiones evidencian que los alumnos españoles se sitúan por debajo del promedio europeo, destacando las carencias del sistema educativo español en comparación con otros países.

Se presta especial atención a uno de los elementos centrales que se investigan debido a su amplia utilización en el sistema educativo de nuestro país: los libros de texto. En la actualidad, el 98,9% de los estudiantes españoles los emplea como recurso didáctico (Palop, 2017), por lo que resulta comprensible que se planteen interrogantes sobre su eficacia y productividad.

Si nos detenemos a examinar los libros de texto de uno de los países con destacados frutos en categorías a nivel internacional, como el caso de Singapur (Beaton, 1996; López Varona & Moreno Martínez, 1997; Ministerio de Educación, 2010; Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2012; Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, 2007, 2008; Ministerio de Educación y Política Social y Deporte, 2005; OECD, 2012), podemos constatar que se trata de libros organizados de forma que permiten adquirir gradualmente un mayor entendimiento de las definiciones matemáticas. Estos materiales usan un planteamiento que empieza con interpretaciones visuales de la materia, para luego avanzar hacia enfoques más abstractos, empleando definiciones pulcras y concisas que facilitan la transmisión de conocimiento en las etapas más básicas, sin sacrificar el rigor (Palop, 2017).

Además, es necesario examinar la actual situación de las nuevas tecnologías, las cuales están adquiriendo un mayor protagonismo en comparación con los libros de texto,

debido a que brindan una amplia gama de oportunidades de desarrollo. Es por esta razón que las editoriales se están amoldando a los nuevos formatos, incorporando recursos adicionales como información en las páginas web, materiales educativos interactivos, contenido audiovisual y recursos de información y documentación complementaria. De esta manera, se busca aprovechar los avances que las nuevas tecnologías brindan en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Una vez se hayan explorado los enfoques predominantes que han sido objeto de estudio en relación al uso de los libros de texto en las entrañas del sistema educativo, procederemos a llevar a cabo una evaluación comparativa entre dos editoriales de origen español, específicamente

Anaya (Colera; Oliveira; Gaxtelu; Martínez, 2021) y SM (Pérez; Serrano; Hernández; Alcaide; Moreno; Donaire, 2021).

Como punto de partida, se realizará una comparación del contenido temático del libro de texto correspondiente al curso específico que estamos abordando, en este caso, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4º de ESO. Los índices comparativos correspondientes se presentan en la siguiente ilustración:

ANAYA	SM
1. Números enteros y racionales	1. Conjuntos numéricos
2. Números decimales	2. Potencias y raíces
3. Números reales	3. Proporcionalidad
4. Problemas aritméticos	4. Expresiones algebraicas
5. Expresiones algebraicas	5. Ecuaciones
6. Ecuaciones e inecuaciones	6. Sistemas de ecuaciones
7. Sistemas de ecuaciones	7. Semejanza y trigonometría
8. Funciones. Características	8. Problemas métricos
9. Las funciones lineales	9. Funciones
10. Otras funciones elementales	10. Funciones elementales

11. La semejanza. Aplicaciones	11. Estadística unidimensional
12. Geometría analítica	12. Estadística bidimensional
13. Estadística	13. Probabilidad
14. Cálculo de probabilidades	

Ilustración 28 Comparativa entre índices de libros de texto de Anaya y SM. Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia.

Las primeras disparidades identificadas entre ambos libros de texto se relacionan tanto con la cantidad de temas abordados en cada uno de los libros como con la organización y estructura de dichos temas.

Remarcados en color azul turquesa, se pueden observar los temas relacionados con el bloque "funciones", el cual es relevante para nuestra unidad didáctica. La editorial Anaya dedica tres temas al estudio de funciones, mientras que la editorial SM dedica solamente dos temas. Que una editorial dedica más temas que otra al bloque de funciones no significa que contenga más materia. Posteriormente analizaremos los contenidos del bloque de funciones de ambas editoriales y realizaremos una comparativa.

En cuanto a la editorial Anaya, los temas 8 "Funciones. Características", tema 9 "Las funciones lineales" y tema 10 "Otras funciones elementales", son los temas que este libro de texto dedica al bloque de funciones. Esta editorial, ubica el bloque de funciones posteriormente al bloque de álgebra y justo antes de los bloques de geometría y estadística, que son los últimos contenidos de este libro de texto.

En el caso de la editorial SM, los temas 9 "Funciones" y 10 "Funciones elementales", son los temas que este libro de texto dedica al bloque de funciones. En el caso de esta editorial, ubican el bloque de funciones posteriormente al bloque de geometría y anteriormente al bloque de estadística que es el último bloque de este libro de texto.

En mi opinión, me parece más correcta la extensión y contenido del libro de SM que el de Anaya ya que, aunque dedica únicamente dos temas al bloque de funciones, estos temas son más extensos y el contenido en general es más extenso y abarca más materia. En cuanto a la ubicación, me parece más correcta la ubicación del bloque de funciones posteriormente al bloque de geometría ya que hay muchos conceptos de geometría que se aplican en el bloque de funciones. En el caso de impartir antes del bloque de funciones antes que el bloque de geometría tendríamos que introducir estos conceptos para poder apoyarnos en la explicación teórica del bloque de funciones.

Seguidamente, procederemos a examinar y comparar el tema 8 del libro de Anaya y el tema 9 del libro de SM que son aquellos temas que más se adaptan a los contenidos de la Unidad Didáctica que se pretende desarrollar en este trabajo. Analizaremos en detalle los contenidos y la estructura de ambos temas, identificando en primer lugar los contenidos que comparten ambas editoriales, los contenidos que una editorial aborda, pero la otra no, y aquellos contenidos que ninguna de las editoriales aborda.

Los elementos temáticos que se encuentran presentes tanto en el tema 9 de SM como en el tema 8 de Anaya son los siguientes:

CONTENIDOS QUE COMPARTEN AMBOS LIBROS DE TEXTO	Conceptos básicos. Variable dependiente y variable independiente
	Dominio y recorrido
	Continuidad y discontinuidad
	Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos
	Periodicidad

Ilustración 29 Contenidos que comparten ambos libros de texto de Anaya y SM. Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia

Por otro lado, vamos a comparar los contenidos que presenta una editorial que no presenta la otra y viceversa:

ANAYA	SM
Cómo se nos presentan las funciones:	- Suma y diferencia de funciones
- Mediante su expresión gráfica	- Producto y cociente de funciones
- Mediante un enunciado	- Composición de funciones
- Mediante una tabla de valores	- Función inversa
- Mediante su expresión analítica	- Puntos de corte con los ejes
	- Simetría de una función

Ilustración 30 Contenidos que no comparten ambos libros de texto de Anaya y SM. Fuente: Libros de texto de Anaya y SM. Elaboración propia

Finalmente, los contenidos que serían susceptibles de ser abordados en estos temas pero que no encontramos presentes en ninguna de las dos editoriales son los siguientes:

- Concavidad y convexidad
- Puntos de inflexión

Aunque existen algunas deficiencias en los contenidos abordados por ambas editoriales tal y como se acaba de mencionar, se puede apreciar que se ajustan al currículo actual. Todos los contenidos que contempla el currículo actual son recogidos en ambos libros de texto tales como la interpretación de tablas y gráficas, estudio de diversos modelos funcionales y estudio de la tasa de variación media. Asimismo, ambas editoriales recogen ejercicios y problemas de modelización matemática, recogidos en el bloque 1, mencionado en apartados anteriores.

No obstante, sería beneficioso profundizar aún más, especialmente en las características de las funciones, si las editoriales incorporaran aquellos conceptos que no se mencionan en sus temas.

Como podemos observar en los contenidos que propone cada editorial para estos temas, el libro de la editorial SM es bastante más completo que el libro de la editorial Anaya. Consta de más contenidos y, además, profundiza mucho más en el tema. Aunque en el bloque de funciones, el libro de texto de Anaya consta de tres temas y el libro de texto de SM consta de dos temas, los contenidos globales de este bloque son mayores en el libro de SM ya que los temas son más densos y profundiza más en la materia.

Ahora, pasemos a discutir la estructura de los contenidos de ambas editoriales.

En ambas editoriales, podemos encontrar una sección de introducción que tiene como objetivo presentar el tema. Sin embargo, existen diferencias en el enfoque de estas introducciones. En el libro de Anaya, se plantea una introducción con un enfoque más histórico, mientras que en el libro de SM, la introducción se presenta a través de un problema relacionado con la vida cotidiana: la velocidad que adquiere un coche al emprender su marcha y cómo se puede representar gráficamente mediante una función.

En mi opinión, si bien es cierto que es importante conocer la historia de las matemáticas, creo que es más importante realizar una introducción con un ejemplo práctico, tal y como realiza la editorial de SM. De este modo, el alumnado puede comprender mejor el objetivo de esta unidad y encontrar una utilidad a esta unidad didáctica.

En el caso de la editorial Anaya, al explicar los contenidos, se utiliza una estructura deductiva. Se comienza con la presentación de los conceptos teóricos, seguidos por ejemplos resueltos que ilustran dichos conceptos, y finalmente se incluyen un par de ejercicios para que los estudiantes pongan en práctica lo aprendido.

En contraste, la editorial SM emplea una estructura inductiva. En este enfoque, se comienza proporcionando ejemplos concretos y, a partir del análisis de estos ejemplos, se llega a las definiciones teóricas de los conceptos abordados en dichos ejemplos. Para concluir, al igual que en el caso de Anaya, se presentan algunos ejercicios con el objetivo de brindar a los estudiantes la ocasión de practicar lo aprendido.

En mi opinión, tal y como se ha indicado anteriormente, me parece más correcto el método seguido por la editorial SM ya que el alumnado puede comprender para cada apartado de la unidad didáctica su utilidad, y de este modo prestarle más atención a las explicaciones del docente.

Aunque Anaya sigue una estructura que va de lo general a lo específico, y SM adopta una estructura opuesta de lo específico a lo general, en realidad, ambas editoriales se adhieren a una metodología de transmisión de conocimientos, donde el docente presenta y explica los contenidos a la clase, y luego los alumnos tienen la oportunidad de realizar los ejercicios propuestos como una forma de aplicación y práctica.

En relación a los ejemplos y ejercicios resueltos, ambas editoriales proporcionan ejemplos relacionados con cada uno de los contenidos abordados. Anaya los presenta inmediatamente después de la explicación de los contenidos, mientras que en el caso de SM, los ejemplos se presentan como una introducción a la explicación de dichos contenidos.

Además, en ambos libros se incluyen ejercicios resueltos. En el caso de Anaya, dentro de las páginas que se dedican a la explicación de los contenidos, se encuentran secciones tituladas "Ejercicio resuelto", donde se detalla y se explica el procedimiento necesario para resolver problemas, ilustrándolo con ejercicios resueltos. Por su parte, SM incorpora algún ejercicio resuelto junto con los ejercicios propuestos para que realice el alumnado al final de cada apartado. Estos ejercicios resueltos facilitarán a los estudiantes la realización de las actividades finales.

En relación a los ejercicios y actividades propuestos en los libros son muy similares entre sí. En primer lugar, los ejercicios asociados a las introducciones de cada editorial consisten en repaso de los conocimientos obtenidos en años anteriores, ejercicios de repaso enfocados en los ejes de coordenadas, de lectura de gráficas de ejemplos prácticos, etc. El resto de ejercicios van enfocados al nivel que propone cada libro. En el caso de los apartados similares, los ejercicios propuestos son muy parecidos, apenas existen discrepancias.

Tanto en Anaya como en SM, se observa una coincidencia en la estructura de los ejercicios propuestos. Después de la explicación de cada uno de los contenidos del tema, ambos libros incluyen un par de ejercicios con el objetivo de que los estudiantes

practiquen y apliquen lo aprendido. Además, al final de la unidad, una vez que se han presentado todos los contenidos del tema, ambos libros ofrecen una amplia variedad de ejercicios. Estos ejercicios tienen como objetivo principal aplicar el conocimiento afianzado a lo largo de la unidad. En su mayoría, estos ejercicios se enfocan en la resolución individual y requieren la aplicación de los procedimientos aprendidos en clase para resolver ejercicios de manera mecánica.

Para finalizar, al llegar a la página final del tema en los dos libros, nos encontramos con una sección de actividades que difiere de las anteriores. Estas actividades están diseñadas específicamente para fomentar el desarrollo de la competencia matemática y el pensamiento crítico. En el caso de SM, se presentan actividades que promueven el pensamiento matemático aplicado a situaciones de la vida real, pruebas de tipo PISA y actividades de trabajo en equipo. Esto concordaría perfectamente con la modelización matemática propuesta en el bloque 1. Asimismo, en el libro de Anaya, se proponen actividades con el objetivo de fortalecer el razonamiento matemático, junto con una autoevaluación de los contenidos abordados en la unidad.

Por último, debemos mencionar la ausencia de menciones a recursos tecnológicos y trabajos cooperativos en ninguno de los dos libros durante el desarrollo del tema. No se hace referencia explícita a herramientas tecnológicas en ninguna parte de los libros, dejando en manos de los docentes la elección y utilización de estas herramientas para mejorar el proceso de interiorización de conocimientos de los estudiantes. En cuanto a los trabajos cooperativos, el libro de Anaya no incluye ninguna referencia o actividad relacionada con este enfoque. Por otro lado, en el libro de SM se proponen ejercicios de mayor complejidad al final de la unidad que se podrían proponer como cooperativos, pero no lo indica así el libro de texto como tal.

En resumen, los dos libros presentan una gran similitud. La estructura del tema es prácticamente idéntica, si bien es cierto que la editorial SM profundiza más que la editorial Anaya en los contenidos que presentan, la mayoría de los ejercicios son muy similares, y se presta poca atención a los trabajos cooperativos o a las actividades que promuevan el razonamiento matemático. Además, se observa una falta de énfasis en el uso de herramientas tecnológicas en ambos libros. Ambos se centran principalmente en ejercicios mecánicos que los estudiantes realizan de manera individual y siguiendo algoritmos establecidos, sin la necesidad de reflexionar más allá de la aplicación mecánica de los conceptos. Tal vez se pueda argumentar que el libro de SM tiene una base teórica más densa, mientras que el libro de Anaya destaca por sus ejemplos y ejercicios prácticos.

5. Fundamentación Didáctica. Investigaciones sobre situaciones de enseñanza/aprendizaje

La exploración en el campo de la didáctica de las matemáticas, referida a cómo los estudiantes asimilan el contenido matemático, es extensa y de naturaleza compleja. Particularmente, pondremos el punto de mira en el estudio del proceso de aprendizaje, interpretación e internalización de los conceptos arraigados a nuestro enfoque: las funciones y sus representaciones gráficas. Además, es relevante considerar los patrones recurrentes de errores y equívocos entre los estudiantes, para poder dedicar una atención más específica a dichos aspectos al desarrollar nuestra unidad didáctica. No obstante, en esta sección no se tiene como objetivo crear un panorama exhaustivo, sino efectuar una breve evaluación de algunos trabajos investigativos pertinentes que contribuyan a profundizar en nuestro tema de estudio.

Para llevar a cabo nuestra revisión, hemos dirigido nuestra atención hacia un artículo académico y una tesis doctoral, publicada en formato de libro con posterioridad:

- Arce, M. y T. Ortega (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato.
- Ruiz Higuera, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Jaén.

El enfoque tanto del artículo como del libro se centra en investigar a estudiantes de nivel de Educación Secundaria, lo cual se alinea de manera relevante con el alcance de este TFM. Dado que la unidad didáctica se encuentra dirigida a estudiantes de la ESO, esta elección resulta altamente pertinente. Asimismo, en nuestro análisis, también utilizaremos en menor medida el artículo de Alpízar Vargas et al. (2018), debido a su afinidad temática que lo convierte en un recurso complementario valioso para nuestra revisión.

La decisión de analizar el artículo de Arce y Ortega (2013) radica en su temática específica. El artículo aborda los fallos comunes cometidos por los alumnos al confeccionar gráficas de funciones, y para abordar estos errores, resulta primordial en primera instancia identificar y comprender tales equivocaciones frecuentes. En relación al libro de Ruiz Higuera (1998), su enfoque es análogo, aunque más amplio en cuanto al concepto de función, no restringiéndose únicamente al ámbito de las gráficas. Adicionalmente, la elección de este libro se ve influenciada por el estatus de prestigio académico de Ruiz Higuera en la Universidad de Jaén, y por el hecho de que su investigación doctoral se enfocó en esta área específica.

De acuerdo con Alpízar Vargas et al. (2018), la identificación de errores relacionados con un concepto matemático específico arroja luz sobre los factores que han impactado en

el proceso de interiorización de conocimiento por parte de los estudiantes. Por tanto, es comprensible que, para prevenir estas equivocaciones, sería beneficioso personalizar el contenido curricular de manera que se pueda emprender de manera efectiva la pluralidad presente en cada grupo de estudiantes.

En el trabajo de investigación desarrollado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006), se presenta una recopilación de los errores más frecuentes que los estudiantes suelen cometer en la asignatura de matemáticas:

- Errores por el uso incorrecto de símbolos matemáticos.
- Errores por realizar representaciones gráficas inadecuadas.
- Errores de concepto.
- Errores por realizar asociaciones incorrectas.
- Errores por el mal uso del lenguaje algebraico.
- Errores de interpretación de las representaciones gráficas.

Se pondrá especial atención al último tipo de errores, ya que uno de los documentos analizados se enfoca de manera específica en la exploración de las imprecisiones durante la creación de representaciones gráficas.

Para comenzar, se van a examinar los fallos que los estudiantes frecuentan tener en relación al concepto de función, el cual es esencial en el ámbito de las matemáticas y, en ocasiones, no queda completamente claro, originando posibles errores significativos.

De acuerdo con lo expresado por Alpízar Vargas et al. (2018), es frecuente que los errores que cometen los estudiantes se originan por una comprensión insuficiente de los conceptos. Además, muchos de estos errores no se derivan principalmente de dificultades con los contenidos relacionados con las funciones, sino que están relacionados con operaciones elementales y contenidos más básicos que, en teoría, los alumnos deberían haber dominado en años anteriores. Esta situación resulta inquietante, aunque en realidad, no está vinculada a las problemáticas asociadas con el concepto de función.

Conforme a lo expuesto por Ruiz Higuera (1998), existen tres elementos cruciales al abordar la noción de función: la comprensión del concepto, la representación gráfica de funciones y la aplicación de funciones. Dentro de estos tres contextos, los estudiantes presentan perspectivas sumamente variadas.

Tomando como ejemplo el entendimiento del concepto de función (Ruiz Higuera, 1998), se presentan diversas concepciones equivocadas. Entre estas, se podría mencionar el no considerar las funciones constantes como funciones, ya que, para una fracción del alumnado, una función se limita a ser una expresión en la que, partiendo de

un valor asignado a x , se consigue un valor para y . Esto excluye, erróneamente, a las funciones constantes. Otro caso es la omisión por parte de algunos estudiantes de la premisa de que cada entrada de una función debe tener una salida única, un aspecto fundamental en el concepto mismo de función.

Desde otra perspectiva, en lo que respecta a la representación de las funciones, Ruiz Higuera (1998) señala que existen diferentes puntos de vista. Por un lado, hay estudiantes que solo identifican una función cuando está presentada en su forma explícita, mientras que otros consideran como funciones únicamente aquellas expresiones algebraicas que pueden ser visualizadas gráficamente. Ahora bien, muchos estudiantes sostienen la opinión de que dichas representaciones gráficas deben obedecer ciertos patrones de regularidad o continuidad, descartando como gráfica de función aquellas que presentan numerosas discontinuidades o una traza irregular. Además, existe la percepción de que ciertas características de las funciones, como la monotonía o continuidad, se asocian más con las representaciones gráficas que con las propias funciones en su forma analítica.

En la última consideración explorada Ruiz Higuera (1998), se observa un consenso en la perspectiva de los alumnos en relación al empleo de las funciones. De una forma u otra, todos coinciden en que las funciones se emplean para abordar asuntos matemáticos internos, como elaborar una representación gráfica, generar una tabla de valores, resolver una ecuación o delimitar el dominio de una función. Sin embargo, este punto de vista excluye por completo la aplicabilidad de las funciones en contextos de la vida diaria o más allá de la influencia de las matemáticas. No se toma en consideración en absoluto cómo las funciones son herramientas esenciales para modelar situaciones cotidianas en las cuales se experimenta una variación.

De este modo, Ruiz Higuera (1998) aborda las incoherencias identificadas en los alumnos en relación con el concepto de funciones. Entre estas, resaltan, por ejemplo, la inhabilidad de los estudiantes para discernir una función en su forma explícita o implícita, o incluso, la complicación para relacionar una función expresada algebraicamente con su correspondiente representación gráfica.

El ámbito de las representaciones gráficas de funciones abarca una extensión considerable y abierta. Se presentan incontables posibilidades de errores que los estudiantes podrían cometer en este ámbito. En primer lugar, un 36,2% de los estudiantes concibe la gráfica como el resultado de un proceso de análisis de una función, en lugar de percibirla como una herramienta que contribuye a comprender más a fondo la función que está siendo estudiada (Ruiz Higuera, 1998). Sin embargo, no solamente es el propósito de las gráficas lo que confunde a los estudiantes, sino que

también cometen numerosos errores al momento de representar las gráficas de manera adecuada.

El artículo de Arce y Ortega (2013) se centra precisamente en este asunto: la considerable cantidad de equívocos presentes en las representaciones de funciones por parte de los estudiantes. Duval (1993) sostiene que las representaciones son la fuerza motriz principal para el entedimiento de los conceptos. La diversidad de maneras en las que se puede representar un concepto y la habilidad para transitar fluidamente entre estas representaciones son elementos que enriquecen la percepción del concepto por parte de los alumnos. El dilema en torno a las fallas en las representaciones radica en que los estudiantes confían en gran medida en dichas representaciones para abordar problemas. Por consiguiente, estas representaciones deberían ser suficientemente apropiadas y ajustarse rigurosamente a la definición del concepto que representan (Vinner, 1991).

Con el objetivo de abordar estas insuficiencias, se busca examinar los errores predominantes que los estudiantes cometen al trazar la representación gráfica de una función. Las deficiencias identificadas tienen el potencial de generar obstáculos para una interpretación precisa de una función basada solamente en la información proporcionada por su representación gráfica (Arce y Ortega, 2013). Entre los fallos más recurrentes se encuentran los siguientes:

- Fallo del concepto de función:

Estas carencias se originan debido a que los estudiantes no consideran la singularidad de la imagen de la función. Al representar gráficamente una función, esto se manifiesta en dos aspectos: un 61% dibuja trazos esencialmente verticales en ramificaciones infinitas que no son asintóticas, como sucede en el caso de las parábolas, y un 32% ilustra múltiples puntos imagen para un mismo punto del dominio. Este fenómeno se presenta predominantemente en funciones definidas por segmentos (Arce y Ortega, 2013).

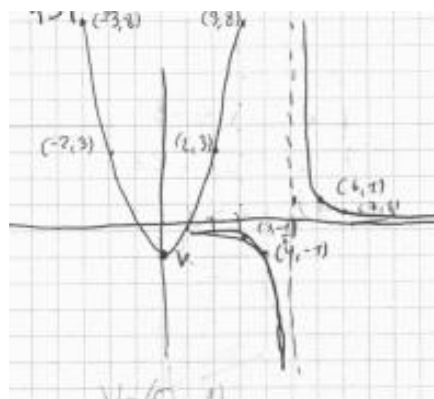


Ilustración 31 Función a trozos con errores en la imagen para un mismo punto del dominio. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.66)

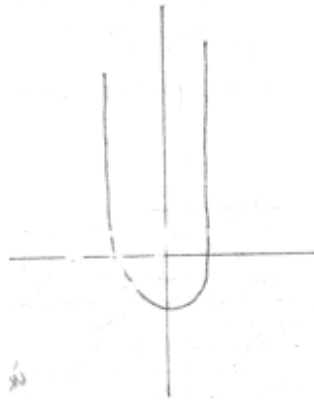


Ilustración 32 Ramas verticales en representación parabólica. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.65)

- Fallos la representación de asíntotas

Los fallos en relación con la representación de las asíntotas presentan una cantidad significativa. Conforme lo destacan Arce y Ortega (2013), algunos estudiantes omiten trazar las asíntotas cuando corresponde, y si lo hacen, su representación no se asemeja a una auténtica asíntota. También se presentan ocasiones en las que se verifica una separación entre la función y la asíntota en la etapa final de la traza de la función, cuando, en esa ubicación, la función debería aproximarse más a la asíntota que nunca. Sin embargo, el desafío más prominente al dibujar asíntotas es que el proceso de aproximación de la función a la asíntota no ocurre de forma gradual. En realidad, a partir de un punto específico en las representaciones, aproximadamente un 82% de los estudiantes establece una distancia equidistante entre la función y la asíntota.



Ilustración 33 Representación de asíntotas. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.66)

- Fallos en el escalado de los ejes

En lo que respecta a la aplicación de escalas, de acuerdo a lo planteado por Arce y Ortega (2013), se observa que un 42% de los estudiantes emplea escalas que no son proporcionadas. Por otro lado, la limitación más extendida (abarcando al 75% de los

estudiantes) es la omisión de las escalas; en otras palabras, no incorporan ningún tipo de escala para lograr una representación exacta de la gráfica.

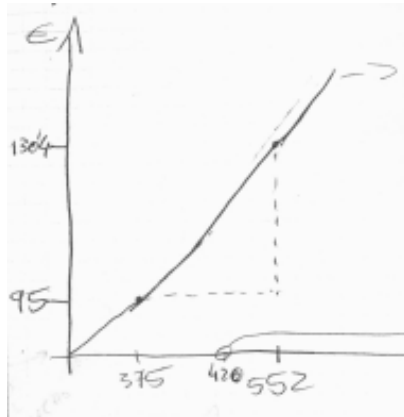


Ilustración 34 Uso de escala desproporcionada. Fuente: Arce y Ortega (2013, p. 67)

- Fallos por las características de una función

En lo que respecta a este tipo de error, Arce y Ortega (2013) presentan diversos casos que ilustran las deficiencias vinculadas con las propias particularidades de la función. Un ejemplo de esto es el caso del crecimiento en la función, como en el caso de los logaritmos, donde la rama infinita (no asintótica, ya que la función es creciente en todo el dominio de la misma) se traza de manera paralela al eje o incluso, en algunos casos, decreciente. También se aborda la cuestión de la derivabilidad de las parábolas, la cual puede suscitar interrogantes debido a la prominente forma de pico que se puede identificar en ciertas gráficas en la proximidad del vértice de la parábola.

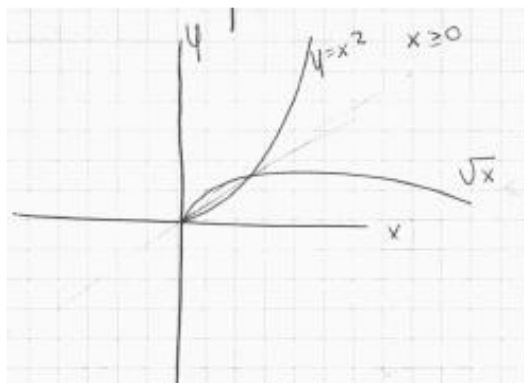


Ilustración 35 Rama infinita no creciente. Fuente: Arce y Ortega (2013, p.68)

De acuerdo a estos estudios, se pueden identificar razones subyacentes que llevan a los estudiantes a incurrir en estos fallos, ya sea aquellos ligados al entendimiento del concepto de función, su representación y empleo, así como también los que se refieren a la creación de representaciones gráficas de funciones.

Siguiendo el razonamiento de Ruiz Higuera (1998), los alumnos se topan con una sucesión de barreras al momento de asimilar el concepto de función. Estos obstáculos pueden derivar de enfoques didácticos (equivocaciones que surgen debido a la limitación en la presentación de información a los estudiantes sobre fórmulas, técnicas de cálculo o geometría, por ejemplo) o pueden emerger del propio entendimiento del estudiante (errores que se originan en intuiciones incorrectas o en la interpretación errada de conceptos). Adicionalmente, la enseñanza promueve el uso de funciones de forma específica diseñadas para explorar determinadas características, lo cual podría resultar en la falta de familiaridad por parte de los estudiantes con otros tipos de funciones (Ruiz Higuera, 1998).

En otro sentido, en relación con la elaboración de gráficas, Arce y Ortega (2013) postulan que las razones detrás de las carencias que identificamos en la creación de representaciones gráficas de funciones podrían residir en que los estudiantes no han asimilado de manera suficiente las propiedades de las funciones. También podría deberse a la incapacidad de traducir adecuadamente estas propiedades al proceso de trazado gráfico, o incluso a errores inherentes a la comprensión de conceptos como función o asíntota, por ejemplo. Además, estas imprecisiones podrían incrementarse si el profesor comete algún error en la metodología de enseñanza. El hecho adicional de que el dibujo de una función en papel sea inherentemente impreciso contribuye a amplificar las deficiencias en la representación.

Adicionalmente, en la actualidad, se enfatiza la necesidad de que las funciones o las representaciones gráficas abordadas por los estudiantes sean simples y de sencilla evaluación. Este enfoque en la evaluabilidad está arraigado en el sistema educativo actual, el cual concede una alta prioridad a los aspectos algebraicos (Ruiz Higuera, 1998). Como resultado, se relega en gran medida la consideración de la modelización, lo que lleva a que los estudiantes, por un lado, desarrollen perspectivas sumamente limitadas sobre el concepto de función o la utilidad de las gráficas y, por otro lado, no puedan discernir un propósito más allá de la dimensión intramatemática al emplear las matemáticas (Ruiz Higuera, 1998). En resumen, los estudiantes no logran comprender la relevancia de las funciones en nuestra vida diaria.

En mi opinión, se trata de un error en la forma de impartir este bloque. Lo principal que debe descubrir el alumno es la utilidad a lo que está aprendiendo para poder emplearlo en su día a día. De aquí nace la modelización matemática. Este problema se podría solucionar introduciendo más ejercicios y problemas de modelización matemática en los libros de texto. Está claro que la modelización matemática es compleja y no es fácil de explicar, pero se debe realizar un esfuerzo en este sentido.

Consideremos en este momento las propuestas que se presentan con el propósito de abordar los errores y las carencias que hemos expuesto a lo largo de esta evaluación.

En un primer enfoque, Ruiz Higuera (1998) nos plantea la necesidad imperativa de involucrar problemáticas de modelización, con el fin de brindar a los estudiantes una perspectiva que trascienda el ámbito matemático. De este modo, se podría ilustrar cómo las funciones y las representaciones gráficas son herramientas pragmáticas. Por otra parte, las actividades propuestas deberían superar el alcance de aquellas que pueden ser resueltas mecánicamente, sin que los estudiantes se involucren en la reflexión o cuestionamiento sobre cómo emplean los conceptos (Alpizar Vargas et al., 2018).

En relación a las representaciones gráficas, resulta esencial que los estudiantes interpreten las gráficas como un medio para manifestar la variabilidad y la dependencia, en lugar de considerarlas únicamente como un instrumento para resaltar características de la función en cuestión (Ruiz Higuera, 1998). Además, es imperativo que los estudiantes desarrollen su pensamiento crítico en el ámbito del trazado de funciones y sean capaces de discernir en qué grado una representación gráfica muestra con precisión las características de la función que está siendo representada (Arce y Ortega, 2013).

En resumen, la práctica de la modelización se fundamenta en las funciones y sus representaciones, y es lamentable que los estudiantes se limiten a utilizar las funciones y explorar sus propiedades exclusivamente en el ámbito matemático, considerando su gran utilidad y potencial. En este sentido, los educadores tienen la responsabilidad de fomentar un enfoque hacia la modelización matemática y fomentar el cultivo del pensamiento crítico en los estudiantes, con el objetivo de capacitarlos para discernir de manera autónoma cuándo se ha empleado el concepto de función o su representación de una manera adecuada y expansiva, en lugar de restringida.

6. Proyección Didáctica. Elaboración de una Unidad Didáctica

6.1. Título

La Unidad Didáctica presentada lleva por nombre "Funciones y Gráficas". Siguiendo los lineamientos establecidos en el R.D. 1105/2014, emitido el 26 de diciembre, que regula el currículo fundamental para la Educación Secundaria Obligatoria, se abordarán los temas relacionados con la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del cuarto curso de la ESO.

6.2. Justificación

En esta parte, se discute desde distintas perspectivas la importancia de crear la presente Unidad Didáctica enfocada en el estudio de funciones y las representaciones gráficas asociadas a las mismas.

6.2.1. Justificación curricular

En primer lugar, en la sección de justificación curricular, se realiza un análisis exhaustivo del currículo, donde se destacan los contenidos abordados en el bloque dedicado a las funciones, así como en el primer bloque, el cual complementa a los demás. En esta ocasión, nos focalizaremos, de manera exclusiva, en el bloque de funciones, en el cual seleccionaremos los conceptos pertinentes para esta unidad didáctica. Es importante señalar que no todos los contenidos del bloque de funciones serán tratados en esta parte, ya que abarcaría un temario muy extenso para su desarrollo en una sola unidad. Por esta razón, en este tema solo se abordará la primera mitad de los contenidos relacionados con las funciones que deben ser estudiados.

Tanto en el Decreto Real 1105/14, emitido el 26 de diciembre, como en la Orden del 14 de julio de 2016, se especifican los contenidos que deben ser abordados en la asignatura de Matemáticas orientada en las enseñanzas aplicadas del cuarto curso de la ESO, relacionado con las funciones, sus propiedades y su representación gráfica.

A continuación, podemos encontrar los criterios de evaluación relacionados con los contenidos indicados anteriormente:

Criterios de Evaluación según la Orden del 14 de julio de 2016	
1.	Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. CMCT, CD, CAA.
2.	Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales. CMCT, CD, CAA.

Ilustración 36 Criterios de Evaluación. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016

Finalmente, consultando el Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, podemos descubrir los estándares de aprendizaje evaluables relacionados con los contenidos y criterios de evaluación descritos anteriormente:

Estándares de aprendizaje evaluables según el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre
1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial.
1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad).
1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores.
1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos.
2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión.
2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.

Ilustración 37 Estándares de aprendizaje evaluables. Fuente: Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre

Es importante destacar que hemos excluido los contenidos relacionados con las funciones cuadráticas y resto de funciones elementales, ya que no serán abordados en esta unidad didáctica. Dichos temas se abordarán en una unidad posterior, que no es de nuestra competencia en este Trabajo de Fin de Máster.

Relativo a los criterios de evaluación enumerados con anterioridad, podemos percatarnos que los estudiantes mejorarán las siguientes habilidades y competencias clave por medio del estudio de la materia de esta unidad: Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología (CMCT), Competencia Digital (CD) y Competencia de aprender a aprender (CAA).

Además de las competencias clave previamente mencionadas, también se abordarán otras habilidades y capacidades, tales como:

- Competencia en comunicación lingüística (CCL)
- Competencias sociales y cívicas (CSC)

Aunque estas competencias clave no están directamente vinculadas a las matemáticas en sí, son igualmente relevantes para el crecimiento integral de los estudiantes en su vida diaria. Además, promueven el desarrollo de destrezas que pueden resultar útiles tanto en otras asignaturas como en su futuro desempeño profesional.

6.2.2. Justificación social

Las funciones forman parte de un bloque de las matemáticas ampliamente empleadas en diferentes situaciones diarias desde tiempos remotos. Sin embargo, pasamos por alto su presencia y no somos conscientes de que las estamos utilizando casi toda la parte del tiempo.

Como se ha mencionado en el apartado de Fundamentación Didáctica, conforme a lo expuesto por Ballester Sampedro (2009), en variados campos científicos, y también en aquellos que no son científicos, es factible proponer leyes que vinculan diversas magnitudes. Por ejemplo, se puede fijar una relación entre la masa y la velocidad, es decir, a partir del valor de una de las magnitudes, mediante una función, se puede determinar el valor de otra magnitud que se encuentra relacionada con la primera. Además, las funciones pueden ser representadas de forma algebraica o a través de gráficas. Esta última forma de representación nos facilita visualizar cómo una función relaciona magnitudes, resultando más intuitiva y comprensible para personas de diverso perfil.

Las funciones tienen una amplia presencia en numerosas áreas, ya que establecer una relación entre dos magnitudes a través de una fórmula comprobada puede resultar de utilidad para pronosticar la variación de una magnitud en función de la otra. Esta capacidad de predicción encuentra aplicaciones en diversos campos.

Las funciones son ampliamente utilizadas no solo en las matemáticas y la estadística, sino también en una multitud de disciplinas en el ámbito de la física, como la dinámica, la cinemática, la estática, la termodinámica, entre otras. Por consiguiente, su estudio se lleva a cabo tanto en programas de ingeniería como en campos como la física, la óptica, la química y la biología. Además, es posible encontrar funciones en el ámbito económico, donde, por ejemplo, los costos y la cantidad de productos pueden estar relacionados a través de una función.

Las funciones no se limitan únicamente a los campos mencionados anteriormente. También las podemos encontrar en campos como la música. Los pitagóricos de la antigua Grecia mantenían la creencia de que la esencia de la naturaleza radica en la armonía que emana de los números.

En conclusión, la utilización de funciones resulta fundamental en numerosos campos del conocimiento. No solo en estudios avanzados, sino también en la vida diaria, donde la función lineal prevalece en gran medida.

Para concluir, a modo de ilustración sobre cómo las funciones se encuentran presentes en nuestras vidas, aunque en ocasiones no seamos plenamente conscientes de ello, podemos mencionar el caso de la escala de Richter, la cual todos hemos escuchado en la televisión u otros medios de comunicación. Esta escala se utiliza para medir la intensidad de los terremotos y se basa en el uso de una función específica. De manera similar a este ejemplo, existen innumerables funciones en nuestra sociedad que poseen una clara utilidad práctica.

6.2.3. Justificación didáctica

Es esencial que los estudiantes adquieran una comprensión sólida del concepto de función y la representación gráfica de una función, ya que este conocimiento les resultará fundamental en su trayectoria académica para abordar nuevos temas y conceptos relacionados con las funciones.

Los conocimientos que se fundamentan en las funciones son numerosos e indispensables. En los niveles educativos de la ESO y Bachillerato, se introducirán conceptos que carecerían de sentido sin haber estudiado previamente las funciones. Por ejemplo, las funciones cuadráticas, cúbicas, la función inversa, los diferentes tipos de funciones y sus representaciones gráficas, los límites, la continuidad, la monotonía y los diversos tipos de discontinuidades, el cálculo derivativo, las rectas tangentes, las primitivas, las integrales y los problemas de optimización. Estos son solamente algunos ejemplos de los conceptos que se basan en las funciones.

Por otro lado, al acceder a estudios universitarios en áreas científicas como matemáticas, física, ingeniería, economía, óptica, entre otras, resulta fundamental haber adquirido y comprendido a fondo los conocimientos relacionados con las funciones en las etapas obligatoria y post obligatoria. Esto se debe a que este conocimiento se vuelve esencial para alcanzar el nivel de conocimientos requeridos en el ámbito universitario. Gran parte de las asignaturas que se cursarán en la etapa universitaria se basan en las funciones y en la modelización. Como mencionamos anteriormente, las funciones juegan un papel esencial en temas como la cinemática, la termodinámica y la economía. La Ley de la Gravitación Universal de Newton y la Ley de Coulomb son ejemplos de conceptos con una sólida base matemática en los que es necesario emplear funciones. Del mismo modo, en la determinación de las ondas electromagnéticas de Maxwell y en muchas otras aplicaciones, las funciones también juegan un papel relevante.

En resumen, el estudio de las funciones es fundamental para garantizar un futuro exitoso tanto en la etapa de la ESO y el Bachillerato como en los estudios universitarios. Las funciones representan un pilar fundamental en el ámbito del conocimiento matemático avanzado y constituyen el núcleo central de gran parte de la investigación matemática actual.

6.2.4. Justificación cultural

Existen una infinidad de representaciones gráficas de funciones que podemos observar tanto en la naturaleza como en nuestra sociedad, las cuales nos permiten admirar la belleza de las matemáticas y, en particular, de la representación de funciones.

Podemos observar esta representación en los movimientos presentes en la naturaleza, como, por ejemplo, al lanzar una pelota. La trayectoria seguida por la pelota puede ser descrita como la gráfica de una función cuadrática. Asimismo, cuando un objeto se desplaza con un movimiento rectilíneo uniforme o un movimiento rectilíneo acelerado, podemos expresar su movimiento mediante una función lineal o una función cuadrática, respectivamente.

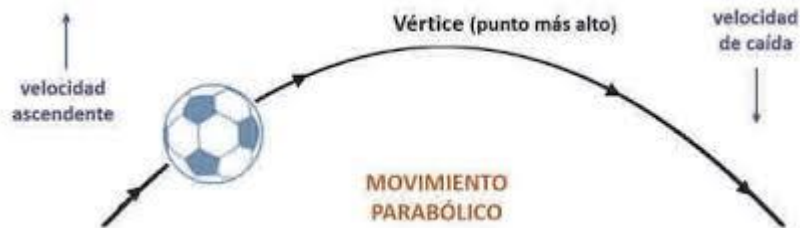


Ilustración 38 Movimiento parabólico lanzamiento pelota. Fuente: <https://www.um.es/phi/aquirao/EntreParticulas/PDF/2021%20Abril13.pdf>

En relación a obras realizadas por la humanidad a lo largo de la historia, podemos encontrar numerosos objetos cuya estructura sigue la forma de una función. Un ejemplo claro es la antena parabólica, la cual se asemeja a la gráfica de una función cuadrática o parabólica. Además, en diversas partes del mundo, podemos apreciar estructuras arquitectónicas cuyo diseño se basa en la representación de alguna función. Un caso ejemplar es el puente de la barqueta en Sevilla, cuya estructura de arco atirantado sigue una función parabólica.



Ilustración 39 Puente de la Barqueta (Sevilla). Fuente: https://www.tripadvisor.es/Attraction_Review-g187443-d8837800-Reviews-Puente_de_la_Barqueta-Seville_Province_of_Seville_Andalucia.html

De esta manera, podemos observar estéticamente en nuestro entorno las representaciones de funciones, lo cual nos permite apreciar la belleza de las matemáticas dentro del ámbito del análisis matemático.

6.3. Contextualización del centro y del aula

Para la contextualización del centro se toma como referencia el C.D.P. La Milagrosa situado en la localidad de Úbeda. Este municipio se encuentra en la provincia de Jaén a aproximadamente 59 kilómetros de distancia de la capital. El principal motor económico de Úbeda sigue siendo la agricultura, y principalmente el olivar, a pesar del auge que está tomando en la localidad el turismo y el comercio en los últimos años ya que Úbeda está declarada como ciudad patrimonio de la humanidad junto con Baeza desde el año 2003.

Concretamente, el C.D.P. La Milagrosa se encuentra en la calle Picasso, 16 junto al parque norte en una de las zonas de más reciente construcción de Úbeda.

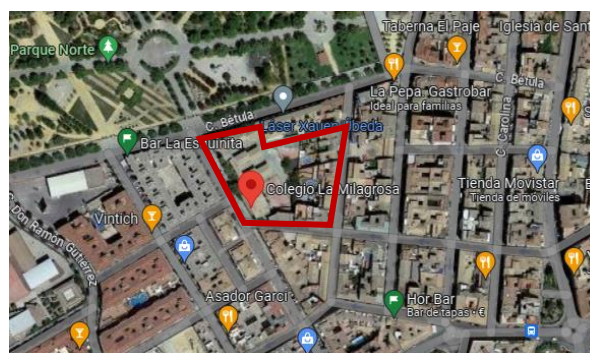


Ilustración 40 Ubicación C.D.P. La Milagrosa (Úbeda). Fuente: Google Maps. Elaboración propia



Ilustración 41 Entrada C.D.P. La Milagrosa (Úbeda). Fuente: https://cadenaser.com/emisora/2019/09/20/radio_ubeda/1568983289_176480.html

En el centro se imparte educación infantil y primaria y educación secundaria obligatoria. No se imparte bachillerato ni ciclos formativos.

El centro consta de las siguientes características:

Perfil del alumnado:

- Educación Infantil 2º Ciclo (3-6 años). 3 unidades. Concertada.
- Educación Primaria (6-12 años). 12 unidades. Concertada.
- Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años). 8 unidades. Concertada.
- Unidad de Integración del alumnado con Necesidades Educativas Especiales con Profesores de Pedagogía Terapéutica y Audición y Lenguaje. 2 Unidades.
- Programa de Atención a la diversidad.
- Plan de acción tutorial.

Instalaciones y materiales:

- 23 aulas estándar, de las que 14 están dotas de recursos TICs, como pizarras digitales, equipo informático para el profesor, punto wifi.
- 2 aulas para apoyo a la integración y 1 aula de Audición y Lenguaje.
- Amplias zonas de recreo, divididas para Infantil y Primaria-Secundaria.
- Despachos de Dirección Titular, Dirección Pedagógica, Dpto. Orientación y Secretaría.
- Sala de profesores, recibidor, portería, biblioteca, aula de informática, laboratorio, WCs, aula de Tecnología y una capilla.

Recursos humanos. Organigrama:

- Profesores y otro personal administrativo y de servicios, cualificados y comprometidos con su labor, y en formación permanente.
- Departamento de Orientación.
- Especialista en audición y lenguaje.
- Especialista en Pedagogía Terapéutica.
- Equipo de Pastoral.

Trabajo Fin de Máster: Funciones y Gráficas

Alumno: Víctor Jiménez Molero

- Equipo de Calidad.
- Monitores especializados para actividades extraescolares.

En relación a las particularidades socioeconómicas de las familias de los estudiantes en el centro educativo, existe una prevalencia de familias de nivel socioeconómico medio-alto. Al tratarse de un centro concertado, pocas familias de nivel socioeconómico bajo pueden permitirse que sus hijos estudien en este tipo de centro.

Además, en prácticamente todas las situaciones, se observa un entorno familiar estable y propicio, con un promedio de dos hijos por cada unidad familiar. Además, se destaca la existencia de relaciones cordiales entre las familias y el centro educativo, resaltando especialmente las interacciones positivas entre los padres y tutores.

La presente unidad didáctica está proyectada para ser implementada en el curso específico de cuarto de Educación Secundaria Obligatoria, enfocado en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Dentro de dicho curso, en el período académico 2022/2023, se cuenta con un total de 12 estudiantes, de los cuales 7 son alumnos y 5 son alumnas, para ser más precisos.

Estos estudiantes son alumnos que tienen decidido que no van a continuar con el bachillerato y continuarán su formación en un ciclo formativo. Por este motivo están recibiendo formación de matemáticas aplicadas.

En lo que respecta a la diversidad presente en el grupo de estudiantes, generalmente, tanto las características físicas como psicológicas de los alumnos se ajustan al perfil típico de su edad. No se identifican en el alumnado casos de necesidades especiales o, en todo caso, de aquellas que hayan sido diagnosticadas.

Inicialmente, todos los integrantes del grupo muestran una capacidad adecuada para mantener el ritmo de la clase, aunque se observa una variabilidad en el nivel de predisposición y compromiso hacia la asignatura, siendo algunos más inclinados hacia el aprendizaje y la implicación que otros.

6.4. Objetivos

6.4.1. Objetivos generales de etapa

Los objetivos de etapa se definen en concordancia con los parámetros prefijados en el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre. Estos objetivos representan los conocimientos y habilidades que los estudiantes deben haber abordado durante su trayectoria en la Educación Secundaria Obligatoria, y que deben alcanzar al finalizar dicho periodo educativo.

Al examinar el artículo 11, podemos identificar que la ESO tiene como objetivo fomentar en los estudiantes el desarrollo de habilidades que les permitan:

Objetivos Generales de la Etapa de ESO según el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre
1) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
3) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
4) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
5) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
6) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
7) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
8) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
9) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
10) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
11) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
12) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Ilustración 42 Objetivos Generales de la Etapa de ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre

Con la elaboración de las actividades propuestas, trabajos grupales y prueba final, desarrollaremos la mayoría de objetivos de la etapa de ESO, ya que se trabajará asumir

responsabilidades, desarrollar hábitos de disciplina, respetar las diferencias entre alumnos, fortalecer capacidades y desarrollar destrezas, entre muchos otros.

6.4.2. Objetivos del área de las matemáticas

Al analizar detenidamente la Orden del 14 de julio de 2016, se constata que la enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en la Educación Secundaria Obligatoria en la región de Andalucía tiene como finalidad fomentar en los estudiantes el desarrollo de destrezas que les permitan:

Objetivos de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas aplicadas según la Orden del 14 de julio de 2016
1) Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2) Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3) Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4) Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presente en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5) Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y valorar su belleza.
6) Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) para realizar cálculos, buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y como ayuda en el aprendizaje.
7) Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8) Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9) Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10) Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11) Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Ilustración 43 Objetivos de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas aplicadas. Fuente: Orden del 14 de julio de 2016

Del mismo modo que con el desarrollo de los objetivos de la etapa de ESO, el desarrollo de esta Unidad Didáctica contribuirá a desarrollar los objetivos propios de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, ya que se contribuirá a desarrollar habilidades socioafectivas, habilidades de pensamiento crítico entre otras habilidades matemáticas.

6.4.3. Objetivos de la Unidad Didáctica

La unidad actual sobre funciones y gráficas establece una serie de objetivos específicos que los estudiantes deberán abordar durante las sesiones y lograr superar en la prueba final. Estos objetivos se detallan a continuación:

- 1) Obtener conocimiento y entendimiento de los conceptos esenciales de función, representación gráfica de una función, y dominio e imagen de una función, además de saber diferenciar claramente entre la variable dependiente y la variable independiente en el contexto de una función.
- 2) Poseer la habilidad de interpretar de manera precisa una gráfica y utilizar de forma adecuada los ejes cartesianos y las escalas correspondientes.
- 3) Desarrollar capacidad de realizar una adecuada transcripción de un enunciado al lenguaje algebraico con el fin de obtener una función, y a partir de dicha función, tener la habilidad de representar su gráfica de manera precisa.
- 4) Ser capaz de asociar entre sí diferentes representaciones de una misma función (verbales, algebraicas, tabulares y gráficas).
- 5) En situaciones en las que las funciones se presenten como modelos, ser capaz de establecer conexiones entre las propiedades de monotonía y los extremos relativos y absolutos de la función con ciertas características de la situación a la que se modeliza.

- 6) Adquirir conocimiento sobre los conceptos de función periódica y función simétrica, y tener la capacidad de identificar, a partir de su representación gráfica, estas características de la función.
- 7) Adquirir conocimiento del concepto de continuidad y tener la capacidad, a partir de una representación gráfica, de distinguir si una función es continua o presenta discontinuidades.
- 8) Tener la capacidad de establecer una relación entre enunciados de problemas cotidianos y la función y gráfica que modelizan dichos problemas, y a partir de esta relación, ser capaz de brindar soluciones a situaciones reales de la vida.
- 9) Promover el uso de herramientas tecnológicas de información y comunicación (TIC), específicamente para indagar sobre el comportamiento de las gráficas y, de esta manera, potenciar el proceso de aprendizaje de los alumnos.
- 10) Demostrar una disposición crítica hacia la resolución de problemas, evaluando diferentes enfoques y enfoques alternativos que puedan conducir a la solución deseada.
- 11) Realizar una reflexión acerca de la coherencia entre la solución obtenida para un problema y el enunciado del mismo.

6.5. Competencias clave

Con arreglo a lo establecido en el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre, el artículo 2 establece que las competencias se fijan como las habilidades necesarias para aplicar de forma integrada los contenidos correspondientes a cada etapa educativa con el propósito de abordar problemas complejos y llevar a cabo actividades adecuadamente.

Las competencias clave que se mencionan, y su vínculo con la presente unidad didáctica, son los siguientes:

Competencias Clave según el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre
1) Comunicación lingüística (CCL).
2) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
3) Competencia digital (CD).
4) Aprender a aprender (CAA).
5) Competencias sociales y cívicas (CSC).
6) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
7) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Ilustración 44 Competencias Clave. Fuente: R.D. 1105/2014 del 26 de diciembre

En particular, se debe poner un énfasis especial en el fomento de las competencias de Comunicación lingüística y Competencia matemática, así como en las competencias básicas relacionadas con la ciencia y la tecnología. En relación a la Unidad Didáctica en cuestión, se buscará implementar actividades que promuevan el desarrollo de diversas competencias entre los estudiantes.

1) Comunicación Lingüística (CCL)

La competencia de comunicación será una constante a lo largo de toda la unidad, siendo especialmente importante para el entendimiento de los contenidos y la realización de ejercicios. Esta competencia se desarrollará de las siguientes maneras:

- Durante las exposiciones de los contenidos de la unidad realizadas por el docente
- Durante el proceso de lectura de textos, como los enunciados de las actividades, con el fin de entender con exactitud su significado y ser capaz de extraer la información adecuadamente.
- Durante el proceso de corrección de los ejercicios, ya sea realizado por el docente o por algún miembro del alumnado.
- Al momento de comunicarse de forma oral para formular preguntas sobre dudas, explicar el proceso de una actividad o facilitar la solución a un ejercicio.
- Durante las tareas o actividades realizadas en grupo, los alumnos interactúan entre sí, expresan sus ideas y las respaldan con argumentos.
- Al emplear recursos de comunicación no verbal en alguna de las situaciones previamente mencionadas.

2) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).

Esta competencia clave es indispensable en cualquier campo del conocimiento, y, más aún, cuando se trata de la asignatura de matemáticas. En relación a esta Unidad Didáctica, esta competencia se desarrolla en multitud y variados momentos del proceso de enseñanza/aprendizaje:

- Al encontrarse frente a una representación gráfica, donde el alumno debe entender la información que esta contiene y ser capaz de interpretarla adecuadamente. Asimismo, relacionando las funciones con sus correspondientes gráficas.
- Cuando emplea los conceptos de ciencias y tecnología adquiridos durante el tema para resolver un problema, comprendiendo también su relevancia en nuestra vida cotidiana.

- Cuando comunica de manera pulcra y concisa los conceptos matemáticos, al mismo tiempo que comprende las ideas expresadas por sus compañeros y compañeras que explican el resto de los conceptos.
- Cuando demuestra la capacidad de identificar la presencia de gráficas de funciones en su entorno diario.

3) Competencia digital (CD).

Se buscará la integración de esta competencia a lo largo de la Unidad por medio de la utilización de programas y aplicaciones informáticas:

- A través de una herramienta en línea para la creación de gráficas, se promoverá una comprensión más intuitiva del concepto de función.
- Por medio del uso del software GeoGebra, se realizará la representación de gráficas de funciones, contribuyendo así a la comprensión de los conceptos relacionados.
- Utilizando de manera adecuada la calculadora, se realizarán cálculos más avanzados para abordar situaciones de mayor complejidad.
- Aprovechando los recursos disponibles en Internet, se buscará la información necesaria para completar algunas de las actividades propuestas en el tema.

4) Aprender a aprender (CAA).

Es importante que los alumnos tomen conciencia de los aspectos de las matemáticas que controlan y aquellos en los que aún tienen desconocimiento:

- Al utilizar la imaginación para idear y construir funciones inventadas de manera original.
- Cuando se fomenta el pensamiento crítico al evaluar la coherencia de una solución y considerar la posibilidad de llegar a ella a través de diferentes enfoques o métodos.
- Al organizar de manera adecuada la información, se fomenta una comprensión más clara de los conceptos impartidos.

5) Competencias sociales y cívicas (CSC).

Dado que los alumnos son seres sociales, es de gran importancia que los estudiantes mejoren constantemente su capacidad para relacionarse con los demás, lo cual es fundamental para su crecimiento personal y para su éxito en el ámbito profesional y personal. Esta competencia se fomenta a través de las siguientes situaciones:

- Interactúa de manera fluida y tranquila tanto con sus compañeros como con el docente estableciendo relaciones naturales sin experimentar situaciones de estrés.
- Colabora de manera activa con sus compañeros durante el trabajo en equipo, comunicándose de forma efectiva y contribuyendo activamente a la resolución de las actividades propuestas.
- Se promueve la interacción respetuosa y el diálogo constructivo, creando un ambiente positivo y armonioso en el aula.
- Manifiesta su punto de vista con confianza, respaldándolo con argumentos sólidos, al tiempo que muestra respeto hacia las opiniones de los demás sin menospreciarlas.

6) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).

Por medio de esta competencia buscamos promover en los estudiantes una habilidad para la toma de decisiones que les sea útil en su futuro, tanto en el ámbito profesional como en el personal, a partir de diferentes situaciones planteadas:

- Al explorar y descubrir en su entorno inmediato situaciones que se puede representar mediante el uso de funciones y gráficas, el alumnado podrá aplicar y desarrollar su conocimiento en este tema.
- Encuentra inspiración en la oportunidad brindada para abordar problemas menos estructurados bajo la guía del docente, lo cual le permite desarrollar su autonomía y creatividad en la resolución de los mismos.
- Muestra curiosidad y asume la iniciativa cuando se enfrenta a la resolución de problemas de naturaleza menos convencional o fuera de lo común.

7) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Para comprender el aquí y ahora y reconocer su relevancia en nuestra vida cotidiana, es fundamental tener un conocimiento profundo de nuestro pasado y comprender cómo ha influido en nuestra situación actual en diversos campos de conocimiento. Esta competencia se fortalece cuando:

- Se otorga una gran importancia a la apreciación estética al momento de visualizar y representar gráficas de funciones, encontrando ejemplos de estas representaciones en contextos reales.
- Al tomar conciencia de la importancia de las funciones en las matemáticas y en la vida diaria, así como de su evolución en el tiempo gracias a reconocidos matemáticos.

6.6. Contenidos

Para el desarrollo de los contenidos de esta Unidad Didáctica, se han tomado como referencia los contenidos de la Orden del 14 de julio de 2016 ya desarrollados en el apartado **4. Fundamentación Curricular**, en la página 40 del presente TFM.

A partir de estos contenidos, se abordarán en esta Unidad Didáctica los siguientes:

Contenidos de la Unidad Didáctica. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
C.1.1. Enunciar las propiedades que presenta una función mediante la observación de su gráfica.
C.1.2. Asegurarse de que haya coherencia entre el enunciado de un problema y la solución a la que hemos llegado.
C.1.3. Analizar diferentes formas de llegar a la solución de un problema.
C.1.4. Relacionar problemas de la vida cotidiana con funciones que modelizan dichos problemas.
C.1.5. Programa GeoGebra para representar gráficas a partir de funciones y enunciar las propiedades de una función a partir de su gráfica.

Ilustración 45 Contenidos de la Unidad Didáctica relacionados con el Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

Contenidos de la Unidad Didáctica. Bloque 4: Funciones
C.4.1. Concepto de función y gráfica e interpretación de la misma
C.4.2. Concepto de escala, dominio y recorrido
C.4.3. Variable dependiente y variable independiente
C.4.4. Operaciones con funciones
C.4.5. Continuidad y discontinuidad
C.4.6. Puntos de corte con los ejes coordenados
C.4.7. Periodicidad y simetría
C.4.8. Asíntotas de una función
C.4.9. Crecimiento y decrecimiento. Monotonía de una función.
C.4.10. Extremos absolutos y relativos de una función
C.4.11. Interpretación de las propiedades de una función a partir de su gráfica

Ilustración 46 Contenidos de la Unidad Didáctica relacionados con el Bloque 4. Funciones. Fuente: Elaboración propia.

6.7. Metodología

Tradicionalmente, se observan dos corrientes en el ámbito del aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, encontramos las corrientes conductuales, las cuales postulan que el proceso de aprendizaje implica un cambio en la conducta. Estas corrientes sostienen que la adquisición de habilidades matemáticas más avanzadas se logra a través de la transmisión de habilidades más simples. Por ejemplo, el dominio de una operación matemática compleja se inicia con la ejecución de una operación análoga más sencilla, que involucra un número reducido de cifras, y progresivamente se avanza hacia operaciones más complejas que implican un mayor número de cifras.

Por otra parte, las perspectivas cognitivas del aprendizaje de las matemáticas señalan que el proceso de enseñanza/aprendizaje implica la modificación de estructuras mentales previas que han surgido a partir de las experiencias vividas por el estudiante hasta ese momento, a través del aprendizaje de conceptos. Dichos conceptos, debido a su dificultad, no pueden disgregarse en conceptos más sencillos, sino que se aprenden mediante la resolución de problemas o el desarrollo de tareas más complicadas. Cuando el estudiante establece relaciones entre los nuevos problemas y aquellos que ya conoce, buscará soluciones utilizando las estructuras e ideas previas. Este proceso es denominado "asimilación" por el autor Piaget. Sin embargo, cuando las estructuras previamente estudiadas por el alumno no son suficientes para resolver el nuevo problema, ya que no le permiten explicar las nuevas ideas, el estudiante debe cambiar su estructura mental por otra para asimilar el nuevo conocimiento. Piaget se refiere a este proceso como "acomodación", y cuando se combinan la asimilación y la acomodación, lo denomina "equilibración".

Por lo tanto, se puede concluir que la metodología más efectiva es, realmente, una amalgama de diversas metodologías, adaptando cada una de ellas y determinándolas en función de sus fortalezas y debilidades, la intención educativa buscada y el contexto en el que se lleva a cabo. En resumen, la elección varía en función de todos los factores mencionados anteriormente.

Teniendo en cuenta todos estos aspectos, en esta unidad didáctica se implementa una mezcla de diferentes metodologías, adaptando cada una de ellas según los diversos factores discutidos, con el objetivo de lograr la elección óptima de la metodología más adecuada para el contexto didáctico que se pretende desarrollar.

Para comenzar, se implementará un enfoque convencional, o lo que se describe como "*lección magistral*". En esta metodología, el profesor utilizará el método expositivo para explicar teóricamente el tema, comunicando oralmente, escrita en la pizarra y visual con la ayuda del proyector los diferentes contenidos del tema, explicando todos los

conceptos que los estudiantes deben aprender durante la lección. Durante el desarrollo de esta metodología, los estudiantes adoptarán un papel pasivo, prestando atención y siguiendo la lección tomando apuntes según lo considerado apropiado por el profesor. Además, se fomentará el intercambio de opiniones entre el profesor y los estudiantes, permitiendo que estos últimos desempeñen un papel activo en este proceso. La participación de los estudiantes, por un lado, indicarán al profesor que están atentos y siguiendo la lección, y, por otro lado, demostrarán que lo explicado hasta ahora se comprende y está claro.

Para reforzar los conceptos presentados por el docente y aprovechando la naturaleza práctica de las matemáticas en la didáctica, se empleará la corrección de actividades y problemas relacionados con el tema expuesto. En primer lugar, se utilizarán ejemplos explicativos que ilustren la aplicación práctica de lo explicado hasta ese momento. Luego, se presentarán actividades que los propios estudiantes deberán resolver de manera individual, tanto durante el tiempo de clase determinado por el profesor como en el trabajo de manera autónoma que los alumnos realizarán en sus hogares.

Para lograr lo descrito con anterioridad, se implementará el enfoque de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), donde los estudiantes, en grupos de trabajo, buscarán soluciones o múltiples enfoques para un problema diseñado por el docente. Además, se emplearán actividades de tipo Investigación Basada en el Aprendizaje (IBL), siguiendo de manera organizada y coordinada las fases que conducen a la resolución del problema. A través de estas metodologías, los estudiantes se convierten en investigadores, explorando y descubriendo mediante actividades basadas en la búsqueda y el descubrimiento. De este modo, el propio alumno "construye el conocimiento" partiendo de sus conocimientos anteriores, investigando y razonando en colaboración con el grupo, sin depender de una "lección magistral" o una exposición teórica previa.

Lo más destacado de estas metodologías es su alta motivación y enriquecimiento, ya que los alumnos encuentran sentido y utilidad en lo que ya saben y en lo que están por aprender. Los problemas a los que se enfrentan son simulaciones de situaciones reales, e incluso pueden abordar problemas auténticos, lo cual aumenta aún más el interés si el tema del problema coincide con sus preferencias.

En relación al aprovechamiento de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), los estudiantes tendrán la posibilidad de utilizar sus dispositivos móviles para buscar información, emplear herramientas gráficas y acceder a recursos en línea que el profesor considere pertinentes. Además, se hará uso de la plataforma Classroom como un recurso digital para establecer una comunicación constante entre el profesor y los alumnos, así como entre los propios alumnos. A través de esta plataforma, tendrán acceso a todos los contenidos y herramientas necesarias, seleccionadas por el profesor

según su criterio. En el siguiente apartado se detallan todos los recursos que se utilizarán durante las sesiones.

6.8. Actividades y recursos

Seguidamente, describiremos las distintas propuestas de actividades y recursos que se implementarán durante esta unidad didáctica. Estas actividades y recursos están diseñados con el propósito de fortalecer el aprendizaje de los estudiantes en relación al tema abordado, así como fomentar la adquisición de las competencias y contenidos establecidos en el marco normativo de Andalucía.

6.8.1. Actividades

Cada una de las actividades planificadas para la ejecución de esta unidad didáctica está detallada en el **Anexo I**, y se ha asignado a cada actividad los criterios de evaluación correspondientes para facilitar la evaluación de los estudiantes. Estas actividades se pueden clasificar en cuatro grupos distintos, que se describen a continuación de manera clara y diferenciada.

Actividades y problemas

Estas actividades constituyen ejercicios convencionales que suelen presentarse al final de cada apartado en los libros de texto, y su objetivo principal es reforzar los conceptos previamente explicados. Estas tareas están diseñadas para consolidar el entendimiento y la aplicación de los contenidos abordados.

Con respecto a los problemas planteados, nos referimos a actividades que solo se pueden abordar una vez se haya completado el desarrollo temático, ya que en ellas se se presentan la mayoría de los contenidos explicados a lo largo de la unidad. La resolución de problemas brinda a los estudiantes la oportunidad de aplicar y combinar los conocimientos adquiridos durante todo el tema.

Actividades IBL

Las actividades basadas en la indagación, siguiendo el enfoque del tipo IBL, tienen como objetivo principal promover el aprendizaje a través de la investigación. Son numerosas las ventajas que este enfoque brinda en comparación con las actividades tradicionales, por lo tanto, en esta unidad didáctica se les otorga una gran relevancia y se busca trabajar con los estudiantes en varias de estas actividades.

Dentro de todas las actividades planteadas, incluimos algunas de ellas denominados problemas de modelización, los cuales buscan explorar la utilidad de las funciones más allá del ámbito de las matemáticas. De acuerdo con el análisis de las investigaciones didácticas, se sugieren este tipo de actividades para que los estudiantes tomen conciencia de lo importantes que son las funciones en nuestra vida diaria y comprendan

que los gráficos de funciones son en realidad herramientas con las que poder trabajar, y no un fin en sí mismas, como los estudiantes a menudo las perciben.

Actividades para el uso y manejo de las TIC

Durante el tema, se desarrollan diferentes actividades que requieren el uso de Internet para realizar búsquedas de información necesarias para completar algunas actividades. Además, se incluyen actividades diseñadas específicamente para promover el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) entre los estudiantes.

Por otro lado, para el desarrollo la sesión, nos apoyaremos en el software GeoGebra para mostrar ejemplos al alumnado. Además, dedicaremos una sesión a enseñar el alumnado el potencial del software GeoGebra y que aprendan a representar funciones y nociones básicas del mismo.

En el **Anexo I** se proporcionará una descripción detallada de cómo determinadas actividades propuestas pueden ayudar a minimizar los errores o las interpretaciones incorrectas que, según nuestro análisis previo, los estudiantes cometen con frecuencia.

6.8.2. Recursos

Para desarrollar la unidad didáctica y realizar las actividades propuestas, serán necesarios diversos recursos de diferentes tipos. A continuación, se detallan los recursos necesarios:

Tipo de recurso	Recursos
Específico	<ul style="list-style-type: none"> - Libro de texto: Matemáticas Orientadas a las enseñanzas Aplicadas. 4º de ESO. Editorial SM. ISBN: 9788467588576 - Pizarra digital
Impreso	<ul style="list-style-type: none"> - Cuaderno del estudiante - Actividades adicionales al libro de texto
Audiovisual	<ul style="list-style-type: none"> - Proyector
Informático	<ul style="list-style-type: none"> - Chromebooks - Software GeoGebra - Navegador internet
Tecnológico	<ul style="list-style-type: none"> - Calculadora
Ambiental	<ul style="list-style-type: none"> - Aula
Recursos humanos	<p>Profesor de matemáticas</p> <p>Alumnos</p> <p>Otros docentes de apoyo</p> <p>Equipo directivo</p> <p>Departamento de orientación</p> <p>Personal PAS</p> <p>Familiares del alumnado</p>
Recursos web	<p>Software GeoGebra.</p> <p>https://www.geogebra.org/download</p>

Ilustración 47 Recursos para la Unidad Didáctica. Fuente: Elaboración propia.

6.9. Atención a la diversidad

En este apartado se presentan las estrategias, proyectos, esquemas o acciones diseñadas para abordar la diversidad establecidas en la sección IV del Decreto 111/2016, de fecha 14 de junio, y en el apartado IV de la Orden emitida el 14 de julio de 2016, dentro del marco de planificación de la autoridad responsable de la educación.

En primer lugar, el docente requerirá adquirir información sobre el nivel inicial de cada alumno. Para lograrlo, aprovechará la primera sesión de la unidad, durante la cual prestará especial atención a la participación y desempeño de cada miembro de la clase. Esta observación inicial permitirá formarse una idea del nivel de competencia de cada estudiante. Además, gracias a la evaluación continua, esta percepción inicial del nivel de los alumnos podrá irse ajustando constantemente a lo largo del desarrollo de la unidad. Esto posibilitará realizar adaptaciones en las actividades en función de los avances y dificultades que se evidencien día a día durante el desarrollo de cada sesión.

En general, se llevarán a cabo las acciones correspondientes para atender a los estudiantes que requieran medidas de diversidad, ya sean adaptaciones no significativas (enfocadas en los contenidos, objetivos y evaluación) o significativas (con cambios en los contenidos, objetivos y criterios de evaluación).

Además, se diseñarán propuestas de apoyo educativo dirigidas a los estudiantes que encuentren dificultad para alcanzar los objetivos de la materia de matemáticas, mientras que se desarrollarán actividades de enriquecimiento para aquellos que logren dichos objetivos más fácilmente.

Las acciones aplicadas en esta unidad didáctica consideran intervenciones educativas con el objetivo de atender a diferentes ritmos de aprendizaje, motivaciones, situaciones económicas, sociales y culturales, intereses, estilos de aprendizaje y salud de los estudiantes. Con este propósito, se establecen tres niveles de acción:

- 1- **Atención a la diversidad en la programación.** Se incluirán en la sección de competencias aquellos temas en los que los estudiantes presenten niveles de habilidades más variados, considerando que cada alumno requiere tiempos diferentes para alcanzar los objetivos establecidos. Por lo tanto, es necesario diseñar un plan que asegure que todos los estudiantes adquieran un nivel básico de conocimientos al término de la evaluación, ofreciendo diferentes opciones para recuperar los conocimientos no alcanzados.

Asimismo, es necesario considerar ciertas actividades, tales como aquellas de extensión o investigación, que promueven el trabajo independiente y brindan la oportunidad de adaptar el ritmo y la intensidad de acuerdo a las necesidades de cada estudiante, favoreciendo así su progreso de manera óptima.

- 2- **Atención a la diversidad en la metodología.** La propuesta metodológica descrita en el apartado 6.7 y los métodos de evaluación planificados promueven entre los estudiantes el trabajo colaborativo y la capacidad de aprender de manera autónoma, mediante la implementación de un enfoque pedagógico que fomente un aprendizaje significativo en el cual los estudiantes sean participantes activos. Esto fomenta tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo, así como el desarrollo del pensamiento crítico y racional.

- 3- **Atención a la diversidad en los materiales y el aula.** Como estrategia en el entorno educativo, se plantean actividades y asignaciones en las cuales los estudiantes podrán ejercitar una amplia gama de procesos cognitivos, además de promover la realización de tareas en equipo.

En relación a los estudiantes, será necesario identificar aquellos que requieren un mayor acompañamiento educativo o adaptación de las estrategias, a fin de poder planificar refuerzos o extensiones adecuadas, gestionar de manera apropiada los espacios y tiempos, plantear la intervención de recursos humanos y materiales, y adaptar el seguimiento y evaluación de sus procesos de aprendizaje. Para lograr esto, se llevará a cabo un proceso de evaluación inicial al comienzo del curso, en el cual se podrán identificar las competencias que los estudiantes han adquirido, más allá de los conocimientos básicos, lo cual les permitirá adquirir nuevos aprendizajes, habilidades y destrezas.

6.9.1. Alumnado con necesidades especiales

Para prestar atención al alumnado con necesidades especiales, se toman en consideración las indicaciones establecidas en las instrucciones emitidas el 8 de marzo de 2017, en las cuales se actualiza el protocolo para detectar e identificar a los estudiantes con necesidades específicas de apoyo educativo, así como para organizar la respuesta educativa correspondiente.

a) Alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE)

1. Compensatoria (COMP): Aquellos estudiantes que presenten un desajuste curricular de al menos dos años en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), el cual no puede ser atribuido a la presencia de Necesidades Educativas Especiales (Discapacidad-DIS) o Dificultades de Aprendizaje (DIA). Este desajuste puede estar vinculado a su historia familiar o personal, debido a una escolarización irregular debido a ser miembro de familias temporales o itinerantes, por períodos de hospitalización, atención educativa en el hogar, sentencias judiciales que afecten a su asistencia regular al centro educativo, por ausentismo o por incorporarse tarde al sistema educativo.

2. Dificultades de Aprendizaje (DIA)

Existen cuatro niveles de Dificultades de Aprendizaje:

2.1. Dificultades Específicas de Aprendizaje: Estudiantes que requieren una atención educativa distinta a la habitual debido a la presencia de dificultades significativas en procesos de conocimiento básicos relacionados con el aprendizaje, lo cual afecta su rendimiento académico y la correcta realización de actividades diarias, sin que se les haya diagnosticado una discapacidad intelectual, motora o sensorial, ni se deba a la falta de oportunidades de aprendizaje o a factores socioculturales. Estas dificultades se consideran un obstáculo para el rendimiento escolar cuando los estudiantes presentan un retraso curricular de al menos dos años en la Educación Secundaria.

2.2. Dificultades de aprendizaje por capacidad intelectual límite: Se refiere a aquellos alumnos que tienen un Coeficiente Intelectual de 70-80 o inferior.

2.3. Dificultades de Aprendizaje por retraso en el lenguaje: Aquellos alumnos que encuentran dificultades en el lenguaje o han experimentado un aprendizaje más lento del lenguaje que el resto de alumnos.

2.4. Dificultades de Aprendizaje derivadas de trastornos por déficit de atención con o sin hiperactividad: Aquellos estudiantes diagnosticados con este trastorno a los cuales se les proporcionará una adaptación curricular no significativa.

b) Alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE)

- Trastorno por Déficit de Atención con y sin Hiperactividad (TDA-H): Se refiere a un comportamiento caracterizado por la falta de atención, la impulsividad y la hiperactividad. Estas dificultades pueden manifestarse en diferentes niveles, pero tienen un impacto significativo en el rendimiento académico y en la capacidad de adaptación social y familiar.
- Discapacidad Sensorial (Visual, Auditiva)
- Discapacidad Física
- Discapacidad Intelectual
- Trastornos de la Comunicación
- Trastornos de espectro Autista (Autismo, Asperger, Trastorno del Desarrollo no especificado, etc)
- Trastornos Graves de Conducta
- Enfermedades raras

6.9.2. Medidas a implementar para el alumnado con necesidades especiales

1. Adaptación Curricular Significativa (ACS)

Enfocadas al alumnado con Necesidades Educativas Especiales (NEE) con un desfase curricular de al menos dos años en una materia. El responsable de elaborar esta Adaptación Curricular Significativa es el profesor de P.T.

2. Adaptación Curricular No Significativa (ACNS)

Estas adaptaciones se aplican a los estudiantes con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE) que presenten un desajuste curricular de al menos un año en la asignatura. Se considera que el nivel de competencia alcanzado en la materia es aquel en el que el estudiante ha cumplido con los criterios de evaluación establecidos (por lo tanto, si ha aprobado las asignaturas del año anterior, no existe dicho desajuste curricular).

3. Programas Específicos (PE)

Se trata de una serie de intervenciones diseñadas para promover el desarrollo de los procesos cognitivos relacionados con el aprendizaje, como la memoria, la atención, el lenguaje y la comunicación, las habilidades sociales, la gestión emocional, entre otros. Estas intervenciones están dirigidas específicamente al alumnado que presenta Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE).

6.10. Temporalización

En esta sección se desarrollará la planificación de cada una de las sesiones, teniendo en cuenta distintos elementos como los temas a tratar, las actividades planificadas y el enfoque hacia la atención de la diversidad.

Esta unidad didáctica se desarrollará a lo largo de un total de 11 clases lectivas. Para cada una de ellas se describirán de manera detallada las actividades sugeridas, los objetivos específicos del campo de las matemáticas relacionados con cada sesión, los contenidos a abordar y las competencias clave que se buscan desarrollar.

De acuerdo con la planificación y temporalización establecidas por el centro educativo, la unidad de funciones y gráficas se ubicaría posteriormente al bloque de geometría, durante un período de casi tres semanas. Durante estas tres semanas, se impartirían cuatro horas semanales de matemáticas, lo que resultaría en un total de once sesiones de 60 minutos cada una.

Se tomará en cuenta un intervalo de tiempo de transición de 5 minutos, durante el cual el profesor realizará el cambio de clase, los alumnos se acomodarán en sus asientos, guardarán silencio, y se prepararán con sus materiales, etc. Por lo tanto, las clases se considerarán con una duración efectiva de 55 minutos.

Sesión 1: Introducción a las funciones y formas de expresar una función	
Contenidos: C.1.1; C.4.1; C.4.3; C.4.11	Objetivos: O.1; O.10
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; SIEP	Actividades: 1, 2, 3, 4 y 5
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comienza la lección con la presentación del bloque de funciones y concretamente del “Tema 7: Funciones”. El primer apartado consistirá en un recordatorio del concepto de función e introduciremos el concepto de función a trozos. (Duración: 20 minutos) - Se explica brevemente las actividades nº1 y 2, que se expondrán como ejemplo y se resolverá en conjunto en colaboración con el alumnado. Se resolverán todas las dudas que surjan. (Duración: 20 minutos) - Propuesta de las actividades nº3, 4 y 5 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 15 minutos) 	

Ilustración 48 Unidad Didáctica. Sesión 1. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 2: Dominio y recorrido de una función	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.5. C.4.2; C.4.3	Objetivos: O.1; O.8; O.11
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA	Actividades: 6, 7, 8, 9 y 10
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº3, 4 y 5). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 20 minutos) - Explicación de dominio y recorrido de una función acompañando dicha explicación de un ejemplo (actividad resuelta). Explicación de las actividades nº6 y 7. Resolución de las mismas en conjunto con el alumnado. Resolución de todas las dudas que puedan surgir. (Duración: 20 minutos) - Propuesta de las actividades nº8, 9 y 10 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 15 minutos) 	

Ilustración 49 Unidad Didáctica. Sesión 2. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 3: Operaciones con funciones	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.5. C.4.4	Objetivos: O.1; O.10
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; SIEP	Actividades: 11, 12, 13 y 14
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº8, 9 y 10). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 20 minutos) - Explicación de operaciones con funciones, suma de funciones, resta de funciones, multiplicación de funciones y cociente de funciones acompañando dicha explicación con ejemplos prácticos. Explicación de la actividad nº11. Resolución de la misma en conjunto con el alumnado. Resolución de todas las dudas que puedan surgir. (Duración: 20 minutos) - Propuesta de las actividades nº12, 13 y 14 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 15 minutos) 	

Ilustración 50 Unidad Didáctica. Sesión 3. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 4: Estudio de continuidad de una función	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.5; C.4.5; C.4.11	Objetivos: O.1; O.8; O.11
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA	Actividades: 15, 16 y 17
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº12, 13 y 14). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 20 minutos) - Explicación de continuidad y discontinuidad de funciones acompañando dicha explicación con ejemplos prácticos. Explicación de la actividad nº15. Resolución de la misma en conjunto con el alumnado. Resolución de todas las dudas que puedan surgir. (Duración: 15 minutos) - Propuesta de las actividades nº16 y 17 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 10 minutos) - Actividad de repaso con KAHOOT donde se realizarán varias preguntas relacionadas con la materia impartida hasta ahora. (Duración: 10 minutos) 	

Ilustración 51 Unidad Didáctica. Sesión 4. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 5: Propiedades de las funciones. Puntos de corte con los ejes, simetría y periodicidad	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.5; C.4.6; C.4.7	Objetivos: O.1; O.2; O.10
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; CSC	Actividades: 18, 19, 20, 21 y 22
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº16 y 17). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 15 minutos) - Explicación de las propiedades de las funciones, puntos de corte con los ejes, simetría de una función y periodicidad de funciones acompañando dicha explicación con ejemplos prácticos. Explicación de las actividades nº18 y 19. Resolución de las mismas en conjunto con el alumnado. Resolución de todas las dudas que puedan surgir. (Duración: 30 minutos) - Propuesta de las actividades nº20, 21 y 22 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 10 minutos) 	

Ilustración 52 Unidad Didáctica. Sesión 5. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 6: Estudio de las asíntotas de una función	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.5; C.4.8	Objetivos: O.1; O.2; O.10
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; CSC	Actividades: 23, 24 y 25
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº20, 21 y 22). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 20 minutos) - Explicación de las posibles asíntotas de una función, asíntotas horizontales, asíntotas verticales y asíntotas oblicuas, acompañando dicha explicación con ejemplos prácticos. Explicación de la actividad nº23. Resolución de la misma en conjunto con el alumnado. Resolución de todas las dudas que puedan surgir. (Duración: 20 minutos) - Propuesta de las actividades nº24 y 25 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 15 minutos) 	

Ilustración 53 Unidad Didáctica. Sesión 6. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 7: Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.5; C.4.9; C.4.10	Objetivos: O.1; O.8; O.11
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA	Actividades: 26, 27, 28, 29 y 30
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº24 y 25). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 15 minutos) - Explicación del crecimiento y decrecimiento de funciones mediante el cálculo de tasas de variación. Explicación de máximos y mínimos de una función acompañando dichas explicaciones con ejemplos prácticos. Explicación de la actividad nº26. Resolución de la misma en conjunto con el alumnado. Resolución de todas las dudas que puedan surgir. (Duración: 30 minutos) - Propuesta de las actividades nº27, 28, 29 y 30 y resolución de dudas. Los alumnos comenzarán con la realización de las mismas y el resto las realizarán en casa para corregir el próximo día. (Duración: 10 minutos) 	

Ilustración 54 Unidad Didáctica. Sesión 7. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 8: Modelización funcional	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.1.4; C.1.5; C.4.1	Objetivos: O.1; O.2; O.10
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; CSC	Actividades: Actividad IBL
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Asignación de grupos (4 personas por grupo) y reparto de la actividad IBL. (Duración: 5 minutos) - Explicación de la actividad apoyándonos en un ejemplo básico. Resolución de dudas planteadas. (Duración: 10 minutos) - Desarrollo de la actividad por grupos. Entrega final de las tareas realizadas para su evaluación. (Duración: 40 minutos) 	

Ilustración 55 Unidad Didáctica. Sesión 8. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 9: Sesión de uso de software GeoGebra	
Contenidos: C.1.5; C.4.1; C.4.4; C.4.5; C.4.7	Objetivos: O.1; O.2; O.10
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; CSC	Actividades: Actividad Libre
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Presentación de software <u>Geogebra</u> con algún ejemplo práctico. (Duración: 10 minutos) - Exposición de diferentes tipos de funciones para mostrar sus características más visualmente (continuidad, puntos de corte con los ejes, monotonía, periodicidad, simetría, asíntotas, etc.) (Duración: 30 minutos) - Se propone una actividad libre para que el alumnado explore este GeoGebra y represente distintas funciones para poder ver por ellos mismos las características mostradas anteriormente. (Duración: 15 minutos) 	

Ilustración 56 Unidad Didáctica. Sesión 9. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 10: Sesión de repaso y realización de ejercicios de examen	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.4.4; C.4.5; C.4.6; C.4.7; C.4.8; C.4.9; C.4.10	Objetivos: O.1; O.2; O.8; O.10; O.11
Competencias clave: CCL; CMCT; CAA; CSC; SIEP	Actividades: Autoevaluación
<p>Desarrollo de esta sesión:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comenzamos la sesión con la corrección de las actividades propuestas en la sesión anterior (actividades nº27, 28, 29 y 30). Resolución de dudas al alumnado e identificación de posibles dificultades que hayan encontrado en su elaboración. (Duración: 20 minutos) - Realización de las actividades de autoevaluación en conjunto con el alumnado, identificando las posibles dificultades que puedan encontrar y resolviendo todas las dudas planteadas. (Duración: 25 minutos) - Actividad de repaso con KAHOOT donde se realizarán varias preguntas relacionadas con toda la materia impartida durante esta Unidad Didáctica. (Duración: 10 minutos) 	

Ilustración 57 Unidad Didáctica. Sesión 10. Fuente: Elaboración propia.

Sesión 11: Evaluación de la Unidad Didáctica	
Contenidos: C.1.2; C.1.3; C.4.4; C.4.5; C.4.6; C.4.7; C.4.8; C.4.9; C.4.10	Objetivos: O.1; O.2; O.8; O.10; O.11
Competencias clave: CCL; CMCT; SIEP	Actividades: Sin actividades
Desarrollo de esta sesión: <ul style="list-style-type: none"> - Realización de una prueba escrita por el alumnado donde se evaluarán los conocimientos adquiridos referentes a esta Unidad Didáctica y si se han alcanzado los objetivos propuestos. (Duración: 55 minutos) 	

Ilustración 58 Unidad Didáctica. Sesión 11. Fuente: Elaboración propia.

6.11. Evaluación

6.11.1. Estándares de aprendizaje evaluables

Los criterios de evaluación académicos se materializan a través de los estándares de aprendizaje, los cuales sirven para precisar los resultados que se desea que alcance el alumnado.

Los estándares de aprendizaje medibles vinculados a los criterios de evaluación de los temas abordados en esta unidad didáctica son los siguientes:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Código	Estándares de aprendizaje
E.A.1.1.	Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.
E.A.2.1.	Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
E.A.2.2.	Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
E.A.3.1.	Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
E.A.6.1.	Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

E.A.6.2.	Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
E.A.6.3.	Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
E.A.6.4.	Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
E.A.7.1.	Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
E.A.11.1.	Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.
E.A.11.2.	Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

Ilustración 59 Estándares de aprendizaje del bloque 1 relacionados con la Unidad Didáctica. Fuente: Real Decreto 1105/2014.

Bloque 4: Funciones	
Código	Estándares de aprendizaje
E.A.1.1.	Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
E.A.1.3.	Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad).
E.A.1.4.	Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores.
E.A.1.5.	Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
E.A.2.1.	Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
E.A.2.2.	Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.

E.A.2.3.	Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos.
E.A.2.4.	Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión.
E.A.2.5.	Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.

Ilustración 60 Estándares de aprendizaje del bloque 4 relacionados con la Unidad Didáctica. Fuente: Real Decreto 1105/2014.

Los estándares de aprendizaje de los bloques relacionados con las funciones, se han codificado por E.A. para, en el próximo apartado relacionar los estándares de aprendizaje con los criterios de evaluación.

6.11.2. Criterios de evaluación

Tanto en el R.D. 1105/2014, del 26 de diciembre, como en la Orden del 14 de julio de 2016, vienen reflejados los criterios de evaluación para el bloque de funciones. Nos obstante, también se recogerán algunos criterios de evaluación correspondientes al bloque 1 pero que están relacionados con el bloque de funciones. A continuación, se elaboran una serie de tablas relacionando los estándares de aprendizaje con los criterios de evaluación, objetivos y contenidos del bloque objeto de esta Unidad Didáctica:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas			
Criterio de evaluación 1: Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1.	C.1.1. C.1.2. C.1.3.	CCL CMCT	Bloque 1: E.A.1.1.

Ilustración 61 Bloque 1. Criterio de Evaluación 1. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas			
Criterio de evaluación 2: Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.2. O.8. O.9. O.11.	C.1.2. C.1.3. C.1.4.	CMCT CAA	Bloque 1: E.A.2.1. E.A.2.2.

Ilustración 62 Bloque 1. Criterio de Evaluación 2. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas			
Criterio de evaluación 3: Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.2. O.3. O.11.	C.1.2. C.1.3.	CCL CMCT CAA	Bloque 1: E.A.3.1.

Ilustración 63 Bloque 1. Criterio de Evaluación 3. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas			
Criterio de evaluación 6: Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.2. O.3. O.4.	C.1.1. C.1.2. C.1.4.	CMCT CAA SIEP	Bloque 1: E.A.6.1. E.A.6.2. E.A.6.3. E.A.6.4.

Ilustración 64 Bloque 1. Criterio de Evaluación 6. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas			
Criterio de evaluación 7: Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.3. O.5. O.8. O.10.	C.1.1. C.1.2. C.1.4.	CMCT CAA SIEP	Bloque 1: E.A.7.1.

Ilustración 65 Bloque 1. Criterio de Evaluación 7. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas			
Criterio de evaluación 11: Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.2. O.4. O.9.	C.1.2. C.1.5.	CMCT CD SIEP	Bloque 1: E.A.11.1. E.A.11.2.

Ilustración 66 Bloque 1. Criterio de Evaluación 11. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 4: Funciones			
Criterio de evaluación 1: Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.4. O.6. O.8.	C.4.1. C.4.2. C.4.3. C.4.11.	CMCT	Bloque 4: E.A.1.1. E.A.1.3. E.A.1.4. E.A.1.5.

Ilustración 67 Bloque 4. Criterio de Evaluación 1. Fuente: Elaboración propia.

Bloque 4: Funciones			
Criterio de evaluación 2: Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
O.1. O.4. O.6. O.8.	C.4.1. C.4.3. C.4.4. C.4.5. C.4.6. C.4.7. C.4.8. C.4.9. C.4.10.	CMCT	Bloque 4: E.A.2.1. E.A.2.2. E.A.2.3. E.A.2.4. E.A.2.5.

Ilustración 68 Bloque 4. Criterio de Evaluación 2. Fuente: Elaboración propia.

6.11.3. Criterios de calificación

Al comienzo de cada Unidad Didáctica, o al comienzo de un curso académico, si los criterios de calificación van a ser los mismos para todas las Unidades Didácticas, se le debe mostrar al alumnado los criterios de calificación, para que puedan conocer de antemano cómo se les va a evaluar y lo que se espera de ellos.

Las principales referencias para formular los criterios de calificación van a ser los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que hemos trabajado en el apartado anterior.

La calificación de la Unidad Didáctica de funciones se realizará de la siguiente manera:

Aspecto	Criterios	Instrumento	Peso
Conceptos teóricos	Conocimiento de la materia	Examen escrito	50%
Trabajo grupal	Resolución de trabajos en grupo	Entrega y evaluación de actividades en grupo	20%
Trabajo individual	Resolución de actividades propuestas	Entrega de actividades propuestas	15%
Participación y actitud	Participación y actitud	Evaluación de la participación en clase y actitud en las sesiones	15%

Ilustración 69 Criterios de Calificación. Fuente: Elaboración propia.

7. Conclusiones

En la elaboración de este TFM, se ha buscado lograr los propósitos recogidos en segundo apartado, donde se presentan las conclusiones siguientes:

- Se ha abordado con rigor matemático un contenido del temario de oposiciones para optar al puesto de profesor de matemáticas en la educación secundaria obligatoria. Concretamente, se ha analizado el tema 28, que se centra en funciones y su representación gráfica.
- Para fundamentar la unidad didáctica desde la perspectiva curricular, se ha desarrollado un análisis detallado de la legislación educativa vigente y una revisión de distintos libros de texto publicados por diversas editoriales. Además, se ha realizado una investigación que abarca las opiniones y estudios de varios autores sobre el tema tratado, explorando tanto los aspectos positivos como los negativos.
- Se ha llevado a cabo una investigación centrada en las dificultades que los estudiantes experimentan al aprender sobre funciones y gráficas, identificando tres tipos de errores comunes: errores conceptuales, en la representación gráfica y en el lenguaje analítico.
- Se ha procedido con la elaboración de una unidad didáctica que ha generado diversas conclusiones significativas:
 - La investigación de diferentes enfoques metodológicos demuestra que no hay una única y perfecta metodología para el ámbito de las matemáticas. En cambio, se requiere un conjunto de enfoques que se ajusten a diferentes factores, como el contenido a enseñar, las características

individuales del profesor y los estudiantes, el entorno familiar, el contexto social y político, así como los materiales educativos disponibles, entre otros aspectos.

- Se ha desarrollado un análisis de los objetivos generales de la etapa educativa y del área de matemáticas, así como los establecidos en el plan de centro del instituto. Además, se han considerado los contenidos que se van a desarrollar y las competencias clave de acuerdo con las normativas de referencia.
- Se han propuesto una variedad de actividades que abarcan desde resolver problemas del libro de texto utilizado hasta realizar tareas grupales que promuevan el aprendizaje basado en problemas y la investigación. Estas actividades buscan fomentar la iniciativa y el espíritu emprendedor de los estudiantes, promover el trabajo en grupos, fomentar las habilidades de pensamiento crítico, e integrar los conocimientos matemáticos en situaciones de la vida diaria.
- Se ha destacado la importancia de abordar la diversidad en el aula, analizando las diferentes programas, planes y acciones destinadas a la atención a la diversidad establecidos por el centro educativo. Se ha puesto especial atención en la clase a la que va dirigida esta unidad didáctica, considerada como PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento). En este contexto, también se presentan las acciones recomendadas por los diversos departamentos para abordar esta diversidad.
- Finalmente, en el proceso de evaluación, se describen los estándares de aprendizaje medibles y los criterios de evaluación, estableciendo su conexión con los contenidos, objetivos y competencias clave previamente abordados, para concluir así la unidad didáctica de manera coherente.

8. Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M. y J. Vargas (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María.

Abril, A.M., Ariza, M.R., Quesada, A y F.J. García (2014). Creencias del profesorado en ejercicio y en formación sobre el aprendizaje por investigación. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11:1, 22-33.

Alpízar Vargas, M., Fernández Álvarez, H., Morales Reyes, J. y Quesada Segura, S. (2018). *Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje*

de la función lineal. Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa (RIEDME), 9:6-19.

Aparicio del Prado, C. y Payá Albert, R. (1999). *Análisis matemático I*. Universidad de Granada.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). *Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato*. PNA, 8:2, 61-73.

Ballester Sampedro, S. (2009). *Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. Revista digital: Innovación y experiencias educativas, 23.*

Beaton, A. E. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA'S Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston Collage.

Campanario, J. M. (2001). *¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 351-364.*

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M.J. y Colera Cañas, L. *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 4º ESO. Profesorado*. Anaya + Digital.

Díaz Gómez, J.L. (2013). *El Concepto de Función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. El Cálculo y su Enseñanza, Vol.4*. Cinvestav-IPN (México).

Duval, R. (1993). *Sémiosis et Noésis*. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa*, 118-144. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

López Varona, J. A. (1997). *Ministerio de Educación y Cultura. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación*.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). *Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. Revista de Investigación en Educación, 12(2), 209-221.*

Palop, P. F. (2017). *El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado, 201-217.*

Pérez, A., Serrano Marugán, E., Hernández Gómez, J., Alcaide Guindo, F., Moreno Warleta, M. y Donaire Moreno, J.J.. 4º ESO. Matemáticas. Enseñanzas aplicadas. SAVIA. Editorial SM

Piedrahita, A. (1999). *El Texto escolar Como instrumento pedagógico: Partidarios Y detractores*. *Revista De Ciencias Humanas*, 110-118.

Ruiz Higuera, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén.

Spivak, M. (2018). *Calculus*. Editorial Reverté.

Vinner, S. y Tall, D. (1981). *Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity*. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). *Images and definitions for the concept of function*. *Journal for Research in Mathematics Education in Science and Technology*, 14, 356-366.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in teaching and learning of mathematics*. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrecht: Kluwer.

Referencias Legislativas

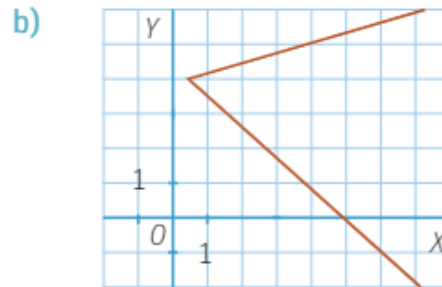
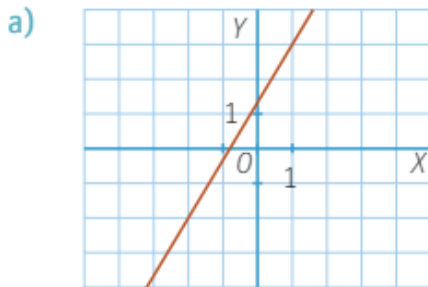
Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación por el proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA núm. 144(2016)

Anexo 1: Actividades Propuestas

Actividad Nº1

Determina si las gráficas de las siguientes correspondencias son funciones.



a) Sí es función. A cada valor de la variable independiente, x , le corresponde un único valor de la variable dependiente, y .

b) No es función. Para ciertos valores de la variable independiente, x , obtenemos dos valores distintos de la variable dependiente, y .

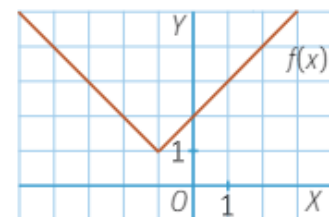
Actividad Nº2

Expresa la función $f(x) = |x + 1| + 1$ como una función a trozos y en forma de gráfica.

1.º Expresamos el valor absoluto como: $|x+1| = \begin{cases} -(x+1) & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

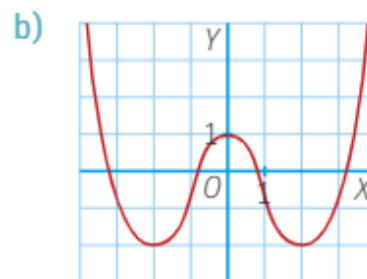
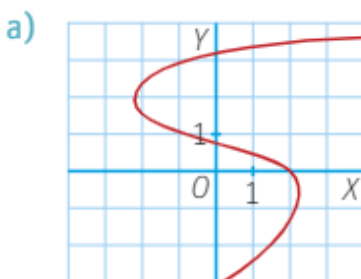
2.º La función definida a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)+1 & \text{si } x < -1 \\ x+1+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x+2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



Actividad Nº3

Indica si las gráficas de las siguientes correspondencias son o no funciones.



Actividad Nº4

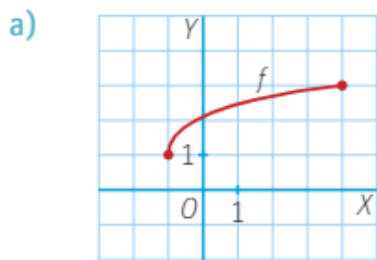
Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -5 \leq x \leq -1 \\ -x+2 & \text{si } -1 < x < 6 \end{cases}$

Actividad Nº5

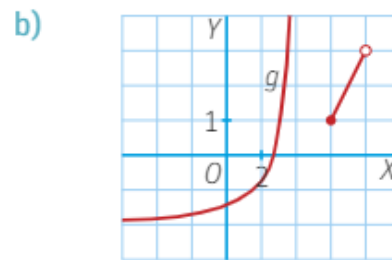
Se considera la función $f(x) = |4 - 2x|$ definida en el intervalo $[-3, 3]$. Exprésala como una función a trozos y represéntala gráficamente.

Actividad Nº6

Indica el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes a estas gráficas.



a) $D(f) = [-1, 4]; R(f) = [1, 3]$



b) $D(g) = (-\infty, 4) \cup [6, 8); R(g) = (-2, +\infty)$

Actividad Nº7

Halla el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$.

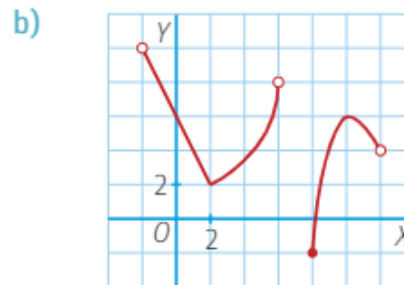
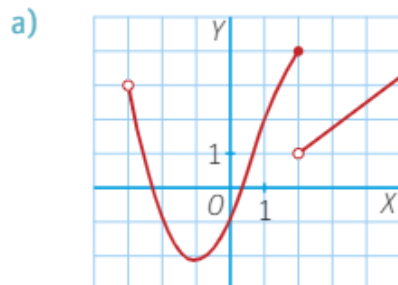
$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Actividad Nº8

Representa la función $f(x) = 3x - 5$ en el intervalo $[-5, 8]$. ¿Cuál es su recorrido?

Actividad Nº9

Indica el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes a estas gráficas.



Actividad Nº10

Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{3}{2x-6}$ b) $h(x) = \frac{3}{x^2-9}$ c) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $i(x) = \frac{-2}{|x-4|}$

Actividad Nº11

Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = \frac{3}{x+4}$, calcula:

a) $(f+g)(5)$ d) $(h-g)(-1)$ g) $(-g)(11)$
 b) $(g+h)(-2)$ e) $(f-g)(2)$ h) $\left(\frac{1}{f}\right)(-3)$
 c) $(f+g)(3)$ f) $(h:g)(-2)$ i) $[(f:g)](1)$

Actividad Nº12

Si $f(x) = \frac{5}{x-1}$, $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = \frac{2}{x+3}$ calcula la expresión algebraica y el dominio de las funciones.

a) $(f+g)(x)$ c) $(f-h)(x)$ e) $(f \cdot h)(x)$
 b) $(g-f)(x)$ d) $(f+g+h)(x)$ f) $(g:f)(x)$

Actividad Nº13

Con las funciones $f(x) = x$, $g(x) = 3$ y $h(x) = \frac{1}{x}$ obtén la expresión de las siguientes funciones:

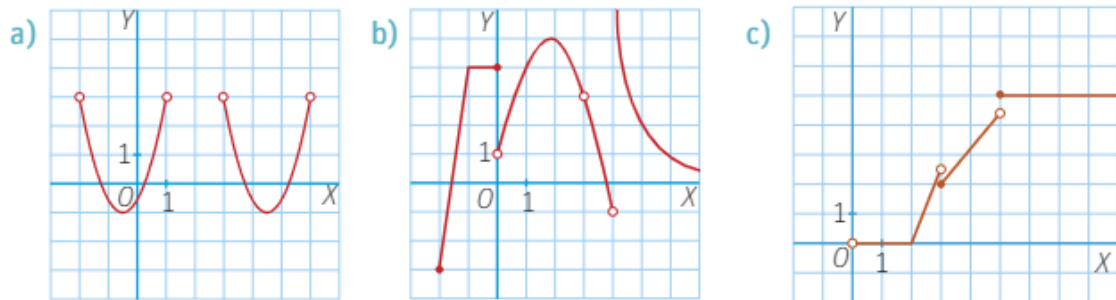
a) $(f \cdot h)(x)$ c) $(f \cdot f + g)(x)$ e) $(h:f)(x)$
 b) $[(f+g) \cdot h](x)$ d) $(g \cdot h)(x)$ f) $(h+g)(x)$

Actividad Nº14

Calcula la expresión algebraica de la función $(f \cdot g)$ en donde $f(x) = \frac{5}{x-1}$ y $g(x) = x^2 - 1$. ¿Cuál es su dominio?

Actividad Nº15

Indica los puntos de discontinuidad y los intervalos de continuidad de las funciones representadas.



Actividad Nº16

Representa las siguientes funciones en tu cuaderno. Indica los puntos de discontinuidad si los hubiera.

a) $f(x) = |x-1| + 3$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Actividad Nº17

La función parte entera, $f(x) = [x]$, asocia cada número real con su parte entera.

- a) Construye una tabla de valores para la función $f(x) = [x]$, en el intervalo $[-3, 5]$. Conviene tomar algunos valores de x no enteros.
- b) Representa gráficamente la función.
- c) ¿Es continua? Indica sus discontinuidades si existen.

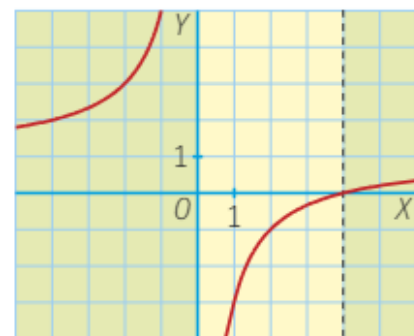
Actividad Nº18

Halla los puntos de corte y el signo de la función $f(x) = \frac{x-4}{x}$.

El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Como el 0 no pertenece al dominio, entonces la función no tiene puntos de corte con el eje Y .

La función corta al eje X en el punto $(4, 0)$. Los intervalos a estudiar para hallar el signo de la función son:

- En $(-\infty, 0)$: $f(-1) = 5 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(0, 4)$: $f(1) = -3 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(4, +\infty)$: $f(5) = \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow$ Positiva

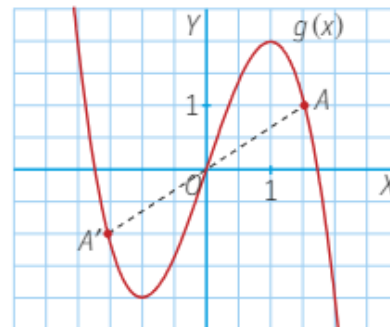
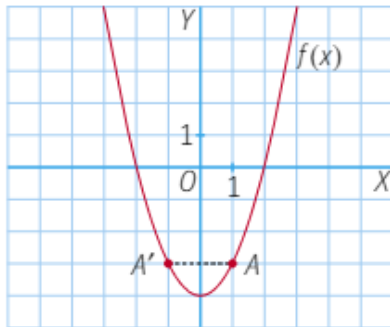


Actividad Nº19

Estudia gráfica y algebraicamente la simetría de las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 3x - x^3$.

• Gráficamente:

Al trazar la gráfica de las funciones se observa que la función $f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas y la función $g(x)$ es simétrica respecto al origen.



• Algebraicamente:

- La función $f(x) = x^2 - 4$ es par, porque $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$.
- La función $g(x) = 3x - x^3$ verifica que $g(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -g(x)$, por tanto, es una función impar.

Actividad Nº20

Calcula los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones.

- | | | |
|----------------------|---------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = 3 - 2x$ | c) $f(x) = x^4 - 1$ | e) $f(x) = 2x^3$ |
| b) $f(x) = 3x - x^2$ | d) $f(x) = x + 4$ | f) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ |

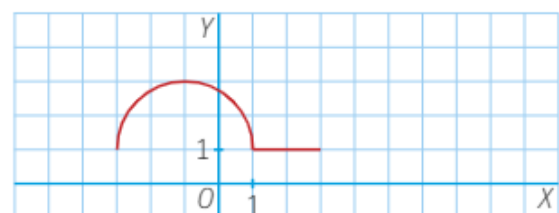
Actividad Nº21

Estudia la simetría de las funciones que aparecen a continuación.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ | c) $h(x) = \sqrt{4+x^2}$ | e) $j(x) = \frac{2}{x^3}$ |
| b) $g(x) = 5x^2 - 3x$ | d) $i(x) = 5x$ | f) $k(x) = x^3 + 27$ |

Actividad Nº22

La gráfica corresponde a una función periódica cuyo período es $T = 6$. Cópiala en tu cuaderno y complétala en el intervalo $[-6, 18]$.



Actividad Nº23

Halla las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones, si las hay.

a) $f(x) = \frac{5}{x-3}$

b) $g(x) = \frac{1}{16-x^2}$

c) $h(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Actividad Nº24

Verifica que las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ son $y = x + 2$ y $x = 2$, analizando el comportamiento de $f(x)$ cerca de las asíntotas mediante tablas de valores.

Actividad Nº25

Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{5x+2}{x-1}$

c) $y = \frac{x^3+2}{x^3-x}$

b) $y = \frac{-3x+2}{x}$

d) $y = \frac{2x^2}{x^2-x-6}$

Actividad Nº26

Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 + 3$.

El dominio de la función $f(x)$ es $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

Si se toman dos valores del dominio cualesquiera x_1 y x_2 , tales que $x_1 < x_2$, se cumple:

$$x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + 3 < x_2^3 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$TVM f[x_1, x_2] > 0$ y la función es creciente en todo su dominio.

Actividad Nº27

Calcula la tasa de variación media de las funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $[0, 2]$

c) $h(x) = -x^3 + 2$ en $[-2, 1]$

b) $g(x) = \frac{3}{4-x}$ en $[-2, 1]$

d) $i(x) = \sqrt{x-2}$ en $[3, 6]$

Actividad N°28

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 2x + 7, D(f) = [-5, 4]$

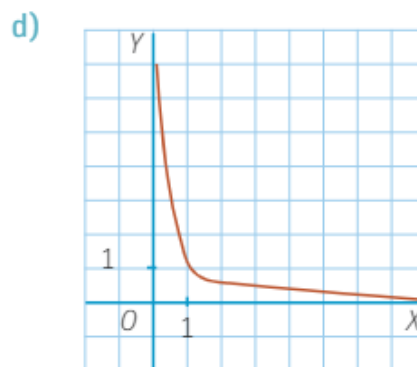
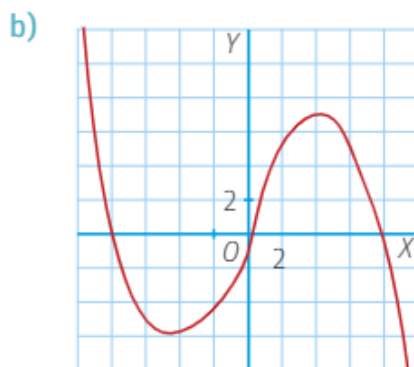
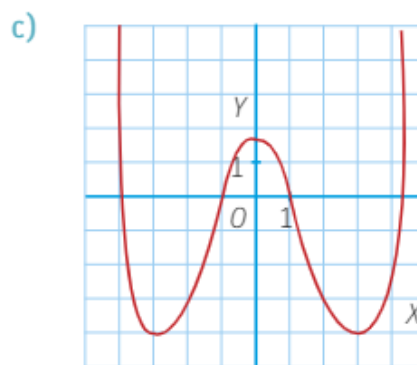
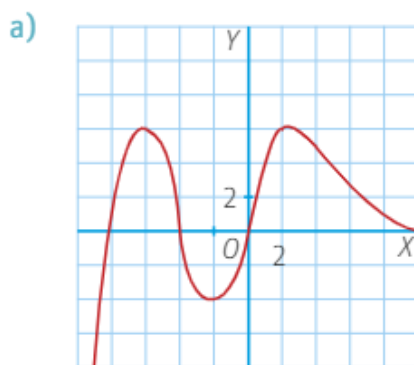
b) $g(x) = 4 - x^2, D(g) = [-10, 0]$

Actividad N°29

¿Cómo son los máximos y mínimos de una función creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, 5)$ y decreciente en $(1, 2) \cup (5, +\infty)$?

Actividad N°30

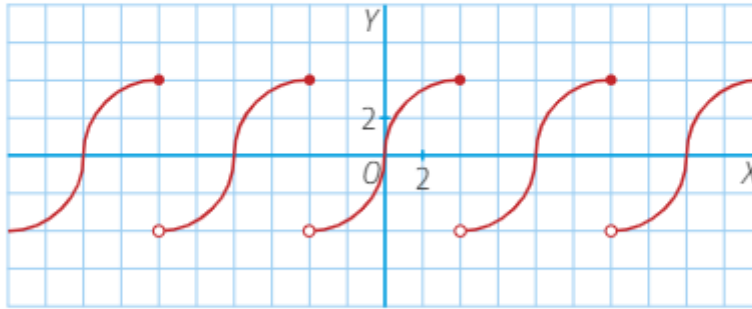
Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.



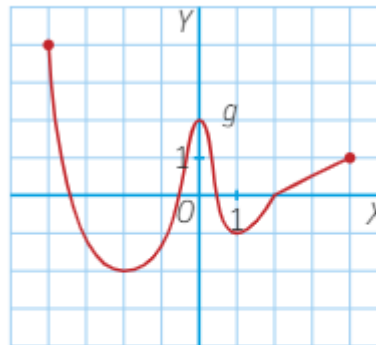
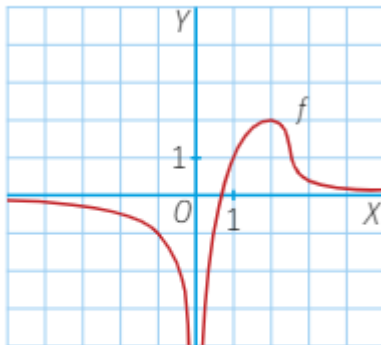
5. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad.

$$g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

6. La gráfica que aparece a continuación se corresponde con una función periódica.



- a) ¿Cuál es su recorrido? ¿Está acotada? ¿Es simétrica?
 b) Calcula $f(2016)$ y $f(-2020)$.
 c) ¿Cuál es el período de $f(2x)$?
7. Las gráficas siguientes corresponden a dos funciones f y g .



- a) ¿Están acotadas?
 b) Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 ¿Cuáles son sus máximos y mínimos?
 c) ¿Cuáles pueden ser las asíntotas de la función f ?

Actividad IBL

Son muchas y variadas las actividades de la vida en las que es preciso tener en cuenta y conocer adecuadamente las consecuencias de la fuerza de gravedad en nuestro planeta. Por citar algunas de ellas basta fijarse en actividades deportivas como el parapente, el ala delta, los lanzamientos de jabalina o el tiro con arco. En todas ellas, para determinar su trayectoria, influyen muchos otros factores como son: la resistencia del aire, la velocidad y el ángulo de salida, la fuerza del viento..., cuyos efectos se suman para dar lugar a la trayectoria final.

Se plantea, mediante el manejo de funciones elementales, estudiar y obtener la trayectoria que seguirá un objeto lanzado con cierta velocidad desde un punto elevado y despreciando la resistencia del aire.

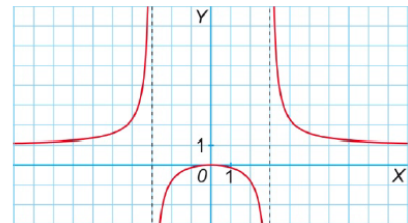
Desde una plataforma horizontal y situada a 20 m de altura se lanza una bola, que rueda sobre la plataforma, con una velocidad de 2 m/s. El espacio que recorre horizontalmente será $x = 2t$ (velocidad por el tiempo) y verticalmente $y = \frac{1}{2}g \cdot t^2$, donde g es la aceleración de la gravedad, $g \cong -10 \text{ m/s}^2$. En este caso, como se lanza desde una altura de 20 m, la posición vertical de la bola en cada instante será $y = 20 - 5t^2$.



1. ¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?
2. ¿Qué desplazamiento horizontal habrá tenido la bola en ese tiempo?
3. ¿En qué punto caerá la bola?
4. Halla las posiciones de la bola cada 0,2 segundos y represéntalas sobre unos ejes de coordenadas.
5. La gráfica que obtienes, ¿a qué tipo de función corresponde? Halla la expresión de esa función en la forma habitual $y = f(x)$ eliminando el tiempo t entre las dos expresiones que has utilizado.

Evaluación de la Unidad Didáctica

1. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$, contesta las siguientes preguntas.



- a) ¿Es continua?
- b) ¿Cuál es su dominio?
- c) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) ¿Tiene máximos o mínimos? Indica si son absolutos o relativos.
- e) ¿Tiene asíntotas? Si las tuviera, indícalas.
- f) ¿Es simétrica? En caso afirmativo indica el tipo de simetría.

2. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{8x - 3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 3x + 1}$

b) $f(x) = \frac{3 - x}{x^2 + x}$

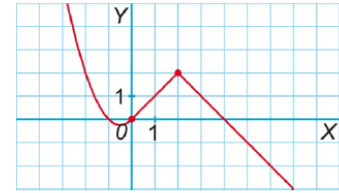
d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

3. Dada la función a trozos $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$:

- a) Representa gráficamente la función.
- b) ¿Es continua?

4. Dada la gráfica de la función $f(x)$:

- Calcula $f(-2)$, $f(4)$ y $f(6)$
- Halla sus máximos y mínimos e indicar si son relativos o absolutos.



5. En una ciudad hay dos tipos de taxis, los *amarillos* y los *negros*. En los *amarillos* cobran 4 € por la bajada de bandera más 1,2 €/km. En los *negros* cobran 10 € por la bajada de bandera más 0,9 €/km.

- Si y es el coste de una carrera, y x , los kilómetros recorridos, ¿cuál de estas funciones representa el coste de una carrera en un taxi *amarillo* en función de los kilómetros recorridos?
A. $y = 4x$ B. $y = 1,2x$ C. $y = 4 + 1,2x$ D. $y = 1,2 + 4x$
- ¿Cuánto costará un recorrido de 8 km en cada taxi? ¿Y de 50 km?
- ¿A partir de qué distancia empezará a resultar más conveniente coger un taxi *negro*?