



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: Jurado Jurado, Alba

Tutores: Prof. D. Ildefonso Castro López
Prof. D. Francisco Javier García García

Dpto: Matemáticas
Didáctica de las Ciencias

Junio, 2019

Índice

Resumen	4
1. Introducción.....	5
2. Objetivos.....	6
3. Fundamentación Curricular	7
4. Fundamentación Epistemológica	15
4.1. Preliminares: Razones trigonométricas.....	16
4.2. Identidades trigonométricas.....	19
4.3. Resolución de triángulos.....	24
4.4. Aplicaciones de la resolución de triángulos.....	33
4.5. Expresiones del área de un triángulo	35
4.6. Bibliografía	37
5. Fundamentación Didáctica	37
5.1. Errores habituales cometidos por el alumnado	38
5.1.1. Análisis cualitativo.....	40
5.1.2. Análisis cuantitativo	43
5.1.2.1. Análisis de 4º de E.S.O.....	43
5.1.2.2. Transición de 4º E.S.O. a 1º de Bachillerato	48
5.1.2.3. Análisis de 1º de Bachillerato.....	52
5.1.3. Conclusiones.....	56
5.2. Métodos didácticos a adoptar para mejorar la enseñanza - aprendizaje	57
5.3. Otras investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría	60
5.4. Conclusiones de las investigaciones	63
6. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica	64
6.1. Título	64
6.2. Justificación.....	64
6.3. Contextualización del centro y del aula.....	64
6.3.1. Situación geográfica del centro.....	65
6.3.2. Aspectos demográficos y socioeconómicos de la localidad	65

6.3.3. Características generales del alumnado	66
6.3.4. Descripción del centro	67
6.3.4.1. Instalaciones y materiales	68
6.3.4.2. Organización de espacios y tiempos	68
6.3.5. Descripción del aula	69
6.3.5.1. Organización de espacios en el aula	69
6.3.5.2. Material	69
6.3.5.3. Perfil de los alumnos	69
6.4. Objetivos	70
6.4.1. Objetivos de la E.S.O.	70
6.4.2. Objetivos de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	70
6.4.3. Objetivos de la unidad didáctica de trigonometría.....	72
6.5. Competencias clave	72
6.6. Contenidos	75
6.6.1. Contenidos del RD 1105/2014	75
6.6.2. Contenido de la unidad didáctica.....	75
6.6.3. Contenidos interdisciplinares y transversales.....	76
6.7. Metodología.....	77
6.8. Actividades y recursos	79
6.9. Atención a la diversidad.....	81
6.9.1. Atención a la diversidad en el aula	82
6.10. Temporalización.....	83
6.10.1. Desarrollo de la unidad didáctica.....	83
6.11. Evaluación	93
6.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables	93
6.11.2. Procedimientos de evaluación	93
6.11.3. Procesos de evaluación	94
7. Conclusiones	96
8. Referencias	97

ANEXO I: Gráficas de la comparativa del tipo de actividades de tres editoriales	101
ANEXO II: Cuestionario cualitativo	105
ANEXO III: Cuestionario cuantitativo.....	107
ANEXO IV: Resultados de las pruebas	111
ANEXO V: Objetivos de etapa	118
ANEXO VI: Contenidos interdisciplinarios y transversales	121
ANEXO VII: Desarrollo de las actividades de la unidad didáctica.....	123
ANEXO VIII: Plan de clase de la actividad de modelización.....	159
ANEXO IX: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la unidad didáctica.....	168
ANEXO X: Tablas de evaluación y rúbrica del examen final.....	171
Índice de Figuras.....	176
Índice de Tablas.....	179

Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster tiene el objetivo de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante el Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, en el curso 2018/2019. En dicho trabajo, se comparan libros de texto de diferentes editoriales con el currículo de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 4º de Educación Secundaria Obligatoria, según el Real Decreto 1105/2014, se desarrolla un tema de matemáticas relacionado con las matemáticas enseñadas en la unidad didáctica, se profundiza en los errores que tiene el alumnado durante la enseñanza-aprendizaje de la unidad didáctica de Trigonometría y los métodos didácticos a adoptar para mejorar la enseñanza-aprendizaje, y se desarrolla la unidad didáctica de Trigonometría con el objetivo de enseñar la unidad al alumnado con métodos motivadores, utilizando diversos recursos y TIC; y con la finalidad que el alumnado adquiera las competencias clave.

Palabras clave: trigonometría, didáctica de las matemáticas, educación secundaria.

Abstract

The purpose of this Final Master's Project is to put into practice the knowledge acquired during the Master's Degree in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, in the speciality of Mathematics, in the 2018/2019 academic year. In this work, textbooks from different publishers are compared with the mathematics curriculum oriented to the academic teachings of the 4th year of Compulsory Secondary Education, according to Royal Decree 1105/2014. A subject of mathematics is developed related to the mathematics that will be taught within the didactic unit. Within the project, I deepen in the errors students make during the teaching and learning of Trigonometry, also about the didactic methods that could be used to improve the teaching-learning of this topic. A didactic unit about Trigonometry is developed to teach these contents to the student with motivating methods, using diverse resources, and ICT. The purpose is that the students develop the key competencies.

Keywords: trigonometry, didactics of mathematics, secondary education.

1. Introducción

En el presente Trabajo Fin de Máster (TFM) realizado para culminar los estudios de Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas se ha puesto en práctica gran parte de los conocimientos adquiridos durante el curso 2018/2019 en las asignaturas específicas del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Este TFM, centrado en el aprendizaje y la enseñanza de la trigonometría en el 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), está constituido por los siguientes apartados (véase la Figura1):

- Objetivos: capacidades y habilidades a adquirir por el futuro docente.
- Fundamentación curricular: se considera el concepto de transposición didáctica y se comparan libros de texto de diferentes editoriales con el currículo de matemáticas de 4º de E.S.O. del Real Decreto (RD) 1105/2014.
- Fundamentación epistemológica: se desarrolla un tema de oposiciones relacionado con la rama de las matemáticas que se trata en la unidad didáctica. En este caso, se desarrolla el tema 38 “Trigonometría. Resolución de triángulos. Aplicaciones”.
- Fundamentación didáctica: se consideran los errores que tiene el alumnado durante la enseñanza-aprendizaje de la unidad didáctica de trigonometría y los métodos didácticos a adoptar para mejorar la enseñanza-aprendizaje.
- Proyección didáctica: se desarrolla la unidad didáctica de Trigonometría con el objetivo de enseñar la unidad al alumnado con métodos motivadores, utilizando diversos recursos y las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC); despertar el interés del alumnado contextualizando los problemas, adaptándonos a los diferentes ritmos de aprendizaje en el aula, fomentado el desarrollo autónomo, la cooperación, y la reducción de los bloqueos matemáticos.
- Conclusiones: conocimiento y aprendizaje adquirido tras realizar el TFM y el Máster Universitario en Profesorado.



Figura 1: Esquema del TFM (elaboración propia).

Nota: En el presente TFM, se utilizará el masculino genérico, el cual engloba a ambos sexos; tal y como establece la Real Academia Española (RAE).

2. Objetivos

El objetivo de este TFM es aplicar los conocimientos adquiridos durante el Máster para:

- Profundizar en el conocimiento de los problemas del alumnado en torno al aprendizaje de la trigonometría.
- Adquirir la capacidad de interpretar la legislación relativa al sistema educativo español.
- Aplicar la legislación en el desarrollo de una unidad didáctica para que el alumnado adquiera competencias clave, desarrolle su madurez y aprenda con actividades motivadoras, innovadoras, colaborativas, contextualizadas en problemas de la vida real y empleando las nuevas tecnologías.

Otros objetivos genéricos que debemos alcanzar los estudiantes del Máster y futuros profesores, según se extrae de la Guía Docente de la asignatura *Trabajo Fin de Máster*, son los siguientes:

- Autonomía para estudiar e investigar problemas en entornos pocos conocidos o nuevos en un contexto multidisciplinar.
- Formular juicios disponiendo de información incompleta y reflexionar sobre responsabilidades éticas y sociales.
- Conocer las características del alumnado, su contexto social y sus motivaciones; e implicarse en su desarrollo académico y personal.
- Detectar y analizar las dificultades del alumnado con diferentes capacidades de aprendizaje, y actuar correctamente según sus necesidades.
- Fomentar la interacción y la comunicación en el aula.
- Conocer y aplicar los diversos recursos educativos.
- Analizar los diversos contextos que influyen en la práctica educativa y en la profesión docente.
- Entender el desarrollo de la personalidad del alumnado y cómo afecta en su aprendizaje.
- Adquirir el conocimiento, las actitudes y las destrezas necesarias para ejercer la profesión docente.
- Adquirir habilidades sociales para el trato y la orientación del alumnado y su familia.
- Entender el entorno sociocultural del centro educativo.

- Elaborar propuestas y llevarlas a cabo sobre la adquisición de aptitudes y destrezas intelectuales y emocionales.
- Fomentar un buen clima de aula para facilitar el aprendizaje del alumnado y la convivencia.
- Analizar y extraer conclusiones de los resultados de las evaluaciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Estimular el esfuerzo del alumnado y fomentar su capacidad para aprender individualmente o en grupo, y desarrollarle habilidades de pensamientos para facilitar la confianza, la autonomía y la iniciativa.
- Conocer y aplicar la normativa del sistema educativo español.

3. Fundamentación Curricular

La transposición didáctica (Chevallard, 1997) parte del hecho de que los contenidos o los conocimientos que se enseñan en la escuela se generan fuera de esta, y se llevan a la escuela por necesidades sociales de educación y difusión. Este proceso provoca una serie de transformaciones adaptativas para que los conocimientos a enseñar convivan en el ambiente de la escuela. El proceso de transposición didáctica comienza en la elección de los cuerpos de conocimiento a transmitir, es decir, comienza lejos de la escuela. Se realiza un proceso de desconstrucción y reconstrucción de los conocimientos para hacerlos “enseñables”. Este proceso lo realizan diversos agentes como los responsables del diseño de planes de estudio, los matemáticos o científicos productores del conocimiento matemático y los profesionales del sistema de enseñanza, de acuerdo a condiciones institucionales e históricas. Además, se trata de un trabajo de revisión continua desde el desarrollo de las decisiones curriculares hasta las actividades matemáticas a realizar en el aula (Bosch y Gascón, 2006).

Para comprender las matemáticas escolares se debe comprender las causas que motivan y justifican su enseñanza, y también cómo son interpretadas esas matemáticas en las diversas instituciones de producción, desarrollo, uso y difusión, debido a que las matemáticas son un conocimiento que se enseña, aprende, usa y difunde en instituciones sociales. Por ello, Chevallard (1997) distingue entre varios saberes, es decir: el saber matemático “sabio” producido por matemáticos o investigadores, el saber matemático “a enseñar” en los programas y documentos curriculares, el saber matemático “enseñado” por el profesorado en el aula, y el saber matemático “aprendido” por el alumnado (véase la Figura 2).

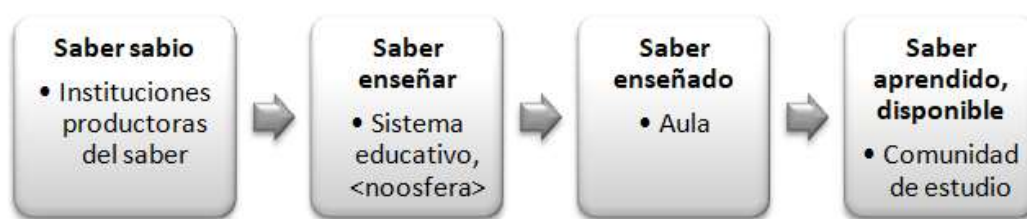


Figura 2: El proceso de transposición didáctica (Bosch y Gascón, 2006).

El problema de qué enseñar y cómo enseñar ha sido y sigue siendo un problema esencial en la educación y, por consiguiente, de la Educación Matemática. Dicho problema afecta a los responsables de los diseños curriculares, a los profesores de matemáticas y a los formadores de profesores.

Actualmente, la E.S.O. se rige por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (L.O.M.C.E.) del 2013; y en la Comunidad Autónoma de Andalucía por la Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (L.E.A.). El curso de 4º de E.S.O. se encuentra dentro de las enseñanzas de régimen general en la estructura del sistema educativo, y su currículo se detalla en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O. y del Bachillerato.

En concreto, en 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, según el RD 1105/2014, la unidad didáctica sobre la trigonometría se encuentra en el bloque 3 de Geometría, el cual trata las medidas de ángulos, las razones trigonométricas y las relaciones entre ellas, las relaciones métricas en los triángulos, su aplicación en problemas del mundo físico y sus aplicaciones informáticas para facilitar su comprensión (véase la Figura 3).

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Figura 3: Bloque de Geometría para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O. (RD 1105/2014, p. 397).

De acuerdo al proceso de transposición didáctica, este saber se concreta y desarrolla en los materiales que usa el profesor y, en particular, en los libros de texto. Para determinar cómo se lleva a cabo este proceso, analizaré y compararé la unidad didáctica de trigonometría de 4º de E.S.O. de Matemáticas académicas de tres libros de texto de diferentes editoriales. Los libros seleccionados han sido Anaya (Colera-Jiménez, Oliveira-González, Gaztelu-Albero y Colera-Cañas, 2016a), Edelvives (Mejía-Sánchez-Bermejo, Ocaña-Fernández y Romero-Torralba, 2016a), y SM (Alcaide-Guindo, Hernández-Gómez, Moreno-Warleta, Serrano-Marugán, Donaire-Moreno y Pérez, 2016).

Respecto a la contextualización del tema dentro del desarrollo que proponen del currículo, en las tres editoriales, se estudia la unidad de la semejanza antes que la de trigonometría y resolución de triángulos; y tras dicha unidad, se comienza con la unidad de geometría analítica.

En cuanto a la introducción de cada unidad, el libro de Anaya realiza un breve resumen de la historia matemática, el libro de Edelvives sólo realiza unas preguntas de reflexión dirigidas al alumnado y el libro de SM realiza una reflexión a través de un diálogo. Por lo tanto, observamos que en estos libros los autores no aprovechan la historia de las matemáticas como recurso útil para motivar al alumnado y ayudare a entender el origen y el por qué de lo que van a estudiar.

El contenido de los libros de texto de 4º de E.S.O. de Matemáticas académicas excede el contenido indicado por el RD 1105/2014, presentando contenido perteneciente a 1º de Bachillerato de Matemáticas I. El libro de Anaya es el que más se ajusta al contenido de 4º de E.S.O. y no presenta demasiado contenido perteneciente a 1º de Bachillerato como Edelvives y SM, tal y como se muestra en la Tabla 1.

Anaya	Edelvives	SM
Unidad 7: Trigonometría	Unidad 7: Trigonometría	Unidad 5: Semejanza y trigonometría
-Razones trigonométricas de un ángulo agudo. -Relaciones trigonométricas fundamentales. -Utilización de la calculadora en trigonometría. -Resolución de triángulos rectángulos. -Resolución de triángulos oblicuángulos. -Razones trigonométricas de 0º a 360º.	-Medidas de ángulos: el radián. -Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. -Razones trigonométricas de algunos ángulos (30º, 45º y 60º). -Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. -Relaciones entre razones trigonométricas -Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante.	-Figuras semejantes. Teorema de Thales. -Criterios de semejanza de triángulos. Consecuencias. -Medida de ángulos: Aplicación de la semejanza. -Razones trigonométricas de un ángulo agudo. -Razones trigonométricas de un ángulos cualquiera. -Identidades trigonométricas. -Ecuaciones

-Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas. -Funciones trigonométricas. El radián.	-Aplicaciones de la trigonometría. -Herramientas tecnológicas (calculadora).	trigonométricas.
	Unidad 8: Resolución de triángulos	Unidad 6: Aplicaciones de la trigonometría
	-Resolución de triángulos rectángulos. -Teorema del seno. -Teorema del coseno. -Resolución de triángulos no rectángulos (casos). -Aplicaciones. -Herramientas tecnológicas (Geogebra)	-Resolución de triángulos rectángulos. -Teoremas del seno y del coseno. -Resolución de triángulos cualesquiera. -Aplicaciones de la trigonometría: longitudes, áreas y volúmenes.
Nota: el texto en azul no corresponde al contenido de 4º de E.S.O. de Matemáticas académicas según el RD 1105/2014, sino a 1º de Bachillerato.		

Tabla 1: Comparativa de los contenidos de trigonometría según la editorial (elaboración propia).

En las tres editoriales se definen las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de igual forma y lo explican mediante un esquema gráfico (véase la Figura 4), de forma ostensiva, pero Edelvives y SM también tratan las relaciones inversas. Así como, Edelvives y SM presentan y demuestran más identidades trigonométricas que Anaya.

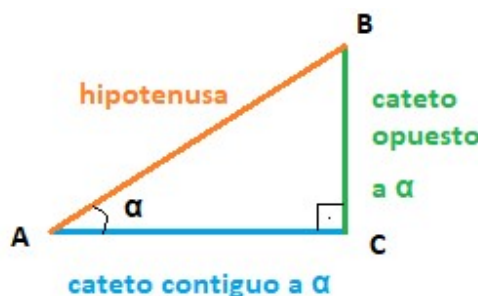


Figura 4: Esquema gráfico para explicar las razones trigonométricas (elaboración propia).

Las razones trigonométricas con un ángulo cualquiera son explicadas con la circunferencia goniométrica en los tres casos (véase la Figura 5). Sin embargo, en la resolución de triángulos no rectángulos, Anaya divide el triángulo a resolver en dos triángulos rectángulos mediante la altura; mientras que Edelvives y SM explican los Teoremas del seno y del coseno según los diferentes casos existentes.

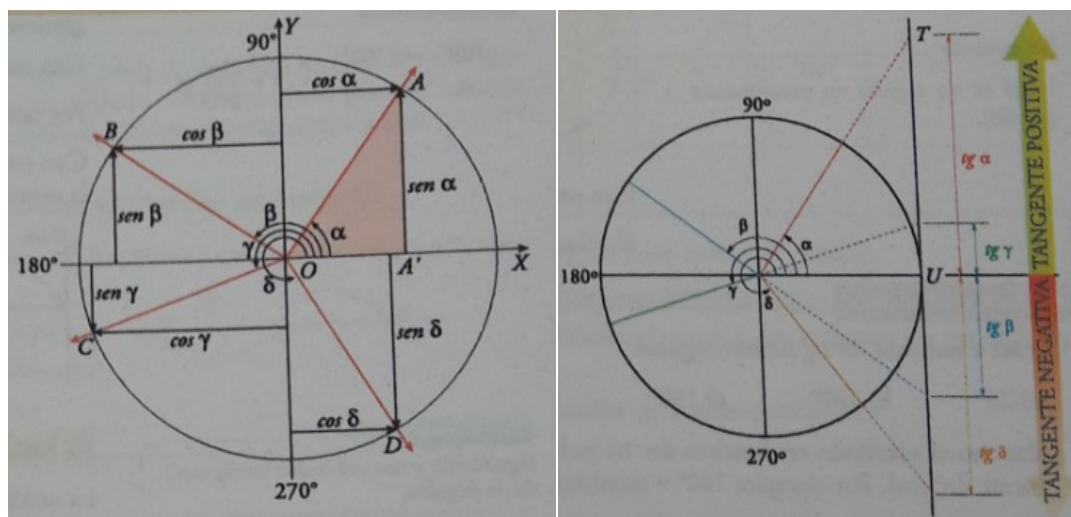


Figura 5: Esquema gráfico para explicar las razones trigonométricas en cualquier ángulo (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

La definición de radián se realiza con frases cortas y vocabulario sencillo pero con diferentes expresiones gramaticales en cada editorial (véase la Tabla 2), y su representación gráfica es similar (véase la Figura 6). Mientras que Edelvives y SM lo presentan al inicio de la unidad de trigonometría, Anaya lo realiza al final de la unidad junto a las funciones trigonométricas.

Libro de texto	Definición de radián
Anaya	Se llama radián a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado. Es decir, α es un radián porque la longitud del arco AB es igual a la del radio.
Edelvives	El radián (rad) es el ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia. El radián es la unidad de medida de un ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades.
SM	Un radián (1 rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuyo arco coincide con la longitud del radio.

Tabla 2: Diversas definiciones de radián (Colera-Jiménez, et al., 2016a; Mejía-Sánchez-Bermejo, et al., 2016a; Alcaide-Guindo, et al., 2016).

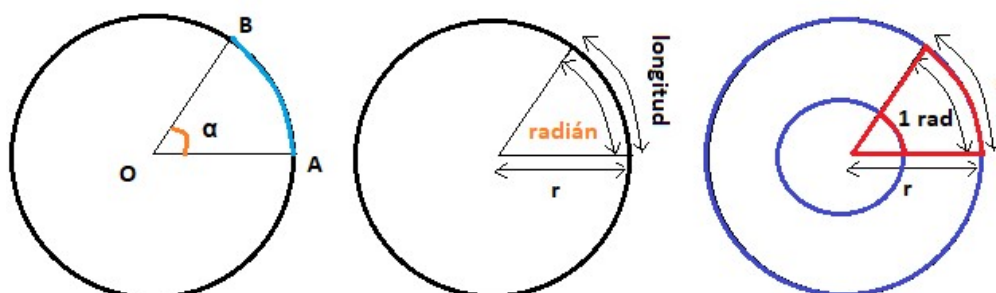


Figura 6: Esquema gráfico de la definición de radián según cada editorial (elaboración propia).

En cuanto a las relaciones trigonométricas que presenta y demuestra cada editorial, en la Tabla 3 se muestra un resumen:

Libro de texto	Relaciones trigonométricas	
Anaya	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
Edelvives	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
SM	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	-
	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$	$1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

Tabla 3: Relaciones trigonométricas (Colera-Jiménez, et al., 2016a; Mejía-Sánchez-Bermejo, et al., 2016a; Alcaide-Guindo, et al., 2016).

El libro de texto Anaya, al finalizar la unidad didáctica de trigonometría, presenta las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente). El libro de texto Edelvives, al finalizar la unidad didáctica de resolución de triángulos, presenta el cálculo del área del triángulo como aplicación de la trigonometría. Y el libro de texto SM, al finalizar la unidad didáctica de aplicaciones de la trigonometría, presenta el cálculo de las longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

Respecto a las actividades que proponen, el libro Anaya, aunque no es el que más actividades con dibujos o esquemas presenta, fomenta en algunas actividades su realización solicitando la representación de la actividad. Es de destacar que posee un apartado dedicado a explicar cómo se utiliza la calculadora porque gran parte del alumnado no sabe usarla o interpretar el resultado. En cuanto a la existencia de problemas contextualizado, es la editorial que más tiene, junto a Edelvives; además, presenta problemas resueltos, y tras ello, solicita que se repita por el alumnado pero con otros datos. Por otro lado, en todos los apartados de la unidad, se hace referencia a ejemplos aclaratorios en Geogebra, pero sólo se puede acceder desde el aula con la clave que tiene el profesorado suministrada por la editorial.

El libro de Edelvives presenta más ejercicios y problemas con dibujos o esquemas, lo cual facilita la comprensión del alumnado. Así como, plantea más preguntas teóricas o cuestiones para reflexionar. A pesar de que en cada apartado de la unidad no hace referencia a ejemplos aclaratorios mostrados por Geogebra, sí se debe destacar que dedica un apartado a explicar cómo utilizar Geogebra; así como en otro apartado se dedica a explicar cómo utilizar e interpretar la calculadora. Además, el libro de Edelvives fomenta las actividades en grupo o de exposición oral.

El libro de SM presenta más ejercicios de mayor dificultad que los libros de Anaya y Edelvives; y los ejercicios o problemas presentados tienen menos dibujos o esquemas que en el caso de Edelvives. Por otro lado, en cada apartado de la unidad, se hace referencia a ejemplos aclaratorios en Geogebra, los cuales se pueden acceder mediante una clave dada por la editorial al profesorado. Sin embargo, no dedica

ningún apartado a cómo utilizar la calculadora, sólo presenta un breve comentario en un recuadro.

Tanto en el libro de Edelvives como en el de SM, se realizan más demostraciones de las fórmulas de trigonometría que en Anaya, pero se debe a que el contenido es más amplio. Así como, al final del tema presentan un esquema sobre toda la unidad facilitando la comprensión y el estudio de la unidad.

Las tres editoriales clasifican los ejercicios y/o problemas según los apartados estudiados por lo que el alumnado sabe de antemano qué fórmulas o metodología debe aplicar antes de leer el enunciado, excepto en la autoevaluación.

En el libro de SM, las actividades vienen clasificadas según el nivel de dificultad (baja, media o alta); en el caso de Anaya, sólo clasifica las actividades al final de la unidad; pero el libro de Edelvives no las clasifica. Quizás esto puede provocar que el alumnado esté condicionado antes de leer la actividad a realizar, y sienta incapacidad de enfrentarse a la actividad por el símbolo que precede al enunciado.

En general, en los libros de texto se presentan una muestra representativa de diversos tipos de actividades y aplicaciones, el nivel del lenguaje se adecua al alumnado dirigido, las definiciones y los procedimientos son correctos y claros, los enunciados, los procedimientos, las explicaciones, las demostraciones o las comprobaciones se adecuan al nivel del alumnado, y los diversos objetos matemáticos se conectan y relacionan entre sí (definiciones, problemas, etc.).

En cuanto al tipo de actividades que presenta cada editorial, los he clasificado en ejercicios y en problemas contextualizados en la vida real. Tras ello, se muestra en la Tabla 4, Tabla 5 y Tabla 6 una comparativa según la dificultad de cada actividad, su tipo, si aparecen junto a un dibujo o esquema o si están resueltos, así como también se consideran las cuestiones teóricas o de reflexión y la autoevaluación.

Tipos actividades	Nivel de dificultad		
	Bajo	Medio	Alto
Ejercicios	33	16	1
Ejercicios con dibujo	2	9	
Ejercicios resueltos	5	5	
Problemas contextualizados	3	7	
Problemas con dibujo		4	3
Problemas resueltos			3
Cuestiones teóricas o de reflexionar	1	4	
Autoevaluación	2	3	1
Total (102)	46	48	8
Porcentaje (%)	45,10	47,06	7,84

Tabla 4: Tipos de actividades y su dificultad. Editorial Anaya (elaboración propia).

Ejercicios/ problemas	Nivel de dificultad		
	Bajo	Medio	Alto
Ejercicios	42	20	
Ejercicios con dibujo	9	6	
Ejercicios resueltos	13	4	
Problemas contextualizados	3		
Problemas con dibujo	6	8	4
Problemas resueltos	2	2	
Cuestiones teóricas o de reflexionar	18	7	
Autoevaluación	11	7	2
Total (164)	104	54	6
Porcentaje (%)	63,41	32,93	3,66

Tabla 5: Tipos de actividades y su dificultad. Editorial Edelvives (elaboración propia).

Ejercicios/ problemas	Nivel de dificultad		
	Bajo	Medio	Alto
Ejercicios	39	38	4
Ejercicios con dibujo	9	5	2
Ejercicios resueltos	22	11	
Problemas contextualizados	3	4	2
Problemas con dibujo	3	6	1
Problemas resueltos	1	3	1
Cuestiones teóricas o de reflexionar		2	1
Autoevaluación	5	4	2
Total (168)	82	73	13
Porcentaje (%)	48,81	43,45	7,74

Tabla 6: Tipos de actividades y su dificultad. Editorial SM (elaboración propia).

Nota: en la editorial SM, se ha tenido en cuenta todas las actividades de las unidades 5 y 6, sin considerar las dedicadas a la semejanza, para que la comparación de las tres editoriales sea en igualdad de condiciones.

La editorial SM presenta mayor número de actividades (ejercicios o problemas contextualizados) que el resto de editoriales, seguido por Edelvives, y por último, Anaya. En las tres editoriales, se presentan muy pocas actividades con un alto nivel de dificultad, destacando SM. Edelvives presenta un mayor número de actividades con menor dificultad, seguido por SM y tras este, Anaya. Sin embargo, SM presenta más actividades de dificultad media, seguido por Edelvives y Anaya (véase la Figura 7).

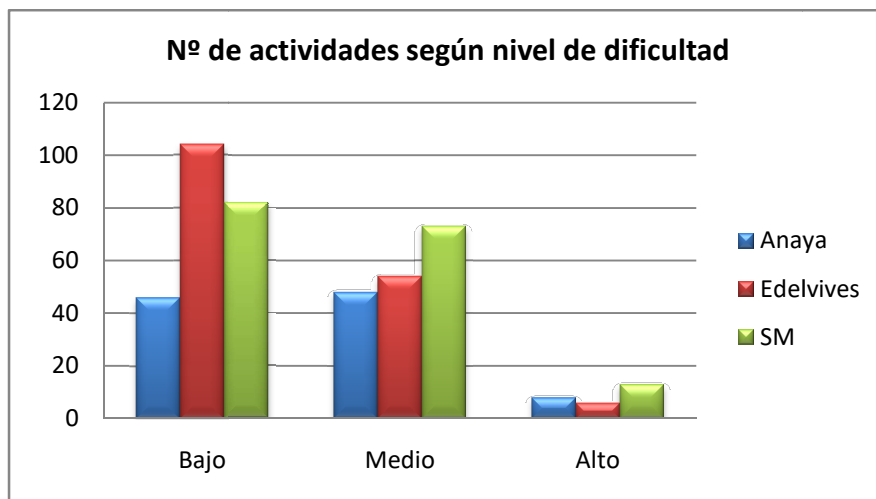


Figura 7: Número de actividades según el nivel de dificultad por editorial (elaboración propia).

Si se tiene en cuenta el porcentaje de actividades dedicadas a cada nivel de dificultad según el cómputo total por editorial. La mayor parte de las actividades tienen un nivel de dificultad baja o media, donde Anaya y SM reparten ese porcentaje casi equitativamente; sin embargo, Edelvives presenta un mayor porcentaje de actividades con baja dificultad (véase la Figura 8).

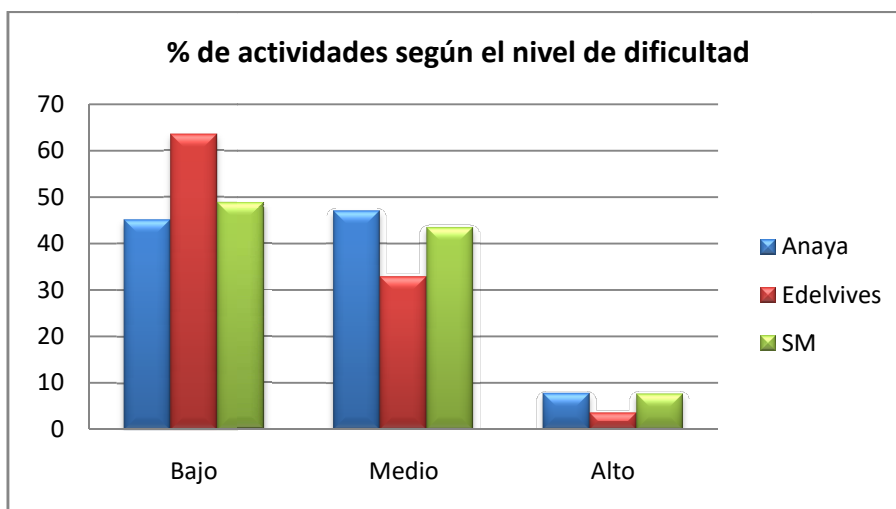


Figura 8: Porcentaje de actividades según el nivel de dificultad por editorial (elaboración propia).

Para analizar con más claridad los datos obtenidos, se muestran unas gráficas en el Anexo I, en las cuales se realiza una comparativa sobre el número y el porcentaje de actividades con o sin dibujo de cada editorial, y una comparativa sobre el número y el porcentaje de ejercicios y problemas contextualizados.

4. Fundamentación Epistemológica

En este apartado, se desarrollará el tema 38 “Trigonometría. Resolución de triángulos. Aplicaciones” de las Oposiciones de Profesorado de Secundaria de la

especialidad de Matemáticas, según el BOE de 21 de septiembre de 1993, el Anexo III de la Orden de 9 de septiembre de 1993, regulado por el RD 850/1993, de 4 de junio.

Se comenzará con unos preliminares sobre las razones trigonométricas, y tras ello, se continuará con la demostración de las identidades trigonométricas más importantes, la demostración de los Teoremas del seno y del coseno, los cuales son herramientas básicas para la resolución de cualquier tipo de triángulo. Además, se estudiarán todos los casos de resolución de triángulos en los que se conocen tres elementos, y algunas aplicaciones. Finalmente, se desarrollarán varias fórmulas para el área de un triángulo.

4.1. Preliminares: Razones trigonométricas

Se definen las razones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0 y 2π radianes para extenderlas a toda la recta real por periodicidad.

○ Definiciones

Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$ el ángulo que forman dos semirrectas r y s , y sea $O = r \cap s$ el vértice de dicho ángulo. Respecto de una referencia rectangular del plano centrada en O y cuyo eje de abscisas contiene a r , sea C la circunferencia de centro O y de radio 1, sea Q el punto de coordenadas $(1,0)$ y sea $P = (x, y)$ el punto de intersección de la semirrecta s con la circunferencia C (véase la Figura 9).

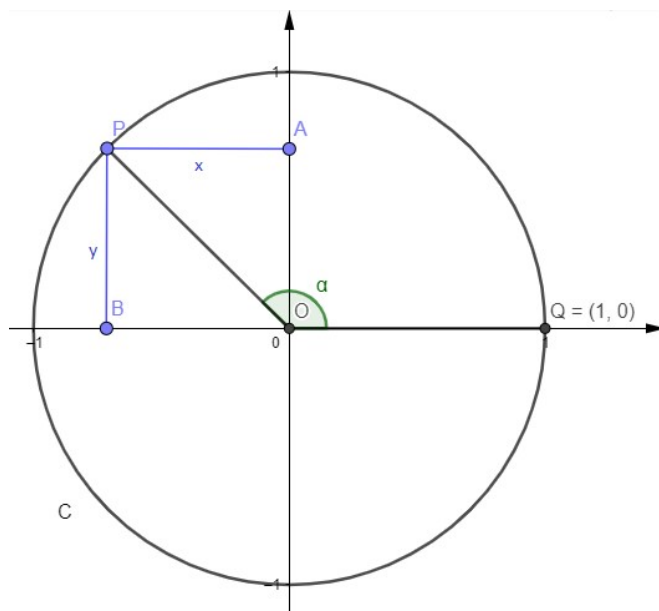


Figura 9: Circunferencia goniométrica (elaboración propia).

De acuerdo con la Figura 9, las razones trigonométricas de α se definen como:

$$\text{Seno } \alpha \equiv \text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} = y$$

$$\text{Coseno } \alpha \equiv \cos \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}} = \frac{x}{r} = x$$

$$\text{Tangente } \alpha \equiv \text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \text{ si } x \neq 0, \text{ es decir, } \alpha \notin \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Cosecante } \alpha \equiv \text{cosec } \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{y} \text{ si } y \neq 0, \text{ es decir, } \alpha \notin \{0, \pi\}.$$

$$\text{Secante } \alpha \equiv \sec \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, \text{ es decir, } \alpha \notin \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Cotangente } \alpha \equiv \cotg \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \text{ si } y \neq 0, \text{ es decir, } \alpha \notin \{0, \pi\}.$$

○ Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Si α es uno de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sus razones trigonométricas pueden obtenerse como (véase la Figura 10):

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto contiguo a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

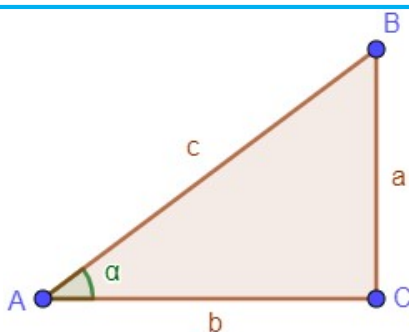


Figura 10: Triángulo rectángulo (elaboración propia).

DEMOSTRACIÓN

Sea ABC un triángulo rectángulo en C y sea $\alpha = \angle CAB$. Considérese la circunferencia de centro A y radio 1 para obtener en ella las razones de α (véase la Figura 11). Si P es el punto de corte de la circunferencia con AB y H es la proyección de P sobre AC, ocurre que por la semejanza de los triángulos rectángulos AHP y ABC, que:

$$\text{sen } \alpha = \text{HP} = \frac{\text{HP}}{1} = \frac{\text{HP}}{\text{AP}} = \frac{\text{CB}}{\text{AB}}$$

$$\cos \alpha = \text{AH} = \frac{\text{AH}}{1} = \frac{\text{AH}}{\text{AP}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{HP}}{\text{AH}} = \frac{\text{CB}}{\text{AC}} \blacksquare$$

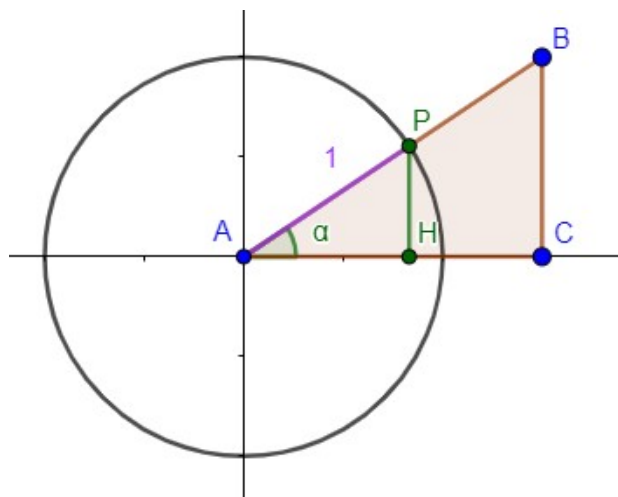


Figura 11: Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo (elaboración propia).

○ Extensión de las razones trigonométricas a cualquier ángulo α real

El seno y el coseno han sido definidos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es cualquiera, existe un único número entero k tal que $\alpha - 2k\pi \in [0, 2\pi)$, y se definen entonces el seno y el coseno de α mediante:

$$\sin \alpha = \sin (\alpha - 2k\pi) \quad \cos \alpha = \cos (\alpha - 2k\pi)$$

Se definen de este modo las funciones seno y coseno en toda la recta real $\mathbb{R}$ y ambas son periódicas de período 2π . A partir de estas dos funciones se definen las restantes funciones trigonométricas.

○ Propiedades de las razones trigonométricas

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, ocurre que:

1. $|\sin \alpha| \leq 1, \quad |\cos \alpha| \leq 1$
2. $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$
3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, siempre que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN

La propiedad 1 es inmediata por la definición de seno y coseno. La propiedad 2 es evidente siempre que $|\alpha| \geq 1$. Si es $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces es $\sin \alpha \geq 0$, y de la Figura 12 se deduce que $\sin \alpha = PH \leq PQ < \text{arco } PQ = \alpha$.

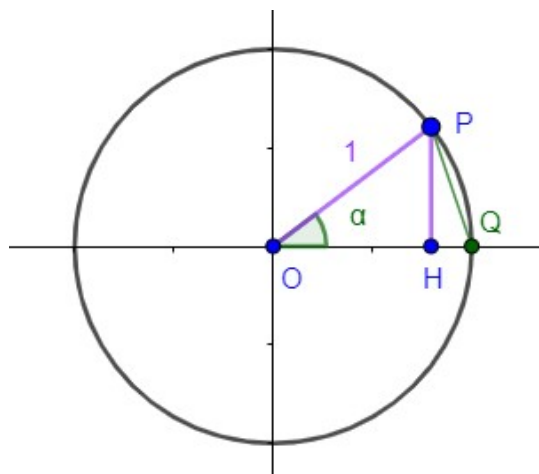


Figura 12: Propiedades 1 y 2 de las razones trigonométricas (elaboración propia).

Si $-1 < \alpha < 0$, entonces es $\sin \alpha < 0$ y, por simetría del caso anterior, $-\sin \alpha \leq -\alpha$. En ambos casos, es $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$.

La propiedad 3 es la aplicación del Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OHP cuyos catetos son $PH = |\sin \alpha|$, $OH = |\cos \alpha|$ y cuya hipotenusa es $OP = 1$ (véase la Figura 13). La propiedad 4 se obtiene dividiendo la igualdad 3 por $\cos^2 \alpha$, el cual no es nulo siempre que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ ■

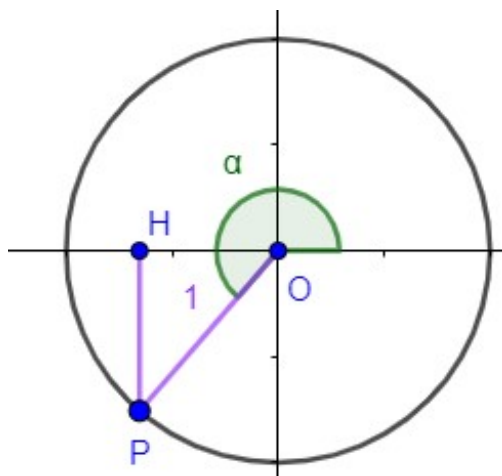


Figura 13: Propiedades 3 y 4 de las razones trigonométricas (elaboración propia).

4.2. Identidades trigonométricas

Se obtienen las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos, etc., relaciones evidentes dada la simetría de la circunferencia.

○ Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

Para cualquier ángulo α se cumple que (véase la Figura 14):

1. Ángulos suplementarios:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

2. Ángulos que difieren en π :

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

3. Ángulos opuestos:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

4. Ángulos complementarios:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

5. Ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

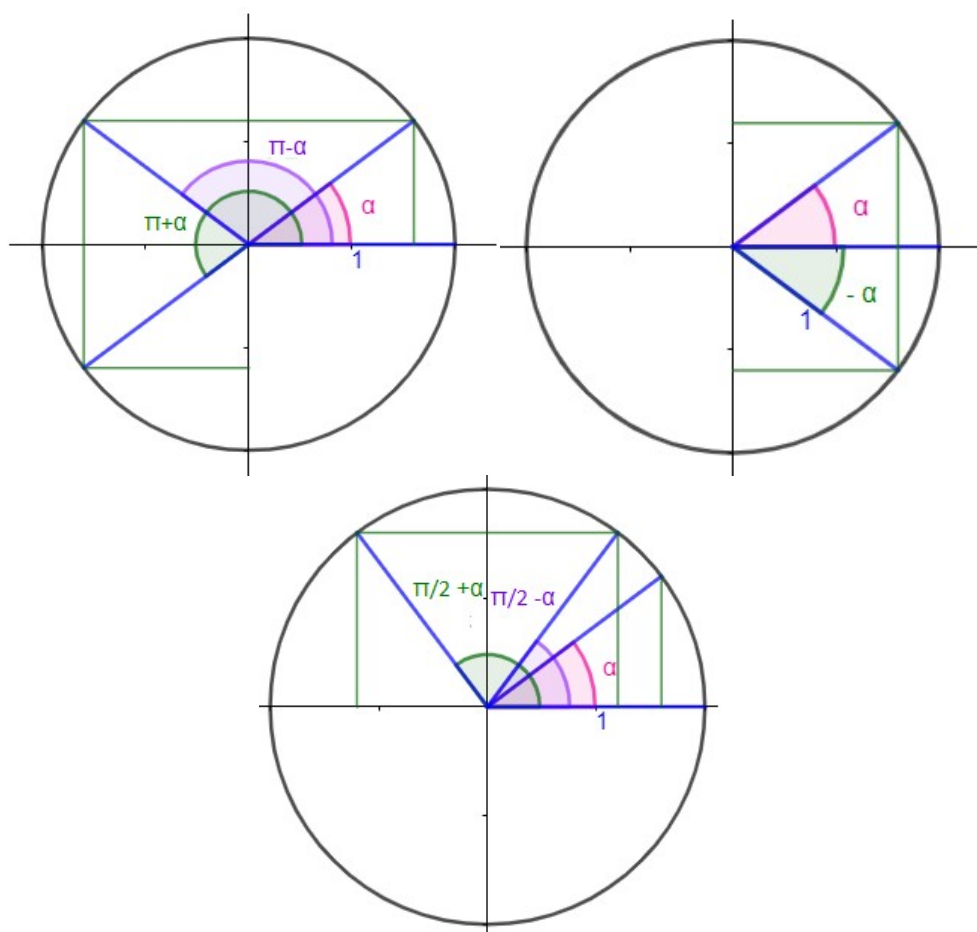


Figura 14: Relaciones trigonométricas de algunos ángulos (elaboración propia).

A partir de dichas razones trigonométricas, se obtienen las restantes razones de $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\frac{\pi}{2} + \alpha$ en función de las de α .

○ Razones trigonométricas del ángulo suma

Si α y β son ángulos cualesquiera:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

(La última igualdad sólo tiene sentido si $\alpha, \beta, \alpha + \beta \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$).

DEMOSTRACIÓN

La demostración de la primera identidad puede limitarse al caso en el que los ángulos $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ son agudos.

En este caso, consideramos la circunferencia goniométrica, es decir, de radio 1 de la Figura 15:

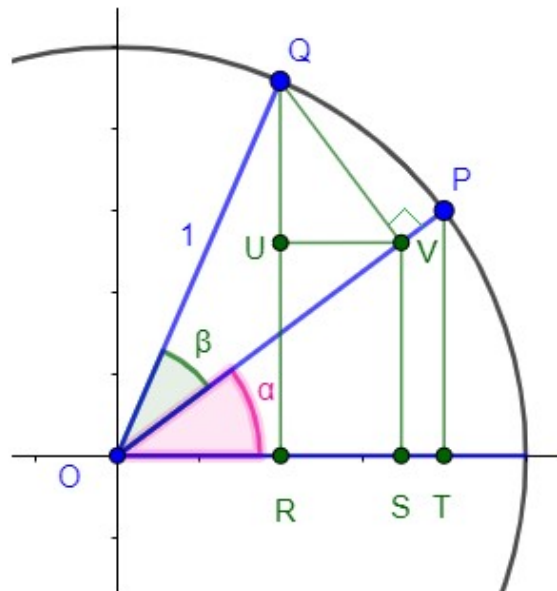


Figura 15: Razones trigonométricas del ángulo suma (elaboración propia).

Para construir esta Figura 15, se coloca el ángulo α en posición estándar, el ángulo β de tal forma que su vértice se encuentre en el origen O y su lado coincida con el lado final del ángulo α . Sea Q cualquier punto en el lado terminal del ángulo $(\alpha + \beta)$. La recta QR es perpendicular a OX, y UV perpendicular a QR. Entonces:

$$\sin(\alpha + \beta) = QR = QU + UR = QU + VS \quad (1)$$

De la semejanza de los triángulos rectángulos QUV y OTP se deduce que $\frac{QU}{OT} = \frac{QV}{OP}$ y puesto que $OP = 1$, resulta que $QU = OT \cdot QV = \cos \alpha \sin \beta$. También, de la semejanza de los triángulos OSV y OTP se deduce que $\frac{VS}{PT} = \frac{OV}{OP}$, de donde $VS = \frac{PT \cdot OV}{OP} = PT \cdot OV = \sin \alpha \cos \beta$. Sustituyendo en (1) las expresiones obtenidas para QU y VS, se obtiene la fórmula del seno de la suma de dos ángulos.

La segunda igualdad se deduce de la primera al expresar el coseno de la suma como $\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right]$ y utilizar el concepto de ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$. Para la tercera identidad basta dividir miembro a miembro las dos primeras ■

De estas identidades se deducen las razones trigonométricas del ángulo diferencia, del ángulo doble, del ángulo mitad y las fórmulas que factorizan sumas o restas de senos o cosenos. Para las primeras, basta expresar $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ y utilizar el concepto de ángulos opuestos.

○ Razones trigonométricas del ángulo diferencia

Si α y β son dos ángulos cualesquiera:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}\end{aligned}$$

(La última igualdad sólo tiene sentido si $\alpha, \beta, \alpha - \beta \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$).

○ Razones trigonométricas del ángulo doble

Para obtener las razones del ángulo doble basta hacer $\beta = \alpha$ en las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo suma.

Si α es un ángulo cualquiera:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

(La última igualdad sólo tiene sentido si $\alpha \notin \{\pi/2 + k\pi, \pi/4 + k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$).

○ Razones trigonométricas del ángulo mitad

Si α es un ángulo cualquiera:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

(La última igualdad sólo es válida si $\alpha \neq (2k+1)\pi$, sea cual sea $k \in \mathbb{Z}$).

DEMOSTRACIÓN

Si las igualdades:

$$\cos \alpha = \cos \left(2 \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$$

se suman y se restan, se obtienen inmediatamente las razones del ángulo mitad, es decir:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

entonces:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Además, se puede expresar $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ como:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

si se multiplica numerador y denominador por el mismo valor: $(1 - \cos \alpha)$ o $(1 + \cos \alpha)$; y sabiendo que $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ■

○ **Productos de senos y coseno**

Si α y β son dos ángulos cualesquiera:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)]$$

Si $\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$, entonces:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

Si $\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$, entonces:

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)]$$

Si $\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, entonces:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

Si $\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$, entonces:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = -\frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)] \blacksquare$$

○ **Suma y diferencia de senos y cosenos**

Sean los ángulos φ y ψ tales que $\varphi + \psi = \alpha$, $\varphi - \psi = \beta$, es decir, $\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$ y $\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$, de modo que, al aplicar las primeras identidades del ángulo suma y del ángulo diferencia, se obtiene: $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (\varphi + \psi) + \operatorname{sen} (\varphi - \psi) = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \psi$. De donde:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta &= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

4.3. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo cualquiera es determinar sus tres ángulos y sus tres lados conocidos algunos de estos seis elementos. El número mínimo de elementos del que debe disponerse para que el triángulo quede determinado unívocamente es tres, y entre ellos debe haber algún lado, pues si sólo se conocen tres ángulos positivos α , β y γ que sumen π radianes, existen infinitos triángulos (todos ellos semejantes) cuyos ángulos son los anteriores. El problema radica en resolver triángulos de los que se conocen tres de sus elementos, uno de los cuales será siempre un lado. Si el triángulo es rectángulo, el problema se resuelve con el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas del ángulo agudo; para el caso general es suficiente aplicar los Teoremas del seno y del coseno cuyos enunciados y demostraciones se ofrecen a continuación.

○ **Teorema del seno**

Los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos y la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Es decir, en cualquier triángulo ABC:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

DEMOSTRACIÓN

Si el ángulo γ es recto (véase la Figura 16), entonces $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ y $\sin \beta = \frac{b}{c}$. Al despejar c en ambas igualdades e igualar las expresiones resultantes, será $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = c = \frac{c}{\sin \gamma}$, pues $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$.

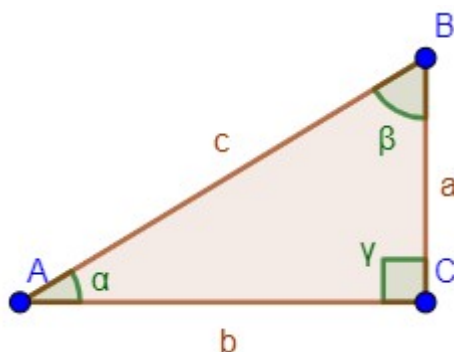


Figura 16: Teorema del seno. Triángulo con el ángulo γ recto (elaboración propia).

Si el ángulo γ es agudo, se traza la altura h desde el vértice B (véase la Figura 17). Los triángulos AHB y BHC son rectángulos, luego $\sin \alpha = \frac{h}{c}$ y $\sin \gamma = \frac{h}{a}$. Al igualar el valor de h en ambas expresiones se obtiene: $c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma$, es decir, $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$. Si se traza la altura desde el vértice C se llega análogamente a $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

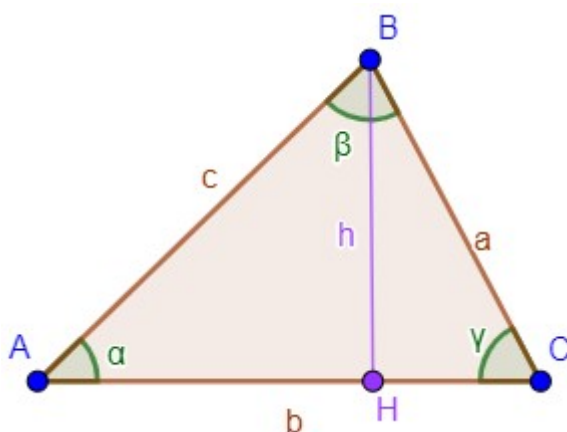


Figura 17: Teorema del seno. Triángulo con el ángulo γ agudo (elaboración propia).

Si el ángulo γ es obtuso (véase la Figura 18), este caso es análogo al anterior cambiando γ por $\pi - \gamma$, ya que se aplica que dos ángulos suplementarios tienen el mismo seno.

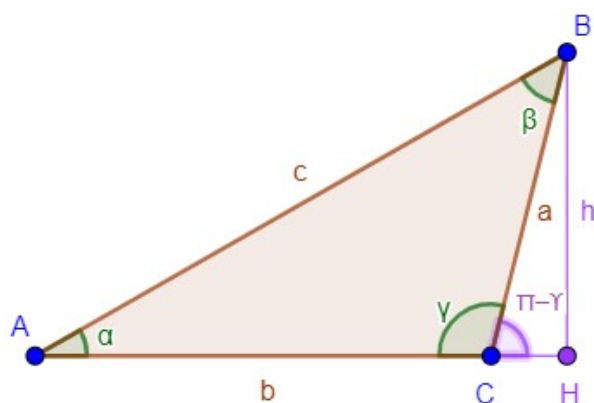


Figura 18: Teorema del seno. Triángulo con el ángulo γ obtuso (elaboración propia).

Para finalizar, se probará que la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita. Si β es uno de los ángulos agudos del triángulo y O es su circuncentro, la mediatriz del lado AC pasa por O (véase la Figura 19). Además, β está inscrito en la circunferencia circunscrita, luego $\beta = \frac{1}{2} \angle AOC = \alpha$ y de aquí $\sin \beta = \sin \alpha = \frac{b/2}{R} = \frac{b}{2R}$, y por tanto, $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ ■

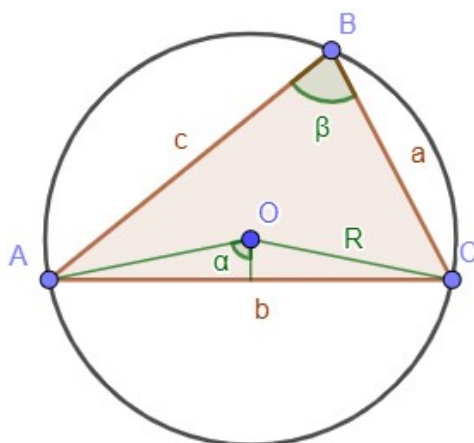


Figura 19: Circunferencias circunscrita (elaboración propia).

○ Teorema del coseno

Un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes menos el doble del producto de dichos lados restantes y el coseno del ángulo opuesto al lado estudiado. Es decir, en cualquier triángulo ABC , ocurre que el Teorema del coseno es la generalización del Teorema de Pitágoras a un triángulo cualquiera.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN

Si γ es un ángulo recto, $\cos \gamma = 0$ y, por el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \Upsilon$$

Si Υ es un ángulo agudo (véase la Figura 20), en los triángulos rectángulos AHB y BHC es:

$$c^2 = AH^2 + h^2 \quad \text{y} \quad a^2 = CH^2 + h^2.$$

Restando ambas expresiones queda:

$$c^2 - a^2 = AH^2 - CH^2 \quad (2)$$

Como $\cos \Upsilon = \frac{CH}{a}$, entonces $CH = a \cdot \cos \Upsilon$ y $AH = b - a \cdot \cos \Upsilon$, y al sustituir en (2), resulta:

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= (b - a \cos \Upsilon)^2 - (a \cos \Upsilon)^2 = b^2 - 2ab \cos \Upsilon + a^2 \cos^2 \Upsilon - a^2 \cos^2 \Upsilon \\ &= b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \Upsilon \end{aligned}$$

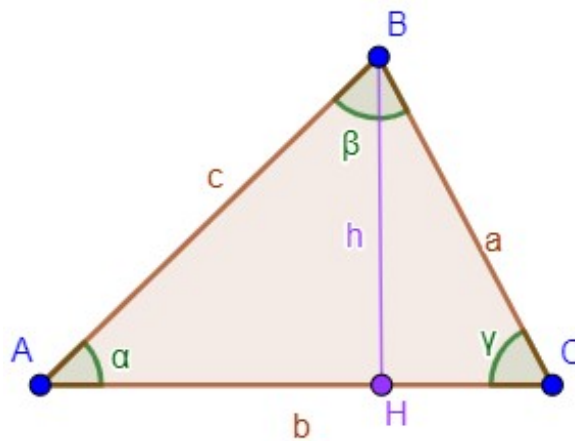


Figura 20: Teorema del coseno. Triángulo con el ángulo Υ agudo (elaboración propia).

Si Υ es un ángulo obtuso (véase la Figura 21), el razonamiento es idéntico, pero sustituyendo Υ por $\pi - \Upsilon$ y teniendo en cuenta que dos ángulos suplementarios tienen coseno opuestos ■

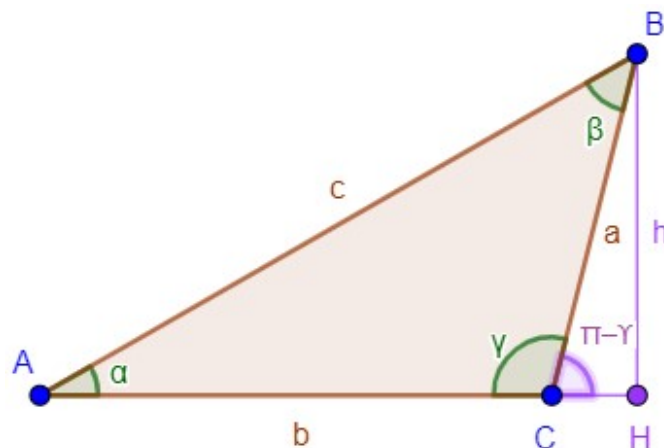


Figura 21: Teorema del coseno. Triángulo con el ángulo Υ obtuso (elaboración propia).

Las otras dos formas pueden obtenerse de forma similar.

○ Resolución de triángulos oblicuángulos

Cuando se conocen tres elementos de un triángulo, no todos ángulos, se tiene que el triángulo está determinado de forma única, excepto en un caso. Los cinco casos posibles de resolución de triángulos oblicuángulos están registrados en la Tabla 7:

Caso	Datos	Uso de Teorema	Primer elemento a encontrar
I	Tres lados	Cosenos	Cualquier ángulo
II	Dos lados y el ángulo comprendido entre ambos	Cosenos	Tercer lado
III	Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Senos	Ángulo opuesto al segundo lado dado
IV	Dos ángulos y el lado entre ellos	Senos	Tercer ángulo y después cualquiera de los dos lados
V	Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos	Senos	Lado opuesto al segundo ángulo dado

Tabla 7: Resolución de triángulos oblicuángulos (Ayres y Moyer, 1991).

○ Existencia y construcción de triángulos

Caso I: se conocen los tres lados

Puede construirse un triángulo ABC cuyos lados miden $a \geq b \geq c$ si y sólo si $a < b + c$. Además, en tal caso, dicho triángulo es único.

La desigualdad triangular garantiza que la condición $a < b + c$ es necesaria. Sea B y C dos puntos que distan entre sí la distancia a. Como $a < b + c$, las circunferencias de centros B y C y radios c y b respectivamente, se cortan en un punto. Si A es uno de ellos, el triángulo ABC cumple lo requerido (véase la Figura 22). La unicidad se sigue inmediatamente del Teorema del coseno, pues para cualquiera de los tres ángulos, el valor $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ determina unívocamente el ángulo $\alpha \in (0, \pi)$.

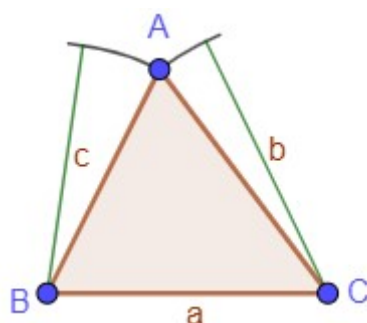


Figura 22: Caso I de construcción de triángulos (elaboración propia).

Caso II: se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ambos

Existe un único triángulo ABC en el que son dados los lados a y b, y el ángulo $\gamma \in (0, \pi)$.

Para la existencia basta trazar, partiendo de un punto C cualquiera, dos segmentos de longitudes a y b que formen un ángulo γ (véase la Figura 23). Para la unicidad, el tercer lado c se obtiene del Teorema del coseno. Además, si $a \leq b$ entonces $\alpha \leq \beta$ y necesariamente $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, por lo que el Teorema del seno: $\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma$, que determina un único valor del ángulo α , pues en el primer cuadrante sólo hay un ángulo que tenga un seno positivo dado. Por último, $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

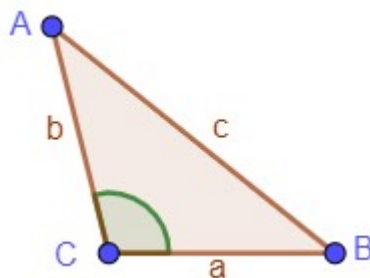


Figura 23: Caso II de construcción de triángulos (elaboración propia).

Caso III: se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

En este caso no siempre hay solución y, cuando la hay, no siempre es única.

1. Si $a \geq b$, existe un único triángulo ABC en el que son dados los lados a y b , y el ángulo $\alpha \in (0, \pi)$ opuesto a uno de ellos.

Para construir el triángulo ABC, sobre uno de los extremos del lado b se construye el ángulo α . Con centro en el otro extremo de b , se traza la circunferencia de radio a , que cortará al segundo lado del ángulo α en un único punto, pues $a \geq b$. Uniendo este punto con los dos extremos de b , se construye el triángulo (véase la Figura 24). Para la unicidad, del Teorema del seno se sigue que $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, luego $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$. Por ser $b \leq a$, existe un único ángulo β ($\beta \leq \alpha$), cuyo seno es el anterior, pues pese a ser $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$, la solución $\pi - \beta$ no es válida, pues sería $\alpha + (\pi - \beta) < \pi$ y de aquí, $\alpha < \beta$, imposible. El otro ángulo es $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, y el lado c se obtiene del Teorema del seno o del coseno.

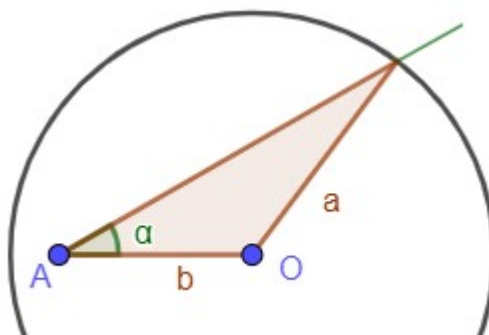


Figura 24: Caso III-1 de construcción de triángulos (elaboración propia).

2. Si $b \cdot \sin \alpha < a < b$, pueden construirse dos triángulos ABC con dichos elementos.

Razonando como en el caso 1, aquí la circunferencia de radio a corta al segundo lado del ángulo α en dos puntos, lo que prueba la existencia de los dos triángulos (véase la Figura 25). Obsérvese que ahora son válidas las dos soluciones β y $\pi - \beta$, ya que al ser $\alpha < \beta$, es $\alpha + (\pi - \beta) < \pi$. Para cada uno de esos dos valores se obtiene el tercer ángulo γ y del Teorema de los senos se deduce el lado c .

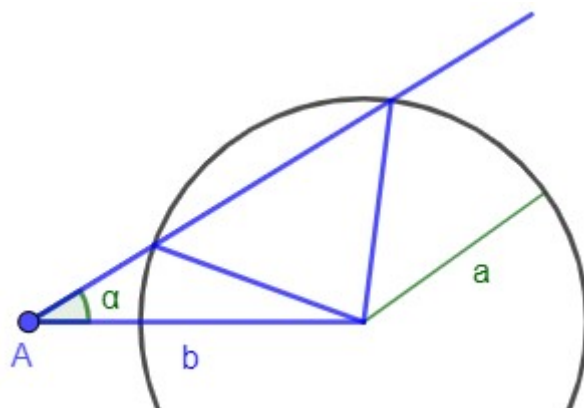


Figura 25: Caso III-2 de construcción de triángulos (elaboración propia).

3. Si $b \cdot \sin \alpha = a < b$, puede construirse un único triángulo ABC con dichos elementos.

Construyendo como en los casos 1 y 2, en este caso, la circunferencia de radio a es tangente al segundo lado del ángulo α , determinando por tanto un único triángulo que, además es rectángulo en B (véase la Figura 26). La unicidad se deduce de $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = 1$, y por tanto, $\beta = \frac{\pi}{2}$, terminándose el problema como en los casos anteriores.

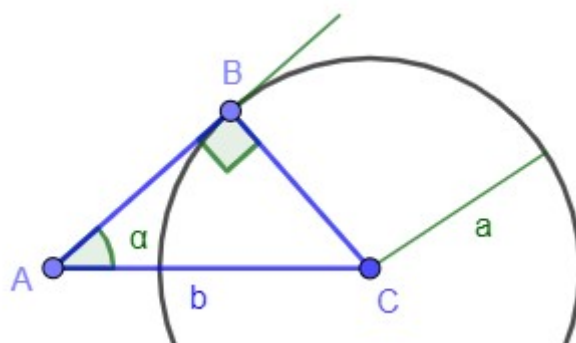


Figura 26: Caso III-3 de construcción de triángulos (elaboración propia).

4. Si $b \cdot \sin \alpha > a$, no puede construirse algún triángulo ABC con dichos elementos.

En este caso, el problema no tiene solución, pues la circunferencia no corta al segundo lado del ángulo α (véase la Figura 27). El Teorema de los senos demuestra igualmente la imposibilidad de la construcción, puesto que debería ser $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha > 1$.

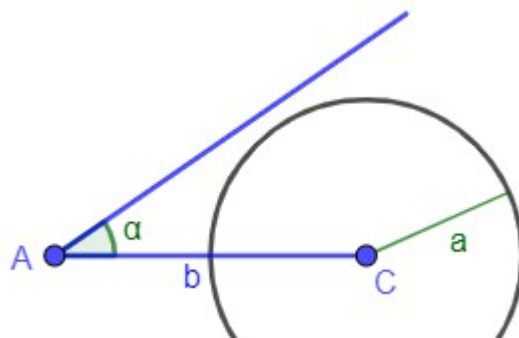


Figura 27: Caso III-4 de construcción de triángulos (elaboración propia).

Casos IV y V: se conocen un lado y dos ángulos

Existe un triángulo ABC en el que son dados el lado a y los ángulos β y γ , si y sólo si $\beta + \gamma < \pi$. Además, en tal caso, dicho triángulo es único.

La condición $\beta + \gamma < \pi$ es evidentemente necesaria para la existencia del triángulo. Para su suficiencia, se construye un segmento de longitud a y, sobre sus extremos, los ángulos β y γ . Los segundos lados de éstos, se cortan en un punto por ser $\beta + \gamma < \pi$ (véase la Figura 28). La unicidad se deduce de $\alpha = \pi - \beta - \gamma$ y del Teorema del seno: $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

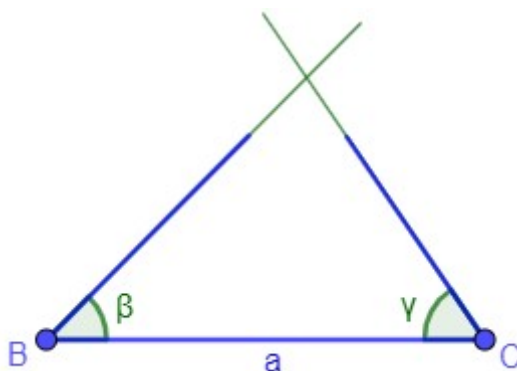


Figura 28: casos IV y V de construcción de triángulos (elaboración propia).

○ **Verificación de las soluciones de triángulos oblicuángulos**

Los dos procedimientos para verificar la solución de un triángulo oblicuángulo son las fórmulas de Mollweide y las fórmulas de proyección.

En cualquier triángulo ABC, las fórmulas de Mollweide son (véase la Figura 29):

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \quad \text{y} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$$

Conjuntamente con las que se obtienen con el cambio periódico de las letras, esto es:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}\beta} \quad \text{y} \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\cos \frac{1}{2}\beta}$$

DEMOSTRACIÓN

Por el Teorema de los senos, $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ y $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$

Entonces: $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma},$

donde $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin \frac{1}{2}(\pi - \gamma) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\gamma\right) = \cos \frac{1}{2}\gamma$

De forma similar: $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$

donde $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\gamma\right) = \sin \frac{1}{2}\gamma$ ■

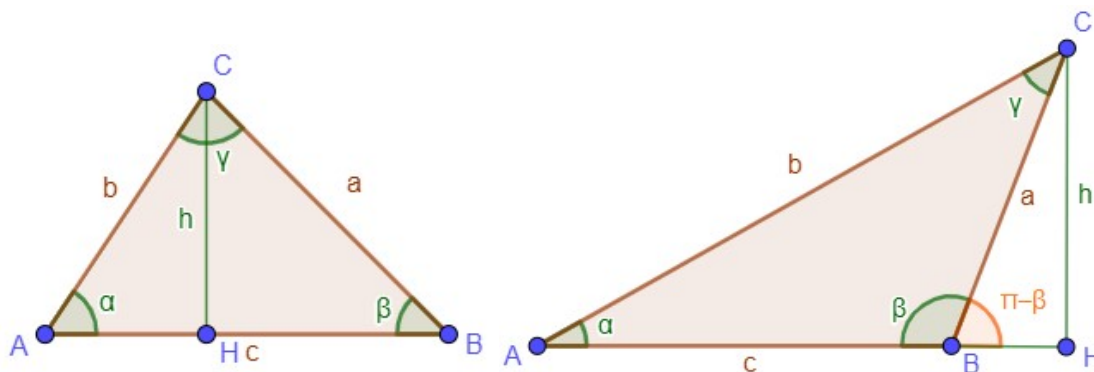


Figura 29: Fórmulas de Mollweide y de proyección. Triángulo con el ángulo β agudo y obtuso (elaboración propia).

En cualquier triángulo ABC, las fórmulas de proyección son (véase la Figura 29):

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma$$

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$$

DEMOSTRACIÓN

En el triángulo rectángulo ACH, de la figura 21, $AH = b \cos \alpha$.

En el triángulo rectángulo BCH, de la figura 21 (a), $HB = a \cos \beta$. Así:

$$c = AB = AH + HB = b \cos \alpha + a \cos \beta = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

En el triángulo rectángulo BCH, de la figura 21 (b), $BH = a \cos (\pi - \beta) = -a \cos \beta$. Así:

$$c = AB = AH - BH = b \cos \alpha - (-a \cos \beta) = a \cos \beta + b \cos \alpha \blacksquare$$

○ Teorema de las tangentes

Establece la relación entre la diferencia y la suma de dos lados de un triángulo con las tangentes de la mitad de la diferencia y la suma de los ángulos opuestos a dichos lados.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta+\gamma)} \quad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$

DEMOSTRACIÓN

En cualquier triángulo ABC, se obtienen las fórmulas de Mollweide:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \quad \text{y} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \gamma}$$

dividiendo el primero entre el segundo,

$$\frac{a-b}{c} \cdot \frac{c}{a+b} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$$

$$\text{Como } \gamma = \pi - (\alpha + \beta), \quad \frac{1}{2} \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Así, } \frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \blacksquare$$

Las otras dos formas pueden obtenerse de forma similar o con los cambios cíclicos de las letras en la ecuación anterior.

4.4. Aplicaciones de la resolución de triángulos

En múltiples problemas reales ha de resolverse un triángulo a partir de algunos de sus elementos. Se destaca entre ellos, el cálculo de alturas cuyo pie no es accesible y el cálculo de distancias entre dos puntos inaccesibles.

○ Altura de pie inaccesible

Para calcular la altura h de un montículo, se mide el ángulo α que forma la horizontal con la visual de su cima. Se retrocede una distancia d y se mide el ángulo análogo al anterior, siendo $\beta < \alpha$ (véase la Figura 30). Si x es la distancia desde el primer punto de observación a la cima, como los ángulos del triángulo de la izquierda

son β , $\pi - \alpha$ y $\pi - (\pi - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$, al aplicar el Teorema del seno en dicho triángulo se obtiene:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{d}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)} \quad \text{luego} \quad x = \frac{d \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)}$$

La altura del montículo se deduce del triángulo rectángulo de la derecha, y es:

$$h = x \operatorname{sen} \alpha = \frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)} \quad \blacksquare$$

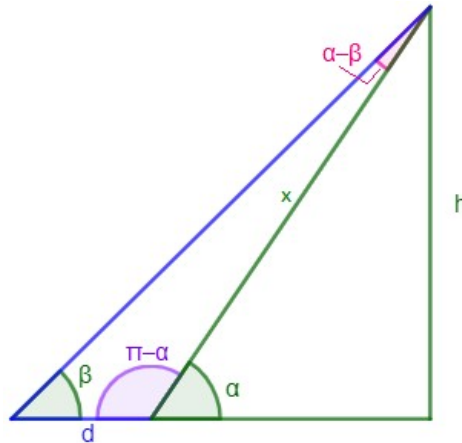


Figura 30: Cálculo de una altura de pie inaccesible (elaboración propia).

○ Distancia entre dos puntos inaccesibles

Para calcular la distancia d entre dos puntos inaccesibles A y B , se eligen dos puntos accesibles C y D , y se mide la distancia d_1 entre ellos (véase la Figura 31). Con el teodolito se puede medir los ángulos α_1 , α_2 , β_1 y β_2 .

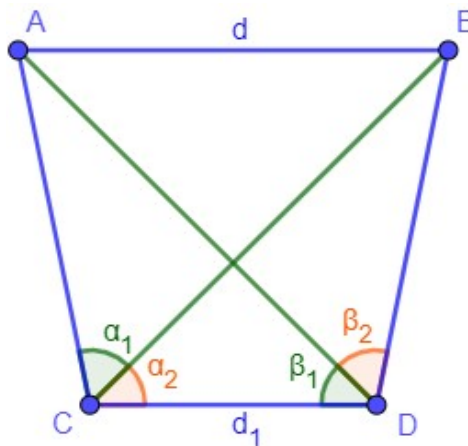


Figura 31: Cálculo de distancia entre dos puntos inaccesibles (elaboración propia).

Aplicando el Teorema del seno en los triángulos ACD y BCD , respectivamente, se tiene:

$$\frac{AD}{\operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{d_1}{\operatorname{sen} [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)]}, \quad \frac{BD}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{d_1}{\operatorname{sen} [\pi - (\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)]}$$

Como los ángulos suplementarios tienen el mismo seno, las anteriores igualdades pueden escribirse como:

$$AD = \frac{d_1 \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)}, \quad BD = \frac{d_1 \operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} (\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}$$

Del Teorema del coseno aplicado al triángulo ABD, se tiene que:

$$d^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \beta_2 \blacksquare$$

4.5. Expresiones del área de un triángulo

○ Área de un triángulo a partir de dos lados y del ángulo que forman

El área S de un triángulo ABC de lados a , b y c puede obtenerse mediante

$$S = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} \alpha$$

DEMOSTRACIÓN

Si el ángulo α es agudo (véase la Figura 32), $\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{c}$, de donde $h = c \operatorname{sen} \alpha$, y el área es $S = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} \alpha$

Si el ángulo α es recto, el triángulo es rectángulo y $S = \frac{1}{2} b c = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} \alpha$

Si el ángulo α es obtuso, $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\pi - \alpha) = \frac{h}{c}$ y $S = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} b c \operatorname{sen} \alpha \blacksquare$

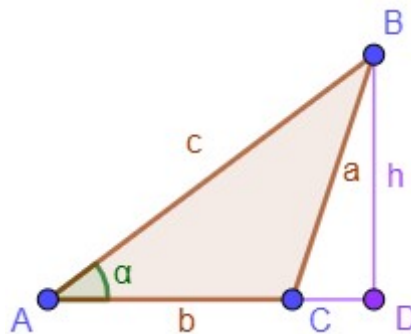


Figura 32: Área de un triángulo. Triángulo con el ángulo α agudo (elaboración propia).

Un caso práctico es la medición de superficies sin necesidad de utilizar un teodolito, sólo con la ayuda de una cinta métrica. Triangulando la superficie, el problema se reduce al cálculo del área de un triángulo en función de sus lados. Dicho problema fue resuelto por Arquímedes, pero fue Herón de Alejandría quien dio nombre a la fórmula. Su demostración es a partir de:

○ Fórmulas de Briggs

Si se denota por p el semiperímetro de un triángulo ABC, entonces:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

DEMOSTRACIÓN

La primera de las igualdades se obtiene de sustituir el valor $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, que da el Teorema del coseno, en la igualdad $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$. En efecto:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

Para la segunda, basta con:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{p(p-a)}{bc} \quad \blacksquare$$

○ **Fórmula de Herón**

Si p es el semiperímetro de un triángulo ABC, el área es:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DEMOSTRACIÓN

El resultado es inmediato a partir de las fórmulas de Briggs:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

○ **Área de un triángulo a partir de sus lados y del radio de la circunferencia circunscrita**

Si R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el área de éste es:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

DEMOSTRACIÓN

Según el Teorema del seno es $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, es decir, $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, así que el área del triángulo es $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R} \quad \blacksquare$

○ **Área de un triángulo a partir de sus lados y del radio de la circunferencia inscrita**

Si p es el semiperímetro de un triángulo ABC y r es el radio de su circunferencia inscrita, el área del triángulo ABC es:

$$S = pr$$

DEMOSTRACIÓN

Si I es el centro de la circunferencia inscrita (véase la Figura 33), el área del triángulo ABC es la suma de las áreas de los triángulos CIB , AIB y AIC , que no es otra que:

$$S = \frac{1}{2} a r + \frac{1}{2} b r + \frac{1}{2} c r = \frac{1}{2} (a + b + c) r = p r \blacksquare$$

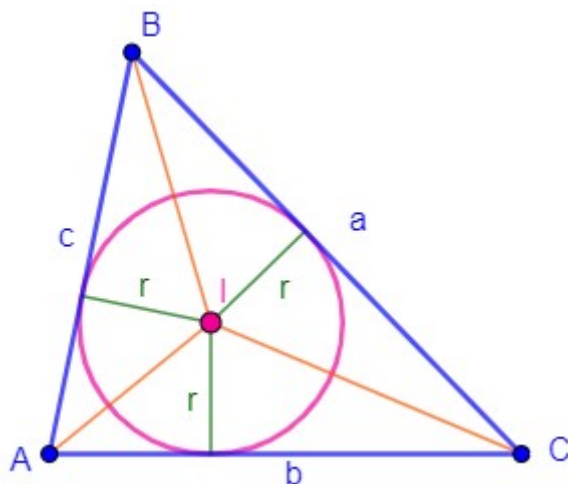


Figura 33: Circunferencia inscrita (elaboración propia).

4.6. Bibliografía

Ayres Jr. F. y Moyer R. E. (1991). *Trigonometría*. México: McGraw-Hill.

De Diego Martín, B., Llerena Achútegui, A. y Padilla Garvía, F. (2000). *Temas de oposiciones a profesores de enseñanza secundaria Matemáticas. Tomo 2*. Madrid: Deimos.

5. Fundamentación Didáctica

La trigonometría es un área de las matemáticas relacionada con la geometría pero poco estudiada en la investigación de las matemáticas. La trigonometría es esencial, tanto para el estudio geométrico, como para el conocimiento del cálculo y el análisis matemático. Por ello, en este apartado se va a tratar varias investigaciones sobre la didáctica de la trigonometría (Sánchez-Rosal, 2010; Oliveira-Reis-Júnior, Delcides-Bernardes y dos-Santos-Reis, 2018; Beirigo-Lopes y Lopes-Hardoim, 2018; Giacomone, Godino, Wilhelmi, y Blanco, 2017), y especialmente, se centrará en la tesis de Costa-Vilalta (2015).

Costa-Vilalta (2015) expuso su tesis “L’aprenentatge de la trigonometria a l’ensenyament obligatori i al batxillerat”, la cual se inscribe en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. Los objetivos de su investigación han sido detectar los errores que comete el alumnado de 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato en el aprendizaje de la trigonometría, las causas de las dificultades del aprendizajes y qué

estrategias adoptar para minimizar las discontinuidad durante la transición de los cursos. Por ello, la investigación se estructuró en torno a los siguientes objetivos específicos:

- Detectar los errores y las dificultades de tipo conceptual, procedimental, competencial y de resolución de problemas cometidos por el alumnado antes y después del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría en 4º de E.S.O.
- Analizar los errores y las dificultades en el aprendizaje de la trigonometría durante la transición de la E.S.O. al Bachillerato.
- Detectar los errores y las dificultades de tipo conceptual, procedimental, competencial y de resolución de problemas cometidos por el alumnado antes y después del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.
- Analizar los obstáculos existentes durante la resolución de problemas de la trigonometría en ambos cursos.

5.1. Errores habituales cometidos por el alumnado

Costa-Vilalta (2015) obtiene los datos mediante cuatro cuestionarios que han permitido analizar el aprendizaje de la trigonometría antes y después de trabajar el tema en 4º E.S.O. y 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, en dos centros, uno público laico y otro concertado religioso. También ha realizado entrevistas a cada uno de los profesores que han impartido las clases de trigonometría, para conocer las diferencias entre las matemáticas que imparten en los dos niveles. Las características de los centros analizados y los dos cursos, se resumen en la Tabla 7:

Centros	Centro público (laico)	Centro concertado (religioso)
Clase social de la familia	Clase media	Clase media y media-alta
Grado conflictividad del centro	Bajo	Muy bajo
Curso de 4º E.S.O.	2 grupos con 47 alumnos y 2 profesores	4 grupos con 118 alumnos y 2 profesores
Unidad a estudiar antes de la trigonometría	Semejanza (9 sesiones)	Semejanza (9 sesiones)
Sesiones de trigonometría	16 sesiones (2º trimestre)	18 sesiones (1º y 2º trimestres)
Recursos utilizados para la enseñanza-aprendizaje	Libro de texto Santillana, material en Moodle, y los recursos TIC son Geogebra y la calculadora	Libro de texto Santillana, material en Moodle, y los recursos TIC son Geogebra y la calculadora

Evaluación unidad trigonometría	Una prueba escrita, ejercicios prácticos con Geogebra y el examen final de la unidad	Ejercicios en dos pruebas escritas, ejercicios prácticos con Geogebra, ejercicios en pequeños grupos, las actividades del cuaderno y el examen final de la unidad
Atención a la diversidad	Ha trabajado con todo el alumnado en clase aprovechando el trabajo en grupo y las actividades de diferentes niveles del libro de texto	Ha impartido las clases en diferentes grupos facilitando atender los diferentes niveles y ha realizado un número diferente de actividades en función de la diversidad del alumnado
Curso de 1º Bachillerato	2 grupos con 20 alumnos y 2 profesores	3 grupos con 44 alumnos y 2 profesores
Unidad a estudiar antes de la trigonometría	Ninguna	Números reales
Sesiones de trigonometría	14 sesiones (1º trimestre)	12 sesiones (1º trimestre)
Recursos utilizados para la enseñanza-aprendizaje	Libro de texto de la editorial Vicens-Vives, material en Moodle y los recursos TIC son Geogebra y la calculadora	Libro de texto de la editorial Santillana, material en Moodle y los recursos TIC son Geogebra y la calculadora
Prueba inicial	1ª parte todo el contenido de trigonometría excepto la resolución de triángulos, y 2ª parte la resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos junto con los números complejos	Prueba al inicio de la unidad
Evaluación unidad trigonometría	2 exámenes: uno sobre trigonometría (fórmulas, identidades, ecuaciones), y otro sobre trigonometría (triángulos) y números complejos. Además, de la participación en clase	2 pruebas escritas, ejercicios prácticos con Geogebra, los ejercicios voluntarios, las actividades del cuaderno y el examen final de la unidad. Además, se siguen evaluando ejercicios de trigonometría durante el 2º y el 3º trimestre
Atención a la diversidad	Ha trabajado con todo el grupo de clase aprovechando el trabajo en grupo, las actividades con diferentes niveles del libro y clases de refuerzo para el alumnado con más dificultad	Existen diversos recursos en función de las necesidades, foros de problemas donde el alumnado plantea sus dudas y una hora semanal de refuerzo para el alumnado que lo requiera

Tabla 7: Características de los centros y su enseñanza-aprendizaje (Costa-Vilalta, 2015).

La obtención de datos se realiza a través de un cuestionario inicial para ver los conocimientos previos del alumnado en 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato, un cuestionario final para ver qué ha aprendido el alumnado de 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato tras estudiar la unidad de trigonometría, una entrevista al profesorado de matemáticas de ambos cursos y un análisis de documentos de ambos centros para analizar el currículo de matemáticas. La metodología cuantitativa se basa en los datos obtenidos tras realizar los cuestionarios iniciales y finales al alumnado donde se puede apreciar los conocimientos previos y los conocimientos adquiridos tras estudiar la unidad de trigonometría, respectivamente. Además, el estudio se complementa con otro de corte cualitativo, a partir de las entrevistas al profesorado.

Los documentos empleados, para analizarlos y obtener el currículo, han sido documentos públicos sobre programación de matemáticas del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MEC), y del Departamento de Enseñanza, así como documentos propios de los centros, como las programaciones de matemáticas.

5.1.1. Análisis cualitativo

Según se describe en Costa-Vilalta (2015), la entrevista al profesorado ha servido para conocer las diferencias entre las matemáticas de ambos cursos, en concreto, en trigonometría. La información extraída de las entrevistas no constituye la parte principal de los datos, su finalidad es ayudar a interpretar algunos de los resultados de los cuestionarios. Las preguntas del cuestionario se pueden ver en el Anexo II.

Una síntesis de las respuestas obtenidas tras las entrevistas con los profesores de los dos cursos de ambos centros, son las siguientes:

Respecto a los profesores que han impartido clase en 4º de E.S.O.:

A. Cuestiones sobre la trigonometría

El temario de matemáticas de 4º de E.S.O. es muy extenso y se dedican pocas sesiones a la trigonometría. El alumnado debe adquirir los conocimientos para aplicarlos en contextos reales; por ello, los profesores consideran que se debe explicar la trigonometría desde una visión competencial, y parten del planteamiento de un problema con contexto real, para posteriormente introducir los conceptos trigonométricos realizando problemas con contexto sencillo, hasta realizar problemas más complejos con contexto real. Ambos centros imparten la unidad de trigonometría tras la unidad de semejanza. Sin embargo, en el centro público se ha trabajado la trigonometría durante cinco semanas continuas, y en el centro concertado durante tres meses una hora semanal.

B. Cuestiones sobre el profesor que imparte la trigonometría

Los profesores de ambos centros ponen más énfasis en el concepto de razón como relación y no como definición. Los objetivos son que el alumnado sepa aplicar en cualquier contexto, el seno, el coseno y la tangente de un ángulo para relacionar los datos de un problema.

El principal obstáculo detectado ha sido la dificultad que presenta el alumnado para entender las definiciones. El alumnado tiene facilidad para aprender las definiciones pero no para entenderlas; por ello, este hecho dificulta que las sepan aplicar en diferentes contextos.

Los profesores creen que algunos alumnos presentan algunos problemas de base que deberían haberlos alcanzado durante los cursos anteriores, no siendo problemas de trigonometría sino de geometría y álgebra. Como consecuencia de ello, los profesores tuvieron que modificar la planificación inicial aumentando el número de sesiones.

C. Cuestiones sobre los alumnos

Al alumnado le resulta difícil identificar los triángulos en un contexto real y aún más si los tienen que girar o dividir; sin embargo, les resulta sencillo aplicar las fórmulas una vez identificados los ángulos. Dicha dificultad se debe a su capacidad de visión en el espacio, perdurando en el tiempo sino se adquiere práctica.

Los principales errores que comete el alumnado al estudiar el tema de trigonometría se deben a la confusión entre el seno y el coseno, entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a un ángulo, y la aplicación del concepto de semejanza de triángulos. Sin embargo, los profesores destacan que el alumnado presenta más dificultad al trabajar con álgebra que con geometría. Además, consideran que la calculadora ha facilitado la resolución de problemas de trigonometría y el uso de programas para visualizar y manipular la geometría como Geogebra.

Respecto a los profesores que han impartido clase en 1º de Bachillerato:

A. Cuestiones sobre la trigonometría

El temario de matemática de 1º de Bachillerato es muy extenso por lo que dificulta que se pueda dedicar muchas horas a trabajar la trigonometría. Los profesores consideran que la trigonometría se debe explicar desde una visión competencial pero resulta imposible debido a su ausencia en selectividad, los cambios de leyes educativas, la obligación de utilizar el libro de texto y el elevado número de alumnos por aula. Por ello, se debería reducir el temario, implantar grupos reducidos o hacer una matemática más manipulativa.

B. Cuestiones sobre el profesor que imparte la trigonometría

El profesorado destaca la aplicación y la resolución de problemas en situaciones contextualizadas, y el conocimiento y la aplicación de fórmulas trigonométricas.

Las principales dificultades no se deben al tema de trigonometría sino a la heterogeneidad del alumnado que procede de diversos centros con diferentes metodologías de aprendizaje. No todos los alumnos han aprobado las matemáticas de la E.S.O., y algunos quieren cursar estudios de ciencias de la salud por lo que no consideran necesaria una buena base matemática.

Según los profesores, las principales dificultades a la hora de impartir la unidad de trigonometría son:

- Problemas en la resolución algebraica de ecuaciones porque no razonan la técnica de cálculo que están realizando, provocando graves errores al despejar una incógnita en una igualdad.
- Problemas de cálculo, como por ejemplo al sumar fracciones.

Para superar las dificultades, los profesores consideran esencial ofrecer recursos de diferente tipología para que el alumno pueda resolver sus dudas, como por ejemplo: conceptos explicados con Geogebra, preguntas tipo test, ejercicios resueltos...

C. Cuestiones sobre el alumnado

Los aspectos más difíciles para los alumnos son:

- Problemas de comprensión de enunciados, interpretación y modelización de problemas en un contexto sencillo.
- Resolución algebraica de ecuaciones porque algunos alumnos no han razonado las técnicas de cálculo provocando graves errores al despejar las incógnitas en una igualdad.
- Resolución de ecuaciones trigonométricas y demostración de identidades trigonométricas.

La dificultad del alumnado a la hora de resolver ejercicios o problemas de trigonometría se debe a que su conocimiento matemático se ha basado en aprender técnicas de cálculo y no en comprender su utilidad. Por ello, se debe enfatizar la contextualización de problemas, fomentar que el alumnado entienda el problema, conozca las estrategias a utilizar para resolverlo, entienda cuando aplicar un determinado procedimiento y el por qué.

El profesorado cree que algunos errores perduran en el tiempo y otros no. Además, considera que los principales errores cometidos por el alumnado en trigonometría son:

- Confusión en el concepto de razón porque creen que las razones trigonométricas son una medida de longitud o de ángulo, y no una proporción.
- No entiende que hay infinitos ángulos que tienen una misma razón trigonométrica.
- Confunde las funciones trigonométricas inversas con las recíprocas.
- Se equivoca en las unidades de medida de ángulos y no lo detecta al no validar las soluciones obtenidas.
- Utiliza la relación trigonométrica fundamental en triángulos no rectángulos. Sería un problema similar a utilizar el Teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos.
- Trata las funciones trigonométricas como funciones lineales, aplicando sus propiedades.
- Emplea las fórmulas de resolución de triángulos rectángulos a triángulos no rectángulos.

En general, las dificultades del alumnado tienen relación con los conocimientos previos necesarios para trabajar la trigonometría, como la geometría. Pero se detecta una falta de comprensión e interpretación de los enunciados de los problemas, por lo que se debería trabajar de forma interdisciplinar en competencias transversales. Además, el alumnado presenta carencias en el vocabulario matemático como razón, proporcionalidad, catetos, etc.; porque representa una gran dificultad en los enunciados de problemas.

El alumnado considera la matemática resolutoria y no un medio para interpretar una situación y darle posibles soluciones, debido a que han tratado poco los problemas en un contexto. Por ello, los profesores consideran que la utilización de la calculadora y las herramientas como Geogebra pueden facilitar la comprensión de los problemas.

5.1.2. Análisis cuantitativo

En este apartado se presentará un análisis de los resultados obtenidos por Costa-Vilalta (2015) tras realizar las pruebas iniciales y finales al alumnado de 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato, y la transición de la E.S.O. al Bachillerato. En el Anexo III, se muestran las preguntas de cada prueba; y en el Anexo IV, se presentan los errores cometidos por el alumnado en cada prueba desglosados según cada actividad.

5.1.2.1. Análisis de 4º de E.S.O.

[Prueba inicial 4º de E.S.O.](#)

En general, el centro concertado obtiene mejores resultados que el centro público, tanto en respuestas sin error como en la media de notas de cada ejercicio.

Los problemas más fáciles han sido 4.2. 3.3 y 1; mientras que los problemas más difíciles han sido 4.4, 2.1, 2.2 y 5.2.

Los problemas con varios apartados donde uno depende del anterior, se observa que el primer apartado es resuelto correctamente por un mayor número de alumnos que los sucesivos apartados, debido a que si se comete un error, éste se arrastra e influye en el resto de los resultados. Mientras que los problemas en los que se aplica directamente una fórmula, es resuelto por un mayor porcentaje de alumnos.

Los principales resultados sobre las cuestiones conceptuales, procedimentales y competencial sobre la resolución de problemas en la prueba inicial de 4º de ESO son los siguientes:

➤ A nivel conceptual

En general, el alumnado considera que dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales y/o si sus lados son iguales. Es esencial que aprenda el concepto de la semejanza de figuras y la proporcionalidad entre sus medidas para realizar actividades de experimentación; comprenda conceptos como que la escala no depende de la unidad de medida, sólo relaciona tamaños, siendo el primer término la medida en el plano y el segundo la realidad. Si la escala es de reducción se debe multiplicar el denominador de la escala por la medida tomada en el plano para obtener la medida real; y si la escala es de ampliación se debe dividir el denominador de la escala por la medida tomada en el plano. También, se puede usar los factores de conversión para realizar cambios de unidad de medida.

Además, algunos alumnos no recuerdan la fórmula del área del triángulo o confunden el cateto por la hipotenusa. No comprenden el concepto de razón como el cociente entre dos cantidades o números, y la proporción como una igualdad entre dos razones.

➤ A nivel procedimental

Las principales dificultades del alumnado se deben a no representar el esquema de los triángulos y realizar incorrectamente la semejanza de triángulos. Le resulta difícil identificar los triángulos en un contexto real o si deben ser girados o divididos; sin embargo, le resulta fácil aplicar las fórmulas tras identificarlos. Esta situación perdura en el tiempo si no practican.

El alumnado no emplea el Teorema de Pitágoras correctamente o lo emplea en triángulos no rectángulos. Confunde los catetos con la hipotenusa del triángulo cuando no detecta el ángulo recto o no observa que el lado de mayor longitud se ubica frente el ángulo recto. Todos estos errores se deben a un aprendizaje memorístico. Por ello, cuando se explica es importante demostrar y generalizar el Teorema de Pitágoras

mediante los cuadrados contruidos sobre la hipotenusa y los catetos ("el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos").

El alumnado no emplea la semejanza de triángulos adecuadamente, comete errores de cálculo y de resolución de ecuaciones. Todo esto, se debe a la ausencia de sentido crítico ante los resultados tras realizar las operaciones, no observa si el resultado es coherente o no con el esquema planteado.

Algunos alumnos no comprenden el concepto de razón entre las áreas, y lo consideran como una diferencia en lugar de cociente; presentan dificultad en la resolución de ecuaciones sencillas y comenten fallos en la conversión de unidades.

➤ A nivel competencial: resolución de problemas

El alumnado representa erróneamente el esquema del problema y no aplica la semejanza de triángulos adecuadamente.

[Prueba final de 4º de E.S.O.](#)

En general, los resultados del centro concertado son similares a los del centro público, así como el porcentaje de alumnos que resuelven cada problema sin error. Se ha reducido la diferencia existente en la prueba inicial, e incluso, destaca el centro público obteniendo mejores resultados en las notas medias que el centro concertado, y en el número de respuestas dadas sin error.

Los problemas más fáciles son 4.3, 1.1, 2.1 y 1.3; así como los problemas más difíciles son 6.2, 6.3 y 6.4. En los problemas que se resuelven directamente sin que dependa de un apartado previo, se obtiene mejores resultados que los que dependen de otros apartados.

Los principales resultados de la prueba final de 4º de E.S.O., que evalúa el proceso de aprendizaje de la trigonometría en este curso, son los siguientes:

➤ A nivel conceptual

El alumnado no comprende los conceptos de razón de semejanza y de triángulos semejantes. En los triángulos, no dividen sus lados homólogos. En un triángulo rectángulo, no tiene claro los conceptos de hipotenusa y de cateto. Así como, confunde las razones trigonométricas y el concepto de razón trigonométrica con el de ángulo debido a que no comprende que todo radica en la proporción de los lados de un triángulo rectángulo.

Además, cree que el valor del seno y el coseno puede ser superior a uno porque no entiende que las longitudes del cateto y la hipotenusa es un cociente donde el numerador es menor que denominador.

Sólo unos pocos alumnos no comprenden la relación fundamental de la trigonometría o el concepto de ángulo complementario o el concepto de triángulo rectángulo o aplican la linealidad en las funciones trigonométricas al multiplicar dos ángulos en una razón trigonométrica, en lugar de dos razones trigonométricas.

➤ A nivel procedimental

El alumnado no representa el esquema de los triángulos correctamente, no aplica bien el Teorema de Thales, el Teorema de Pitágoras (confunden la hipotenusa y los catetos) o las razones trigonométricas (confunde el ángulo por su valor), o las fórmulas trigonométricas, o considera que el seno y el coseno de un ángulo puede ser superior a uno, o comete errores de cálculo y en la resolución de ecuaciones sencillas.

➤ A nivel competencial: resolución de problemas

El alumnado falla al despejar la incógnita de la ecuación, o confunde un lado del triángulo por otro, o confunde las razones trigonométricas, u opera con ángulos y lados sin emplear una razón trigonométrica o no entiende el concepto de ángulo complementario.

Algunos alumnos no representan bien el esquema de los triángulos resultantes, y no entienden la longitud de los lados. Cometen errores al resolver el sistema de ecuaciones, errores de cálculo y álgebra (propiedad distributiva, no usan paréntesis, cálculo del mínimo común múltiplo (m.c.m.) o despejar la incógnita de una ecuación). No diferencian los triángulos rectángulos o no rectángulos ni qué fórmulas aplicar en cada caso.

[Comparación de la prueba inicial y final de 4º de E.S.O.](#)

La prueba inicial y la final de 4º de E.S.O., para recoger información, son diferentes debido a que la prueba inicial es de diagnóstico y la final evalúa el proceso de aprendizaje.

La prueba inicial permite mostrar evidencias de los conocimientos del alumnado antes de iniciar el tema de trigonometría. Se trata de conocimientos adquiridos en los cursos anteriores sobre geometría. Mientras que la prueba final evalúa el proceso de aprendizaje durante el tema de trigonometría y los conocimientos adquiridos por el alumnado.

Los resultados obtenidos en la prueba inicial en 4º de E.S.O. son mejores que en la prueba final debido a que ha aumentado la dificultad de los problemas. Los ejercicios de aplicación directa de una fórmula son resueltos por un mayor porcentaje de alumnos en comparación a los ejercicios con varios apartados. Los problemas con un esquema son resueltos por un mayor porcentaje de alumnos. Los problemas con mayor nivel de abstracción son resueltos por un menor porcentaje de alumnos.

Las principales dificultades del alumnado a la hora de resolver problemas son:

- La interpretación de los enunciados.
- La elaboración del esquema del problema.
- La aplicación de la semejanza de triángulos (Teorema de Thales).
- La aplicación del Teorema de Pitágoras.
- La aplicación de la propiedad distributiva.
- Errores de cálculo o de resolución de ecuaciones.
- La utilización de fórmulas para realizar cálculos.
- No tener claro conceptos como: cateto, hipotenusa, razón de semejanza, razón trigonométrica, ángulo complementario,...
- Conversión de unidades o emplear diferentes unidades a la vez.
- La utilización de la razón trigonométrica necesaria para calcular determinados datos.
- Escasa precisión en el resultado.

Errores que se reducen, que perduran o aparecen

Tras analizar los principales errores que comete el alumnado al resolver la prueba inicial y la prueba final de 4º de E.S.O., se muestran los errores que se reducen o se mejoran, los que perduran en el tiempo y los que aparecen en la prueba final.

En general, muchos errores se reducen porque el número de alumnos que cometen un tipo de error se disminuye pero no se elimina. Algunos de dichos errores tienen sus principales causas en:

- No comprender el concepto de triángulos semejantes.
- No aplicar la semejanza de triángulos correctamente.
- No aplicar el Teorema de Pitágoras correctamente.
- No comprender algunos conceptos como razón, cateto, hipotenusa o escala, entre otros.
- Errores al resolver ecuaciones.
- No aplicar la fórmula para calcular el área del triángulo correctamente.
- Utilizar diferentes unidades a la vez.

Los errores que han perdurado en el tiempo son aquellos cuyas principales causas son:

- No realizar el esquema o dibujo de los triángulos resultantes de la figura.
- No aplicar la semejanza de triángulos (Teorema de Thales) correctamente porque no respetan la correspondencia entre los lados.
- No aplicar el Teorema de Pitágoras correctamente porque no tienen claro la hipotenusa ni los catetos, ni recuerdan que los triángulos deben ser rectángulos.

- No comprender el concepto de triángulos semejantes.
- Confundir la hipotenusa con la altura del triángulo.
- Usar datos calculados previamente en otros apartados, con la consecuencia de poder arrastrar algún error en los cálculos posteriores.
- Despejar incorrectamente la incógnita de una ecuación sencilla o resolver mal una ecuación sencilla.
- Errores de cálculo.
- Escasa precisión o exactitud en los resultados debido al uso de pocos decimales o a redondear los decimales.

Los errores que surgen en la prueba final del 4º de E.S.O. son aquellos cuyas principales causas son:

- Confundir una razón trigonométrica por otra.
- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo, y no aplicarlas correctamente.
- Operar con ángulos y lados sin la razón trigonométrica correspondiente.
- Utilizar el valor del seno, coseno o tangente de un ángulo como el ángulo.
- No calcular correctamente el valor del ángulo.
- No aplicar correctamente la relación fundamental de la trigonometría.
- Creer que los ángulos de un triángulo tienen el mismo valor (45º).
- No usar correctamente las fórmulas trigonométricas ni las razones trigonométricas.
- Creer que el valor del seno o del coseno puede ser superior a uno.
- Calcular los ángulos complementarios erróneamente.
- Emplear el seno de un ángulo sin considerar el ángulo, sólo usa los ángulos y los lados como una proporcionalidad.
- No comprender el concepto de razón trigonométrica: operar ángulos y longitudes sin una razón trigonométrica. Así como, operar con ángulos y lados a la vez.
- No usar la propiedad distributiva correctamente.
- No operar correctamente con el m.c.m. al resolver ecuaciones.
- No resolver correctamente el sistema por el método de sustitución.
- Pensar que la razón trigonométrica del producto de ángulos es igual al producto de razones trigonométricas iguales.
- No comprender los conceptos de triángulo rectángulo y no rectángulo, ni qué aplicar en cada caso.

5.1.2.2. Transición de 4º E.S.O. a 1º de Bachillerato

[Prueba inicial 1º de Bachillerato](#)

Tras el periodo de vacaciones estivales, al alumnado que ha elegido continuar el itinerario del Bachillerato de Ciencias y Tecnología se le vuelve a realizar la prueba final de 4º de E.S.O. como prueba inicial en el nuevo curso.

En general, se observa una mejora en los resultados obtenidos por el centro concertado y un descenso en el centro público.

Los principales resultados sobre las cuestiones conceptuales, procedimentales y de carácter competencial sobre la resolución de problemas formuladas en el cuestionario inicial 1º Bachillerato son los siguientes:

➤ A nivel conceptual

El alumnado no comprende los conceptos de semejanza, de triángulos semejantes y de razón trigonométrica. No representa los triángulos resultantes del problema y no aplica el Teorema de Thales correctamente. Aún, algunos no comprenden el concepto de razón trigonométrica porque usan el valor de la razón de un ángulo como el mismo ángulo; aunque este error se ha reducido con respecto a 4º de E.S.O. Además, consideran que el seno o el coseno pueden tomar un valor superior a uno porque no asimilan que se trata del cociente de dos longitudes con el numerador inferior al denominador.

El alumnado no resuelve los ejercicios correctamente porque no entiende las definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente o se las han aprendido de memoria. Confunde el ángulo complementario con el suplementario y viceversa, o un triángulo rectángulo con uno no rectángulo, la hipotenusa con los catetos y no aplica las fórmulas correctas.

Algunos de los errores coinciden con los errores de la prueba inicial de 4º de E.S.O.; por ello, se debería emplear los errores como motivación y explorar unas matemáticas creativas.

➤ A nivel procedimental

El alumnado no representa bien el esquema de los triángulos planteados en los problemas, no aplica las definiciones de seno, coseno y tangente adecuadamente, así como comete errores al resolver ecuaciones o al realizar cálculos con o sin la calculadora. Los resultados tras realizar los ejercicios y los problemas son pocos precisos debido al uso de pocos decimales. También, al no comprender el concepto de razón trigonométrica y su utilidad, opera con ángulos y longitudes sin emplear una razón trigonométrica.

Algunos errores procedimentales no se deben al aprendizaje de trigonometría sino al álgebra, la resolución de ecuaciones, al cálculo y la falta de precisión en los resultados. Además, se detectan errores técnicos como los errores de cálculo al

manipular símbolos algebraicos y al ejecutar algoritmos. Por ello, se debería fomentar la resolución de ejercicios y la manipulación de expresiones más abstractas; se debe debatir con el alumnado sus concepciones erróneas.

➤ A nivel competencial: resolución de problemas

Respecto al enunciado, todos los problemas que presentan un esquema ayudan a interpretarlo y a resolverlo con facilidad. Pero el planteamiento del problema es incorrecto por confundir las razones trigonométricas, el ángulo complementario, los triángulos no rectángulos, no considerar la distancia a calcular, o no representar el esquema de los triángulos resultantes.

Respecto a la resolución del problema, el alumnado falla al despejar la incógnita de una ecuación, en los cálculos, al resolver sistemas de ecuaciones, no recuerda la prioridad de las operaciones, ni la propiedad distributiva, ni cómo realizar el m.c.m. o realiza operaciones con longitudes y ángulos sin emplear una razón trigonométrica.

[Comparación de la prueba final de 4º de E.S.O. y la prueba inicial de 1º de Bachillerato](#)

A nivel general, los resultados obtenidos en la prueba inicial de 1º de Bachillerato son mejores que en la prueba final de 4º de E.S.O. Sin embargo, mientras el centro concertado ha mejorado considerablemente con respecto al curso anterior, el centro público ha empeorado, siendo mejores los resultados del centro concertado que los del público.

Los ejercicios donde se aplica directamente una fórmula se resuelven correctamente por un mayor número de alumnos; mientras que los problemas con varios apartados dependientes entre ellos, se resuelven por un número menor. Los problemas con un esquema se resuelven correctamente por un porcentaje mayor de alumnos; pero si aumenta el nivel de abstracción, disminuye el porcentaje de alumnos.

Las dificultades del alumnado para resolver los problemas son:

- Mala comprensión de los enunciados.
- Representación de dibujos o esquemas del problema.
- Uso de la semejanza de triángulos (Teorema de Thales).
- Uso del Teorema de Pitágoras.
- Uso de la propiedad distributiva.
- Fallos de cálculo básicos o de resolución de ecuaciones.
- Uso de fórmulas para realizar cálculos.
- No entender los conceptos de cateto, hipotenusa, razón trigonométrica, razón de semejanza, ángulo complementario...
- Confundir las razones trigonométricas para calcular los datos.
- Resultados con poca precisión.

Errores que se reducen, perduran o aparecen

Tras analizar los principales errores cometidos por el alumnado al resolver la prueba final de 4º de E.S.O. y la prueba inicial de 1º de Bachillerato, se muestran los errores que se reducen o mejoran, los que perduran en el tiempo y los que aparecen en la prueba inicial de 1º de Bachillerato.

Los errores que se reducen o mejoran son aquellos cuyas causas principales son:

- No utilizar la semejanza de triángulos (Teorema de Thales) correctamente porque no respeta la correspondencia entre los lados.
- No comprender el concepto de triángulos semejantes.

Aunque perduran la mayoría de los errores, se reduce el número de alumnos que los cometen.

Los errores que perduran en el tiempo son aquellos cuyas causas principales son:

- No representar el esquema o dibujo de los triángulos resultantes de la figura.
- Confundir una razón trigonométrica por otra.
- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo, y no emplearlas correctamente.
- No despejar correctamente la incógnita o no resolver una ecuación sencilla.
- No usar correctamente las fórmulas trigonométricas ni las razones trigonométricas.
- Considerar el valor del seno, coseno o tangente de un ángulo como el ángulo.
- Aplicar el Teorema de Pitágoras incorrectamente porque confunden la hipotenusa y los catetos, así como el hecho de que los triángulos deben ser rectángulos.
- Operar con ángulos y lados sin una razón trigonométrica.
- Creer que los ángulos de un triángulo tienen el mismo valor (45°).
- No comprender el concepto de razón trigonométrica porque operan ángulos y longitudes sin utilizar una razón trigonométrica.
- Creer que el valor del seno y del coseno puede ser superior a uno.
- Confundir la hipotenusa con la altura del triángulo.
- No calcular los ángulos complementarios correctamente.
- No utilizar la propiedad distributiva correctamente.
- No resolver correctamente el sistema por el método de sustitución o igualación.
- No calcular el valor de ángulo correctamente o con poca exactitud.
- Errores de cálculo.
- Obtener los resultados con poca precisión o exactitud debido al uso de pocos decimales o al redondear los decimales.

Los errores que aparecen en la prueba inicial de 1º de Bachillerato son aquellos cuyas principales causas son:

- Errores de cálculo al utilizar la calculadora.
- Errores de cálculo al obtener el valor del ángulo.
- No comprender el concepto de triángulo rectángulo y no rectángulo, ni saber qué fórmulas aplicar en cada caso.

5.1.2.3. Análisis de 1º de Bachillerato

Prueba final 1º de Bachillerato

Los resultados obtenidos en la prueba final de 1º de bachillerato están por debajo del cinco. Los resultados han empeorado considerablemente con respecto a la prueba inicial. El alumnado del centro concertado ha empeorado excesivamente, pero el alumnado del centro público ha mejorado levemente.

Una vez más, los ejercicios o problemas calculados directamente, sin que dependan de otros apartados previos, han obtenido mejores resultados que aquellos que dependen de otros apartados. Además, el grado de complejidad de esta prueba es superior a las anteriores.

Los principales resultados de la prueba final de 1º de Bachillerato, que evalúa el proceso de aprendizaje de la trigonometría en este curso, son los siguientes:

➤ A nivel conceptual

Se produce un descenso del alumnado que comete errores debido a la mala comprensión de los conceptos, aunque aparecen nuevas dificultades.

El alumnado memoriza las fórmulas y confunde las fórmulas trigonométricas; no comprende la relación fundamental de la trigonometría ni los conceptos sobre el círculo goniométrico. Además, considera que el seno y el coseno pueden tomar valores superiores a uno o inferiores a menos uno debido a que no razona que se trata de un cociente de dos longitudes o coordenadas, y no asocia los signos positivos o negativos de las coordenadas y su representación en una circunferencia de radio uno. No tiene en cuenta el signo de la razón trigonométrica según el cuadrante al que pertenece o no comprende que existen infinitos ángulos con la misma razón trigonométrica. Todo esto, se debe a no comprender el seno y el coseno como coordenadas, y asociarle los signos cuando los ángulos no son agudos.

El alumnado no recuerda los conceptos de trapecio isósceles, de perímetro o de triángulo rectángulo o no, ni saben qué fórmulas aplicar. Memoriza los conceptos de seno, coseno y tangente de un ángulo porque le resulta abstracto; se trata de dificultades de los procesos de desarrollo cognitivo. Las razones trigonométricas son un cociente o una relación entre los lados de un triángulo rectángulo y distancias

dirigidas en el plano cartesiano o coordenadas del punto de intersección entre el lado del ángulo y el círculo goniométrico; sin embargo, el alumnado confunde el ángulo y la razón trigonométrica debido a que considera la razón trigonométrica de un ángulo como el ángulo porque no entiende que la proporción de los lados de un triángulo rectángulo es la base de la trigonometría. Además, aplica la linealidad en las funciones trigonométricas.

Algunos alumnos consideran el lenguaje matemático como aprender una lengua extranjera, tienen errores de conceptos, símbolos y vocabulario.

➤ A nivel procedimental

El alumnado disminuye sus errores debido a alcanzar los procedimientos, pero aún tiene dificultades al simplificar y al desarrollar algebraicamente las expresiones como una suma o diferencia al cuadrado, o expresiones como $\sin x$, $\cos x$, o $\operatorname{tg} x$ que no sabe operar. Debido a la poca deducción y a la excesiva memorización, comete errores en el uso de las fórmulas trigonométricas. Aplica erróneamente la propiedad distributiva, o despeja mal una incógnita de una ecuación, o simplifica sin considerar la prioridad de las operaciones. Olvida que no todas las funciones son inyectivas, como las trigonométricas; también olvida los paréntesis en una expresión ante un signo negativo y no aplica la propiedad distributiva.

El alumnado presenta dificultades al aplicar la relación fundamental de la trigonometría ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), o al demostrar las identidades trigonométricas o al utilizar las fórmulas trigonométricas. Emplea las fórmulas del Teorema del coseno, del Teorema del seno y despeja la incógnita de dichas fórmulas incorrectamente.

Además, no opera bien la fórmula del perímetro del trapecio, o no representa bien el esquema de los triángulos del problema, o no sitúa bien las variables de los lados en función de los ángulos debido a la memorización de las fórmulas, y no considera las condiciones de su aplicación. Comete errores técnicos al realizar cálculos con la calculadora o al utilizar pocos decimales en los resultados. Continúa cometiendo errores al operar con fracciones debido al mal uso del m.c.m., errores con los signos, los cuadrados de todos los términos de las fracciones o no respetar la prioridad en las operaciones.

Al alumnado de 1º de Bachillerato le resulta difícil la resolución de ecuaciones y la demostración de identidades trigonométricas, presenta más dificultad de aritmética que de álgebra por una falta de percepción del concepto. Así como, comete errores al no usar las fórmulas adecuadamente. Habitualmente, se enseñan todas las operaciones básicas sin realizar énfasis por separado, y pueden confundir la propiedad distributiva con la asociativa del producto. En 1º de bachillerato se aumenta el nivel de abstracción y de dificultad de los contenidos; esto se refleja en los resultados

obtenidos. El profesorado considera que el alumnado llega con un nivel bajo de la E.S.O. y debe alcanzar un buen nivel para llegar a la Universidad.

➤ A nivel competencial: resolución de problemas

Respecto al planteamiento del problema, el alumnado no divide bien los triángulos resultantes, confunde las razones trigonométricas o no detecta la distancia a calcular.

Respecto a la resolución del problema, el alumnado no aplica la propiedad distributiva y obtiene un resultado negativo para la distancia, opera mal las fracciones o el m.c.m., no prioriza las operaciones y despeja mal la incógnita de una ecuación, resuelve los triángulos no rectángulos como si fueran rectángulos o aplica la linealidad en la funciones trigonométricas. Además, los resultados son poco exactos al utilizar un solo decimal durante las operaciones.

Comparativa de las pruebas inicial y final de 1º Bachillerato

Los resultados obtenidos en la prueba inicial de 1º de Bachillerato son mejores que en la prueba final. A pesar de que los resultados del centro concertado son mejores que los del centro público en la prueba inicial, en la prueba final el centro público obtiene mejores resultados que el concertado.

Los ejercicios de aplicación directa con una fórmula son resueltos por un mayor número de alumnos que en el caso de los problemas con varios apartados dependientes unos de otros. Además, si el problema presenta un esquema, es resuelto por un mayor número de alumnos; sin embargo, si aumenta el grado de abstracción, disminuye el número de alumnos que lo resuelven correctamente.

Los problemas con alguna demostración o con aplicación de complejas fórmulas trigonométricas son resueltos por pocos alumnos. El alumnado comete errores al despejar las incógnitas de fórmulas complejas o si no son ecuaciones de primer grado.

El alumnado presenta las siguientes dificultades al resolver los problemas:

- Despejar la incógnita de una ecuación.
- No comprender algunas fórmulas trigonométricas.
- Simplificar expresiones trigonométricas.
- No utilizar paréntesis al sustituir un término por una expresión.
- Utilizar la propiedad distributiva.
- No aplicar la prioridad en las operaciones.
- No considerar la prioridad de las operaciones.
- No considerar el signo de la razón trigonométrica según el cuadrante perteneciente.
- No usar fórmulas correctamente al realizar los cálculos.

- No comprender el Teorema fundamental de la trigonometría ($\sin 2x + \cos 2x = 1$, en lugar de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).
- No creer que el seno y el coseno de un ángulo está entre menos uno y uno.
- Realizar el esquema del problema.
- Interpretar la redacción o los enunciados de los problemas.
- Errores de cálculo o de resolución de ecuaciones.
- No comprender algunos conceptos como razón trigonométrica, perímetro, o trapecio isósceles, entre otros.
- No aplicar las fórmulas adecuadas al resolver triángulos rectángulos y no rectángulos.
- Escasa precisión en los resultados.

Errores que se reducen, perduran o aparecen

Tras analizar los errores cometidos por el alumnado al resolver la prueba inicial y la prueba final de 1º de Bachillerato, se muestran una serie de errores que se reducen o mejoran, perduran o aparecen en la prueba final.

Las causas principales de los errores que se reducen o mejoran son:

- No comprender el concepto de triángulos semejantes.
- No comprender el concepto de razón trigonométrica de un ángulo.
- No usar razones trigonométricas correctamente, o confundir una razón por otra.
- No utilizar el Teorema de Pitágoras correctamente porque confunde la hipotenusa y los catetos, o el hecho de que debe tratarse triángulos rectángulos.
- Creer que los ángulos de un triángulo tienen el mismo valor (45°).
- Errores de cálculo al emplear la calculadora.
- No resolver correctamente un sistema por el método de sustitución o igualación.

A pesar de que algunos errores continúan, existen menos alumnos que los cometen.

Las causas principales de los errores que perduran en el tiempo son:

- No sacar factor común al simplificar las expresiones de una igualdad.
- No desarrollar correctamente el cuadrado de una diferencia.
- No despejar bien la incógnita de una ecuación.
- Errores al simplificar una expresión.
- No aplicar bien la propiedad distributiva.
- Errores al simplificar expresiones: simplificar un término que está sumando por otro que está multiplicando.

- No priorizar las operaciones durante los cálculos.
- No usar paréntesis al sustituir un término por una expresión.
- Errores de cálculo.
- Usar valores erróneos calculados previamente.
- No comprender que el seno de un ángulo no puede ser inferior a menos uno ni superior a uno.
- No representar el esquema o dibujo de los triángulos resultantes de una figura.
- No comprender el concepto de razón trigonométrica: operar ángulos y longitudes sin una razón trigonométrica.
- No comprender el concepto de triángulo rectángulo y no rectángulo, ni saber qué fórmulas aplicar.
- No priorizar las operaciones al resolver ecuaciones.
- No despejar bien las incógnitas o errores al resolver la ecuación.
- Escasa precisión o exactitud en los resultados debido al uso de pocos decimales o a redondear los decimales.

Las causas principales de los errores que aparecen en la prueba final de 1º de Bachillerato son:

- No comprender algunas fórmulas trigonométricas.
- Errores al aplicar la fórmula del Teorema del coseno.
- No considerar el signo de la razón trigonométrica según el cuadrante correspondiente.
- No comprender el Teorema fundamental de la trigonometría ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, en lugar de $\sin 2x + \cos 2x = 1$), y no aplicarlo correctamente.
- Aplicar la linealidad en las funciones trigonométricas como $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.
- No despejar bien la incógnita $\cos \alpha$ en el Teorema del coseno.
- No diferenciar el coseno al cuadrado de un ángulo del coseno del ángulo doble.

5.1.3. Conclusiones

Costa-Vilalta (2015) concluye sus análisis cualitativo y cuantitativo considerando que el alumnado puede aprender a partir de los errores; así como, al cometer errores demuestra su conocimiento incompleto y permite ser ayudado por el profesorado o por otros compañeros. Los errores son una fuente de conocimiento que se puede explotar para profundizar en el aprendizaje de las matemáticas.

El profesorado debe motivar al alumnado hacia una cultura de reflexión sobre las ideas erróneas y orientarlo hacia conceptos correctos. Es más, los errores del alumnado debe servir al profesorado como una información sobre las dificultades del aprendizaje de las matemáticas que se debe reforzar.

En el estudio se observa que los alumnos de los dos centros analizados cometen los mismos fallos, por lo que no se considera que depende del profesor que imparte la asignatura.

5.2. Métodos didácticos a adoptar para mejorar la enseñanza - aprendizaje

Costa-Vilalta (2015) cita factores que dependen del profesorado, de la planificación y de los recursos para obtener unos resultados u otros; y presenta unas recomendaciones a seguir antes de iniciar el tema de trigonometría, durante su impartición y al finalizarlo.

Antes de iniciar el tema se debe considerar la temporización, la organización, el diseño del tema, la tipología de las actividades de aprendizaje a realizar y los recursos disponibles. En el curso de 4º de E.S.O. se debe impartir la unidad de trigonometría tras trabajar el tema de semejanza para que el alumnado tenga claro los conocimientos de geometría. Sin embargo, en 1º de Bachillerato se debería impartir durante el primer trimestre tras trabajar con los números reales y se haya repasado los aspectos del cálculo.

Para obtener mejores resultados, la unidad se debe impartir durante varias sesiones seguidas (tres sesiones semanales) y no durante un periodo de tiempo espaciado (una hora semanal). Además, se debe impartir antes que otras materias como tecnología o física donde se necesiten dichos contenidos porque en matemáticas se aprende los conceptos y los procedimientos mientras que en otras áreas trabajarán sus aplicaciones prácticas. Por ello, debe existir una buena coordinación con el profesorado de otras materias para motivar al alumnado durante el aprendizaje.

El centro educativo debe reducir las dificultades de aprendizaje mediante los materiales curriculares, los recursos y los estilos de aprendizaje; debe distribuir bien las sesiones y los recursos para mejorar los resultados; iniciar el tema con un breve repaso de lo trabajado en cursos anteriores sobre semejanza y geometría, para continuar con las diferentes razones trigonométricas y finalizar aplicándolos a problemas de diferente complejidad.

Respecto al diseño del tema, el profesorado no debe precipitar el aprendizaje de nuevo contenido si el alumnado no está preparado, debe respetar las etapas de desarrollo en los sistemas cognitivos. El profesorado debe realizarle demostraciones geométricas para ayudarle a recordar los teoremas que memorizan (Teorema de Pitágoras), así como evitar una excesiva complejidad de los signos matemáticos.

Se debe revisar los aspectos estudiados previamente para que el alumnado lo recuerde y no se equivoque; también, se debe realizar una evaluación inicial para conocer los conocimientos previos antes de introducir nuevos conceptos. Además,

tanto el profesorado de 4º de E.S.O. y como el de 1º de Bachillerato debe estar coordinado para evitar discontinuidades en el temario. Los errores cometidos por el alumnado no aparecen al azar sino que surgen de un marco conceptual según los conocimientos previos; por ello, los errores son fuentes de aprendizaje, son una contribución positiva para el proceso de aprendizaje y sirven para explorar unas matemáticas creativas.

Respecto a la tipología de las actividades, al planificar la unidad, se debe preparar ejercicios de diferentes niveles para atender las necesidades de todos los alumnos debido a que en el aula hay alumnos excepcionales en matemáticas y alumnos con dificultades de aprendizaje. Habría que realizar ejercicios y problemas tanto de aplicación directa de fórmulas como de razonamiento matemático, y no sólo mecánico. Así como, mostrar el procedimiento para deducir las fórmulas sin memorizarlas para fomentar más la comprensión que la memorística, sobre todo, para los alumnos que quieren continuar sus estudios de tipo científico o tecnológico.

Además, se debe resolver ejercicios donde se ha cometido errores de conceptos y procedimientos. Para llevar a cabo un problema, deben recordar los pasos a seguir para resolver los ejercicios o problemas, leer despacio los enunciados para entender qué se solicita, realizar un esquema, analizar qué se solicita, realizar los cálculos y evaluar la solución tras obtener el resultado y valorar otras propuestas. Se debe enseñar al alumnado a ser críticos con los resultados obtenidos, a razonar si los resultados son correctos o no tienen lógica.

Para que el alumnado vea la aplicación real se debe realizar modelados, y aplicar los conocimientos a contextos reales. Se deben explicar los nuevos conceptos mediante problemas prácticos.

Respecto a los recursos, el profesorado cree que el alumnado conoce el funcionamiento de la calculadora pero se comete muchos errores por su desconocimiento; por ello, se debe practicar las diferentes operaciones y enseñar a interpretar los resultados obtenidos tras realizar las diferentes operaciones.

Además, algunos alumnos necesitan diversos recursos TIC como la calculadora, Geogebra, Wiris, etc.; y recursos didácticos como preguntas tipo test, simulaciones, actividades manipulativas, ejercicios resueltos, ejercicios competenciales, etc. Así, podrán resolver sus dudas dentro y fuera del aula. Se debe proporcionar material tanto para alumnos con dificultades de aprendizaje como para los que presentan altas capacidades. El profesorado debe organizar los espacios y los tiempos de consulta para ayudar tanto a los que tienen dificultades que superar como a los que quieren profundizar más.

Durante la impartición del tema, se deben considerar aspectos sobre la gestión del aula y la adaptación de los contenidos a las necesidades del alumnado. El alumnado debe compartir sus dudas, errores y carencias con los compañeros que destaquen más en matemáticas; por ello, las mesas deben estar situadas para facilitar el trabajo colaborativo y cooperativo, fomentar la ayuda entre iguales.

La metodología de enseñanza debe estar relacionada tanto a los elementos organizativos del centro como a la organización curricular. Se debe adaptar el lenguaje a las capacidades y comprensión del alumnado, secuenciar las unidades de aprendizaje de forma lógica, respetar los diferentes ritmos de trabajo en clase y adoptar un enfoque cognitivo de las dificultades de aprendizaje sin etiquetar al alumnado.

Conviene diversificar las actividades, y que no sean repetitivas porque hay alumnado que aprende mejor con uno u otro tipo de actividades; se debe llegar a todos los estilos de aprendizaje. Pero para ello, se debe conocer a cada alumno para atender la diversidad, tanto para superar sus dificultades durante el proceso de aprendizaje como para inventarse nuevas formas de atender a los que pueden ir más allá de lo enseñado en el aula; y no es necesario esperar a la evaluación final para tomar medidas de apoyo, sino que se establecerán desde el momento en el cual se detecta la necesidad.

A diario, debe existir una interacción entre el profesorado y el alumnado para detectar las dificultades de aprendizaje y evitar los obstáculos. La eficacia se alcanza con una evaluación y diagnóstico. El profesorado debe fomentar los debates en el grupo para ayudar a eliminar los errores y forzar una comprensión conceptual adecuada.

Con frecuencia, el profesorado da por supuesto que el alumnado sabe cómo proceder para resolver un ejercicio o problema, pero se debe dedicar tiempo para recordar los pasos a seguir. El alumnado debe aprender a leer los enunciados e interpretarlos, elaborar un esquema, analizar cómo calcular lo solicitado, y finalmente, realizar el cálculo. Se deben establecer rutinas para las habilidades básicas, y tras ser interiorizadas, se realizarán de forma creativa.

Los resultados de la prueba final mejorarán si se realizan pequeñas pruebas que les ayuden a reflexionar lo que han asimilado o no, y evaluar en diferentes momentos con diversas actividades de aprendizaje. Incluso, el uso de Moodle y de foros puede ayudar a superar las dificultades, sobre todo, fuera del aula.

Después de trabajar el tema, es decir, tras finalizar el tema, se debe considerar que la evaluación sea transparente con respecto cómo se evalúa y el qué, compartir los criterios de evaluación y las propuestas para ayudar a resolver los problemas

detectados. Las pruebas de los temas más difíciles se deberían fraccionar y compartir su contenido con otros temas menos complejos.

Al redactar, se debe considerar el planteamiento de las preguntas del cuestionario porque se deben indicar los datos en el mismo orden en que deben emplearse para resolver el ejercicio; e incluso, se debe presentar un esquema para facilitar la resolución debido a que muchos alumnos tienen dificultades al elaborar el esquema. Además, se debería plantear problemas de solución múltiple que se puedan resolver de diversas formas.

Finalmente, para no olvidar los contenidos de trigonometría es conveniente utilizar algunos aspectos en unidades posteriores, como en 1º de Bachillerato donde la trigonometría está presente en los números complejos, la geometría analítica en el plano, el lugar geométrico, las funciones o las funciones trigonométricas.

5.3. Otras investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría

En este apartado, se presentan varias investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, las cuales se estructuran en: problemas que abordan, metodología que usan y resultados que obtienen.

Sánchez-Rosal (2010) considera que el bajo nivel de rendimiento académico durante el estudio del tema de trigonometría se debe a una práctica docente, en la cual se utiliza siempre las mismas estrategias y recursos tradicionales pertenecientes a la enseñanza tradicional. Por ello, es necesario utilizar estrategias de enseñanza utilizando las TICs para incrementar el interés del alumnado en el tema. Para llegar a esta afirmación, realizó dos cuestionarios, uno de preguntas cerradas al alumnado (953 alumnos), y otro de respuestas actitudinales de tipo Likert al profesorado (11 docentes).

La estrategia educativa más utilizada es la exposición, donde el alumnado copia el tema y los ejercicios realizados en clase; por consiguiente, el alumnado tiene un rol pasivo y el profesorado es el transmisor de conocimientos con una comunicación unidireccional. En menor medida, el profesorado utiliza una estrategia de discusión para validar algún enunciado matemático. El profesorado no fomenta el desarrollo de las competencias matemáticas y comunicativas en el alumnado.

Los recursos didácticos utilizados son la pizarra en primer lugar, y el libro de texto en segundo lugar; es decir, apenas se utilizan los recursos TIC a pesar de disponer de ordenadores en los centros educativos.

Actualmente, se debe vincular la educación del alumnado con la vida global y los medios de comunicación. El profesorado debe ser consciente del cambio de aprendizaje y propiciar actividades escolares donde se utilicen vídeos, el ordenador e Internet. A la hora de diseñar el material educativo, se debe planificar según una teoría de aprendizaje y se recomienda fomentar un aprendizaje significativo al estudiar los contenidos de la trigonometría. El uso de las TICs en el proceso de enseñanza-aprendizaje ofrece al alumnado la interacción y manipulación de contenidos y problemas matemáticos.

Sánchez-Rosal (2010) implementa una estrategia didáctica basada en las TICs donde se debe desarrollar las siguientes fases:

- Planear las competencias del alumnado tras el aprendizaje de los contenidos de la trigonometría.
- Elegir los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que se van a impartir.
- Desarrollar un plan de acción a seguir por el profesorado durante las clases en el aula TIC.

Estas nuevas estrategias en el proceso de enseñanza-aprendizaje generan un alumnado autónomo, crítico, dinámico y con actitud positiva y creativa hacia las innovaciones tecnológicas.

Según Sánchez-Rosal (2010), las competencias que adquiere el alumnado tras el aprendizaje de la trigonometría son:

➤ Competencias matemáticas:

- Identificar las diferentes razones trigonométricas en diversos contextos.
- Comprender los problemas trigonométricos.
- Exponer y justificar las soluciones tras resolver los problemas.

➤ Competencias comunicativas:

- Tener coherencia al exponer de forma escrita u oral las razones trigonométricas.
- Tener creatividad al utilizar estrategias.
- Propiciar una comunicación entre alumno-profesor y alumno-alumno.

Oliveira-Reis-Júnior, et al. (2018) consideran que las representaciones tienen una función importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, esencialmente a lo que se refiere a los conceptos de la trigonometría. La interacción y la viabilidad suministradas por el uso de las nuevas TIC, en concreto, de los entornos

informáticos de aprendizaje como el software educativo y gratuito Geogebra, son recursos fundamentales en el proceso de comprensión de conceptos de un determinado objeto matemático.

El objetivo de los autores es realizar una secuencia didáctica para enseñar la trigonometría con Geogebra, para lo cual desarrollan unas tareas donde trabajar los conceptos trigonométricos, el Teorema de Pitágoras o las razones trigonométricas con Geogebra.

Dicho software es una herramienta útil para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en concreto, de la trigonometría. Por ello, los autores animan a utilizar los recursos tecnológicos como mediadores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Beirigo-Lopes et al. (2018) consideran que uno de los mayores problemas del profesorado es realizar actividades que se desarrollen adecuadamente durante las clases, las cuales generen el aprendizaje del alumnado. Por ello, al igual que en el campo de las ciencias naturales donde el alumnado está en contacto directo con el objeto de estudio y le resulta un recurso más interesante, los autores estiman que las actividades de campo favorecen la enseñanza de las matemáticas porque el alumnado está más motivado, integrado en el proceso y estimula más su creatividad que en una clase habitual.

La metodología seguida comienza primero en el aula, se explican las razones trigonométricas mediante dibujos, y se realizan ejercicios y problemas. Posteriormente, el alumnado debe realizar una actividad de campo mediante una aplicación gratuita para smartphones (DiopThrace), la cual tiene un interfaz fácil para el alumnado, y consiste en medir ángulos. La actividad es útil para enseñar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo al medir alturas de difícil acceso. Pero cuyo éxito, también, se debe a la planificación previa y una metodología de enseñanza de redescubrimiento del conocimiento.

Las actividades de campo favorecen la capacidad de aprender y almacenar mejor la información al interactuar directamente con el contexto; así como, fomentan el pensamiento matemático al buscar la solución en la situación establecida y unen la teoría aprendida en clase por el alumnado con la práctica en ambientes donde vive. Además, se favorece la sociabilidad entre el alumnado y mejora la relación entre profesorado, alumnado y conocimiento.

Para finalizar, se debe reflexionar sobre el análisis de Giacomone, et al. (2017) quienes consideran que tener conocimiento matemático no conlleva desarrollar adecuadamente la tarea docente, es decir, es fundamental para la formación del futuro profesor saber matemáticas, cómo las conoce y que es capaz de desarrollarlas

en la enseñanza. El profesor debe tener conocimientos tanto matemáticos como didácticos, y ser competente en la utilización del conocimiento, y para ello, existen estrategias para reflexionar sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La competencia de análisis ontosemiótico trata la capacidad y el conocimiento para identificar y describir objetos y procesos involucrados en las tareas matemáticas escolares. La modelización del conocimiento matemático permite comprender y describir los procesos de formación del conocimiento basado en la resolución de problemas. El profesor de matemáticas debe desarrollar una competencia instrumental para reconocer la complejidad de significados y objetos presentes en las actividades matemáticas, prever conflictos potenciales, y adaptar las actividades a las capacidades del alumnado y a los objetivos de aprendizaje.

5.4. Conclusiones de las investigaciones

La conclusión personal, tras realizar el apartado de fundamentación didáctica y como futura profesora, es destacar la relevancia de realizar al inicio de la unidad didáctica una evaluación inicial para conocer el nivel educativo de cada alumno, y analizar su evolución a lo largo de cada unidad didáctica para tomar medidas rápidamente tras detectar algún problema o dificultad, es decir, no se debe esperar a la evaluación final para adoptar medidas correctoras. Por otro lado, se debe considerar que el alumnado no sólo tiene deficiencias de conocimientos con respecto a la geometría, sino que también tiene errores básicos de álgebra, y estos errores provocan que los ejercicios o problemas de trigonometría no se resuelvan correctamente. Sin embargo, el alumnado puede aprender a partir de los errores debido a que son una fuente de información, y permite al alumnado ser ayudado tanto por el profesorado como por otros compañeros.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica, es importante que el alumnado entienda el enunciado del ejercicio o problema a realizar, seleccione los datos necesarios y realice un esquema o dibujo para visualizar mejor el problema. Por ello, es necesario que los problemas planteados estén contextualizados en la vida real del alumnado, y se utilicen diversos recursos didácticos motivadores. El uso de TIC como Geogebra permite al alumnado comprender mejor los nuevos contenidos y procedimientos explicados por el profesorado, y les ayuda a visualizar mejor los problemas a resolver. También, las actividades de campo fomentan la conexión entre los conocimientos de clase con la práctica en la vida real, y sobre todo, si se aplican recursos tecnológicos como una app. Se debe destacar los trabajos en grupo porque se fomenta la colaboración entre el alumnado, la sociabilidad, la solidaridad, la empatía, y favorece el aprendizaje horizontal entre el alumnado heterogéneo. Es decir, se debe

diversificar las actividades porque hay alumnado que aprende mejor con uno u otro tipo de actividades, y así llegar a todos los estilos de aprendizaje.

Finalmente, tener en cuenta que los futuros profesores deben aprender cómo fusionar las matemáticas y la didáctica, prever las dificultades del alumnado y adaptar las actividades al nivel educativo del alumnado.

6. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica

En este apartado del TFM se desarrollará una unidad didáctica de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O. Se contextualizará el centro y el aula donde se desarrollará la unidad didáctica, teniendo en cuenta las actividades, los recursos, la temporalización, la atención a la diversidad y la evaluación.

6.1. Título

Se va a desarrollar la unidad didáctica de Trigonometría, la cual pertenece al curso de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Se trata de una asignatura troncal según el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O. y del Bachillerato.

6.2. Justificación

Dentro de la geometría está la rama de la trigonometría, la cual se comienza a estudiar en 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y se continúa en 1º de Bachillerato de Matemáticas I de acuerdo con el RD 1105/2014, aunque la trigonometría no entra en el examen de Selectividad. Sin embargo, la trigonometría es una rama de las matemáticas muy necesaria en el aprendizaje del alumnado que continuará sus estudios en Ciencias y Tecnología debido a su utilidad en materias como física o tecnología, o en titulaciones universitarias como Ingenierías de Topografía o Civil o Electricidad junto al aprendizaje de los números complejos. Así como, dichos conocimientos matemáticos son útiles para el desarrollo de la vida cotidiana de los ciudadanos a la hora de valorar la cultura arquitectónica o para resolver cuestiones que puedan surgir en la vida como el cálculo de distancias a puntos accesibles o inaccesibles.

6.3. Contextualización del centro y del aula

La unidad didáctica se contextualizará en el Instituto de Educación Secundaria (I.E.S.) Jándula debido a que fue el centro donde realicé las prácticas docentes del

Máster. El curso seleccionado ha sido 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ya que es el primer curso de la educación secundaria donde se estudia la trigonometría, tal y como se refleja en la Programación del Departamento de Matemáticas (2018) del I.E.S. Jándula.

6.3.1. Situación geográfica del centro

El I.E.S. Jándula se encuentra en Andújar (Jaén), cuya dirección postal es calle San Vicente Paul, 37, 23740.

Andújar es cabecera de la comarca de la Campiña de Jaén, cuenta con una extensión de casi 965 km² de superficie, y se sitúa a 35 km de Jaén, la capital de provincia. Está bien comunicada porque está junto a la Autovía del Sur A-4 (véase la Figura 34), que une la ciudad de Madrid con las capitales andaluzas Córdoba, Sevilla y Cádiz.



Figura 34: Mapa de la localización del I.E.S. Jándula (I.E.S Jándula, 2019).

Andújar es la tercera localidad de la provincia de Jaén más poblada, con unos 38.000 habitantes aproximadamente. El término municipal está dividido por el río Guadalquivir, en el norte se sitúa el parque natural de la Sierra de Andújar perteneciente a Sierra Morena, y al sur se sitúan la campiña y la vega.

6.3.2. Aspectos demográficos y socioeconómicos de la localidad

El mercado laboral de Andújar está configurado con una base económica diversificada, destacando un dinamismo en el sector terciario o de servicios. El sector secundario constituye un tercio del empleo (alimentación, textil y construcción); y el sector primario es el menos dinámico debido a los problemas estructurales de la agricultura.

La crisis económica ha reducido el número de propietarios de pequeñas empresas pertenecientes a la clase acomodada. Actualmente, predomina la clase media (empleados del sector servicios y funcionarios), y un 40% de personas son asalariadas de la industria y de la agricultura; mientras que un 34% de familias tienen ingresos

inferiores al salario mínimo interprofesional, así como aumenta el número de familias que sufren carencias básicas (casi una de cada seis).

En los últimos años, la estructura urbana se ha modificado porque el centro histórico se ha densificado y la ciudad ha crecido hacia al noreste. El 35% de las viviendas, aproximadamente, tienen menos de 100 m². Un 80% de las viviendas son de propiedad; y el 1,2% de familias habita en viviendas con menos de 10 m² por habitante.

La población está compuesta por un 62% de habitantes autóctonos, un 24% que procede de otros municipios provinciales y un 14% de inmigrantes de diversa procedencia.

En cuanto a la constitución de las unidades familiares, el 14% son parejas sin descendencia, otro 14% son familias extensas que conviven con familiares de la generación anterior, más del 50% presentan una composición normal (matrimonio con descendencia), y el 1,5% son hogares abandonados por uno de los cónyuges. El tamaño de la unidad familiar está en 4,1 personas por familia.

6.3.3. Características generales del alumnado

Se debe destacar la reducción de la población escolar para Secundaria y Bachillerato, por ello, se ha establecido y se impartirán nuevas modalidades de Formación Profesional Dual. A pesar de la reducción de alumnado, se conservan tres líneas en todos los cursos de Secundaria y en primero de bachillerato cuatro líneas.

El alumnado procede de diversos niveles económicos y sociales. El número de alumnado inmigrante y alumnado absentista varía mucho. El alumnado absentista y parte del alumnado necesitado de una compensación educativa es quien genera más problemas de convivencia. En cuanto al alumnado Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE), ha crecido en los últimos años y afecta más a hombres que a mujeres. Las modalidades más abundantes son las de Dificultades de Aprendizaje (DIA), Necesidades Educativas Especiales (NEE) y acciones de carácter Compensatorio (COM).

En el curso 2018/2019, se atenderá la diversidad en el aula con grupos concretos para el alumnado de altas capacidades y con refuerzos para el alumnado con más dificultad de aprendizaje.

El I.E.S. Jándula es el centro de referencia para el alumnado de transporte escolar, constituyendo un 19% del alumnado total. El alumnado procede de los Villares, Llanos del Sotillo, San José de Escobar, Los Pinos y Villanueva de la Reina. Además, los centros de educación primaria adscritos son: Centro de Educación Infantil y Primaria (C.E.I.P.) Cristo Rey, C.E.I.P. San Eufrasio y C.E.I.P. Isidoro Vilaplana.

El alumnado tiene diversa procedencia social, económica y cultural, determinando las diferentes relaciones que sus tutores legales mantienen con el centro. En los últimos años, se ha producido un incremento de alumnado procedente de una población de bajo nivel socioeconómico debido a los acuerdos tomados en la comisión de escolarización y como consecuencia de los centros adscritos al instituto. Además, se espera que aumente este número a corto plazo. En estos casos, el alumnado tiene insuficientes conocimientos previos necesarios para el nivel de 1º de E.S.O., así como tiene poco interés por aprender e integrarse, provocando graves problemas de disciplina en algunas ocasiones. Incluso, existe un gran número de alumnado que presenta deficiencias básicas y no han adquirido los conocimientos previos, destacando deficiencias tanto de la competencia matemática como de la lingüística. Por ello, cada año hay más alumnado con necesidades educativas por parte del profesorado, de los profesores terapéuticos y del departamento de orientación.

En los últimos años, ha aumentado las faltas de comportamiento en los niveles más bajos de 1º y 2º E.S.O., y en ocasiones, también en los cursos de 3º y 4º de E.S.O. Todo esto afecta al desarrollo de la programación.

Los datos de la Agencia Andaluza de Evaluación Educativa (AGAEVE) para el centro, a junio de 2016, muestran lo siguiente:

- Promedio absentismo escolar: 2,87 / 10,35 (zona) / 6,13 Índice Socioeconómico y Cultural (ISC).
- Promedio abandono en E.S.O.: 3,38 / 2,33 (zona) / 3,69 (ISC).
- Promedio abandono en Bach: 6,90 / 12,36 (zona) / 14,34 (ISC).
- Promedio cumplimiento normas convivencia: 96,88/ 89,92 (zona) / 87,35 (ISC similar).
- Promedio de alumnado que suele aprobar las pruebas de acceso a la Universidad (PAU) en junio supera ampliamente el 95,00%.

6.3.4. Descripción del centro

El I.E.S. Jándula es un centro público, dependiente de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Es uno de los tres centros públicos de Secundaria de la localidad, y uno de los dos autorizados para impartir enseñanzas de Bachillerato y Ciclos Formativos, además de la E.S.O.

El I.E.S. Jándula cuenta con un espacio de 16.592 m², y el edificio ha sufrido varias ampliaciones desde que abrió sus puertas en el curso 1983/1984 (véase la Figura 35). Sin embargo, se observa una falta de espacio al contar con un gimnasio reducido, o en la ausencia de espacios de reunión y almacenaje de los Departamentos didácticos, o ausencia de aula taller para los ciclos de Formación Profesional. Actualmente, ya no se

encuentra en la periferia de la ciudad, sino dentro de una barrida con importante actividad comercial.

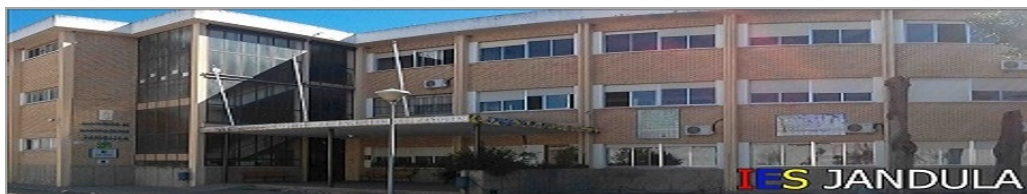


Figura 35: Edificio del I.E.S. Jándula (I.E.S. Jándula, 2019).

6.3.4.1. Instalaciones y materiales

El centro está constituido por un edificio de tres plantas, más un edificio con dos aulas, un gimnasio y una pista de pádel.

El centro dispone de algunas aulas configuradas como específicas, tales como: el aula de convivencia, el aula de orientación, el aula de la Profesora Terapéutica (P.T.), la de música, las de Formación Profesional (F.P.), la de plástica, dos aulas de TIC con PCs, la biblioteca, dos laboratorios de Ciencias Naturales (C.N.) y Física y Química (F.Q.), el taller de tecnología, el salón de actos, y el gimnasio. Las restantes aulas habituales son 31, las cuales disponen de extintor, sonido integrado, y algunas disponen de cañón proyector y/o pizarra digital. Además, de las aulas TIC con PCs, se dispone de un carro con Tablets en cada planta.

Por otro lado, el centro dispone de la conserjería, la secretaría, la sala de reuniones para personal externo, la sala de profesores, la sala del equipo directivo, una pista de pádel, y un parking para los profesores.

6.3.4.2. Organización de espacios y tiempos

Según el Proyecto Educativo del I.E.S. Jándula, cedido por el Equipo Directivo (2018), basado en el Decreto 301/2009, de 14 de julio, por el que se regula el calendario y la jornada escolar en los centros docentes, el I.E.S. Jándula dispone de margen para conjugar el tiempo dedicado al horario lectivo y al de ocio para la mejora del rendimiento académico y de la madurez personal del alumnado.

El número de días lectivos para la E.S.O. y Bachillerato será de 175, mientras que el número de días lectivos para ciclos formativos de grado medio y superior se establece teniendo en cuenta la duración de cada ciclo y el cómputo total de horas que corresponde a cada uno según la normativa específica de estas enseñanzas.

El horario lectivo del centro para el alumnado es desde las 08:15h hasta las 14:45h, con un recreo entre las 11:15 y las 11:45h. Sólo el alumnado con más de 18 años podrá abandonar el recinto escolar durante el recreo.

El horario general del instituto es de 8:15 a 14:45, y de 16:30 a 19:30, horas, para atender toda la oferta educativa del centro, la coordinación con los centros educativos

de la zona, la gestión del transporte escolar y del alumnado residente fuera del casco urbano, y la conciliación de la vida familiar y laboral del profesorado y del personal de administración y servicios.

6.3.5. Descripción del aula

La descripción del aula se dividirá en la organización de espacios, el material disponible en el aula y en la descripción del perfil del alumnado de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

6.3.5.1. Organización de espacios en el aula

El aula de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas mide 9 m de largo y 6,9 m de ancho, en total $62,1 \text{ m}^2$; cuenta con dos puertas y un armario perchero en un lateral, mientras que, en el lado opuesto se sitúan cuatro ventanas dobles. Las mesas están dispuestas en tres columnas y cinco filas; y en la parte frontal del aula se sitúan la mesa del profesorado, la pizarra blanca y la pizarra digital. Se adjunta un croquis del aula (véase la Figura 36):

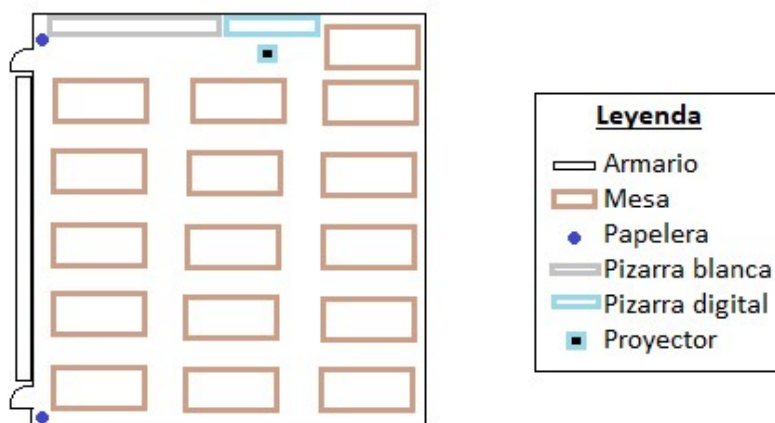


Figura 36: Croquis del aula (elaboración propia).

6.3.5.2. Material

El aula está constituida por quince mesas dobles, de dimensiones $70 \text{ cm} \cdot 140 \text{ cm}$, para el alumnado junto a treinta sillas; la mesa del profesorado, con las mismas dimensiones y una cajonera, junto a la silla; una pizarra blanca de dimensión $240 \text{ cm} \cdot 130 \text{ cm}$; una pizarra digital, de dimensión $160 \text{ cm} \cdot 130 \text{ cm}$, con altavoces; un proyector, un armario perchero y dos papeleras. Además, el aula cuenta con doce tubos fluorescentes de luz, dos luces de seguridad junto a las puertas, cuatro radiadores, un aire acondicionado y wifi.

6.3.5.3. Perfil de los alumnos

El alumnado de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas está dividido en dos grupos. El alumnado del grupo, donde se desarrollará la unidad didáctica, está formado por 12 alumnos y 5 alumnas. En general, dicho grupo

se caracteriza por estar poco interesado y motivado por la asignatura de matemáticas, de hecho, la mayoría reconoce que apenas estudian y/o trabajan. Durante todo el curso, han comenzado a mostrar algo de interés a partir del segundo trimestre.

Por un lado, destacar a una alumna que obtiene los mejores resultados de la clase; y a un alumno que estudia, se esfuerza y siempre realiza todas las tareas encomendadas tanto en clase como en casa. Por otro lado, hay dos alumnos con dificultades de aprendizaje, uno de ellos tiene iniciativa para realizar los ejercicios aunque estén mal; pero el otro alumno muestra más bloqueo a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas, sin embargo, solicita ejercicios adicionales para conseguir aprobar la asignatura.

6.4. Objetivos

En este apartado se desarrollarán los objetivos generales de área, los objetivos específicos de etapa y los objetivos didácticos de la unidad.

6.4.1. Objetivos de la E.S.O.

Los objetivos son los referentes relativos a los logros que el alumnado debe alcanzar al finalizar la etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje planificadas intencionalmente para ello.

La E.S.O. contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades, los hábitos, las actitudes y los valores que le permitan alcanzar los objetivos enumerados en el artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (L.O.E.), modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E.), así como el artículo 11 del RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la E.S.O. y del Bachillerato.

Las competencias clave deberán estar estrechamente vinculadas a los objetivos definidos para la Educación Secundaria, de acuerdo con lo establecido en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la E.S.O. y el Bachillerato. Por ello, en el Anexo V se detallan los objetivos de la etapa y la relación que existe con las competencias clave.

6.4.2. Objetivos de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

Según la Orden de 14 de julio de 2016, la enseñanza de las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en la E.S.O. en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y valorar su belleza.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) para realizar cálculos, buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Objetivos de la unidad didáctica de trigonometría

De acuerdo con los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje desarrollados en el RD 1105/2014 y el Decreto 144/2016, se proponen los siguientes objetivos de la unidad didáctica de trigonometría, los cuales deberán alcanzar el alumnado:

1. Familiarizarse con la medida de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes, así como su conversión de un sistema a otro.
2. Conocer y aplicar las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para calcular medidas de longitudes tanto de forma directa como indirecta. Así como, las relaciones trigonométricas.
3. Conocer la circunferencia goniométrica y aplicar las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes de la circunferencia goniométrica.
4. Utilizar e interpretar los resultados de la calculadora científica para expresar un mismo ángulo en diferentes sistemas o para la obtención de razones trigonométricas. Expresar los resultados con precisión.
5. Utilizar herramientas TIC para analizar y comprender la trigonometría y/o la geometría.
6. Fomentar la participación en clase y la sociabilidad entre el alumnado mediante los trabajos en grupo.
7. Identificar problemas y aplicar la trigonometría para resolver problemas de la vida cotidiana.
8. Valorar la importancia de la trigonometría en la vida cotidiana.

6.5. Competencias clave

De acuerdo con lo establecido en el artículo 2 del RD 1105/2014, de 26 de diciembre, a efectos del presente Decreto, se entenderá por Competencias: capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

De acuerdo con lo establecido en el artículo 2.2 del RD 1105/2014, de 26 de diciembre, las competencias del currículo serán las siguientes:

- a) Comunicación lingüística (CCL).

- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Las competencias clave, según la denominación adoptada por el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, y en línea con la Recomendación 2006/962/EC del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, son aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo.

En el Anexo I de la Orden ECD/65/2015, de 29 de enero, se hace una descripción de las competencias clave del Sistema Educativo Español.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica, se tendrá en cuenta las competencias clave en diversas cuestiones de la unidad (véase la Tabla 8):

Competencias clave	Características a desarrollar
CCL	-Comprender correctamente los enunciados de las actividades. -Expresar gramaticalmente y verbalmente los pasos seguidos para resolver un problema y los resultados obtenidos. -Entender los conceptos y los procedimientos de la unidad. -Saber obtener los datos principales de un enunciado para desarrollar un ejercicio o problema. -Saber buscar información para resolver cuestiones. -Expresar y comunicar adecuadamente los pensamientos e ideas, así como aceptar las críticas constructivas. -Utilizar e interpretar el lenguaje específico de Matemáticas. -Debatir y exponer ideas científicas.
CMCT	-Utilizar el lenguaje algebraico y las ecuaciones para resolver problemas. -Utilizar el lenguaje matemático correctamente. -Utilizar diferentes tipos de números para realizar operaciones básicas y resolver problemas. -Identificar los diversos elementos geométricos en diferentes ámbitos científicos y tecnológicos. -Aplicar e identificar fórmulas. -Comprender cuestiones o problemas; así como, obtener conclusiones con el fin de interpretar los datos o resultados. -Utilizar estrategias para resolver problemas y emplear diversas

	técnicas para realizar los cálculos. -Expresar los resultados de forma correcta y precisa.
CD	-Usar programas informáticos o aplicaciones de representación geométrica. -Usar las TIC para realizar las actividades.
CAA	-Capacidad e inquietud para investigar contenidos por voluntad propia. -Capacidad para ordenar los apuntes, realizar esquemas y estudiar con autonomía. -Marcarse objetivos, planificar proyectos y gestionar habilidades o destrezas. -Reelaborar ideas y buscar soluciones. -Aplicar los conocimientos generales a situaciones o casos particulares. -Tomar conciencia de lo que se sabe para aprender lo necesario. -Adquirir y desarrollar habilidades para obtener información y transformarla en conocimiento propio, relacionándola con conocimientos previos, y aplicarla a situaciones similares en otros contextos. -Visualizar y representar dibujos o esquemas para resolver los problemas con más facilidad.
CSC	-Tener curiosidad por la historia y la evolución de las matemáticas. -Aprender los conocimientos matemáticos básicos para comprender los problemas sociales presentados con lenguaje matemático. -Ser consciente que cualquier persona puede alcanzar los conocimientos matemáticos. -Valorar las aportaciones al conocimiento por parte de otras culturas o países. -Valorar los descubrimientos científicos de diversas personalidades. -Presentar una actitud constructivista en la vida, y tomar decisiones responsables. -Rechazar comportamientos que pongan en riesgo la seguridad y la salud del personal. -Valorar el diálogo como medida para resolver conflictos entre las personas. -Tolerar y respetar las diferencias individuales. -Adquirir hábitos de vida saludables. -Analizar con crítica las informaciones científicas de los medios de comunicación mediante los conocimientos científicos básicos. -Adquirir una base científica para participar en una sociedad tecnológica.
SIEP	-Solicitar ayuda cuando se necesita, realizar y corregir las actividades. -Buscar información para ampliar los contenidos básicos. -Tener conciencia crítica de los datos obtenidos en los medios de comunicación.

	-Entender la importancia de las aportaciones de los científicos o matemáticos al progreso de la sociedad. -Tomar decisiones de forma responsable y autónoma; así como, utilizar el diálogo como medio de comunicación. -Adquirir la iniciativa y la capacidad de proponer hipótesis para justificar fenómenos del entorno y verificarlas. -Capacidad para desarrollar trabajos o proyectos sencillos sobre matemáticas. -Adquirir espíritu crítico para hacer frente a diferentes situaciones. -Capacidad para trabajar en equipo e individualmente. -Capacidad de liderazgo y delegación.
CEC	-Apreciar con actitud abierta, respetuosa y crítica las diversas manifestaciones artísticas y culturales. -Interés por conservar el patrimonio cultural y artístico. -Participar en la vida cultural y conocer la herencia cultural. -Desarrollar creatividad e imaginación en el desarrollo de proyectos. -Apreciar la diversidad cultural y la libertad de expresión.

Tabla 8: Competencias clave en la unidad didáctica (Departamento de Matemáticas, 2018).

6.6. Contenidos

Los contenidos son los medios para alcanzar los objetivos educativos del área, y será necesario su adaptabilidad según las necesidades individuales del alumnado.

Esta selección de contenidos se ha hecho de los bloques definidos en el RD 1631/2006, que establece las enseñanzas de área correspondientes a la E.S.O. y del RD 1105/2014.

6.6.1. Contenidos del RD 1105/2014

Los contenidos a tratar en la unidad didáctica de trigonometría se enmarcan dentro del bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) y del bloque 3 (Geometría), los cuales han sido obtenidos del RD 1105/ 2014 y del RD 144/2016, Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la E.S.O. en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

6.6.2. Contenido de la unidad didáctica

Los contenidos transversales del bloque 1 a desarrollar en la unidad didáctica son los siguientes:

1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.

1.2. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las

soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

1.3. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

1.4. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

1.5. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Además de los contenidos transversales del bloque 1, los contenidos del bloque 3 de geometría a tratar en dicha unidad didáctica serán:

3.1. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.

3.2. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.

3.3. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes y áreas.

6.6.3. Contenidos interdisciplinares y transversales

Los temas transversales deben ser temas de actualidad y con relevancia social, los cuales se integren en todo el currículo, desarrollen actitudes, valores y normas, estar aprobados por el Proyecto Educativo de Centro, integrarse en más de un área, completen la vida social y personal del alumnado, fomenten el autoestima individual y colectiva, la autonomía, estén programados y sean responsabilidad de toda la comunidad educativa (Corbacho-Pérez, 2005).

En el Anexo VI, se contempla el Artículo 6 del RD 111/2016 sobre elementos transversales. La programación didáctica debería incluir algún tema transversal, detallando los objetivos, los contenidos y las actividades. Los temas pueden ser (Corbacho-Pérez, 2005; Departamento de Matemáticas, 2018):

- Igualdad de derechos en ambos sexos: no utilizar expresiones que puedan inducir a una interpretación sexista.
- Educación moral y cívica: fomentar la actitud tolerante, colaboradora y receptiva en las relaciones entre individuos y en las actividades en grupo.
- Educación multicultural y racial: actitud crítica ante cualquier tipo de discriminación individual o social por razones de raza, creencias, sexo u otras diferencias individuales o sociales. Valoración positiva de la existencia de grupos sociales o culturas diferentes a la nuestra.

- Educación sexual: prevención de enfermedades.
- Educación para la salud: desarrollar hábitos saludables y evitar consumos de sustancias nocivas para la salud.
- Educación ambiental y desarrollo sostenible: sensibilización con el medio natural y desarrollar actividades para su conservación.
- Educación contra el ciber acoso: controlar el uso de las redes sociales.
- Educación contra el bullying: fomentar el respeto entre las personas y controlar cualquier conducta inadecuada.
- Educación vial: tratar aspectos sobre la circulación para evitar accidentes.
- Educación para la paz: respetar las creencias y opiniones de otras personas.
- Educación para la democracia: interés por el mecanismo que regula el funcionamiento de nuestra sociedad; así como, los derechos y deberes de la ciudadanía.

6.7. Metodología

De acuerdo con lo establecido en el artículo 2 del RD 1105/2014, de 26 de diciembre, a efectos del presente Decreto, se entenderá por metodología didáctica: conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.

Según el Anexo II de la Orden ECD/65/2015 sobre las orientaciones para desarrollar las estrategias metodológicas para trabajar por competencias en el aula, se tendrá en cuenta:

- Los métodos didácticos se elegirán para conseguir las metas propuestas.
- El docente debe ser el promotor y orientador para que el alumnado resuelva las tareas utilizando los diversos conocimientos y destrezas; considerando los distintos estilos de aprendizaje.
- Aplicar metodologías activas y contextualizadas para fomentar la motivación en el aprendizaje de competencias.
- El alumnado debe tener un papel activo, autónomo y responsable de su aprendizaje.
- Las metodologías activas deben desarrollarse en un aprendizaje cooperativo, mediante la resolución de las tareas en grupo y compartan las estrategias utilizadas.
- Las estrategias interactivas son adecuadas para un aprendizaje competencial porque se comparte y construye el conocimiento y la clase es dinámica a través del intercambio colectivo de ideas. Se favorece la participación activa con las

metodologías que contextualizan el aprendizaje y favorecen el aprendizaje por proyectos, el estudio de casos o el aprendizaje basado en problemas.

- El aprendizaje por competencias se fomenta con el trabajo por proyectos porque favorece la crítica, la reflexión, la hipótesis y la investigación.
- El uso del portfolio refuerza la evaluación continua, la motivación y la autonomía del alumnado.
- Fomentar el uso de materiales y recursos, sobre todo, las TIC.

De acuerdo con el Decreto 144/2016 sobre las estrategias metodológicas, el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial se caracteriza por la transversalidad, el dinamismo y la integración. Así como, las programaciones contendrán las estrategias a desarrollar por el profesorado para alcanzar los objetivos y las competencias clave a adquirir por el alumnado.

Durante el desarrollo del curso, y en concreto, durante el desarrollo de la unidad didáctica se impulsará una metodología centrada en la actividad y la participación del alumnado para promover un pensamiento crítico y racional; el trabajo individual y cooperativo, la investigación, la lectura y las diversas expresiones. El alumnado deberá adquirir las competencias clave, no sólo con el objetivo de saber, sino también, saber aplicar y hacerlo en diferentes contextos y situaciones; por ello, se necesitan diversas estrategias metodológicas, como son (Calleja, 2016; Luque-Cañada, 2019):

- Fomentar la metodología activa para favorecer la integración del alumnado en la dinámica del aula; así como, el alumno participará en su aprendizaje y reflexionará sobre sus logros y dificultades.
- Emplear una metodología expositiva cuando el profesorado explica nuevos contenidos y procedimientos al alumnado.
- Contextualizar los aprendizajes para transferir los aprendizajes a contextos de la vida real.
- Fomentar el aprendizaje autónomo para que el alumnado se fije sus propios objetivos, se organice, se planifique el trabajo, busque la información necesaria y analice los resultados.
- Fomentar la reflexión, el espíritu crítico, la autonomía y la creatividad.
- Impulsar la motivación del alumnado según sus intereses y necesidades para incrementar su autoestima y valorar sus esfuerzos realizados cada día.
- Fomentar el aprendizaje significativo mediante actividades basadas en un problema de la vida real o actividades relacionadas con otras materias o temas transversales para que el alumnado compruebe la utilidad de lo estudiado.

- Fomentar la interdisciplinaridad para que el alumnado relacione los contenidos de diferentes materias.
- Fomentar el aprendizaje por investigación o IBL (Inquiry Based Learning) mediante una actividad de modelización matemática. Estas actividades se caracterizan por implicar el uso de métodos y estrategias, se valora más el proceso que la respuesta, promueve el intercambio de ideas en clase, y el trabajo es colaborativo. Además, está planificado de antemano por el profesor, quien estudia el pensamiento de los estudiantes.
- Promover el trabajo colaborativo, la empatía, la aceptación mutua, la solidaridad, el respeto, la interacción y las tutorías entre iguales para enriquecer el aprendizaje y desarrollar una sociedad plural y heterogénea. Además, se puede aprender de quienes nos rodean.
- Favorecer la interacción del alumno con el aula para que se sienta parte del grupo, fomentando tanto el aprendizaje vertical como el horizontal.
- La enseñanza-aprendizaje debe adecuarse a los distintos tipos de alumnos y razonamientos, atender la heterogeneidad del alumnado y establecer grupos de trabajo flexibles.
- Diversificar los recursos didácticos, las TICs y los materiales; así como, el uso de diferentes fuentes de información.

6.8. Actividades y recursos

Las actividades de enseñanza-aprendizaje a desarrollar deben cumplir los siguientes requisitos (Luque-Cañada, 2019):

- Claridad: el alumnado debe conocer que se le solicita en cada actividad.
- Papel activo del alumnado: debe regular su ritmo de ejecución y su aprendizaje.
- Adaptaciones individualizadas: las actividades deben ser idóneas y equilibradas según las necesidades del alumnado.
- Aprender disfrutando: carácter motivante y lúdico.
- Acorde a los intereses del alumnado: situaciones con sentido para el alumnado para captar su interés y motivarlo, partiendo de sus conocimientos previos.
- Graduadas: desarrollo gradual de los contenidos, con diferentes grados de dificultad.
- Distintas agrupaciones: promover todas las formas posibles de agrupamiento del alumnado.
- Autonomía personal: deben tener coherencia para que el alumnado guíe su aprendizaje y sus razonamientos, dando lugar al aprendizaje significativo.

El tipo de actividades didácticas que se van a desarrollar a lo largo de la unidad didáctica serán (Luque-Cañada, 2019):

- Act. Diagnóstico (DIAG): realiza un cómputo del nivel del alumnado.
- Act. Introducción (INT): adaptarse al ritmo posterior de trabajo.
- Act. Motivación (MOT): busca implicación y motivación del alumnado.
- Act. Aprendizaje (AP): adquirir destrezas conceptuales y procedimentales.
- Act. Desarrollo (DES): fijar y desarrollar los contenidos.
- Act. Consolidación (CON): reforzar los aprendizajes.
- Act. Creativa (CRE): desarrollar la creatividad a partir de una idea.
- Act. Evaluación (EV): determinar el grado de consecución de los objetivos.
- Act. Recuperación (RECU): destinada a quienes no han alcanzado los objetivos.
- Act. Ampliación (AMP): individualizar la enseñanza y atender la diversidad.
- Act. Refuerzo (REF): Individualizar la enseñanza y atender la diversidad.

Las actividades se desarrollarán individualmente o en grupo para fomentar el trabajo colaborativo donde se desarrolla la responsabilidad, el liderazgo, el trabajo en equipo, el autoestima y la competencia.

Se puede distinguir entre ejercicio, actividad y tarea según el objetivo que se quiera alcanzar. Sus definiciones son (Luque-Cañada, 2019):

- Ejercicio: comprueba el dominio del conocimiento adquirido. Su respuesta es repetitiva y prefijada, no está contextualizada, y sólo automatiza los conocimientos, es decir, no favorece el desarrollo de las competencias.
- Actividad: se adquiere un nuevo conocimiento o se utiliza conocimientos previos de manera distinta, está contextualizada y favorece la adquisición de competencias clave.
- Tarea: se resuelve un problema en un contexto definido, favorece el desarrollo de competencias clave y se caracteriza por ser interdisciplinar y combinar distintos saberes para obtener el producto final.

Los recursos didácticos utilizados en el desarrollo de la unidad didáctica son:

- Recursos materiales: papel, lápiz, reglas y compás.
- Recursos impresos: libros de texto y cuadernos del alumnado.
- Recursos autoconstruidos: recortes de triángulos rectángulos.
- Recursos audiovisuales: proyector.
- Recursos tecnológicos: calculadora, tablets, ordenadores y móviles.
- Recursos informáticos: Geogebra, test online, app y vídeos sobre la trigonometría.
- Recursos ambientales: aula habitual, aula TIC, y la ciudad durante la actividad de la app.

- Recursos humanos: profesor de matemáticas, alumnado, profesores de otras materias y tutores legales.

En el Anexo VII, se desarrollan todas las actividades de la unidad didáctica, teniendo en cuenta actividades de refuerzo y de ampliación para atender la diversidad.

6.9. Atención a la diversidad

De acuerdo con el Decreto 111/2016, capítulo VI de Atención a la diversidad, artículo 20 sobre Medidas y programas para la atención a la diversidad:

Establece en la etapa de la E.S.O. el conjunto de actuaciones educativas de atención a la diversidad dirigidas a dar respuesta a las diferentes capacidades, ritmos y estilos de aprendizaje, motivaciones, intereses, situaciones socioeconómicas y culturales, lingüísticas y de salud del alumnado, con la finalidad de facilitar la adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que le impida alcanzar la titulación de E.S.O.

La respuesta educativa a la atención a la diversidad desde las medidas generales es la siguiente (Colmenero-Ruiz, 2018):

- Agrupamientos flexibles de carácter temporal y abierto para facilitar la integración del alumnado en el grupo ordinario.
- Desdoblamientos de grupos en áreas y materias instrumentales para reforzar la enseñanza.
- Apoyo en grupos ordinarios mediante un segundo profesor o profesora en el aula para reforzar los aprendizajes instrumentales básicos para el alumnado con un gran desfase en lengua castellana y literatura, y matemáticas.
- Se responderá a las necesidades educativas concretas del alumnado en un horario lectivo semanal flexible.
- Programación de actividades para las horas de libre disposición, como: programas de refuerzo de materias instrumentales básicas, o actividades programadas para proporcionar el complemento educativo más adecuado a las necesidades e intereses del alumnado.
- Oferta de asignaturas optativas.

La respuesta educativa a la atención a la diversidad desde los programas de refuerzo para satisfacer las necesidades educativas de forma puntual o esporádica en algún alumno o grupo en su proceso de aprendizaje según el Decreto 111/2016, es la siguiente:

- Programas de refuerzo de materias generales del bloque de asignaturas troncales para primer y cuarto curso.
- Programas de refuerzo para la recuperación de los aprendizajes no adquiridos para el alumnado que promoció sin haber superado todas las materias.
- Planes específicos personalizados orientados a la superación de las dificultades detectadas en el curso anterior.
- Programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento.

Los Programas de Adaptaciones Curriculares buscan el máximo desarrollo de las competencias clave y ajustarán la metodología y adaptarán los procedimientos, los tiempos y los apoyos para una correcta evaluación del alumnado.

Dichas adaptaciones curriculares se basan en los principios de normalización, inclusión escolar y social, flexibilización de la enseñanza y personalización de la enseñanza; los cuales están dirigidos a:

- Alumnado que se incorpora tardíamente al sistema educativo.
- Alumnado con dificultades graves de aprendizaje.
- Alumnado con necesidades de compensación educativa.
- Alumnado con altas capacidades intelectuales.
- Alumnado con necesidades educativas especiales.

6.9.1. Atención a la diversidad en el aula

En el aula de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se va a contextualizar actividades para alumnado con altas capacidades y para alumnado con dificultad de aprendizaje.

Al alumnado de altas capacidades se le establecerá un programa de enriquecimiento curricular para desarrollar sus capacidades al máximo, es decir, dicho alumnado permanecerá en el aula habitual con el resto de sus compañeros, pero se adaptará el currículo a sus necesidades mediante actividades enriquecedoras, las cuales le permitirá profundizar e investigar más en el contenido de la unidad didáctica. Además, se ampliarán algunos contenidos, los cuales pertenecen a un curso superior según el RD 1105/2014.

En cuanto al alumnado con dificultades de aprendizaje, el profesor estará más atento para resolverle las dudas, se le mandará actividades de refuerzo para que no quede muy retrasado en conocimientos con respecto al resto del grupo, se le motivará para que tenga iniciativa para enfrentarse a las actividades y reduzca o elimine sus bloqueos. Así como, se situará en el aula cerca de grupos heterogéneos para que aprenda de compañeros con más nivel educativo.

6.10. Temporalización

Las sesiones a tratar a lo largo del curso 2018/2019 se planifican para que el alumnado tenga constancia y le ayude a organizarse, a distribuir su tiempo, su ritmo y fases de trabajo. El calendario y el plan de trabajo para distribuir los contenidos, tiene un carácter flexible en la programación.

La temporalización de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas será la mostrada en la Tabla 9:

Unidad Didáctica	TÍTULO	Nº de sesiones (140)
UD 1	NÚMEROS REALES	12
UD 2	POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRIACAS	12
UD 3	ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS	12
UD 4	FUNCIONES. CARACTERÍSTICAS	10
UD 5	FUNCIONES ELEMENTALES	16
UD 6	SEMEJANZA. APLICACIONES	8
UD 7	TRIGONOMETRÍA	16
UD 8	GEOMETRÍA ANALÍTICA	16
UD 9	ESTADÍSTICA	10
UD 10	DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES	10
UD 11	COMBINATORIA	10
UD 12	CÁLCULO DE PROBABILIDADES	8

Tabla 9: Temporalización del curso (Departamento de Matemáticas, 2018).

Durante el desarrollo del curso, la unidad didáctica de Trigonometría se desarrollará durante el segundo trimestre. Teniendo en cuenta que se prevén 16 sesiones, y que hay cuatro sesiones a la semana, la unidad didáctica se trabajará durante 4 semanas.

6.10.1. Desarrollo de la unidad didáctica

En este apartado se desarrollarán las sesiones de la presente unidad didáctica teniendo en cuenta el contenido de la unidad didáctica, los criterios de evaluación, los

objetivos de la unidad didáctica, los tipos de actividad, la organización, los recursos y la metodología (véase las Tablas 10-25).

Sesión 1: Introducción	
Desarrollo: La clase comienza con la actividad 1.1.: visionado de un vídeo sobre los orígenes y las aplicaciones de la trigonometría https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4 (11 min); y debate sobre las impresiones causadas por el vídeo y una reflexión sobre sus aplicaciones (14 min). Continúa con la actividad 2.2.: Test sobre conceptos básicos de triángulos, ángulos y semejanza (25 min). El profesor explica los materiales que debe llevar el alumnado en la próxima sesión (10 min).	
Contenido: 1.4, 1.5.	Evaluación: inicial.
Objetivos: 8.	Tipos de actividad: INT, MOT, DIAG.
Organización: Individual.	Recursos: Proyector y tablets.
Metodología: expositiva y motivadora durante el visionado del vídeo, activa e interactiva durante el debate tanto entre profesor-alumno como entre alumnos.	
Actividad para casa: el alumnado, en parejas, deberá llevar a la siguiente sesión recortes de triángulos rectángulos, de diferentes tamaños, con un ángulo de 30°.	

Tabla 10: Desarrollo de la sesión 1 (elaboración propia).

Sesión 2: Razones trigonométricas de un ángulo agudo	
Desarrollo: El profesor explica la definición de trigonometría e introduce las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo (10 min). El alumnado, en parejas, realiza la actividad 2.1. con los materiales solicitados en la sesión anterior: la actividad consiste en medir la longitud de los lados de recortes de triángulos rectángulos semejantes con un ángulo de 30° para analizar las proporciones entre los lados (20 min). Tras ello, se debate sobre los resultados y las conclusiones obtenidas durante la actividad 2.1. (10 min). El alumnado, individualmente, realiza la actividad 2.2. con papel milimetrado: con un transportador de ángulos, se representarán varios ángulos en una circunferencia dibujada en un papel milimetrado, así se podrá calcular los valores del seno, coseno y tangente de cada ángulo representado (20 min).	
Contenido: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 3.2.	Evaluación: CE. 1.1, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.1.
Objetivos: 2, 6.	Tipos de actividad: AP, CRE, MOT.
Organización: Parejas e individual.	Recursos: Pizarra, recortes de triángulos, reglas, compás y papel milimetrado.

Metodología: expositiva cuando el profesor explica el contenido, manipulativa, exploratoria y colaborativa cuando el alumnado realiza la actividad 2.1. considerada una actividad IBL, metodología activa porque el alumnado se integra en la dinámica de grupo e interactiva cuando debaten los resultados, y aprendizaje autónomo cuando el alumnado realiza la actividad 2.2.
Actividad para casa: -

Tabla 11: Desarrollo de la sesión 2 (elaboración propia).

Sesión 3: Relaciones trigonométricas fundamentales	
Desarrollo: El profesor explica las relaciones trigonométricas fundamentales ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$) y realiza la actividad 3.1. como ejemplo: dado el valor de una razón trigonométrica, se debe calcular el resto de razones trigonométricas mediante las relaciones trigonométricas fundamentales (20 min). El alumnado realiza la actividad 3.2. similar a la realizada por el profesor, y un alumno voluntario lo resuelve en la pizarra (15 min). El profesor explica las razones trigonométricas mediante la actividad 3.3.: con la ayuda de Geogebra https://www.geogebra.org/m/QCNmEfYF, explica las razones trigonométricas con una circunferencia goniométrica y completa una tabla sobre las razones trigonométricas de los ángulos notables (20 min). El profesor propone al alumnado realizar la actividad 3.4.: son unos ejercicios donde se trabajará con las relaciones trigonométricas fundamentales, los cuales se finalizarán en casa (5 min).	
Contenido: 1.1, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.1.
Objetivos: 2, 3, 5.	Tipos de actividad: AP, DES.
Organización: individual.	Recursos: pizarra, proyector y portátil (Geogebra).
Metodología: expositiva cuando el profesor explica el contenido tanto en la pizarra como con TIC al utilizar Geogebra, y aprendizaje autónomo cuando el alumnado realiza los ejercicios encomendados.	
Actividad para casa: finalizar la actividad 3.4., en casa, sobre las relaciones trigonométricas fundamentales.	

Tabla 12: Desarrollo de la sesión 3 (elaboración propia).

Sesión 4: Utilización de la calculadora y corrección de ejercicios
Desarrollo: El profesor comienza la clase preguntando, en general, sobre lo dado en la sesión anterior y corrigiendo la actividad 3.4. de casa mediante alumnado voluntario (20 min). El profesor explica cómo utilizar la calculadora cuando se trabaja con las razones

trigonométricas (15 min).	
El alumnado realiza la actividad 4.1.: son unos ejercicios para calcular las razones trigonométricas solicitadas mediante la calculadora. A lo largo de la clase, se corregirán los ejercicios tras unos minutos de resolución (25 min).	
Contenido: 1.1, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1.
Objetivos: 2, 4.	Tipos de actividad: AP, DES.
Organización: Individual.	Recursos: Pizarra y calculadoras.
Metodología: interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra, expositiva cuando el profesor explica el uso de la calculadora, aprendizaje de recursos tecnológicos cuando el alumnado aprende el funcionamiento de la calculadora y aprendizaje autónomo, crítico y reflexivo.	
Actividad para casa: el alumnado debe realizar la actividad 4.2.: son unos ejercicios para calcular las razones trigonométricas solicitadas o algunos ángulos mediante la calculadora.	

Tabla 13: Desarrollo de la sesión 4 (elaboración propia).

Sesión 5: Resolución de triángulos rectángulos	
Desarrollo:	
El profesor pregunta al alumnado por los resultados de los ejercicios realizados en casa (10 min).	
El profesor explica la resolución de triángulos rectángulos y realiza la actividad 5.1. como ejemplo: son varios ejercicios sobre triángulos rectángulos donde se debe hallar algún dato (20 min).	
El alumnado realiza la actividad 5.2.: son unos ejercicios sobre resolución de triángulos rectángulos donde se debe hallar las razones trigonométricas u otros elementos desconocidos mientras que el profesor observa y resuelve las dudas. Los ejercicios se corregirán en clase por el alumnado voluntario cada cierto tiempo (30 min). <i>Nota: el profesor motivará a todo el alumnado para que no resuelva los ejercicios siempre el mismo alumnado voluntario.</i>	
Contenido: 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 2, 4, 7.	Tipos de actividad: AP, DES, CON.
Organización: Individual.	Recursos: Pizarra y calculadoras.
Metodología: activa e interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra, expositiva cuando el profesor explica el nuevo contenido y autonomía cuando el alumnado realiza la actividad 5.2. La actividad 5.3., para casa, son problemas de triángulos rectángulos contextualizados.	
Actividad para casa: El alumnado debe realizar en casa la actividad 5.3.: son unos problemas contextualizados donde se debe representar el esquema de un triángulo rectángulo para hallar el dato solicitado.	

Tabla 14: Desarrollo de la sesión 5 (elaboración propia).

Sesión 6: Corrección de actividades y Actividad de modelización	
Desarrollo: El alumnado voluntario corregirá la actividad 5.3. realizada en casa (30 min). El profesor introduce la actividad 6.1. de modelización: “El parque de atracciones: diseña la pendiente de la catarata salvaje”: el alumnado comienza a trabajar con Geogebra y observará cómo varía el ángulo o la tangente de la pendiente si varían las longitudes de la base o la altura de la rampa (30 min).	
Contenido: 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos: 2, 5, 6, 7.	Tipos de actividad: CON, MOT, CRE, AP, DES.
Organización: Individual y grupos.	Recursos: Aula de PCs, Geogebra, proyector y pizarra.
Metodología: interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra, expositiva cuando el profesor explica la actividad 6.1, experimental, uso TIC, motivación, colaborativa cuando el alumnado trabaja con Geogebra. La actividad 6.1 de modelización es IBL.	
Actividad para casa: -	

Tabla 15: Desarrollo de la sesión 6 (elaboración propia).

Sesión 7: Actividad de modelización: “El parque de atracciones”	
Desarrollo: El alumnado continúa con la actividad 6.1. de modelización por grupos: cada grupo debe analizar las diferentes soluciones posibles dependiendo de las dimensiones de la barca y de la pendiente de la catarata. Mientras tanto, el profesor guiará al alumnado más perdido o con más dificultades (45 min). Al final, el profesor dirige el debate y la exposición de los resultados (15 min).	
Contenido: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 3.2, 3.3.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos: 2, 4, 5, 6, 7, 8.	Tipos de actividad: MOT, CRE, DES, CON, EV.
Organización: Grupos.	Recursos: Aula de PCs, calculadora, Geogebra, proyector y pizarra.
Metodología: activa, de motivación, colaborativa y empatía con el grupo, contextualizada, creativa y de reflexión al decidir las dimensiones de la barca y la pendiente de la catarata, uso de recursos TIC como Geogebra, interactiva al debatir las diferentes soluciones. Es interdisciplinar porque se puede relacionar con otras materias como física. La actividad 6.1 de modelización es IBL.	

Actividad para casa: -

Tabla 16: Desarrollo de la sesión 7 (elaboración propia).

Sesión 8: Cálculo de distancias a puntos inaccesibles	
Desarrollo: El profesor explica la actividad 8.1.: se trata un problema sobre el cálculo de distancias a puntos inaccesibles (15 min). El alumnado realiza la actividad 8.2.: se trata de problemas sobre el cálculo de distancias a puntos inaccesibles, y el alumnado voluntario lo resuelve en la pizarra cada cierto tiempo (35 min). El profesor explica la actividad 8.3.: consiste en medir la altura de una torre de la localidad mediante el cálculo de distancias a puntos accesibles o inaccesibles. Se debe realizar en grupo fuera del horario lectivo, con la app Dioptra, la cual mide ángulos (10 min).	
Contenido: 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos: 2, 4, 5, 6, 7, 8.	Tipos de actividad: MOT, CRE, AP, DES.
Organización: Individual y grupos.	Recursos: Pizarra, calculadora y app del móvil.
Metodología: expositiva cuando el profesor explica el nuevo contenido; autonomía cuando el alumnado realiza problemas contextualizados similares al explicado por el profesor; interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra; motivadora y contextualizada cuando el alumnado realiza la actividad 8.3 con recursos TIC, es decir, la app para medir una torre de su localidad.	
Actividad para casa: cada grupo, con la app Dioptra, la cual mide ángulos, debe calcular la altura de una torre de la localidad. La exposición será en la sesión 13.	

Tabla 17: Desarrollo de la sesión 8 (elaboración propia).

Sesión 9: Resolución de triángulos oblicuángulos
Desarrollo: El profesor explica la resolución de triángulos oblicuángulos mediante la actividad 9.1.: se trata de dos ejemplos sobre cómo resolver triángulos no rectángulos al dividirlos en dos triángulos rectángulos mediante la altura desde un vértice (15 min). El alumnado realiza la actividad 9.2.: se trata de ejercicios sobre triángulos oblicuángulos, y el alumnado voluntario los resolverá en la pizarra cada cierto tiempo (45 min). Por otro lado, mientras que el alumnado trabaja realizando la actividad 9.2., el profesor amplía conocimientos al alumnado de altas capacidades explicando los teoremas del seno y del coseno (15 min). Dicho alumnado realiza la actividad 9.3. voluntaria de ampliación: resolver triángulos no rectángulos mediante los teoremas del seno y del coseno (30 min).

<i>Nota: el profesor motivará a todo el alumnado para que no resuelva los ejercicios siempre el mismo alumnado voluntario.</i>	
Contenido: 1.1, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos: 2, 4, 7.	Tipos de actividad: AP, DES.
Organización: Individual.	Recursos: Pizarra y calculadora.
Metodología: expositiva cuando el profesor explica el nuevo contenido, interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra.	
Actividad para casa: el alumnado de altas capacidad finalizará la actividad 9.3. Actividad 9.4. voluntaria de refuerzo: hallar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y no rectángulos.	

Tabla 18: Desarrollo de la sesión 9 (elaboración propia).

Sesión 10: Razones trigonométricas de 0º a 360º	
Desarrollo: El profesor pregunta al alumnado si alguno ha realizado las actividades voluntarias de refuerzo o de ampliación para llevarse los cuadernos (5 min). El profesor explica las razones trigonométricas de 0º a 360º mediante la circunferencia goniométrica; para ello, se ayudará de Geogebra (20 min): https://www.geogebra.org/m/QCNmEfYF El alumnado realiza la actividad 10.1.: con papel milimetrado, dibuja una circunferencia goniométrica y calcula las razones trigonométricas de diferentes ángulos entre 0º a 360º; y el alumnado voluntario lo realizará en pizarra (35 min).	
Contenido: 1.2, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.1.
Objetivos: 3, 4, 5.	Tipos de actividad: AP, DES.
Organización: Individual.	Recursos: pizarra, proyector, portátil (Geogebra), papel milimetrado y reglas.
Metodología: expositiva cuando el profesor explica el nuevo contenido en la pizarra y con Geogebra, interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra.	
Actividad para casa: -	

Tabla 19: Desarrollo de la sesión 10 (elaboración propia).

Sesión 11: Ángulos de medidas cualesquiera y el radián
Desarrollo: El profesor comienza la clase preguntado por lo dado en la última sesión para que el alumnado lo recuerde y debata (5 min). El profesor explica ángulos de medidas cualesquiera mediante un ejemplo, es decir, la

actividad 11.1: consiste en expresar con valores entre -180 y 180° ángulos superiores a 360° (10 min). El alumnado realiza la actividad 11.2.: consiste en expresar con valores entre -180 y 180° ángulos superiores a 360°, y comprobar con la calculadora que coinciden sus razones trigonométricas (20 min). El profesor explica el sistema de medida de radianes con la ayuda de Geogebra (10 min): http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/t11radianes.htm El alumnado realiza la actividad 11.3.: se trata de un ejercicio donde se debe convertir los grados sexagesimales a radianes (15 min).	
Contenido: 1.2, 1.4, 1.5, 3.1.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.3.1.
Objetivos: 1, 4, 5.	Tipos de actividad: AP, DES.
Organización: Individual.	Recursos: pizarra, proyector y portátil (Geogebra).
Metodología: expositiva cuando el profesor explica el nuevo contenido; motivadora al explicar con Geogebra; activa e interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra.	
Actividad para casa: -	

Tabla 20: Desarrollo de la sesión 11 (elaboración propia).

Sesión 12: Ángulos de medidas cualesquiera y el radián	
Desarrollo: El profesor comienza la clase preguntado por lo dado en la última sesión para que el alumnado lo recuerde y debata (5 min). Para observar la evolución del alumnado en cuanto a sus conocimientos adquiridos, el profesor dedicará esta sesión a mandar actividades de clase para ver qué dificultades puede tener el alumnado. Se realiza la actividad 12.1., individualmente o en parejas: se trata de ejercicios de conversión del sistema sexagesimal a radianes o viceversa, y un ejercicio sobre los signos de las razones trigonométricas según el cuadrante del ángulo. Cada cierto tiempo, el alumnado voluntario resuelve los ejercicios en la pizarra, el resto de alumnado debatirá los resultados que han obtenido (55 min). Mientras que el alumnado realiza la actividad 12.1., el profesor explica al alumnado de altas capacidades una introducción sobre las funciones trigonométricas con la ayuda de Geogebra https://www.geogebra.org/m/zF5GzAKV (15 min). Además, dicho alumnado, realiza la actividad 12.2. de ampliación: se debe completar una tabla con valores de ángulos y sus correspondientes razones trigonométricas (seno, coseno y tangente), y se deberá representar dichos valores gráficamente para analizar el dominio de las funciones trigonométricas (40 min).	
Contenido: 1.2, 1.4, 1.5, 3.1, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.1.

Objetivos: 1, 4, 5, 6.	Tipos de actividad: AP, DES, CON.
Organización: Individual y parejas.	Recursos: pizarra, proyector, portátil (Geogebra) y calculadoras.
Metodología: expositiva cuando el profesor explica el nuevo contenido; motivadora al explicar con Geogebra; activa e interactiva tanto vertical como horizontal cuando se corrigen los ejercicios en la pizarra.	
Actividad para casa: -	

Tabla 21: Desarrollo de la sesión 12 (elaboración propia).

Sesión 13: Exposición actividad de app y resolución dudas de examen	
Desarrollo: El alumnado, en grupo, expondrá al resto de compañeros la actividad 8.3.: cada grupo dispondrá de 5 min para exponer la altura de la torre analizada con la app Dioptra, y relatar una breve historia de la torre. (En total se dispondrá de 25 min). El profesor resolverá las dudas al alumnado antes del examen (35 min).	
Contenido: 1.3, 1.4, 1.5, 3.2.	Evaluación: CE.1.1, CE.1.6, CE.1.8, CE.1.9, CE.1.11, CE.3.2.
Objetivos: 2, 5, 6, 7, 8.	Tipos de actividad: CON, MOT, EV.
Organización: Grupos e individual.	Recursos: póster A3, pizarra, proyector y portátil.
Metodología: expositiva, activa y motivadora cuando cada grupo expone su actividad; e interactiva tanto vertical como horizontal cuando se resuelven las dudas del examen.	
Actividad para casa: estudiar para el examen.	

Tabla 22: Desarrollo de la sesión 13 (elaboración propia).

Sesión 14: Examen	
Desarrollo: El examen se desarrolla a lo largo de toda la sesión, y contendrá cinco ejercicios similares a los realizados en las sesiones previas (actividad 14.1), (60 min).	
Contenido: 1.1, 1.4, 3.1, 3.2	Evaluación: CE.1.2, CE.1.6, CE.1.8, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos: 1, 2, 4, 7.	Tipos de actividad: EV final.
Organización: individual.	Recursos: exámenes.
Metodología: autonomía.	
Actividad para casa: -	

Tabla 23: Desarrollo de la sesión 14 (elaboración propia).

Sesión 15: Corrección de examen y actividad contra el acoso escolar	
Desarrollo: El profesor corrige el examen en la pizarra y debate con el alumnado las soluciones del examen (30 min). El alumnado realiza la actividad 15.1.: se trata de un cuestionario, cuya función es concienciar al alumnado sobre el acoso escolar, y que aprenda a cómo identificar si está siendo víctima o está siendo acosador (15 min). Tras ello, el profesor lee un breve texto y dirige el debate sobre la actividad 15.1. (15 min).	
Contenido: 1.2, 1.4, 3.1, 3.2.	Evaluación: -
Objetivos: 1, 2, 7.	Tipos de actividad: CON.
Organización: individual.	Recursos: cuestionarios y pizarra
Metodología: interactiva tanto vertical como horizontal cuando se resuelven las dudas del examen, interactiva y contextualizada cuando se realiza el cuestionario y debate la actividad contra el acoso escolar. Así como, se fomenta la empatía, la aceptación mutua y el respeto.	
Actividad para casa: estudiar para el examen de recuperación.	

Tabla 24: Desarrollo de la sesión 15 (elaboración propia).

Sesión 16: Examen de recuperación	
Desarrollo: El examen de recuperación, para los que hayan suspendido el examen, se realiza durante toda la sesión (actividad 16.1.), (60 min). Para el alumnado que ha superado el examen pero aún tiene carencias en la asimilación de algún contenido, realiza el examen de recuperación como una actividad de clase, individualmente o en parejas (actividad 16.1.), (60 min). Para el alumnado que ha superado examen con buenos resultados, realizará la actividad 16.2. de ampliación: se trata de ejercicios con demostraciones y ejercicios de razonamiento lógico (60 min).	
Contenido: 1.1, 1.4, 3.1, 3.2.	Evaluación: CE.1.2, CE.1.6, CE.1.8, CE.1.11, CE.3.1, CE.3.2.
Objetivos: 1, 2, 4, 7.	Tipos de actividad: EV final, REC.
Organización: individual o parejas.	Recursos: exámenes.
Metodología: autonomía cuando el alumnado realiza el examen de recuperación; colaborativo e interactiva con la actividad 16.1. que realiza en parejas el alumnado aprobado; activa, reflexiva y motivadora con la actividad 16.2.	
Actividad para casa: -	

Tabla 25: Desarrollo de la sesión 16 (elaboración propia).

En el Anexo VII, se desarrollan todas las actividades de la unidad didáctica, y en el Anexo VIII se desarrolla un plan de clase de la actividad de modelización (6.1.).

6.11. Evaluación

De acuerdo con lo establecido en el artículo 2 del RD 1105/2014, de 26 de diciembre, a efectos del presente Decreto, se entenderá por:

Criterios de evaluación son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.

Estándares de aprendizaje evaluables son especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.

6.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

Según el RD 1105/2014, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de los bloques 1 y 3 que se van a utilizar en dicha unidad didáctica, se muestran en el Anexo IX.

6.11.2. Procedimientos de evaluación

Los procedimientos de evaluación, la ponderación de cada uno de ellos y los criterios de corrección deben ser conocidos por el alumnado al inicio del curso. En todas las materias, los procedimientos de evaluación serán (Departamento de Matemáticas, 2018):

- Observación continua de la evolución del proceso de aprendizaje y maduración personal del alumnado.
- Revisión y análisis de las tareas o trabajos realizados tanto en clase como en casa.
- Las pruebas escritas u orales.

Los criterios de evaluación comunes, la promoción y la obtención de la titulación del alumnado serán:

- Adquisición de las competencias clave relacionadas a las capacidades determinadas en los objetivos generales de la etapa.
- La maduración personal y su posibilidad de progreso del alumnado.

Los criterios de evaluación específicos de la materia determinados en los proyectos curriculares y en la programación de la materia son el referente para valorar la adquisición de las competencias clave y el logro de objetivos. Por ello, se tendrá en cuenta unas rúbricas para evaluar al alumnado, como son:

- Rúbrica para la evaluación de las intervenciones y realización de actividades en clase (15%).
- Rúbrica para la evaluación de pruebas escritas (65%).
- Rúbrica para la evaluación del cuaderno del alumnado (5%).
- Rúbrica para la evaluación en la participación en los trabajos cooperativos (10%).
- Rúbrica para evaluar el interés y la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas (5%).

Además, se asumirán los criterios de calificación propuestos del proyecto lingüístico del centro donde se penaliza sobre la nota las faltas ortográficas (véase la Tabla 18) (Departamento de Matemáticas, 2018):

Presentación · Márgenes · Orden y limpieza · Letra legible · Otros	Redacción · Coherencia · Concordancias · Vocabulario · Otros	Ortografía
1er ciclo (-5%)	1er ciclo (-5%)	Faltas: -0.2 (Máximo 1 punto)
2º ciclo (-5%)	2º ciclo (-10%)	Faltas: -0.25 (Máximo 2 puntos)
Bachillerato (-5%)	Bachillerato (-10%)	Faltas: -0.25 (Máximo 2 puntos)

Tabla 26: Evaluación de los errores lingüísticos (Departamento de Matemáticas, 2018).

En el Anexo X, se presentan unas tablas de evaluación que se podrían usar durante dicha unidad didáctica, para evaluar aspectos como cuaderno de clase, trabajo del alumno en actividades individuales, en actividades grupales,....

6.11.3. Procesos de evaluación

De acuerdo con el Decreto 111/2016, artículo 14 de Evaluación, la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado será formativa, continua, integradora y diferenciada. La evaluación será objetiva, valorándose el rendimiento y esfuerzo del alumnado con objetividad.

Se seguirán los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables para comprobar la adquisición de competencias clave y el logro de objetivo del alumnado en las evaluaciones continuas y final. Así como, lo establecido la Consejería de Educación.

En el proceso de evaluación continua, se deben establecer medidas de refuerzo si el alumnado no progresa adecuadamente.

El profesorado deberá evaluar tanto los aprendizajes del alumnado como su propia didáctica como instrumento de mejora.

Por lo tanto, el procedimiento de evaluación del alumnado estará constituido por la evaluación inicial, la continua y la final o sumativa.

La evaluación inicial se realizará el primer mes del curso para analizar la situación del alumnado en cuanto a sus competencias clave junto a informes personales del curso anterior. Dicha evaluación será orientativa para tomar decisiones relativas al desarrollo de los conocimientos del alumnado y para adoptar medidas de ampliación, refuerzo o recuperación para quienes precisen una adaptación curricular.

Además, durante el inicio de cada unidad didáctica también se realizará una evaluación inicial para conocer los conocimientos previos del alumnado y para enfocar o adaptar la unidad según las necesidades. En esta unidad didáctica se realizará un test online, mediante una tablet, sobre conceptos básicos de triángulos, ángulos y semejanza. El test será obtenido de <https://www.thatquiz.org/es/>.

La evaluación continua tendrá en cuenta el progreso del alumnado según la adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa; para ello, se tomará como referente los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables. Si se detecta un progreso inadecuado del alumnado en cualquier momento del curso, se establecerán medidas de refuerzo.

La evaluación final o sumativa se realiza al final de un periodo determinado del proceso de enseñanza-aprendizaje para conocer en qué medida el alumnado ha alcanzado los objetivos marcados y las competencias clave. Se valorará el proceso global de cada alumno. Al final de cada unidad didáctica, se realizará un examen final, cuya rúbrica está en el Anexo X. En el caso de que el alumnado no supere el examen final de la unidad didáctica, se realizará un examen final de recuperación unos días posteriores.

El alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo se evaluará según el principio de inclusión, asegurándose su no discriminación y la igualdad efectiva en el sistema educativo. En la evaluación participará el departamento de orientación, el cual elabora un informe donde se especifica los elementos a adaptar para facilitar el acceso a la evaluación.

7. Conclusiones

Tras realizar el TFM, el cual es la culminación del Máster, podría realizar un balance positivo de todos los conocimientos adquiridos y las competencias profesionales para desarrollar la profesión de docente.

Durante el Máster he aprendido a interpretar la legislación educativa vigente para desarrollar la unidad didáctica según el nivel educativo del alumnado, a entender los diferentes entornos socioculturales en los que se puede encontrar el centro, así como los diversos perfiles del alumnado para atender a la diversidad. La importancia de desarrollar habilidades sociales para orientar tanto al alumnado como a su familia durante su formación. Además, durante mi experiencia de prácticas he detectado que, en muchas ocasiones, es necesario tener un poco de psicología o saber inteligencia emocional porque algunos alumnos necesitan ser escuchados o recibir atención. También, tuve que comprender que algunos viven en situaciones críticas o entornos complicados sin recursos donde tienen unas necesidades básicas por cubrir, o viven en entornos que no le dan relevancia a la educación.

He comprendido la necesidad de utilizar recursos didácticos innovadores o contextualizar los problemas para motivar al alumnado, para despertar su interés o para facilitar la enseñanza-aprendizaje. La mayoría del alumnado muestra un desinterés y desmotivación por las matemáticas. Por ello, para motivar al alumnado es útil realizar juegos de matemáticas, favorecer el trabajo en grupo o explicar las matemáticas como una materia de fácil aprendizaje mediante actividades motivadoras, con recursos manipulativos o TIC.

Por otro lado, destacar la relevancia de realizar una evaluación inicial para conocer el nivel educativo de cada alumno, así como, analizar su evolución continuada para detectar posibles dificultades y adoptar medidas inmediatamente, es decir, no esperar a la evaluación final de la unidad didáctica.

El alumnado comete errores básicos a la hora de simplificar una ecuación, o no pone los paréntesis, o no recuerda las fórmulas que debe aplicar, o no escribe bien los exponentes (como $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$), o no utiliza adecuadamente la calculadora porque no razona si es lógico o no el resultado que obtiene. Es decir, no se trata sólo de errores sobre conceptos trigonométricos.

Finalmente, tener en cuenta que los futuros nuevos profesores debemos aprender a fusionar las matemáticas y la didáctica, tal y como hemos aprendido en el Máster, para transmitir los conocimientos según el nivel educativo del alumnado. También, es fundamental prepararse y planificar las clases para prever las posibles dudas o dificultades que pueda tener el alumnado, y debemos realizar un plan de clase, sobre todo, para desarrollar las actividades de modelización.

8. Referencias

- Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Moreno Warleta, M., Serrano Marugán, E., Donaire Moreno, J.J. y Pérez, A. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4 ESO. Savia*. Madrid: Ediciones SM.
- Ayres Jr. F. y Moyer R. E. (1991). *Trigonometría*. México: McGraw-Hill.
- Beirigo Lopes y Lopes Hardoim (2018). Utilização de aplicativos gratuitos para atividade de campo no ensino de trigonometria no triângulo retângulo. *Revista Exitus, Santarém/PA*, 8(2), 219 – 243. DOI: 10.24065/2237-9460.2018v8n2ID535.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2006). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Calleja, J. (2016). Teaching Mathematics through Inquiry. *Educational Designer*, 3(9), 1-29.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE Grupo Editor.
- Colera Jiménez. J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2016a). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4 ESO*. Madrid: Grupo Anaya, S.A.
- Colera Jiménez. J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2016b). *Solucionario de 4º ESO Matemáticas Académicas Anaya*. Recuperado de <http://www.iesarrooyodelamiel.es/matematicas/materiales/4eso/solucionAcademicas2016/Tema%207.pdf> > (última consulta: 31/05/2019).
- Corbacho Pérez, J. (2005). *Cómo hacer programación didáctica y unidades didácticas*. Granada: Grupo Editorial Universitario, D.L.
- Costa Vilalta, M. A. (2015). *L'aprenentatge de la trigonometria a l'ensenyament obligatori i al batxillerat*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- De Diego Martín, B., Llerena Achútegui, A. y Padilla Garvía, F. (2000). *Temas de oposiciones a profesores de enseñanza secundaria Matemáticas. Tomo 2*. Madrid: Deimos.
- Departamento de Matemáticas. (2018). Programación de Departamento de Matemáticas del I.E.S. Jándula. Curso 2018/2019. Recuperado de https://drive.google.com/drive/folders/1gbHVWji57_av7RngcQccgTvJFneMxqa > última consulta: 30/05/2019).

- Equipo Directivo. (2018). Proyecto Educativo del I.E.S. Jándula. Curso 2018/2019. Recuperado de <https://drive.google.com/drive/folders/1VVUmdQtvHKnLU1GHPwdVlkwqDB1fy0O8> (última consulta: 31/05/2019).
- Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2017). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, 29(4), 1109-1131.
- I.E.S Jándula. (2019). Recuperado de <http://www.iesjandula.es/drupal/> (última consulta: 10/05/2019).
- Martínez Alcalá, A., Márquez González, J. J. y Lázaro Cutanda, D. (2016). Dinámicas educativas para la prevención del acoso escolar. Recuperado de <https://www.albacetejoven.es/wp-content/uploads/2018/03/dinmicas-contra-el-bullying-4-eso-centro-joven-albacete.pdf> (última consulta: 30/05/2019).
- Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M. y Romero Torralba, R. (2016a). *Matemáticas académicas 4º ESO*. Zaragoza: Grupo editorial Luis Vives.
- Mejía Sánchez-Bermejo, D., Ocaña Fernández, J. M. y Romero Torralba, R. (2016b). *Solucionario de 4º ESO Matemáticas Edelvives*. Recuperado de <https://www.bubok.es/buscar/solucionario-matem%C3%A1ticas-academicas-4%C2%BA-eso-edelvives> Recuperado de (última consulta: 31/05/2019).
- Oliveira Reis Júnior, Delcides Bernardesy dos Santos Reis (2018). Ensino e aprendizagem da trigonometria com o auxílio do software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 7(2), 03-28.
- Sánchez Rosal, A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. *EduTec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, 31.
- Thatquiz. (s.f). Recuperado de <https://www.thatquiz.org/es/> (última consulta: 25/05/2019).

➤ **Geogebra**

- Fernández-Cedrón Alonso, C. (2019). Circunferencia goniométrica. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/QCNmEfYF> (última consulta: 30/05/2019).
- Larrosa Cañestro, I. (2019). Funciones trigonométricas. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/zF5GzAKV> (última consulta: 30/05/2019).

Mascil. (2014a). Parking entrance. Recuperado de <http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d22178.ggb> (última consulta: 30/04/2019).

Mascil. (2014b). Parking entrance. Recuperado de <http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d22193.ggb> (última consulta: 30/04/2019).

➤ Vídeos

Godoy. (2013). Trigonometría: orígenes y aplicaciones. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4> (última consulta: 25/05/2019).

Grupo de investigación InecTIC. (2018). Truco para memorizar fácilmente las razones trigonométricas de ángulos notables. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=aOyEA3w3EgM> (última consulta: 25/05/2019).

Warner Bros. (2013). Cataratas Salvajes Parque Warner Madrid. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=qCt8WdZLYm4> (última consulta: 28/03/2019).

➤ Legislación

España. Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de junio de 2016, nº 122, p. 27-45.

España. Decreto 327/2010, de 13 de julio, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 16 de julio de 2010, nº 139, p. 8-34.

España. Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 26 de diciembre de 2007, nº 252, p. 1-60.

España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, de 10 de diciembre de 2013, nº 295, p. 1-64.

España. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de

aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de julio de 2016, nº 144, p. 108-396.

España. Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. Boletín Oficial del Estado, de 21 de septiembre de 1993, nº 226, p. 27400-27438.

España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 de enero de 2015, nº 25, p. 6986-7003.

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, nº 3, p. 169-546.

➤ **Asignaturas**

Colmenero Ruíz, M. J. (2018). *Procesos y contextos educativos*. Universidad de Jaén.

Luque Cañada, L. (2019). *Aprendizaje y enseñanza I de la materia de matemáticas*. Universidad de Jaén.

García Armenteros, M. (2019) *Aprendizaje y enseñanza II de la materia de matemáticas*. Universidad de Jaén.

ANEXO I: Gráficas de la comparativa del tipo de actividades de tres editoriales

En dicho Anexo I, se muestran unas gráficas que facilitarán el análisis de los datos obtenidos en el apartado “Fundamentación Curricular” sobre la comparativa del tipo de actividades de de las editoriales Anaya, Edelvives y SM.

En cuanto al número de actividades (ejercicios o problemas contextualizados) que complementan el enunciado con un dibujo o esquema, pero sin considerar las actividades resueltas y la autoevaluación, se muestran en la Tabla 27 y en las siguientes gráficas (véase la Figura 37):

Tipos actividades	Anaya	Edelvives	SM
Actividades sin dibujo	59	65	90
Actividades con dibujo	18	33	26
Total	77	98	116

Tabla 27: Tipos de actividades con o sin dibujo (elaboración propia).

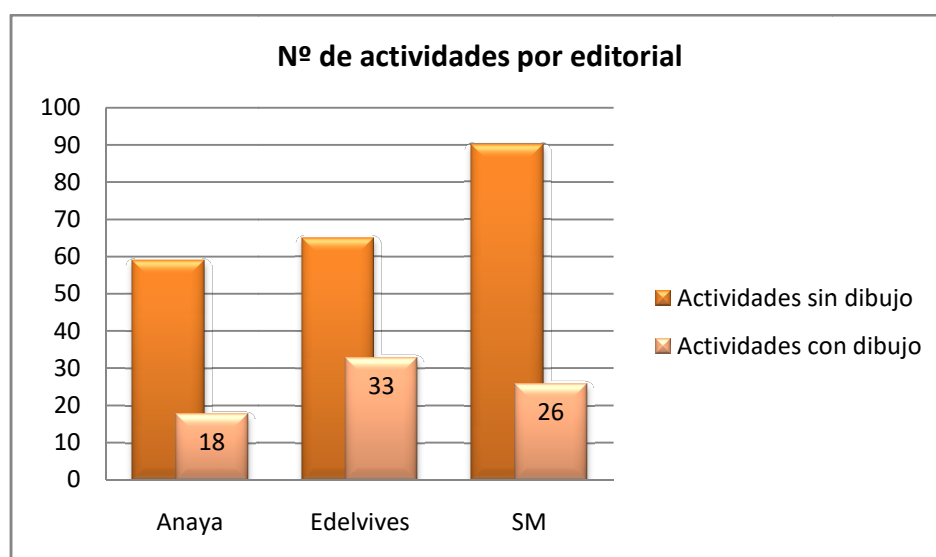


Figura 37: Número de actividades con dibujo por editorial (elaboración propia).

Se puede observar que la editorial Edelvives presenta más actividades con dibujo, seguido por SM, y en último lugar, Anaya (véase la Figura 38).

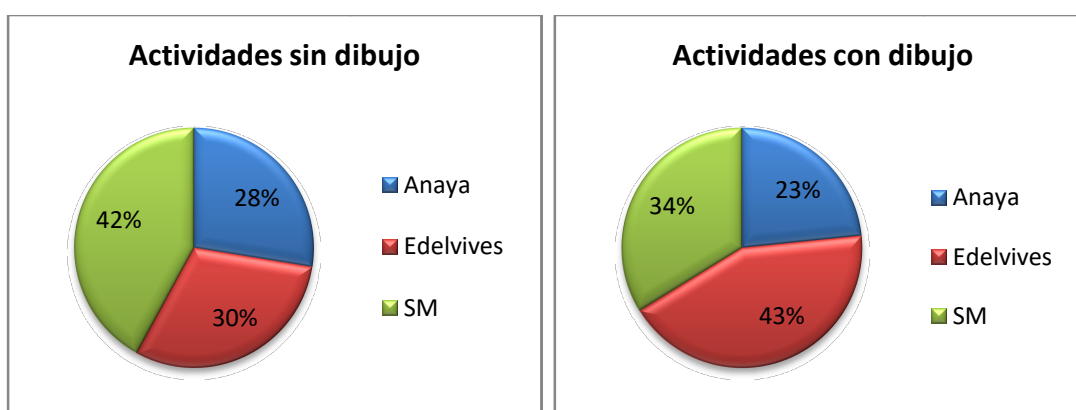


Figura 38: Gráficos comparativos de actividades con o sin dibujo (elaboración propia).

Sin embargo, se debe tener en cuenta que la editorial SM presenta más actividades que Edelvives, seguida por Anaya. Por ello, para realizar la comparativa en igualdad de condiciones, se va a tener en cuenta los porcentajes de actividades totales que dedican a las actividades con dibujo o esquema dentro de cada editorial, para después comparar esos porcentajes con el resto de editoriales (véase la Tabla 28 y la Figura 39).

Porcentaje actividades	Anaya	Edelvives	SM
Actividades sin dibujo	76,62	66,33	77,59
Actividades con dibujo	23,38	33,67	22,41

Tabla 28: Comparativa en % de actividades con o sin dibujo (elaboración propia).

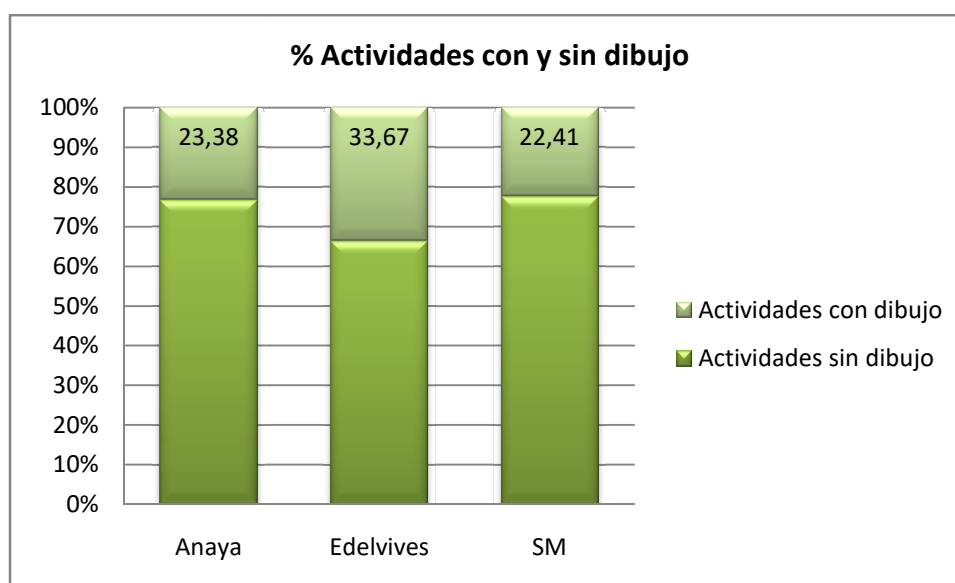


Figura 39: Comparativa en % de actividades con o sin dibujo (elaboración propia).

Se puede observar en la gráfica anterior que de todas las actividades que presentan cada editorial, Edelvives dedica un mayor porcentaje a las actividades con representación de dibujos o esquemas para facilitar la comprensión del enunciado.

En cuanto al número de actividades dedicadas a ejercicios y a problemas contextualizados en la vida real, pero sin considerar las cuestiones teóricas o de reflexionar y la autoevaluación, se muestran en la Tabla 29 y en las gráficas (véase la Figura 40):

Tipos actividades	Anaya	Edelvives	SM
Ejercicios	71	94	130
Problemas contextualizados	20	25	24
Total	91	119	154

Tabla 29: Tipos de actividades contextualizadas o no (elaboración propia).

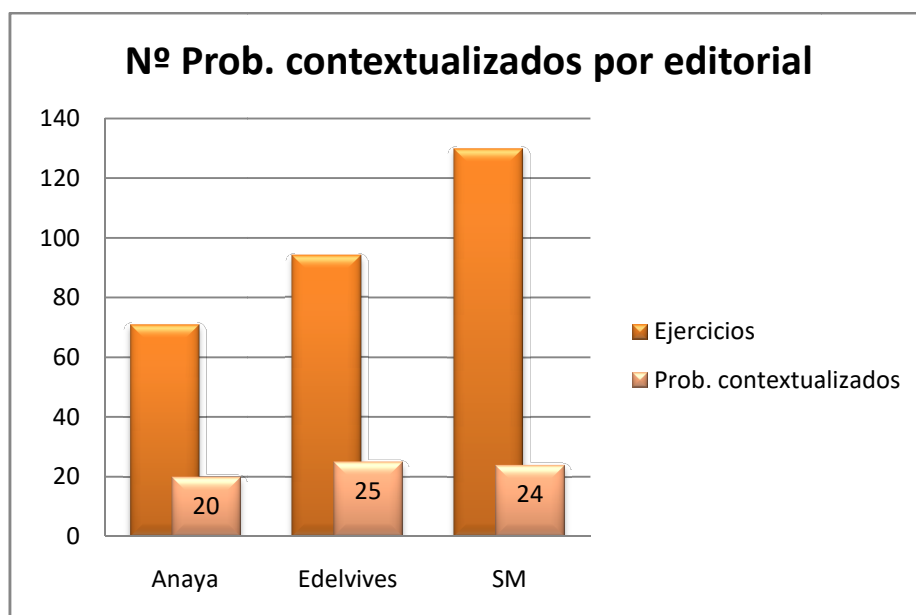


Figura 40: Número de problemas contextualizados por editorial (elaboración propia).

Se puede observar que las editoriales Edelvives y SM son las que tienen más problemas contextualizados, pero muy seguidas por Anaya; por lo que se podría decir que casi todas las editoriales presentan el mismo número de problemas contextualizados (véase la Figura 41).

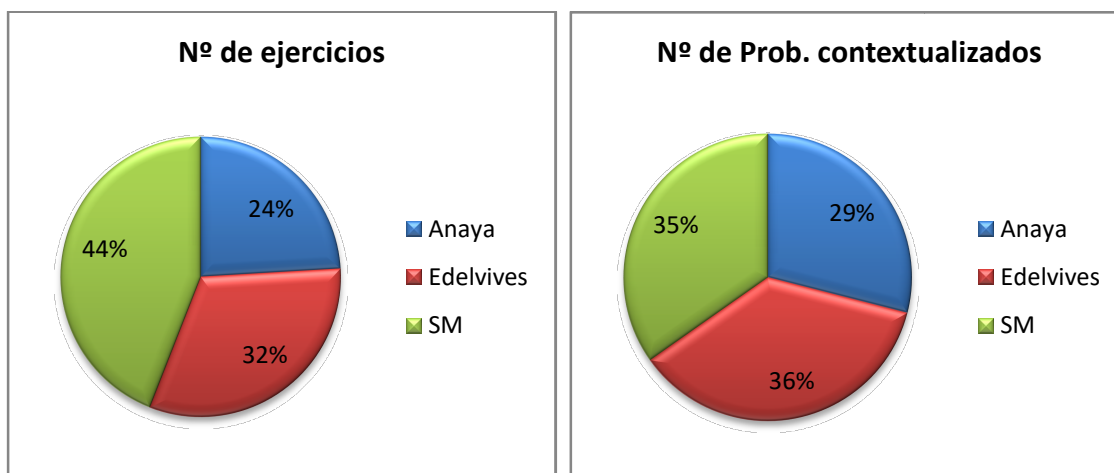


Figura 41: Gráficos comparativos de problemas contextualizados (elaboración propia).

De nuevo, para realizar la comparativa en igualdad de condiciones debido a que SM presenta más actividades que Edelvives, seguido por Anaya; se va a tener en cuenta los porcentajes de actividades totales que dedican a problemas contextualizados dentro de cada editorial, para después comparar esos porcentajes con el resto de editoriales (véase la Tabla 30 y la Figura 42).

Porcentaje actividades	Anaya	Edelvives	SM
Ejercicios	78,02	78,99	84,42
Problemas contextualizados	21,98	21,01	15,58

Tabla 30: Comparativa en % de problemas contextualizados (elaboración propia).

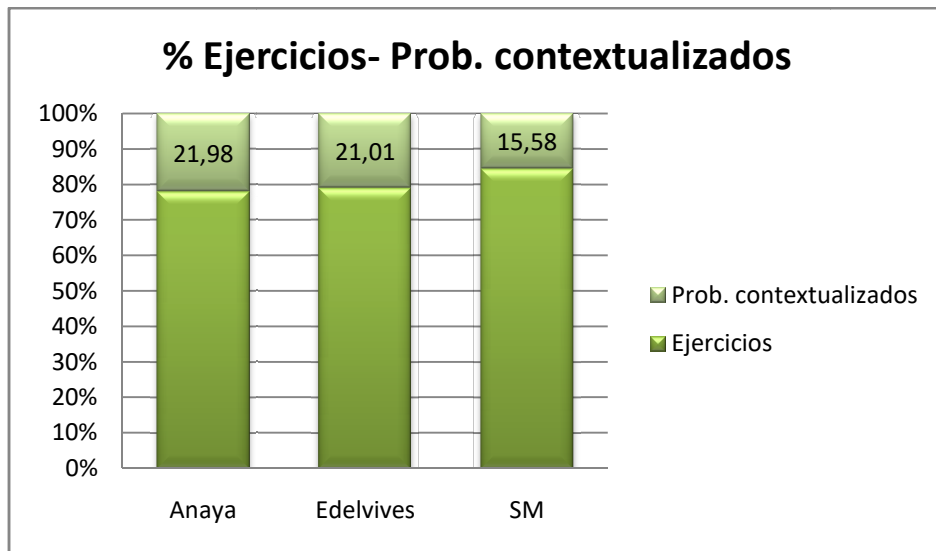


Figura 42: Comparativa en % de problemas contextualizados (elaboración propia).

Se puede observar en la gráfica anterior que de todas las actividades que presentan cada editorial, Anaya es la que dedica un mayor porcentaje a problemas contextualizados, muy seguido de Edelvives, pero SM es la que presenta el menor porcentaje a pesar de ser la editorial con mayor número de actividades.

ANEXO II: Cuestionario cualitativo

La entrevista al profesorado de 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato realizada por Costa-Vilalta (2015), se estructura en tres partes:

A. Cuestiones sobre la trigonometría.

El enfoque de la trigonometría, la visión competencial del tema y el momento del curso más adecuado para impartir esta unidad.

1. ¿Qué enfoque le da a la trigonometría en su centro en 4º de E.S.O. y/o al Bachillerato?
2. ¿Cree que la trigonometría se debería explicar dándole una visión más competencial en E.S.O.? ¿Por qué? ¿Cómo se podría conseguir? ¿Cuáles son los principales obstáculos?
3. ¿Cuál es el mejor momento del curso para impartir la unidad de trigonometría? ¿Por qué?

B. Cuestiones sobre el profesor que imparte la trigonometría.

Los aspectos de trigonometría en los que pone más énfasis el profesor, las dificultades y obstáculos en el momento de impartir el tema y los cambios hechos en la planificación inicial.

4. ¿Cuáles son los aspectos de la trigonometría en los que pone más énfasis en el momento de impartir la unidad? ¿Cuáles son sus objetivos?
5. ¿Qué dificultades / obstáculos se ha encontrado en el momento de impartir el tema de trigonometría a los alumnos de su grupo? ¿Cómo lo ha resuelto?
6. Cuando imparte el tema de trigonometría, ¿tiene que hacer cambios respecto a tu planificación? ¿Por qué cree que es así?

C. Cuestiones sobre los alumnos.

Los aspectos de la trigonometría que suponen más dificultad al alumnado, los errores que cometen, las herramientas o recursos utilizados en el momento de impartir la unidad de trigonometría, la tipología de las actividades, la evaluación y la atención a la diversidad.

7. ¿Cuáles son los aspectos de la trigonometría que más dificultad le supone al alumnado? ¿Y qué le supone menos dificultad? ¿A qué lo atribuye? ¿Cree que perduran en el tiempo? ¿Por qué?
8. ¿Cuáles son los principales errores que comete el alumnado cuando estudia el tema de trigonometría?
9. ¿Cuál es la temporización referida al tema de trigonometría que ha seguido en tu grupo? Expón, brevemente, indicando cuántas sesiones ha dedicado. (Adjuntad programación del tema de trigonometría).

10. ¿Qué herramientas, recursos ... ha utilizado en el momento de impartir la unidad de trigonometría?
11. ¿De qué tipología son las actividades que ha planteado al alumnado? ¿Puede cuantificarlas? (Adjunte el material de trigonometría entregado al alumnado).
12. ¿Cree que existen dificultades del alumnado, las cuales tienen relación con los conocimientos previos necesarios para trabajar la trigonometría? ¿Cree que les faltan conocimientos de geometría? (Geometría versus trigonometría).
13. ¿Cree que el uso de la calculadora facilita la resolución de problemas de trigonometría? ¿Utiliza alguna otra herramienta informática o de algún otro tipo para trabajar la trigonometría?
14. ¿Cómo evalúa el tema de trigonometría? ¿Qué instrumentos utiliza? ¿Cómo calcula la nota de este tema? ¿Cuáles son los criterios de corrección?
15. ¿Cómo llevan a cabo la atención a la diversidad en el caso de la trigonometría?

ANEXO III: Cuestionario cuantitativo

Los cuestionarios iniciales y finales de 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato realizados por Costa-Vilalta (2015), son los siguientes:

Cuestionario inicial de 4º E.S.O.

1. La sombra proyectada por un semáforo de 1,8 m de altura es de 1,5 m. En este mismo momento, un edificio proyecta una sombra de 27 m. Encuentra la altura del edificio.

2. Calcula la longitud de los lados x , y y z de la Figura 43:

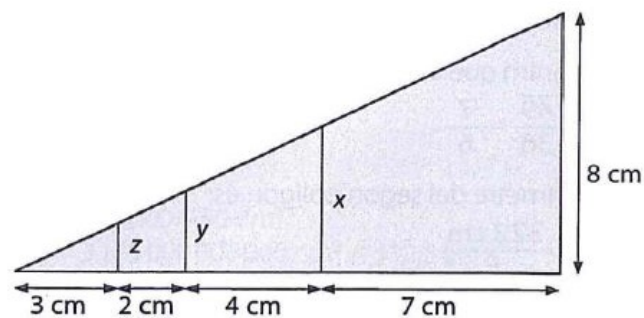


Figura 43: Cuestionario inicial de 4º E.S.O. Pregunta 2 (Costa-Vilalta, 2015).

3. Responde las siguientes cuestiones:

- a) ¿Los dos triángulos de la figura son semejantes? ¿Por qué?
- b) Calcula la longitud del lado x del triángulo ABC de la Figura 44.

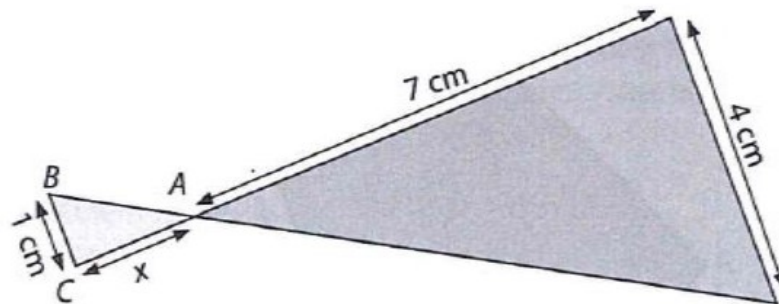


Figura 44: Cuestionario inicial de 4º E.S.O. Pregunta 3 (Costa-Vilalta, 2015).

4. Los dos triángulos rectángulos de la Figura 45 son semejantes.

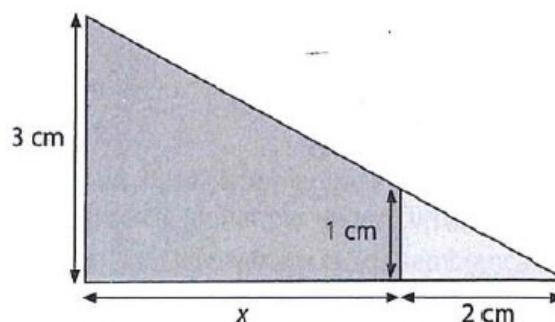


Figura 45: Cuestionario inicial de 4º E.S.O. Pregunta 4 (Costa-Vilalta, 2015).

- Encuentra la razón de semejanza.
 - Calcula el área de cada triángulo.
 - Calcula la razón (cociente) entre las áreas de los dos triángulos.
 - ¿Qué relación existe entre la razón de semejanza y la razón de las áreas?
5. El plano de una ciudad está realizado a escala $E = 1: 5000$.
- ¿Qué significa esta escala?
 - ¿A qué distancia sobre el plano deben estar dos puntos de la ciudad separados por 1,2 Km?
 - ¿Cuál es la distancia entre dos puntos de la ciudad que en el plano distan 35 cm?

Cuestionario final 4º E.S.O.

- Calcula la longitud de los lados x , y y z de la Figura 46:

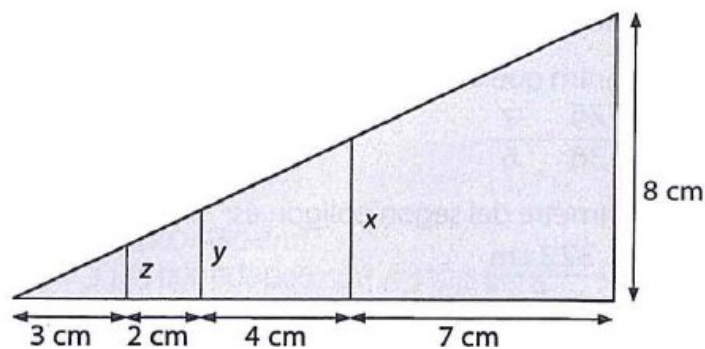


Figura 46: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 1 (Costa-Vilalta, 2015).

- La escalera de la Figura 47 forma un ángulo de 60° con el suelo, y su pie se encuentra situado a 2,4 m de la pared. ¿Cuál es la longitud x de la escalera?

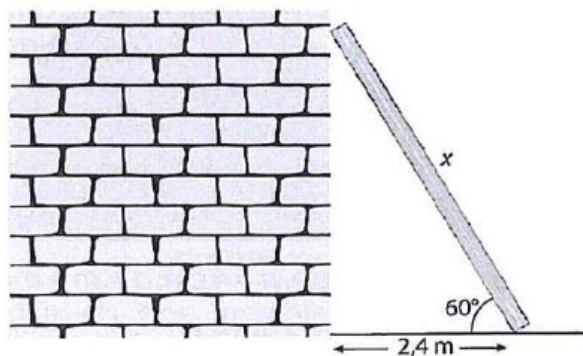


Figura 47: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 2 (Costa-Vilalta, 2015).

- Determina el valor de x y de y en el siguiente triángulo rectángulo sabiendo que $\sin \alpha = 2/3$ (véase la Figura 48):

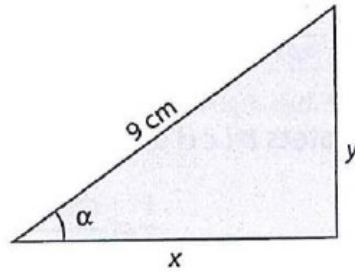


Figura 48: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 3 (Costa-Vilalta, 2015).

4. Determina las razones trigonométricas del ángulo β ($\sin \beta$, $\cos \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$) del triángulo rectángulo de la Figura 49, sin utilizar la calculadora:

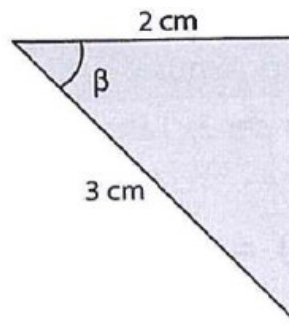


Figura 49: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 4 (Costa-Vilalta, 2015).

5. Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco bajo un ángulo de 55° (véase la Figura 50). ¿A qué distancia del faro se encuentra el barco?

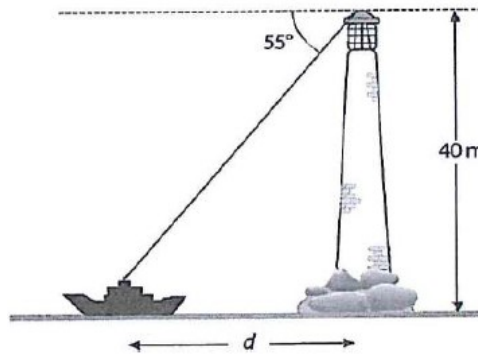


Figura 50: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 5 (Costa-Vilalta, 2015).

6. Desde cierto punto se observa la parte más alta de una chimenea de una casa bajo un ángulo de 60° . Retrasando la posición 250 m en la dirección adecuada, el ángulo se convierte de 30° (véase la Figura 51). ¿Cuál es la altura de esta chimenea?

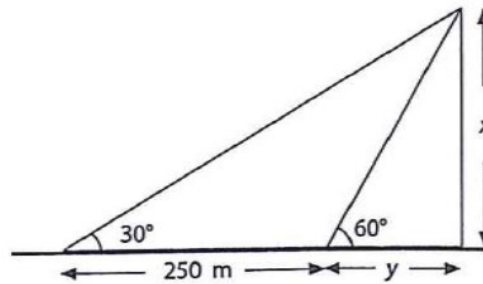


Figura 51: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 5

Cuestionario inicial 1º Bachillerato

El cuestionario inicial de 1º de Bachillerato es el mismo que el cuestionario final de 4º de E.S.O.

Cuestionario final de 1º Bachillerato

1. Resuelve:

a) $\sin 2x - \sin x = 0$

b) $2 - \cos 2x = 3 \sin x$

2. Demostrar la identidad: $(1 - \cos 2x) \cdot \cotg x = \sin 2x$

3. Si α y β son dos ángulos del segundo y el tercero cuadrante, respectivamente, y $\sin \alpha = 3/5$ y $\cos \beta = -5/13$.

a) Calcula, sin emplear la calculadora, las razones trigonométricas de α y de β (sólo seno, coseno y tangente).

b) Calcula, sin emplear la calculadora: $\cos 2\beta$, $\tg(\alpha - \beta)$.

4. Las bases de un trapecio isósceles miden 8 cm y 12 cm, y la altura es de 5 cm. Halla el perímetro y cuánto miden sus diagonales.

5. ¿A qué distancia vuela el pájaro de la Figura 52?

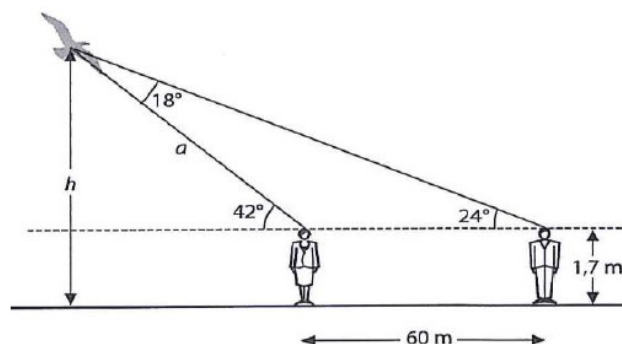


Figura 52: Cuestionario final de 1º Bachillerato. Pregunta 5

6. Resuelve el triángulo de lados: $a = 7$ cm, $b = 3$ cm y $c = 6$ cm.

ANEXO IV: Resultados de las pruebas

Los resultados de cada pregunta de las pruebas realizadas por Costa-Vilalta (2015) al alumnado de 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato, son los siguientes:

[Análisis de los principales errores en la prueba inicial de 4º de E.S.O.](#)

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 1 son:

- Elaboración incorrecta del esquema del problema.
- Aplicación incorrecta de la semejanza de triángulos (Teorema de Thales) por no respetar la relación entre los lados.
- La forma de redacción del problema.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 2 son:

- No realizar el esquema de los triángulos resultantes de la figura.
- No entender el concepto de triángulos semejantes.
- Aplicación errónea de la semejanza de triángulos.
- Arrastrar resultados incorrectos de los apartados previos (altura de la segunda figura).

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 3 son:

- Aplicación incorrecta del Teorema de Pitágoras debido a la incomprensión de la hipotenusa y los catetos, o el hecho de que los triángulos deben ser rectángulos.
- Aplicación incorrecta de la semejanza de triángulos (Teorema de Thales) por no respetar la relación entre los lados.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 4 son:

- Aplicación incorrecta de la semejanza de triángulos (Teorema de Thales) por no respetar la relación entre los lados. Además, consideran la base del triángulo como $2x$ en lugar de $(2+x)$.
- Cálculo erróneo del valor de x , y considerarlo igual a k .
- Errores de cálculo básico y de resolución de ecuaciones al despejar la incógnita.
- Aplicación incorrecta de la fórmula del área del triángulo.
- Suponer que la altura del triángulo es la hipotenusa.
- Utilización de datos calculados previamente, pudiendo arrastrar los posibles errores cometidos.
- No tener claro qué se solicita en el problema.
- No comprender el concepto de razón entre las áreas.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 5 son:

- Realización incorrecta de la conversión de unidades (de cm a km o de km a cm).
- Utilizar diferentes unidades a la vez.
- Aplicación incorrecta de la relación establecida en la escalera.
- Errores de cálculo básico.
- La redacción del problema.

Análisis de los principales errores en la prueba final de 4º de E.S.O.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 1 son:

- No realizar el dibujo o esquema de los triángulos resultantes en la figura.
- No comprender el concepto de triángulos semejantes.
- Aplicar erróneamente la semejanza de triángulos.
- Arrastrar errores de los cálculos previos (altura de la segunda figura).

En este problema, ha disminuido el número de alumnos que cometen errores en su resolución respecto a la prueba inicial.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 2 son:

- No comprender el concepto de razón trigonométrica de un ángulo.
- Confundir el uso de la razón trigonométrica en cada ocasión.
- Resolver erróneamente la ecuación al despejar la incógnita.
- No comprender la definición de seno, coseno y tangente de un ángulo y aplicarlas incorrectamente.
- Operar con ángulos y lados sin la razón trigonométrica.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 3 son:

- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo.
- Considerar el valor del seno, coseno o tangente de un ángulo como el ángulo.
- Usar incorrectamente el Teorema de Pitágoras al no identificar la hipotenusa y los catetos.
- Calcular erróneamente el valor del ángulo mediante una razón trigonométrica.
- Resolver incorrectamente ecuaciones sencillas al despejar la incógnita.
- Operar con las longitudes de los lados y los ángulos.
- Utilizar datos calculados previamente realizando aproximaciones.
- Confundir una razón trigonométrica con otra.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 4 son:

- Aplicar erróneamente el Teorema de Pitágoras y/o errores de cálculo.
- Aplicar erróneamente la relación fundamental de la trigonometría.
- Suponer el mismo valor (45°) en los ángulos del triángulo.
- Calcular erróneamente el valor del cateto solicitado.
- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo.
- Creer que el seno y el coseno pueden tomar valores superiores a uno.
- Realizar suposiciones erróneas con respecto las razones trigonométricas.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 5 son:

- Confundir el cateto con la hipotenusa con respecto la distancia del faro al barco.
- Confundir las definiciones de las razones trigonométricas.
- Operar los ángulos y los lados a la vez sin utilizar una razón trigonométrica.
- Uso erróneo de las razones trigonométricas.
- No comprender el concepto de ángulo complementario.
- Errores de cálculo.
- Despejar incorrectamente la incógnita de una ecuación sencilla.
- Escasa precisión del resultado debido al uso de pocos decimales.
- No comprender el concepto de razón trigonométrica y de longitud.
- Equivocarse en la utilidad de las razones trigonométricas y en su definición.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 6 son:

- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo.
- Calcular el seno del ángulo utilizando sólo los ángulos y los lados como una proporcionalidad ($60^\circ = x/y$).
- Operar longitudes y ángulos sin emplear una razón trigonométrica debido a que no comprenden el concepto de razón trigonométrica.
- No dividir correctamente los triángulos y cometer errores al seleccionar la base.
- No representar el esquema de los triángulos resultantes.
- Aplicar incorrectamente la propiedad distributiva.
- Fallos en el cálculo del m.c.m.
- Despejar la incógnita de una ecuación incorrectamente.
- Confundir el concepto de triángulo rectángulo y no rectángulo.
- Aplicar incorrectamente el método de sustitución en el sistema.
- Considerar que el producto de ángulos en una razón trigonométrica es igual al producto de razones trigonométricas iguales.
- Utilizar resultados previos incorrectos.

En mayor medida, los fallos cometidos se deben a problemas en la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Análisis de los principales errores en la prueba inicial de 1º de Bachillerato

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 1 son:

- No representar el dibujo o esquema de los triángulos.
- No comprender el concepto de triángulos semejantes.
- Aplicar erróneamente la semejanza de triángulos.
- Arrastrar resultados calculados previamente con error (altura de la segunda figura).

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 2 son:

- No comprender el concepto de razón trigonométrica de un ángulo.
- Confundir una razón trigonométrica por otra.
- Resolver incorrectamente una ecuación sencilla al despejar la incógnita.
- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo ni aplicarlas adecuadamente.
- Fallos en el uso de la calculadora.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 3 son:

- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo.
- Considerar el valor del seno, coseno o tangente de un ángulo como un ángulo ($\sin \alpha = 1/2$, como $\alpha = 1/2$).
- Utilizar incorrectamente el Teorema de Pitágoras.
- Calcular erróneamente o con poca exactitud el valor del ángulo.
- Resolver las ecuaciones despejando incorrectamente las incógnitas.
- No finalizar los cálculos o realizarlos erróneamente.
- Usar resultados calculados previamente mediante aproximaciones.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 4 son:

- Errores de cálculo al emplear el Teorema de Pitágoras y aplicarlo incorrectamente.
- Calcular incorrectamente el valor del cateto solicitado.
- Usar incorrectamente las fórmulas trigonométricas.
- Creer que el seno o el coseno de un ángulo puede ser superior a uno.

- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente.
- Realizar suposiciones equívocas.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 5 son:

- Suponer la hipotenusa del triángulo como la distancia del faro al barco.
- No comprender la definición y la utilidad de las razones trigonométricas.
- No asimilar el concepto de ángulo complementario.
- Uso erróneo de las razones trigonométricas.
- Errores de cálculo.
- Errores de una ecuación sencilla al despejar la incógnita.
- Resultados con poca precisión o pocos decimales.
- Fallos en el cálculo de ángulos complementarios.
- No asimilar los conceptos de razón trigonométrica y de longitud.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 6 son:

- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente.
- No comprender el concepto de razón trigonométrica; y utilizar los ángulos y los lados como una proporción.
- No dividir los triángulos correctamente y no identificar las bases.
- No representar el esquema de los triángulos resultantes.
- No aplicar la propiedad distributiva correctamente.
- No despejar adecuadamente la incógnita de la ecuación.
- Usar incorrectamente el método de sustitución o igualación para resolver un sistema.
- No priorizar la operaciones en la resolución de una ecuación.
- Arrastrar resultados incorrectos calculados previamente.
- No comprender el concepto de triángulo rectángulo y no rectángulo, ni saber las fórmulas a aplicar.
- No operar el m.c.m. al resolver una ecuación.
- Operar con ángulos y longitudes sin aplicar una razón trigonométrica al no comprender su concepto.

En la mayoría de los casos, los errores se deben a problemas en la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

[Análisis de los principales errores en la prueba final de 1º de Bachillerato](#)

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 1 son:

- Simplificar una igualdad sin sacar factor común.
- Calcular el cuadrado de una diferencia erróneamente.
- Despejar mal la incógnita de una ecuación.
- No comprender las fórmulas trigonométricas.
- Confundir el cuadrado del seno con el seno del ángulo doble.
- Errores al realizar cálculos con la calculadora.
- Olvidar los paréntesis cuando hay un signo negativo delante de una expresión.
- Simplificar mal una expresión.
- No comprender el teorema fundamental de la trigonometría.
- Fallos al utilizar las fórmulas trigonométricas.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 2 son:

- Fallos al utilizar algunas fórmulas trigonométricas.
- Confundir el coseno al cuadrado de un ángulo con el coseno del ángulo doble.
- Errores al aplicar la propiedad distributiva.
- Simplificar erróneamente las expresiones.
- No priorizar la operaciones durante los cálculos.
- Olvidar los paréntesis.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 3 son:

- No considerar el cuadrante para aplicar el signo correspondiente a la razón trigonométrica.
- No comprender el teorema fundamental de la trigonometría: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Usar incorrectamente la relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Fallos de cálculo.
- Arrastrar errores de los cálculos previos.
- No comprender que seno de un ángulo no puede tomar valores inferiores a menos uno ni superiores a uno.
- Fallos en algunas fórmulas trigonométricas
- No priorizar las operaciones durante los cálculos.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 4 son:

- No representar el esquema del triángulo y seleccionar la base incorrectamente.
- Fallos de cálculo.
- Arrastrar errores de los cálculos previos.
- No comprender el concepto de trapecio isósceles.

- No comprender u olvidar el concepto de perímetro.
- Calcular mal el perímetro.
- Fallos en la fórmula del Teorema del coseno.
- No comprender el concepto de triángulo rectángulo y no rectángulo, ni las fórmulas a aplicar.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 5 son:

- No comprender las definiciones de seno, coseno y tangente.
- No comprender el concepto de razón trigonométrica y operar los ángulos y las longitudes sin aplicar una razón trigonométrica.
- No dividir los triángulos, ni considerar la base adecuadamente.
- No representar el esquema de los triángulos resultantes.
- No comprender el concepto de triángulo rectángulo y no rectángulo, ni las fórmulas a aplicar.
- Errores al aplicar la propiedad distributiva.
- Despejar incorrectamente la incógnita de una ecuación.
- No priorizar las operaciones al resolver una ecuación.
- Aplicar la linealidad en funciones trigonométricas.
- Utilizar las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo para resolver un triángulo no rectángulo.
- Arrastrar resultados erróneos de los cálculos previos.
- Obtener resultados aproximados al utilizar pocos decimales en el cálculo.
- Considerar que la hipotenusa del triángulo corresponde a la distancia a la que vuela el pájaro, en lugar del cateto.

Algunos errores se deben a problemas al resolver las ecuaciones.

Las principales causas que han provocado los errores al resolver el problema 6 son:

- Confundir un triángulo no rectángulo por uno rectángulo.
- Fallos en la fórmula del Teorema del Coseno.
- Considerar un triángulo rectángulo de catetos 3 y 6, la hipotenusa 7; así como aplican las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente.
- Despejar erróneamente el $\cos \alpha$ del Teorema del coseno.
- No priorizar las operaciones en los cálculos.
- Fallos de cálculo.
- No representar el esquema del triángulo.
- Operar los ángulos y las longitudes sin una razón trigonométrica al no comprender el concepto de razón trigonométrica.
- Arrastrar resultados erróneos calculados previamente.

ANEXO V: Objetivos de etapa

En el Anexo V, se detallan los objetivos de la etapa y la relación que existe con las competencias clave, de acuerdo al artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (L.O.E.), modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (L.O.M.C.E.) (véase la Tabla 31):

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.	Competencia social y ciudadana (CSC).
b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.	Competencia para aprender a aprender (CAA). Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.	Competencia social y ciudadana (CSC).
d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.	Competencia social y ciudadana (CSC).

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.	Competencia en comunicación lingüística (CCL). Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). Competencia digital (CD).
f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.	Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP). Competencia para aprender a aprender (CAA).
h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.	Competencia en comunicación lingüística (CCL).
i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.	Competencia en comunicación lingüística (CCL).
j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.	Conciencia y expresiones culturales (CEC).

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). Competencia social y ciudadana (CSC).
l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.	Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Tabla 31: Objetivos de etapa (Departamento de Matemáticas).

Del mismo modo, se establece la relación de las competencias clave con los objetivos generales añadidos por el artículo 3.2 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la E.S.O. en la Comunidad Autónoma de Andalucía (véase la Tabla 32).

a) Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.	Competencia en comunicación lingüística (CCL). Conciencia y expresiones culturales (CEC).
b) Conocer y apreciar los elementos específicos de la cultura andaluza para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.	Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Tabla 32: Objetivos de etapa en Andalucía (Departamento de Matemáticas).

ANEXO VI: Contenidos interdisciplinares y transversales

Según el Artículo 6 del RD 111/2016 sobre elementos transversales, sin perjuicio de su tratamiento específico en las materias de la E.S.O. que se vinculan directamente con los aspectos detallados a continuación, el currículo incluirá de manera transversal los siguientes elementos:

- a) El respeto al Estado de Derecho y a los derechos y libertades fundamentales recogidos en la Constitución Española y en el Estatuto de Autonomía para Andalucía.
- b) El desarrollo de las competencias personales y las habilidades sociales para el ejercicio de la participación, desde el conocimiento de los valores que sustentan la libertad, la justicia, la igualdad, el pluralismo político y la democracia.
- c) La educación para la convivencia y el respeto en las relaciones interpersonales, la competencia emocional, el autoconcepto, la imagen corporal y la autoestima como elementos necesarios para el adecuado desarrollo personal, el rechazo y la prevención de situaciones de acoso escolar, discriminación o maltrato, la promoción del bienestar, de la seguridad y de la protección de todos los miembros de la comunidad educativa.
- d) El fomento de los valores y las actuaciones necesarias para el impulso de la igualdad real y efectiva entre mujeres y hombres, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de nuestra sociedad y al conocimiento acumulado por la humanidad, el análisis de las causas, situaciones y posibles soluciones a las desigualdades por razón de sexo, el respeto a la orientación y a la identidad sexual, el rechazo de comportamientos, contenidos y actitudes sexistas y de los estereotipos de género, la prevención de la violencia de género y el rechazo a la explotación y abuso sexual.
- e) El fomento de los valores inherentes y las conductas adecuadas a los principios de igualdad de oportunidades, accesibilidad universal y no discriminación, así como la prevención de la violencia contra las personas con discapacidad.
- f) El fomento de la tolerancia y el reconocimiento de la diversidad y la convivencia intercultural, el conocimiento de la contribución de las diferentes sociedades, civilizaciones y culturas al desarrollo de la humanidad, el conocimiento de la historia y la cultura del pueblo gitano, la educación para la cultura de paz, el respeto a la libertad de conciencia, la consideración a las víctimas del terrorismo, el conocimiento de los elementos fundamentales de la memoria democrática vinculados principalmente con hechos que forman parte de la historia de Andalucía, y el rechazo y la prevención de la violencia terrorista y de cualquier otra forma de violencia, racismo o xenofobia.

- g) El desarrollo de las habilidades básicas para la comunicación interpersonal, la capacidad de escucha activa, la empatía, la racionalidad y el acuerdo a través del diálogo.
- h) La utilización crítica y el autocontrol en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación y los medios audiovisuales, la prevención de las situaciones de riesgo derivadas de su utilización inadecuada, su aportación a la enseñanza, al aprendizaje y al trabajo del alumnado, y los procesos de transformación de la información en conocimiento.
- i) La promoción de los valores y conductas inherentes a la convivencia vial, la prudencia y la prevención de los accidentes de tráfico. Asimismo se tratarán temas relativos a la protección ante emergencias y catástrofes.
- j) La promoción de la actividad física para el desarrollo de la competencia motriz, de los hábitos de vida saludable, la utilización responsable del tiempo libre y del ocio y el fomento de la dieta equilibrada y de la alimentación saludable para el bienestar individual y colectivo, incluyendo conceptos relativos a la educación para el consumo y la salud laboral.
- k) La adquisición de competencias para la actuación en el ámbito económico y para la creación y desarrollo de los diversos modelos de empresas, la aportación al crecimiento económico desde principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social, la formación de una conciencia ciudadana que favorezca el cumplimiento correcto de las obligaciones tributarias y la lucha contra el fraude, como formas de contribuir al sostenimiento de los servicios públicos de acuerdo con los principios de solidaridad, justicia, igualdad y responsabilidad social, el fomento del emprendimiento, de la ética empresarial y de la igualdad de oportunidades.
- l) La toma de conciencia sobre temas y problemas que afectan a todas las personas en un mundo globalizado, entre los que se considerarán la salud, la pobreza en el mundo, la emigración y la desigualdad entre las personas, pueblos y naciones, así como los principios básicos que rigen el funcionamiento del medio físico y natural y las repercusiones que sobre el mismo tienen las actividades humanas, el agotamiento de los recursos naturales, la superpoblación, la contaminación o el calentamiento de la Tierra, todo ello, con objeto de fomentar la contribución activa en la defensa, conservación y mejora de nuestro entorno como elemento determinante de la calidad de vida.

ANEXO VII: Desarrollo de las actividades de la unidad didáctica

En este Anexo VII se desarrollarán las actividades de la unidad didáctica de Trigonometría.

Sesión 1

Actividad 1.1: vídeo y debate

En el vídeo “Trigonometría: Orígenes y Aplicaciones” sobre la historia de la trigonometría y sus aplicaciones trata la evolución histórica tanto de los matemáticos que la desarrollaron como sus aplicaciones a lo largo del tiempo. Con dicho vídeo se pretende motivar al alumnado y despertar su interés por el tema <https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4> (11 min).

Se debatirá con el alumnado sobre el vídeo visto, las impresiones causadas al reflexionar sobre todas las aplicaciones de la trigonometría a lo largo de la historia (14 min).

Actividad 1.2: Test

Se realizará un test, de quince preguntas, sobre conceptos básicos de triángulos, ángulos y semejanza (25 min) (véase las Figuras 53-57). Para realizar dicho test, el alumnado dispondrá de una tablet.

Triángulos		Triángulos	
			
☐ Rectángulo	☐ Acutángulo	☐ Rectángulo	☐ Escaleno
☐ Isósceles	☐ Obtusángulo	☐ Isósceles	☐ Equilátero

Figura 53: Test de evaluación inicial (Thatquiz, s.f).

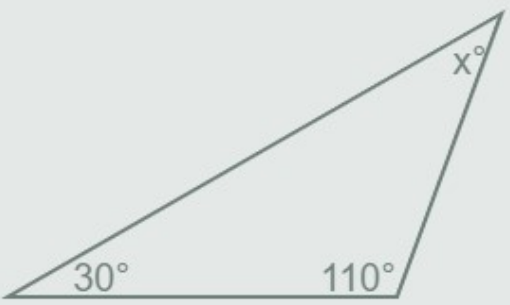
Triángulos



☐ Rectángulo
 ☐ Acutángulo

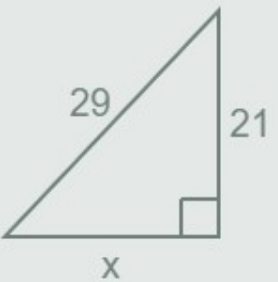
☐ Equilátero
 ☐ Obtusángulo

Triángulos



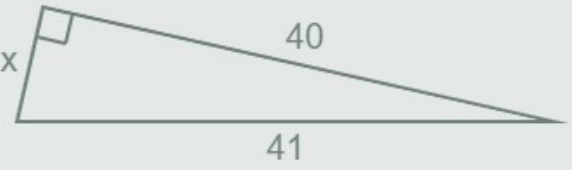
x =

Triángulos



x = **cm**

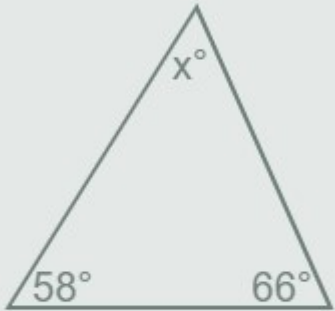
Triángulos



x = **cm**

Figura 54: Test de evaluación inicial (Thatquiz, s.f).

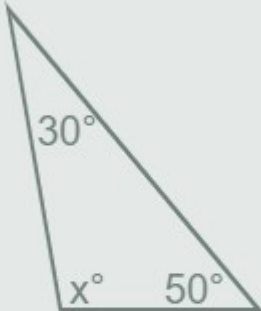
Triángulos



x =

OK

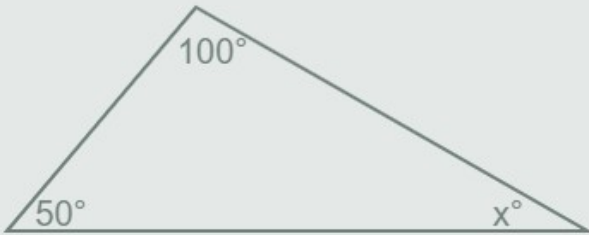
Ángulos



x =

OK

Ángulos



x =

OK

Figura 55: Test de evaluación inicial (Thatquiz, s.f).

Triángulos
Triángulos semejantes



6 3
7



x 4

x = **cm**

Triángulos
Triángulos semejantes



9 3
10



x 4

x = **cm**

Figura 56: Test de evaluación inicial (Thatquiz, s.f).

Ángulos

$x =$

Ángulos

$x =$

Ángulos

$x =$

Ángulos

$x =$

Figura 57: Test de evaluación inicial (Thatquiz, s.f).

Sesión 2

Actividad 2.1.: Triángulos rectángulos semejantes

En la sesión anterior, el profesor solicitó al alumnado que por parejas debían llevar, para la siguiente sesión, recortes de triángulos rectángulos semejantes, de diferentes tamaños, pero todos con un ángulo de 30° .

El alumnado, por parejas, deberá medir los lados de los triángulos que han llevado para analizar las proporciones entre los lados de los triángulos semejantes y completar

las Tablas 33-35. Esta actividad les ayudará a comprender el concepto de las razones trigonométricas.

Ángulo	Cateto opuesto	Hipotenusa	Sen α = (cateto opuesto/hipotenusa)
30º			
30º			
30º			
60º			
60º			
60º			

Tabla 33: Actividad 2.1. Razón trigonométrica del seno (elaboración propia).

Ángulo	Cateto contiguo	Hipotenusa	Cos α = (cateto contiguo/hipotenusa)
30º			
30º			
30º			
60º			
60º			
60º			

Tabla 34: Actividad 2.1. Razón trigonométrica del coseno (elaboración propia).

Ángulo	Cateto opuesto	Cateto contiguo	Tg α =(cateto opuesto/cateto contiguo)
30º			
30º			
30º			
60º			
60º			
60º			

Tabla 35: Actividad 2.1. Razón trigonométrica de la tangente (elaboración propia).

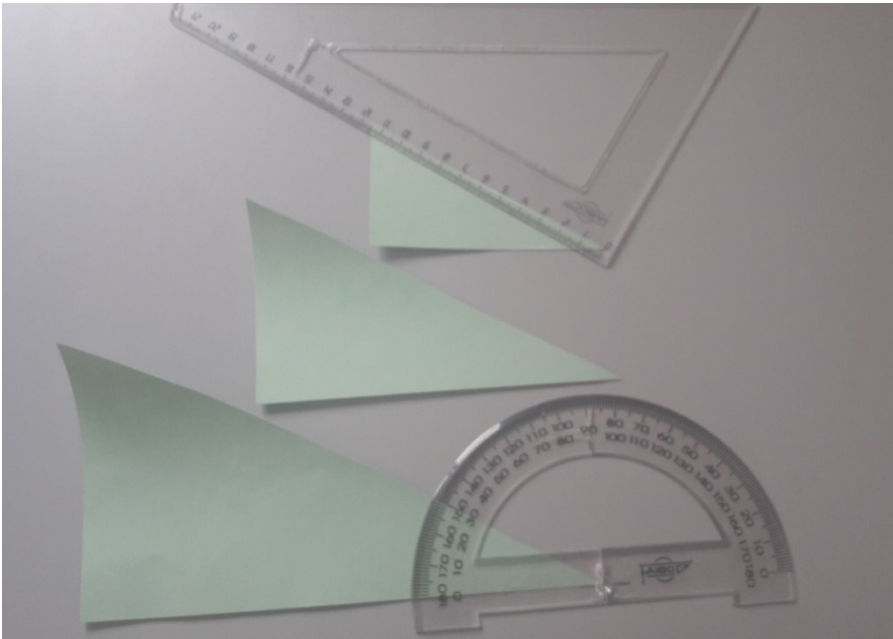


Figura 58: Actividad 2.1. Triángulos rectángulos semejantes con ángulo de 30º (elaboración propia).

Actividad 2.2.: Plantilla para medir las razones trigonométricas

Utilizando una plantilla de papel milimetrado y un transportador de ángulos, calcula el seno y el coseno de 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° y 90° , y la tangente de aquellos que puedas (véase la Figura 59 y la Tabla 36).

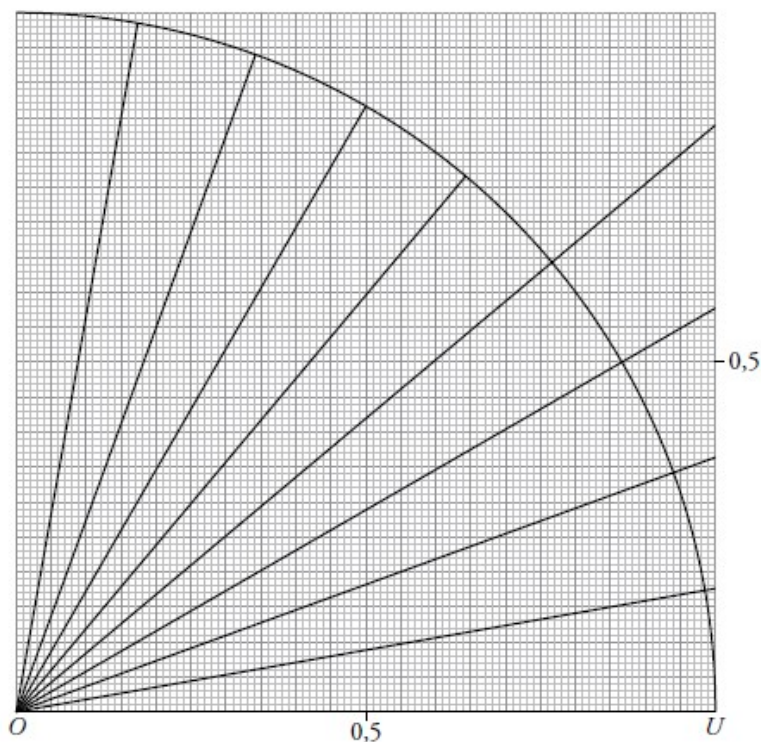


Figura 59: Actividad 2.2. Razones trigonométricas con papel milimetrado (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Ángulo	Cateto opuesto	Cateto contiguo	$Tg \alpha = (\text{cateto opuesto} / \text{cateto contiguo})$
0°			
15°			
30°			
45°			
75°			
90°			

Tabla 36: Actividad 2.2. Razones trigonométricas con papel milimetrado (elaboración propia).

Sesión 3

Actividad 3.1.: Relaciones trigonométricas fundamentales (profesor)

El profesor realiza unos ejercicios en clase para explicar su procedimiento (véase la Figura 60).

Ejercicios resueltos

1. Sabiendo que $\cos \alpha = 0,63$, calcular $s = \operatorname{sen} \alpha$ y $t = \operatorname{tg} \alpha$.

Mediante la igualdad I, conocido $\operatorname{sen} \alpha$ obtenemos $\cos \alpha$, y viceversa.

$$s^2 + 0,63^2 = 1 \rightarrow s^2 = 1 - 0,63^2 = 0,6031 \rightarrow s = \sqrt{0,6031} = 0,777$$

(Solo tomamos la raíz positiva, porque $\operatorname{sen} \alpha$ ha de ser positivo).

$$t = \frac{0,777}{0,63} = 1,23$$

Solución: $\operatorname{sen} \alpha = 0,777$ $\operatorname{tg} \alpha = 1,23$

2. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$, calcular $s = \operatorname{sen} \alpha$ y $c = \cos \alpha$.

Mediante las igualdades I y II, conocida $\operatorname{tg} \alpha$ se obtienen, resolviendo un sistema de ecuaciones, los valores de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s}{c} = 2 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 4c^2 + c^2 = 1 \rightarrow 5c^2 = 1 \end{array}$$

$$c^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{la raíz positiva}]{\text{solo tomamos}} c = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{racionalizando}} c = \frac{\sqrt{5}}{5}; s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Solución: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,894$ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447$

Figura 60: Actividad 3.1. Relaciones trigonométricas fundamentales (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Actividad 3.2.: Relaciones trigonométricas fundamentales

El alumnado realiza un ejercicio en clase similar al realizado por el profesor y un alumno voluntario lo resolverá en la pizarra (véase la Figura 61).

1. $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$. Calcula $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\bullet \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,6^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha = 0,64 \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} \cos \alpha = 0,8$$

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{0,8} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0,75$$

Por tanto, $\cos \alpha = 0,8$ y $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$.

Figura 61: Actividad 3.2. Relaciones trigonométricas fundamentales (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 3.3.: Razones trigonométricas fundamentales

El profesor explica las razones trigonométricas con la ayuda de Geogebra (<https://www.geogebra.org/m/QCNmEfYF>) (véase la Figura 62), y completa la Tabla 37.

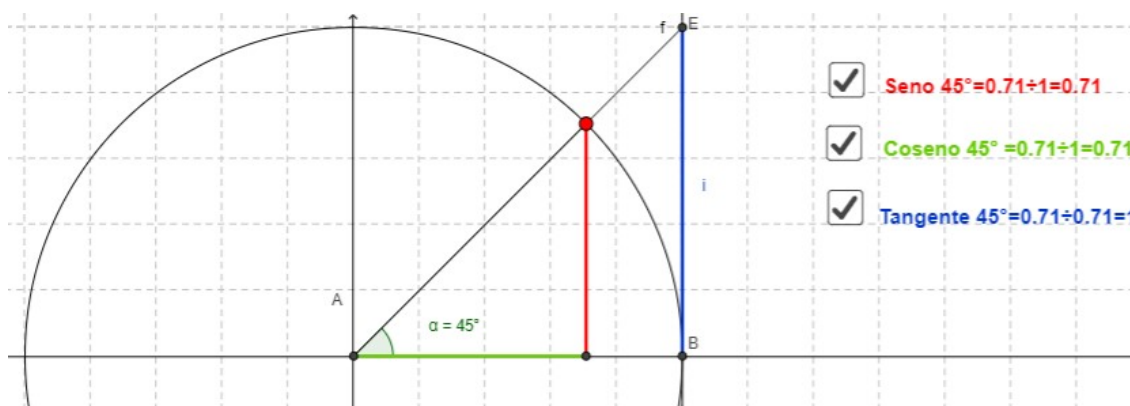


Figura 62: Actividad 3.3. Circunferencia goniométrica (Fernández-Cedrón Alonso, 2019).

Ángulos	sen	cos	tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Tabla 37: Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º (elaboración propia).

Tras explicar cómo obtener las razones trigonométricas de los ángulos notables, existe un truco para aprendérselas, tal y como muestra el siguiente vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=aOyEA3w3EgM> (5 min).

Actividad 3.4.: Relaciones trigonométricas fundamentales

El alumnado realiza unos ejercicios, los cuales deberán finalizar en casa (véase la Figura 63).

- 3.** Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, deduce el valor de $\operatorname{sen} 45^\circ$ y de $\operatorname{cos} 45^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.

$$\frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{cos} 45^\circ} = 1; \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ$$

$$(\operatorname{sen} 45^\circ)^2 + (\operatorname{cos} 45^\circ)^2 = 1$$

$$(\operatorname{cos} 45^\circ)^2 + (\operatorname{cos} 45^\circ)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{cos} 45^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Solo tomamos el resultado positivo: } \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Teniendo en cuenta que $\text{sen } 30^\circ = 1/2$, halla el valor de $\cos 30^\circ$ y de $\text{tg } 30^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(\text{sen } 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + (\cos 30^\circ)^2 = 1 \rightarrow \cos 30^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tomamos el resultado positivo: } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \rightarrow (0,8)^2 + (\text{sen } \alpha)^2 = 1 \rightarrow \text{sen } \alpha = \pm 0,6$$

$$\text{Tomamos solo el valor positivo: } \text{sen } \alpha = 0,6$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

Figura 63: Actividad 3.4. Relaciones trigonométricas fundamentales (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Sesión 4

Actividad 4.1.: Utiliza la calculadora

El alumnado realiza unos ejercicios con la calculadora (véase la Figura 64).

1. Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

a) $\text{sen } 86^\circ$

a) $\text{sen } 86^\circ = 0,998$

b) $\cos 59^\circ$

b) $\cos 59^\circ = 0,515$

c) $\text{tg } 22^\circ$

c) $\text{tg } 22^\circ = 0,404$

d) $\text{sen } 15^\circ 25' 43''$

d) $\text{sen } (15^\circ 25' 43'') = 0,266$

e) $\cos 59^\circ 27'$

e) $\cos (59^\circ 27') = 0,508$

f) $\text{tg } 86^\circ 52'$

f) $\text{tg } (86^\circ 52') = 18,268$

g) $\text{sen } 10^\circ 30''$ (atención, $10^\circ 0' 30''$)

g) $\text{sen } (10^\circ 30'') = 0,174$

2. Da el valor del ángulo α en forma sexagesimal, en cada caso:

a) $\text{sen } \alpha = 0,91$

b) $\text{tg } \alpha = 5,83$

c) $\cos \alpha = 0,42$

d) $\text{tg } \alpha = 0,34$

e) $\text{sen } \alpha = 0,08$

f) $\cos \alpha = 0,88$

a) $\alpha = 65^\circ 30' 19''$

b) $\alpha = 80^\circ 16' 1''$

c) $\alpha = 65^\circ 9' 55''$

d) $\alpha = 18^\circ 46' 41''$

e) $\alpha = 4^\circ 35' 19''$

f) $\alpha = 28^\circ 21' 27''$

3. a) Calcula $\operatorname{sen} \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = 0,91$.

b) Calcula $\cos \alpha$ sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 6,41$.

c) Calcula $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = 0,06$.

d) Calcula $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = 0,96$.

e) Calcula $\operatorname{sen} \alpha$ sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$.

a) $\cos \alpha = 0,91 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,415$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 6,41 \rightarrow \cos \alpha = 0,154$

c) $\cos \alpha = 0,06 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 16,637$

d) $\cos \alpha = 0,96 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0,292$

e) $\operatorname{tg} \alpha = 0,1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,0995$

Figura 64: Actividad 4.1. Utiliza la calculadora (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 4.2.: Utiliza la calculadora (casa)

El alumnado debe realizar unos ejercicios con la calculadora en casa para practicar más su uso (véase la Figura 65).

9.  Completa en tu cuaderno la tabla siguiente, utilizando la calculadora:

α	15°	$55^\circ 20'$	$72^\circ 25' 40''$	$85,5^\circ$
$\operatorname{sen} \alpha$	0,26	0,82	0,95	0,997
$\cos \alpha$	0,97	0,57	0,30	0,078
$\operatorname{tg} \alpha$	0,27	1,45	3,16	12,71

10.  Halla el ángulo $\alpha < 90^\circ$ en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,58$

b) $\cos \alpha = 0,75$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$

d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $\operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{2}$

a) $\alpha = 35^\circ 27' 2''$

b) $\alpha = 41^\circ 24' 35''$

c) $\alpha = 68^\circ 11' 55''$

d) $\alpha = 48^\circ 11' 23''$

e) $\alpha = 54^\circ 44' 8''$

f) $\alpha = 76^\circ 44' 14''$

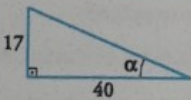
Figura 65: Actividad 4.2. Utiliza la calculadora (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Sesión 5

Actividad 5.1.: Resuelve triángulos rectángulos (profesor)

El profesor explica la resolución de triángulos rectángulos mediante unos ejemplos (véase la Figura 66).

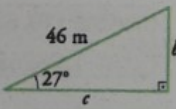
1. Los dos catetos de un triángulo miden 17 cm y 40 cm. Hallar los ángulos del triángulo.



El ángulo α se relaciona con los dos catetos mediante su tangente: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{40} = 0,425$

Hallamos con la calculadora el ángulo cuya tangente es 0,425:
 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{tan}} \boxed{0,425} \boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{DMS}} \boxed{23^{\circ}1'32''}$. Es decir, $\alpha = 23^{\circ} 1' 32''$.
 El otro ángulo es su complementario: $90^{\circ} - 23^{\circ} 1' 32'' = 66^{\circ} 58' 28''$

2. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 27° y la hipotenusa, 46 m. Hallar los dos catetos.

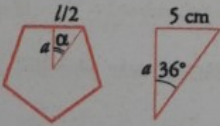


b es el cateto opuesto al ángulo de 27° . Por tanto:

$$\operatorname{sen} 27^{\circ} = \frac{b}{46} \rightarrow b = 46 \cdot \operatorname{sen} 27^{\circ} = 20,88 \text{ m}$$

Análogamente: $\cos 27^{\circ} = \frac{c}{46} \rightarrow c = 46 \cdot \cos 27^{\circ} = 40,99 \text{ m}$

3. ¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado 10 cm?



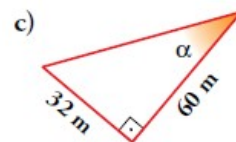
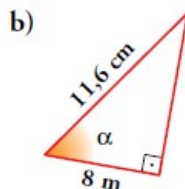
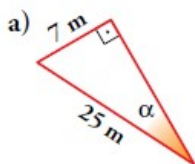
$\alpha = 360^{\circ} : 10 = 36^{\circ}$
 $\operatorname{tg} 36^{\circ} = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\operatorname{tg} 36^{\circ}} = 6,88$
 La apotema mide 6,9 cm.

Figura 66: Actividad 5.1. Resuelve triángulos rectángulos (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Actividad 5.2.: Resuelve triángulos rectángulos

El alumnado realiza ejercicios sobre la resolución de triángulos rectángulos (véase la Figura 67).

1.  Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:



a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{7}{25} = 0,28$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \frac{24}{25} = 0,96$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,29$

b) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{11,6^2 - 8^2}}{11,6} = \frac{8,4}{11,6} \approx 0,724$

$\cos \alpha = \frac{8}{11,6} \approx 0,69$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8,4}{8} = 1,05$

c) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{32}{68} = \frac{8}{17} \approx 0,47$

$\cos \alpha = \frac{60}{68} = \frac{15}{17} \approx 0,88$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} \approx 0,53$

12.  Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C} = 90^\circ$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm.

Halla c , $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43$ m, $\hat{A} = 37^\circ$.

Halla b , c , $\hat{B}$.

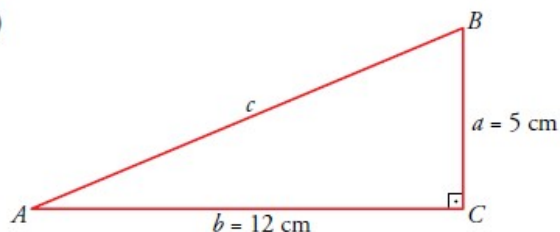
c) $a = 7$ m, $\hat{B} = 58^\circ$.

Halla b , c , $\hat{A}$.

d) $c = 5,8$ km, $\hat{A} = 71^\circ$.

Halla a , b , $\hat{B}$.

a)



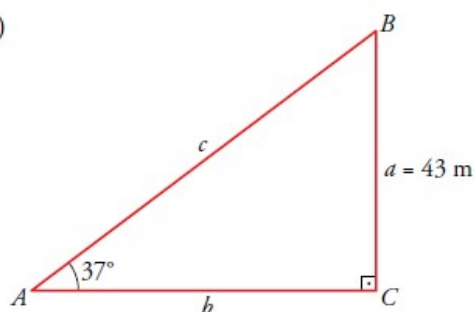
• Por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow c^2 = 169 \rightarrow c = 13 \text{ cm}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{5}{12} \rightarrow \hat{A} = 22^\circ 37' 11''$$

$$\bullet \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} \rightarrow \hat{B} = 67^\circ 22' 49''$$

b)

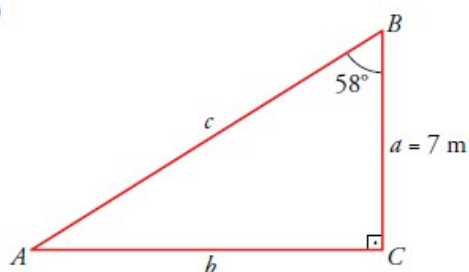


$$\bullet \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} \rightarrow \hat{B} = 53^\circ$$

$$\bullet \operatorname{sen} 37^\circ = \frac{43}{c} \rightarrow c = \frac{43}{\operatorname{sen} 37^\circ} \rightarrow c = 71,45 \text{ m}$$

$$\bullet \operatorname{tg} 37^\circ = \frac{43}{b} \rightarrow b = \frac{43}{\operatorname{tg} 37^\circ} \rightarrow b = 57,06 \text{ m}$$

c)

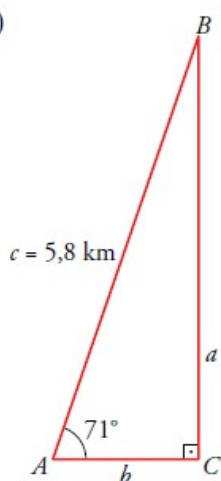


$$\bullet \hat{A} = 90^\circ - \hat{B} \rightarrow \hat{A} = 32^\circ$$

$$\bullet \operatorname{tg} 58^\circ = \frac{b}{7} \rightarrow b = 7 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \rightarrow b = 11,20 \text{ m}$$

$$\bullet \cos 58^\circ = \frac{7}{c} \rightarrow c = \frac{7}{\cos 58^\circ} \rightarrow c = 13,21 \text{ m}$$

d)



$$\bullet \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} \rightarrow \hat{B} = 19^\circ$$

$$\bullet \operatorname{sen} 71^\circ = \frac{a}{5,8} \rightarrow a = 5,8 \cdot \operatorname{sen} 71^\circ \rightarrow a = 5,48 \text{ km}$$

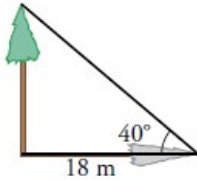
$$\bullet \cos 71^\circ = \frac{b}{5,8} \rightarrow b = 5,8 \cdot \cos 71^\circ \rightarrow b = 1,89 \text{ km}$$

Figura 67: Actividad 5.2. Resuelve triángulos rectángulos (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 5.3.: Resuelve triángulos rectángulos (casa)

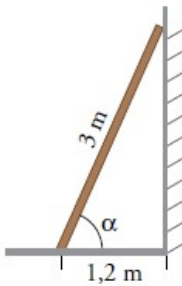
El alumnado debe realizar más ejercicios sobre la resolución de triángulos rectángulos en casa (véase la Figura 68).

13.  Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?



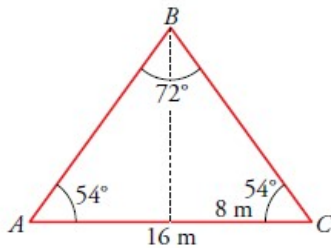
$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{18} \rightarrow \text{El árbol mide } x = 15,1 \text{ m.}$$

14.  Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?



$$\cos \alpha = \frac{1,2}{3} = 0,4 \rightarrow \alpha = 66^\circ 25' 19''$$

15.  Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.



$$\hat{A} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$

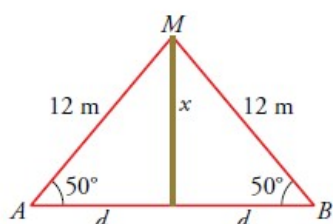
$$\cos 54^\circ = \frac{8}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{8}{\cos 54^\circ} = 13,6 \text{ m}$$

$$\text{Perímetro} = 13,6 \cdot 2 + 16 = 43,2 \text{ m}$$

$$\text{Altura, } h: \operatorname{tg} 54^\circ = \frac{h}{8} \rightarrow h = 8 \cdot \operatorname{tg} 54^\circ = 11,01 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 11,01}{2} \approx 88,1 \text{ m}^2$$

16.  Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

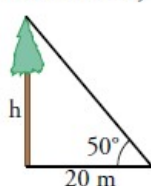


$$\text{sen } 50^\circ = \frac{x}{12} \rightarrow x = 12 \cdot \text{sen } 50^\circ \rightarrow x = 9,19 \text{ m}$$

$$\text{cos } 50^\circ = \frac{d}{12} \rightarrow d = 12 \cdot \text{cos } 50^\circ \rightarrow d = 7,71 \text{ m}$$

El mástil mide 9,19 m y la distancia de la base del mástil a los puntos de sujeción A y B es 7,71 m.

18.  Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50° . ¿Cuánto mide el árbol?



$$\text{tg } 50^\circ = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot \text{tg } 50^\circ = 23,8 \text{ m}$$

Figura 68: Actividad 5.3. Resuelve triángulos rectángulos (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Sesiones 6 y 7

Actividad 6.1.: Actividad de modelización “El parque de atracciones: diseña la pendiente de la catarata salvaje”

Eres un/a ingeniero/a y tu tarea es diseñar la pendiente de la catarata salvaje en un parque de atracciones. Además, decidirás las dimensiones de la barca.

No olvides que cuanto mayor sea la pendiente, a más altura subirá la barca y a mayor velocidad bajará, aumentando la diversión de los pasajeros (véase la Figura 69).



Figura 69: Actividad. 6.1. Parque de atracciones (Warner Bros, 2013)

Nota: el número de filas de pasajeros de la barca dependerá de ti, pero entre cada fila habrá una distancia de 0,80 m de longitud. La anchura de la barca no es necesaria establecerla (véase la Figura 70).

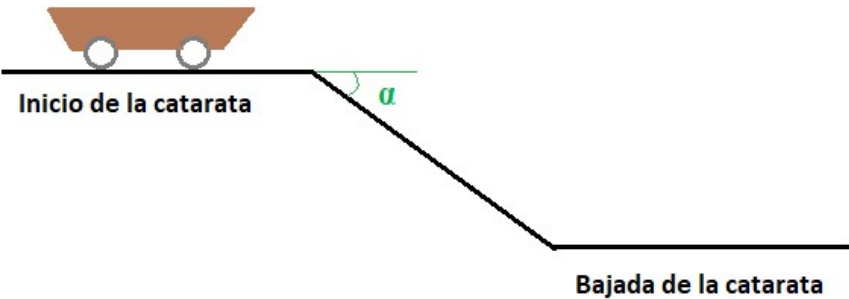


Figura 70: Actividad 6.1. Croquis de la catarata (elaboración propia).

¡Cuidado! La barca no puede rozar la vía de la atracción porque se romperá (véase la Figura 71).

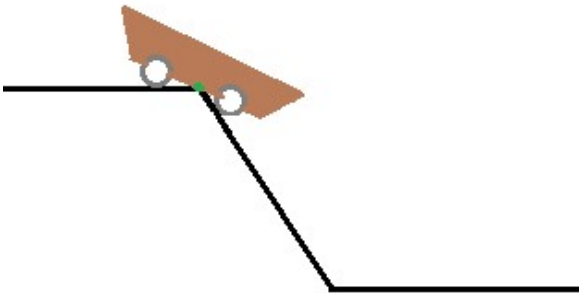


Figura 71: Actividad 6.1. Croquis del choque de la barca con la vía (elaboración propia).

Contarás con la ayuda de dos ficheros de Geogebra para realizar tu diseño, y podrás utilizar la Tabla 38 durante el diseño de tu atracción:

Radio de las ruedas (cm)	Longitud de la barca según nº filas asientos (cm)	Distancia entre centro radio y extremo de barca (cm)	Distancia entre los centros de las ruedas (cm)	Ángulo en el momento del choque (º)	Ángulo deseado de la pendiente (º)

Tabla 38: Diseño de la barca y ángulo de choque con la rampa (elaboración propia).

Además, contarás con la Tabla 39 para determinar la altura desde que se inicia la cascada y la base que ocupa la cascada en el terreno del parque de atracciones.

Ángulo (°)	Longitud catarata (cm)	Base catarata (cm)	Altura catarata (cm)

Tabla 39: Actividad 6.1. Diseño de la catarata según el ángulo aceptado en la pendiente (elaboración propia).

En el Anexo VIII, se desarrollará el plan de clase de dicha actividad de modelización.

Sesión 8

Actividad 8.1.: Cálculo de puntos inaccesibles (profesor)

El profesor explica cómo calcular la distancia a puntos inaccesibles mediante un problema (véase la Figura 72).

3. Altura del árbol y anchura del río

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo. Ahora son 23° .



Hacemos una representación. Llamamos x al ancho del río e y a la altura del árbol.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 41^\circ = y/x \\ \operatorname{tg} 23^\circ = y/(x + 25) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x \cdot 0,87 \\ y = (x + 25) \cdot 0,42 \end{array} \right\} \rightarrow 0,87x = 0,42x + 25 \cdot 0,42 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,45x = 10,5 \rightarrow x = 23,3; y = 23,3 \cdot 0,87 = 20,3$$

Solución: El ancho del río es 23,3 m, y la altura del árbol, 20,3 m.

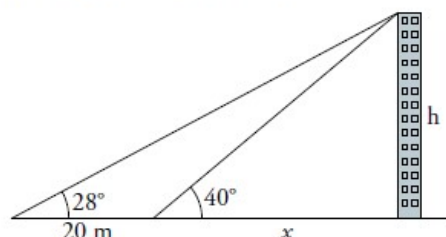
Hazlo tú. Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50° ; camina 10 m; 2.ª medición, 25° .

Figura 72: Actividad 8.1. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Actividad 8.2.: Cálculo de puntos inaccesibles

El alumnado realiza problemas contextualizados sobre el cálculo de la distancia a puntos inaccesibles (véase la Figura 73).

- 33.** Desde el punto donde estoy, la visual al punto más alto del edificio que tengo en frente forma un ángulo de 28° con la horizontal. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la altura del edificio?



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 40^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 28^\circ &= \frac{h}{20 + x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h &= \operatorname{tg} 40^\circ \cdot x \\ h &= \operatorname{tg} 28^\circ \cdot (20 + x) \end{aligned} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} 40^\circ \cdot x = \operatorname{tg} 28^\circ \cdot (20 + x) \rightarrow \operatorname{tg} 40^\circ \cdot x = 20 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ + \operatorname{tg} 28^\circ \cdot x \rightarrow$$

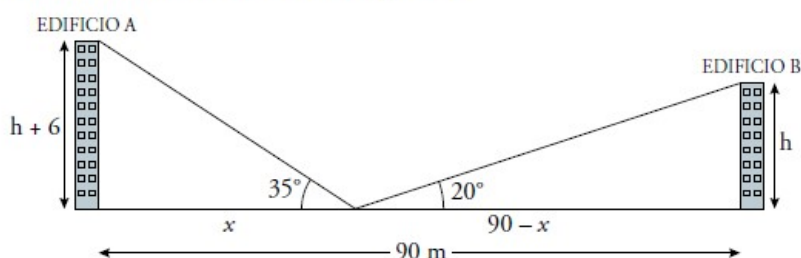
$$\rightarrow (\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ) \cdot x = 20 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ \rightarrow x = \frac{20 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ} \rightarrow x = 34,59 \text{ m}$$

$$h = \operatorname{tg} 40^\circ \cdot x \rightarrow h = 29,02 \text{ m}$$

Por tanto, el edificio mide 29,02 m.

- 34.** Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20° . ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?

- Primera solución: el edificio A es más alto que el B.



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h+6}{x} \\ \operatorname{tg} 20^\circ &= \frac{h}{90-x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} h &= \operatorname{tg} 35^\circ \cdot x - 6 \\ h &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot (90-x) \end{aligned} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} 35^\circ \cdot x - 6 = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot (90-x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} 35^\circ \cdot x - 6 = 90 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ \cdot x \rightarrow \operatorname{tg} 35^\circ \cdot x + \operatorname{tg} 20^\circ \cdot x = 90 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 6 \rightarrow$$

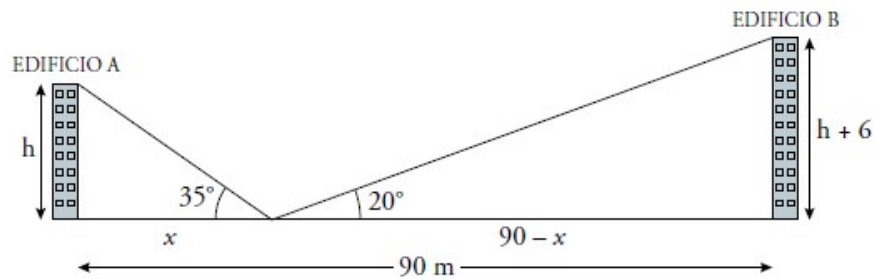
$$\rightarrow (\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ) \cdot x = 90 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 6 \rightarrow x = \frac{90 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 6}{\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ} \rightarrow x = 36,42 \text{ m}$$

$$h = \operatorname{tg} 35^\circ \cdot x - 6 \rightarrow h = 19,50 \text{ m}$$

$$\text{Altura del edificio A} = h + 6 = 25,50 \text{ m}$$

$$\text{Altura del edificio B} = h = 19,50 \text{ m}$$

- Segunda solución: el edificio B es más alto que el A.



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 35^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 20^{\circ} = \frac{h+6}{90-x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} h = x \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ} \\ \operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot (90-x) = h+6 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot (90-x) = x \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ} + 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90 \cdot \operatorname{tg} 20^{\circ} - x \cdot \operatorname{tg} 20^{\circ} = x \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ} + 6 \rightarrow 90 \cdot \operatorname{tg} 20^{\circ} - 6 = x \cdot (\operatorname{tg} 35^{\circ} + \operatorname{tg} 20^{\circ}) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{90 \cdot \operatorname{tg} 20^{\circ} - 6}{\operatorname{tg} 35^{\circ} + \operatorname{tg} 20^{\circ}} \rightarrow x = 25,14 \text{ m}$$

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ} \rightarrow h = 17,60 \text{ m}$$

$$\text{Altura del edificio A} = h = 17,60 \text{ m}$$

$$\text{Altura del edificio B} = h + 6 = 23,60 \text{ m}$$

Figura 73: Actividad 8.2. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 8.3.: Calcula la altura de una torre de tu localidad con la app Dioptra

De acuerdo con la actividad de campo desarrollada por Beirigo-Lopes y Lopes-Hardoim (2018), se realizará la actividad 8.3. El alumnado debe formar un grupo de cuatro, donde el profesor intervendrá en la formación del grupo según el perfil del alumnado.

Cada grupo deberá elegir medir la altura de una torre de su localidad con la app Dioptra, la cual mide ángulos. El grupo deberá realizar los cálculos según la versión de distancia a un punto accesible o a un punto inaccesible, y deberá contar una breve historia de esa torre para fomentar la interdisciplinariedad con historia. La exposición en clase se podrá realizar mediante una cartulina A3, aunque se le dará libertad a cada grupo para elegir sus herramientas durante la exposición, la cual se realizará en la sesión 13, y cada grupo dispondrá de 5 min de exposición.

- Versión alumnos con dificultades de aprendizaje (distancia accesible a la base de la torre), (véase la Figura 74):



Figura 74: Actividad 8.3. App Dioptra. Torre del reloj en Andújar (elaboración propia).

El esquema de la situación sería (véase la Figura 75):

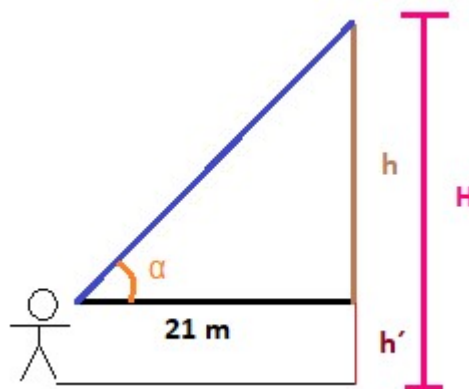


Figura 75: Actividad 8.3. Esquema de la torre del reloj en Andújar (elaboración propia).

Los cálculos a realizar son:

$$\operatorname{tg} 48,6^{\circ} = \frac{h}{21 \text{ m}}; \text{ se despeja } h, \text{ entonces: } h = 21 \text{ m} \cdot \operatorname{tg} 48,6^{\circ} = 23,82 \text{ m}.$$

Se debe tener en cuenta la altura desde la que la persona saca la foto, por ello, la altura de la torre es: $H = h + h' = 23,82 \text{ m} + 1,76 \text{ m} = 25,58 \text{ m}$

- Versión para el resto de alumnado (distancia inaccesible a la base de la torre),
(véase las Figura 76 y 77):

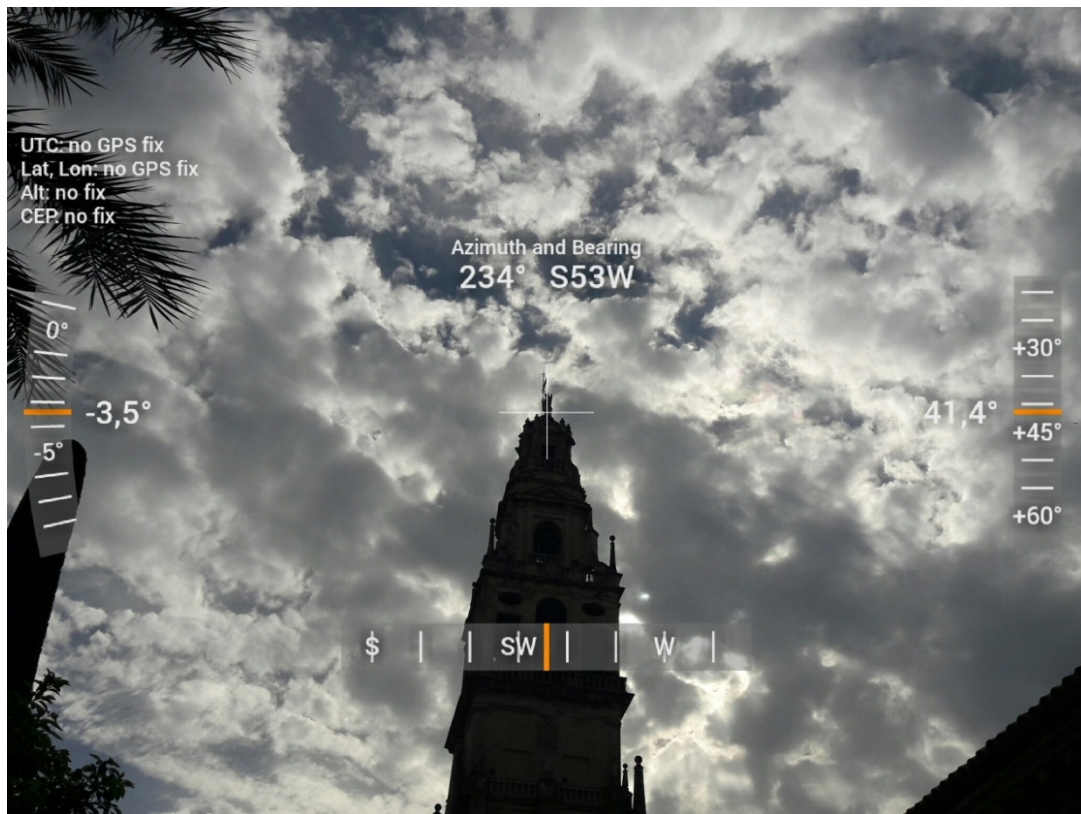


Figura 76: Actividad 8.3. App Dioptra. Torre de la Mezquita-Catedral de Córdoba (elaboración propia).

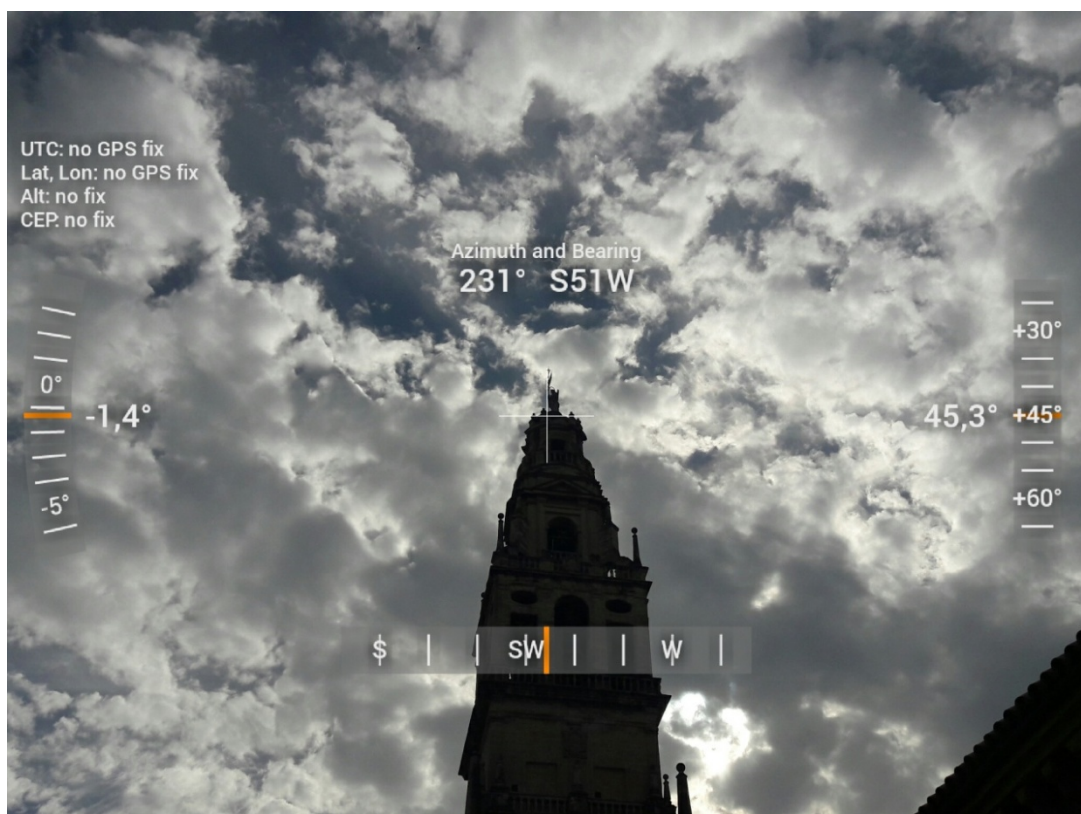


Figura 77: Actividad 8.3. App Dioptra. Torre de la Mezquita-Catedral de Córdoba (elaboración propia).

El esquema de la situación sería (véase la Figura 78):

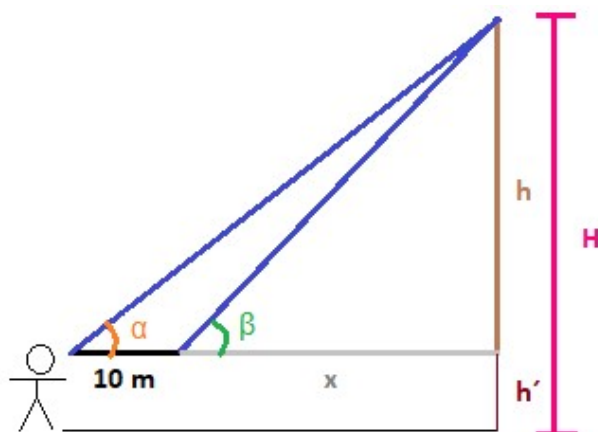


Figura 78: Actividad 8.3. Esquema de la torre de la Mezquita-Catedral de Córdoba (elaboración propia).

Los cálculos a realizar son:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 41,4^{\circ} &= \frac{h}{10+x} \\ \operatorname{tg} 45,3^{\circ} &= \frac{h}{x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{se despeja } h, \text{ y se igualan las dos ecuaciones:} \\ &(10+x) \cdot \operatorname{tg} 41,4^{\circ} = x \cdot \operatorname{tg} 45,3^{\circ} \end{aligned}$$

$$10 \cdot \operatorname{tg} 41,4^{\circ} + x \cdot \operatorname{tg} 41,4^{\circ} = x \cdot \operatorname{tg} 45,3^{\circ};$$

$$\text{Se despeja } x: x = \frac{10 \cdot \operatorname{tg} 41,4^{\circ}}{\operatorname{tg} 45,3^{\circ} - \operatorname{tg} 41,4^{\circ}} = 68,39 \text{ m}$$

El valor de x se sustituye en una de las ecuaciones: $h = x \cdot \operatorname{tg} 45,3^{\circ} = 69,11 \text{ m}$.

Se debe tener en cuenta la altura desde la que la persona saca la foto, por ello, la altura de la torre es: $H = h + h' = 69,11 \text{ m} + 1,76 \text{ m} = 70,87 \text{ m}$

Sesión 9

Actividad 9.1.: Resolución triángulos oblicuángulos (profesor)

El profesor explica la resolución de triángulos oblicuángulos mediante unos ejemplos (véase la Figura 79).

PROBLEMA 1

El triángulo del margen no es rectángulo. Para obtener el lado desconocido, lo partimos, mediante la altura, en dos triángulos rectángulos con un lado común:

- El triángulo ABH es rectángulo. En él conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. Podemos calcular los dos catetos:

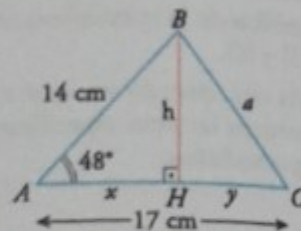
$$\operatorname{sen} 48^\circ = \frac{h}{14} \rightarrow h = 14 \cdot \operatorname{sen} 48^\circ = 10,4 \text{ cm}$$

$$\cos 48^\circ = \frac{x}{14} \rightarrow x = 14 \cdot \cos 48^\circ = 9,37 \text{ cm}$$

- En el triángulo rectángulo BHC conocemos $\overline{BH} = h = 10,4 \text{ cm}$ y podemos calcular muy fácilmente $\overline{HC} = y = 17 - x = 17 - 9,37 = 7,63 \text{ cm}$.

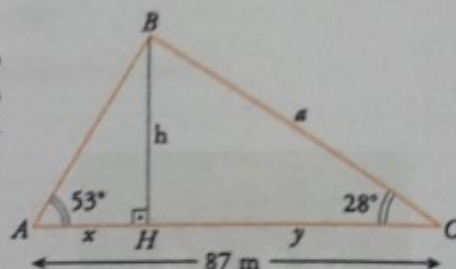
Conocidos los dos catetos, calculamos la hipotenusa:

$$a = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{10,4^2 + 7,63^2} = 12,9 \text{ cm}$$



PROBLEMA 2

En este caso, para resolver el triángulo del margen, hacemos como en el caso anterior: la altura h determina dos triángulos rectángulos. Con ellos vamos a relacionar x e y .



$$\left. \begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABH}, \operatorname{tg} 53^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \operatorname{tg} 53^\circ \\ \text{En } \widehat{BHC}, \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{h}{y} \rightarrow h = y \operatorname{tg} 28^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \operatorname{tg} 53^\circ = y \operatorname{tg} 28^\circ \\ 1,33x = 0,53y \end{array}$$

Como $x + y = 87$, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 87 \\ 1,33x = 0,53y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 87 - y \\ 1,33(87 - y) = 0,53y \rightarrow y = 62,2 \text{ m} \end{array}$$

Conocido y , podemos calcular a :

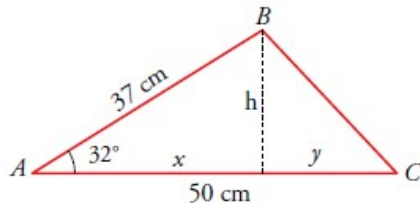
$$\text{En } \widehat{BHC}, \cos 28^\circ = \frac{y}{a} \rightarrow a = \frac{62,2}{\cos 28^\circ} = 70,4 \text{ m}$$

Figura 79: Actividad 9.1. Resolución de triángulos oblicuángulos (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Actividad 9.2.: Resolución triángulos oblicuángulos

El alumnado realizará ejercicios y problemas contextualizados sobre la resolución de triángulos oblicuángulos (véase la Figuras 80).

1. En un triángulo ABC , halla $\overline{BC}$ conociendo $\overline{AB} = 37$ cm, $\overline{AC} = 50$ cm y $\hat{A} = 32^\circ$.



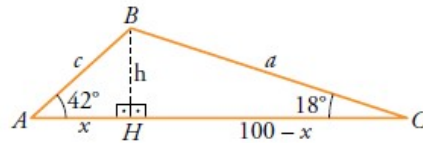
$$\cos 32^\circ = \frac{x}{37} \rightarrow x = 31,38 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{h}{37} \rightarrow h = 19,61 \text{ cm}$$

$$y = 50 - x = 50 - 31,38 = 18,62 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{h^2 + y^2} = 27,04 \text{ cm}$$

2. Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC en el que sabemos $\overline{AC} = 100$ cm, $\hat{A} = 42^\circ$ y $\hat{C} = 18^\circ$.



- Trazamos la altura sobre AC y dividimos el triángulo $\widehat{ABC}$ en dos triángulos rectángulos $\widehat{ABH}$ y $\widehat{BHC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABH}: \operatorname{tg} 42^\circ = \frac{h}{x} \\ \text{En } \widehat{BHC}: \operatorname{tg} 18^\circ = \frac{h}{100 - x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0,900 = \frac{h}{x} \\ 0,325 = \frac{h}{100 - x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} h = 0,900x \\ h = 0,325(100 - x) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,900x = 0,325(100 - x) \rightarrow 0,900x = 32,5 - 0,325x \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,225x = 32,5 \rightarrow x = \frac{32,5}{1,225} \rightarrow x = 26,5 \text{ cm} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 23,85 \text{ cm}$$

- Conociendo x y h podemos hallar los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

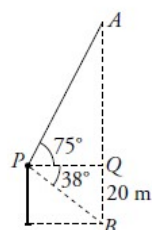
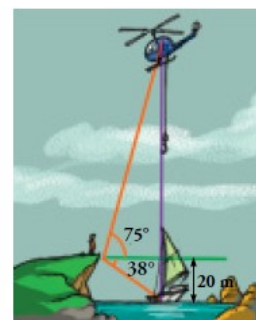
$$\text{En } \widehat{ABH}: \cos 42^\circ = \frac{26,5}{c} \rightarrow c = \frac{26,5}{\cos 42^\circ} \rightarrow c = 35,7 \text{ cm}$$

$$\text{En } \widehat{BHC}: \cos 18^\circ = \frac{100 - 26,5}{a} \rightarrow a = \frac{73,5}{\cos 18^\circ} \rightarrow a = 77,3 \text{ cm}$$

Por tanto, $\overline{AB} = c = 35,7$ cm y $\overline{BC} = a = 77,3$ cm.

39. Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento.

Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75° para el helicóptero y 38° para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco?

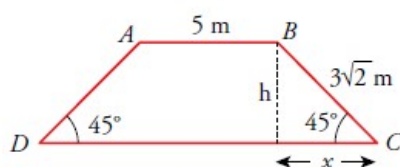


$$\text{En el triángulo } PQB \rightarrow \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{20}{PQ} \rightarrow \overline{PQ} = 25,6 \text{ m}$$

$$\text{En el triángulo } PQA \rightarrow \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} \rightarrow \overline{AQ} = 25,6 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 95,5 \text{ m}$$

$$\text{Longitud del cable} = 95,5 + 20 = 115,5 \text{ m}$$

40. En un trapecio isósceles de bases AB y DC , conocemos los lados $\overline{AB} = 5 \text{ m}$ y $\overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ m}$, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45° . Halla su área.



$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{h}{3\sqrt{2}} \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{x}{3\sqrt{2}} \rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$\text{Base mayor} = 5 + 3 + 3 = 11 \text{ m}$$

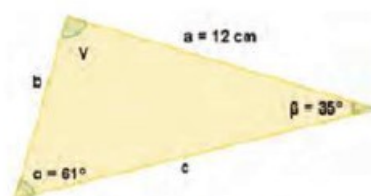
$$\text{Área} = \frac{(5 + 11) \cdot 3}{2} = 24 \text{ m}^2$$

Figura 80: Actividad 9.2. Resolución de triángulos oblicuángulos (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 9.3.: Ampliación. Teoremas del seno y del coseno (voluntario)

El alumnado de altas capacidad realizará ejercicios donde se aplicarán los Teoremas del seno y del coseno (véase la Figura 81).

- 4 Resuelve el triángulo que tiene dos ángulos de 35° y 61° , respectivamente, y en el que el lado opuesto al ángulo de 61° mide 12 cm.



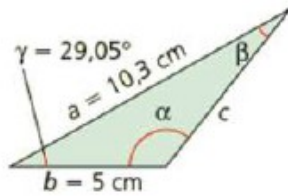
$$\gamma = 180^\circ - (35^\circ + 61^\circ) = 84^\circ$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{12}{\operatorname{sen} 61^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 35^\circ} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 61^\circ} = 7,72 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \Rightarrow \frac{12}{\operatorname{sen} 61^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 84^\circ} \Rightarrow c = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 84^\circ}{\operatorname{sen} 61^\circ} = 11,93 \text{ cm}$$

8 Resuelve los siguientes triángulos:

a.



Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \Rightarrow c^2 = 10,3^2 + 5^2 - 2 \cdot 10,3 \cdot 5 \cdot \cos 29,05^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{41,05} = 6,41 \Rightarrow c = 6,41 \text{ cm}$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β :

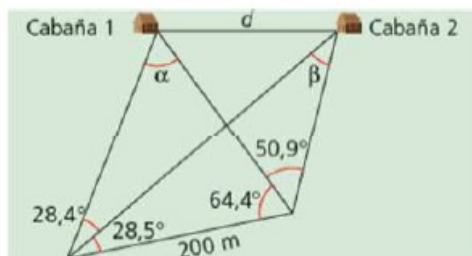
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \Rightarrow 5^2 = 10,3^2 + 6,41^2 - 2 \cdot 10,3 \cdot 6,41 \cdot \cos \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{5^2 - 10,3^2 - 6,41^2}{-2 \cdot 10,3 \cdot 6,41} \Rightarrow \beta = 22,29^\circ$$

Se halla el otro ángulo:

$$\alpha = 180^\circ - (29,05^\circ + 22,29^\circ) = 128,66^\circ$$

- 21 Calcula la distancia que hay entre dos cabañas situadas a un lado de un acantilado a partir de los siguientes ángulos tomados desde el otro lado del acantilado:



$$\alpha = 180^\circ - (56,9^\circ + 64,4^\circ) = 58,7^\circ \quad \beta = 180^\circ - (28,5^\circ + 115,3^\circ) = 36,2^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 64,4^\circ} = \frac{200}{\sin 58,7^\circ} \Rightarrow a = 211,09 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin 115,3^\circ} = \frac{200}{\sin 36,2^\circ} \Rightarrow b = 306,15 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 28,4^\circ} = \sqrt{211,09^2 + 306,15^2 - 2 \cdot 211,09 \cdot 306,15 \cdot \cos 28,4^\circ} = 156,86 \text{ m}$$

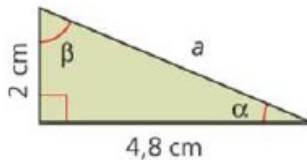
Figura 81: Actividad 9.3. Teoremas del seno y del coseno (Mejía-Sánchez-Bermejo, et al., 2016b).

Actividad 9.4.: Refuerzo (casa - voluntario)

El alumnado con dificultades de aprendizaje realizará ejercicios de refuerzo, en casa, sobre resolución de triángulos (véase la Figura 82).

- 9 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos, hallando con la calculadora su valor en grados sexagesimales:**

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{4,8^2 + 2^2} = \sqrt{27,04} = 5,2 \Rightarrow a = 5,2 \text{ cm}$$

Para el ángulo α :

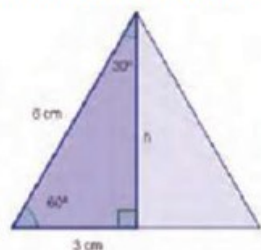
- $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2}{5,2} = 0,38$
- $\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{4,8}{5,2} = 0,92$
- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{2}{4,8} = 0,42$

Para el ángulo β :

- $\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{4,8}{5,2} = 0,92$
- $\text{cos } \beta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{cos } \beta = \frac{2}{5,2} = 0,38$
- $\text{tg } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{4,8}{2} = 2,4$

33 Halla el área de los siguientes polígonos regulares, utilizando las razones trigonométricas:

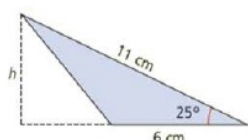
a. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado.



$$\left. \begin{aligned} \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{h}{6} \end{aligned} \right\} \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} = 15,59 \Rightarrow A = 15,59 \text{ cm}^2$$

9 El área del siguiente triángulo es:

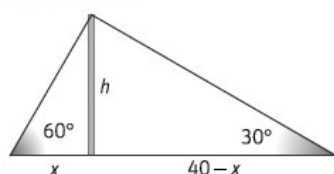


Se calcula la altura:

$$\sin 25^\circ = \frac{h}{11} \Rightarrow h = 11 \cdot 0,42 = 4,62 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{6 \cdot 4,62}{2} = 13,86 \Rightarrow A = 13,86 \text{ cm}^2$$

4. Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60° , respectivamente. Halla la altura de la antena.



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 1,732x$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{40-x} \Rightarrow h = (40-x) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 23,08 - 0,577x$$

$$\text{Igualando: } 1,732x = 23,08 - 0,577x \Rightarrow x = 10 \text{ m} \Rightarrow h = 17,32 \text{ m}$$

Figura 82: Actividad 9.4. Resolución de triángulos (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Sesión 10

Actividad 10.1.: Razones trigonométricas en una circunferencia goniométrica

El alumnado realizará ejercicios sobre las razones trigonométricas de ángulos entre 0° a 360° y los dibujará en una circunferencia en papel milimetrado (véase la Figura 83).

- 3. Dibuja sobre una circunferencia goniométrica, en papel milimetrado, los ángulos siguientes:**

62° , 154° , 243° y 300°

Representa sus razones trigonométricas y da su valor aproximado.

$\text{sen } 62^\circ = 0,88$	$\cos 62^\circ = 0,47$	$\text{tg } 62^\circ = 1,88$
$\text{sen } 154^\circ = 0,44$	$\cos 154^\circ = -0,9$	$\text{tg } 154^\circ = -0,49$
$\text{sen } 243^\circ = -0,89$	$\cos 243^\circ = -0,45$	$\text{tg } 243^\circ = 1,96$
$\text{sen } 300^\circ = -0,87$	$\cos 300^\circ = 0,5$	$\text{tg } 300^\circ = -1,73$

Figura 83: Actividad 10.1. Razones trigonométricas de 0° a 360° (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Sesión 11

Actividad 11.1.: Ángulos de medidas cualesquiera (profesor)

El profesor explica cómo trabajar con ángulos de medidas cualesquiera mediante un ejemplo (véase la Figura 84).

Ejercicio resuelto		
Expresar con valores comprendidos entre -180° y 180° los siguientes ángulos:		
a) 775°	b) 1400°	
$\begin{array}{r} \text{a) } 775 \quad \quad 360 \\ \hline 55 \quad 2 \\ 775^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 55^\circ = \\ = 55^\circ \end{array}$		
$\begin{array}{r} \text{b) } 1400 \quad \quad 360 \\ \hline 320 \quad 3 \\ 1400^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 320^\circ = 320^\circ = \\ = 320^\circ - 360^\circ = -40^\circ \end{array}$		

Figura 84: Actividad 11.1. Ángulos de medidas cualesquiera (Colera-Jiménez, et al., 2016a).

Actividad 11.2.: Ángulos de medidas cualesquiera

El alumnado realiza ejercicios donde debe expresar cualquier ángulo en valores comprendidos entre -180° y 180° (véase la Figura 85).

- 1. Expresa con valores comprendidos entre -180° y 180° estos ángulos:**

a) 1837° b) 3358° c) 1381° d) 3805°

Comprueba con la calculadora que, en cada caso, coinciden las razones trigonométricas de uno y otro ángulo.

a) $1837 \quad \quad 360$ 37 5	b) $3358 \quad \quad 360$ 118 9
$1837^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 37^\circ = 37^\circ$	$3358^\circ = 9 \cdot 360^\circ + 118^\circ = 118^\circ$
$\text{sen } 1837^\circ = \text{sen } 37^\circ = 0,602$	$\text{sen } 3358^\circ = \text{sen } 118^\circ = 0,883$
$\cos 1837^\circ = \cos 37^\circ = 0,799$	$\cos 3358^\circ = \cos 118^\circ = -0,469$
$\text{tg } 1837^\circ = \text{tg } 37^\circ = 0,754$	$\text{tg } 3358^\circ = \text{tg } 118^\circ = -1,881$

c) $1381 \begin{array}{l} 360 \\ 301 \quad 3 \end{array}$ $1381^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 301^\circ = 301^\circ = 301^\circ - 360^\circ = -59^\circ$ $\text{sen } 1381^\circ = \text{sen } (-59^\circ) = -0,857$ $\cos 1381^\circ = \cos (-59^\circ) = 0,515$ $\text{tg } 1381^\circ = \text{tg } (-59^\circ) = -1,664$	d) $3805 \begin{array}{l} 360 \\ 205 \quad 10 \end{array}$ $3805^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 205^\circ = 205^\circ = 205^\circ - 360^\circ = -155^\circ$ $\text{sen } 3805^\circ = \text{sen } (-155^\circ) = -0,423$ $\cos 3805^\circ = \cos (-155^\circ) = -0,906$ $\text{tg } 3805^\circ = \text{tg } (-155^\circ) = 0,466$
---	---

Figura 85: Actividad 11.2. Ángulos de medidas cualesquiera (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 11.3.: Radianes

El alumnado realiza ejercicios para convertir ángulos en el sistema sexagesimal a radianes (véase la Figura 86).

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

- a) 25° b) 100° c) 150° d) 250°

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo:
 $180^\circ = \pi \text{ rad} = 3,14 \text{ rad}$.

a) $25^\circ = \frac{25 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{5\pi}{36} \text{ rad} = 0,44 \text{ rad}$

b) $100^\circ = \frac{100 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad} = 1,74 \text{ rad}$

c) $150^\circ = \frac{150 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} = 2,62 \text{ rad}$

d) $250^\circ = \frac{250 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{25\pi}{18} \text{ rad} = 4,36 \text{ rad}$

Figura 86: Actividad 11.3. Radianes (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 12.1.: Repaso de conversión de sistemas de medida de ángulos y razones trigonométricas

El alumnado realiza ejercicios en clase, para analizar su evolución, sobre conversión de sistemas de medida de ángulos y razones trigonométricas (véase la Figura 87).

1 Indica cuántos grados equivalen a los siguientes radianes:

a. $\frac{2\pi}{5} \text{ rad}$ $\frac{2\pi}{5} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 72^\circ$	c. $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 120^\circ$
b. $3,5 \text{ rad}$ $3,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 200,54^\circ$	d. $1,5 \text{ rad}$ $1,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 85,94^\circ$

2 Expresa en radianes estos ángulos:

a. 20°

$$20^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

c. 210°

$$210^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

b. 135°

$$135^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

d. 570°

$$570^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{19\pi}{6} \text{ rad}$$

17 Indica en qué cuadrante se sitúan los siguientes ángulos y qué signos tendrán sus razones trigonométricas:

a. 256°

Se encuentra en el tercer cuadrante: seno (–), coseno (–), tangente (+)

b. $5,2 \text{ rad}$

$$5,2 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 297^\circ 56'$$

Se encuentra en el cuarto cuadrante: seno (–), coseno (+), tangente (–)

c. 24°

Se encuentra en el primer cuadrante: seno (+), coseno (+), tangente (+)

d. $1,3 \text{ rad}$

$$1,3 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 74^\circ 29'$$

Se encuentra en el primer cuadrante: seno (+), coseno (+), tangente (+)

e. 202°

Se encuentra en el tercer cuadrante: seno (–), coseno (–), tangente (+)

f. $4,1 \text{ rad}$

$$4,1 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 234^\circ 54'$$

Se encuentra en el tercer cuadrante: seno (–), coseno (–), tangente (+)

g. 105°

Se encuentra en el segundo cuadrante: seno (+), coseno (–), tangente (–)

h. $2,8 \text{ rad}$

$$2,8 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 160^\circ 25'$$

Se encuentra en el segundo cuadrante: seno (+), coseno (–), tangente (–)

Figura 87: Actividad 12.1. Repaso de conversión de sistemas de medida y razones trigonométricas (Colera-Jiménez, et al., 2016b).

Actividad 12.2.: Funciones trigonométricas (altas capacidades)

El alumnado deberá completar la Tabla 40 de valores sobre el seno y el coseno para posteriormente representarlos gráficamente y analizar el desfase existente entre el seno y el coseno de $\pi/2$. Así como, analizará la continuidad de las funciones seno y coseno en todo el dominio de $\mathbb{R}$, y la no continuidad de la función tangente.

Grado sexagesimal	Radianes	Sen α	Cos α	Tg α
0º	0			
45º	$\pi/4$			
90º	$\pi/2$			
135º	$3\pi/4$			
180º	π			
225º	$5\pi/4$			
270º	$3\pi/2$			
315º	$7\pi/4$			
360º	2π			

Tabla 40: Actividad 12.2 Valores para representar las funciones trigonométricas (elaboración propia).

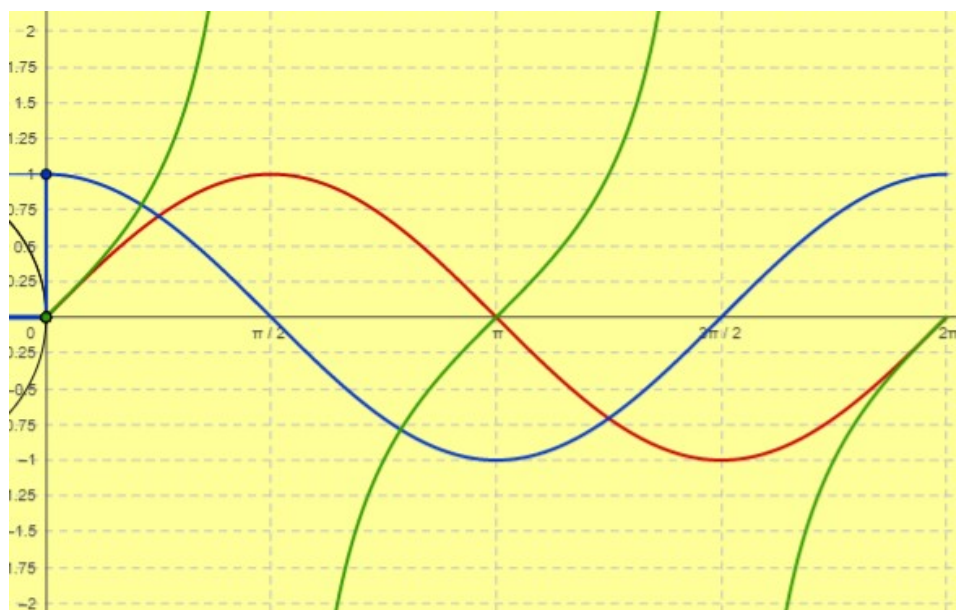


Figura 88: Actividad 12.2. Representación de funciones trigonométricas (Larrosa-Cañestro, 2019).

Sesión 14

Actividad 14.1.: Examen final

1. (2 puntos) Convierte los siguientes grados sexagesimales a radianes, o de radianes a sexagesimales:

- a) $\frac{2\pi}{6}$ b) 25º c) $\frac{3\pi}{4}$ d) 160º e) $\frac{\pi}{4}$ f) 250º

2. (1,5 puntos) Si $\operatorname{tg} \alpha = 0,53$. Calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$.

3. (1,5 puntos) Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco bajo un ángulo de 55° (véase la Figura 89). ¿A qué distancia del faro se encuentra el barco? (Costa-Vilalta, 2015).

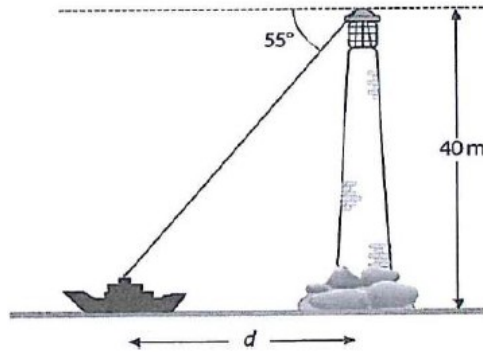


Figura 89: Examen final. Pregunta 3 (Costa-Vilalta, 2015).

4. (3 puntos) Desde cierto punto se observa la parte más alta de una chimenea de una casa bajo un ángulo de 60° . Retrasando la posición 250 m en la dirección adecuada, el ángulo se convierte de 30° (véase la Figura 90). ¿Cuál es la altura de esta chimenea? (Costa-Vilalta, 2015).

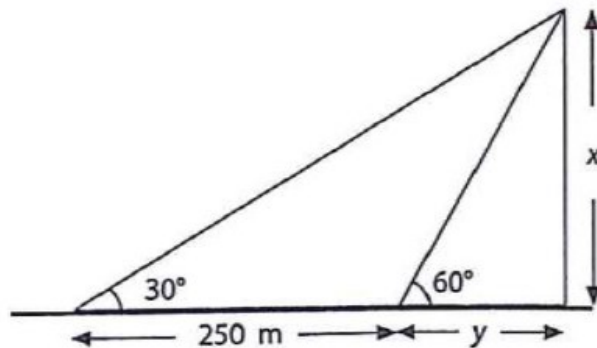


Figura 90: Examen final. Pregunta 4 (Costa-Vilalta, 2015).

5. (2 puntos) Indica y justifica si estas afirmaciones son ciertas o no:

- a) El seno de un ángulo puede ser mayor que 1.
- b) La tangente de un ángulo nunca puede ser mayor que 1.
- c) El coseno de un ángulo está comprendido entre -1 y 1.
- d) Si $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, entonces $\operatorname{tg} \alpha < 0$ y $\operatorname{sen} \alpha > 0$.

Sesión 15

Actividad 15.1.: El peso de la palabra

El profesor le da a cada alumno una ficha con preguntas a responder durante 15 min. Posteriormente, el profesor lee un breve texto y abre un debate con el alumnado para reflexionar sobre la actividad realizada (15 min).

Las preguntas a responder son:

1. Realiza una lista con palabras o frases ofensivas.
2. ¿Qué palabras pueden ser tan dolorosas como un golpe o un puñetazo?
3. ¿Qué palabras o frases pueden ofender a los chicos?
4. ¿Qué palabras o frases pueden ofender a las chicas?
5. ¿Alguna vez has utilizado esas palabras o frases?
6. ¿Alguna vez, alguien te ha dicho esas palabras o frases?
7. Si alguien utiliza esas palabras, ¿crees que lo hace para ofender, porque está de moda, o porque no entiende su significado?

El texto a leer por el profesor antes de la puesta en común y el debate entre el alumnado, se muestra en la Figura 91:

Generalmente, las palabras que se utilizan para insultar o agredir están vinculadas a características físicas, a cuestiones referidas a la sexualidad, a la nacionalidad o al origen social de una persona. Es importante ser responsables en el uso del lenguaje, porque todos los ejemplos recién mencionados son discriminación. Cuando una persona es discriminada por sus compañeros se siente vulnerable, confusa y atemorizada. A veces, se siente avergonzada y culpable. Lo cierto es que sufre una situación injusta, porque quien está equivocado es aquel o aquella que agrede y discrimina.

La mayoría de las veces la discriminación se apoya en estereotipos sociales o culturales sobre cómo tienen que ser o actuar los demás. Los que discriminan no toman en cuenta que la diversidad enriquece y fortalece a un grupo, que todas las personas, si bien son diferentes, tienen los mismos derechos, y que el ser diferentes permite aportar ideas y experiencias variadas para construir un proyecto compartido, reforzado y más completo.

Figura 91: Actividad contra el acoso escolar (Martínez-Alcalá, Márquez González y Lázaro-Cutanda, 2016).

Sesión 16

Actividad 16.1.: Examen de recuperación

1. (2 puntos) Convierte los siguientes grados sexagesimales a radianes, o de radianes a sexagesimales:

- a) $\frac{4\pi}{5}$ b) 75° c) $\frac{3\pi}{2}$ d) 135° e) $\frac{\pi}{2}$ f) 330°

2. (1,5 puntos) Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

3. (1,5 puntos) La escalera de la figura forma un ángulo de 60° con el suelo, y su pie se encuentra situado a 2,4 m de la pared (véase la Figura 92). ¿Cuál es la longitud x de la escalera? (Costa-Vilalta, 2015).

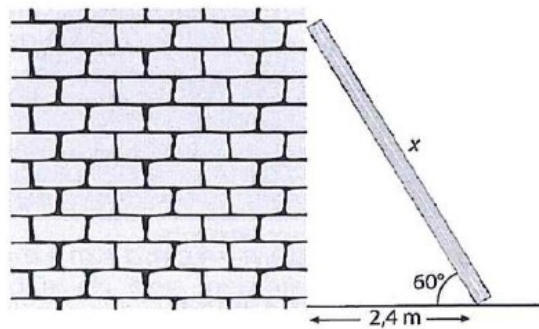


Figura 92: Examen final de recuperación. Pregunta 3 (Costa-Vilalta, 2015).

4. (3 puntos) En una torre de vigilancia se encuentra el vigilante, el cual observa un coche aparcado bajo un ángulo de visión de 20° , y en el lado opuesto observa a su compañero bajo un ángulo de visión de 30° . La distancia entre el coche y su compañero es de 115,5 m. ¿Cuánto mide la torre de vigilancia? (Mejía-Sánchez-Bermejo, et al., 2016b).

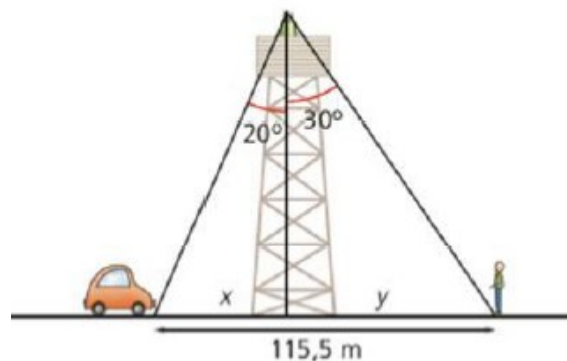


Figura 93: Examen final de recuperación. Pregunta 4 (Mejía-Sánchez-Bermejo, et al., 2016b).

5. (2 puntos) Indica y justifica si estas afirmaciones son ciertas o no:

- a) El coseno de un ángulo de $\pi/4$ es igual a 1.
- b) El valor máximo de la tangente de un ángulo es 1.
- c) La suma del seno y el coseno de un ángulo es siempre 1.

d) Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, entonces $\operatorname{tg} \alpha < 0$ y $\operatorname{sen} \alpha > 0$.

Actividad 16.2.: Ampliación

El alumnado que ha aprobado el examen final con una nota elevada, realizará los siguientes ejercicios sobre demostraciones y razonamiento matemático (véase la Figura 94).

39. Demuestra las identidades trigonométricas.

$$\text{a) } \frac{1 + \cotg x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\text{b) } \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(\operatorname{sen} x \cos x)^2} = \sec^2 x$$

$$\text{b) } \frac{1 + \cotg x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + \cos x)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\text{b) } \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(\operatorname{sen} x \cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

91. Simplifica las expresiones trigonométricas.

$$\text{a) } \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\text{b) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\text{c) } \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\text{a) } \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\text{b) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{1} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\text{c) } \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

Figura 94: Actividad 16.2. Ampliación (Mejía-Sánchez-Bermejo, et al., 2016b).

3. Traza un triángulo isósceles ABC, tal que $AB = AC$ y tal que el ángulo $ABC = 61^\circ$. Sobre la semirrecta de origen A pasando por C, en el exterior del segmento AC situar el punto D tal que $BC = CD$. ¿Es el triángulo ABD rectángulo? (García-Armenteros, 2019).

4. Traza un triángulo ABC, tal que $BC = 6\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ y $AC = 3\text{cm}$. Sea M la mitad de BC. ¿Cuál de los triángulos AMB y AMC tiene mayor área? (García-Armenteros, 2019).

ANEXO VIII: Plan de clase de la actividad de modelización

En este Anexo VIII, se presenta el plan de clase de la actividad 6.1. de modelización “El parque de atracciones: diseña la catarata salvaje”.

Plan de clase

➤ Fase de inicio e introducción de la tarea

Introduce la tarea en clase dando a cada estudiante una copia del enunciado de la tarea.

Anuncia el objetivo de la clase:

En la clase de hoy vamos a explorar una situación matemática. Vamos a diseñar la pendiente de una catarata en un parque de atracciones. No se trata de un problema de ángulos y medidas en el que todos tenéis que obtener la misma solución, sino que tenéis que explorar muchos casos y tratar de encontrar relaciones.

Hay diversas formas de abordar el problema, y veréis que llegaremos a diferentes tipos de soluciones. Sed creativos, e intentad buscar peculiaridades y resultados que llamen vuestro interés.

Lee el enunciado en voz alta para que los alumnos entiendan la tarea y el vocabulario. Así como se resuelven las dudas que puedan surgir.

¿Habéis ido de excursión a un parque de atracciones? ¿Os habéis subido en las barcas y habéis bajado por la rampa de la catarata?

¿Cómo era la pendiente de la rampa? ¿Era muy inclinada?

¿Pensáis que el ángulo de la pendiente era muy grande?

¿La altura en el inicio de la rampa de la catarata era muy alta con respecto al suelo? ¿Bajasteis a gran velocidad por la catarata?

Presenta el siguiente vídeo por si algún alumno tiene dudas sobre la atracción: <https://www.youtube.com/watch?v=gCt8WdZLYm4>

➤ Fase exploración y desarrollo de la tarea

En primer lugar, pide a los alumnos que trabajen individualmente razonando el enunciado presentado, reflexionando sobre la introducción de la tarea y razonando con el fichero “Parte 1” de Geogebra (véase la Figura 95).

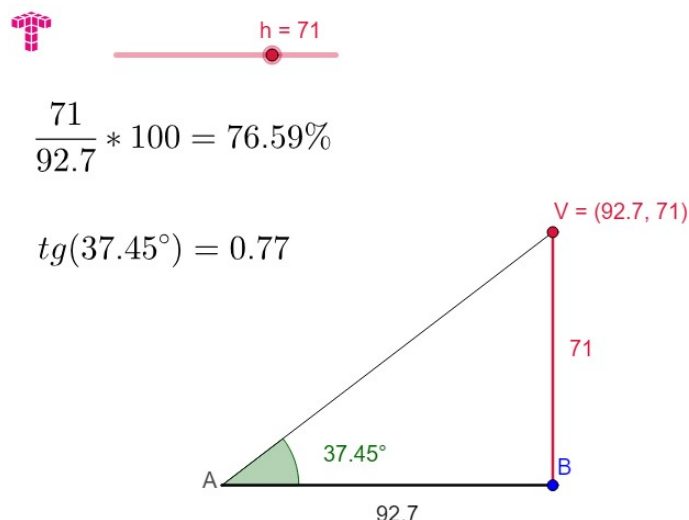


Figura 95: Plan de clase. Parte 1 de Geogebra (Mascil, 2014b).

Para guiar a los alumnos, si éstos están modificando las longitudes de ambos catetos sin llegar a un razonamiento, realiza las siguientes preguntas:

- Probad a cambiar sólo la longitud de un solo cateto del triángulo. Por ejemplo, modificad sólo el cateto opuesto. ¿Qué pasa con el ángulo?
- Ahora probad a cambiar sólo la longitud del cateto contiguo. ¿Qué pasa con el ángulo?

El alumno podrá observar que el ángulo aumenta si aumenta la longitud del cateto opuesto, si se mantiene constante el cateto contiguo. Sin embargo, si mantiene el cateto opuesto constante y aumenta el cateto contiguo, el ángulo disminuye (véase la Figura 96 y Figura 97).

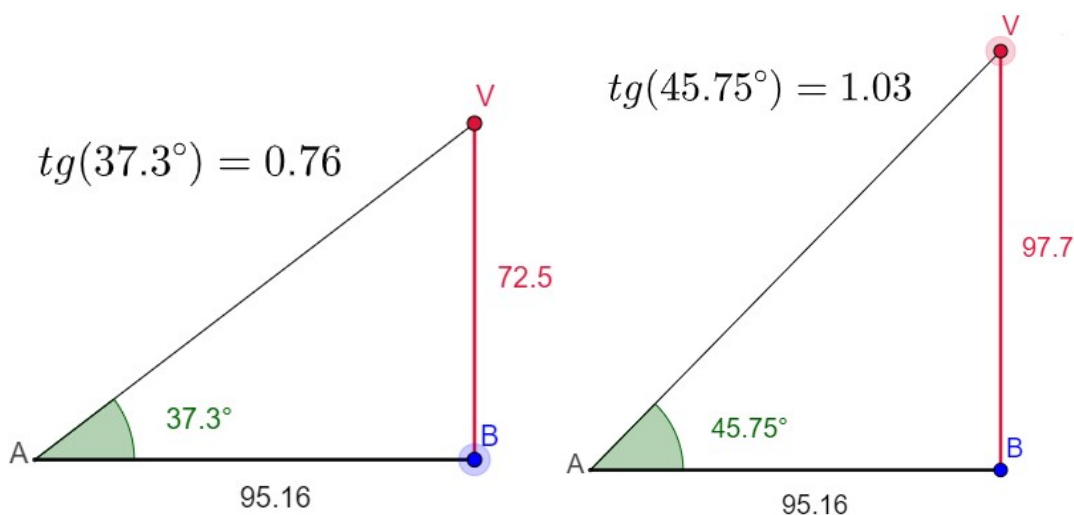


Figura 96: Plan de clase. Comparativa de ángulos según longitud del cateto opuesto (Mascil, 2014b).

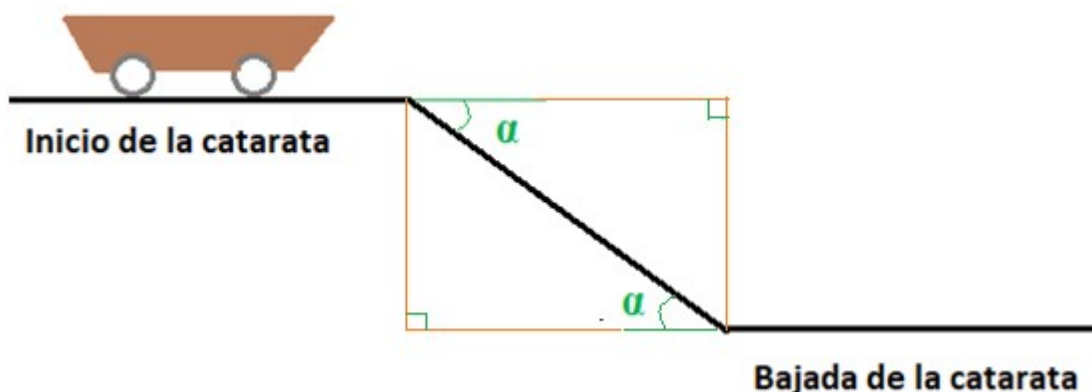


Figura 99: Plan de clase. Croquis de ángulos de la rampa o catarata (elaboración propia).

Para detectar si los alumnos han observado la relación de los ángulos de la rampa, pregunta:

- El ángulo de bajada de la rampa (catarata), ¿tiene relación con otro ángulo que constituye la rampa? ¿Sería igual a otro ángulo de la rampa?
- ¿Podrías imaginar la rampa como la hipotenusa de un triángulo rectángulo?
- ¿Podrías imaginar un rectángulo cuya diagonal sea la rampa? ¿Qué relación existe entre sus ángulos?

Toda la información obtenida durante la primera sesión, se podrá utilizar para plantear u orientar la segunda sesión.

Comienza la segunda sesión solicitando al alumnado que forme grupos de tres o cuatro personas; incluso, ayuda a formar los grupos para que sean lo más heterogéneos posibles y fomentar la relación entre todos los estudiantes. A partir de ahora, los grupos sí trabajarán ya para diseñar la pendiente de la catarata según las dimensiones de la barca.

Además, recuerda a los alumnos lo tratado durante la sesión anterior para que puedan continuar.

Los alumnos deben realizar conjeturas y dar argumentos sobre las mismas; para ello trabajarán con el fichero “Parte 2” de Geogebra y la Tabla 41:

Radio de las ruedas (cm)	Longitud de la barca según nº filas asientos (cm)	Distancia entre centro radio y extremo de barca (cm)	Distancia entre los centros de las ruedas (cm)	Ángulo en el momento del toque (°)	Ángulo deseado de la pendiente (°)

Tabla 41: Tabla a completar por el alumnado al realizar sus conjeturas (elaboración propia).

Los alumnos deben tener claro que deben formular por escrito sus conjeturas, aunque tengan dudas o no estén muy seguros de las mismas.

Explica qué significa cada parámetro del fichero “Parte 2” de Geogebra:

- d = distancia entre los centros de las ruedas.
- g = radio de las ruedas.
- a = distancia entre el extremo inicial de la barca y el centro de la rueda más cercana.
- b = distancia entre el extremo final de la barca y el centro de la rueda más cercana.
- α = ángulo de inclinación de la rampa.
- Deslizador 1= longitud recorrido de la barca.
- Deslizador 2= longitud de la rampa (catarata).

Circula entre los grupos evitando intervenir muy pronto. No obstante, si observa que algún grupo está atascado, o que no avanza demasiado, debe intervenir, evitando decirle lo que tiene que hacer o dándole un resultado. Por ejemplo:

- Si un grupo va escribiendo diferentes datos, pero no es capaz de establecer ninguna conjetura, pregunta: ¿observáis algo en los resultados que van saliendo? Experimentad algo más para ver si encontráis alguna regularidad.
- Si un grupo formula conjeturas contradictorias con uno o algunos de los resultados que tienen escritos: ¿Crees que se cumplirían siempre?

¿Qué relación existe al aumentar la longitud de la base de la barca con el ángulo de la pendiente de la rampa? ¿Y si disminuye la longitud de la base de la barca?

¿Qué relación existe al aumentar el radio de las ruedas con el ángulo de la pendiente de la rampa? ¿Y si disminuye el radio?

¿Influye la distancia entre las ruedas y la posición de las ruedas en la base de la barca?

- Si formulan conjeturas, pero no intentan demostrarlas, u observas que la demostración es incompleta: ¿estás de seguro de ésta? ¿Por qué? ¿Cómo podrías convencerme a mí o a otra persona? ¿Puedes probar tu conjetura con

tus ejemplos? ¿Y con otros? ¿Puedes ver ahora por qué ocurre? ¿Podrías tratar de explicarlo? (véase la Figura 100).

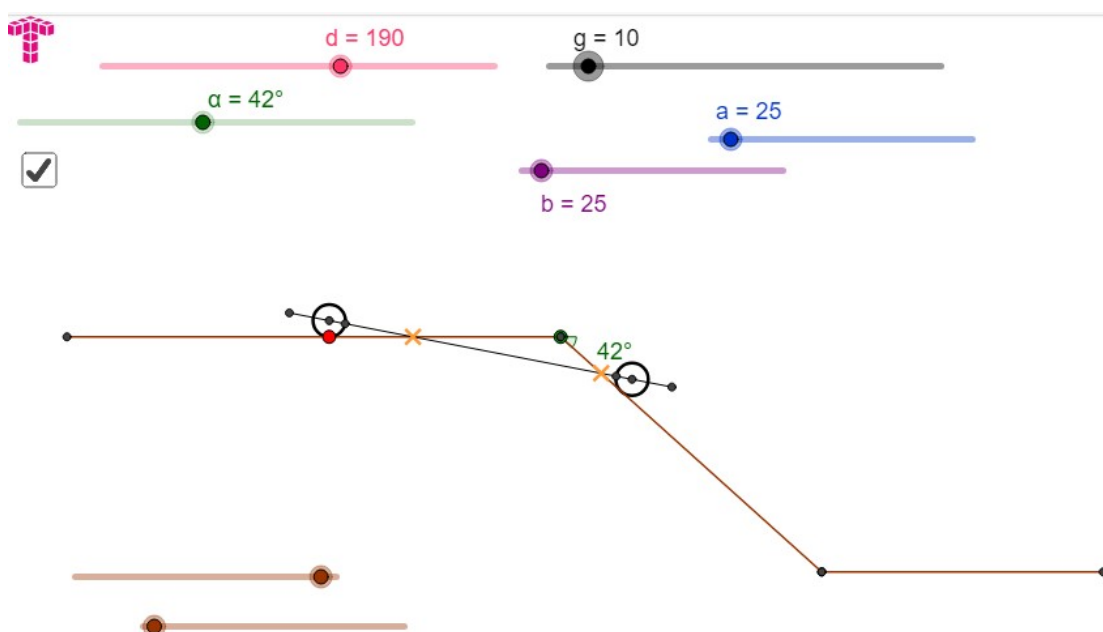


Figura 100: Plan de clase. Demostración de cómo choca la base de la barca con la vía (Mascil, 2014a).

Si detectas que el alumnado sigue estando muy disperso en sus conjeturas, se podría predefinir para el grupo de trabajo varias dimensiones de la barca y la longitud de rampa (cascada) para guiarlos y puedan observar qué ocurre en cada caso.

Tras varios minutos de trabajo del alumnado con el fichero “Parte 2” de Geogebra y la tabla con las dimensiones de la barca, propón al alumnado que complete la Tabla 42 con las dimensiones de la catarata según el ángulo obtenido y la longitud de la catarata deseada.

Ángulo (°)	Longitud catarata (cm)	Base catarata (cm)	Altura catarata (cm)

Tabla 42: Plan de clase. Dimensiones de la catarata (elaboración propia).

Continúa prestando atención a los grupos que estén atascados, o que no estén centrados en la tarea propuesta. Para ello, usa cuestiones del tipo:

- ¿Qué estás intentando hacer? Explica la tarea con tus palabras.
- ¿Qué conocimientos de matemáticas has estudiado que tal vez te podrían ayudar? (Razones trigonométricas).
- ¿Qué datos te dan? ¿Qué es lo que sabes? ¿Qué necesitas saber?
- No pidas ayuda tan pronto, e intenta pensar sobre ello un poco más.
- ¿Qué has intentado hasta ahora?
- ¿Me puedes poner un ejemplo?
- Si alguna información no viene dada, toma tus propias decisiones y anótalas para explicárselas luego a otra persona.
- ¿Recuerdas lo visto en el fichero “Parte 1” de Geogebra?
- Si no te queda claro con Geogebra, esboza tu idea y realiza el cálculo necesario.

➤ Fase de debate y discusión

Pide a los alumnos que expongan en voz alta los resultados obtenidos, y anótalos en la pizarra. Deberán decir el máximo ángulo conseguido sin que choque la barca, las dimensiones de la barca, la base de la catarata y la altura desde la cual desciende la barca.

Conforme el proceso avance, pide a los alumnos que piensen en los resultados presentados en la pizarra o si se podrían mejorar. Si algún grupo repite el mismo resultado o algún resultado es incorrecto, se dejará en la pizarra para valorarlo en la fase de discusión.

Algunas conjeturas que podrían aparecer son:

- Cuanto mayor sea el radio de las ruedas, mayor podrá ser el ángulo de la rampa porque habría menos posibilidad de que roce la base de la barca.
- Cuanto menor sea la longitud de la base de la barca, mayor podrá ser el ángulo de la rampa porque habría menos posibilidad de que roce la base de la barca.
- Cuanto más separadas estén las ruedas en la base de la barca, mayor posibilidad de choque habrá. Pero si están las ruedas muy juntas, los extremos de la barca pueden chocar con la vía de la atracción en el descenso de la barca.
- Al aumentar el ángulo de la rampa, la barca descenderá desde un punto más alto y la atracción ocuparía menos espacio en el terreno del parque de atracciones. Además, la barca descenderá a mayor velocidad, aumentando así la diversión de los pasajeros.

- Para calcular la altura de la catarata conociendo su longitud (hipotenusa) y el ángulo de la pendiente, se utilizaría la razón trigonométrica:

$$\text{Sen } \alpha = \text{cateto opuesto/hipotenusa}$$

- Para calcular la base de la catarata conociendo su longitud (hipotenusa) y el ángulo de la pendiente, se utilizaría la razón trigonométrica:

$$\text{Cos } \alpha = \text{cateto contiguo/hipotenusa}$$

Selecciona algunos resultados que hay en la pizarra, y pide al grupo correspondiente que intente justificarla. Los demás grupos deben permanecer en silencio. Una vez que hayan terminado, pregunta al resto de la clase si están de acuerdo o no con los resultados y la argumentación dada.

Según el nivel del grupo, es de esperar que aparezcan argumentaciones sólo de tipo discursivo o podrían aparecer demostraciones basadas en modelos geométricos.

➤ Fase de sistematización del aprendizaje matemático

En esta fase, reorganiza los conocimientos matemáticos más importantes que han aparecido durante la resolución de la tarea, así como los procesos que han puesto en funcionamiento los alumnos.

Entre los conocimientos matemáticos, destacar:

- Razones y relaciones trigonométricas.
- Medidas de longitudes.

Entre los procesos:

- Exploración sistemática.
- Formulación de hipótesis.
- Descubrimiento de relaciones.
- Medida.
- Visualización.
- Argumentación y prueba.
- Modelización.
- Comunicación.
- Utilización de herramientas tecnológicas e informáticas como la calculadora y Geogebra, respectivamente.

Es importante que al reorganizar el conocimiento matemático y los procesos de indagación, se haga referencia a casos concretos elaborados por los estudiantes.

Variantes de la tarea

En esta tarea se puede establecer unas dimensiones previas para que todos lleguen a los mismos resultados y así guiarlos si están muy dispersos. O por el contrario, se podría dar libertad en la elección de datos para que cada grupo establezca sus propias conjeturas.

Esta tarea podría ser interdisciplinar con la asignatura de informática debido a que el alumnado podría utilizar Excel para realizar los cálculos y sus conjeturas. Así como, se podría completar con la asignatura de física donde el alumnado podría calcular la velocidad y la aceleración a las cuales desciende la barca por la catarata; o la asignatura de tecnología para estudiar los materiales o la electrónica de la atracción.

ANEXO IX: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la unidad didáctica

En el Anexo IX, se presentan los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de los bloques 1 y 3 que se van a utilizar en dicha unidad didáctica, de acuerdo con el RD 1105/2014 (véase la Tabla 43 y la Tabla 44):

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas:

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	Competencias clave
EA. 1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.	CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.	CCL CMCT
EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). EA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. EA.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.	CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT CAA
EA1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. EA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. EA.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. EA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.	CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos o geométricos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT CAA CSC SIEP
EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	CMCT

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	Competencias clave
EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.	CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT CAA SIEP
EA.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos o algebraicos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. EA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. EA.1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos o algebraicos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT CD CAA

Tabla 43: Estándares de aprendizaje y criterios de evaluación. Bloque 1 (RD 1105/2014, p. 395).

- Bloque 3. Geometría:

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	Competencias clave
EA.3.1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas, empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.	CE.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT
EA.3.2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, las estrategias y las fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes y áreas de cuerpos y figuras geométricas. EA.3.2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. EA.3.2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos y pirámides, y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.	CE.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, las técnicas o las fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT CAA CSC CEC

Tabla 44: Estándares de aprendizaje y criterios de evaluación. Bloque 3 (RD 1105/2014, p. 397).

ANEXO X: Tablas de evaluación y rúbrica del examen final

En el presente Anexo X, se proponen algunas tablas de evaluación a seguir durante el desarrollo de la unidad didáctica.

➤ Tabla de evaluación del cuaderno (véase la Tabla 45):

Evaluación	Excelente (4)	Bien (3)	Mejorable (2)	Insuficiente (1)	Total
Claridad, orden y limpieza del cuaderno					
Toma los apuntes de clase					
Actividades realizadas					
Actividades corregidas					
No tiene faltas de ortografía					

Tabla 45: Tabla de evaluación del cuaderno (elaboración propia).

➤ Tabla de evaluación de las actividades individuales (véase la Tabla 46):

Evaluación	Excelente (4)	Bien (3)	Mejorable (2)	Insuficiente (1)	Total
Tiene iniciativa para realizar las actividades					
Tiene autonomía					
Tiene confianza para enfrentarse a las actividades					
Pregunta las dudas que le surgen					
Investiga o busca información					
Corrige los errores					
Estrategias y procedimientos seguidos					
Diagramas y dibujos					
Utiliza diversos recursos					
Solución o resultados de las actividades					
Es voluntario para resolver actividades en la					

pizarra					
---------	--	--	--	--	--

Tabla 46: Tabla de evaluación de las actividades individuales (elaboración propia).

➤ Tabla de evaluación de las actividades en grupo (véase la Tabla 47):

Evaluación	Excelente (4)	Bien (3)	Mejorable (2)	Insuficiente (1)	Total
Se integra en el grupo de trabajo					
Participa activamente en el grupo planteando soluciones					
Actitud de respeto y tolerancia con el resto de miembros del grupo					
Liderazgo e iniciativa					
Entrega la actividad según los criterios establecidos					
Reflexiona sobre el proceso de aprendizaje					
Investiga o busca información					
Claridad, limpieza y orden del trabajo					
Estrategias y procedimientos seguidos					
Diagramas y dibujos					
Creatividad					
Uso de TIC					
Exposición del trabajo					
Solución o resultados de las actividades					

Tabla 47: Tabla de evaluación de las actividades en grupo (elaboración propia).

➤ Tabla de evaluación de la actitud y comportamiento en clase (véase la Tabla 48):

Evaluación	Siempre (2)	A veces (1)	Nunca (0)	Total
No interrumpe la clase o las explicaciones del profesor				
Facilita el desarrollo de la clase, y fomenta buen clima de aula				

No falta el respeto a sus compañeros				
No perjudica el aprendizaje de sus compañeros				
Tiene tolerancia con todos los ritmos de aprendizaje				
Resuelve e intermedia los conflictos entre los compañeros				
Tiene solidaridad y ayuda a sus compañeros				
Participa activamente en las actividades planteadas				
Muestra interés por la asignatura				

Tabla 48: Tabla de evaluación de la actitud en clase (elaboración propia).

➤ Tabla de la autoevaluación del profesor (véase la Tabla 49):

Autoevaluación	Siempre (2)	A veces (1)	Nunca (0)	Total
Planifico y secuencio los contenidos según las características del alumnado				
Los objetivos didácticos permiten al alumnado adquirir las habilidades				
Adopto estrategias y programo actividades según las características del alumnado				
Establezco los criterios de evaluación				
Coordino mi actividad con el resto de profesores				
Planteo situaciones introductorias para motivar al alumnado				
Relaciono los contenidos y las actividades según los intereses del alumnado y sus conocimientos previos				
Las actividades planteadas aseguran la adquisición de los objetivos didácticos y las habilidades				
Existe un equilibrio entre las actividades individuales y las grupales				
Propongo actividades variadas (diferente tipología)				
Fomento y enseño el uso de TIC				

Utilizo recursos didáctico variados				
Distribuyo bien los tiempos				
Compruebo que el alumnado haya comprendido la actividad a realizar				
Facilito estrategias de aprendizaje				
Fomento el respeto y el compañerismo				
Reviso y corrijo las actividades realizadas dentro y fuera del aula				
Utilizo los criterios de evaluación establecidos en el Proyecto Curricular				

Tabla 49: Tabla de autoevaluación del profesor (Corbacho-Pérez, 2005).

➤ Rúbrica del examen final

- *Pregunta 1 (2 puntos):* 0,33 cada apartado correcto.
- *Pregunta 2 (1,5 puntos):* relaciones trigonométricas fundamentales: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (0,4); $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ (0,4); y los resultados de cada razón trigonométrica: $\sin \alpha$ (0,4); y $\operatorname{tg} \alpha$ (0,3).
- *Pregunta 3 (1,5 puntos):* dibujo del triángulo (0,5); ecuación planteada (0,5); y despejar la incógnita y resultado (0,5).
- *Pregunta 4 (3 puntos):* cada ecuación del sistema de ecuaciones ($2 \cdot 0,75$); igualar las ecuaciones del sistema (0,5); y el resultado de las dos incógnitas ($2 \cdot 0,5$).
- *Pregunta 5 (2 puntos):* 0,5 cada cuestión correcta.

Índice de Figuras

Figura 1: Esquema del TFM

Figura 2: El proceso de transposición didáctica

Figura 3: Bloque de Geometría para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O.

Figura 4: Esquema gráfico para explicar las razones trigonométricas

Figura 5: Esquema gráfico para explicar las razones trigonométricas en cualquier ángulo

Figura 6: Esquema gráfico de la definición de radián según cada editorial

Figura 7: Número de actividades según el nivel de dificultad por editorial

Figura 8: Porcentaje de actividades según el nivel de dificultad por editorial

Figura 9: Circunferencia goniométrica

Figura 10: Triángulo rectángulo

Figura 11: Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

Figura 12: Propiedades 1 y 2 de las razones trigonométricas

Figura 13: Propiedades 3 y 4 de las razones trigonométricas

Figura 14: Relaciones trigonométricas de algunos ángulos

Figura 15: Razones trigonométricas del ángulo suma

Figura 16: Teorema del seno. Triángulo con el ángulo γ recto

Figura 17: Teorema del seno. Triángulo con el ángulo γ agudo

Figura 18: Teorema del seno. Triángulo con el ángulo γ obtuso

Figura 19: Circunferencias circunscrita

Figura 20: Teorema del coseno. Triángulo con el ángulo γ agudo

Figura 21: Teorema del coseno. Triángulo con el ángulo γ obtuso

Figura 22: Caso I de construcción de triángulos

Figura 23: Caso II de construcción de triángulos

Figura 24: Caso III-1 de construcción de triángulos

Figura 25: Caso III-2 de construcción de triángulos

Figura 26: Caso III-3 de construcción de triángulos

Figura 27: Caso III-4 de construcción de triángulos

Figura 28: casos IV y V de construcción de triángulos

Figura 29: Fórmulas de Mollweide y de proyección. Triángulo con el ángulo β agudo y obtuso

Figura 30: Cálculo de una altura de pie inaccesible

Figura 31: Cálculo de distancia entre dos puntos inaccesibles

Figura 32: Área de un triángulo. Triángulo con el ángulo α agudo

Figura 33: Circunferencia inscrita

Figura 34: Mapa de la localización del I.E.S. Jándula

Figura 35: I.E.S. Jándula

Figura 36: Croquis del aula

Figura 37: Número de actividades con dibujo por editorial

Figura 38: Gráficos comparativos de actividades con o sin dibujo

Figura 39: Comparativa en % de actividades con o sin dibujo

Figura 40: Número de problemas contextualizados por editorial

Figura 41: Gráficos comparativos de problemas contextualizados

Figura 42: Comparativa en % de problemas contextualizados

Figura 43: Cuestionario inicial de 4º E.S.O. Pregunta 2

Figura 44: Cuestionario inicial de 4º E.S.O. Pregunta 3

Figura 45: Cuestionario inicial de 4º E.S.O. Pregunta 4

Figura 46: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 1

Figura 47: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 2

Figura 48: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 3

Figura 49: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 4

Figura 50: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 5

Figura 51: Cuestionario final de 4º E.S.O. Pregunta 5

Figura 52: Cuestionario final de 1º Bachillerato. Pregunta 5

Figura 53: Test de evaluación inicial

Figura 54: Test de evaluación inicial

Figura 55: Test de evaluación inicial

Figura 56: Test de evaluación inicial

Figura 57: Test de evaluación inicial

Figura 58: Actividad 2.1. Triángulos rectángulos semejantes con ángulo de 30°

Figura 59: Actividad 2.2. Razones trigonométricas con papel milimetrado

Figura 60: Actividad 3.1. Relaciones trigonométricas fundamentales

Figura 61: Actividad 3.2. Relaciones trigonométricas fundamentales

Figura 62: Actividad 3.3. Circunferencia goniométrica

Figura 63: Actividad 3.4. Relaciones trigonométricas fundamentales

Figura 64: Actividad 4.1. Utiliza la calculadora

Figura 65: Actividad 4.2. Utiliza la calculadora

Figura 66: Actividad 5.1. Resuelve triángulos rectángulos

Figura 67: Actividad 5.2. Resuelve triángulos rectángulos

Figura 68: Actividad 5.3. Resuelve triángulos rectángulos

Figura 69: Actividad. 6.1. Parque de atracciones

Figura 70: Actividad 6.1. Croquis de la catarata

Figura 71: Actividad 6.1. Croquis del choque de la barca con la vía

Figura 72: Actividad 8.1. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles

Figura 73: Actividad 8.2. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles

Figura 74: Actividad 8.3. App Dioptra. Torre del reloj en Andújar

Figura 75: Actividad 8.3. Esquema de la torre del reloj en Andújar

Figura 76: Actividad 8.3. App Dioptra. Torre de la Mezquita-Catedral de Córdoba

Figura 77: Actividad 8.3. App Dioptra. Torre de la Mezquita-Catedral de Córdoba

Figura 78: Actividad 8.3. Esquema de la torre de la Mezquita-Catedral de Córdoba

Figura 79: Actividad 9.1. Resolución de triángulos oblicuángulos

Figura 80: Actividad 9.2. Resolución de triángulos oblicuángulos

Figura 81: Actividad 9.3. Teoremas del seno y del coseno

Figura 82: Actividad 9.4. Resolución de triángulos

Figura 83: Actividad 10.1. Razones trigonométricas de 0° a 360°

Figura 84: Actividad 11.1. Ángulos de medidas cualesquiera

Figura 85: Actividad 11.2. Ángulos de medidas cualesquiera

Figura 86: Actividad 11.3. Radianes

Figura 87: Actividad 12.1. Repaso de conversión de sistemas de medida y razones trigonométricas

Figura 88: Actividad 12.2. Representación de funciones trigonométricas

Figura 89: Examen final. Pregunta 3

Figura 90: Examen final. Pregunta 4

Figura 91: Actividad contra el acoso escolar

Figura 92: Examen final de recuperación. Pregunta 3

Figura 93: Examen final de recuperación. Pregunta 4

Figura 94: Actividad 16.2. Ampliación

Figura 95: Plan de clase. Parte 1 de Geogebra

Figura 96: Plan de clase. Comparativa de ángulos según longitud del cateto opuesto

Figura 97: Plan de clase. Comparativa de ángulos según longitud del cateto contiguo

Figura 98: Plan de clase. “Parte 2” de Geogebra

Figura 99: Plan de clase. Croquis de ángulos de la rampa o catarata

Figura 100: Plan de clase. Demostración de cómo choca la base de la barca con la vía

Índice de Tablas

Tabla 1: Comparativa de los contenidos de trigonometría según la editorial

Tabla 2: Diversas definiciones de radián

Tabla 3: Relaciones trigonométricas

Tabla 4: Tipos de actividades y su dificultad. Editorial Anaya

Tabla 5: Tipos de actividades y su dificultad. Editorial Edelvives

Tabla 6: Tipos de actividades y su dificultad. Editorial SM

Tabla 7: Características de los centros y su enseñanza-aprendizaje

Tabla 8: Competencias clave en la unidad didáctica

Tabla 9: Temporalización del curso

Tabla 10: Desarrollo de la sesión 1

Tabla 11: Desarrollo de la sesión 2

Tabla 12: Desarrollo de la sesión 3

Tabla 13: Desarrollo de la sesión 4

Tabla 14: Desarrollo de la sesión 5

Tabla 15: Desarrollo de la sesión 6

Tabla 16: Desarrollo de la sesión 7

Tabla 17: Desarrollo de la sesión 8

Tabla 18: Desarrollo de la sesión 9

Tabla 19: Desarrollo de la sesión 10

Tabla 20: Desarrollo de la sesión 11

Tabla 21: Desarrollo de la sesión 12

Tabla 22: Desarrollo de la sesión 13

Tabla 23: Desarrollo de la sesión 14

Tabla 24: Desarrollo de la sesión 15

Tabla 25: Desarrollo de la sesión 16

Tabla 26: Evaluación de los errores lingüísticos

Tabla 27: Tipos de actividades con o sin dibujo

Tabla 28: Comparativa en % de actividades con o sin dibujo

Tabla 29: Tipos de actividades contextualizadas o no

Tabla 30: Comparativa en % de problemas contextualizados

Tabla 31: Objetivos de etapa

Tabla 32: Objetivos de etapa en Andalucía

Tabla 33: Actividad 2.1. Razón trigonométrica del seno

Tabla 34: Actividad 2.1. Razón trigonométrica del coseno

Tabla 35: Actividad 2.1. Razón trigonométrica de la tangente

Tabla 36: Actividad 2.2. Razones trigonométricas con papel milimetrado

Tabla 37: Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60°

Tabla 38: Diseño de la barca y ángulo de choque con la rampa

Tabla 39: Actividad 6.1. Diseño de la catarata según el ángulo aceptado en la pendiente

Tabla 40: Actividad 12.2 Valores para representar las funciones trigonométricas

Tabla 41: Tabla a completar por el alumnado al realizar sus conjeturas

Tabla 42: Plan de clase. Dimensiones de la catarata

Tabla 43: Estándares de aprendizaje y criterios de evaluación. Bloque 1

Tabla 44: Estándares de aprendizaje y criterios de evaluación. Bloque 3

Tabla 45: Tabla de evaluación del cuaderno

Tabla 46: Tabla de evaluación de las actividades individuales

Tabla 47: Tabla de evaluación de las actividades en grupo

Tabla 48: Tabla de evaluación de la actitud en clase

Tabla 49: Tabla de autoevaluación del profesor