



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Escuela Politécnica Superior (Jaén)

Trabajo Fin de Máster

ANÁLISIS DE LA INGESTIÓN DE AIRE EN RESALTOS HIDRÁULICOS

Alumno: Boutassghount El Boussmaki, Rami

Tutor: Prof. D. Carlos Martínez Bazán
Dpto.: Ingeniería Mecánica y Minera

Julio, 2018



Universidad de Jaén
Escuela Politécnica Superior de Jaén
Departamento de Informática

Don JESÚS CARLOS MARTÍNEZ BAZÁN, tutor del Trabajo Fin de Máster titulado: ANÁLISIS DE LA INGESTIÓN DE AIRE EN RESALTOS HIDRÁULICOS, que presenta RAMI BOUTASSGHOUNT EL BOUSSMAKI, autoriza su presentación para defensa y evaluación en la Escuela Politécnica Superior de Jaén.

Jaén, JULIO de 2018

El alumno:

RAMI BOUTASSGHOUNT EL
BOUSSMAKI

El tutor:

CARLOS MARTÍNEZ BAZÁN

Índice

1	Introducción y motivación	9
1.1	Objetivos	11
1.2	Alcance del TFM	11
2	Técnicas experimentales	13
2.1	Historia de la visualización de flujos	13
2.2	Velocimetría de partículas, PIV	15
2.2.1	Principio físico	15
2.2.2	Pre-procesado de las imágenes	17
2.2.3	Procesado de las imágenes	18
2.2.4	Correlación cruzada directa, DCC	20
2.2.5	Correlación basada en la transformada de Fourier, DFT . . .	21
2.2.6	Localización del pico	23
2.2.7	PIVlab	23
2.3	Sondas ópticas	31
3	El problema del resalto hidráulico	35
3.1	El problema general	35
3.2	Procedimiento experimental	35
3.2.1	Flujo a través de la compuerta	35
3.2.2	Resalto hidráulico	38
3.3	Ingestión de aire en un resalto hidráulico	39
4	Análisis de resultados	41
4.1	Procesado de las imágenes	43
4.1.1	Análisis del campo de velocidad	45
4.1.2	Análisis de la vorticidad	47
4.2	Análisis de la concentración de aire	48
4.2.1	Procedimiento de obtención de la concentración de aire . . .	51
4.2.2	Resultados	54
5	Conclusiones	64

6 Bibliografía	67
7 Anexo: scripts de MATLAB® usados para obtener concentración de aire	72
7.1 principal.m	72
7.2 posicionessonda.m	75
7.3 leedatos.m	77
7.4 calculavflujo.m	78
7.5 calculatb.m	80
7.6 data.txt	83
8 Anexo: Tablas para obtención de x_p, y_p y x_s	85

Índice de Figuras

1	Prandtl como pionero de las técnicas de visualización de flujos, imágenes extraídas de [Raffel et al., 2007].	14
2	Equipamiento para la velocimetría de partículas en un túnel de viento. Extraída de la referencia [Raffel et al., 2007]	16
3	Concepto de ventanas de interrogación	19
4	Cálculo de la matriz de correlación mediante el uso de DCC. El área de interrogación I (4×4 pixels) es correlacionado con el área de interrogación I' (8×8 pixels) y se obtiene la matriz de correlación (9×9 pixels). Figura adaptada de la referencia [Thielicke, 2014]. . .	20
5	Obtención de la matriz de correlación $C(x, y)$ a partir de las ventanas de interrogación I de tamaño 32×32 píxeles e I' con 64×64 píxeles. Figura adaptada de la referencia [Raffel et al., 2007].	21
6	A: Coste computacional de los métodos DFT y DCC. B: Principio de la técnica de la ventana de deformación. Extraída de la referencia [Thielicke, 2014].	22
7	Principio de la función gaussiana 2×3 puntos de ajuste de subpíxeles de precisión se consigue mediante el ajuste de una función gaussiana unidimensional (línea continua) para la distribución de intensidad entero de la matriz de correlación (puntos) para ambos ejes de forma independiente. Aquí sólo se muestra el ajuste para un eje. Figura extraída de [Thielicke, 2014]	24
8	Interfaz gráfica de PIVlab [Thielicke and Stamhuis, 2015]	25
9	Carga de imágenes para análisis	25
10	Configuración de la correlación PIV	26
11	Correlación del par de imágenes	27
12	Calibración espacial ($4px = 1mm$) y temporal (tiempo entre captura y captura = $1ms$)	28
13	Ventana de validación, sin aplicación de filtros	29
14	Selección de recuadro de límites de velocidades horizontales y verticales	29

15	Aplicación de límites por límites en velocidades horizontales y verticales. Interpolación de vectores fuera de rango	30
16	Aplicación de límites por límites en velocidades horizontales y verticales. Eliminación de vectores fuera de rango	31
17	Sonda de fibra óptica de doble punta para la detección de fases. La longitud de los soportes paralelos es de $25mm$, la longitud de la fibra de $5mm$ y su diámetro es de $0.8mm$. Extraída de la referencia [Murzyn et al., 2005]	33
18	Esquema del flujo	36
19	Relación del coeficiente de contracción C_c con y_0/y_g	37
20	Definición de las coordenadas usadas en el problema del resalto . .	43
21	Captura del resalto y campo de velocidad. $Fr = 2.0$	45
22	Valores del campo de velocidad y pérdida de energía. $Fr = 2.0$. . .	46
23	Valores del campo de velocidad. $Fr = 2.0$	48
24	Vorticidad entre la zona de mezcla y la superficie libre. $Fr = 2.0$. .	49
25	Diagrama de funciones de MATLAB® usadas para calcular la concentración de burbujas. $Fr = 2.0$	49
26	Obtención de la señal por el paso de una burbuja bajo una de las puntas de la sonda. Alcance máximo de la señal $S_{max} \simeq 5.2V$ y valor de la señal sin presencia de luz $S_{min} \simeq -7.1V$	51
27	Distinción entre señal de paso de burbuja y pulso estroboscópica . .	54
28	Pendiente de las dos señales de la sonda a lo largo del experimento entero en una posición fija de la sonda	55
29	Histograma para la pendiente de la señal (V/s) de la sonda óptica .	55
30	Señales de la sonda por detección de burbujas y pulso estroboscópico. $Fr = 2.0$	58
31	Detalle gráfico de la detección de burbujas $Fr = 2.0$	59
32	Concentración de aire para el resalto con $Fr = 2.0$	60
33	Concentración de aire para el resalto con $Fr = 2.5$ (v1)	61
34	Concentración de aire para el resalto con $Fr = 2.5$ (v2)	62
35	Concentración porcentual de grupo de burbujas en un resalto hidráulico con para $Fr = 2.43$ aguas arriba [Witt et al., 2013]	63

1 Introducción y motivación

En el presente Trabajo Fin de Máster se estudian los mecanismos de la ingestión y distribución de aire en resaltos hidráulicos producidos en un canal hidrodinámico de dimensiones $0.5m \times 0.5m \times 2.0m$ a diferentes números de Froude aguas arriba ($Fr = 2.0$ y $Fr = 2.5$). Este número, adimensional, se define como relación entre las fuerzas inerciales y las gravitacionales que actúan en una posición de un fluido en movimiento, ecuación 1. El estudio de los resaltos hidráulicos tiene interés en la modelización del flujo que se genera en las estelas de barcos, y permite describir el efecto de la ingestión de aire en el mismo, [Rodríguez-Rodríguez et al., 2011].

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (1)$$

donde u es la velocidad, g la aceleración de la gravedad y h la altura del fluido.

El resalto hidráulico, en la Mecánica de Fluidos, se define como un cambio brusco en el flujo que pasa de estar en régimen supercrítico ($Fr > 0$) a subcrítico ($Fr < 0$), aumentando así su altura y disminuyendo su velocidad aguas abajo. Esta transición se produce ya que las paredes del canal hacen frenar el flujo que tiene una altura inferior, y , a la crítica [Crespo, 2002]. Una de las aplicaciones del problema del resalto hidráulico es su analogía con la generación de estelas en barcos o submarinos debido a las olas del océano. Éstas tienen una mezcla de aire-agua que generan ruido, lo cual no es precisamente deseable si los barcos o submarinos son de aplicación militar si se desea evitar la detectabilidad de estos artefactos. Este tipo de flujos no es fácil de estudiar con técnicas numéricas ni con la teoría convencional de la Mecánica de Fluidos, por lo que se recurre a métodos experimentales como los que se proponen en el presente TFM.

Para el desarrollo del trabajo, se han tomado imágenes con una cámara digital para estudiar el campo de velocidad y de vorticidad que se generan en el resalto y a su vez se ha empleado una sonda de fibra óptica que mide luminosidad para la detección de burbujas de aire formadas en el resalto.

La sonda dispone de dos puntas para la detección de luz. Cada punta emite una señal de luz que es reflejada en la misma en caso de disponer de un medio reflejante (aire) y deja pasar la luz emisora en caso de encontrarse con un medio transparente (agua). Por tanto se obtiene señal. La sonda se ha empleado para la detección de burbujas en el presente trabajo y ha sido empleada para el mismo propósito por varios autores como [Murzyn et al. \[2005\]](#), [Leandro et al. \[2012\]](#) o [Chanson \[1995\]](#). El procesado de los datos adquiridos permitirá determinar la concentración de aire en el interior del resalto.

Por otro lado, las capturas realizadas durante los experimentos son sometidas a un análisis de correlación llamada velocimetría de burbujas mediante tratamiento de imágenes – o el acrónimo en inglés BIV (*Bubble Image Velocimetry*)– que es una técnica de medición no destructiva basada en la velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes (PIV, *Particle Image Velocimetry*), en donde las burbujas realizan una función similar a las partículas. Tanto en PIV como en BIV se calculan campos de desplazamiento en fluidos a través de dos imágenes tomadas en diferentes instantes de tiempo relativamente próximos entre sí. Las partículas o las burbujas de aire actúan como patrón en las capturas realizadas por la cámara digital. Estos experimentos se hacen sin presencia de luz natural, ya que perturbaríamos la medidas del sensor de fibra óptica puesto que detecta luminosidad. No obstante, la cámara necesita luz para la toma de imágenes, por lo que se dispone de pulsos de luz estroboscópica sincronizados con las aperturas del diafragma de la cámara.

La velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes está documentada en [Raffel et al. \[2007\]](#), en donde los autores describen su base física y teórica, sus técnicas de recogida de datos, sus métodos de análisis, el post-procesamiento de los datos, y entre otros temas de interés de este arte de análisis de los flujos complejos. Mientras que [Thielicke \[2014\]](#) implementa en su tesis doctoral una aplicación de la técnica con MATLAB® y la difunde públicamente en la red. Esta aplicación denominada PIVlab [[Thielicke and Stamhuis, 2015](#)] aprovecha las potentes herramientas que tiene MATLAB®, sobre todo las relativas al procesamiento

de imágenes, para analizar cualquier experimento realizado con la velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes. Esta aplicación puede usarse también con burbujas en lugar de partículas ya que éstas también disponen de diferentes patrones en las capturas que permiten predecir su movimiento. En el presente trabajo fin de Máster se realiza el uso de PIVlab para calcular campos de velocidades y de vorticidad en los resaltos hidráulicos con $Fr = 2.0$ y $Fr = 2.5$.

1.1 Objetivos

Los objetivos principales del trabajo son los enumerados a continuación:

1. Puesta en marcha y realización de experimentos de la ingestión de aire en resaltos hidráulicos.
2. Descripción de la técnica velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes (PIV), sus aplicaciones y su justificación para usar su algoritmo en velocimetría de burbujas mediante tratamiento de imágenes (BIV).
3. Análisis del campo de velocidades de las burbujas en el interior del resalto mediante técnicas de (BIV) basándonos en PIV.
4. Determinación de la concentración de aire mediante análisis de la señal obtenida con una sonda de fibra óptica. Obtención de la concentración de aire en diferentes puntos de los resaltos.
5. Correlación de la información obtenida en los objetivos 3 y 4. Descripción de los mecanismos que producen ingestión de aire en los resaltos hidráulicos.

1.2 Alcance del TFM

El alcance del presente trabajo fin de Máster se definió en la solicitud del mismo, depositada en la dirección de la Escuela Politécnica Superior de Jaén. En el TFM, se engloban los siguientes conceptos que el alumno desarrolla con la ayuda del tutor:

- Diseño y puesta a punto de la instalación experimental.

- Toma de imágenes con la cámara digital para estudiar el movimiento de la burbujas (y su vez el flujo de agua) en el interior del resalto hidráulico.
- Procesado de las imágenes adquiridas mediante códigos de velocimetría de partículas por tratamiento de imágenes (PIV) implementados en MATLAB®.
- Se llevan a cabo correlaciones de los datos obtenidos mediante el tratamiento de imágenes con las medidas de las sondas ópticas.
- Se obtiene la concentración de aire a diferentes puntos del resalto y se tratará de extraer los mecanismos de su ingestión en el mismo.

2 Técnicas experimentales

En esta sección se explica brevemente una introducción a la visualización de flujos y su avance hasta el momento. Seguidamente se detalla la técnica PIV y se realiza una pequeña demostración del uso de la herramienta PIVlab que se ha usado en este trabajo. Por último, se realiza un estado del arte de las sondas ópticas que son utilizadas para medición de concentración de gas en un fluido líquido.

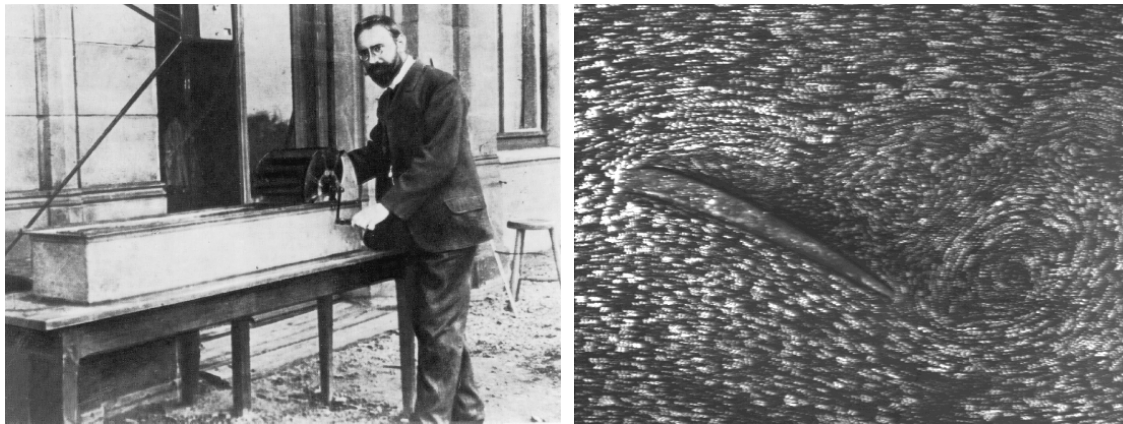
2.1 Historia de la visualización de flujos

El interés del ser humano en ver el comportamiento de la naturaleza siempre ha sido notable, lo cual hace que sea una de las razones para que nuestra supervivencia sea posible. Los sentidos del ser humano están bien adaptados para reconocer el movimiento de los objetos y en muchos casos nos otorgan la función de predicción de peligros.

Una persona es capaz de observar en un flujo de un río, por ejemplo, la formación de estelas de agua, remolinos producidos por obstáculos, brotes de agua, etc. No obstante, esta observación es cualitativa. Aquí merece especial mención el artista y gran observador de la naturaleza Leonardo Da Vinci que pudo realizar detallados bocetos de estructuras del flujo de agua mediante la mera observación [[Raffel et al., 2007](#)].

El gran paso en la investigación de flujos se dio cuando se pasó de la observación mediante los sentidos a la puesta en marcha de experimentos para obtener información del flujo mediante técnicas de visualización. El gran pionero de estas técnicas fue Ludwig Prandtl que las diseñó y las utilizó en 1904, figura 1, para estudiar los aspectos de los flujos no estacionarios con bifurcación detrás de perfiles de un ala y otros objetos en un túnel de agua.

La figura 1a muestra a Prandtl junto con su túnel. En la fotografía aparece girando manualmente un rodete para hacer fluir el agua [[Rotta, 1990](#)]. El túnel



(a) Ludwig Prandtl junto con su túnel de agua para la realización de la visualización del flujo en 1904. (b) Flujo con bifurcación en un ala visualizado con un equipo réplica del túnel de Prandtl.

Figura 1: Prandtl como pionero de las técnicas de visualización de flujos, imágenes extraídas de [Raffel et al., 2007].

disponía de dos secciones, una baja y otra alta, que estaban divididas por una pared horizontal. El flujo de agua iba de la parte alta (canal abierto donde se visualizaba el flujo) a la parte baja donde se encontraba una tubería cerrada.

Prandtl realizó experimentos de modelos de dos dimensiones como el estudio del flujo a través de cilindros, prismas y alas. Una réplica de sus experimentos en el túnel de agua se puede observar en la figura 1b. Para la obtención del flujo (agua con partículas de aluminio) se empleó una fuente de iluminación “flash” y una cámara de vídeo.

En sus experimentos, Ludwig Prandtl pudo ver la relación entre los parámetros del experimentos (tipo de objeto como obstáculo, ángulo de incidencia, flujo estacionario o no - estacionario) y adquirió conocimientos sobre fenómenos de los flujos no estacionario de manera cualitativa para entonces; no pudo realizar mediciones del campo de velocidades de forma cuantitativa. No obstante, con el avance en los últimos 30 años en los campos de la tecnología y ciencia como son la óptica, tecnología láser, electrónica, vídeo y la computación permite desarrollar técnicas de medición cuantitativa de estos flujos complejos [Raffel et al., 2007].

2.2 Velocimetría de partículas, PIV

La velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes – o en inglés *Particle Image Velocimetry* – como mencionamos en el apartado 1, es una técnica analítica no destructiva para el estudio de fluidos complejos que pueden ser estudiados tanto cuanti- como cualitativamente. El fluido es capturado gráficamente gracias al uso de las partículas trazadoras que tienen una densidad semejante a la del fluido y son capaces de reflejar la luz, éstas siguen el movimiento del fluido y son capturadas con la cámara digital. Normalmente, la fuente de luz usada en la velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes es una de tipo láser que deberá estar activa cuando el sensor óptico esté tomando datos. El sensor óptico o cámara toma dos imágenes (A y B) en un instante muy corto de tiempo, en t_0 y $t_0 + \Delta t$ respectivamente, las almacena en un mismo fichero con el propósito de hacer Δt corto. En el hipotético caso de que se almacenara cada imagen por separado el conjunto sensor óptico-sistema de adquisición tardaría un tiempo extra en almacenar la primera imagen y por tanto Δt aumentaría, y se perdería información del flujo. El principio fundamental de la velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes es la posibilidad de obtención de información del campo de desplazamiento de partículas, y por consiguiente del fluido, a partir de una evaluación de la correlación cruzada de las dos imágenes. Además con la variación temporal Δt se pueden obtener el campo de velocidades sabiendo el desplazamiento de las partículas de A a B. Para obtener el campo de desplazamiento en la velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes, se usan pequeñas áreas en las imágenes denominadas ventanas de computación o áreas de interrogación, en las cuales se evalúa, mediante procesamiento de imágenes, el desplazamiento más probable para un grupo de partículas pasando en línea recta de A a B [Thielicke, 2014].

2.2.1 Principio físico

Un experimento de velocimetría de partículas mediante tratamiento de imágenes consiste generalmente en varios subsistemas, tal como se puede observar en la figura 2. En la mayoría de los casos se añaden partículas trazadoras al flujo, aunque

también es posible usar burbujas de aire si el flujo a estudiar es una interacción agua-aire. Las partículas – o burbujas – deben estar iluminadas en el plano del flujo al menos dos veces en un periodo muy corto de tiempo. La fuente de luz láser queda dispersa por las partículas y se realizan capturas a lo largo del tiempo de la experimentación. El desplazamiento de las partículas capturadas en las imágenes se evalúa gracias al procesamiento de las mismas.

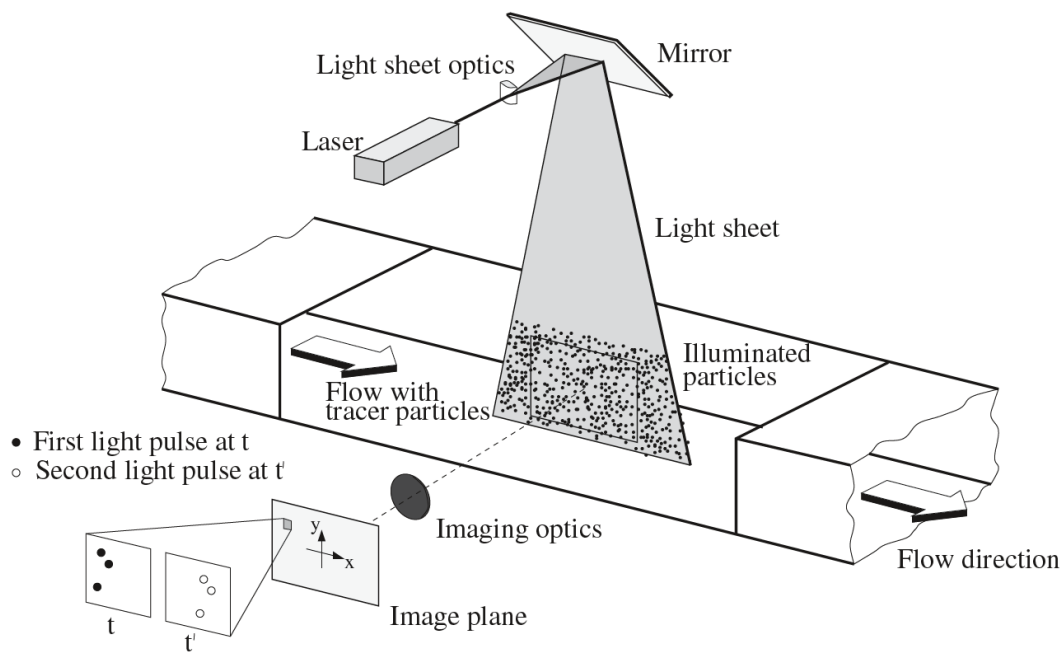


Figura 2: Equipamiento para la velocimetría de partículas en un túnel de viento. Extraída de la referencia [Raffel et al., 2007]

En la figura 2 se muestra un experimento típico de velocimetría de partículas en un túnel de viento. El flujo es iluminado en una delgada lámina de luz láser fluorescente. El paso de tiempo necesario, $\Delta t = t' - t$, entre captura y captura depende de la velocidad media del flujo y de la amplificación o zona de las capturas. Se asume que las partículas trazadoras se mueven con velocidad local del flujo a estudiar. Las imágenes tomadas en los diferentes instantes de tiempo (t y t') capturan las partículas que reflejan la luz láser mediante mecanismos de dispersión. La cámara recoge los datos de las imágenes y las almacena directamente en un ordenador.

La evaluación de las capturas se realiza posteriormente una vez acabado el experimento. Las imágenes se subdividen en pequeñas áreas, llamadas ventanas de interrogación, para realizar el cálculo del campo de desplazamientos locales mediante métodos estadísticos como la correlación cruzada. Se asume que en las ventanas de interrogación el flujo se mueve de manera homogénea entre dos capturas. El campo de velocidad se obtiene teniendo en cuenta el campo de desplazamientos y el paso de tiempo entre captura y captura, Δt .

2.2.2 Pre-procesado de las imágenes

Una vez disponibles las imágenes (A y B) para llevar a cabo su estudio es conveniente, en algunas ocasiones, realizarles un pre-procesado antes de ser evaluadas por la correlación cruzada. La necesidad de realizar el pre-procesado se justifica con la mejora de la calidad en la fase posterior de procesado o evaluación, [Raffel et al., 2007, Shavit et al., 2007]. En esta sección se mencionan las técnicas de pre-procesado o filtro que se pueden aplicar a las imágenes.

- **Compensación del histograma, CLAHE.** La ecualización o compensación del histograma adaptativa de contraste limitado (CLAHE, *Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization* en inglés) se desarrolló para aumentar la legibilidad de la imagen principalmente en aplicaciones médicas [Pizer et al., 1987]. Su lugar de actuación se encuentra en áreas pequeñas de la imagen; las intensidades de luz más frecuentes se expanden a todo el rango de datos de intensidad que puede tener una imagen. Por ejemplo, el rango de intensidades de una imagen monocromática de 8 bits será de 0 a 255. Las regiones tanto como con baja exposición o alta se optimizan de forma independiente. Shavit et al. [2007] aseguran con esta técnica un aumento de la probabilidad de detectar vectores válidos en un $4.7 \pm 3.2\%$.
- **Filtro de paso-alto de la intensidad luminosa.** La aplicación de un filtro de paso-alto en la intensidad luminosa de la imagen elimina valores bajos de intensidad que se consideran información de baja frecuencia de fondo. Esta información se genera a causa de una iluminación no homogénea en los experimentos, por lo que se considera un obstáculo para la evaluación

del PIV. De esta manera, se conserva la información de las partículas que tienen frecuencias (o valores de intensidad) altas [Gonzalez, 1987]. Por tanto, el filtro hace hincapié en los valores altos de intensidad que son los que caracterizan las partículas y elimina cualquier información de baja frecuencia en las imágenes, incluyendo toda la información de desplazamiento de baja frecuencia, [Thielicke, 2014].

- **Limitación de intensidad.** El filtro de la limitación intensidad es la aplicación de un límite alto en la misma en la escala de grises. Técnica totalmente opuesta al filtro paso-alto (2.2.2): los valores de intensidad que superan el límite se sustituyen por el mismo. Con este filtro se consigue evitar intensidades altas que contribuyen estadísticamente a evaluar una ventana de interrogación tenga un flujo homogéneo, lo cual no sucede en la realidad ya que se tiene un flujo no uniforme [Shavit et al., 2007]. A diferencia de CLAHE, con esta técnica sólo una pequeña parte del histograma es ajustado, lo que limita el potencial impacto negativo de las modificaciones en la imagen. Esta técnica mejora la probabilidad de detectar vectores válidos en un $5.2 \pm 2.5\%$ [Shavit et al., 2007].

2.2.3 Procesado de las imágenes

La parte más delicada de un análisis PIV es la correlación cruzada. Esta parte tiene gran impacto en la precisión del PIV. Se realiza una correlación de las ventanas de interrogación con un par de imágenes para obtener el desplazamiento de las partículas más probable dentro de cada ventana de interrogación. En esencia, la correlación cruzada es un patrón estadístico que busca identificar las partículas de una imagen en la otra. Esta técnica estadística se implementa con la función discreta de correlación cruzada, ecuación 2 de [Huang et al., 1997].

$$C(x, y) = \sum_i \sum_j I(i, j) \cdot I'(i + x, j + y) \quad (2)$$

Las variables I y I' representan los valores de intensidad de las ventanas de interrogación correspondiente a las imágenes A y B, respectivamente. Observar esquema en la figura 3.

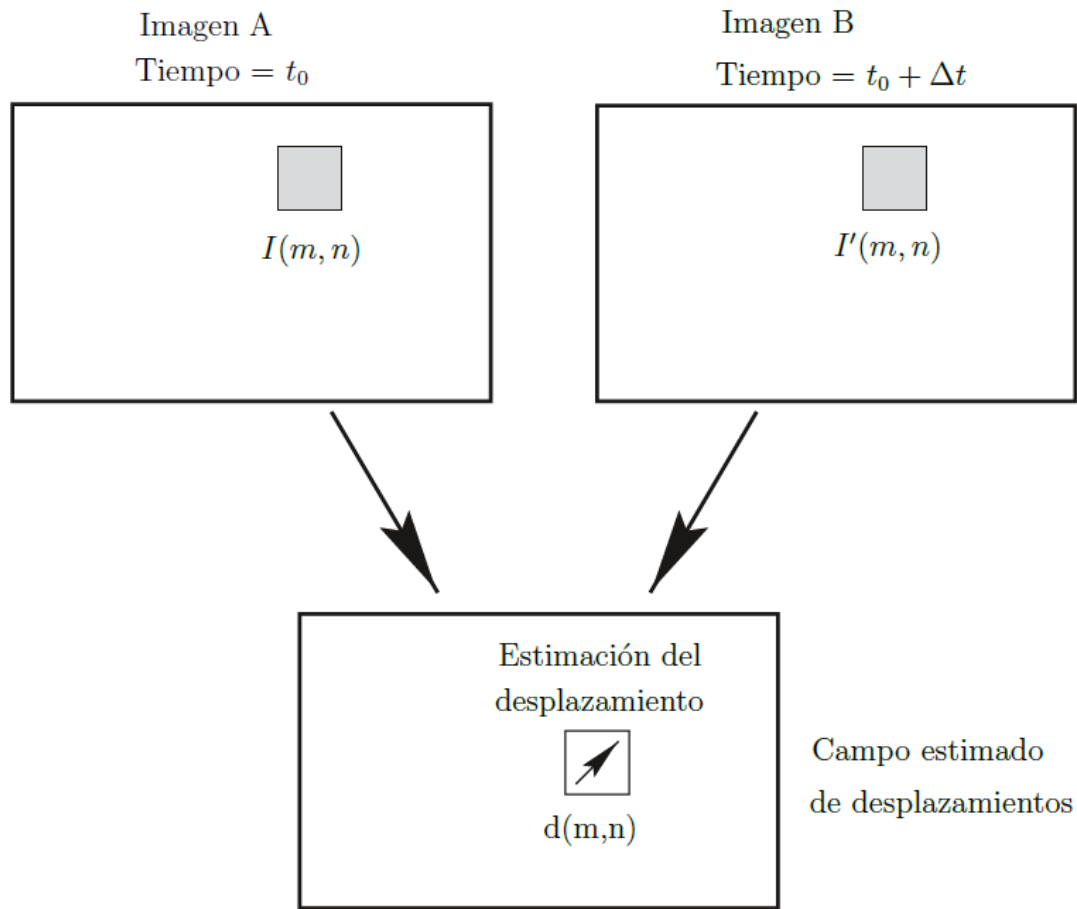


Figura 3: Concepto de ventanas de interrogación

Esta función (ec. 2) realiza una comparación para ver la concordancia entre las ventanas de interrogación I y I' para un desplazamiento dado. La localización del pico de intensidad resultante de la matriz de correlación C proporciona el desplazamiento más probable de I a I' [Huang et al., 1997].

Se disponen de dos aproximaciones para resolver la ec. 2. La aproximación más directa es mediante el cálculo de matriz de correlación, C , en el dominio del espacio (ver figura 4). Otra aproximación para el cálculo de C es en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier (DFT).

Mediante estos dos métodos se puede calcular el desplazamiento lineal que han sufrido las partículas y en consecuencia el flujo. Lo que no se podrá determinar es la curvatura que han sufrido las partículas ya que sólo disponemos de dos capturas

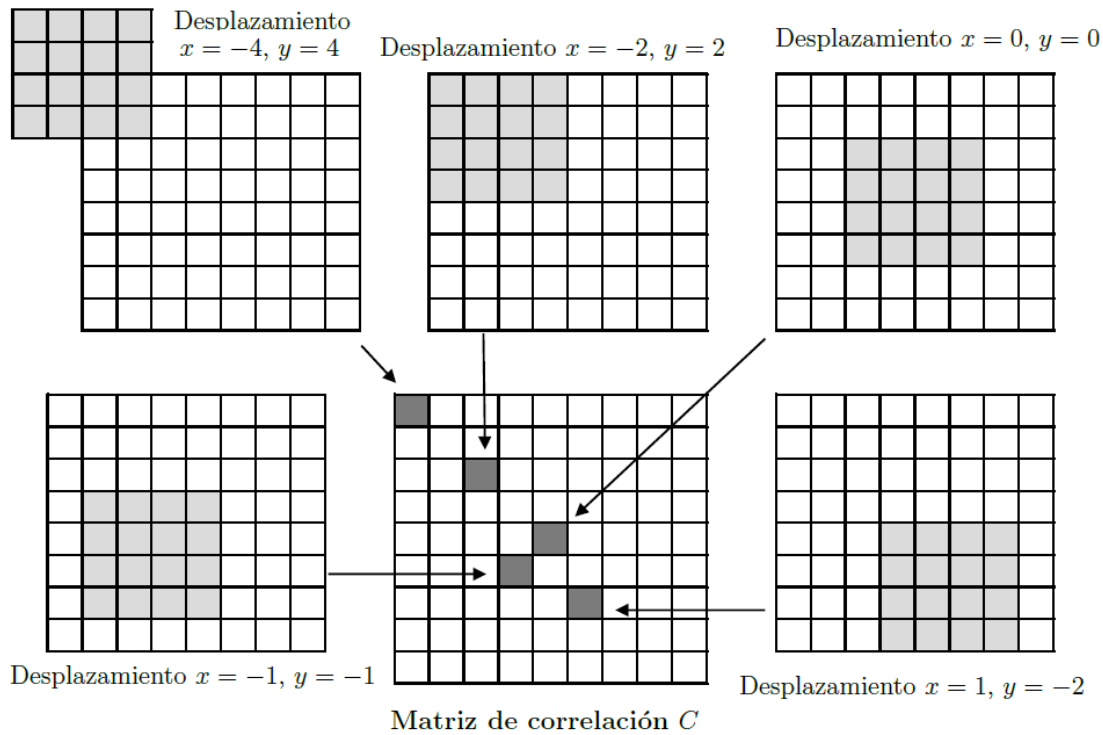


Figura 4: Cálculo de la matriz de correlación mediante el uso de DCC. El área de interrogación I (4×4 pixels) es correlacionado con el área de interrogación I' (8×8 pixels) y se obtiene la matriz de correlación (9×9 pixels). Figura adaptada de la referencia [Thielicke, 2014].

en el tiempo; otra limitación es no se puede obtener la aceleración. Por tanto, las dos imágenes, A y B, producen un campo de desplazamientos consistente en vectores lineales en los que cada vector es el resultado de analizar estadísticamente el movimiento de un grupo de partículas en una zona concreta [Raffel et al., 2007]. Para la realización de este análisis se hace uso de las ventanas de interrogación, ver figura 3.

2.2.4 Correlación cruzada directa, DCC

La correlación cruzada directa calcula la matriz de correlación C en el dominio del espacio. Esta técnica trabaja normalmente con ventanas de interrogación (I y I') de diferente tamaño [Stamhuis, 2006]. Las ventanas de interrogación tienen valores de intensidad de luz. La ventana de interrogación I se mueve linealmente a lo largo de I' (que debe tener un tamaño igual o mayor que I) para realizar el cálculo de la matriz de correlación C [Raffel et al., 2007]. Para cada juego de

recorridos de $I(x, y)$, la suma de los productos de todos los valores de intensidad en los píxeles superpuestos de I e I' producen un valor de correlación $C(x, y)$. Aplicando la operación a todos los rangos de los recorridos de I sobre I' ($-M \leq x \leq +M$, $-N \leq y \leq +N$), se obtiene una matriz de correlación de tamaño $(2M + 1) \times (2N + 1)$. Los valores máximos de la matriz de correlación se dan para valores de intensidad donde un grupo de partículas de la imagen A se repiten en la otra imagen B, ver figura 5.

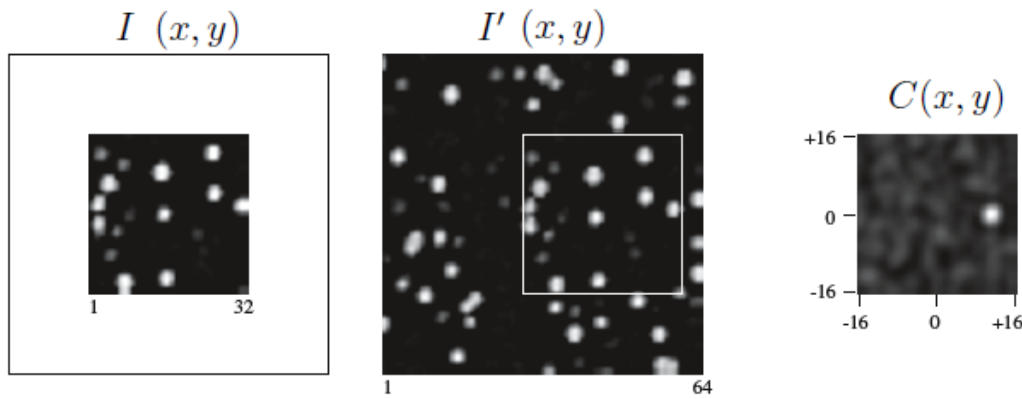


Figura 5: Obtención de la matriz de correlación $C(x, y)$ a partir de las ventanas de interrogación I de tamaño 32×32 píxeles e I' con 64×64 píxeles. Figura adaptada de la referencia [Raffel et al., 2007].

2.2.5 Correlación basada en la transformada de Fourier, DFT

Una alternativa para calcular la matriz de correlación es resolverla en el dominio de la frecuencia utilizando utilizando menos coste computacional que la técnica anterior (ver figura 6). En DFT, se aprovecha el teorema de la correlación que sostiene que la correlación cruzada de dos funciones es equivalente a una multiplicación de complejos conjugados por sus transformadas de Fourier (ecuación 3).

$$C \Longleftrightarrow \hat{I} \cdot \hat{I}'^* \quad (3)$$

donde $\hat{I}$ e $\hat{I}'$ son las transformadas de Fourier de las funciones I e I' , respectivamente.

Este método utiliza áreas de interrogación con el mismo tamaño, lo que implica

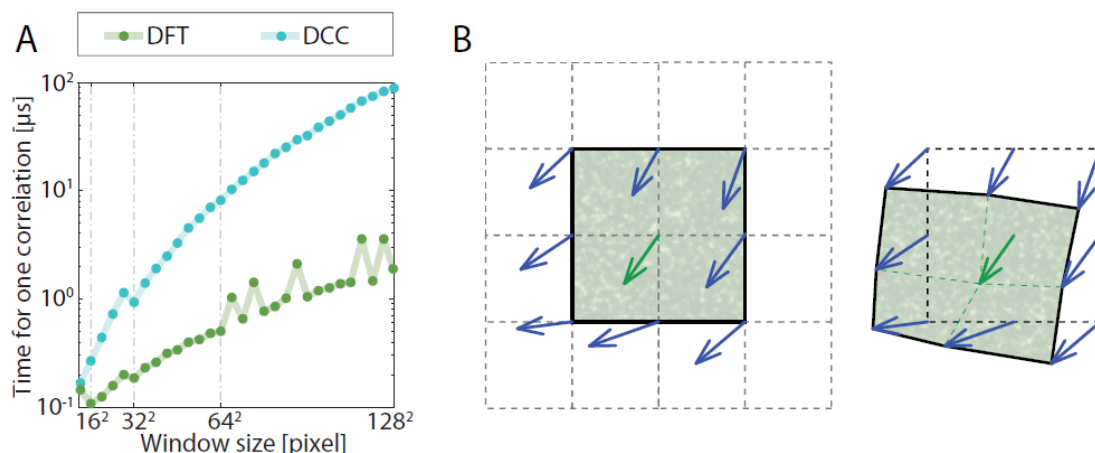


Figura 6: **A:** Coste computacional de los métodos DFT y DCC. **B:** Principio de la técnica de la ventana de deformación. Extraída de la referencia [Thielicke, 2014].

que se pierda cierta información y se traduce en ruido de fondo en la matriz de correlación. Este ruido dificulta la detección del pico de intensidad y disminuye la precisión. Es necesario, por tanto, reducir el tamaño del recorrido de las ventanas de interrogación en comparación con el DCC.

Hasta el momento se ha asumido que las partículas tienen el mismo movimiento dentro de una ventana de interrogación, lo cual no es el caso de los flujos reales. Para atenuar esto, se proponen diferentes métodos que representan la transformación de las áreas de interrogación: métodos denominados “paso múltiple, refinamiento de la cuadrícula o técnica de deformación de la ventana”. En PIVlab se implementa el siguiente procedimiento. Se realiza primeramente el DFT común; la primera pasada del método da lugar a un desplazamiento en el centro de cada ventana de interrogación. Cuando hay superposición entre las ventanas (por ejemplo un 50%), obtenemos información de desplazamiento adicional en los bordes y esquinas de cada ventana (nueve posiciones en total, ver gráfico B de la figura 6, izquierda). Con estos desplazamientos se puede calcular los desplazamientos en cada pixel mediante la interpolación bilineal o con spline. Posteriormente, el área de interrogación I' se deforma de acuerdo con esta información de desplazamiento (ver ver gráfico B de la figura 6, derecha). La siguiente pasada de las ventanas de interrogación correlaciona el área I de interrogación original con el área deformada I' . Se acumula la información de desplazamiento restante de cada

pasada. Después de varias pasadas, los áreas de interrogación (deformada de I' e I) serán casi idénticos, y por tanto el desplazamiento determinado se obtiene con gran precisión.

2.2.6 Localización del pico

El desplazamiento de dos pares de áreas de interrogación (I e I') se puede determinar directamente donde la ubicación del valor de la intensidad de la matriz de correlación es máxima. La ubicación se puede refinar con precisión subpíxel utilizando una variedad de métodos. Estas técnicas de estimación de subpíxeles existentes se probaron en PIVlab y se implementaron en el mismo los dos métodos más prometedores en términos de precisión, velocidad y universalidad [Thielicke, 2014]. Estos métodos son: la función gaussiana con 2×3 puntos de ajuste; y la función gaussiana bidimensional con 9 puntos de ajuste en total. Para el primer caso, se realiza uso únicamente de los píxeles verticales y horizontales adyacentes (dos veces un ajuste de 3 puntos) y se evalúa los ejes x e y por separado, ver figura 7. En el segundo caso, la interpolación se realiza teniendo en cuenta la influencia de ambos ejes, no se evalúan por separado.

2.2.7 PIVlab

En este TFM, para el procesado de imágenes se ha usado la herramienta PIVlab desarrollada en MATLAB® por William Thielicke durante su tesis doctoral con el profesor Dr. Eize J. Stamhuis. Se trata de una herramienta de distribución libre en la cual se presenta los algoritmos hasta el momento utilizados en la técnica PIV.

Para su correcto funcionamiento la herramienta necesita, aparte de MATLAB® obviamente, la *toolbox* de procesamiento de imágenes “image processing”. El usuario puede tanto interactuar con la herramienta a través de la interfaz gráfica (ver figura 8) como directamente por la línea de comandos de MATLAB®.

El corazón de la herramienta es la correlación de la técnica PIV, la cual ofrece al usuario dos técnicas; la correlación cruzada directa (en dominio espacial) y la

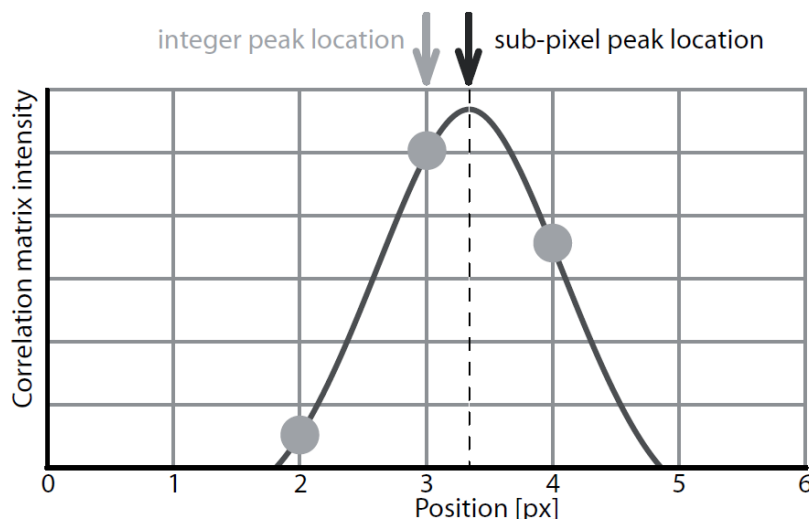


Figura 7: Principio de la función gaussiana 2×3 puntos de ajuste de subpíxeles de precisión se consigue mediante el ajuste de una función gaussiana unidimensional (línea continua) para la distribución de intensidad entero de la matriz de correlación (puntos) para ambos ejes de forma independiente. Aquí sólo se muestra el ajuste para un eje. Figura extraída de [Thiellie, 2014]

correlación basada en la transformada de Fourier (en dominio de frecuencias). Éstas fueron mencionadas respectivamente en las secciones 2.2.4 y 2.2.5. Los datos procesados con cualquiera de las técnicas pueden ser validados, interpolados y suavizados dentro de la interfaz gráfica de la herramienta. PIVlab dispone también de multitud de formatos para exportar los datos ofreciendo al usuario poder manipular éstos fuera de su entorno. El procedimiento a seguir se establece en los siguientes puntos:

Primeramente, deberemos seleccionar los pares de imágenes que queremos analizar. Haciendo click en “Load images” en la ventana de la herramienta que se obtiene al entrar en la herramienta o al crear una nueva sesión, podemos seleccionar las imágenes que queremos analizar. Es importante seleccionar la secuencia de las mismas. Así, por ejemplo, si seleccionamos la secuencia “1-2, 2-3, 3-4, ...” quiere decir que hay una imagen que se comparte en cada par de ellas, mientras que si elegimos la secuencia “1-2, 3-4, 5-6, ...” tenemos que no se comparte, todas son distintas. En nuestro caso, tenemos la segunda secuencia.

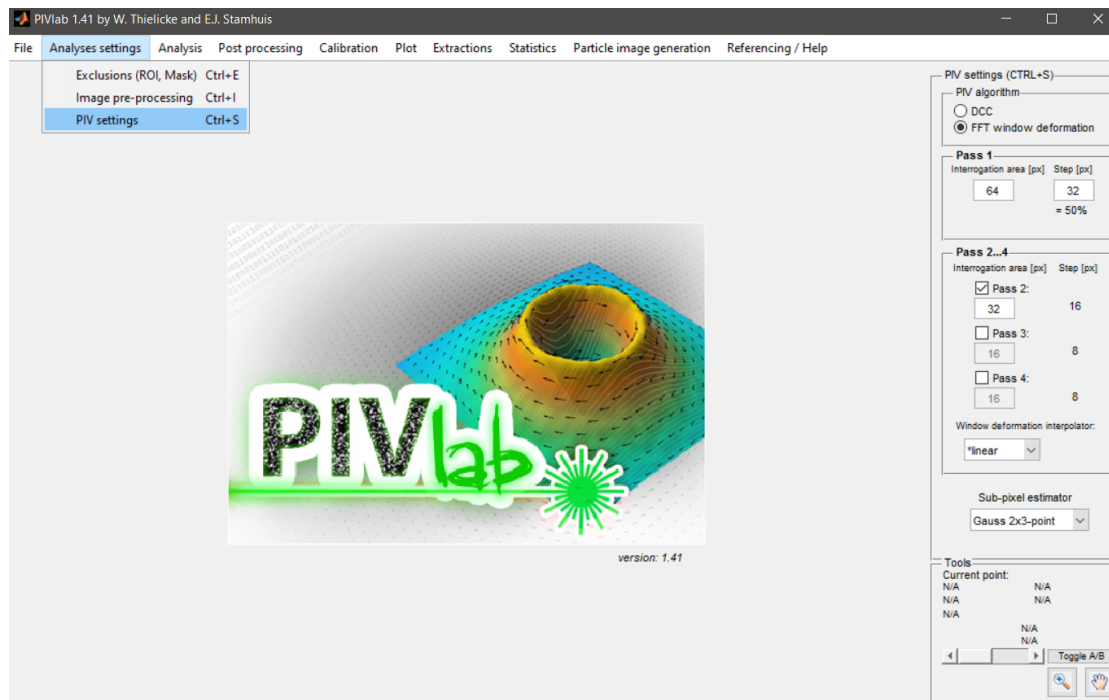


Figura 8: Interfaz gráfica de PIVlab [Thielicke and Stamhuis, 2015]

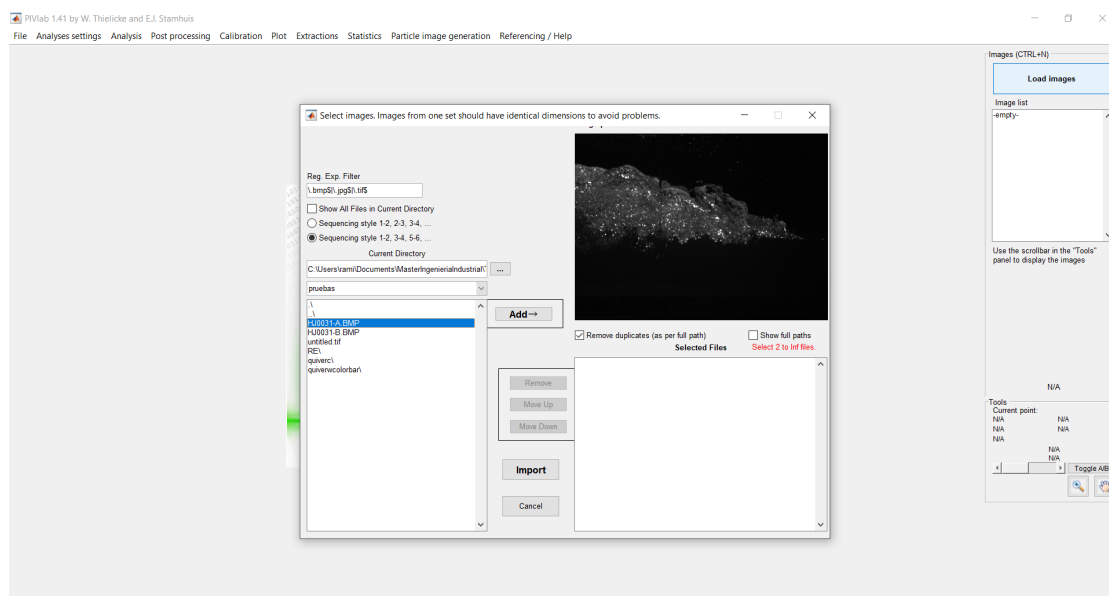


Figura 9: Carga de imágenes para análisis

Una vez seleccionadas las imágenes, hacemos click en “Add” y las añadimos al lugar un área de trabajo de la herramienta para validar que las imágenes seleccionadas son las correctas. En el área de trabajo “Selected Files” se puede ordenar las imágenes seleccionadas en caso de no tener un orden alfanumérico previo, lo cual es totalmente recomendable para análisis con grandes cantidades de archivos de imágenes a analizar como en nuestro caso. Ya ordenadas y seleccionadas con

la secuencia correspondiente, importamos los archivos seleccionados haciendo click en “Import”.

Previamente a la correlación, se deberán definir los parámetros de la misma, ver figura 10. Por otro lado, PIVlab nos da la opción de tratar las imágenes con los métodos mencionados previamente, ver apartado 2.2.2. No obstante, no es necesario el tratamiento si las originales ofrecen buenos resultados en la correlación. Otra característica de la herramienta es la de poder analizar una única zona de las imágenes si hacemos click en “Exclusions (ROI, Mask)”.

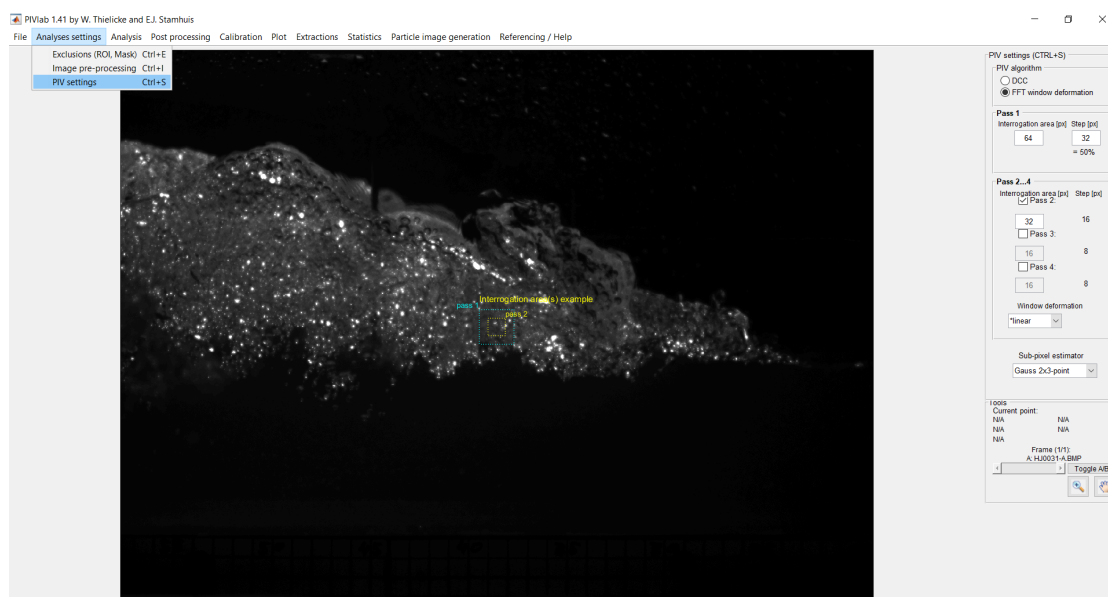


Figura 10: Configuración de la correlación PIV

Al configurar el análisis, la herramienta representa en las imágenes las ventanas de interrogación que se han seleccionado para realizar la correlación. Esto nos sirve para comparar el tamaño de las ventanas con el de las imágenes, así podemos predecir que la correlación va a ser adecuada aproximadamente.

En nuestro caso, hemos seleccionado la correlación basada en la transformada de Fourier empleando dos ventanas de interrogación para el análisis de todas las imágenes. El primer paso se realiza cada 32 píxeles con una ventana 64 x 64 y el segundo cada 16 píxeles con una de 32 x 32, ver figura 10. Por tanto, el solapamiento entre ventana y ventana para ambos pasos es el 50%. La deformación de la

ventana se ha establecido de manera lineal y el método estimador de sub-píxeles se realizado mediante la función gaussiana con 2×3 puntos de ajuste.

Para realizar la correlación en sí, debemos ir a “Analysis”. En dicha ventana (figura 11) nos encontramos dos opciones para analizar las imágenes; “Analyze current frame” se analiza el par de imágenes que se está visualizando o “Analyze all frames” se analiza toda la secuencia seleccionada. Haciendo click en cualquiera de las opciones según corresponda, podemos ver los resultados que nos ofrece la correlación seleccionada. En el caso de obtener resultados no refinados y/o no deseados (vectores en rojo), podemos borrar los datos en “Clear all results” y volver a configurar los parámetros de correlación (figura 10).

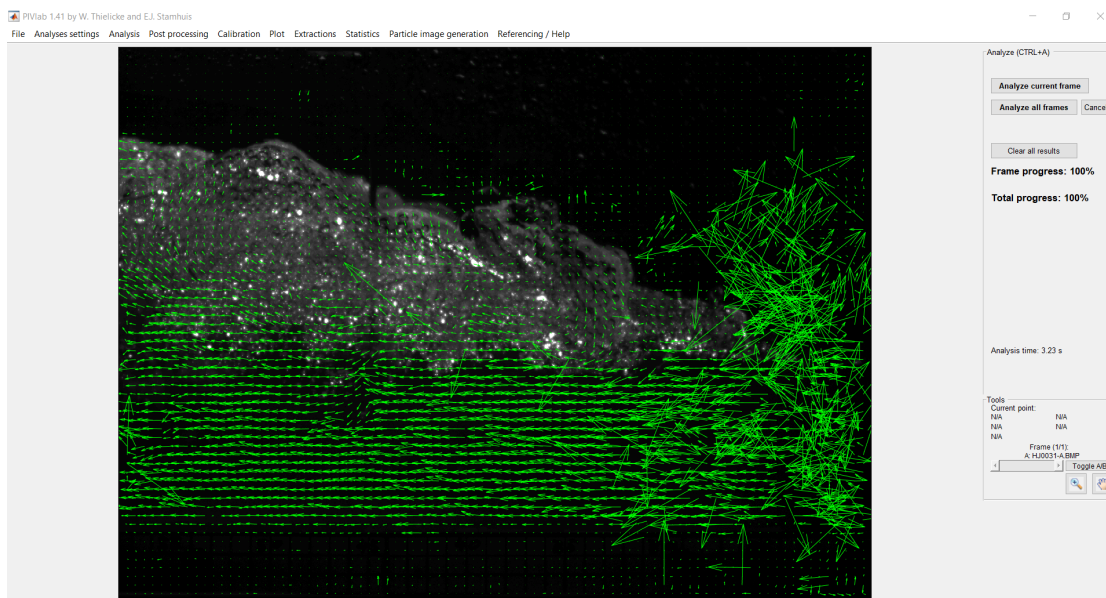


Figura 11: Correlación del par de imágenes

Puede ocurrir que en general la correlación sea buena, sin embargo alguna zona de las imágenes ofrece una deficiente correlación por no disponer de partículas trazadoras o en nuestro caso de no disponer de burbujas que tienen la misma función que las partículas. Si observamos la figura 11, podemos apreciar mucho ruido en los vectores de velocidad en la zona de la punta del resalto, donde no se han formado las burbujas aún. Esto se puede solucionar realizando filtros que detallamos a continuación.

A priori, PIVlab desconoce lógicamente la correspondencia de las unidades con las imágenes y el paso temporal entre captura y captura. Por ello, se habilita una ventana (“Calibration”) para calibrar la distancia y el tiempo usado en la correlación. Primeramente, seleccionamos una distancia de referencia en la imagen haciendo click en “Select reference distance” y posteriormente indicamos la distancia real en *mm* correspondiente. A continuación indicamos el intervalo de tiempo entre captura y captura en *ms*. Finalmente se aplica la calibración y a partir de entonces se tienen en cuenta los valores en unidades del SI en la memoria de la aplicación.

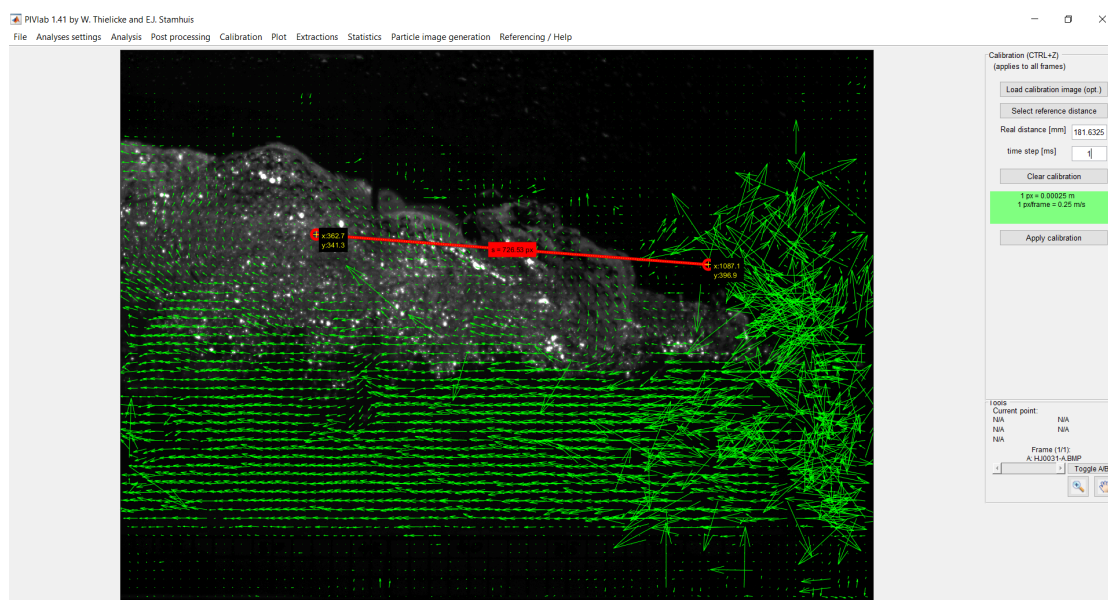


Figura 12: Calibración espacial ($4px = 1mm$) y temporal (tiempo entre captura y captura = $1ms$)

En las imágenes analizadas, el tiempo para un par de imágenes se tiene en cuenta el paso temporal entre una captura y otra, el cual es $1ms$ ya que la cámara se configuró para hacer capturas a $1kHz$. Es importante mencionar que la cámara no almacenaba una captura y otra por separado ya que no se conseguiría capturas a dicha frecuencia. Por lo tanto se han almacenado los pares de capturas en un único archivo que posteriormente se ha elaborado una rutina en MATLAB® para obtener las dos capturas por separado. En cuanto a la calibración espacial, se ha hecho uso de la cinta métrica que se dispone en las imágenes y se ha calculado la correspondencia entre píxeles y mm ($1mm = 4px$).

Se recomienda realizar la validación una vez se haya hecho la calibración ya que se trabaja con unidades más comprensibles. Así pues, haciendo click en “Post processing” y seguidamente en “Vector validation” accedemos a la ventana donde se realiza la validación, figura 13.

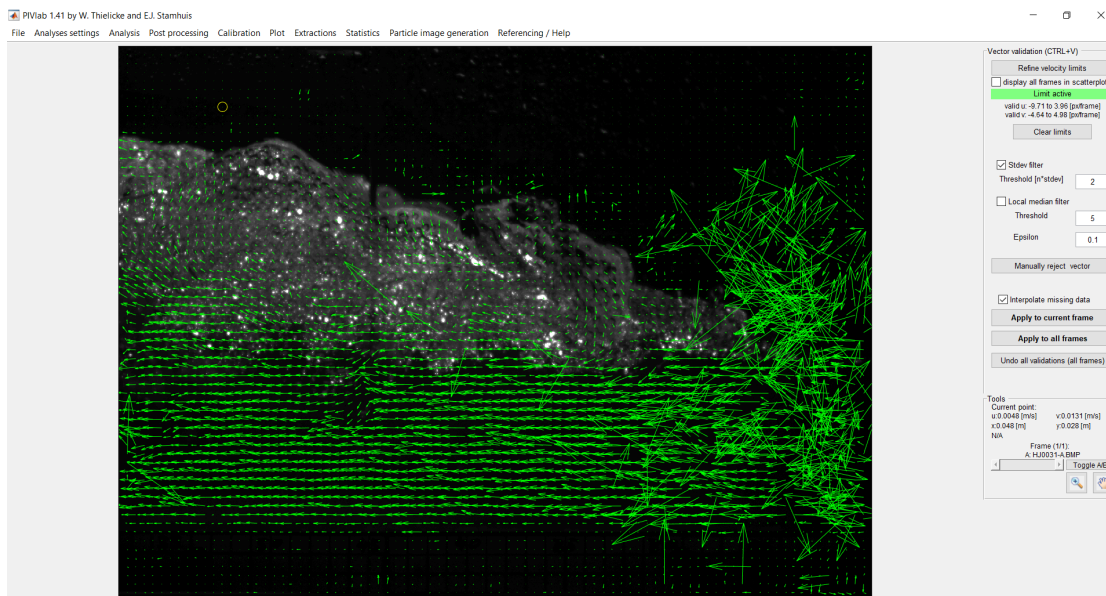


Figura 13: Ventana de validación, sin aplicación de filtros

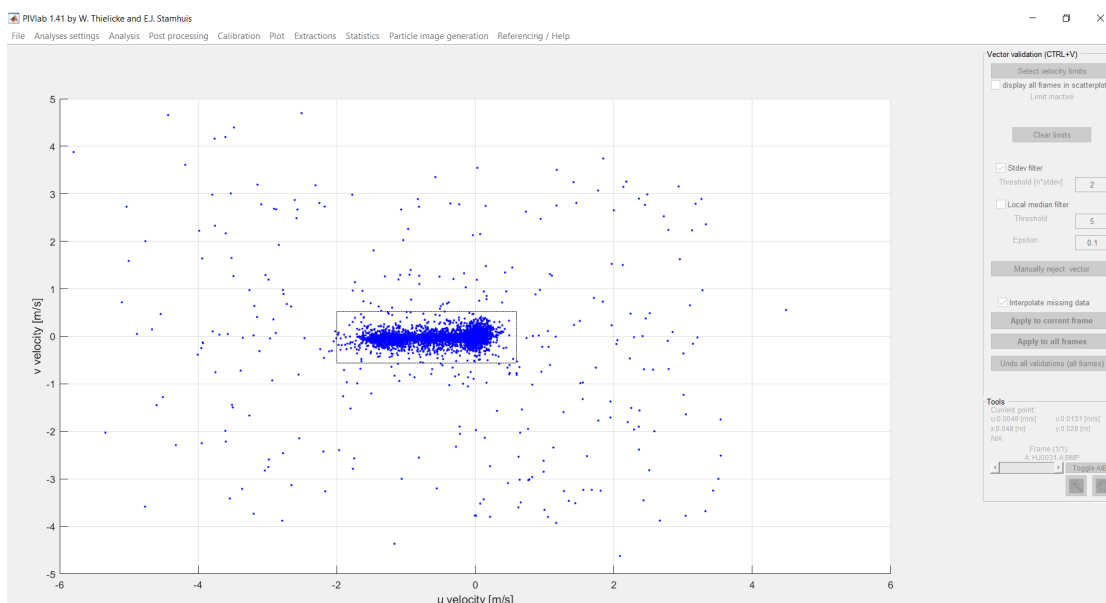


Figura 14: Selección de recuadro de límites de velocidades horizontales y verticales

En dicha ventana, tenemos tres opciones para ejecutar la validación. Primera-

mente, disponemos de selección de la posibilidad de limitar las velocidades horizontales y verticales mediante un recuadro en un gráfico u vs. v , figura 14. Seguidamente, se ofrece la posibilidad de seleccionar un umbral en términos de veces la desviación típica para filtrar las velocidades, este método aplica el mismo umbral tanto en velocidades verticales como horizontales, sin embargo la desviación típica de ambas no tiene porqué ser igual. Finalmente es posible realizar un filtro con la mediana local de los vectores, un método más sofisticado que se expone en bibliografía [Westerweel and Scarano, 2005].

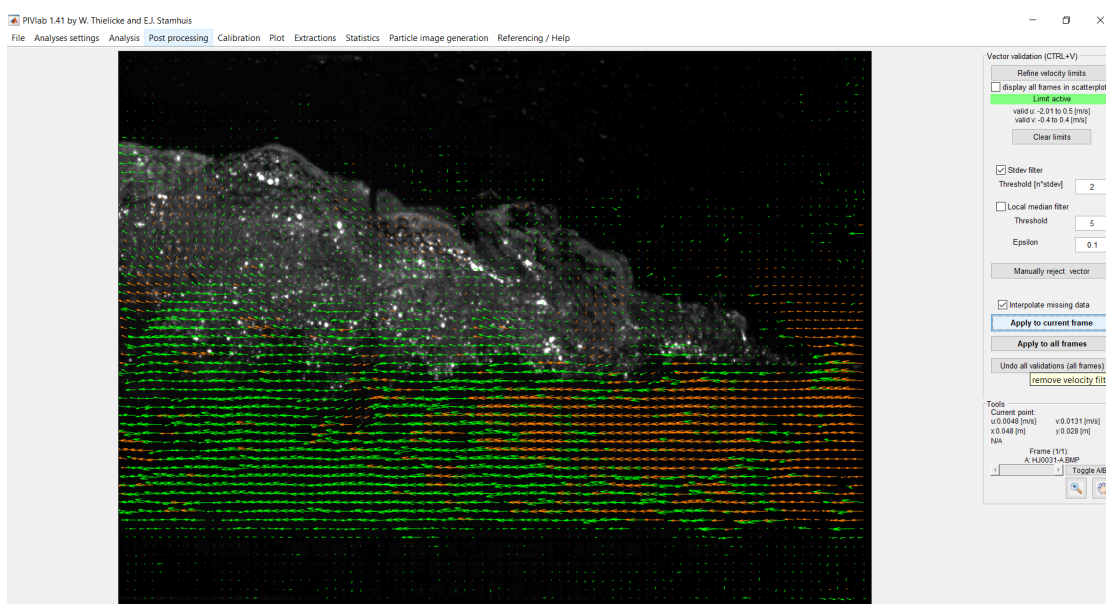


Figura 15: Aplicación de límites por límites en velocidades horizontales y verticales. Interpolación de vectores fuera de rango

En nuestros análisis, hemos seleccionado el primer método, figura 14, ya que la correlación entre capturas es buena a excepción de la zona de la punta que aparecen vectores demasiado elevados que necesitan ser corregidos. Así los valores fuera del intervalo $-2m/s < u < 0.5m/s$, $-0.4m/s < v < 0.4m/s$ se han interpolado por valores de alrededor. Aplicando lo mencionado se obtiene un nuevo campo de velocidades más realista como se observa en la figura 15. Aparece en vectores en color naranja como indicación de que se han sido interpolados. Es importante definir si los vectores a validar se deben interpolar (figura 15) o eliminar (figura 16), pues ya que disponemos de ambas opciones; si queremos interpolar los datos que están fuera del intervalo debemos marcar con un tick la casilla de “Interpolate

missing data“, si por el contrario queremos eliminarlos la dejamos en blanco.

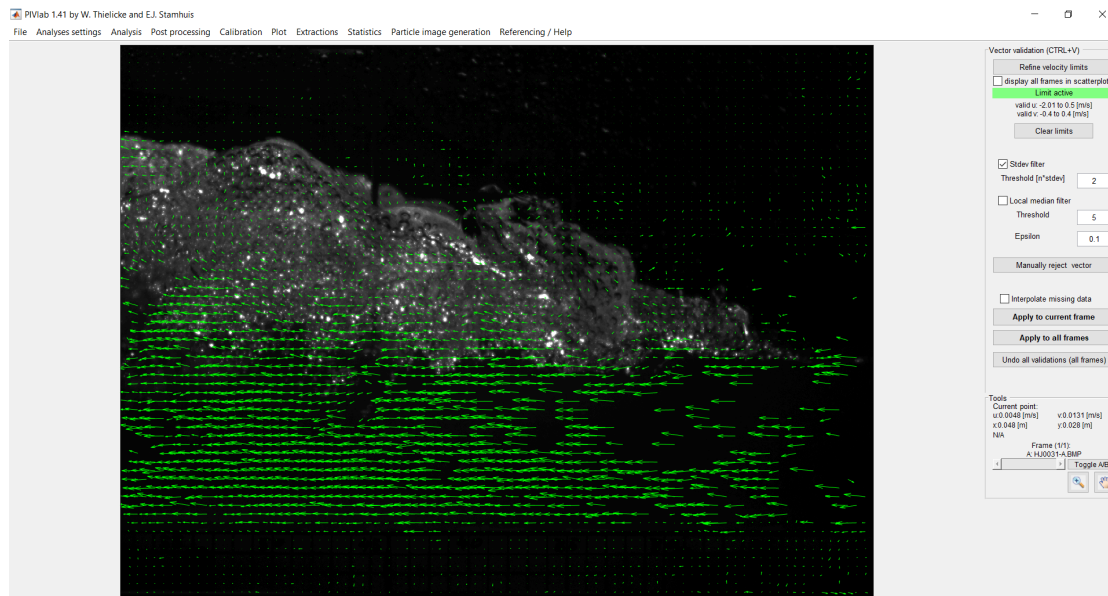


Figura 16: Aplicación de límites por límites en velocidades horizontales y verticales. Eliminación de vectores fuera de rango

En el caso de obtener un campo de velocidades no deseado o no coherente con lo esperado, es posible deshacer la aplicación del filtro presionando en “Undo all validations (all frames)”. Así pues, se puede ir probando cada uno de los filtros que ofrece la herramienta y ver cuál es el que satisface mejor el problema que estamos analizando, siempre y cuando se justifique el filtrado que se aplica.

2.3 Sondas ópticas

Existe una instrumentación variada para medir la concentración de aire en el agua. Diferentes autores han usado técnicas como la anemometría o velocimetría de láser Doppler (LDV son siglas en inglés), la velocimetría acústica Doppler (ADV), la anemometría de fase Doppler (PDA) y las sondas de fibra óptica. Se han realizado mediciones de la concentración de aire resaltos hidráulicos mediante estas técnicas (anemometría de fase Doppler en [Waniewski et al., 2001], la velocimetría acústica Doppler en Liu et al. [2002], entre otros).

En la **anemometría o velocimetría de láser Doppler**, un haz de luz monocromática se divide en dos haces de igual intensidad que se enfocan en un punto común en el medio fluido transparente (o semitransparente). En dicho punto se establece una zona de medición local de paso de partículas (o de burbujas). Las partículas que se mueven en el fluido perturban los haces dispersando la luz haciendo cambiar su intensidad, esta intensidad es captada con un fotodetector. El cambio en la frecuencia de la intensidad reflejada es debida al efecto Doppler. Esta frecuencia (pulsos) está directamente relacionada con la velocidad de las partículas en el punto de estudio.

Los instrumentos que utilizan la **velocimetría Doppler acústica** (ADV) registran componentes de velocidad instantánea en un punto único con una frecuencia relativamente alta. Las mediciones se realizan midiendo la velocidad de las partículas en un volumen de muestreo remoto basado en el efecto de desplazamiento Doppler [[Voulgaris and Trowbridge, 1998](#), [McLelland and Nicholas, 2000](#)]. Esta técnica no mide el movimiento del fluido, sino de las partículas (o burbujas) contenidas en su interior y se usa cuando éstas son acústicamente detectables. Su principio de funcionamiento es similar a la velocimetría de láser Doppler, con la diferencia que se usa ondas de sonido de las partículas en lugar de intensidad de luz reflejadas por las mismas.

La **anemometría de fase Doppler** (PDA) es una técnica óptica de luz láser que realiza mediciones simultáneas de velocidad y tamaño de partículas esféricas que adicionalmente se puede usar para medir la concentración y la masa de flujo. Su principio de funcionamiento es igual al de la velocimetría de láser Doppler. La velocidad se determina analizando el cambio de frecuencia de la luz que es dispersada por partículas que contiene el medio fluido en movimiento. Al igual que en la técnica LDV, se requiere al menos de dos haces de luz para evaluar el cambio de frecuencia en el volumen local de interferencia. Para la medición del tamaño de partículas esta técnica realiza uso del hecho de que la luz dispersada por las partículas se recibe en dos direcciones diferentes de observación, lo cual refleja un cambio de fase en el medio que es proporcional al tamaño de la partícula. [Ofner](#)

[2001] detalla en profundidad la técnica.

Las **sondas de doble punta** (electrodos) registran la presencia de aire o agua en dos puntos próximos y con los resultados se puede deducir la componente de la velocidad de las burbujas detectadas. También se puede extraer el tamaño de las burbujas. Los electrodos, hechos de acero inoxidable, fueron usados en [Chanson and Qiao, 1994] y en [Chanson and Brattberg, 1997]. Otros autores como Murzyn et al. [2005] realizan también uso de estas sondas ópticas. En el presente TFM, las mediciones de concentración de aire se realizaron mediante esta técnica de medición. Una imagen de este instrumento puede observarse en la figura 17.

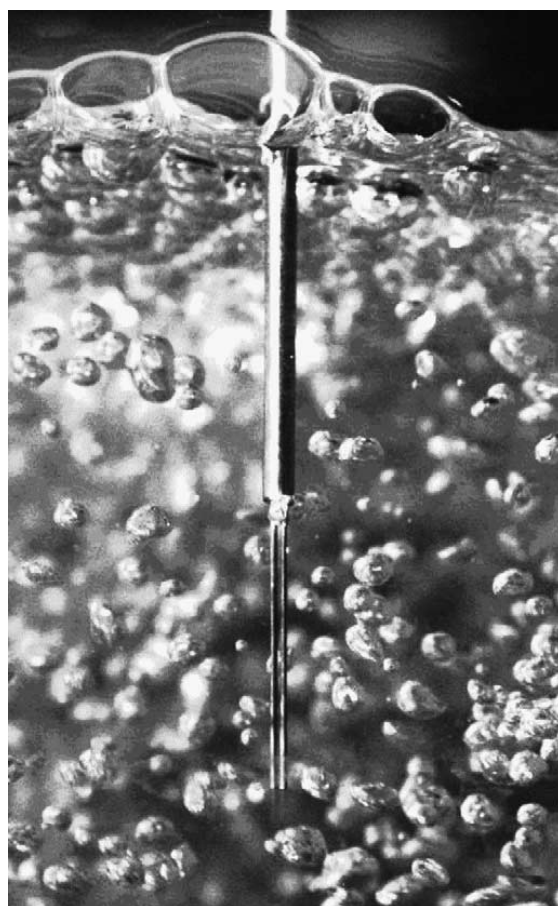


Figura 17: Sonda de fibra óptica de doble punta para la detección de fases. La longitud de los soportes paralelos es de $25mm$, la longitud de la fibra de $5mm$ y su diámetro es de $0.8mm$. Extraída de la referencia [Murzyn et al., 2005]

Su principio de funcionamiento se basa en la medición del índice de la reflec-

tividad del aire y el agua que son diferentes. Los cambios de la intensidad de luz reflejadas en la punta de la sonda son registrados gracias a un amplificador óptico, según el valor registrado se puede considerar que bajo la punta se encuentra aire o agua. En literatura, [Cartellier and Achard \[1991\]](#), [Cartellier and Barrau \[1998\]](#) y [Boyer et al. \[2002\]](#) se discute más en profundidad su principio de funcionamiento.

3 El problema del resalto hidráulico

3.1 El problema general

En la mecánica de fluidos, el problema del resalto hidráulico se engloba dentro del estudio del flujo permanente en canales abiertos. Un canal abierto se caracteriza por tener una superficie de interfaz entre el agua y el aire, esta interfaz denominada superficie libre está sometida a la presión atmosférica. Por lo tanto, el problema se simplifica si se compara con el flujo en conductos; concretamente el movimiento del fluido se asocia a los gradientes de presión producidos por las fuerzas másicas como es la aceleración de la gravedad.

3.2 Procedimiento experimental

El resalto hidráulico se formó a través de una compuerta aguas arriba desde el resalto para generar un flujo supercrítico. El nivel de agua aguas arriba desde la compuerta es y_0 y su nivel aguas abajo desde la compuerta es y_1 . La apertura de la compuerta la denotamos como y_g . Después del resalto se obtiene un nuevo nivel de agua cuya profundidad es y_2 , ver figura 18. La compuerta es controlable verticalmente de manera que se podía modificar el valor de y_g con el fin de controlar el coeficiente de descarga y consecuentemente el número de Froude en el resalto definido como $Fr_1 = u_1/\sqrt{gy_1}$ aguas arriba del mismo, donde u_1 es la velocidad en ese punto (corriente supercrítica) y $Fr_2 = u_2/\sqrt{gy_2}$ aguas abajo, donde u_2 es la velocidad en la corriente subcrítica o aguas abajo. En un resalto hidráulico con esta configuración se tiene que $Fr_1 > 1$ y $Fr_2 < 1$.

3.2.1 Flujo a través de la compuerta

La profundidad en la zona de descarga disminuye hasta finalmente la contracción del flujo finaliza y su profundidad se hace constante a una distancia determinada, L , de la compuerta; este punto lo denotamos con subíndice “1”. La profundidad en dicho punto se relaciona con la apertura de la compuerta en términos de un coeficiente de contracción, C_c , como $y_1 = C_c y_g$. Para una compuerta plana se ha observado que $L = y_g/C_c = y_g^2/y_2$. Asumiendo un flujo estacionario,

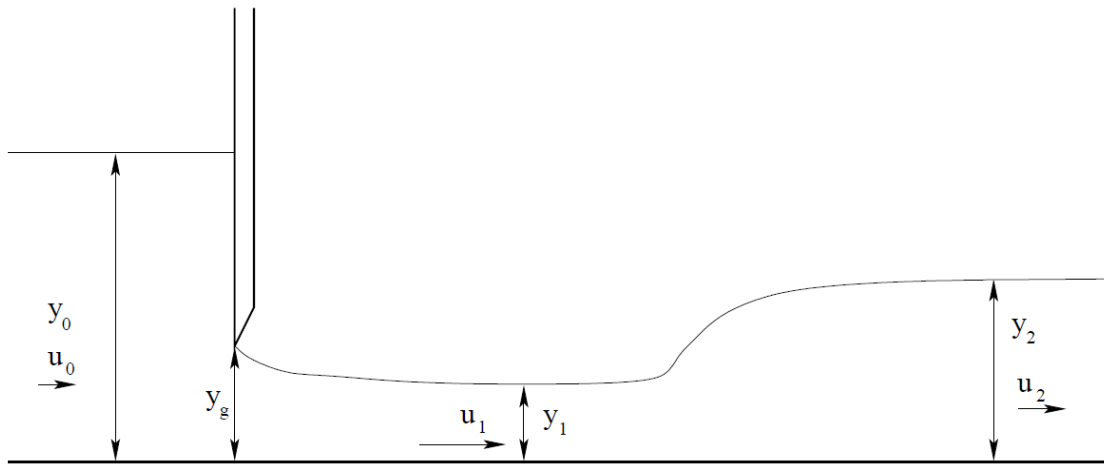


Figura 18: Esquema del flujo

incompresible y uniforme, aplicamos la ecuación de Bernoulli aguas arriba y aguas abajo de la compuerta y tenemos (expresión 4):

$$p_{atm} + pgy_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2 = p_{atm} + pgy_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \quad \rightarrow \quad y_0 + \frac{1}{2g}u_0^2 = y_1 + \frac{1}{2g}u_1^2 \quad (4)$$

donde p_{atm} es la presión atmosférica que vemos que no afecta finalmente a la ecuación y las velocidades u_0 y u_1 se pueden aproximar a sus valores medios respectivos. Además, la conservación de flujo viene dada por la expresión 5:

$$q = u_0 y_0 = u_1 y_1 \quad (5)$$

dando lugar a $u_0 = u_1 y_1 / y_0$ que sustituyendo en la ecuación 4 tenemos,

$$y_0 - y_1 = \frac{u_1^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Esta ecuación, 6, se puede expresar como,

$$u_1^2 = \frac{2gy_0^2}{y_0 + y_1} = \frac{y_0}{y_0 + y_1} 2gy_0 \quad \rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y_1}{y_0}}} \sqrt{2gy_0} \quad (7)$$

Si sustituimos $y_1 = C_c y_g$ tenemos,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_c y_g}{y_0}}} \sqrt{2gy_0} \quad (8)$$

De este modo, podemos obtener el caudal como,

$$q = \frac{C_v y_1}{\sqrt{1 + \frac{C_c y_g}{y_0}}} \sqrt{2gy_0} = \frac{C_v C_c}{\sqrt{1 + \frac{C_c y_g}{y_0}}} y_g \sqrt{2gy_0} \quad (9)$$

donde C_v es comúnmente conocido como coeficiente de velocidad. La primera fracción del segundo miembro lo denominamos coeficiente de descarga,

$$C_d = \frac{C_v C_c}{\sqrt{1 + \frac{C_c y_g}{y_0}}} \quad (10)$$

permitiéndonos reescribir la expresión 9 como

$$q = C_d y_g \sqrt{2gy_0} \quad (11)$$

El coeficiente de contracción C_c depende del número de Reynolds y de la relación y_0/y_g . En la figura 19 se muestra la evolución de C_c con y_0/y_g para números de Reynolds suficientemente altos. Por otro lado, el coeficiente de velocidad se puede aproximar por la expresión.

$$C_v = 0.960 + 0.0979 \frac{y_g}{y_0} \quad (12)$$

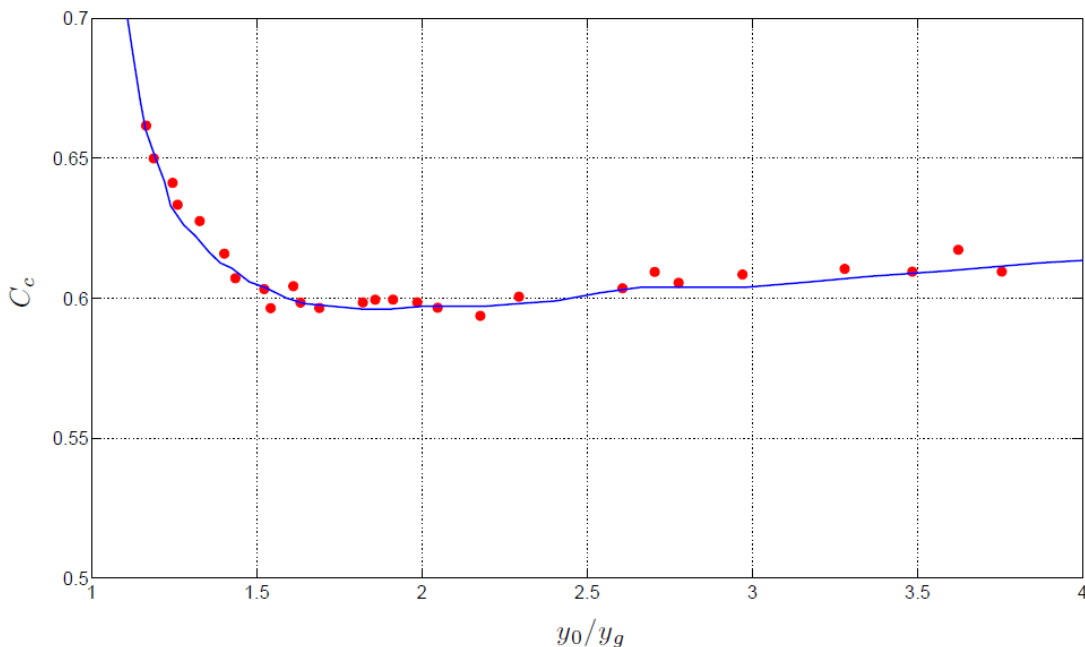


Figura 19: Relación del coeficiente de contracción C_c con y_0/y_g

3.2.2 Resalto hidráulico

En canales abierto, se considera un resalto hidráulico un salto brusco de profundidad y velocidad del flujo, esto se produce debido a los esfuerzos de fricción que hacen frenar al fluido cuya corriente es supercrítica y se hace subcrítica pasando por condiciones críticas ($Fr = 1$). Consecuentemente, el flujo pierde parte de su energía que se transforma en energía térmica de fricción entre partículas fluidas y en energía de agitación turbulenta [Crespo, 2002].

La conservación de la masa aplicada a un resalto hidráulico producido dentro de un canal rectangular la podemos expresar tal como (expresión 13),

$$u_1 y_1 = u_2 y_2 = q \quad (13)$$

mientras que aplicando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección horizontal aguas arriba y aguas abajo del resalto (ecuación 14), se obtiene una relación de profundidades y_1/y_2 , ecuación 15,

$$\frac{q^2}{gy_1} + \frac{y_1^2}{2} = \frac{q^2}{gy_2} + \frac{y_2^2}{2} \quad (14)$$

proporcionando una solución positiva con sentido físico

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8q^2}{gy_1^3}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) \quad (15)$$

donde $Fr_1 = u_1/\sqrt{gy_1}$ es el número de Froude aguas arriba del resalto. Se observa que la relación y_2/y_1 depende únicamente del este número.

Una cuestión importante en un resalto hidráulico es la cuantificación de pérdida de energía, así pues despreciando la fricción del fluido con las paredes del canal tenemos que la pérdida de energía es la diferencia entre la presente aguas arriba y la que se tiene aguas abajo, ecuación 16.

$$y_l = \left(y + \frac{u^2}{2g} \right)_1 - \left(y + \frac{u^2}{2g} \right)_2 \quad (16)$$

3.3 Ingestión de aire en un resalto hidráulico

El estudio de los resaltos hidráulicos débiles, con números de Froude relativamente bajos, es de gran interés en aplicaciones como la rotura de ondas, el desagüe en presas y en las estelas burbujeantes en barcos. En estos problemas se da un fenómeno de ingestión de aire, que a pesar de que los resaltos han sido bien estudiados, sigue siendo parcialmente desconocido. El aire penetra a través de la superficie libre y se forman burbujas. Este fenómeno se da en resaltos con bajo número de Froude. [Peregrine and Svendsen \[1978\]](#) fueron quizá los primeros en sugerir que el modelo de capa de mezcla tiene similitudes en aplicaciones varias como en los resaltos hidráulicos débiles, en rotura de olas y en macareos. Las analogías las pudieron verificar basadas en visualizaciones fotográficas cualitativas realizadas por trazadores de burbujas. Otras analogías entre los resaltos hidráulicos y los chorros de pared fueron hechas por autores como [Rajaratnam \[1965\]](#) y [Narayanan \[1975\]](#). Particularmente, en la analogía del resalto como una versión simplificada de la rotura de una ola dentro de la zona de oleaje se debe a la baja relación entre las profundidades aguas arriba y aguas abajo. El estudio de este tipo de problemas se asemeja a resaltos hidráulicos cuasi-estacionarios debido a los resultados de las oscilaciones que se observan en los trabajos de [Duncan \[1983\]](#) y [Banner \[1988\]](#).

Aparte los numerosos estudios sobre las analogías que tiene el problema del resalto hidráulico con demás aplicaciones de la mecánica de fluidos experimental, existen autores que han estudiado el problema de la ingestión de aire en problemas simplificados. Autores como [Chanson and Qiao \[1994\]](#) y [Chanson and Brattberg \[1997\]](#) estudiaron la distribución de aire en un resalto hidráulico. La mayoría de sus experimentos han sido realizados mediante sondas de conductividad de única o doble punta que depende de la diferencia considerable entre las resistencias eléctricas del aire y el agua y es el principio que distingue ambas fases. El estudio más detallado sobre resaltos hidráulicos con bajos números de Froude (Fr en el rango de 1.37–1.62) es el de [Svendsen et al. \[2000\]](#) que está basado en datos obtenidos mediante velocimetría láser Doppler realizados por [Bakunin \[1995\]](#) con diferentes corrientes y a diferentes posiciones verticales.

La ingestión de aire se ha estudiado en otras aplicaciones como en el caso de chorros coaxiales que descargan en una atmósfera de aire [[Sevilla et al., 2005](#)], análisis de los chorros de agua en caída libre [[Brattberg et al., 1998](#)], o el estudio de los chorros de inmersión [[Chanson and Manasseh, 2003](#)].

4 Análisis de resultados

En el presente capítulo se analizan los resultados obtenidos tanto en la aplicación PIVlab de MATLAB® de las imágenes realizadas durante los diferentes experimentos como en el procesado de los archivos obtenidos por la sonda óptica de la concentración de aire. Es importante enfatizar que ambas cosas se han llevado a cabo de manera sincronizada en tiempo con el fin de comprobar la influencia de las estructuras del flujo en la concentración de aire. Dicha tarea no se ha llevado a cabo hasta la fecha, lo cual aporta un valor añadido al este TFM.

Mediante el uso de la aplicación PIVlab se han analizado todas las imágenes de los experimentos llevados a cabo. En las tablas 1 y 2 se muestran resumidos los resaltos que se han analizado tanto mediante la técnica BIV usando PIVlab como el análisis de la concentración o ingestión de aire como mediante la sonda óptica de doble punta para la detección de fases (agua o aire). El número de Froude aguas arriba del resalto se puede obtener mediante la ecuación 17 de Belanger o si conocemos la velocidad en dicho punto se obtiene mediante la aplicación directa de su concepto, ecuación 18. Las coordenadas y_1 , y_2 son la altura aguas arriba y aguas abajo, respectivamente, x_p, y_p es la localización de la punta del resalto y x_s, y_s es la localización de la sonda óptica en el mismo. En la figura 20 se representa un esquema de todas las coordenadas mencionadas.

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right)} \quad (17)$$

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gy_1}} \quad (18)$$

Las coordenadas de las tablas 1 y 2 se pueden observar gráficamente en la figura 20. Para la analizar los resultados de una manera homogénea se adimensionalizan estas coordenadas relativas a la punta del resalto respecto a la altura aguas arriba del resalto y_1 . Por lo que tenemos lo siguiente (ecuaciones 19 y 20):

y_1	y_2	x_p	y_p	x_s	Valores de y_s
90	215	299	142	117	155, 170, 175, 180, 185, 190
90	215	283	143	23	155, 165, 175, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215
90	215	261	143	70	160, 170, 175, 180, 185

Tabla 1: Datos analizados del resalto con $Fr_1 = 2.0$. Las unidades de todas las variables de la tabla están en mm

y_1	y_2	x_p	y_p	x_s	Valores de y_s
60	190	451	206	301	115, 120
61	185	515	156	215	120, 130, 140, 150, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 200
60	190	461	203	244	115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165
61	185	424	166	174	120, 130, 140, 150, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190
60	190	421	211	200	120, 125, 130, 135, 140, 145, 150
61	185	425	166	124	120, 130, 140, 150, 160, 170, 175, 180, 185, 190
60	190	353	211	20	105, 115, 125, 135, 145, 155, 165, 170, 175, 180, 185, 190
61	185	458	167	72	120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 195, 200
60	190	422	209	78	120, 130, 140, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190
61	185	473	164	31	120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210

Tabla 2: Datos analizados de los resaltos con $Fr_1 = 2.5$. Las unidades de todas las variables de la tabla están en mm

$$x^* = \frac{x}{y_1} = \frac{x_p - x_s}{y_1} \quad (19)$$

$$y^* = \frac{y_s}{y_1} \quad (20)$$

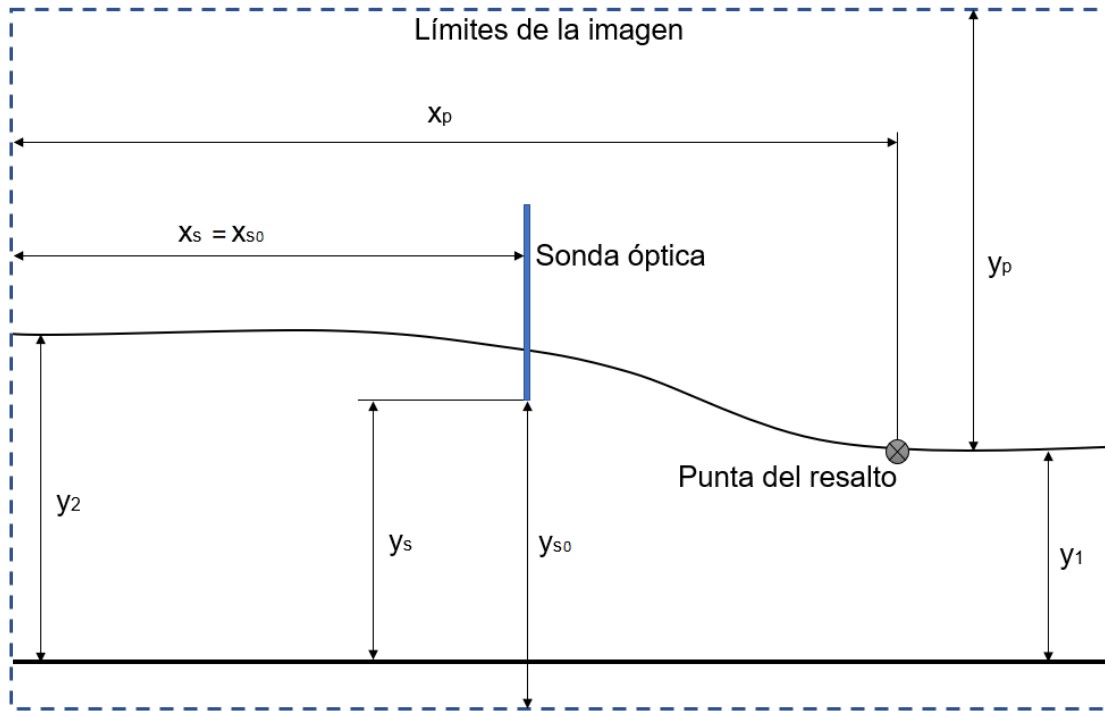


Figura 20: Definición de las coordenadas usadas en el problema del resalto

Los valores de x_p , y_p y x_s son valores medios ya que los resaltos oscilaban durante los experimentos. En el anexo 8 se introducen unas tablas de las medidas realizadas de 3 imágenes aleatorias por cada posición de la sonda x_s, y_s .

4.1 Procesado de las imágenes

La cantidad de 209220 de pares de imágenes han sido analizadas con PIVlab, que han supuesto más de 250 horas de cálculo. En cada posición diferente que tomaba la sonda óptica (x_s, y_s) se ejecutaban 1650 o 1980 disparos de cámara, ver tabla 3. Por otro lado, la sonda óptica era la encargada de medir la conductividad del medio y con ello se obtenía la fase (agua o aire) en cada instante de tiempo. Con lo que también se extrajeron 1650 ó 1980 archivos de texto de la sonda óptica.

Todos los pares de imágenes con dimensiones 1392 píxeles en su anchura y 1024 píxeles en su altura fueron analizados mediante el método de correlación basada en la transformada de Fourier con dos ventanas de interrogación. Una vez analizados los datos por cada posición (x_s, y_s), se realizó la calibración en tiempo (1ms entre captura y captura) y en espacio (1mm = 4 píxeles). Seguidamente se

x_s	Posiciones y_s	Cantidad de posciones y_s	Nº de par de imágenes	Total por x_s
117	155, 170, ... , 185, 190	6	1650	9900
23	155, 165, ... , 210, 215	10	1650	16500
70	160, 170, 175, 180, 185	5	1650	8250
301	115, 120	2	1980	3960
215	120, 130, ... , 190, 200	12	1650	19800
244	115, 120, ... , 160, 165	11	1980	21780
174	120, 130, ... , 185, 190	11	1650	18150
200	120, 125, ... , 145, 150	7	1980	13860
124	120, 130, ... , 185, 190	10	1650	16500
20	105, 115, ... , 185, 190	12	1980	23760
72	120, 130, ... , 195, 200	10	1650	16500
78	120, 130, ... , 185, 190	12	1980	23760
31	120, 130, ... 200, 210	10	1650	16500
Cantidad total de pares de imágenes analizados				209220

Tabla 3: Detalles de los pares de imágenes analizados con PIVlab. Las variables y_s y x_s están en mm

hizo una validación de la velocidad. Esta validación es parte de la herramienta de PIVlab la cual interpola las velocidades horizontal y vertical (u, v) excesivamente altas en valor absoluto, por tanto se han interpolado las velocidades que exceden estos límites; $-2.0m/s < u < 0.5m/s$, $-0.4m/s < v < 0.4m/s$. Finalmente se exportaron los datos en un archivo de texto con el fin de utilizarlos para el cálculo de concentración de aire.

No podemos mostrar y analizar todas las imágenes procesadas ya que no es el objetivo del presente trabajo, pero sí vamos a analizar un caso particular para $Fr = 2.0$ (ver figura 21).

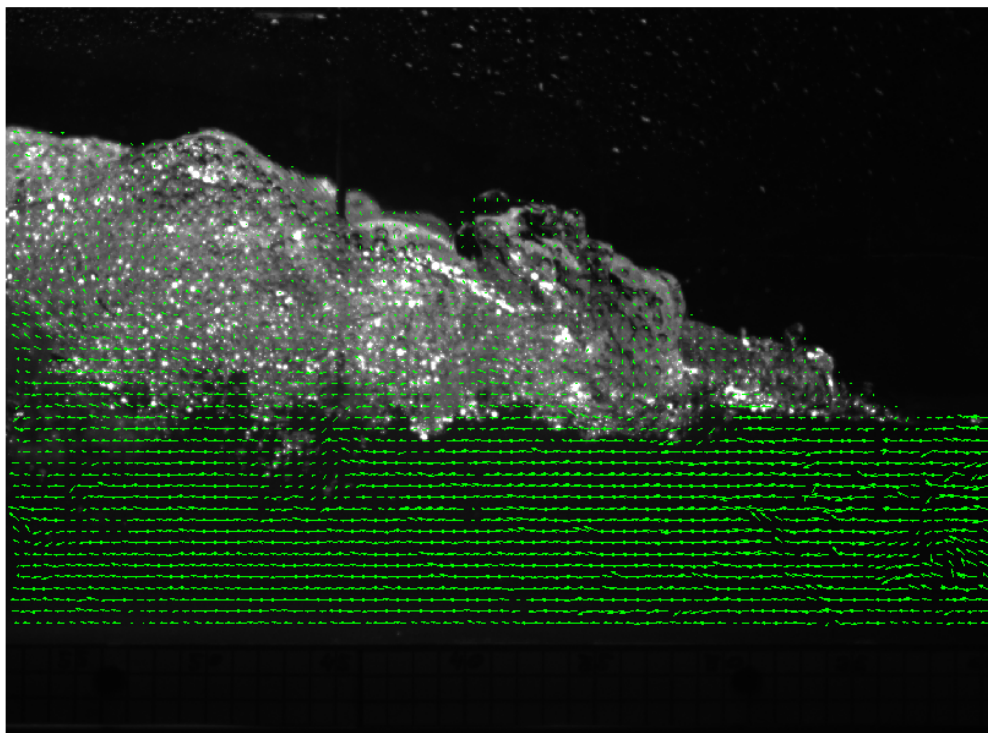


Figura 21: Captura del resalto y campo de velocidad. $Fr = 2.0$

4.1.1 Análisis del campo de velocidad

En la figura 21 es posible ver cualitativamente los vectores de velocidad, pero no sus valores. Las funciones por defecto que se encuentran en MATLAB® no ofrecen la posibilidad de otorgar escala de colores a un vector según su magnitud, por lo que nos hemos apoyado en la función de Dano [2008] para ello y como resultado tenemos la gráfica superior de la figura 22 en donde sí aparece una escala de colores para indicando magnitud de los vectores.

Se observa tanto en la figura 21 como en 22 que PIVlab realiza buena correlación en la parte baja del resalto, ausencia de burbujas, las cuales sustituyen a las partículas trazadoras. Esto es debido a que el agua dispone de partículas (suciedad, por ejemplo) que disponen de patrones para su detectabilidad con la correlación PIV.

Además, en la misma figura, se ha incluido en la parte inferior la energía específica adimensionalizada en términos de altura que viene definida por la expresión 21. Esta energía se ha evaluado a lo largo del eje x realizando el promedio

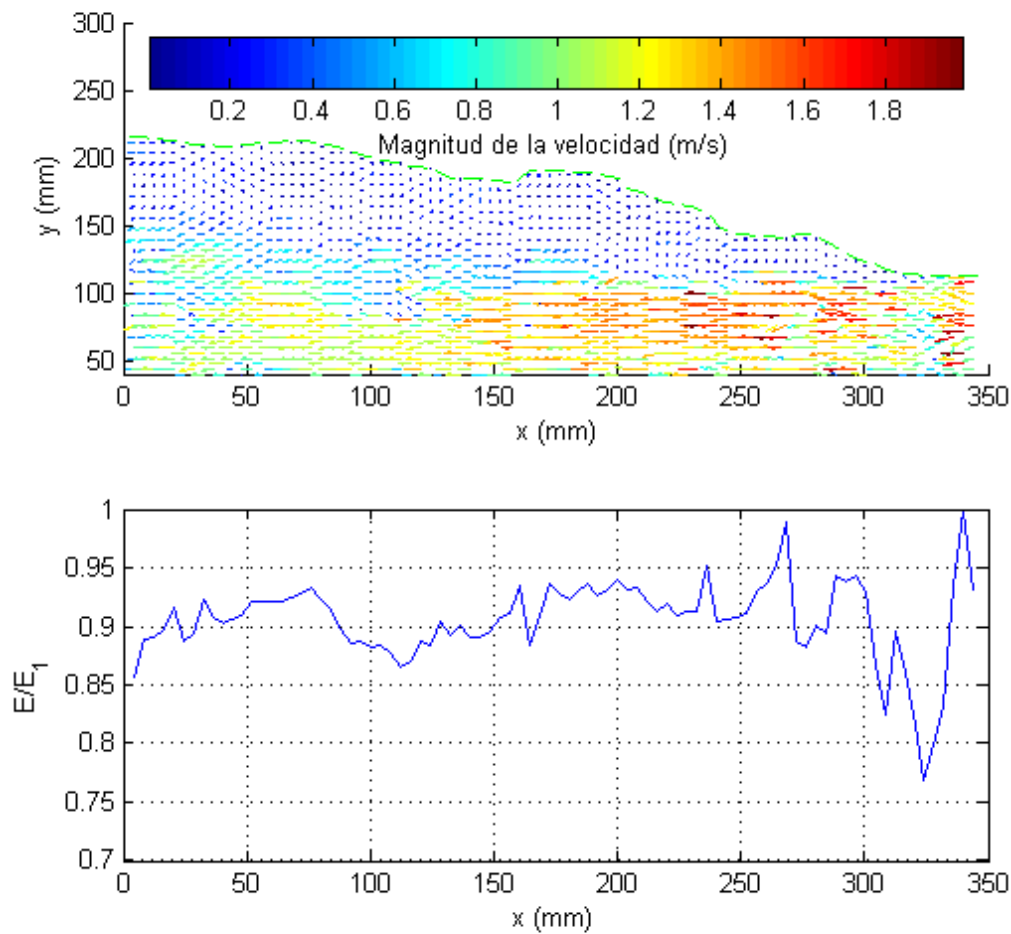


Figura 22: Valores del campo de velocidad y pérdida de energía. $Fr = 2.0$

de todos los puntos presentes h (altura manométrica) y u (velocidad horizontal). La energía específica se ha adimensionalizado respecto a la energía a la entrada del resalto ($E_1 = 287mm$) donde la velocidad se ha medido gracias a un tubo de Pitot.

$$\frac{E}{E_1} = \frac{h + \frac{u^2}{2g}}{E_1} \quad (21)$$

siendo g la aceleración de la gravedad,

Se puede observar que hay un gran descenso de la energía en la punta. La causa principal es debida a la la incertidumbre en las medidas de la velocidad en esa zona. Esto supone una pérdida de información que explica el descenso de E/E_1 en la punta del resalto. No obstante, hay un punto antes de la punta en

donde se observa que la pérdida de energía es nula y al alejarnos relativamente un poco hacia aguas abajo vemos que la mayor parte de la energía se ha perdido en la punta. Finalmente, aguas abajo tenemos que $E_2/E_1 \equiv 0.87$, es decir que se ha perdido un 13% de energía en el mismo, que comparando con lo que se obtiene con la ecuación 22 de pérdida de energía, Crespo [2002], se obtiene un 9.9%; el valor medido a través de la correlación de imágenes (expresión 23) y el valor teórico (expresión 24) se sitúan en un orden semejante.

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{1}{16} \frac{(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 3)^3}{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1} \quad (22)$$

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = 1 - 0.87 = 13.0\% \quad \text{experimental} \quad (23)$$

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{1}{16} \frac{(\sqrt{1 + 8 \cdot 2.0^2} - 3)^3}{\sqrt{1 + 8 \cdot 2.0^2} - 1} = 9.9\% \quad \text{teórico} \quad (24)$$

Observamos que el coeficiente de disipación de energía experimental es mayor que el calculado teóricamente, la explicación que se le da a ello es que en los experimentos se da un problema tridimensional mientras que teóricamente se analiza un problema bidimensional; el rozamiento del flujo con las paredes laterales no se tiene en cuenta teóricamente. Además, para su formulación se consideran aguas arriba y aguas abajo velocidades uniformes, mientras que en los experimentos éstas no lo son del todo como se puede observar.

4.1.2 Análisis de la vorticidad

La vorticidad describe la rotación local de un fluido y es bien conocida en el problema del resalto hidráulico. Su expresión matemática para un problema bidimensional se observa en la ecuación 25.

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (25)$$

Analizamos la vorticidad para la captura de la figura 21; como se puede observar (figura 23) se disponen de unos valores relativamente altos en la zona de mezcla (o de cortadura) debido a los altos gradientes de velocidad en esa zona.

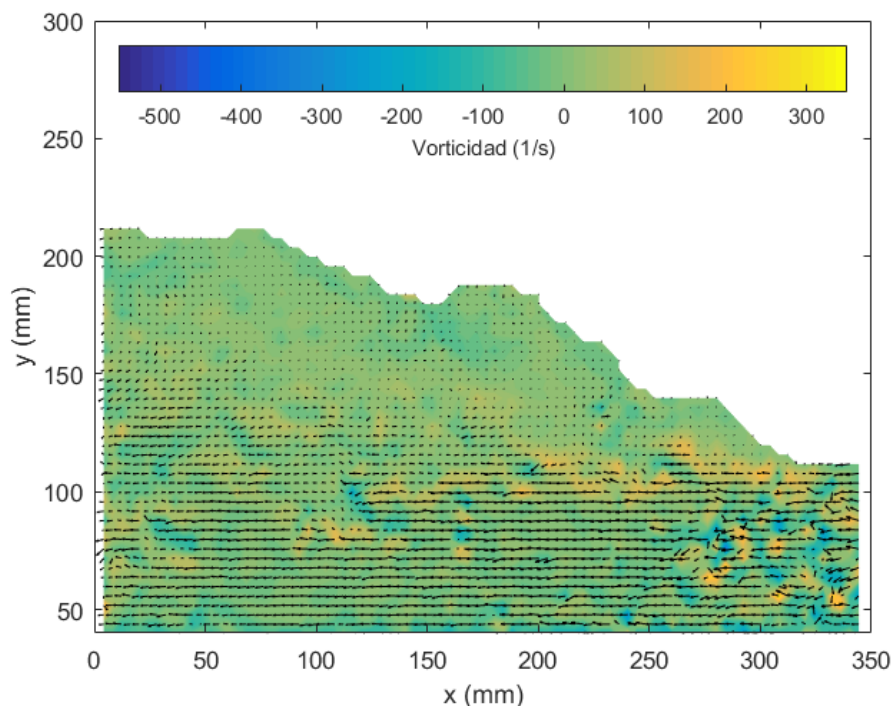


Figura 23: Valores del campo de velocidad. $Fr = 2.0$

Se dan velocidades altas ($u \simeq 1.2m/s$) en la zona baja mientras que en la parte superior tenemos velocidades menores ($u \simeq 0.3m/s$).

Por otro lado, en la figura 24, podemos ver que los valores de la vorticidad son más bajos que los de la zona de cortadura. No obstante, se producen localmente unos remolinos en la zona de la punta. En $x \simeq 140mm$ se localiza una recirculación del fluido que hipotéticamente es un mecanismo de ingestión de aire en el resalto.

4.2 Análisis de la concentración de aire

Para el análisis de la concentración de aire en los resaltos hidráulicos se ha codificado una serie de rutinas en MATLAB® ([Anexo: scripts de MATLAB® usados para obtener concentración de aire](#)) con los datos que proporciona la sonda óptica de doble punta y los datos de campo de velocidades que se han exportado con la herramienta PIVlab. El esquema de la programación de las rutinas se muestra en la figura 25.

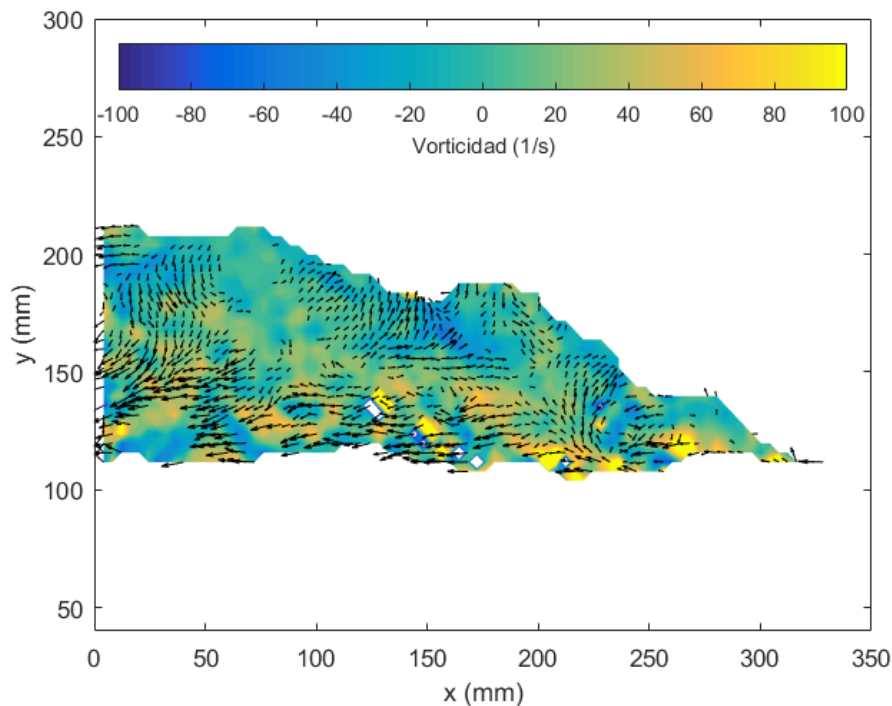


Figura 24: Vorticidad entre la zona de mezcla y la superficie libre. $Fr = 2.0$

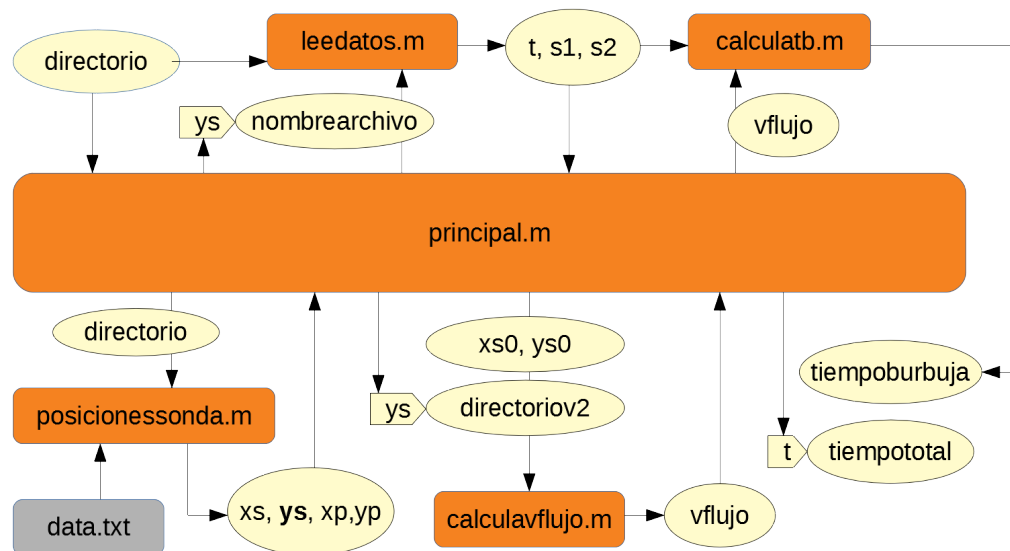


Figura 25: Diagrama de funciones de MATLAB[®] usadas para calcular la concentración de burbujas. $Fr = 2.0$

Primeramente se dispone de el fichero [principal.m](#) que tiene como entradas el directorio donde se almacenan los datos de las sondas ópticas, el coeficiente de calibración espacial ($4px/mm$) y el tamaño de las imágenes extraídas por la cámara.

El script principal realiza varias llamadas a funciones para conseguir obtener la concentración de aire a partir de los datos proporcionados por la sonda óptica. Primeramente se llama a la función [posicionessonda.m](#) donde, gracias a la entrada del directorio seleccionado en el script [principal.m](#), se extraen los datos de un fichero indexado con todos los ensayos realizados ([data.txt](#)); a partir del directorio se obtienen las posiciones de la sonda óptica y la punta del resalto; se obtienen las coordenadas x_p y y_p correspondientes a la punta del resalto y la posición x_s y el vector y_s de posiciones verticales que ha adoptado la sonda a lo largo en la posición x_s fija. El script [principal.m](#) va recorriendo cada uno de los valores de $y_{s,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, n = número total de posiciones verticales adoptadas en una posición x_s) y calcula el tiempo acumulativo en que se detecta aire en la coordenada $(x_s, y_{s,i})$.

Para localizar la posición, se realiza una conversión de unidades en ambas coordenadas y una equivalencia en la vertical entre según los límites de la imagen y las coordenadas desde la punta del resalto, véase la figura 20 para una mejor comprensión. La conversión a metros es necesaria ya que los datos exportados de PIVlab se realizaron en dicha unidad. En el programa [principal.m](#) se realiza la conversión y una vez hallada se realiza uso de la función [calculavflujo.m](#) para la obtención de dicha velocidad.

Para obtener la concentración de aire es necesario calcular el tiempo acumulativo de residencia de una burbuja bajo la sonda a lo largo de un experimento y la concentración la definimos como el cociente entre ambos términos. El tiempo de acumulativo de residencia de aire se obtiene a partir de la rutina [calculatb.m](#) que toma como entradas las señales 1 y 2 proporcionadas por la sonda óptica($s1, s2$), el vector tiempo de ensayo (t) y la velocidad del flujo. En el siguiente apartado se explica con detalle cómo se ha procedido con el cálculo de la concentración de aire.

4.2.1 Procedimiento de obtención de la concentración de aire

La sonda óptica de doble punta recibe dos señales de intensidad de luz que son tratadas electrónicamente para dar datos de *voltios* (V) a lo largo del tiempo; una burbuja bajo cualquiera de las puntas reflejará luz y dará un valor en *voltios* por encima del valor base correspondiente a la presencia de agua. Puesto que en el mismo ensayo se realizan capturas de imágenes a una frecuencia de 5.5 Hz y para ello se emite una luz estroboscópica para capturar la estructura del flujo, estos pulsos son capturados también por la sonda óptica y no tienen porqué asociarse con la presencia de aire. Por tanto, existe la necesidad de distinguir los datos del paso de aire en forma de burbujas o el pulso de la luz estroboscópica. En el presente TFM, se desarrolla un método que tiene en cuenta la rapidez en que la señal de la sonda en cambiar de un valor a otro para diferenciar ambas cosas. Sabemos que los pulsos de la luz estroboscópica cambia de forma instantánea, mientras que el paso de una burbuja tiene una señal a lo largo del tiempo más suave. Por comodidad, en este contexto, llamaremos pendiente a dicha rapidez (unidad es V/s).

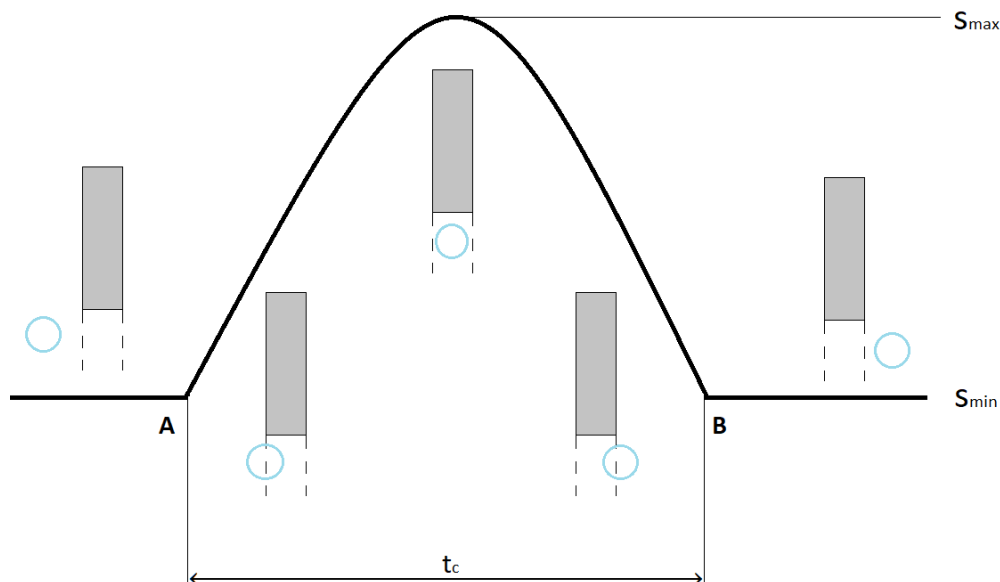


Figura 26: Obtención de la señal por el paso de una burbuja bajo una de las puntas de la sonda. Alcance máximo de la señal $S_{max} \simeq 5.2V$ y valor de la señal sin presencia de luz $S_{min} \simeq -7.1V$

Es posible establecer una relación entre la velocidad del flujo que se obtiene con

los datos de PIVlab con la pendiente de la señal como un límite para distinguir el pulso estroboscópico con la señal recibida por una burbuja. Es necesario, también, conocer la amplitud de captación de la punta de la sonda óptica que tendrá un orden de magnitud similar a su diámetro d_{sensor} . Se establece una relación de pendiente de la señal que puede alcanzar por el paso de una burbuja a través de la punta gracias a los variables mencionadas anteriormente y los valores máximo y mínimo en *voltios* de la señal. Así, pues, si queremos calcular la pendiente por el paso de una burbuja bajo la punta de la sonda (ver simplificación en la figura 26), podemos realizar la siguiente aproximación:

$$p_A \simeq \frac{s_{max} - s_{min}}{t_c/2} \quad (26)$$

donde t_c es el tiempo característico de tránsito de la burbuja bajo la punta. A partir de esta variable se puede también relacionar con la velocidad de la burbuja (v_b) y con d_{sensor} , ecuación 27. Esta velocidad v_b se puede aproximar a la velocidad del flujo (v_f) obtenido por la correlación BIV.

$$v_b = \frac{d_{sensor}}{t_c} \simeq v_f \quad (27)$$

Ambas expresiones, 26 y 27, se pueden combinar para obtener la pendiente máxima de la señal que podría tener el paso de burbuja por la punta de la sonda (ecuación 28). De forma que si elegimos la velocidad máxima, $v_{f,max}$, en una región ($0.9x < x < 1.1x, 0.95y < y < 1.05y$, donde (x, y) es la posición de la sonda), podemos distinguir entre pulsos estroboscópicos y paso de burbuja, expresión 29. Esta velocidad máxima se obtiene de los datos analizados por PIVlab y se obtiene gracias al script [calculavflujo.m](#).

$$p_{max} = \frac{2(s_{max} - s_{min})}{d_{sensor}} v_{f,max} \quad (28)$$

Si calculamos la pendiente en cualquier punto de la señal se deberá comprobar si es mayor o no que la obtenida con la expresión 28. En el caso de que en un punto cualquiera de la señal, la pendiente es mayor que p_{max} entonces diremos que se

trata de un pulso estroboscópico solo (sin combinación con burbuja). Mientras que en el caso contrario, se tratará de burbuja. Durante el procesado de los datos de la señal para obtener la concentración de burbujas (relación del tiempo acumulativo de transición de burbujas bajo la punta entre el tiempo total de ensayo, t_b/t_t , generalmente $t_t \simeq 5min$) se tendrá en cuenta que cuando se de un pulso estroboscópico solo, no se sumará el tiempo característico que se ha capturado t_c . Por el contrario, en caso de tratarse de una burbuja, se sumará al valor acumulativo en la iteración anterior t'_b el tiempo de transición capturado, t_b .

$$ip_k = \frac{s_k - s_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} > p_{max} ? \begin{cases} \text{Sí, pulso estroboscópico} & t_b = t'_b \\ \text{No, burbuja} & t_b = t'_b + t_c \end{cases} \quad (29)$$

donde $k = \{2, 3, 4...n\}$, $n \equiv$ número de puntos que tiene la señal. Como ejemplo, en la figura 27, se observan las señales de cada una de las puntas de la sonda en un tiempo determinado donde el pulso estroboscópico está centrado en la gráfica. Vemos como las pendientes de las señales en ese punto son más elevadas que la señal ofrecida por el paso de las burbujas (las dos primeras pulsaciones).

En las rutinas de los scripts de MATLAB[®] consideramos el coeficiente concentración de burbujas en un punto dado de la sonda (x_s, y_s) como la relación entre la suma de los tiempos acumulativos de las dos señales, $s1$ y $s2$, de la sonda ($t_{b,s1}$ y $t_{b,s2}$) y el tiempo de duración total del experimento por cada posición de la sonda ($t_t \simeq 5min$). Se considera la concentración de aire, C , como la media de las concentraciones obtenidas en las dos señales (ecuación 30).

$$C_{s1} = \frac{t_{b,s1}}{t_t}; \quad C_{s2} = \frac{t_{b,s2}}{t_t}; \quad C = \frac{C_{s1} + C_{s2}}{2} \quad (30)$$

Si observamos la evolución de la pendiente a lo largo del tiempo para un caso completo en una posición determinada de la sonda, figura 28, se comprueba que realmente hay dos tipos de pendientes en valor absoluto (altas, correspondientes a los pulsos y bajas, correspondientes a los pasos de burbuja bajo las puntas de la sonda).

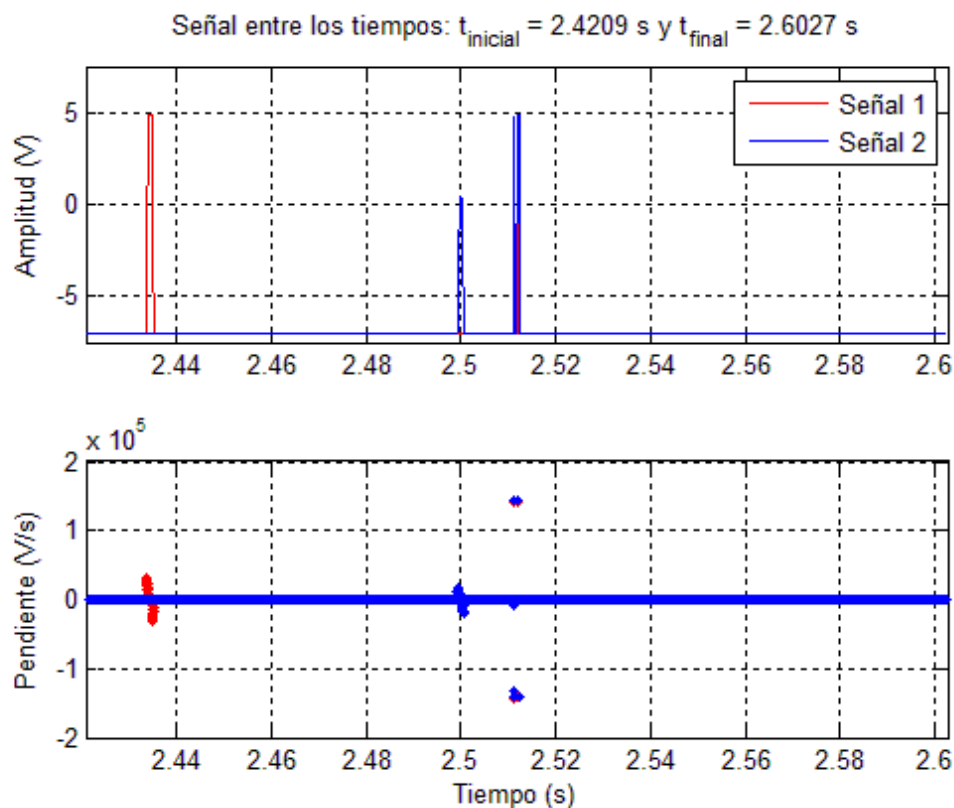


Figura 27: Distinción entre señal de paso de burbuja y pulso estroboscópica

Para realizar una comprobación más visible realizamos un histogramas de 10^4 intervalos tanto para la señal 1, gráfica de la figura 29a, como para la señal 2, gráfica de la figura 29b. En la parte central de ambas gráficas vemos una distribución triangular simétrica centrada en “0” que corresponde a la detección de burbujas siempre que el valor de la pendiente no se nulo ya que este valor corresponde con la presencia de agua bajo la sonda y se observa que es el valor más repetido, lo cual es lógico debido a que las concentraciones de aire son alrededor de milésimas ($C \simeq 10^{-3}$). Mientras que en los extremos se percibe gran cantidad de valores de pendiente altos que corresponden claramente con los pulsos estroboscópicos.

4.2.2 Resultados

Con el fin de comparar todos los resultados de concentración, se ha estimado las posiciones en cada posición horizontal x_s que adoptaba la sonda en cada expe-

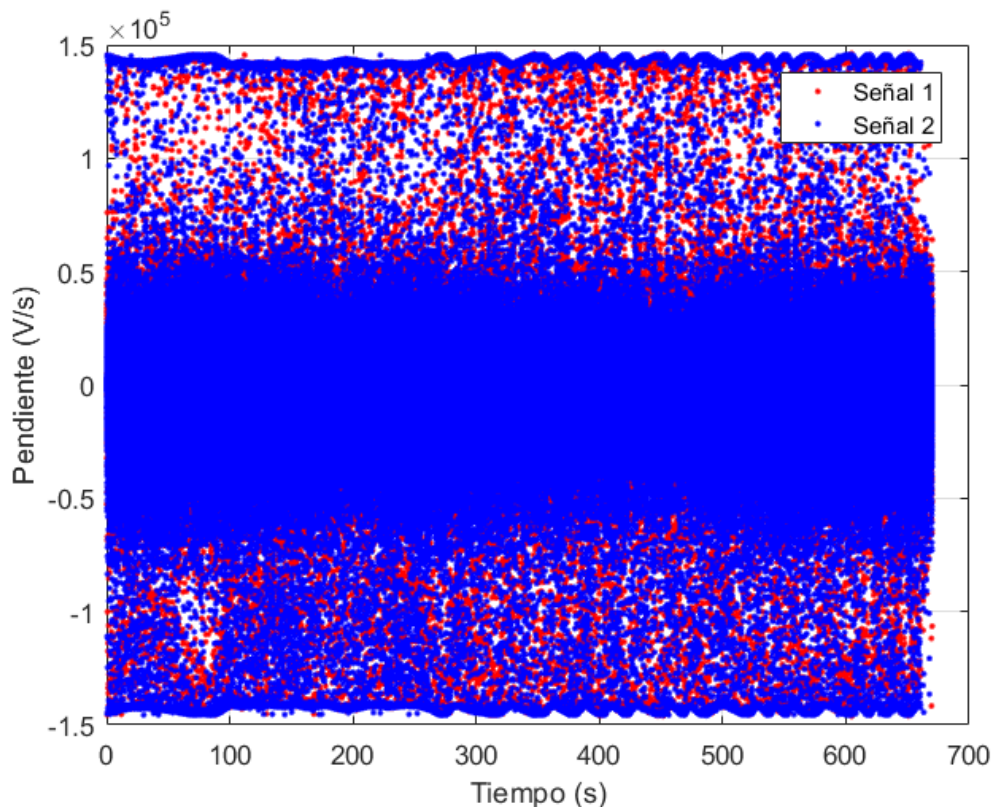


Figura 28: Pendiente de las dos señales de la sonda a lo largo del experimento entero en una posición fija de la sonda

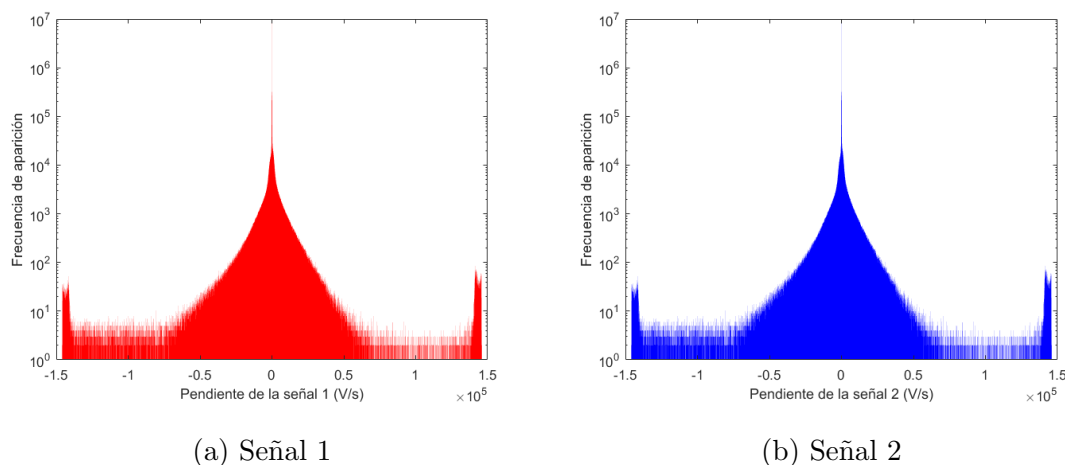


Figura 29: Histograma para la pendiente de la señal (V/s) de la sonda óptica

rimento. La referencia empleada ha sido la punta del resalto, cuya posición (x_p, y_p) también se ha estimado. Por tanto, se han seleccionado 3 imágenes aleatorias para estimar x_p , y_p y x_s por cada posición diferente de la sonda. En el anexo 8 se pueden observar todas las posiciones calculadas. Las posiciones verticales de la sonda no han

sido necesarias su estimación ya que se midieron con respecto al fondo del canal.

A modo de demostración, en la figura 30 se puede observar una gráfica con la amplitud en V de las dos señales de la sonda óptica y en la 31 se ve la correspondencia con dicho tramo. La imagen pertenece al segundo pico, $t = 6.39s$, que aparece en el centro de la gráfica de la amplitud de las señales, ver ecuación refec:sondayburbuja. Se puede apreciar que la “Burbuja 2” es detectada por ambas puntas de la sonda y se representa en la parte de la derecha ($6.39s < t < 6.42s$) de la gráfica de la figura 30. Mientras tanto, la “Burbuja 1” es también detectada por ambas pero un tiempo inferior al de captura y se observa su señal en la parte izquierda ($6.36s < t < 6.38$). Puesto que la primera tiene un tamaño más reducido, su tiempo de transición bajo la sonda es lógicamente menor.

$$t = \frac{N_{im}}{N_t} \cdot t_t = \frac{35}{1650} \cdot 301.5s = 6.39s \quad (31)$$

donde N_{im} es el número de imagen elegida del directorio, N_t es el número total de imágenes presentes en el mismo, y t_t es la duración total del ensayo.

En la tesis doctoral de Witt et al. [2013] se explica detalladamente el procedimiento de ingestión de aire en un resalto hidráulico mediante técnicas experimentales y de simulación con OpenFOAM. Sin embargo, en el presente TFM explicamos brevemente la formación de las burbujas en el interior de mismo con los resultados analizados, los cuales se representan en las figuras 32, 33 y 34.

La corriente crítica ($Fr > 1$) se cruza con el flujo subcrítico ($Fr < 1$) donde se localizan burbujas en la zona de recirculación de flujo, parte del flujo se frena y por inercia “vuelve hacia atrás” produciéndose dicha recirculación. La cual es responsable del atrapamiento de aire que se introduce el resalto. En la figura 32 se puede observar que para $x/y_1 = 2.02$ (relativamente cerca de la punta) se produce una concentración de aire en la parte baja de dicha posición. Dichos valores localmente elevados pueden ser debidos, hipotéticamente, a la ingestión de aire producida por torbellinos que circulan en dicha región. En la siguiente posición se observa una

concentración homogénea y más baja que la zona indicada anteriormente, lo cual quiere decir que en la dicha posición el aire ingerido se ha dispersado en el interior del resalto. Por último, en la posición final $x/y_1 = 2.89$ para el caso $Fr = 2.0$, se tiene algo parecido que en la primera posición. En dicha zona, pueden encontrarse torbellinos de mayor tamaño que tienen un efecto similar que aquéllos localizados en la punta del resalto. Se captura, además, el aumento de la concentración cerca de la superficie libre.

En los casos para $Fr = 2.5$, tenemos posiciones algo más alejadas de la punta (figuras 33 y 34) por lo que el comportamiento es distinto. En ambos casos, se da un máximo de concentración para una posición del orden de $x/y_1 \simeq 6$. Dicha concentración elevada y homogénea probablemente sea debida al transporte y acumulación de aire a lo largo de resalto, ya que en ambos casos se observa cómo dicha concentración va aumentando a medida que nos alejamos de la punta una vez pasado la zona de recirculación (zona cercana a la misma). Después de la zona de recirculación, los torbellinos más alejados son menos disipativos puesto que se pierde casi toda la energía del resalto en la zona de la punta (ver gráfica inferior de la figura 22) y por tanto son menos propensos a “retirar” el aire.

En la transición $x/y_1 \simeq 6 \rightarrow x/y_1 \simeq 8$ del resalto de la figura 33, la flotabilidad de las burbujas cobra importancia y por ello la concentración disminuye. En $x/y_1 = 8.00$, tenemos una distribución vertical de aire diferente; en la parte superior la concentración es mayor debido a que es el paso de burbujas hacia el exterior por flotabilidad. En la parte intermedia de dicha posición encontramos que la concentración es menor que las partes bajas y altas de la distribución. En la zona baja de la misma vemos que hay más concentración de burbujas, lo cual se cree que puede ser debido a que en dicha zona la cantidad de movimiento de agua es mayor y ello hace las burbujas se vean parcialmente arrastradas y siguen el flujo de agua.

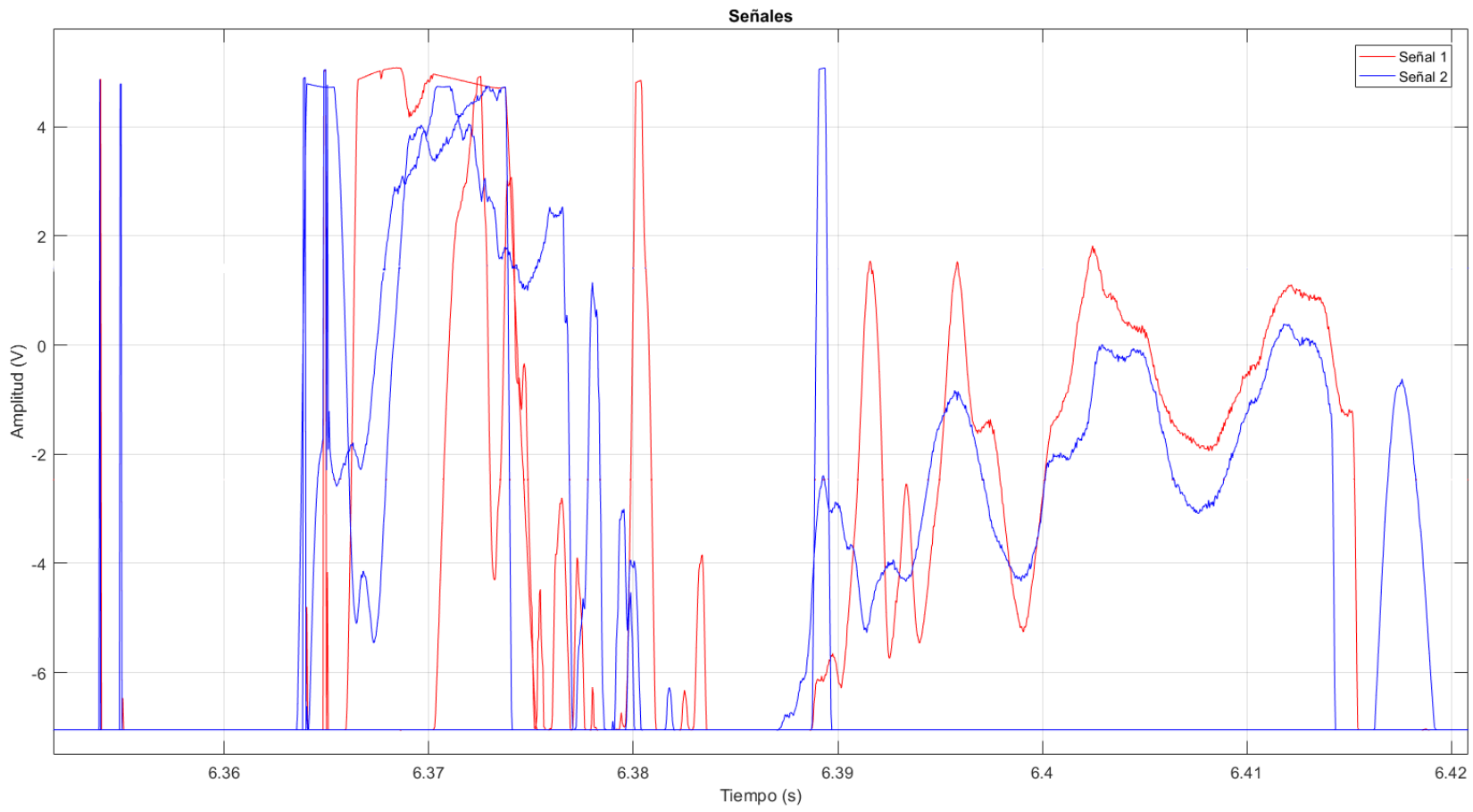


Figura 30: Señales de la sonda por detección de burbujas y pulso estroboscópico. $Fr = 2.0$

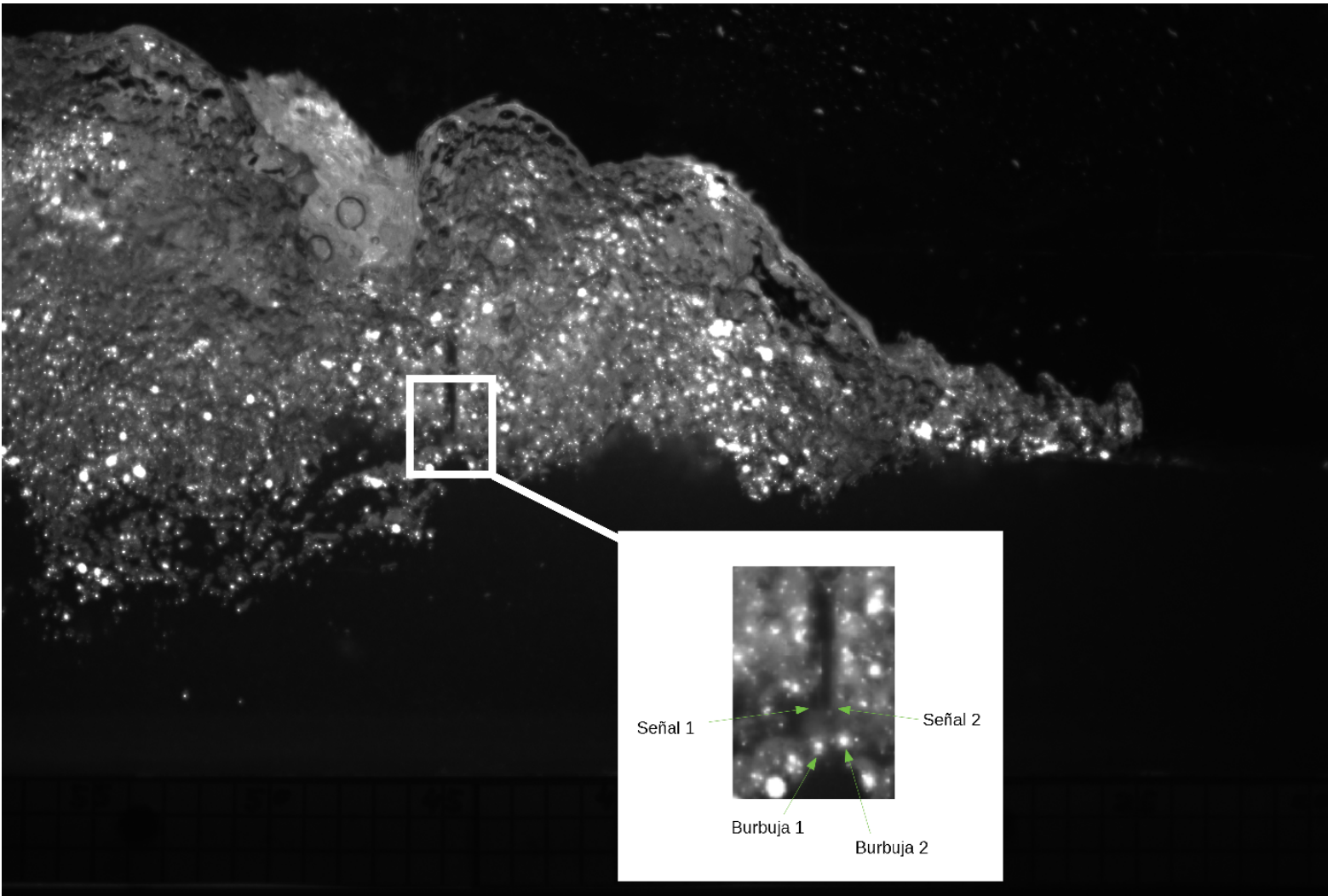


Figura 31: Detalle gráfico de la detección de burbujas $Fr = 2.0$

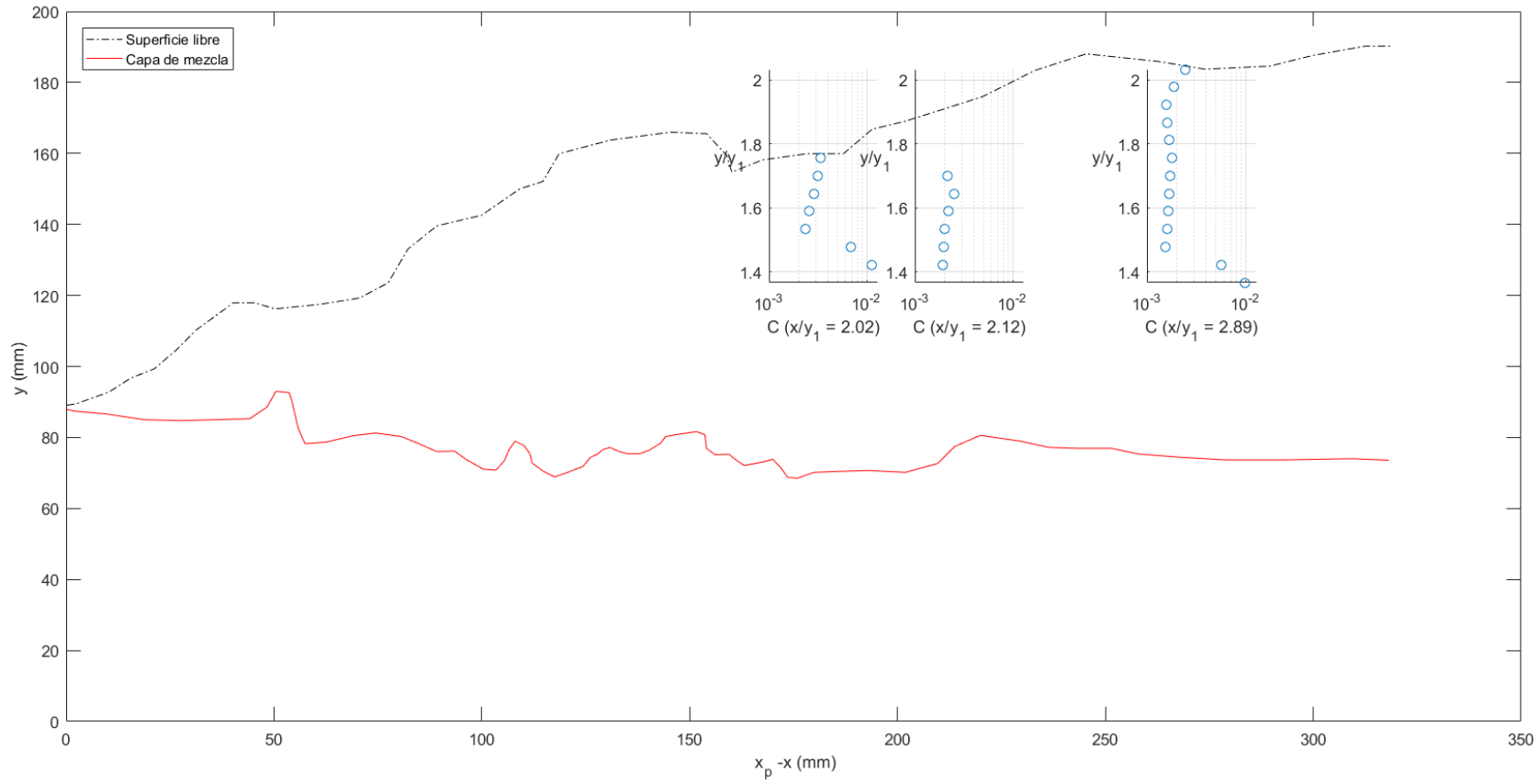


Figura 32: Concentración de aire para el resalto con $Fr = 2.0$

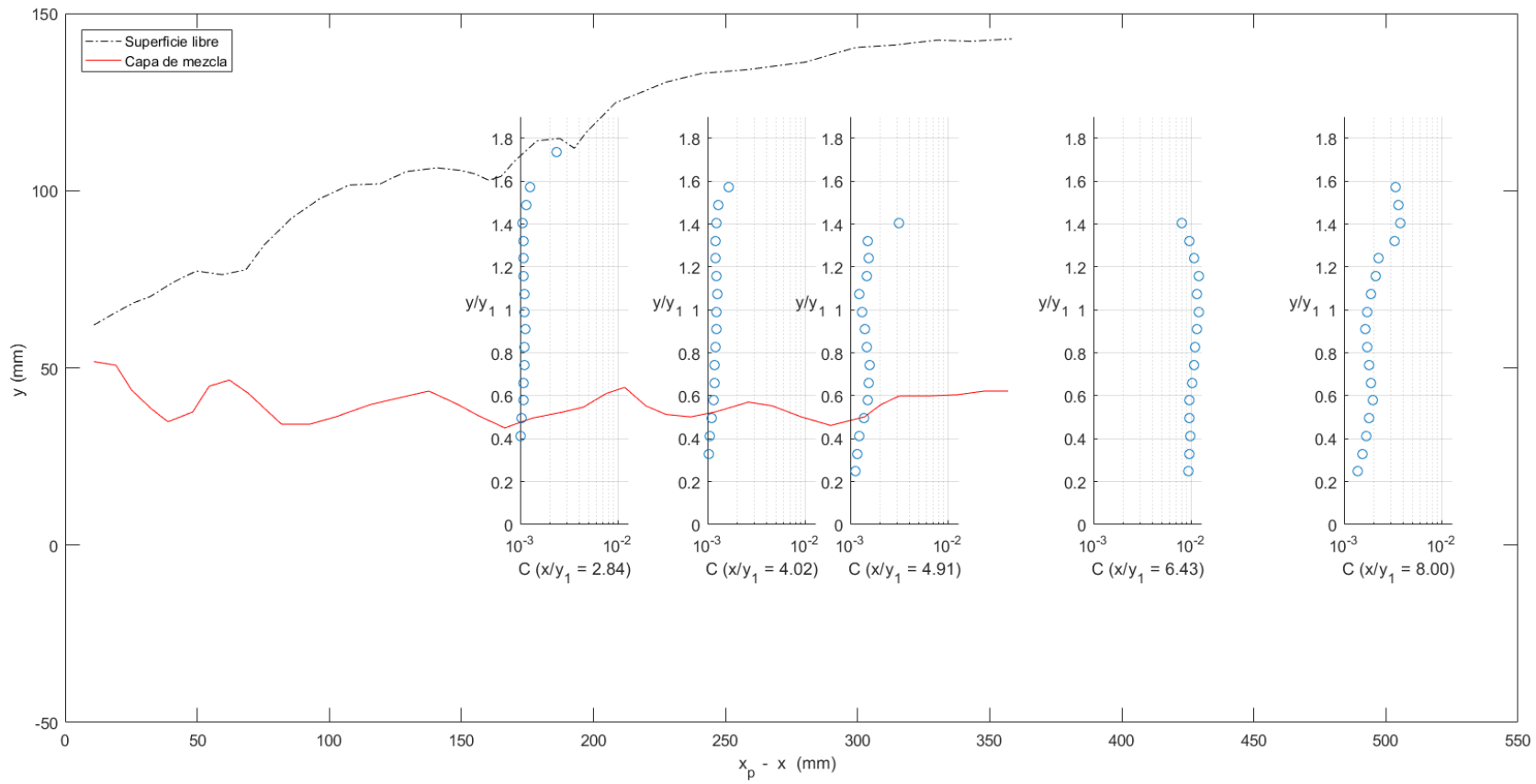


Figura 33: Concentración de aire para el resalto con $Fr = 2.5$ (v1)

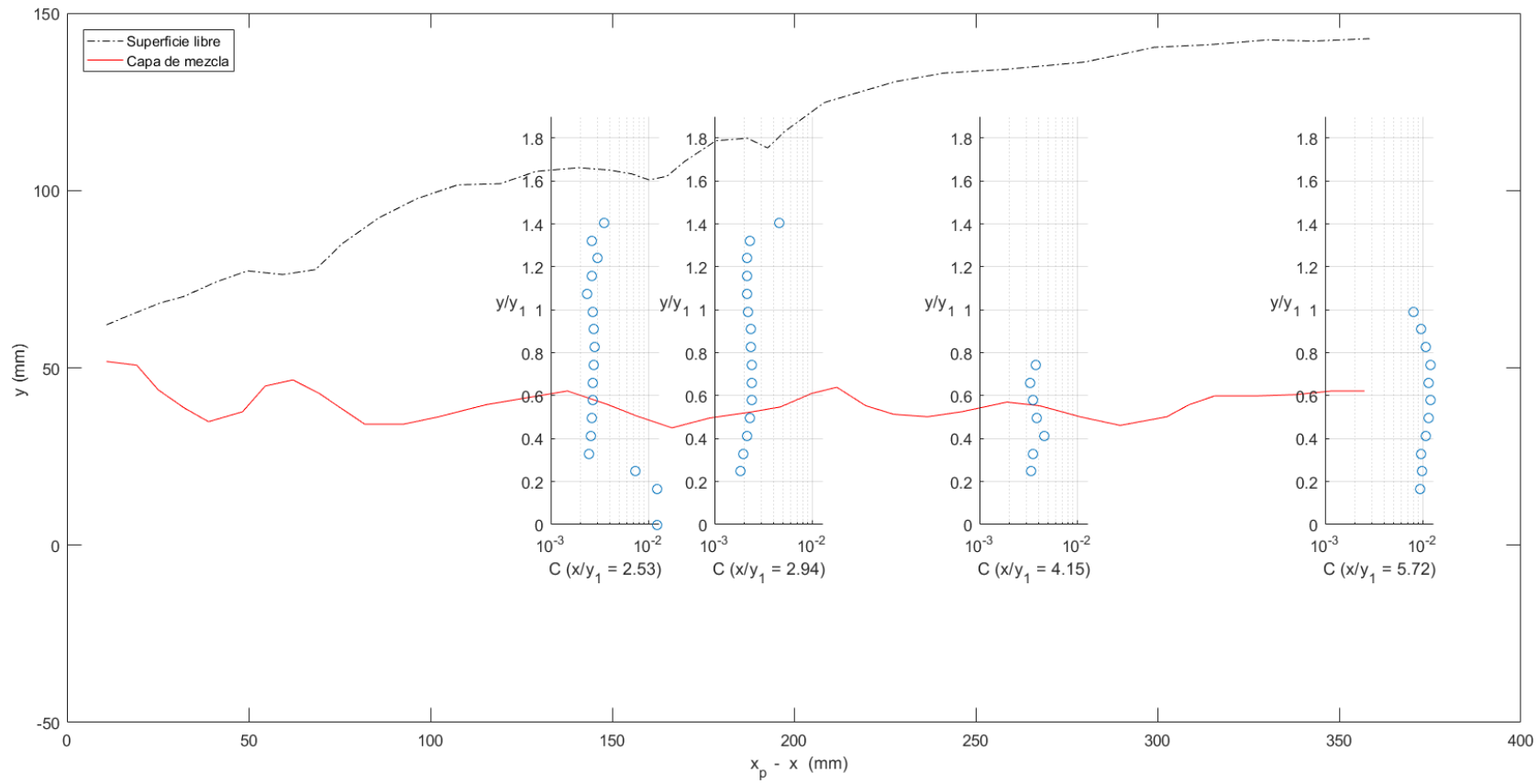


Figura 34: Concentración de aire para el resalto con $Fr = 2.5$ (v2)

A modo comparativo, en la figura 35 se representa la concentración porcentual de grupo de burbujas en un resalto hidráulico con para $Fr = 2.43$ aguas arriba del mismo. Estos valores han sido extraído de en la tesis doctoral de Witt et al. [2013] con el fin de compararlos análogamente con los resultados de los resaltos con $Fr = 2.5$ aguas arriba que se han obtenido en el presente TFM. Se puede apreciar cierta similitud en cuanto a la distribución, se observa un crecimiento de la concentración a medida que nos alejamos de la punta. También es posible observar un máximo de concentración en torno a $x/y_1 \simeq 5$; la diferencia con nuestro caso, $x/y_1 \simeq 6$ puede ser debido a la gran fluctuación que tenía el resalto; en este tipo de experimentos siempre tenemos una incertidumbre en la localización de la punta del resalto. A partir de ese punto de concentración máxima de grupo de burbujas, la concentración vuelve a disminuir. En nuestro caso, también se detecta esta disminución ($x/y_1 = 8.00$ figura 34).

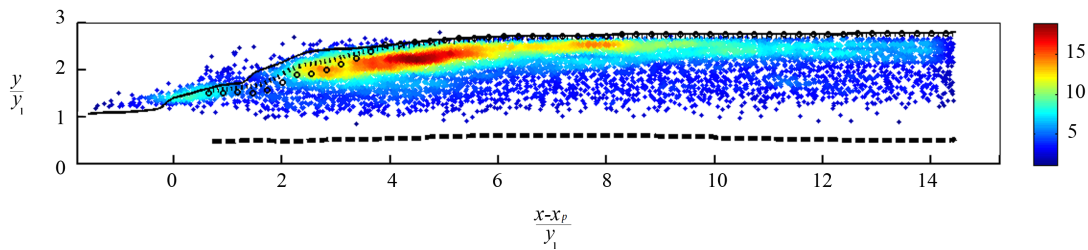


Figura 35: Concentración porcentual de grupo de burbujas en un resalto hidráulico con para $Fr = 2.43$ aguas arriba [Witt et al., 2013]

5 Conclusiones

En el presente TFM se ha realizado la puesta en marcha múltiples experimentos de resaltos hidráulicos con $Fr = 2.0$ y $Fr = 2.5$. Se ha realizado la toma de medidas con una sonda óptica para determinar la concentración de aire en el mismo y a su vez se han tomado pares de imágenes del resalto a una frecuencia de $5.5Hz$. El intervalo de tiempo entre ambas imágenes ha sido de $1ms$, el cual se ha utilizado con el la calibración espacial de las imágenes, $4px = 1mm$, para calcular el campo de velocidades y vorticidad.

Se ha realizado una descripción detallada de la técnica PIV y se ha realizado una justificación para el uso de burbujas como agente sustituto a las partículas trazadoras que son utilizadas normalmente en dicha técnica. Se han analizado un total de 209220 de par de imágenes con la herramienta PIVlab, [Thielicke \[2014\]](#), que han supuesto más de 250 horas de cálculo.

Se han descrito las sondas ópticas para medición de concentración de gas que han sido utilizadas en la literatura. En el presente TFM se ha empleado una sonda óptica de doble punta que registra la presencia de aire o agua en las ambas puntas gracias al sistema de detección de luz; el agua es capaz de dejar pasar la luz emitida por la sonda mientras que una burbuja no, ya que la luz se dispersa y es captada por la misma. Por tanto, se obtiene una señal que indica que hay presencia de luz.

Puesto que para la toma de imágenes se ha dispuesto de un pulso estroboscópico de luz láser de manera sincronizada con la apertura del diafragma de la cámara digital y esta luz se detecta en las puntas de la sonda óptica, se ha establecido un método de análisis de la concentración de aire que no tenga en cuenta esta luz de pulsos estroboscópicos. El método consiste en analizar la primera derivada (pendiente) de las señales de la sonda y mediante los parámetros de velocidad de flujo y diámetro de la punta se establecía una pendiente máxima p_{max} que era la pendiente máxima que podía tener el paso de una burbuja bajo la sonda. Cualquier pendiente de la señal que supere en valor absoluto p_{max} es considerada un pulso estroboscópico por su rapidez de aparición y desaparición en la señal captada por

la sonda.

Se ha analizado el campo de velocidad, la disipación de energía y la vorticidad para el resalto con $Fr = 2.0$. Se obtiene que un campo de velocidad coherente por la correlación usada en PIV usando burbujas como patrón (BIV). Esto se ha podido comprobar con los valores que nos ofrecía el tubo de Pitot a la entrada del mismo. Respecto a la disipación de energía se ha podido demostrar que la mayor parte de ella se pierde en la zona cercana a la punta, que acuerdo con [Martínez-Bazán et al. \[1999\]](#) donde postula que la frecuencia de ruptura aumenta con el coeficiente de disipación de energía cinética turbulenta, podemos postular que la rotura de burbujas de largo tamaño se produce en dicha zona y es por ello una de las razones que hace que la energía específica del flujo se pierda mayoritariamente en dicha zona. Por otro lado, la vorticidad se ha capturado también con la correlación PIV, en la cual se dan valores altos en la zona de cortadura debido al gradiente de velocidades, pues tenemos velocidades altas en la parte baja del resalto mientras que valores más bajos en la parte superior. La velocidad del flujo se obtenía a partir de los datos analizados con PIVlab, con lo que con esto se responde al objetivo último del presente trabajo.

Se ha realizado una hipótesis de la ingestión de aire los resaltos hidráulicos con los datos de partida obtenidos con la sonda óptica y con la cámara digital. Se ha postulado que la ingestión es producida por torbellinos presentes en la zona de la punta, $Fr = 2.0$, donde se pueden distinguir dos tipos; torbellinos pequeños en la zona más cercana $x/y_1 \simeq 2$ y torbellinos de mayor tamaño en $x/y_1 \simeq 3$. Para los dos resaltos hidráulicos con $Fr = 2.5$, se ha podido comprobar que la ingestión va creciendo a medida que nos alejamos de la punta. Sin embargo, para éstos no se han realizado capturas cercanas a la punta pero sí se ha podido comprobar que para una posición de uno ellos ($x/y_1 = 2.5$, figura 34) se da la ingestión de aire por torbellinos de mayor tamaño. Se ha verificado que existe un máximo de concentración en ambos resaltos para una posición del orden de $x/y_1 \simeq 6$. Por último, si comparamos ambos resaltos, se observan resultados coherentes entre sí y similares a los analizados por [Witt et al. \[2013\]](#), figura 35.

6 Bibliografía

John Bakunin. *Experimental study of hydraulic jumps in low Froude number range*. PhD thesis, University of Delaware, 1995.

Michael L. Banner. Surging characteristics of spilling zones of quasi-steady breaking water waves. In Kiyoshi Horikawa and Hajime Maruo, editors, *Nonlinear Water Waves*, pages 151–158, Berlin, Heidelberg, 1988. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-83331-1.

Christophe Boyer, Anne-Marie Duquenne, and Gabriel Wild. Measuring techniques in gas–liquid and gas–liquid–solid reactors. *Chemical Engineering Science*, 57(16):3185–3215, 2002.

T Brattberg, L Toombes, and Hubert Chanson. Developing air-water shear layers of two-dimensional water jets discharging into air. In *American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division (Publication) FED*. ASME, 1998.

A Cartellier and E Barrau. Monofiber optical probes for gas detection and gas velocity measurements: conical probes. *International journal of multiphase flow*, 24(8):1265–1294, 1998.

Alain Cartellier and JL Achard. Local phase detection probes in fluid/fluid two-phase flows. *Review of Scientific Instruments*, 62(2):279–303, 1991.

Hubert Chanson. Air entrainment in two-dimensional turbulent shear flows with partially developed inflow conditions. *International Journal of Multiphase Flow*, 21(6):1107–1121, 1995.

Hubert Chanson and Tim Brattberg. Experimental investigations of air bubble entrainment in developing shear layer. report ch48/97. department of civil engineering, the university of queensland, brisbane, australia. *October, 309p*, 1997.

- Hubert Chanson and Richard Manasseh. Air entrainment processes in a circular plunging jet: Void-fraction and acoustic measurements. *Journal of fluids engineering*, 125(5):910–921, 2003.
- Hubert Chanson and GL Qiao. *Air bubble entrainment and gas transfer at hydraulic jumps*. Dept. of Civil Engineering, University of Queensland Brisbane, 1994. ISBN 0867765828.
- Antonio Crespo. *Mecánica de los fluidos*. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Servicio de Publicaciones, 2002.
- Bertrand Dano. Quiverc, 2008. URL https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3225-quiverc?s_tid=prof_contriblnk.
- James H Duncan. The breaking and non-breaking wave resistance of a two-dimensional hydrofoil. *Journal of Fluid Mechanics*, 126:507–520, 1983.
- Rafael C Gonzalez. P. wintz digital image processing. *Addision-Wesley Publishing Company*, pages 275–281, 1987.
- H Huang, D Dabiri, and Morteza Gharib. On errors of digital particle image velocimetry. *Measurement Science and Technology*, 8(12):1427, 1997.
- J Leandro, R Carvalho, Y Chachereau, and H Chanson. Estimating void fraction in a hydraulic jump by measurements of pixel intensity. *Experiments in fluids*, 52(5):1307–1318, 2012.
- Minnan Liu, David Z Zhu, and N Rajaratnam. Evaluation of adv measurements in bubbly two-phase flows. In *Hydraulic Measurements and Experimental Methods 2002*, pages 1–10, 2002.
- Carlos Martínez-Bazán, JL Montanes, and Juan C Lasheras. On the breakup of an air bubble injected into a fully developed turbulent flow. part 1. breakup frequency. *Journal of Fluid Mechanics*, 401:157–182, 1999.
- Stuart J McLelland and Andrew P Nicholas. A new method for evaluating errors in high-frequency adv measurements. *Hydrological processes*, 14(2):351–366, 2000.

- F Murzyn, D Mouaze, and JR Chaplin. Optical fibre probe measurements of bubbly flow in hydraulic jumps. *International Journal of Multiphase Flow*, 31(1):141–154, 2005.
- Rangaswami Narayanan. Wall jet analogy to hydraulic jump. *Journal of the Hydraulics Division*, 101(3):347–359, 1975.
- Bernd Ofner. Phase doppler anemometry (pda). In *Optical Measurements*, pages 139–152. Springer, 2001.
- DH Peregrine and IA Svendsen. Spilling breakers, bores, and hydraulic jumps. In *Coastal Engineering 1978*, pages 540–550. 1978.
- Stephen M Pizer, E Philip Amburn, John D Austin, Robert Cromartie, Ari Geselowitz, Trey Greer, Bart ter Haar Romeny, John B Zimmerman, and Karel Zuiderveld. Adaptive histogram equalization and its variations. *Computer vision, graphics, and image processing*, 39(3):355–368, 1987.
- Markus Raffel, Christian E Willert, Jürgen Kompenhans, et al. *Particle image velocimetry: a practical guide*. Springer Science & Business Media, 2007.
- Nallamuthu Rajaratnam. The hydraulic jump as a well jet. *Journal of the Hydraulics Division*, 91(5):107–132, 1965.
- Javier Rodríguez-Rodríguez, Carolina Marugán-Cruz, Alberto Aliseda, and Juan Carlos Lasheras. Dynamics of large turbulent structures in a steady breaker. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 35(2):301–310, 2011.
- J.C. Rotta. *Die Aerodynamische Versuchsanstalt in Göttingen, ein Werk Ludwig Prandtls: ihre Geschichte von den Anfängen bis 1925*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1990. ISBN 9783525428085. URL <https://books.google.es/books?id=24kgAQAAIAAJ>.
- A Sevilla, JM Gordillo, and C Martínez-Bazán. Transition from bubbling to jetting in a coaxial air–water jet. *Physics of Fluids*, 17(1):018105, 2005.
- Uri Shavit, Ryan J Lowe, and Jonah V Steinbuck. Intensity capping: a simple method to improve cross-correlation piv results. *Experiments in Fluids*, 42(2):225–240, 2007.

- Eize J Stamhuis. Basics and principles of particle image velocimetry (piv) for mapping biogenic and biologically relevant flows. *Aquatic Ecology*, 40(4):463–479, 2006.
- IB A Svendsen, J Veeramony, J Bakunin, and JT Kirby. The flow in weak turbulent hydraulic jumps. *Journal of fluid Mechanics*, 418:25–57, 2000.
- William Thielicke. The flapping flight of birds - analysis and application. phd thesis. *Diss. University of Groningen*, 2014. URL <http://irs.ub.rug.nl/ppn/382783069>.
- William Thielicke and Eize Stamhuis. PIVlab Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB. 3 2015. doi: phv10.6084/m9.figshare.1092508.v6. URL https://figshare.com/articles/PIVlab_version_1_35/1092508.
- George Voulgaris and John H Trowbridge. Evaluation of the acoustic doppler velocimeter (adv) for turbulence measurements. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 15(1):272–289, 1998.
- Tricia A Waniewski, Christopher Hunter, and Christopher E Brennen. Bubble measurements downstream of hydraulic jumps. *International journal of multiphase flow*, 27(7):1271–1284, 2001.
- Jerry Westerweel and Fulvio Scarano. Universal outlier detection for piv data. *Experiments in fluids*, 39(6):1096–1100, 2005.
- Adam Witt, John Gulliver, and Lian Shen. Bubble visualization in a simulated hydraulic jump. *arXiv preprint arXiv:1310.2635*, 2013.

7 Anexo: scripts de MATLAB® usados para obtener concentración de aire

7.1 principal.m

```
1 clear all; tic;
2 % DATOS DE ENTRADA
3
4 % Directorio donde se ubican los ficheros de la sonda
   optica y la carpeta "PIVlab"
5 directorio='E:\Hydraulic Jump\Froude_number_2.56_v2\Aug 26
   HJ Experiments\Optical_Probe_26_08_14\Position_4';
6 % Coeficiente de calibracion espacial (px/mm)
7 cce=4;
8 % Dimension en px de la imagen: timy (alto), timx (largo)
9 timy=1024;
10 timx=1392;
11
12 % FIN DE DATOS DE ENTRADA
13
14 % CALCULOS
15
16 dy=timy/cce;
17 dx=timx/cce;
18 [y1,xp,yp,ysvector,xs]=posicionessonda(directorio);
19 cont=1;
20 for i=1:length(ysvector)
21
22     nombrearchivo=strcat('probe_',num2str(ysvector(i)),'.
        txt');
23     [t,s1,s2] = leedatos(directorio,nombrearchivo);
24
```

```
25     xs0=xs/1e3; ys0=(ysvector(i)+dy-yp-y1)/1e3;
26     directoriov2=strcat(directorio, '\PIVlab\ ', num2str(
        ysvector(i)));
27
28     vsflujo = calculavflujo(xs0,ys0,directoriov2);
29     vflujo=mean(vsflujo);
30
31     tiempoburbuja = calculatb(t,s1,s2,vflujo);
32     tiempototal=t(end);
33     tb_tt1(i)=tiempoburbuja(1)/tiempototal;
34     tb_tt2(i)=tiempoburbuja(2)/tiempototal;
35
36     % Se limpian las variables
37     clear tiempoburbuja
38     clear tiempototal
39
40     % Se muestra por consola el archivo que se acaba de
        analizar
41     disp(['Calculado el archivo "', strcat(nombreakivo), '"
        '])
42 end
43
44 % GUARDAMOS VALORES OBTENIDOS
45
46 % Se guarda en un fichero los datos de concentracion de
        aire
47 % correspondientes a la posicion xs
48
49 save(strcat(directorio, '\tb_tt1.mat'), 'tb_tt1');
50 save(strcat(directorio, '\tb_tt2.mat'), 'tb_tt2');
51 save(strcat(directorio, '\ysvector.mat'), 'ysvector');
52 save(strcat(directorio, '\xs.mat'), 'xs');
```

53

54 `% Se muestra por consola el tiempo de procesamiento`55 `tprograma=toc;`56 `disp(['Tiempo de calculo: ',num2str(tprograma/60),' min. '])`

7.2 posicionessonda.m

```
1  function [y1,xp,yp,ysvector,xs] = posicionessonda(  
    directorio)  
2  
3  % Funcion que devuelve las posiciones de la sonda y de la  
    punta del resalto  
4  % a partir de un archivo directorio especificado. Cada  
    directorio es  
5  % singular y se indexa en un archivo de datos de los  
    experimentos  
6  % realizados (datos.txt)  
7  
8  fid=fopen('data.txt','r'); % Este archivo es inamovible  
9  if fid>0  
10     %Fr,y0,y1,y2,yg,u0,u2,x,y,folderlocation , xp, yp, xs  
11     dataf=textscan(fid,'%f%f%f%f%f%f%f%f%s%s%f%f%f','  
        Delimiter',' ',' ','Headerlines',2);  
12     fclose(fid);  
13 else  
14     disp('El directorio no se encuentra indexado. ')  
15 end  
16  
17 [~,datafsize]=size(dataf);  
18 dataf{datafsize+1}(:)=[];  
19  
20 for i=1:length(dataf{1})  
21     if strcmp(char(dataf{10}(i)),directorio)==1  
22         y1=dataf{3}(i); % Altura aguas arriba del resalto  
23         xp=dataf{11}(i); % Posicion horizontal de la punta  
            del resalto  
24         yp=dataf{12}(i); % Posicion vertical de la punta  
            del resalto
```

```
25         ysvector=str2num(cell2mat(dataf{9}(i))); % Vector
           de posiciones verticales de la sonda optica
26         xs=dataf{13}(i); % Posicion horizontal de la sonda
           optica
27     end
28 end
29 end
```

7.3 leedatos.m

```
1 function [t,s1,s2] = leedatos(directorio,nombrearchivo)
2 % Funcion que proporciona los vectores tiempo, sen_al 1 y 2
   de la sonda a
3 % partir de un archivo de entrada.
4
5 archivo=strcat(directorio,'\ ',nombrearchivo);
6 if exist(archivo)==2
7     comma2point(archivo);
8     m=importdata(archivo);
9     t=m(:,1);
10    s1=m(:,2);
11    s2=m(:,3);
12 else
13     disp(['El archivo "', strcat(archivo), '" no existe.'])
14 end
15
16 end
```

7.4 calculavflujo.m

```
1  function vsflujo = calculavflujo(xs0,ys0,directorioV2)
2
3  D = dir(directorioV2);
4  % Se calcula el numero de archivos que contiene el
   directorio
5  Narchivos = length(D(not([D.isdir])));
6  vsflujo=[];
7  cont=1;
8
9  % Se realiza un recorrido por todos los archivos del PIVlab
   que se han
10 % exportado para posteriormente calcular la velocidad del
   flujo
11 for N=1:Narchivos
12
13     if N<10
14         archivo=strcat(directorioV2,['\PIVlab_000',num2str(
           N),'.txt']);
15     elseif N<100 && N>9
16         archivo=strcat(directorioV2,['\PIVlab_00',num2str(N
           ),'.txt']);
17     elseif N<1000 && N>99
18         archivo=strcat(directorioV2,['\PIVlab_0',num2str(N)
           ,'.txt']);
19     elseif N<10000 && N>999
20         archivo=strcat(directorioV2,['\PIVlab_',num2str(N),
           '.txt']);
21     end
22
23     fid=fopen(archivo,'r'); % este archivo es inamovible!
24     if fid>0
```

```
25         m=textscan(fid, '%f%f%f%f%f', 'Delimiter', ',', 'Headerlines', 3);
26         fclose(fid);
27     else
28         disp('El directorio no se encuentra indexado. ')
29     end
30
31     x=m{1};
32     y=m{2};
33     u=m{3};
34
35     % Ajuste de coordenadas:
36     x=x-min(x); y=y-min(y);
37     % Obtencion de la velocidad donde se ubica la sonda optica
38     vs=abs(u(x>0.9*xs0 & x<1.1*xs0 & y>0.95*ys0 & y<1.05*ys0));
39     if ~isempty(vs)
40         vsflujo(cont)=max(vs);
41         cont=cont+1;
42     end
43
44     clear m
45     clear x
46     clear y
47     clear u
48
49 end
50 end
```

7.5 calculatb.m

```
1  function [tiempoburbuja,tiempototal] = calculatb(t,s1,s2,
    vflujo)
2
3  % Funcion que calcula el tiempo de residencia de las
    burbujas en las
4  % senales 1 y 2 proporcionadas por la sonda a partir de los
    vectores de
5  % tiempo de ensayo (t), valores de la senal 1 (s1) y de los
    valores de la
6  % senal 2 (s2)
7
8  posicion=1;
9  tiempoburbuja=[0 0];
10 % Limite de voltios de la senal de la sonda a partir del
    cual consideramos
11 % que pasa una burbuja:
12 voltioslimiteburbuja=-7;
13
14 % Filtro aplicado a las senales:
15 voltiosfiltroruido=-7.05;
16 s1(s1<voltiosfiltroruido)=voltiosfiltroruido;
17 s2(s2<voltiosfiltroruido)=voltiosfiltroruido;
18
19 % Parametros para usar el metodo de la pendiente
20 tA=t(1:end-1); s1A=s1(1:end-1); s2A=s2(1:end-1);
21 tB=t(2:end); s1B=s1(2:end); s2B=s2(2:end);
22
23 % Pendiente (V/s) de las senales 1 y 2.
24 ps1=(s1B-s1A)./(tB-tA);
25 ps2=(s2B-s2A)./(tB-tA);
26
```

```
27 % Parametros para establecer un limite entre pulso de la
    luz estroboscopica
28 % o de un paso por burbuja:
29
30 dsensor=0.5e-3; % diametro del sensor
31
32 limitependiente1=2*(max(s1)-voltiosfiltroruido)*vflujo/
    dsensor;
33 limitependiente2=2*(max(s2)-voltiosfiltroruido)*vflujo/
    dsensor;
34
35 while posicion<length(s1)
36
37     if s1(posicion)>voltioslimiteburbuja && ps1(posicion)<
        limitependiente1
38         posicionA=posicion-1;
39     end
40
41     if s1(posicion)<voltioslimiteburbuja && exist('
        posicionA','var')
42         posicionB=posicion;
43         tiempoburbuja(1)=tiempoburbuja(1)+t(posicionB)-
            t(posicionA);
44         clear posicionA
45         clear posicionB
46     end
47     posicion=posicion+1;
48 end
49
50 clear posicionA
51 clear posicionB
52 posicion=1;
```

```
53
54 while posicion<length(s2)
55     if s2(posicion)>voltioslimiteburbuja && ps2(posicion)<
        limitependiente2
56         posicionA=posicion-1;
57     end
58     if s2(posicion)<voltioslimiteburbuja && exist('
        posicionA','var')
59         posicionB=posicion;
60         tiempoburbuja(2)=tiempoburbuja(2)+t(posicionB)-
            t(posicionA);
61         clear posicionA
62         clear posicionB
63     end
64     posicion=posicion+1;
65 end
66
67 end
```

7.6 data.txt

```

1  1 mm = 4 px , 1 ur = 9.08 mm
2  Fr,y0,y1,y2,yg,u0,u2,x,y,directorio , x_p , y_p , x_s
3  1.9,255,90,215,147,0.682,0.79,182,155 170:5:190,F:\
    Hydraulic_Jump\Froude_number_1.9\Aug_29_HJ_Experiments\
    Optical_Probe_29_08_14\Position_1 , 299, 142, 117
4  1.9,255,90,215,147,0.682,0.79,227,155:10:185 190:5:215,F:\
    Hydraulic_Jump\Froude_number_1.9\Aug_29_HJ_Experiments\
    Optical_Probe_29_08_14\Position_2 , 283, 143, 23
5  1.9,255,90,215,147,0.682,0.79,272,160 170:5:185,F:\
    Hydraulic_Jump\Froude_number_1.9\Aug_29_HJ_Experiments\
    Optical_Probe_29_08_14\Position_3 , 261, 143, 70
6  2.56,258,60,190,101,0.473,0.68,158,115 120,F:\Hydraulic
    Jump\Froude_number_2.56_v1\Aug_21_HJ_Experiments\
    Optical_Probe_21_08_14\Position_2 , 451, 206, 301
7  2.56,255,61,185,101,0.485,0.7,205,120:10:160 165:5:190 200,
    F:\Hydraulic_Jump\Froude_number_2.56_v2\Aug_26_HJ
    Experiments\Optical_Probe_26_08_14\Position_5 , 515, 156,
    215
8  2.56,258,60,190,101,0.473,0.68,220,115:5:165,F:\Hydraulic
    Jump\Froude_number_2.56_v1\Aug_21_HJ_Experiments\
    Optical_Probe_21_08_14\Position_1 , 461, 203, 244
9  2.56,255,61,185,101,0.481,0.722,233,120:10:160 165:5:190,F
    :\Hydraulic_Jump\Froude_number_2.56_v2\Aug_25_HJ
    Experiments\Optical_Probe_25_08_14\Position_1 , 424, 166,
    174
10 2.56,258,60,190,101,0.473,0.68,261,120:5:150,F:\Hydraulic
    Jump\Froude_number_2.56_v1\Aug_21_HJ_Experiments\
    Optical_Probe_21_08_14\Position_3 , 421, 211, 200
11 2.56,255,61,185,101,0.481,0.722,284,120:10:170 175:5:190,F
    :\Hydraulic_Jump\Froude_number_2.56_v2\Aug_25_HJ
    Experiments\Optical_Probe_25_08_14\Position_2 , 425, 166,

```

124

- ¹² 2.56,255,60,190,101,0.47,0.67,331,105:10:165 170:5:190,F:\
Hydraulic_Jump\Froude_number_2.56_v1\Aug 20 HJ
Experiments\Optical_Probe_20_08_14, 353, 211, 20
- ¹³ 2.56,255,61,185,101,0.485,0.7,347,120:10:190 195 200,F:\
Hydraulic_Jump\Froude_number_2.56_v2\Aug 26 HJ
Experiments\Optical_Probe_26_08_14\Position_3, 458, 167,
72
- ¹⁴ 2.56,258,60,190,101,0.473,0.68,383,120:10:150 155:5:190,F:\
Hydraulic_Jump\Froude_number_2.56_v1\Aug 21 HJ
Experiments\Optical_Probe_21_08_14\Position_4, 422, 209,
78
- ¹⁵ 2.56,255,61,185,101,0.485,0.7,391,120:10:210,F:\ Hydraulic
Jump\Froude_number_2.56_v2\Aug 26 HJ Experiments\
Optical_Probe_26_08_14\Position_4, 473, 164, 31

8 Anexo: Tablas para obtención de x_p , y_p y x_s

Tabla I: Resumen

ID	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (mm)
Sonda_29_08_14 Posicion_1	299	142	117
Sonda_29_08_14 Posicion_2	283	143	23
Sonda_29_08_14 Posicion_3	261	143	70
Sonda_21_08_14 Posicion_2	451	206	301
Sonda_26_08_14 Posicion_5	515	156	215
Sonda_21_08_14 Posicion_1	461	203	244
Sonda_25_08_14 Posicion_1	424	166	174
Sonda_21_08_14 Posicion_3	421	211	200
Sonda_25_08_14 Posicion_2	425	166	124
Sonda_20_08_14	353	211	20
Sonda_26_08_14 Posicion_3	458	167	72
Sonda_21_08_14 Posicion_4	422	209	78
Sonda_26_08_14 Posicion_4	473	164	31

Tabla II: Sonda_29_08_14 Posicion_1

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
155	1142	596	286	149	470	118
155	1310	569	328	142	464	116
155	1214	583	304	146	473	118
160	1208	582	302	146	466	117
160	1252	569	313	142	467	117
160	1382	551	346	138	466	117
165	1065	571	266	143	465	116
165	1165	576	291	144	466	117
165	1233	575	308	144	465	116
170	1405	541	351	135	468	117
170	1294	540	324	135	469	117
170	1300	558	325	140	468	117
175	1186	579	297	145	467	117
175	1264	572	316	143	468	117
175	1210	578	303	145	469	117
180	1137	568	284	142	470	118
180	978	575	245	144	468	117
180	1232	576	308	144	468	117
185	1221	572	305	143	466	117
185	997	576	249	144	466	117
185	993	577	248	144	464	116
190	1279	568	320	142	471	118
190	1201	555	300	139	464	116
190	992	568	248	142	465	116

Tabla III: Sonda_29_08_14 Posicion_2

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
155	1370	571	343	143	92	23
155	996	580	249	145	91	22,75
155	1122	577	281	144	93	23,25
165	1123	578	281	145	95	23,75
165	1196	577	299	144	91	22,75
165	1154	580	289	145	90	22,5
175	1132	571	283	143	94	23,5
175	1198	573	300	143	89	22,25
175	1132	572	283	143	90	22,5
185	1092	581	273	145	95	23,75
185	1200	556	300	139	95	23,75
185	991	566	248	142	92	23
190	1233	565	308	141	94	23,5
190	1091	574	273	144	95	23,75
190	1065	575	266	144	97	24,25
195	1138	566	285	142	93	23,25
195	1016	576	254	144	95	23,75
195	1225	581	306	145	92	23
200	1010	575	253	144	94	23,5
200	1199	570	300	143	94	23,5
200	971	578	243	145	94	23,5
205	1178	576	295	144	93	23,25
205	1169	575	292	144	93	23,25
205	1227	566	307	142	93	23,25
210	1028	576	257	144	87	21,75
210	987	562	247	141	90	22,5
210	1157	577	289	144	89	22,25
215	1183	582	296	146	89	22,25
215	1119	583	280	146	88	22
215	1292	560	323	140	87	21,75

Tabla IV: Sonda_29_08_14 Posicion_3

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
160	941	575	235	144	278	69,5
160	1071	568	268	142	280	70
160	1070	579	268	145	278	69,5
170	996	569	249	142	279	69,75
170	1138	571	285	143	278	69,5
170	1099	571	275	143	280	70
175	880	579	220	145	281	70,25
175	1068	567	267	142	280	70
175	1009	572	252	143	279	69,75
180	978	571	245	143	281	70,25
180	985	564	246	141	280	70
180	989	571	247	143	282	70,5
185	1246	555	312	139	279	69,75
185	1006	581	252	145	276	69
185	1174	577	294	144	277	69,25

Tabla V: Sonda_21_08_14 Posicion_2

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
115	1886	808	472	202	1211	302,75
115	1995	813	499	203	1206	301,5
115	1773	863	443	216	1207	301,75
120	1773	831	443	208	1207	301,75
120	1737	813	434	203	1199	299,75
120	1665	825	416	206	1198	299,5

Tabla VI: Sonda_26_08_14 Posicion_5

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	2157	687	539	172	864	216
120	2097	621	524	155	866	216,5
120	1943	685	486	171	867	216,75
130	2017	627	504	157	862	215,5
130	2225	615	556	154	864	216
130	2293	579	573	145	864	216
140	1793	645	448	161	863	215,75
140	2117	689	529	172	862	215,5
140	2263	649	566	162	859	214,75
150	2007	633	502	158	860	215
150	1879	645	470	161	861	215,25
150	1997	627	499	157	866	216,5
160	2287	589	572	147	861	215,25
160	1871	609	468	152	859	214,75
160	1831	591	458	148	863	215,75
165	1935	659	484	165	861	215,25
165	2129	623	532	156	862	215,5
165	1939	611	485	153	861	215,25
170	1963	653	491	163	861	215,25
170	2271	629	568	157	858	214,5
170	2127	603	532	151	858	214,5
175	2311	613	578	153	858	214,5
175	2305	625	576	156	860	215
175	2289	639	572	160	859	214,75
180	2149	655	537	164	859	214,75
180	2003	567	501	142	861	215,25
180	1813	561	453	140	861	215,25
continuación						

Tabla VII: Sonda_26_08_14 Posicion_5 (continuación)

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
185	1901	599	475	150	859	214,75
185	1943	617	486	154	858	214,5
185	2059	579	515	145	860	215
190	2263	667	566	167	857	214,25
190	2105	637	526	159	857	214,25
190	1847	635	462	159	859	214,75
200	1951	585	488	146	855	213,75
200	1903	625	476	156	858	214,5
200	2195	643	549	161	856	214

Tabla VIII: Sonda_21_08_14 Posicion_1

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
115	1801	791	450	198	966	241,5
115	2023	837	506	209	966	241,5
115	1903	823	476	206	975	243,75
120	1901	835	475	209	975	243,75
120	1669	821	417	205	979	244,75
120	1711	841	428	210	978	244,5
125	1933	827	483	207	975	243,75
125	1875	799	469	200	981	245,25
125	1933	759	483	190	977	244,25
130	1769	787	442	197	977	244,25
130	1745	819	436	205	978	244,5
130	1707	813	427	203	974	243,5
135	2207	795	552	199	978	244,5
135	2013	765	503	191	974	243,5
135	1901	791	475	198	974	243,5
continuación						

Tabla IX: Sonda_21_08_14 Posicion_1 (continuación)

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
140	1803	819	451	205	979	244,75
140	1749	797	437	199	972	243
140	1693	811	423	203	971	242,75
145	1653	823	413	206	973	243,25
145	1879	819	470	205	973	243,25
145	1837	805	459	201	969	242,25
150	2021	781	505	195	977	244,25
150	1951	831	488	208	974	243,5
150	1809	811	452	203	970	242,5
155	1767	805	442	201	970	242,5
155	1737	863	434	216	970	242,5
155	1571	829	393	207	970	242,5
160	1721	825	430	206	970	242,5
160	1969	811	492	203	970	242,5
160	1835	789	459	197	970	242,5
165	1799	833	450	208	970	242,5
165	1959	855	490	214	970	242,5
165	2019	831	505	208	970	242,5

Tabla X: Sonda_25_08_14 Posicion_1

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	1619	673	405	168	701	175,25
120	1701	651	425	163	696	174
120	1705	653	426	163	696	174
130	1635	657	409	164	698	174,5
130	1741	661	435	165	700	175
130	1777	657	444	164	699	174,75
140	1649	657	412	164	696	174
140	1785	655	446	164	699	174,75
140	1701	651	425	163	698	174,5
150	1751	663	438	166	697	174,25
150	1757	651	439	163	699	174,75
150	1563	679	391	170	698	174,5
160	1623	685	406	171	696	174
160	1729	647	432	162	697	174,25
160	1627	653	407	163	694	173,5
165	1669	679	417	170	696	174
165	1657	667	414	167	699	174,75
165	1783	611	446	153	696	174
170	1641	657	410	164	694	173,5
170	1699	661	425	165	696	174
170	1663	677	416	169	694	173,5
175	1773	655	443	164	695	173,75
175	1787	627	447	157	694	173,5
175	1769	657	442	164	695	173,75
continuación						

Tabla XI: Sonda_25_08_14 Posicion_1 (continuación)

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
180	1535	673	384	168	695	173,75
180	1627	675	407	169	694	173,5
180	1659	671	415	168	694	173,5
185	1767	669	442	167	694	173,5
185	1847	685	462	171	695	173,75
185	1695	669	424	167	694	173,5
190	1653	685	413	171	696	174
190	1713	649	428	162	695	173,75
190	1615	699	404	175	693	173,25

Tabla XII: Sonda_21_08_14 Posicion_3

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	1817	835	454	209	798	199,5
120	1737	863	434	216	799	199,75
120	1601	827	400	207	802	200,5
125	1773	849	443	212	802	200,5
125	1789	833	447	208	802	200,5
125	1949	825	487	206	801	200,25
130	1731	847	433	212	798	199,5
130	1591	847	398	212	799	199,75
130	1444	850	361	213	798	199,5
135	1613	827	403	207	799	199,75
135	1781	837	445	209	801	200,25
135	1735	831	434	208	801	200,25
140	1741	863	435	216	797	199,25
140	1763	823	441	206	797	199,25
140	1619	849	405	212	797	199,25
145	1607	843	402	211	794	198,5
145	1609	847	402	212	795	198,75
145	1774	845	444	211	795	198,75
150	1585	858	396	215	793	198,25
150	1531	850	383	213	795	198,75
150	1585	856	396	214	795	198,75

Tabla XIII: Sonda_25.08.14 Posicion_2

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	1735	635	434	159	492	123
120	1726	690	432	173	492	123
120	1617	665	404	166	492	123
130	1719	651	430	163	493	123,25
130	1865	631	466	158	495	123,75
130	1608	659	402	165	494	123,5
140	1680	672	420	168	494	123,5
140	1835	655	459	164	495	123,75
140	1615	661	404	165	493	123,25
150	1632	681	408	170	498	124,5
150	1749	672	437	168	495	123,75
150	1690	664	423	166	496	124
160	1595	690	399	173	492	123
160	1756	664	439	166	496	124
160	1675	685	419	171	494	123,5
170	1550	649	388	162	497	124,25
170	1717	665	429	166	496	124
170	1563	669	391	167	495	123,75
175	1590	679	398	170	494	123,5
175	1671	675	418	169	495	123,75
175	1555	641	389	160	497	124,25
180	1601	679	400	170	495	123,75
180	1630	675	408	169	493	123,25
180	1826	678	457	170	494	123,5
185	1867	653	467	163	496	124
185	2265	637	566	159	497	124,25
185	1790	674	448	169	497	124,25
190	1460	684	365	171	496	124
190	1508	670	377	168	497	124,25
190	1888	640	472	160	494	123,5

Tabla XIV: Sonda_20_08_14

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
105	1488	830	372	208	98	24,5
105	1545	840	386	210	100	25
105	1486	798	372	200	99	24,75
115	1374	856	344	214	92	23
115	1451	832	363	208	92	23
115	1332	847	333	212	92	23
125	1433	838	358	210	83	20,75
125	1332	846	333	212	84	21
125	1316	851	329	213	82	20,5
135	1570	829	393	207	82	20,5
135	1441	837	360	209	84	21
135	1376	848	344	212	82	20,5
145	1594	799	399	200	83	20,75
145	1461	848	365	212	82	20,5
145	1269	849	317	212	85	21,25
155	1334	840	334	210	82	20,5
155	1270	857	318	214	82	20,5
155	1383	852	346	213	81	20,25
165	1351	858	338	215	95	23,75
165	1455	848	364	212	95	23,75
165	1385	846	346	212	90	22,5
170	1361	847	340	212	69	17,25
170	1319	850	330	213	65	16,25
170	1331	852	333	213	68	17
175	1523	856	381	214	81	20,25
continuación						

Tabla XV: Sonda_20_08_14 (continuación)

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
175	1523	856	381	214	81	20,25
175	1330	849	333	212	78	19,5
175	1331	848	333	212	82	20,5
180	1458	845	365	211	84	21
180	1319	850	330	213	83	20,75
180	1274	852	319	213	82	20,5
185	1452	847	363	212	69	17,25
185	1486	827	372	207	68	17
185	1521	843	380	211	70	17,5
190	1596	842	399	211	68	17
190	1413	849	353	212	67	16,75
190	1460	848	365	212	67	16,75

Tabla XVI: Sonda_26.08.14 Posicion_3

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	1683	675	421	169	286	71,5
120	1829	695	457	174	285	71,25
120	1769	669	442	167	288	72
130	1931	649	483	162	289	72,25
130	1791	649	448	162	287	71,75
130	1905	681	476	170	286	71,5
140	1911	683	478	171	288	72
140	1773	697	443	174	287	71,75
140	1723	667	431	167	287	71,75
150	1839	687	460	172	288	72
150	2011	671	503	168	287	71,75
150	1727	685	432	171	288	72
160	1899	689	475	172	289	72,25
160	1809	689	452	172	289	72,25
160	1885	649	471	162	290	72,5
170	1757	693	439	173	288	72
170	1883	645	471	161	289	72,25
170	1879	635	470	159	288	72
180	1819	667	455	167	288	72
180	1929	655	482	164	288	72
180	1883	649	471	162	289	72,25
190	1725	633	431	158	290	72,5
190	1939	663	485	166	290	72,5
190	1735	689	434	172	290	72,5
195	1951	717	488	179	291	72,75
195	1843	641	461	160	293	73,25
195	1769	637	442	159	292	73
200	1885	663	471	166	295	73,75
200	1731	663	433	166	296	74
200	1779	683	445	171	290	72,5

Tabla XVII: Sonda_21_08_14 Posicion_4

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	1531	858	383	215	312	78
120	1862	818	466	205	313	78,25
120	2029	779	507	195	316	79
130	1523	840	381	210	316	79
130	1863	810	466	203	315	78,75
130	1857	826	464	207	315	78,75
140	1521	851	380	213	317	79,25
140	1558	834	390	209	316	79
140	1547	826	387	207	314	78,5
150	1534	839	384	210	315	78,75
150	1755	858	439	215	316	79
150	1588	829	397	207	316	79
155	1551	824	388	206	315	78,75
155	1663	856	416	214	311	77,75
155	1520	843	380	211	313	78,25
160	1790	853	448	213	312	78
160	1771	858	443	215	312	78
160	1382	856	346	214	311	77,75
165	1635	848	409	212	310	77,5
165	1517	846	379	212	310	77,5
165	1694	857	424	214	310	77,5
170	1579	836	395	209	309	77,25
170	1535	860	384	215	307	76,75
170	1548	847	387	212	309	77,25
175	1536	842	384	211	309	77,25
175	1880	833	470	208	311	77,75
175	1746	854	437	214	308	77
continuación						

Tabla XVIII: Sonda_21_08_14 Posicion_4 (continuación)

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
180	1884	828	471	207	308	77
180	1581	832	395	208	311	77,75
180	1758	833	440	208	308	77
185	1759	846	440	212	312	78
185	1580	835	395	209	310	77,5
185	1761	821	440	205	312	78
190	1886	809	472	202	309	77,25
190	2287	835	572	209	310	77,5
190	1769	773	442	193	309	77,25

Tabla XIX: Sonda_26.08.14 Posicion_4

y_s (mm)	x_p (px)	y_p (px)	x_p (mm)	y_p (mm)	x_s (px)	x_s (mm)
120	1983	599	496	150	120	30
120	2005	671	501	168	129	32,25
120	2007	709	502	177	125	31,25
130	1957	687	489	172	125	31,25
130	2025	621	506	155	123	30,75
130	1797	623	449	156	124	31
140	2073	659	518	165	125	31,25
140	1927	627	482	157	121	30,25
140	1891	645	473	161	124	31
150	1917	671	479	168	121	30,25
150	1983	637	496	159	123	30,75
150	1901	651	475	163	123	30,75
160	1889	705	472	176	122	30,5
160	1799	649	450	162	124	31
160	2007	645	502	161	125	31,25
170	1821	627	455	157	120	30
170	1673	655	418	164	127	31,75
170	1717	677	429	169	122	30,5
180	1713	635	428	159	130	32,5
180	1827	637	457	159	121	30,25
180	1875	661	469	165	123	30,75
190	1859	671	465	168	124	31
190	1853	665	463	166	121	30,25
190	1881	643	470	161	122	30,5
200	2079	667	520	167	118	29,5
200	1703	659	426	165	118	29,5
200	2065	683	516	171	121	30,25
210	1875	657	469	164	126	31,5
210	1929	687	482	172	125	31,25
210	1725	659	431	165	122	30,5