



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA ENFOCADA A LA TRANSMISIÓN, COMPRENSIÓN Y AFIANZAMIENTO DEL CONCEPTO DE DERIVADA

Alumno: Martín Mingorance, Juan Carlos

Tutor: Prof. D. Francisco de Paula Roca Rodríguez

Dpto.: Departamento de Matemáticas

Cotutor: Prof. D. Antonio Jesús López Montoya

Dpto.: Departamento de Estadística e Investigación
Operativa

Junio, 2020

Índice

1.	Introducción.....	6
2.	Objetivos.....	7
3.	Fundamentación didáctica.....	8
3.1	Conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas	8
3.1.1	Conocimiento didáctico-matemático enfocado a la derivada	16
3.2	Comprensión del concepto de derivada por parte del alumnado	19
3.3	Metodologías de enseñanza	27
3.3.1	Aprendizaje basado en investigación/indagación (IBL).....	28
3.3.2	Modelización matemática	30
3.4	Uso de nuevas tecnologías.....	32
4.	Fundamentación epistemológica	34
4.1	Concepto de derivada de una función en un punto	35
4.1.1	Definición.....	35
4.1.2	Condición de derivabilidad:.....	36
4.1.3	Interpretación geométrica.....	36
4.2	Relación entre derivabilidad y continuidad	39
4.2.1	Derivabilidad \rightarrow Continuidad.....	40
4.2.2	Continuidad \rightarrow Derivabilidad.....	40
4.3	Función derivada	40
4.4	Álgebra de derivadas.....	40
4.5	Regla de la cadena.....	41
4.6	Derivada de la función inversa	41
4.7	Derivadas de funciones elementales	42
4.8	Derivadas sucesivas.....	44
4.8.1	Definición.....	44
4.8.2	Fórmula de Leibniz.....	44
4.9	Aplicaciones de la derivada	44
4.9.1	Aplicaciones en matemáticas	45
4.9.2	Aplicaciones en física e ingeniería	47

5.	Fundamentación curricular.....	49
5.1	Comparación de contenidos mínimos.....	52
	Derivada de una función en un punto.....	52
	Interpretación geométrica. Recta tangente.....	52
	Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.....	53
	Representación gráfica de funciones.....	54
5.2	Análisis de los contenidos ampliados.....	55
5.3	Conclusiones.....	57
6.	Proyección didáctica.....	58
6.1	Título.....	58
6.2	Justificación.....	58
6.3	Contextualización del centro y del aula.....	60
6.4	Objetivos.....	61
6.4.1	Objetivos de etapa.....	61
6.4.2	Objetivos de área.....	62
6.4.3	Objetivos de la unidad.....	63
6.5	Competencias clave.....	64
6.5.1	Relación de las competencias clave con los objetivos de la unidad ..	67
6.6	Contenidos.....	68
6.7	Metodología.....	68
6.8	Actividades y recursos.....	73
6.9	Atención a la diversidad.....	75
6.10	Temporalización.....	76
	SESIÓN 1 – INDAGACIÓN EN EL CONCEPTO DE DERIVADA.....	77
	SESIÓN 2 – DEFINICIÓN DE DERIVADA.....	78
	SESIÓN 3 – ÁLGEBRA DE DERIVADAS.....	80
	SESIÓN 4 – INDAGACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.....	81
	SESIÓN 5 – RECTA TANGENTE Y NORMAL Y TASA DE VARIACIÓN.....	83
	SESIÓN 6 – REGLA DE LA CADENA. FUNCIONES EXP., LOG. Y TRIG.....	84
	SESIÓN 7 – GEOGEBRA.....	85
	SESIÓN 8 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES (I).....	86

SESIÓN 9 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES (I).....	87
SESIÓN 10 – PROBLEMAS APLICADOS DE OPTIMIZACIÓN	88
SESIÓN 11 – REPASO PREVIO AL EXAMEN.....	89
SESIÓN 12 - EXAMEN	90
6.11 Evaluación.....	90
6.11.1 Criterios de evaluación	91
6.11.2 Estándares de aprendizaje.....	91
6.11.3 Procedimientos e instrumentos empleados en la evaluación	92
7. Conclusiones	93
8. Bibliografía	96
ANEXO I – ACTIVIDADES.....	99
ANEXO II – ACTIVIDADES ESPECIALES DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.....	132
ACTIVIDADES DE REFUERZO	132
ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN	134
ANEXO III – DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS.....	134
DEMOSTRACIÓN 4.2.1.....	135
DEMOSTRACIÓN 4.2.2.....	136
DEMOSTRACIÓN 4.4.1.....	137
DEMOSTRACIÓN 4.5.1.....	138
DEMOSTRACIÓN 4.6.1.....	139
DEMOSTRACIÓN 4.7.1.....	140
DEMOSTRACIÓN 4.8.1.....	143

Resumen

El desarrollo de este proyecto tiene como objetivo finalizar la formación del autor como futuro docente en el área de las matemáticas y consolidar y aplicar los conocimientos adquiridos durante el transcurso del año académico. Para ello, se atienden las distintas necesidades del alumnado en relación a la adquisición de los conocimientos relacionados con la derivada. Adicionalmente, se diseñan unos métodos de enseñanza y aprendizaje orientados hacia la comprensión del concepto de derivada mediante una actitud activa y participativa en el proceso de aprendizaje.

El núcleo central del proyecto consiste en la elaboración de una unidad didáctica correspondiente al tema de la derivada en la asignatura de Matemáticas I del curso 1º de Bachillerato. El desarrollo de esta unidad didáctica se fundamentará en el análisis del currículo y la comparación del contenido incluido en varios libros de texto, el desarrollo de un tema de oposiciones con alto rigor matemático y el análisis de investigaciones relacionadas en el ámbito de didáctica de la matemática.

Palabras clave: Aplicación de problemas, aprendizaje, concepto de derivada, derivada, indagación, matemáticas, unidad didáctica.

Abstract

The development of this project aims to complete the author's training process as a future teacher in the area of mathematics and to consolidate and apply the knowledge acquired throughout the academic year. For this reason, a study is carried out in order to understand the different needs of the students in relation to the acquisition of knowledge related to the field of the derivative of a function. Additionally, some teaching and learning methods focused on the understanding of the concept of the derivative by students will be designed, promoting an active and participatory attitude in the learning process.

The goal of the project consists of the elaboration of a didactic unit corresponding to the topic of derivatives in the subject of Mathematics I of the 1st year of Baccalaureate. The development of this didactic unit will be based on the analysis of the curriculum and the comparison of the content included in several textbooks, the development of an opposition exam subject with high mathematical rigor and the analysis of related research in the field of didactics of mathematics.

Keywords: Derivative, derivative concept, didactic unit, inquiry, learning, mathematics, problems application.

1. Introducción

Uno de los principales motivos de este proyecto se basa en la aplicación e integración de todos los conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo del transcurso del año académico como estudiante del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de Jaén.

Se pretende poner en práctica todos estos conocimientos adquiridos mediante la elaboración y programación de una unidad didáctica. Esta unidad didáctica se encuentra centrada en el tema de la derivada, y tiene como principal objetivo que el alumno adquiera las competencias matemáticas necesarias. Adicionalmente, se pretende fomentar la capacidad del alumnado a la hora de trabajar en equipo, trabajar de forma autónoma, poseer un gran espíritu emprendedor, así como un buen sentido de iniciativa.

La unidad didáctica desarrollada se encuentra fundamentada en tres bloques principales. En primer lugar, se realizará un análisis acerca de las investigaciones presentes en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, el cual permanecerá reflejado en la fundamentación didáctica. En segundo lugar, se procede a desarrollar un tema de oposiciones con alto rigor matemático, el cual sirve como base sólida de conocimientos para el docente (fundamentación epistemológica). Por último, se realizará un análisis del currículo correspondiente a la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato y se comparará el contenido incluido en libros de texto de diferente editorial, evaluando las distintas formas de abordar un mismo contenido (fundamentación curricular).

Las matemáticas y, en especial, las derivadas, juegan un papel muy importante para el desempeño de numerosas tareas en la sociedad actual. El comportamiento tanto de la naturaleza como del ser humano se rige en gran medida por la búsqueda de máximos y mínimos en diversos parámetros (costos, energía, esfuerzo, beneficios, etc.), por lo que la derivación es un recurso muy relevante que permite un acercamiento formal a la modelización y el estudio de estos fenómenos.

Últimamente se está haciendo evidente una tendencia por parte del alumnado en general a desinteresarse por las matemáticas, eligiendo carreras y trayectorias alejadas de la ciencia. Por este motivo, se pretende fomentar el interés del alumnado en este tema facilitando la comprensión y el entendimiento del contenido de una forma sencilla e intuitiva.

Uno de los principales enfoques de este trabajo es conseguir que los alumnos aprendan y afiancen con seguridad el verdadero concepto de la derivada, algo que no suele ocurrir hasta etapas posteriores del aprendizaje. No solo se pretende que

únicamente sepan aplicar la derivada de una función, sino que comprendan el porqué de sus acciones en el proceso y todo lo que hay detrás.

Para ello, el método principal girará en torno a presentar al alumnado la herramienta de la derivada como un recurso que les permitirá resolver una serie de problemas que hasta entonces no se les habían planteado. En matemáticas, al igual que ocurre en la mayoría de las disciplinas científicas, todos los avances y teoremas han surgido por parte del hombre como una respuesta ante un bloqueo, como una nueva vía que permite llegar al destino buscado, que en este caso no es más que la resolución de un nuevo problema. Esto último es, en muchas ocasiones, desconocido por el alumnado, el cual tiende a pensar que los recursos matemáticos no han sido una invención intencionada del hombre para resolver un problema, sino que “ya estaban ahí” y, a veces, pueden sentir que son estudiados sin ningún propósito.

Por ello, se enfocará este trabajo en llevar a los alumnos hacia nuevos problemas hasta antes no vistos mediante metodologías de indagación y exploración del contenido, provocando su bloqueo, generando así en ellos la necesidad de una nueva herramienta para la resolución de estos nuevos problemas y presentando el recurso de la derivada como la vía o el camino que les permitirá llegar a su objetivo. Todo esto, sumado a un enfoque aplicado de las matemáticas a la resolución de problemas de la vida cotidiana, permitirá conseguir que entiendan el motivo del estudio de la derivada de una función.

Todo esto conllevará el uso de metodologías innovadoras de aprendizaje que se expondrán en apartados posteriores del proyecto. De igual modo, se establecerán propuestas para el transcurso de la unidad didáctica a lo largo de 12 sesiones en las cuales se propondrán una serie de actividades que permitan que el alumno adquiera las competencias clave deseadas.

2. Objetivos

A continuación, se exponen los objetivos que se pretenden lograr mediante la realización del Trabajo Fin de Máster.

- Consolidar los conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo del año académico correspondiente al máster y ponerlos en práctica mediante el desarrollo de una unidad didáctica.
- Fundamentar la unidad didáctica mediante el análisis de los contenidos incluidos en el currículo de la asignatura.
- Desarrollar un tema correspondiente al temario de oposiciones de matemáticas con alto rigor matemático, siendo de utilidad en la

consolidación del conocimiento del contenido matemático por parte del docente.

- Analizar, investigar y explorar las aportaciones realizadas por la comunidad de investigadores en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.
- Analizar investigaciones en busca de los motivos que causan el rechazo o la falta de motivación de los alumnos hacia las matemáticas y el proceso de aprendizaje asociado.
- Estudiar técnicas que permitan que el alumnado comprenda el concepto de derivada en el momento académico en el que tiene lugar su primera toma de contacto con este objeto matemático.
- Establecer un plan de desarrollo de la unidad didáctica en el que queden detallados los objetivos de dicha unidad didáctica, las competencias clave que han de desarrollar los alumnos, los contenidos matemáticos a trabajar, la metodología empleada, la temporalización y organización del proceso de enseñanza distribuido en sesiones, la atención a la diversidad y el proceso de evaluación del alumnado.
- Aportar una base sólida de conocimientos en el alumno con respecto a la derivada, ya que se trata de un recurso que será muy empleado en etapas posteriores de aprendizaje.
- Conseguir establecer un método de enseñanza-aprendizaje donde los alumnos consigan apreciar la belleza de las matemáticas y sean capaces de aprender al mismo tiempo que disfrutan de la educación.

3. Fundamentación didáctica

3.1 Conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas

El término conocimiento didáctico-matemático se ha de entender o interpretar como el conocimiento que ha de tener un docente de modo que sea capaz de transmitir de forma correcta los conceptos matemáticos que han de adquirir los alumnos. Este apartado se centrará en estudiar y analizar las investigaciones disponibles en la actualidad en lo referente al conocimiento didáctico-matemático del profesor en el ámbito de las derivadas, así como desde un punto matemático más generalizado.

Pino-Fan (2014) afirma que la formación didáctica y matemática de los futuros profesores constituye un campo de investigación que desde hace décadas ha llamado la atención tanto de la comunidad de investigadores en el área de didáctica de las matemáticas como de las administraciones educativas. El principal motivo es que la

formación del profesorado influye en gran medida en el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas del alumnado.

Como resultado de esto, se puede observar en los últimos años un notable incremento en el número de investigaciones cuyo centro de estudio se basa en la determinación del conjunto de conocimientos matemáticos y didácticos que ha de poseer un profesor de matemáticas para el correcto desempeño de su labor como docente. En definitiva, son numerosas las investigaciones acerca de la formación idónea que debería tener un profesor de matemáticas.

Entre ellas, existen numerosos trabajos que tratan de configurar modelos que determinan los elementos necesarios dentro del conocimiento del profesor a fin de que realice la tarea de la enseñanza de una forma idónea.

Shulman (1986) comienza cuestionando de qué modo se encuentran las categorías del conocimiento presentes en la mente de los profesores, así como cuál es la relación existente entre el conocimiento del contenido que imparte el docente y el conocimiento pedagógico que trata sobre las habilidades necesarias para enseñar y transmitir dichos contenidos.

Por tanto, es necesario establecer un marco teórico sólido con respecto a esta cuestión, persiguiendo siempre el objetivo de mejorar la adquisición del conocimiento por parte del alumnado. De este modo, Shulman establece 3 categorías de conocimiento: ***conocimiento del contenido de la materia en cuestión, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular.***

Para Shulman (1986), el ***conocimiento del contenido*** es referido como “la cantidad y organización de conocimiento per se en la mente del profesor” (p. 9). Afirma que, para comprender este término de forma correcta es necesario pensar más allá del conocimiento de determinados hechos o conceptos. Es necesario comprender las estructuras del contenido divididas en dos grupos, estructuras sustantivas y estructuras sintácticas.

Las estructuras sustantivas hacen referencia a la variedad de modos en los que se organizan los conceptos básicos y principios de la disciplina de la cual se extrae el conocimiento. La estructura sintáctica hace referencia al conjunto de modos en los que la veracidad o validez del contenido es establecida frente a la falsedad o invalidez de éste. En otras palabras, la estructura sintáctica determina las reglas para determinar cuándo una determinada afirmación acerca de un contenido es legítima o, por el contrario, carece de validez.

Esto último es importante de cara a la labor del profesor. Este no ha de centrarse únicamente en transmitir el conocimiento del contenido en lo que se refiere a transmitir las definiciones ya aceptadas como válidas en una disciplina (estructura sustantiva). Es

muy importante, además, que el docente trate de transmitir por qué dichas definiciones se consideran válidas, por qué merece la pena indagar en ello y cómo dichas definiciones se relacionan con otras definiciones o proposiciones tanto en el mismo ámbito estudiado como fuera de la disciplina.

En definitiva, no es suficiente con que el profesor se limite a transmitir los conocimientos adquiridos y organizados por la humanidad en una determinada disciplina a lo largo del tiempo. Es necesario también fomentar que el alumnado sepa hacer un buen uso del conocimiento, que tenga criterio propio, que sea capaz de cuestionarse las definiciones que el docente expone, que aprenda a razonar por cuenta propia. Para ello, el conocimiento del contenido por parte del profesor no ha de ser algo firme, sino que se ha de adaptar dependiendo de la situación (estructura sintáctica), de forma que este modo de manejar el conocimiento del contenido se vea reflejado en el uso que el alumnado hará de este posteriormente.

El profesor no ha de simplemente entender que una determinada definición o proposición es de tal manera, debe entender además por qué es así, en qué parcelas o ámbitos dichas afirmaciones son garantizadas o bajo qué condiciones la justificación de dichas afirmaciones se puede ver comprometida.

En segundo lugar, Shulman (1986) define el **conocimiento pedagógico del contenido** como “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora los aspectos del contenido más relacionados con su capacidad de ser enseñados” (p.9). Es en esta categoría donde incluye todo lo relacionado a las explicaciones, demostraciones, ilustraciones, analogías y representaciones de las ideas que conforman el núcleo del contenido transmitido. En otras palabras, esta categoría del conocimiento hace referencia a las técnicas para presentar los contenidos de forma que resulten comprensibles para los alumnos.

Shulman, además, señala que el conocimiento pedagógico del contenido también ha de incluir por parte del docente el hecho de que este sea capaz de entender y comprender qué variables repercuten en que el aprendizaje de determinado contenido se convierta en algo sencillo o complicado. También señala el papel importante del docente en el sentido de ser capaz de reorganizar el modo de comprensión de la materia de los alumnos. Estos no se presentan ante el profesor como un folio en blanco, sino que ya llevan consigo una serie de conceptos previos que pueden ser correctos o erróneos, de modo que el docente ha de poseer un conocimiento pedagógico adecuado acerca de las estrategias necesarias para manipular esas concepciones de los alumnos.

Por último, con respecto al **conocimiento curricular**, Shulman (1986) sostiene que esta categoría sigue siendo muy relevante en comparación a las anteriores, ya que el currículum aparece representado por los programas de enseñanza, los materiales

instructivos disponibles con respecto a estos programas y una serie de parámetros que aconsejan el uso de un currículum o material de programación particular en situaciones excepcionales. En definitiva, el conocimiento del currículum no ha de despreciarse ya que se encuentra estrechamente ligado al ámbito pedagógico.

Pino-Fan (2014) señala que posteriormente, Shulman amplía este trabajo en 1987 y transforma estas 3 categorías iniciales en 7 categorías de conocimiento. Estas son denominadas por Shulman (1987) como categorías del conocimiento base:

1. *Conocimiento del contenido.*
2. *Conocimiento pedagógico general*, referido a una serie de estrategias que contribuyen en la gestión de la clase.
3. *Conocimiento curricular*, referido al conocimiento de los materiales y programas útiles en el desempeño de la labor del docente.
4. *Conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*, referido a una unión entre contenido y pedagogía que se manifiesta en la actividad del docente.
5. *Conocimiento de los estudiantes y sus características.*
6. *Conocimiento de los contextos educativos*, el cual abarca un amplio abanico de elementos, desde el funcionamiento de la propia clase hasta la situación determinada por el gobierno, la cultura de la comunidad, etc.
7. *Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.*

En este sentido, el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular vienen a ser los mismos que los expuestos en su trabajo de 1986. No obstante, aparece un tipo de conocimiento pedagógico más general, relacionado a la gestión y organización de la clase.

Aparece también un conocimiento de los estudiantes y sus características, el cual puede guardar una relación con lo mencionado anteriormente en el conocimiento pedagógico del contenido, en el sentido en el que los alumnos tienen una serie de concepciones adquiridas previas al proceso de aprendizaje que pueden variar dependiendo del alumno en cuestión.

Es un hecho evidente que, en función de las características del alumno, el proceso de aprendizaje puede variar, de modo que el uso de determinadas técnicas pedagógicas puede resultar eficaz con ciertos alumnos mientras que con otros no. Por ello, es importante que el docente posea un conocimiento del alumnado de modo que sea capaz de adaptar sus métodos de enseñanza encaminados en una dirección en la que la mayoría de la clase adquiera los conocimientos de la forma más eficiente posible, sin dejar de lado a alumnos con dificultades de aprendizaje.

El conocimiento de los contextos educativos es un ámbito parecido al conocimiento de los estudiantes, en la medida en la que el contexto en el que el alumno

se ve inmerso puede afectar en gran medida al comportamiento de este. Por ello, el profesor ha de adaptar, de igual forma, su método de enseñanza al contexto educativo en el que se encuentre inmerso el centro.

Por último, cabe señalar la importancia del conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. Personalmente, pienso que la educación en matemáticas en los niveles de secundaria y bachillerato debería estar muy enfocada a su aplicación en situaciones de la vida cotidiana, con el objetivo de motivar al alumnado de cara al proceso de aprendizaje. Este hecho se está viendo presente en los objetivos planteados desde el gobierno y el sistema educativo, los cuales fomentan las competencias del alumnado relacionadas con la aplicación de las matemáticas a situaciones prácticas del día a día.

Es muy importante, por parte del docente, no perder la vista en todo momento del objetivo que supone la adquisición de los conocimientos que está impartiendo, especialmente en matemáticas. Si consigue transmitir esa perspectiva al alumnado, conseguirá encontrar una mayor motivación en este que facilitará el proceso de enseñanza. El aprendizaje nunca ha de verse como un objeto vacío sin ningún fin, todo aprendizaje tiene una determinada utilidad en algún determinado ámbito.

De estas 7 categorías, cabe destacar especialmente el conocimiento pedagógico del contenido como la más interesante en este trabajo. De acuerdo con Pino-Fan y Godino (2015), el conocimiento pedagógico del contenido es el elemento que representa la unión entre contenido y pedagogía con el fin de entender cómo debe ser la organización y representación de un tema particular adaptándose a la diversidad presente en los estudiantes en lo relativo a sus habilidades e intereses.

Posterior a los trabajos de Shulman, cabe destacar la aportación de Deborah Ball, quien junto con diversos colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008) propusieron, sirviéndose como apoyo en los trabajos de Shulman, en especial en los conceptos anteriormente expuestos de conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido, una nueva noción denominada conocimiento matemático para la enseñanza. (Pino-Fan y Godino, 2015).

El conocimiento matemático para la enseñanza es definido por parte de Hill, Ball y Schilling (2008) como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno”. (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 91).

Este conocimiento, de acuerdo con Pino-Fan y Godino (2015), se divide en dos grandes categorías integradas a su vez por una serie de subcategorías de conocimiento. De esta forma, se tienen dos bloques de conocimiento principales desglosados, cada uno de ellos, en 3 bloques de conocimiento secundarios. (Pino-Fan y Godino, 2015).

- *Conocimiento del contenido:*
 - *Conocimiento común del contenido.* Este conocimiento hace referencia a todo aquel que es empleado por el docente de una forma similar a la que lo pueden usar otro tipo de profesiones relacionadas con las matemáticas, pero distintas de la docencia. Un ejemplo de esto es el conocimiento que necesita el profesor para resolver una tarea determinada que plantea a los alumnos. Esta tarea también puede ser resuelta por matemáticos, ingenieros, etc., ajenos al mundo de la enseñanza, los cuales poseen el mismo tipo de conocimiento.
 - *Conocimiento especializado del contenido.* Este tipo de conocimiento se encuentra más centrado a la enseñanza. Está más referido a las habilidades del docente para ser capaz de transmitir a los alumnos las ideas matemáticas a través de métodos y procedimientos adecuados. Requiere que el profesor sea capaz de representar adecuadamente las ideas matemáticas con unas explicaciones oportunas que faciliten su comprensión, así como el análisis de los diversos métodos existentes en la resolución de un problema.
 - *Conocimiento en el horizonte matemático.* Este tipo de conocimiento se encuentra relacionado a la capacidad del profesor de realizar juicios sobre la importancia de las matemáticas, atender a las opiniones de los estudiantes y su significado, resaltar puntos relevantes, valorar oportunidades matemáticas, etc.

- *Conocimiento pedagógico del contenido:*
 - *Conocimiento del contenido y los estudiantes.* Este se refiere al conocimiento por parte del profesor sobre el modo en el que los estudiantes aprenden y trabajan con el contenido.
 - *Conocimiento del contenido y la enseñanza.* Referido a un conocimiento conjunto que combina tanto un conocimiento sobre la enseñanza como un conocimiento del contenido matemático. Ambos han de ir de la mano, ya que para transmitir los conceptos matemáticos a los alumnos es necesario que el profesor tenga un buen conocimiento de las matemáticas que conduzca hacia una buena explicación del temario.
 - *Conocimiento curricular.* Referido en gran medida de forma similar al concepto de conocimiento curricular expuesto previamente.

Pino-Fan, Godino y Moll (2011) señalan que la expresión de *conocimiento didáctico-matemático* se emplea para referirse a la unión entre el conocimiento

matemático para la enseñanza de Hill, Ball y Schilling y el conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman y continuado en trabajos posteriores. De acuerdo con Pino-Fan et al. (2011), tanto el concepto de conocimiento matemático para la enseñanza como el concepto de conocimiento pedagógico del contenido no exponen con totalidad el amplio número de facetas que se han de tomar en consideración.

En definitiva, es necesaria la unión conjunta de ambos tipos de conocimiento previamente descritos con el fin de establecer un conocimiento didáctico-matemático adecuado para que el docente desempeñe correctamente su función. En didáctica de las matemáticas, el objetivo perseguido tiene que ver, según Pino-Fan et al. (2011), con establecer una relación coherente entre todas las facetas del estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el ámbito matemático.

De acuerdo con Pino-Fan et al. (2011), el conocimiento didáctico-matemático hace referencia a la relación que se establece entre los elementos implicados en el proceso de enseñanza, en el sentido de instaurar unos procedimientos de aprendizaje eficaces para los alumnos, en los cuales entra en juego la resolución de problemas matemáticos.

Nieto, Jiménez y Macías (1995) proponen un modelo del conocimiento didáctico del contenido en ciencias y matemáticas que incluye dos elementos, una *componente estática* y una *componente dinámica*.

La componente estática se relaciona con aquellos aspectos independientes del docente y del contexto en el que desarrolla su actividad, referida al conocimiento del contenido matemático, conocimiento específico sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de ese contenido o conocimiento de psicopedagogía general. Se le denomina componente estática ya que se encuentra en material de hemeroteca, desde donde es transmitida al docente, pero no depende de la persona que posea el conocimiento, se trata de una componente impersonal.

La componente dinámica hace referencia a las concepciones que adquiere el alumnado acerca de una materia, las cuales permanecerán asimiladas en su mente en mayor medida que los conocimientos específicos adquiridos. Estas concepciones influyen en el modo en el que el profesor ha de ajustar sus procedimientos de enseñanza empleados en la práctica. Se trata de un componente que requiere que el docente se implique personalmente mediante un proceso de reflexión y observación.

Esta componente dinámica hace referencia a un conocimiento orientado hacia el ejercicio práctico del proceso de enseñanza y guarda una estrecha relación con los modelos de razonamiento expuestos anteriormente en los trabajos de Shulman.

En definitiva, Nieto et al. (1995) hablan sobre un conocimiento que no se construye únicamente a partir de una información proporcionada a los profesores en

formación (componente estática), sino que tiene una componente personal y de reflexión individual sobre sí mismo y sobre la propia experiencia docente (componente dinámica).

Pino-Fan et al. (2011) proponen, por otro lado, un modelo del conocimiento didáctico-matemático conformado por 3 dimensiones: *matemática*, *didáctica* y *meta didáctico-matemática*.

La dimensión matemática se conforma de dos categorías del conocimiento: *conocimiento común del contenido* y *conocimiento ampliado del contenido*. Se trata de una reinterpretación de los conceptos de conocimiento común y conocimiento en el horizonte matemático expuestos anteriormente. Así, el conocimiento común del contenido es el conocimiento de un objeto matemático como puede ser la derivada, compartido entre el profesor y los alumnos, necesario para resolver los problemas matemáticos propuestos. Por otro lado, el conocimiento ampliado del contenido hace referencia al conocimiento que debe poseer el profesor acerca de los conceptos matemáticos que serán estudiados en niveles posteriores con relación al objeto matemático estudiado en el momento en cuestión, de modo que este sea capaz de ir por delante teniendo en cuenta un nivel de estudios superior al actual, teniendo capacidad de plantear nuevos retos, establecer relaciones del objeto estudiado (derivada) con otros conceptos matemáticos y dirigir a los alumnos en el estudio de otros conceptos matemáticos que puedan surgir partiendo el objeto central que en este caso, es el de derivada (Pino-Fan y Godino, 2015).

Con respecto a esta última idea de conocimiento ampliado del contenido, se podría enfocar al objeto estudiado en este trabajo, la derivada, con el siguiente ejemplo. Un profesor con un adecuado conocimiento ampliado del contenido ha de ser capaz, en el momento en el que se esté estudiando la derivada, de tener un conocimiento consolidado acerca de los conceptos matemáticos ligados a la derivada estudiados en niveles posteriores. Si se tiene en cuenta el nivel curricular en el que se centra este trabajo, el cual sería la introducción del concepto de derivada en 1º de Bachillerato, el profesor debe conocer los conceptos relacionados con la derivada que serán estudiados en 2º de Bachillerato, así como en carreras universitarias posteriores (cálculo de máximos y mínimos, optimización de funciones, ecuaciones diferenciales, etc.).

La dimensión didáctica se encuentra conformada por 6 categorías de conocimiento: *conocimiento especializado de la dimensión matemática*, *conocimiento sobre aspectos cognitivos de los estudiantes*, *conocimiento sobre aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes*, *conocimiento sobre las interacciones en el aula*, *conocimiento sobre los recursos potenciadores del aprendizaje de los estudiantes* y *conocimiento sobre aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos, etc.* que influyen en la gestión del aprendizaje. (Pino-Fan y Godino, 2015).

Cabe destacar que estas 6 categorías de conocimiento y, por tanto, la dimensión didáctica, ha de ir estrechamente ligada a la dimensión matemática ya que todas estas categorías tienen como objetivo principal transmitir los conceptos matemáticos, parte central del proceso de enseñanza. A modo de resumen, la dimensión didáctica resalta la importancia de integrar conocimientos acerca de los estudiantes y sus características con el conocimiento de los contenidos matemáticos.

Por otra parte, la dimensión meta didáctico-matemática hace referencia a la labor que ha de emprender un profesor a la hora de proceder a reflexionar sobre la idoneidad de su práctica profesional, así como de los posibles puntos en los que su proceso de enseñanza puede ser mejorado. Esta dimensión requiere además que el profesor conozca los criterios de idoneidad con respecto a la didáctica de las matemáticas con el fin de poder así realizar una reflexión correcta.

Estas últimas ideas de reflexión propuestas por Pino-Fan y Godino (2015) guardan una estrecha relación con las ideas que forman parte de la componente dinámica del conocimiento propuesta en el modelo de Nieto et al. (2015).

A modo de reflexión final, Pino-Fan y Godino (2015) señalan una posible aproximación al término de conocimiento del profesor como “una integración cognitiva del conocimiento científico y el conocimiento práctico, procedentes de diferentes dominios científicos y prácticos.” (p. 105). Esta idea se puede ver relacionada con las ideas expuestas previamente acerca de la necesidad de combinar e integrar tanto el conocimiento del contenido como el conocimiento pedagógico del contenido, integrar tanto los conocimientos matemáticos del docente como los conocimientos relacionados con los métodos y procedimientos de enseñanza y aprendizaje adecuados.

En definitiva, una idea siempre presente en las investigaciones anteriormente citadas es la **integración** de las distintas categorías de conocimiento. No es suficiente que el profesor posea (por separado) un amplio conocimiento matemático del contenido, o un amplio conocimiento de las características de sus estudiantes, o un amplio conocimiento de los métodos y técnicas de enseñanza óptimos de cara a sus alumnos. Es necesario que haya presencia de todas estas categorías de conocimiento en la mente del profesor y que todo ello se vea aplicado en el proceso de enseñanza mediante una correcta integración de todas estas categorías de conocimiento.

3.1.1 Conocimiento didáctico-matemático enfocado a la derivada

Con respecto al conocimiento que ha de tener un profesor con el objetivo de transmitir correctamente la noción de derivada, existen una serie de investigaciones acerca de la práctica del profesor en la enseñanza que se clasifican en dos grupos:

investigaciones acerca del uso de nuevas tecnologías e investigaciones que resaltan el uso de problemas de aplicación de otras ciencias como, por ejemplo, la física (Pino-Fan et al., 2011).

Además de estas investigaciones, Pino-Fan et al. (2011) destacan también la importancia de otro grupo de investigaciones no enfocadas a la práctica profesional del profesor sino a sus creencias y concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada. Este estudio de las creencias y concepciones, señalan, “resulta necesario para comprender la práctica de los profesores de matemáticas.” (p. 145). Es decir, es importante conocer las creencias del profesor sobre el proceso de enseñanza de las derivadas ya que estas influyen en gran medida en la práctica y en el desempeño del propio proceso de enseñanza.

Pino-Fan et al. (2011) tratan de responder a la pregunta sobre qué conocimientos ha de tener un profesor para que el proceso didáctico de la enseñanza de las derivadas sea lo más idóneo posible. Para ello, tratan de reconstruir el concepto de conocimiento didáctico-matemático enfocado a la derivada mediante un análisis epistémico acerca del significado global de la derivada.

Con tal fin, realizan un análisis de los significados parciales de la derivada y el modo en el que estos se articulan, caracterizando los diferentes significados de la derivada como objeto. Estos significados parciales hacen referencia al estudio de la derivada como pendiente de la recta tangente, como medida de la variación, como instrumento para el cálculo de máximos y mínimos, como fluxión, como cociente de diferenciales y como límite. (Pino-Fan et al., 2011).

En definitiva, resulta muy importante tener una idea clara y precisa del **significado global** del objeto matemático (en este caso la derivada) para poder así elaborar planes de formación adecuados. Es necesario un estudio profundo acerca del significado global de la derivada con el objetivo de diseñar unos procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada lo más idóneos posible. (Pino-Fan et al., 2011).

Con el objetivo de explorar aspectos sobre el conocimiento didáctico-matemático que han de poseer los profesores en el ámbito de la derivada, Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012) proponen el diseño y la elaboración de un instrumento para determinar aspectos epistémicos del conocimiento didáctico-matemático y la formación de los profesores con respecto al objeto matemático de la derivada en bachillerato.

Este instrumento consiste en la elaboración de un cuestionario centrado en evaluar aspectos relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del profesor encargado de enseñar las derivadas en bachillerato en relación

a tres tipos de conocimiento expuestos anteriormente: conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento ampliado.

En la siguiente figura se muestra una de las tareas incluidas en dicho instrumento evaluador de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Esta tarea se centra en estudiar dos niveles del conocimiento especializado, un primer nivel donde los profesores han de hacer uso de objetos matemáticos primarios como representaciones, conceptos, procedimientos, etc., para resolver la tarea y un segundo nivel donde se requiere que el profesor sea capaz de reconocer explícitamente los objetos matemáticos primarios del primer nivel en la resolución de un problema de derivadas.

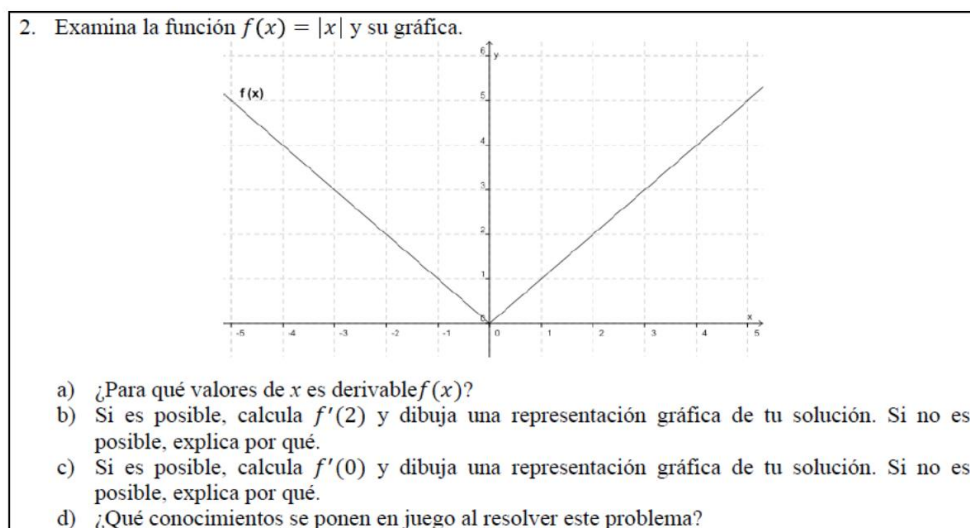


Ilustración 1 - Tarea para evaluar el CDM sobre la derivada (Pino-Fan et al., 2012)

En esta figura, el apartado a) evalúa el conocimiento común (el profesor simplemente ha de resolver el apartado sin utilizar recursos como argumentaciones o representaciones), mientras que los apartados b), c) y d) evalúan el conocimiento especializado, ya que aquí el profesor debe hacer uso de gráficas y argumentaciones para resolver el problema. Los apartados b) y c) harían referencia al primer nivel de conocimiento especializado mientras que el apartado d) hace hincapié sobre el segundo nivel mencionado anteriormente.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos tras la aplicación de la tarea mostrada anteriormente sobre un conjunto de 53 futuros profesores.

Grado de Corrección	Apartado a)		Apartado b)		Apartado c)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	75,4	22	41,5	19	35,8
Parcialmente C.	0	0	10	18,8	15	28,3
Incorrecta	10	18,8	15	28,3	13	24,5
No contestan	3	5,6	6	11,3	6	11,3
Total	53	100	53	100	53	100

Ilustración 2 - Resultados de la tarea mostrada en la ilustración 1 (Pino-Fan et al., 2012)

Se aprecia así, una mayor dificultad en la resolución de los apartados b) y c), donde entra en juego el conocimiento especializado del contenido.

Con respecto a los resultados del apartado d), no incluidos en la imagen anterior, Pino-Fan et al. (2012) señalan una dificultad general entre los futuros profesores en la resolución de dicho apartado.

Los resultados obtenidos tras la aplicación del cuestionario en futuros profesores indican que estos presentan dificultades en la resolución de problemas relacionados con el conocimiento común y el conocimiento especializado. Las soluciones dadas a la pregunta d) de la tarea mostrada en la Figura 1 se limitaban a la enumeración de conceptos matemáticos sin presentar una mayor indagación que demandaría un buen conocimiento especializado. De este hecho, Pino-Fan et al. (2012) deducen que se podría obstaculizar la gestión del conocimiento por parte de los futuros estudiantes.

Cabe destacar también, que Pino-Fan et al. (2012) observan, tras la aplicación del instrumento de evaluación, un predominio de las resoluciones gráficas que tienen en cuenta la derivada como pendiente de la recta tangente, así como un predominio de técnicas de derivación.

Finalmente, Pino-Fan et al. (2012) señalan la necesidad de solventar una presente desconexión entre el conocimiento común y el conocimiento especializado, la cual obstaculiza la transición hacia el conocimiento ampliado. Según estos autores, el desconocimiento de ciertos procedimientos formales dificulta la conexión con objetos matemáticos más avanzados y la generalización de los conceptos. En definitiva, este hecho viene a reforzar aún más la idea señalada anteriormente de la necesidad de integrar todos los ámbitos del conocimiento del profesor.

3.2 Comprensión del concepto de derivada por parte del alumnado

En este apartado, se realizará un estudio en relación a las investigaciones recientes más relevantes que abordan los problemas que presentan los alumnos a la

hora de comprender el concepto pleno de la derivada. Se procederá, así, a analizar de igual forma las soluciones propuestas por los autores con el fin de establecer posteriormente un modelo de enseñanza óptimo en el que el alumno sea capaz de comprender el significado de la derivada.

En primer lugar, Batanero y Díaz (2007) diseñan un modelo teórico aplicado al concepto de probabilidad, señalando que puede ser aplicado a otro tipo de objetos matemáticos, en el cual distinguen 5 componentes relacionados entre sí con respecto al significado del concepto. Estos 5 componentes son: *el campo de problemas desde el cual el concepto ha emergido; las representaciones del concepto; los procedimientos y algoritmos para tratar el problema, los datos, resolver problemas relacionados o computar valores; las definiciones del concepto y, finalmente, los argumentos y pruebas usados para convencer a otros de la validez de las soluciones a los problemas o la veracidad de las propiedades relacionadas con los conceptos.*

Por otra parte, centrando el análisis en el objeto matemático de la derivada, cabe destacar el trabajo realizado por Urquieta, Yañez y Andrade (2014), quienes realizan un análisis del aprendizaje del concepto de la derivada siguiendo el modelo cognitivo APOS.

Según la teoría APOS, “el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente contruidos para formar acciones, las acciones se interiorizan para formar procesos los que a su vez se encapsulan para formar objetos y finalmente las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.” (Urquieta et al., 2014, p. 406).

Para el análisis, Urquieta et al. (2014) realizan una distinción de los 4 niveles del modelo APOS, indicando a qué aspectos de la comprensión del concepto de la derivada se encuentra referido cada uno de estos niveles.

- En el nivel de *acción*, el estudiante ha de comprender el concepto de derivada en un punto, la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de la función, obtenida como un límite de la sucesión de pendientes de rectas secantes cuando el intervalo tiende a cero, el significado físico de velocidad instantánea obtenido como límite de la sucesión de velocidades medias cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, el cálculo de derivadas de funciones elementales en un punto, etc.
- En el nivel de *proceso*, el estudiante ha de operar y realizar demostraciones simples acerca de propiedades de la función derivada, como, por ejemplo, la fundamentación de la derivada de una potencia de grado n , la derivada de una suma o diferencia de funciones, la derivada de un producto de funciones y la derivada del cociente de funciones.
- A nivel de *objeto*, el estudiante ha de ser capaz de demostrar propiedades de la derivada más abstractas en lo referido a funciones no representadas mediante

una fórmula. Debe ser capaz de trabajar con el *proceso* revirtiéndolo, volviendo al proceso inicial, reflexionando sobre las *acciones* que originan el objeto cuando se actúa sobre el proceso, así como de coordinar nuevos procesos.

- A nivel de *esquema*, el estudiante ha de reconocer y coordinar dos esquemas: el esquema función con el esquema de diferenciación, definiendo conceptos relacionados con el análisis cualitativo de funciones. Esta coordinación permitirá realizar un análisis mediante la diferenciación y revertir el proceso de modo que se infieran propiedades de la función derivada a partir del conocimiento del comportamiento de esta.

A continuación, se exponen las conclusiones a las que Urquieta et al. (2014) llegan con su estudio. El objetivo final del estudio consistió en conocer los procesos cognitivos que realiza un alumno en el aprendizaje de la derivada para así indagar en el proceso de aprendizaje e identificar las dificultades que presentan los alumnos en este proceso.

Urquieta et al. (2014) determinan así que es muy importante que en el nivel de *acción* el alumno sea capaz de comprender el concepto de derivada en un punto y reflexionar sobre este concepto, ya que, en caso contrario, dicho alumno tendrá dificultades en el paso al nivel de *proceso*, al no ser capaz de relacionar el significado y realizar la abstracción del concepto con la definición de derivada. Se demostró que el estudiante medio presenta una considerable dificultad a la hora de realizar la interpretación geométrica del concepto.

Señalan, además, que los elementos que perduran en la mente del alumno con el tiempo son las propiedades de la operatoria y la interpretación gráfica del concepto, es decir, predomina el concepto operacional y visual por encima del concepto formal. Por otro lado, señalan que el conocimiento de la definición formal del concepto de función derivada requiere además de la posesión de otros conocimientos previos como el cálculo de límites con tendencia a infinito y la comprensión de que la función derivada y el número resultante de evaluar la función en un punto se obtienen calculando un límite al infinito.

Por otra parte, indican que, en el nivel de *objeto*, referido a la habilidad en la operatoria y la capacidad de ir del concepto a la aplicación y viceversa, se observó que, a pesar de que los estudiantes no reconocían el concepto de derivada en un punto, esto no les impidió responder correctamente y aplicar las propiedades del concepto.

Finalmente, con respecto al nivel de *esquema*, los autores señalan que algunos estudiantes presentan dificultad en tareas que exigen comprensión de enunciados en los que han de discriminar entre proposiciones falsas y verdaderas. Señalan que los alumnos tienden a integrar el esquema de la derivada con el de las propiedades cualitativas de las funciones.

Por otro lado, Urquieta et al. (2014) mencionan que, los alumnos estudiados en su trabajo fueron capaces de relacionar conceptos e integrar el concepto de derivada con otros esquemas a pesar de las dificultades de comprensión de conceptos teóricos básicos definidos a nivel de *acción*. Señalan además una cita de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), en la que exponen que “el desarrollo de esquema de derivada no es algo vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto, sino ser capaces de coordinarlos al resolver problemas”. (Urquieta et al., 2014, p. 423).

Otro dato importante mencionado por Urquieta et al. (2014) es que si al aprendizaje del concepto de derivada se le agregan otros elementos como la concavidad (relacionada con la forma de la gráfica de la función), el alumno relaciona e integra estos conceptos como parte de la concepción de la derivada.

Otro trabajo destacado en esta área relacionada con la comprensión del concepto de derivada, es un estudio realizado por Amaya, Rojas y Ballén (2009). En este estudio, los autores tratan de describir los niveles de comprensión del concepto de derivada en 6 estudiantes de cálculo diferencial en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Realizan el estudio a través de una serie de problemas planteados en tres cuestionarios, donde encontraron una tendencia a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico y con dependencia del uso de expresiones algebraicas de la función, así como una dificultad en el paso de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada.

Se observó que ciertos estudiantes realizaban una interpretación de la derivada atendiendo al proceso algorítmico empleado para obtenerla, dejando a un lado la interpretación geométrica (como pendiente de la recta tangente) o la interpretación como razón de cambio en un instante. No obstante, la interpretación de la derivada más común en este grupo de estudiantes era la interpretación como pendiente de la recta tangente. Se observa también una dependencia con respecto a la expresión algebraica a la hora de describir la razón de cambio de una función. En funciones a trozos, se observó que la mayoría de los estudiantes aplicaban procedimientos de derivación sin preocuparse de estudiar si la función es o no derivable en los puntos conflictivos.

Por otra parte, cabe destacar que se observó, en este trabajo, que los estudiantes presentaban mayor facilidad en la resolución de problemas donde interviene el concepto de **velocidad instantánea** en lugar de la razón de cambio de otras variables distintas a la posición de un móvil.

Este último dato resulta muy importante ya que, en la elaboración de la unidad didáctica, se estudiará el uso de este recurso consistente en emplear modelos físicos con el objetivo de afianzar el concepto de derivada en los alumnos.

Por otra parte, se observó una tendencia en los alumnos a realizar cálculos de la segunda derivada a partir de la primera sin realizar un estudio previo de las propiedades de ciertos intervalos del dominio de la función. Se observó también que los estudiantes realizan con facilidad tareas de interpretación y cálculo de la derivada a partir de la gráfica de la función, pero no obtienen la gráfica de la propia función derivada. De esto se deduce que presentan dificultades a la hora de realizar una generalización de lo **global**.

En este último hecho se puede encontrar una relación con la necesidad que reclaman Pino-Fan et al. (2011) de poseer una idea clara y precisa del significado global de la derivada (véase el apartado [3.1.1 Conocimiento didáctico-matemático enfocado a la derivada](#)). Es importante que el profesor posea una idea global sobre el objeto matemático con el fin de transmitir ese concepto global a los alumnos.

Por otro lado, continuando con el trabajo de Amaya et al. (2009), señalan una tendencia por parte de los estudiantes a pasar la gráfica de la función a una expresión algebraica, a partir de la cual obtienen la expresión algebraica de la función derivada para, posteriormente, pasar a construir la gráfica de esta función derivada. Se observa también una dificultad a la hora de construir la gráfica de la derivada a partir de situaciones en las que los valores de la derivada son negativos. Tienen, así, dificultad para interpretar razones de cambio negativas (disminuciones de una determinada magnitud como puede ser, una aceleración negativa a causa de un descenso de velocidad).

Por otra parte, Amaya et al. (2009) indican que en situaciones en las que a los estudiantes se les presentan gráficas, estos presentan dificultades a la hora de asociar la razón de cambio instantánea con la interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente. Tres de los estudiantes estudiados no son capaces de identificar la recta tangente como el límite cuando la distancia de dos puntos de corte de una recta secante con la función tiende a cero, es decir, no identifican con facilidad que la recta tangente surge cuando se aproximan todo lo posible dos puntos de la función que determinan una recta secante.

Finalmente señalan que, aunque los estudiantes presentan facilidad para comprender la información teórica que aportan la primera y segunda derivada, les resulta difícil el paso de la gráfica de la función primitiva hacia la gráfica de la función derivada, les cuesta construir funciones a partir de características de las funciones de la primera y segunda derivada, ya que consideran los **contextos gráficos y algebraicos** de forma **separada**.

Con respecto a esta última idea, Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) realizan un trabajo acerca de la comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato e indican una tendencia a considerar **separados los modos de**

representación gráfico y analítico por parte de los alumnos, los cuales tienden a aplicar algoritmos sin relación.

Otras dificultades asociadas al proceso cognitivo de comprensión del concepto de derivada son mencionadas en el trabajo realizado por Font (2005). Este señala que los alumnos de bachillerato presentan conflictos a la hora de distinguir el concepto de derivada en un punto con el concepto de función derivada. Font (2005) pone de manifiesto, además, la poca importancia que se le da a la complejidad que supone el paso de la derivada en un punto a la función derivada en las unidades didácticas a nivel de bachillerato.

En otro trabajo realizado por Pino-Fan, Castro Gordillo, Godino y Font (2013), se vuelve a hacer hincapié en la idea de reconstrucción del significado global de la derivada expuesta en el apartado [3.1.1 Conocimiento didáctico-matemático enfocado a la derivada](#). Este trabajo se centra en caracterizar el significado pretendido en el currículo de Bachillerato a partir de las tareas propuestas en los planes de estudios. Aportan información útil para el profesor de matemáticas de bachillerato indicando ciertos rumbos en los significados de la derivada resaltados en el currículo que pueden ser evitados por el docente para lograr una enseñanza eficaz.

A modo de reflexión señalan una cita de Sierpinska (1990), en la que menciona que “comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la ‘estructura’ del objeto.” (Pino-Fan et al., 2013, p. 147). Se entiende por estructura del objeto una red de sentido de las sentencias relacionadas con el objeto matemático de la derivada. Cabe destacar en este punto la idea de **generalización y síntesis** de los significados, expuesta en trabajos anteriores. Indican, por tanto, que para que tenga lugar la comprensión del concepto general es necesario que el alumno realice actos de comprensión de los significados de estos elementos particulares.

Pino-Fan et al. (2013) destacan el criterio denominado como “*representatividad*”, como un criterio que permite valorar la calidad de las instrucciones matemáticas y un referente a considerar por el docente a la hora de planificar actividades. Este criterio hace referencia a que, con el objetivo de conseguir un aprendizaje significativo, es necesario escoger actividades que pongan en juego los objetos matemáticos con los significados matemáticos asociados. Los significados de los objetos matemáticos se encuentran estrechamente ligados a la resolución práctica de problemas, de modo que estos problemas han de representar correctamente al campo estudiado para que los significados adquiridos por los estudiantes en su resolución sean representativos del **significado global** del objeto matemático. En el caso de la derivada, destacan como campos de problemas los problemas de cálculo de tangentes, problemas

de cálculo de tasas instantáneas de cambio, problemas de cálculo de tasas instantáneas de variación, problemas de aplicación de la derivada a monotonía y análisis de gráficas y problemas de cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

Pino-Fan et al. (2013) destacan la idea de no dar de lado al significado global de la derivada con el objetivo de conseguir un proceso de aprendizaje eficaz. Según estos autores, los objetos matemáticos puestos en juego en el proceso de aprendizaje deben de tratar de representar al significado global de la derivada. Si se realiza más énfasis en una parte de estos objetos matemáticos, descuidando el resto, se realizará un cubrimiento epistémico parcial que puede tener consecuencias en el proceso de instrucción.

Gavilán (2006) habla en su trabajo acerca de una “perspectiva holística” en la práctica de los profesores cuya característica principal se basa en apoyar el aprendizaje en el establecimiento de relaciones explícitas entre los diversos significados de un concepto, los distintos conceptos involucrados y los sistemas de representación empleados. Esta perspectiva holística guarda relación con la idea de significado global de la derivada expuesta anteriormente.

Finalmente, cabe destacar especialmente la importancia que tienen los sistemas de prácticas implementados en el proceso de enseñanza de cara al significado adoptado por el estudiante sobre el objeto matemático. En palabras de Godino y Batanero (1994), citado en Pino-Fan et al. (2013), “los significados logrados (aprendidos) por los estudiantes dependen fundamentalmente de [...] los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción [...]” (p. 147).

Por otra parte, Vázquez y del Rincón (1998) proponen en su trabajo una serie de indicaciones para el profesor involucrado en el proceso de enseñanza de las derivadas, atendiendo al concepto del objeto matemático adquirido por el alumno.

En primer lugar, Vázquez y del Rincón (1998) señalan, basándose en los trabajos de Orton (1983), cuáles son los errores más frecuentes que suelen cometer los alumnos en lo relativo a sus concepciones de la derivada. Estos son: “no saben qué hacer para calcular la tasa de variación en un punto genérico; creen que la fórmula de la derivada de una función en un punto mide la tasa de variación entre dos puntos; no distinguen entre la tasa de variación media y la tasa de variación en un punto referidas a una función lineal puesto que es constante; no asocian la variación negativa o nula con función decreciente y extremos, respectivamente; el significado de ciertos símbolos como dx , dy , dy/dx , Δx , Δy , $\Delta y/\Delta x$ no es claro para los alumnos”. (p. 92).

Vázquez y del Rincón (1998) señalan la importancia de trabajar con conceptos como la velocidad media y velocidad instantánea, la pendiente de una recta y la tasa de

variación. Mencionan **3 propuestas didácticas** de cara a introducir el concepto de la derivada a los alumnos:

- La primera propuesta se encuentra tomada del Grupo Cero de Valencia (1982) y consiste en trabajar con la tasa de variación en distintos contextos, ya que la tasa de variación guarda relación con lo denominado en ocasiones velocidad media, tasa de crecimiento anual, ritmo de respiración, pendiente de una secante, etc. Esta propuesta se basa en tratar, por ejemplo, la tasa de variación instantánea y la velocidad instantánea, tomando **intervalos cada vez más y más pequeños** de modo que aparecen valores que se van aproximando a un determinado número, introduciendo así el concepto de límite de un modo informal. Posteriormente se define la derivada de una función en un punto interpretándola como la velocidad instantánea en un instante de tiempo, la pendiente de la recta tangente a la gráfica en dicho punto y la tasa de variación instantánea.
- En la segunda propuesta, se haría una introducción de la derivada sin haber tratado previamente el concepto de límite. Se basa en hacer trabajar al alumno al mismo tiempo que aprende, mediante el uso de tecnologías basadas en calculadoras gráficas o cualquier otro software de ordenador. Así, el alumno, haciendo uso de estos recursos, realizaría una secuencia de trabajo que comenzaría con la tasa de variación de una función considerando distintas situaciones, posteriormente trabajaría con pendientes de curvas y, finalmente, con problemas de optimización. Vázquez y del Rincón (1998) señalan, en el trabajo con pendientes de curvas, que la idea es que el alumno sea capaz de ver a través del programa informático que **“la pendiente de una curva en un punto es la misma que la pendiente de la tangente de la curva en el punto”** (p. 94) (de un modo informal), identificando la tangente con **la recta a la que se aproxima la curva** cuando una función con una curvatura suave se amplía considerablemente.
- En la tercera propuesta, se consideran tres aspectos asociados a la derivada: el aspecto cinemático ligado al concepto de velocidad instantánea, el aspecto geométrico (tangente) y el aspecto numérico (aproximación de una función numérica en el entorno de un punto por una función afín). Se comienza presentando una actividad sobre la caída libre de un cuerpo considerando los tres aspectos anteriores, para pasar a demostrar el teorema fundamental de la derivación en un punto, definir posteriormente una función derivable en un punto en base a lo anterior, estudiar la derivabilidad en un punto de ciertas funciones, interpretar el concepto de derivada en un punto desde los puntos de vista cinemático, gráfico y numérico, definir la función derivada y las operaciones asociadas, mostrar la derivada del seno y del coseno y realizar trabajos prácticos.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) resaltan en su trabajo realizado acerca de la comprensión de la derivada en alumnos de bachillerato que los distintos **contextos** en los que se estudia la derivada tienen una gran influencia en el proceso de aprendizaje, ya que los estudiantes no son capaces de ver la conexión presente entre varios procesos vinculados con la idea de derivada cuando aparecen en distintos contextos. Este hecho resalta aún más la idea de adquirir un **significado global** del concepto de derivada a través de una perspectiva holística. Los autores señalan que los alumnos lograrán una comprensión completa de la derivada si son capaces de reconocer y reconstruir los significados de razón, límite y función en contextos variados.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) señalan, además, dificultades para comprender la diferenciación y la gráfica asociada al cociente incremental, confusiones con respecto a la interpretación gráfica de la derivada de la función en un punto confundiéndola con la ordenada de la función primitiva, así como dificultades en general para asociar los ámbitos gráficos, numéricos y analíticos de la derivada, consecuencia, quizás, de una abundancia de definiciones matemáticas analíticas. Abogan, además, por emplear la variación del movimiento en un contexto numérico para introducir el cálculo diferencial, complementándolo con el uso de **dispositivos tecnológicos** para introducir los aspectos gráficos. Según los autores, los modos de representación ayudan a instaurar en la mente del alumno relaciones entre los distintos elementos matemáticos que entran en juego en la resolución de problemas.

Finalmente, Sánchez-Matamoros et al. (2008) sugieren que, para comprender el concepto de la derivada, resulta oportuno establecer conexiones con otros conceptos (límites, funciones, etc.), conocer los distintos modos de representación de la derivada (gráfico y analítico) así como sus distintas propiedades y procesos. Destacan tres ámbitos en el proceso de comprensión. “El primero ocurre en la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental, que dan forma a la derivada de una función en un punto; el segundo en los sistemas de representación, cuya integración origina una dimensión necesaria para el desarrollo de la comprensión; el tercero en la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada.” (p. 292).

Todas estas nociones tomadas a partir de una gran diversidad de investigaciones consultadas serán posteriormente tenidas en cuenta en el desarrollo de una unidad didáctica.

3.3 Metodologías de enseñanza

En este apartado, se procederá a realizar un análisis acerca de una serie metodologías de enseñanza disponibles, prestando atención a las ventajas que pueden aportar para así ser posteriormente aplicadas en la programación de una unidad didáctica en conjunción con la metodología tradicional basada en el proceso de *transmisión-recepción*.

La metodología de transmisión-recepción es la metodología que más comúnmente ha sido empleada a lo largo de la historia. Esta metodología tiene lugar cuando el profesor expone (“transmite”) los contenidos de forma activa en clase mientras que los alumnos se encuentran escuchando al profesor teniendo un comportamiento más bien pasivo y poco participativo, ya que se encuentran en proceso de “recepción” de los contenidos expuestos por el profesor, prestando atención a sus explicaciones, tomando apuntes de lo expuesto, etc.

Esta metodología resulta eficaz para el profesor cuando se pretende explicar un contenido en poco tiempo. No obstante, no resulta muy eficiente de cara a la adquisición de contenidos por parte de los alumnos, ya que no se ven enfrentados a situaciones que requieran del uso de este conocimiento. Con el objetivo de mejorar el proceso de aprendizaje, conviene emplear conjuntamente otros tipos de metodologías de enseñanza que fomenten una participación activa del alumnado en este proceso. Unos ejemplos de estos métodos de enseñanza son los que aparecen a continuación.

3.3.1 Aprendizaje basado en investigación/indagación (IBL)

En los últimos años, se ha presenciado un aumento en el número de investigaciones enfocadas a promover un estilo de aprendizaje basado en la indagación por parte del alumnado en el contenido estudiado, con el objetivo de conseguir un aumento global del interés de este en áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (áreas STEM).

En este sentido, cabe destacar el trabajo realizado por García-García, Quesada-Armenteros, Ariza y Gallego (2019), quienes proponen una renovación en el método de enseñanza en las aulas enfocado a la indagación. Tras el diseño y la aplicación de un programa de desarrollo profesional sobre aprendizaje mediante investigación, obtuvieron una serie de resultados positivos. Estos resultados pusieron en evidencia una ganancia por parte del profesorado en todas las dimensiones analizadas acerca de esta metodología, una mejora en la percepción de barreras y obstáculos que limitan su uso, así como una percepción positiva del impacto en las capacidades del docente.

Por otra parte, Abril, García, Ariza, Quesada y Ruiz (2011) tratan de promover igualmente el uso de esta metodología mediante el proyecto PRIMAS (*Promoting Inquiry*

in Mathematics and Science Education across Europe), con el objetivo de conseguir que el alumnado adquiriera competencias de ámbito científico, aumentando su **motivación** en áreas de matemáticas y ciencia para así afrontar de forma más positiva sus estudios posteriores en estos campos, así como su posterior inserción laboral.

De acuerdo con Abril et al. (2011), las metodologías de transmisión tradicionales han presentado una tendencia a provocar en los estudiantes actitudes pasivas en los procesos de aprendizaje, eclipsando las actitudes de interés, motivación y participación activa. En este sentido, es necesaria la introducción de metodologías como IBL, que permitan lograr un desarrollo de las competencias básicas del alumnado, así como un aumento de la motivación de cara a aprender contenido científico.

En cuanto a una **definición** formal de este tipo de metodología, no existe una única forma de obtener una definición exacta del concepto de **IBL** (*Inquiry Based Learning*). No obstante, Artigue y Blomhøj (2013) proponen una definición intuitiva de este concepto enfocado al área de las matemáticas. Según el criterio de estos autores, citado en García-García et al. (2019), las prácticas matemáticas de IBL se caracterizan porque “incluyen diferentes tipos de actividades combinadas en procesos de indagación: elaboración de cuestiones; resolución de problemas; modelización y matematización: búsqueda de recursos e ideas; exploración; análisis de documentos y de datos; experimentación; formulación de conjeturas; ensayar, explicar, razonar, argumentar y probar; definir y estructurar; conectar, representar y comunicar.” (p. 338).

Godino, Batanero, Cañadas y Contreras (2015) indican que en las metodologías orientadas a la indagación se le da una gran importancia a la **resolución de problemas “auténticos”**, proponiendo que el modo de construcción de conocimiento por parte de los estudiantes siga las pautas de trabajo de los **profesionales** matemáticos. Esto se debe a que, en la práctica, los matemáticos se han de enfrentar a problemas en los que se exige investigar, explorar, realizar hipótesis, justificar los resultados, etc., por lo que los estudiantes deberían ser guiados en torno a estas pautas. Consideran esencial el uso de situaciones o **problemas aplicados** para que los estudiantes consigan **dar sentido a los conceptos matemáticos**.

Una de las ideas personales de cara a este proyecto consiste en la creencia de que el ser humano es capaz de **afianzar** con mayor contundencia los **conceptos** cuando estos son aprendidos de tal manera que le ayudan a **resolver un problema**, avanzar en una tarea, salir de un bloqueo, etc. en definitiva, cuando el concepto aprendido resulta una herramienta a la que el alumno le ve **utilidad** para conseguir un determinado **objetivo**. La metodología IBL, en este sentido, fundamenta esta creencia, ya que trata de promover que el alumno tenga una mayor **participación** en el proceso de aprendizaje. Mediante el proceso de investigación, indagación, exploración, reflexión, experimentación, etc. es muy normal que al alumno le surjan dudas, bloqueos o

cualquier otro problema, que tratará de resolver, abriendo así un hueco para introducir el concepto y que este quede **afianzado**. Por ello, no es lo mismo emplear este tipo de metodología que tener a un docente que simplemente exponga los contenidos mientras el alumno se encuentra en una situación de oyente pasivo.

3.3.2 Modelización matemática

La modelización matemática es una técnica que ha sido comúnmente utilizada en matemática aplicada como un proceso dinámico que ayuda a entender problemas o situaciones en Física, Química, Biología, etc. Consiste en la creación de modelos matemáticos que permiten una comprensión profunda de situaciones reales. (Bassanezi y Biembengut, 1997).

Se ha demostrado en numerosos estudios que esta técnica de modelización se puede emplear como método de enseñanza-aprendizaje mostrando una gran eficacia. Bassanezi y Biembengut denominan “*Modelación Matemática*” al método de enseñanza-aprendizaje que emplea el proceso de modelización en el aula.

Según Biembengut y Hein (2004), la modelación matemática se trata de un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático, un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa un fenómeno o situación problema.

Este proceso de modelización sigue unas pautas determinadas. Bosch, García, Gascón e Higuera (2006) muestran un esquema avanzado de este proceso atendiendo a cada una de las fases que tendrían lugar en él. Dicho esquema, tomado de Blum (2005), se muestra en la siguiente imagen.

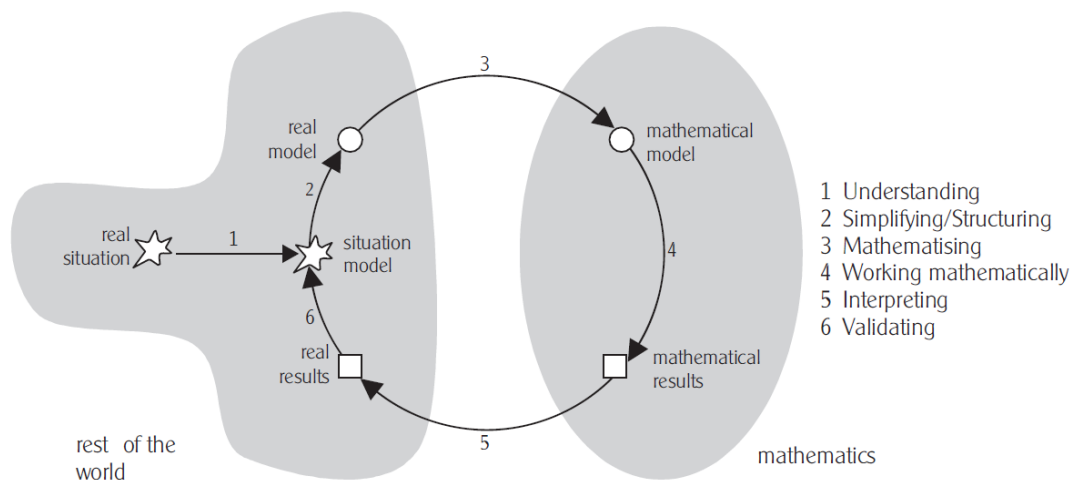


Ilustración 3 - Ciclo de modelización (Blum, 2005) (tomado de Bosch et al., 2006)

En este ciclo de modelización se distinguen, por tanto, un total de 7 etapas. Se parte de una situación real que ocurre en un contexto determinado. La comprensión o entendimiento (*understanding*) de la situación por parte del alumno le lleva a crear un modelo de dicha situación. Si dicho modelo pasa por un proceso de estructuración y simplificación (*simplifying/structuring*), se crearía un modelo más trabajado, pero dentro del ámbito real. El uso de las matemáticas (*mathematising*) permite traspasar dicho modelo al ámbito matemático. Una vez nuestro modelo está situado en el ámbito matemático, se puede proceder a realizar operaciones matemáticas sobre este (*working mathematically*) que permitan obtener una serie de resultados. Estos resultados, son resultados en el ámbito matemático, basados en números, datos, etc. Mediante el proceso de interpretación (*interpreting*) de esos datos, el alumno puede extrapolarlos de vuelta al mundo real. Finalmente, la validación (*validating*) de estos resultados permite regresar de nuevo al modelo inicial de la situación.

En este ciclo, es común que algunos de los pasos sean difíciles de distinguir a la hora de realizar un caso de modelización real. Por ello, se muestra de forma adicional el siguiente esquema, donde aparece el proceso de modelización de una forma más simplificada.

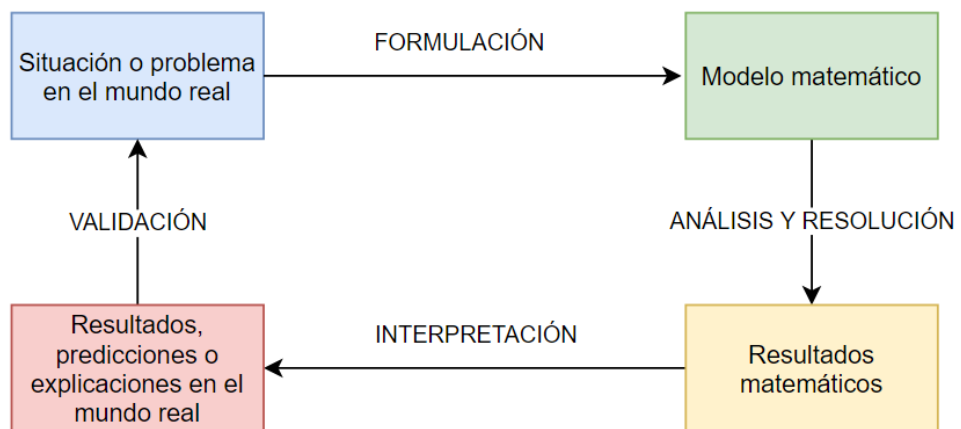


Ilustración 4 - Ciclo de modelización simplificado (elaboración propia)

En Gaisman (2009) se hace énfasis en el uso de esta metodología indicando que “los resultados de investigación muestran que, cuando se aprenden directamente los conceptos de las matemáticas no es fácil aplicarlos a la solución de problemas.” (p. 77), criticando así indirectamente la metodología tradicional de transmisión-recepción. Gaisman, adicionalmente, incide sobre una postura que concibe a las matemáticas como una actividad humana, buscando un proceso de enseñanza realista, desarrollado a partir de modelos originados a partir de situaciones en un determinado contexto específico.

Estas situaciones en contexto son presentadas al estudiante para que trabaje con ellas matematizando dicha situación y convirtiéndola en un modelo que funcionará como puente hacia una mayor comprensión de las matemáticas.

De acuerdo con Biembengut y Hein (2004), la modelación matemática presenta la ventaja de que permite mejorar las competencias de los alumnos y sus capacidades para leer, interpretar, formular y resolver problemas al mismo tiempo que el alumno aprende que las matemáticas pueden ser aplicadas a diversas áreas del conocimiento.

En definitiva, se trata de un tipo de metodología que trata de acercar las matemáticas al mundo real, al mismo tiempo que consigue una participación más activa por parte del alumnado.

3.4 Uso de nuevas tecnologías

Tal y como se expuso previamente en el apartado [3.2 Comprensión del concepto de derivada por parte del alumnado](#), son numerosos los autores que señalan las ventajas del uso de nuevas tecnologías con el objetivo de lograr una mejor comprensión del concepto de derivada por parte del alumno.

Un software bastante popular en los últimos años, el cual se está viendo muy utilizado como recurso de enseñanza se trata de **GeoGebra**. Este elemento presenta la ventaja de tratarse de un recurso muy intuitivo, interactivo y, sobre todo, de ser software libre de código abierto. Se encuentra programado en Java, siendo disponible en multitud de plataformas (Windows, macOS, Android, iOS, etc.). Resulta, además, un software muy versátil, ya que permite trabajar en el ámbito de la geometría, el álgebra, el cálculo y la estadística.

En este sentido, cabe destacar la investigación realizada por Córdoba, Ruiz y Rendón (2015), quienes realizan una propuesta metodológica para optimizar la integración de conceptos matemáticos de la derivada mediante el uso de mecanismos de tipo visual-geométrico que ofrecería la interacción del alumno con GeoGebra.

Córdoba et al. (2015) señalan un interés en los últimos años en el campo de didáctica de las matemáticas por el uso de software matemático gracias a las ventajas pedagógicas que este puede aportar (capacidad de almacenamiento, simulación de fenómenos difíciles de observar en la realidad, interacción con el alumno, posibilidad de procesos de evaluación y aprendizaje individualizados, etc.). Señalan, además, la importancia de que el sustituir los métodos tradicionales de enseñanza basados en el uso de libros y pizarra por herramientas informáticas no es suficiente si no se atiende a un enfoque distinto en la metodología donde el alumno adquiera mayor protagonismo en el proceso de aprendizaje.

Por otra parte, señalan que el uso de GeoGebra permite a los alumnos visualizar determinados conceptos de la derivada ayudando así a adquirir una comprensión del contenido que resultaría complicada ante la ausencia de los sistemas de representación proporcionados. Destacan, por otra parte, la ayuda proporcionada por GeoGebra de cara a visualizar correctamente conceptos relacionados con la tasa de variación media y la derivada, ya que permite complementar expresiones algebraicas con representaciones geométricas de dichos objetos matemáticos. GeoGebra permite representar contenidos abstractos en imágenes visuales que permitirán integrar conocimientos previos y relacionar los distintos conceptos del cálculo.

A modo de conclusión indican que, el uso de GeoGebra resulta beneficioso ya que es un recurso que permite dinamizar la clase, captar la atención de los estudiantes y suscitar en ellos una actitud más activa, creativa y participativa, que permitirá mejorar considerablemente el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, Cuevas, Rodríguez y González (2014), en su trabajo sobre la introducción al concepto de la derivada con el apoyo de las tecnologías digitales, sostienen que obtuvieron unos resultados alentadores logrando que la mayoría de los estudiantes alcanzaran con éxito un grado de comprensión conceptual y operativa del concepto de derivada de una función real.

Cuevas et al. (2014) realizan una propuesta basada en introducir tecnologías digitales como una herramienta cognitiva de apoyo con el objetivo de conseguir una participación más activa de los estudiantes y mejorar la comprensión adquirida del concepto de derivada. Para ello, utilizan el software CalcVisual y una serie de Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI). CalcVisual se trata de un software similar a GeoGebra, ya que permite al usuario trabajar con distintos modos de representación (numérica, gráfica, simbólica, etc.). Un ejemplo de EDVI se muestra en la siguiente imagen, donde se le pide al usuario que manipule dicho EDVI sobre el Barril de Kepler, lo cual le permitirá percibir cómo se consigue el volumen máximo en un cilindro al hacer variar su altura.

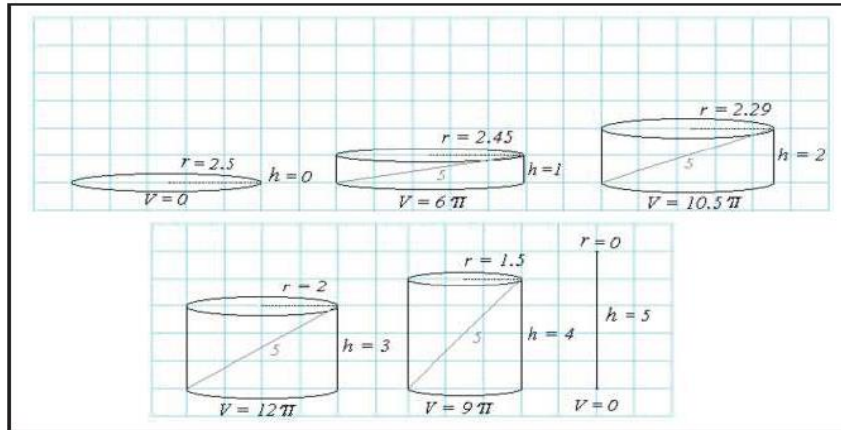


Ilustración 5 - EDVI sobre Barril de Kepler (Cuevas et al, 2014)

Mediante el empleo de ejemplos como este basados en la interacción con los EDVI acompañada de una guía a través de cuestionarios, el estudiante, de acuerdo con Cuevas et al. (2014), es capaz de adquirir una noción intuitiva del concepto de derivada sin necesidad de ser estudiada a partir de su definición como límite.

A modo de conclusión, Cuevas et al. (2014) indican los resultados obtenidos en su experimento. Se aplicó un pre-test a los estudiantes de nuevo ingreso en Ingeniería de Computación, mostrando que presentaron ciertas deficiencias en conceptos básicos aritméticos y algebraicos, además de una carencia de pensamiento funcional. Tras aplicar el experimento durante el curso de cálculo, se demostró que gran parte de los estudiantes comprendieron de forma intuitiva el concepto de derivada, elemento clave para entender posteriormente los conceptos de monotonía y aplicarlos a la resolución de problemas de optimización. Destacan finalmente una idea que ha sido mencionada en el transcurso de esta fundamentación didáctica, la necesidad de considerar como importantes todas las representaciones de la derivada sin priorizar unas con respecto a otras. Señalan, además, que la comprensión del concepto de derivada resulta muy útil para entender la tarea solicitada en problemas encajados en un determinado contexto.

4. Fundamentación epistemológica

En esta sección se procederá a desarrollar con cierto rigor matemático los contenidos correspondientes al temario de oposiciones asociado con la parte de la derivada de una función. Este contenido es determinado por la Orden de 9 de septiembre de 1993 del BOE, y se corresponde con el **TEMA 26: “Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones”**.

Las demostraciones de los teoremas expuestos aparecen adjuntas en el [ANEXO III](#) de este documento.

4.1 Concepto de derivada de una función en un punto

4.1.1 Definición

Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ y un punto $a \in I$, se define la **derivada de la función f en el punto a** , representada como $f'(a)$ como el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para que exista esta derivada de la función f en el punto a , es decir, para que la función f sea derivable en a , es necesario que exista este límite además de tratarse de un número finito.

En la siguiente gráfica, se muestra la definición de derivada en un punto de un modo ilustrativo.

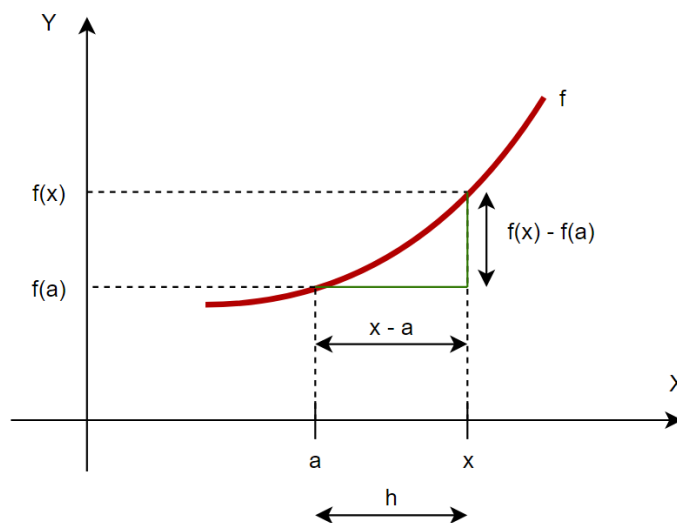


Ilustración 6 - Derivada de una función en un punto (interpretación gráfica) (elaboración propia)

Al cociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, el cual puede verse en ocasiones expresado como $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, se le denomina *cociente incremental*.

Si se denomina la variable h como la diferencia entre la variable x (punto tomado en el entorno del punto a) y el propio punto a , de modo que $x = a + h$ ó $h = x - a$, la definición de derivada en un punto a a partir del límite quedaría de la siguiente manera:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De esta forma, la derivada de una función en un punto se corresponde con el límite del cociente incremental que se obtiene al acercar al máximo posible la variable x con respecto al punto a , es decir, al hacer el intervalo h lo más pequeño posible.

La variable h es un incremento y , como tal, puede ser positivo o negativo. Es decir, el intervalo h puede situarse tanto a la izquierda como a la derecha del punto a , o, en otras palabras, la variable x puede aproximarse al punto a por la derecha o por la izquierda. De este hecho surge la condición para que una función sea derivable en un punto.

4.1.2 Condición de derivabilidad:

La condición necesaria y suficiente para que la función f definida anteriormente sea **derivable en el punto a** y por tanto **exista la derivada de la función f en a** es que se cumplan las siguientes proposiciones.

- 1) Existe el límite del cociente incremental cuando la variable x tiende al punto a por la derecha ($x \rightarrow a^+$) y se trata de un límite finito. Este límite se denomina $f'(a^+)$.

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ó} \quad f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- 2) Existe el límite del cociente incremental cuando la variable x tiende al punto a por la izquierda ($x \rightarrow a^-$) y se trata de un límite finito. Este límite se denomina $f'(a^-)$.

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ó} \quad f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- 3) Ambos límites expuestos en 1) y 2) son iguales. De este modo, este límite se denomina derivada de la función en el punto a , denotado como $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De este modo, se puede deducir que la derivada de una función en un punto, en caso de que exista, ha de ser **única**, ya que ambos límites han de coincidir.

4.1.3 Interpretación geométrica

Tomando como base la imagen mostrada en la Ilustración 6, si se unen los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$, se obtiene una recta secante a la gráfica de la función f .

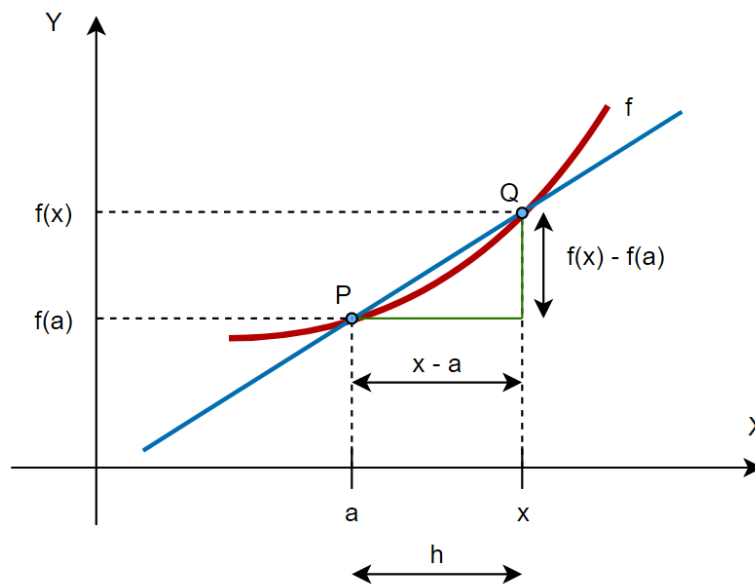


Ilustración 7 - Recta secante a f (elaboración propia)

En este punto, si se calcula la **pendiente** (s) de la recta secante a la gráfica de f , esta vendría dada por la siguiente fórmula:

$$s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Es decir, la pendiente de la recta secante a la gráfica coincide con el cociente incremental.

Por otra parte, tomando como referencia la definición de derivada de una función en un punto, aplicar el límite al cociente incremental implica **acercar** lo máximo posible los puntos P y Q de modo que la distancia horizontal entre ellos (h) sea prácticamente nula.

En la siguiente imagen, se muestra un ensayo realizado en el software GeoGebra mediante el cual se definen una serie de rectas secantes (*representadas por líneas discontinuas*) a través de parejas de dos puntos. Estas parejas de dos puntos tienen siempre un punto en común (A), el cual se corresponde con el punto donde se pretende evaluar la derivada de la función/curva (*representada en color verde*). De este modo, se puede observar que, a medida que los puntos que definen la recta secante a la curva se aproximan, la recta secante generada tiende a aproximarse a la recta **tangente** a la función en el punto A (*representada en color azul*).

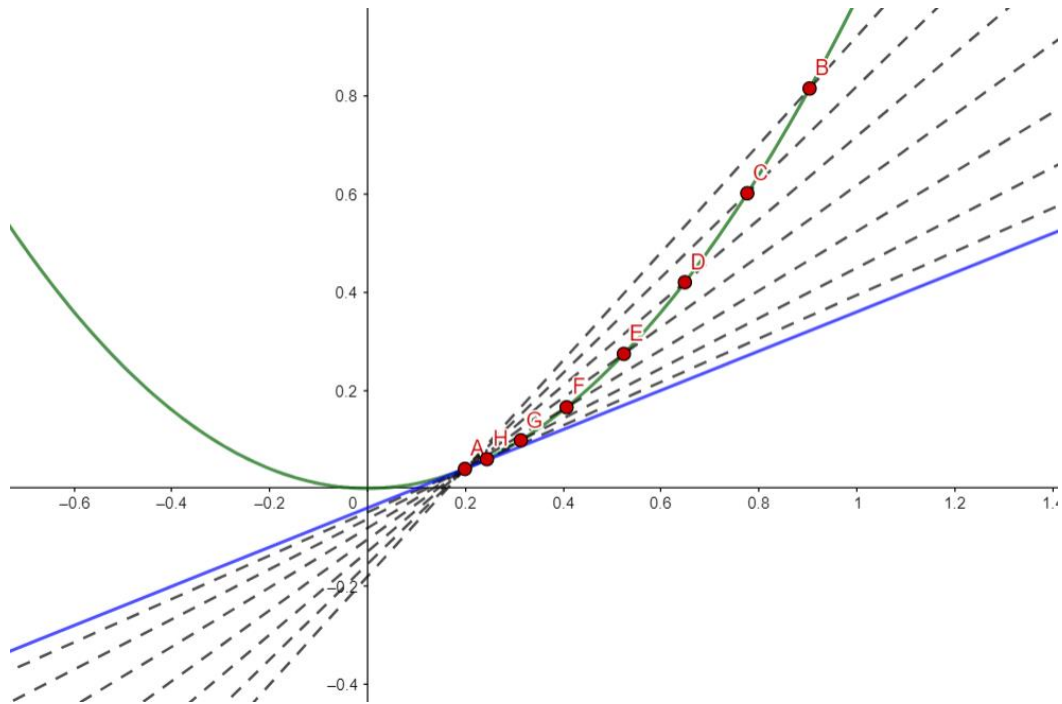


Ilustración 8 - Convergencia de rectas secantes (elaboración propia)

Volviendo al ejemplo anterior, al acercar al máximo los puntos P y Q, la recta secante definida por ambos puntos se aproximaría a una recta tangente a la función f en el punto P. Si, anteriormente, la pendiente (s) de la recta secante venía dada por la expresión del cociente incremental, la nueva pendiente (m) de la recta tangente se correspondería con la aplicación del límite a este cociente incremental cuando la distancia h tiende a cero. Al aplicar este límite, se obtiene la derivada de la función f en el punto $P(a, f(a))$.

$$s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \rightarrow \quad m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

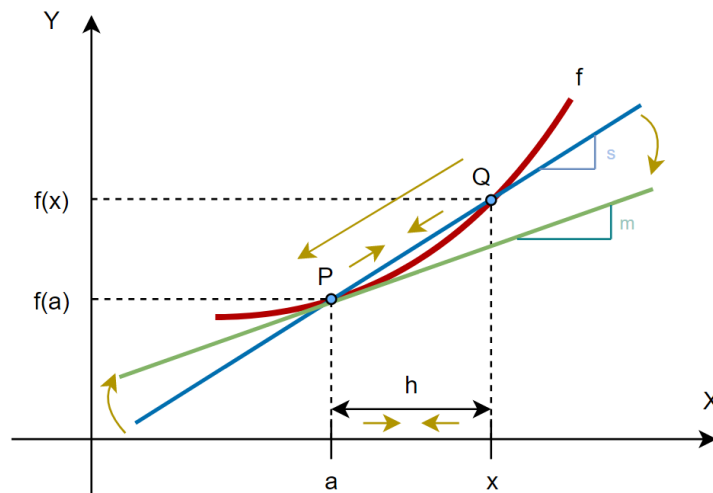


Ilustración 9 - Relación entre recta secante y recta tangente al aplicar límite (elaboración propia)

De este modo, sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ derivable en un punto $a \in I$, se define la **recta tangente (r) a la función f en el punto P(a, f(a))** como la recta que pasa por el punto $P(a, f(a))$ y cuya pendiente es la derivada de la función f en el punto $P(a, f(a))$, denominada como $f'(a)$. La ecuación de la recta r viene dada por la siguiente expresión en forma punto-pendiente.

$$r: \quad y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

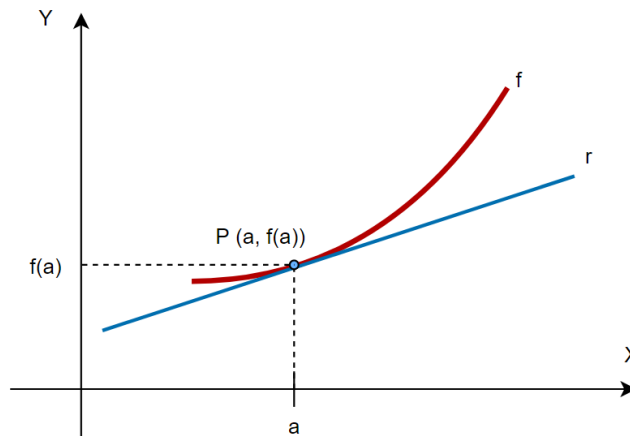


Ilustración 10 - Recta tangente a una función en un punto (elaboración propia)

De esta definición se deduce, por tanto, que la derivada de una función en un punto se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

4.2 Relación entre derivabilidad y continuidad

4.2.1 Derivabilidad \rightarrow Continuidad

Teorema. Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, si f es derivable en $a \in I$, entonces es continua en a .

Demostración: [DEMOSTRACIÓN 4.2.1](#) (ANEXO III)

4.2.2 ¿Continuidad \rightarrow Derivabilidad?

Teorema. Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, si f es continua en $a \in I$, esto no implica que f sea derivable en a .

Demostración: [DEMOSTRACIÓN 4.2.2](#) (ANEXO III)

4.3 Función derivada

Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, si f es derivable en todos los puntos del intervalo I (f es derivable $\forall x \in I$), la derivada de un punto cualquiera x perteneciente a I viene dada por la función denominada **función derivada** de $f(x)$. Esta función derivada se representa como $f'(x)$ y viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4.4 Álgebra de derivadas

Sean dos funciones $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $x \in I$ se cumplen las siguientes propiedades.

Derivada del producto de una función por una constante

Sea una constante $k \in \mathbb{R}$, la función kf es derivable en x y su derivada viene dada por la expresión:

$$(kf)'(x) = k * f'(x)$$

Derivada de la suma de funciones

La función $(f + g)$ es derivable en x y su derivada es:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Derivada del producto de funciones

La función $(f \cdot g)$ es derivable en x y su derivada es:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivada del cociente de funciones

La función $\frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$) es derivable en x y su derivada es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Demostración de la derivada del cociente de funciones:

[DEMOSTRACIÓN 4.4.1](#) (ANEXO III)

4.5 Regla de la cadena

Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subseteq J$, si se cumple que f es derivable en $a \in I$ y g es derivable en $f(a) \in J$, la función compuesta $(g \circ f)$ es derivable en a . La derivada de $(g \circ f)$ en a toma la siguiente expresión:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Demostración: [DEMOSTRACIÓN 4.5.1](#) (ANEXO III)

4.6 Derivada de la función inversa

Antes de comenzar con este apartado cabe señalar el concepto de función inyectiva y función biyectiva.

Una función inyectiva es una función tal que para cada elemento de su dominio le corresponde un único elemento como imagen, es decir, en el dominio de la función no puede haber dos valores que compartan un mismo valor como imagen.

Una función es biyectiva cuando, además de ser inyectiva, es sobreyectiva. Esto implica que existe una única imagen para cada elemento del dominio y, además, cada elemento del conjunto de salida es imagen de un elemento del conjunto de entrada o dominio. En definitiva, todos los elementos del conjunto de entrada se encuentran

asociados con todos los elementos del conjunto de salida de modo que a cada elemento del conjunto de entrada le corresponde un único elemento del conjunto de salida.

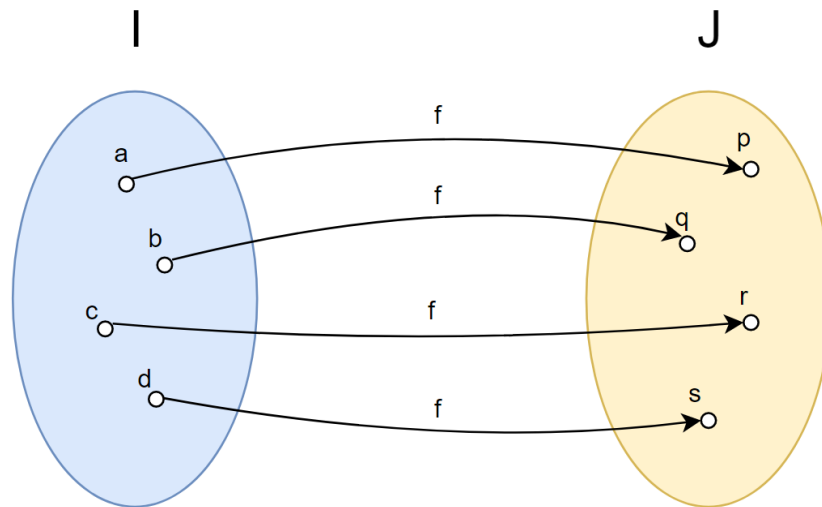


Ilustración 11 - Función biyectiva (elaboración propia)

Teorema. Sea $f: I \rightarrow J$ una función continua en I y biyectiva (a cada elemento de I le corresponde un único elemento de J siendo todo elemento de J imagen de un elemento de I), se define la función $f^{-1}: J \rightarrow I$ como la función inversa de f . La función inversa de f es aquella que cumple que $\forall x \in I, \exists! y \in J / f(x) = y, f^{-1}(y) = x$, tratándose por tanto también de una función biyectiva. Se define un punto $a \in I$ y un punto $b \in J$ tales que $f(a) = b$ y $f^{-1}(b) = a$, si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, f^{-1} es derivable en b y su derivada toma el valor:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Demostración: [DEMOSTRACIÓN 4.6.1](#) (ANEXO III)

4.7 Derivadas de funciones elementales

En la siguiente tabla se muestra la derivada de las funciones elementales.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
	$k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

x	1	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, \forall x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\forall x > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$\forall x \in \mathbb{R}$
x^k	kx^{k-1}	$k \neq 0, \forall x > 0$
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{tan } x$	$1 + \text{tan}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
$\text{senh } x$	$\text{cosh } x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{cosh } x$	$\text{senh } x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{tanh } x$	$1 - \text{tanh}^2 x = \frac{1}{\text{cosh}^2 x}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1,1)$
$\text{arccos } x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1,1)$
$\text{arctan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{arcsenh } x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\text{arccosh } x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\forall x > 1$
$\text{arctanh } x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in (-1,1)$

Demostraciones: [DEMOSTRACIÓN 4.7.1](#) (ANEXO III)

4.8 Derivadas sucesivas

4.8.1 Definición

Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos del intervalo I . Se define su función derivada $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ y se le denomina derivada primera de f en I . Si, a su vez, la función derivada primera f' es derivable en I , se define la función $f'': I \rightarrow \mathbb{R}$ como la derivada segunda de f en I , que, aplicada a un punto $x \in I$, es representada como $f''(x)$. Esta función f'' surge como resultado de aplicar de nuevo la función derivada sobre la derivada primera de f ($f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$). En términos genéricos, con $n \in \mathbb{N}$, si la función $f^{(n-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ denominada como derivada de orden $n - 1$ de f es derivable en I , se define la función $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ como la derivada de orden n de f ó *función derivada n-ésima de f* . Esta función $f^{(n)}$, aplicada a un punto $x \in I$, es representada como $f^{(n)}(x)$, y surge como resultado de aplicar la función derivada sobre la derivada de orden $n - 1$ de f ($f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$).

4.8.2 Fórmula de Leibniz

Teorema. Sea una función f y una función g , ambas derivables n veces en un intervalo I . Si se define la función h como el producto de las funciones f y g ($h = fg$), se cumple que h también es n veces derivable en I y su derivada n-ésima viene dada por la siguiente expresión ($n \in \mathbb{N}$):

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n)}$$

Demostración: [DEMOSTRACIÓN 4.8.1](#) (ANEXO III)

4.9 Aplicaciones de la derivada

En este apartado se expondrán una serie de ejemplos de aplicación de la derivada tanto dentro del área de las matemáticas como en otras disciplinas relacionadas.

4.9.1 Aplicaciones en matemáticas

Monotonía

Definición. Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en I y un punto $a \in I$. La función f es creciente (resp. decreciente) en a si para todos los puntos x_0 y x_1 situados en un entorno de a de modo que $x_0 < a < x_1$, se cumple que $f(x_0) \leq f(a) \leq f(x_1)$ (resp. $f(x_0) \geq f(a) \geq f(x_1)$). La función f es *estrictamente* creciente (resp. *estrictamente* decreciente) en a si para todos los puntos x_0 y x_1 situados en un entorno de a de modo que $x_0 < a < x_1$, se cumple que $f(x_0) < f(a) < f(x_1)$ (resp. $f(x_0) > f(a) > f(x_1)$).

Mediante el uso de la derivada de una función en un punto, se pueden determinar las propiedades de crecimiento o decrecimiento de la función en dicho punto tal y como expresa el siguiente teorema.

Teorema. Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $a \in I$ tal que f es derivable en a :

- i. Si $f'(a) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en a .
- ii. Si $f'(a) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en a .
- iii. f es creciente en a si y solo si se cumple que $f'(a) \geq 0$.
- iv. f es decreciente en a si y solo si cumple que $f'(a) \leq 0$.

Observación. Las propiedades (i) y (ii) no son recíprocas.

Extremos relativos

Definición. Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en I y un punto $a \in I$. La función f tiene un máximo relativo (resp. mínimo relativo) en a si existe un entorno de a de modo que para todo x perteneciente a dicho entorno, se cumpla que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). Si se cumple que $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$) en sentido estricto, se dice que la función f tiene un máximo relativo estricto (resp. mínimo relativo estricto) en a .

Para intervalos donde la función en cuestión sea derivable, el uso de la derivada permite hallar los puntos donde hay presente un máximo o mínimo relativo, aplicando el teorema de Fermat.

Teorema de Fermat. Sea una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en I derivable en un punto $a \in I$. Si f tiene un extremo relativo en a , se cumple que $f'(a) = 0$.

Observación. Para hallar los máximos y mínimos relativos de una función es necesario, además de la aplicación de este teorema, el estudio de la función en su entorno determinando si es creciente o decreciente en puntos de dicho entorno, ya que este teorema no presenta reciprocidad. En otras palabras, teniendo una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en I derivable en un punto $a \in I$, si $f'(a) = 0$, esto no implica que f tenga un extremo relativo en a . Un ejemplo de este hecho es la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3$, función que cumple que $f'(0) = 0$, sin presentar un extremo relativo en $x = 0$.

Teorema de Rolle

Teorema de Rolle. Sea una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , si se cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

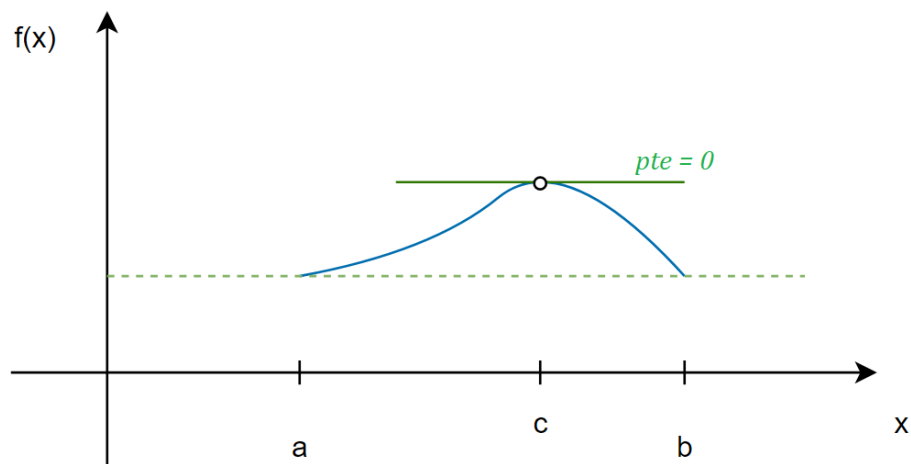


Ilustración 12 - Teorema de Rolle (elaboración propia)

Teorema del valor medio

El Teorema del valor medio se trata de una generalización del teorema de Rolle cuando no se cumple que $f(a) = f(b)$. Geométricamente, se trata del mismo problema tras aplicar una rotación a los ejes de coordenadas.

Teorema del valor medio. Sea una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La interpretación geométrica que se deduce de este teorema es que existe un punto $P(c, f(c))$ tal que la recta tangente a la función f en P tiene la misma pendiente que la recta resultante de unir los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

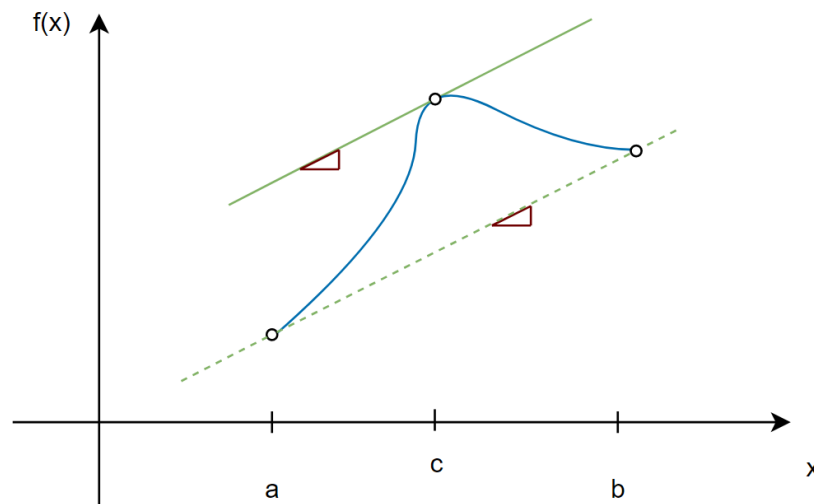


Ilustración 13 - Teorema del valor medio (elaboración propia)

Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital. Sean dos funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en $[a, b]$, continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Sea un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ y $g(c) = 0$. Si la función $g'(x)$ no se anula para un $x \neq c$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla resulta útil en el cálculo de límites cuando se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

4.9.2 Aplicaciones en física e ingeniería

Velocidad y aceleración instantáneas

Sea un móvil que describe una trayectoria unidireccional (se emplea un movimiento únicamente en la dirección de un eje para prescindir del uso de vectores y simplificar las expresiones). Si la distancia recorrida por el móvil con respecto a un punto de partida fijado viene dada por la función $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en \mathbb{R} tal que $t \rightarrow s(t)$, siendo la variable t un instante de tiempo determinado, el cálculo de la velocidad instantánea del móvil viene dado por la función $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \rightarrow v(t)$. Esta función v es igual a la función derivada primera de s o s' .

$$v(t) = s'(t)$$

Si s es derivable en un punto $c \in \mathbb{R}$, la velocidad instantánea del móvil en un instante de tiempo c viene dada por la primera derivada de la función s en el punto c .

Por otro lado, la aceleración instantánea del móvil (si v es continua y derivable en \mathbb{R}) viene dada por la función $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \rightarrow a(t)$. Esta función a es igual a la función derivada segunda de s o s'' .

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Si v es derivable en un punto $c \in \mathbb{R}$, la aceleración instantánea del móvil en un instante de tiempo c viene dada por la segunda derivada de la función s evaluada en el punto c .

Intensidad de corriente eléctrica

Sea $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que representa la carga eléctrica de un conductor en función del tiempo t tal que $t \rightarrow q(t)$. Si la función q es continua y derivable en \mathbb{R} , se define la función $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función que representa la intensidad de corriente instantánea tal que $t \rightarrow I(t)$. Esta función I se corresponde con la función derivada primera de q o q' .

$$I(t) = q'(t)$$

Si se desea hallar la intensidad de corriente instantánea que circula por el conductor en un instante de tiempo $c \in \mathbb{R}$, se ha de calcular la derivada de q en c , lo que se corresponde con evaluar la función I para $t = c$.

Tensión eléctrica en una bobina

Sea $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que representa la intensidad eléctrica en una bobina en función del tiempo t tal que $t \rightarrow i(t)$. Si la función i es continua y derivable en \mathbb{R} , se define la función $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función que representa la caída de tensión

instantánea en la bobina tal que $t \rightarrow V(t)$. Esta función V se corresponde con el producto de una constante L (dependiente de la bobina) por la función derivada primera de i o i' .

$$V(t) = L \cdot i'(t)$$

Si se desea hallar la caída de tensión instantánea en la bobina en un instante de tiempo $c \in \mathbb{R}$, se ha de calcular la derivada de i en c y multiplicar su valor por L , lo que se corresponde con evaluar la función V para $t = c$.

5. Fundamentación curricular

En este apartado, se realizará un análisis del currículo correspondiente a la asignatura de “Matemáticas I” del curso de 1º de Bachillerato. Para ello, se hará uso de los documentos oficiales que se muestran a continuación, donde aparecen una serie de normas cuyo cumplimiento resulta obligatorio tanto en el desarrollo de la proyección didáctica como en el desarrollo del currículo de la asignatura.

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (BOE).
- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

En estos documentos aparece regulado el contenido que se ha de impartir en cada curso de Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

En concreto, el análisis realizado en este apartado se efectuará centrado en el bloque 3 correspondiente con el bloque de análisis, donde se encuentra inmerso todo el contenido a impartir en relación con las derivadas.

Para el análisis, se tomarán 2 libros de texto de diferentes editoriales, y se procederá a comparar los contenidos presentes en ambos. Se observará la relación presente entre los contenidos de los dos libros (comparándolos uno frente al otro) así como la relación entre el contenido de los libros y el contenido mínimo exigido por la normativa. Se comprobará, de este modo, que ambos cumplan con la normativa establecida en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre y en la Orden de 14 de julio de 2016.

Los libros de texto seleccionados para el análisis se corresponden con los libros de la asignatura “Matemáticas I” de la editorial McGraw-Hill (año 2019) y la editorial Edebé (año 2015).

De acuerdo con la normativa establecida en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, los contenidos que han de estar presentes en el bloque de análisis son los siguientes:

- Funciones reales de variable real.
- Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos.
- Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Funciones de oferta y demanda.
- Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones.
- Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades.
- **Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.**
- **Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.**
- **Representación gráfica de funciones.**

De todos estos contenidos, los que aparecen resaltados en negrita son los contenidos correspondientes a la unidad didáctica desarrollada. Estos contenidos resaltados, aparecen en cada libro de texto en el tema correspondiente a las derivadas. A continuación, se muestra el orden cronológico seguido por cada libro de texto a lo largo del curso, para contextualizar la situación del tema de las derivadas en función de los contenidos anteriores y posteriores.

McGraw-Hill	Edebé
• Unidad 1. Números reales	• Unidad 1. Números reales
• Unidad 2. Ecuaciones, sistemas e inecuaciones	• Unidad 2. Polinomios y fracciones algebraicas
• Unidad 3. Trigonometría	• Unidad 3. Ecuaciones, sistemas e inecuaciones
• Unidad 4. Vectores	• Unidad 4. Trigonometría
• Unidad 5. Números complejos	• Unidad 5. Resolución de triángulos
• Unidad 6. Geometría analítica plana	• Unidad 6. Números complejos
• Unidad 7. Cónicas	• Unidad 7. Vectores
• Unidad 8. Funciones	• Unidad 8. Elementos del plano
• Unidad 9. Límites y continuidad	

<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 10. Derivadas • Unidad 11. Estadística • Unidad 12. Probabilidad y combinatoria 	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad 9. Cónicas • Unidad 10. Funciones de variable real • Unidad 11. Sucesiones y límites • Unidad 12. Derivadas • Unidad 13. Estadística bidimensional • Unidad 14. Probabilidad.
---	--

Como se puede observar en la tabla, el orden de las unidades en ambos libros de texto es muy similar. Cabe resaltar el acierto en la distribución de los contenidos por parte de ambos. Para comprender correctamente las derivadas, resulta fundamental comprender los principios relacionados con las funciones y con los límites de funciones. Estos contenidos aparecen situados justo antes del tema de las derivadas, lo cual supone un claro acierto. Además, para la interpretación geométrica de la derivada, es necesario un manejo solvente en el cálculo de ecuaciones de una recta, contenido que será estudiado en la unidad 6 de McGraw-Hill (geometría plana) o en la unidad 8 de Edebé (elementos del plano).

Los contenidos marcados en negrita en la lista anterior hacen referencia al mínimo contenido que debe estar incluido en ambos libros de texto. No obstante, es muy común que las editoriales decidan ampliar el contenido estudiado. A continuación, se muestra una tabla donde se comparan los contenidos incluidos para ambos libros de texto en la unidad correspondiente al tema de las derivadas. Estos contenidos aparecen ordenados cronológicamente según su aparición.

McGraw-Hill (UNIDAD 10. DERIVADAS)	Edebé (UNIDAD 12. DERIVADAS)
<ul style="list-style-type: none"> • El problema de la recta tangente • Derivada de una función • Tasas de variación • Técnicas de derivación • Regla de la cadena o derivación compuesta • Derivada de las funciones logarítmica y exponencial • Derivada de las funciones trigonométricas 	<ul style="list-style-type: none"> • Tasa de variación • Derivada de una función en un punto • Interpretación geométrica de la derivada • Función derivada • Derivadas de las funciones elementales • Función derivada y operaciones (suma, producto, cociente y regla de la cadena)

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Funciones crecientes y decrecientes• Extremos relativos• Máximos y mínimos absolutos• Concavidad y puntos de inflexión• Representación gráfica de funciones• Problemas de optimización | <ul style="list-style-type: none">• Monotonía de una función• Problemas de optimización |
|---|--|

Con respecto a los contenidos exigidos por el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, ambos libros contemplan el mínimo exigido. En primer lugar, se procederá a realizar un análisis con respecto a cómo ambos libros abordan estos contenidos mínimos.

5.1 Comparación de contenidos mínimos

Derivada de una función en un punto

Con respecto a el concepto de derivada de una función en un punto, existe una diferencia principal a simple vista. Ambos libros introducen el concepto en segundo lugar, precedido de un concepto anterior que difiere para cada caso. El libro de McGraw-Hill introduce en primer lugar el problema de la recta tangente, mientras que el libro de Edebé se apoya en la introducción previa del concepto de tasa de variación. En ambas editoriales, el concepto de derivada de una función en un punto es introducido mediante la expresión del límite del cociente incremental, seguido del estudio de las propiedades de derivabilidad y continuidad.

Interpretación geométrica. Recta tangente.

La interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto es abordada igualmente de forma distinta. En McGraw-Hill, se hace alusión a esta interpretación en el apartado 1 planteando el problema de la recta tangente como el límite que surge cuando los puntos que definen una recta secante a una función se aproximan cada vez más. Por otro lado, en el apartado 2 (derivada de una función), tras exponer el concepto de derivada de una función en un punto y antes de pasar a las propiedades de derivabilidad y continuidad, se hace hincapié en su interpretación

geométrica volviendo al concepto de pendiente de la recta tangente, para lo cual se introduce un ejemplo.

En Edebé, la interpretación geométrica se introduce después del concepto de derivada de una función en un punto, pero, al haber introducido inicialmente el concepto de tasa de variación, se apoya de este relacionando tasas de variación medias con pendientes de rectas secantes para exponer las ideas.

En Edebé, en el ejercicio propuesto como ejemplo se pide el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto. Como todavía no se han estudiado las reglas de derivación, la pendiente de la recta tangente es calculada como un límite. En McGraw-Hill, en el ejemplo propuesto piden calcular en primer lugar la derivada de la función en un punto y, posteriormente, interpretar el resultado, indicando que se trata de la pendiente de la recta tangente. No obstante, McGraw-Hill aporta dos actividades de cálculo de recta tangente (sin resolver) en el estilo del ejercicio resuelto en Edebé, pidiendo directamente hallar la pendiente de la recta tangente a una función en un punto, y en algunos casos, la ecuación completa.

Otro dato importante, a favor de Edebé, es que aportan una indicación en los márgenes acerca de la pendiente de la recta normal obtenida a partir de la pendiente de la recta tangente al punto en cuestión. En McGraw-Hill, aparecen ejercicios de cálculo de recta normal, pero la idea de cómo obtener la pendiente de la recta normal a partir de la recta tangente no aparece ya que ha sido cubierta en la unidad 6 (geometría analítica plana).

Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.

Con respecto al concepto teórico de función derivada, mencionar que queda expresado de forma más explícita en el libro de texto de Edebé, donde se dedica un subapartado exclusivamente para su definición. Esto hace referencia a cómo se expresa en el libro de texto el paso de hablar de derivada de una función en un punto a una función derivada aplicable todos los puntos de un intervalo derivable, sustituyendo el punto de abscisa $x=a$ por una variable x .

Con respecto al cálculo de derivadas, existen una serie de diferencias entre ambos libros de texto. En primer lugar, en McGraw-Hill se comienza mostrando la regla para derivar una función constante, aportando su sencilla demostración mediante el uso de límites, y posteriormente se expone la regla para derivar una función potencial seguida de un ejemplo resuelto. A continuación, se parte la exposición de las derivadas de funciones típicas para pasar al álgebra de derivadas, mostrando las reglas de derivación de una constante por una función (aportando demostración de esta), una

suma de funciones, el producto de funciones y el cociente de funciones, todas ellas con un ejemplo resuelto. Además, un dato diferencial es que añaden ejercicios resueltos de derivadas de orden superior.

Con todas estas propiedades de cálculo de derivadas vistas hasta ahora, en McGraw-Hill se pasa al apartado de la regla de la cadena, para posteriormente explorar las derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales y las derivadas de las funciones trigonométricas. Cabe destacar que, en McGraw-Hill, abundan las demostraciones acerca de la obtención de fórmulas de cálculo de derivadas siempre que sean relativamente sencillas.

Por otra parte, el libro de texto de la editorial Edebé hace más hincapié, como se ha mencionado antes, en la definición del concepto de función derivada, diferenciándolo del concepto de derivada de una función en un punto. Propone ejercicios resueltos de cálculo de derivadas aplicando límites ya que, en este apartado, no se han visto todavía las reglas de derivación. En el apartado de “función derivada”, se introduce el concepto de derivadas sucesivas.

En Edebé, se muestra una tabla donde aparecen las derivadas de las funciones típicas al comienzo del apartado “Derivadas de las funciones elementales”. En esta tabla, se incluyen directamente la derivada de la función constante, potencial, exponencial, logarítmica, seno y coseno. Posteriormente, se exponen las reglas de derivación de la suma, producto, cociente de funciones y la regla de la cadena, todas ellas con ejemplos resueltos.

Representación gráfica de funciones

En este apartado, ambas editoriales comienzan estudiando los conceptos de crecimiento y decrecimiento (monotonía). Para este apartado, cabe destacar que las instrucciones acerca de cómo interpretar las propiedades y los datos obtenidos de una función para realizar su representación son más intuitivas en el libro de texto de McGraw-Hill. Visualmente, las ideas y las instrucciones de procedimiento aparecen mejor organizadas mediante recuadros. Los conceptos de monotonía en Edebé tienden a ser expresados con mayor rigor matemático y mayor dificultad de interpretación por un alumno de esta etapa.

Posteriormente, ambas avanzan hacia el estudio de los extremos relativos. En este sentido, ocurre igual que en el apartado anterior, la organización de las ideas parece más intuitiva y visual en el libro de McGraw-Hill.

Por otra parte, en representación de funciones, Edebé llega a contemplar únicamente monotonía y extremos relativos, mientras que en McGraw-Hill se amplían

muchos conceptos con el objetivo de lograr una representación de funciones mucho más exacta. En McGraw-Hill, se dedica un apartado completo a la definición de máximos y mínimos absolutos, proporcionando en todo momento técnicas intuitivas enfocadas a la resolución de actividades.

Adicionalmente, en McGraw-Hill se estudia la concavidad de una función y los puntos de inflexión haciendo uso de las derivadas sucesivas. Finalmente, McGraw-Hill dedica un apartado completo a la representación gráfica de funciones. En este apartado, vuelve a destacar por proporcionar una guía muy intuitiva sobre cómo proceder ante problemas de este tipo. En esta guía, resume los pasos a seguir y recoge e integra los conceptos de monotonía, extremos relativos y concavidad vistos anteriormente. Además, plantea 4 ejemplos resueltos de representación de funciones y 4 actividades sin resolver.

5.2 Análisis de los contenidos ampliados

En primer lugar, uno de los conceptos ampliados en ambas editoriales es la tasa de variación. Aunque al final este concepto presenta el mismo significado que el obtenido con la interpretación geométrica, resulta muy oportuno señalarlo para enriquecer el conocimiento del alumnado. En ambas editoriales, se exponen los conceptos de tasa de variación media y tasa de variación instantánea y proponen un ejercicio resuelto, pero en McGraw-Hill, este ejercicio representa un problema orientado a la vida real, en el que se trabaja con velocidades, acercándolo más hacia la física. Adicionalmente, en McGraw-Hill se plantean dos actividades bastante enfocadas a la vida real, planteando casos relacionados con los ingresos de una empresa y la evolución de la población española.

En segundo lugar, ambas editoriales desarrollan un apartado sobre el uso de las derivadas en problemas de optimización. En este apartado, Edebé opta por proponer un ejemplo resuelto que trata sobre la optimización (al máximo) del área de un triángulo con un perímetro fijado. Por otra parte, McGraw-Hill vuelve a ser en este punto más visual e intuitivo aportando una guía muy correcta sobre los pasos necesarios en la ejecución de un problema de optimización. Cabe destacar, que Edebé ofrece aquí una guía bastante similar, pero en términos visuales, la solución de McGraw-Hill resulta mucho más atractiva. En este apartado, McGraw-Hill ofrece un total de 4 problemas resueltos que, si se comparan con el problema de optimización del área de un triángulo de Edebé, estos problemas se encuentran mucho más enfocados a situaciones de la vida real y dan mucho pie a aplicar técnicas de modelización matemática. Se trata de

problemas muy aplicados y contextualizados a los que el alumno les puede ver mucho más sentido.

Con respecto al cálculo de derivadas y técnicas de derivación, cabe destacar que la editorial McGraw-Hill da un paso más, ofreciendo las derivadas de las funciones secante, cosecante, cotangente y las funciones inversas arco-seno, arco-coseno y arco-tangente.

Por otro lado, un hecho destacable a la hora de ampliar contenidos por parte de la editorial McGraw-Hill reside en el uso de demostraciones matemáticas. Se trata de demostraciones bastante sencillas e intuitivas que, para el alumnado con mayor motivación y ganas de aprender más, pueden resultar muy llamativas. En concreto, estas demostraciones son:

- Derivada de la función constante.
- Derivada del producto de una constante por una función.
- Derivada de la función logaritmo neperiano.
- Demostración de la derivada de la función e^x .
- Demostración de la derivada de la función tangente a través de la derivada de un cociente de funciones.

Destacar que, para demostrar la derivada de la función exponencial, es necesario saber aplicar la regla de la cadena. Esto puede ser el motivo por el cual las derivadas de las funciones típicas aparecen divididas en distintas partes de la unidad.

Además, se propone como complemento adicional que el alumno realice de forma autónoma la demostración de la derivada de la suma de dos funciones empleando la definición a partir del límite del cociente incremental.

Al final del tema, Edebé cumple la carencia de actividades propuestas a lo largo de la unidad (en comparación a McGraw-Hill) aportando un abundante número de ejercicios resueltos, así como sin resolver. En este punto, McGraw-Hill vuelve a destacar ofreciendo una gran ayuda visual, ya que incluye un cuadro resumen que integra la mayor parte de los conceptos vistos en la unidad.

Si bien ambas editoriales proponen muchos ejercicios al final del tema, McGraw-Hill sobresale en dos aspectos que permiten ampliar bastante el contenido y que pueden resultar especialmente interesantes para alumnos que presenten un nivel más avanzado. En primer lugar, propone 3 problemas resueltos que se corresponden con ejercicios de pruebas de acceso a la universidad de distintas comunidades autónomas. Junto al enunciado de estos problemas, aparece una guía muy intuitiva del procedimiento que el alumno ha de llevar a cabo para la resolución. En las últimas páginas, McGraw-Hill añade ejercicios propuestos que van un paso más allá a nivel de

dificultad, de forma que incluso llegan a incluir ejemplos de problemas de concursos y olimpiadas matemáticas, lo cual lo convierte en un libro de texto bastante atractivo.

5.3 Conclusiones

A modo de resumen, ambos libros de texto cumplen con los contenidos exigidos por la normativa. No obstante, en general, el libro de texto de la editorial McGraw-Hill sobresale en varios aspectos y amplía los contenidos en mayor medida.

El principal aspecto donde este libro destaca es en la cantidad de problemas propuestos enfocados a la vida real. Se puede apreciar que el enunciado de este tipo de problemas está muy trabajado y trata de crear un contexto real con el objetivo de motivar al alumno en la realización del problema.

Por otra parte, el libro de texto de la editorial McGraw-Hill destaca también en el hecho de ir más allá e incluir demostraciones sencillas acerca de la obtención de las fórmulas que posteriormente serán empleadas en las actividades y problemas. Este hecho puede dar lugar a un aumento en la motivación de aquellos alumnos que se encuentren especialmente atraídos por las matemáticas.

Por otra parte, el lenguaje empleado en el libro de McGraw-Hill resulta muy entendible, de fácil comprensión. Las estrategias que tiene que desarrollar el alumno en la resolución de problemas quedan expuestas de una forma muy clara y visual. Adicionalmente, se observa con abundancia una tendencia a asociar continuamente las ideas estudiadas sobre las derivadas, acercándolas así hacia una perspectiva global.

Por otro lado, en el libro de McGraw-Hill se proponen muchas actividades y ejercicios resueltos en cada apartado, mientras que en el de Edebé, estos ejercicios aparecen al final del tema. Quizás, el estilo empleado en el libro de Edebé resulte menos visual, pero causa un aspecto más formal y riguroso. Esto no quiere decir que la expresión de los contenidos en el libro de McGraw-Hill carezca de rigor matemático, sino que, en el libro de Edebé, el lenguaje empleado resulta menos adecuado para la comprensión por parte de alumnos de 1º de Bachillerato. Una ventaja que se aprecia en el libro de Edebé es que se hace un uso ligeramente superior del contenido en los márgenes para aportar datos adicionales muy interesantes.

Para finalizar, destacar que, aunque el orden de desarrollo de los contenidos es distinto, ambas editoriales cubren los contenidos básicos y ofrecen una solución apropiada. No obstante, en líneas generales, la editorial McGraw-Hill ofrece una solución más completa.

6. Proyección didáctica

6.1 Título

La presente unidad didáctica se titula “TRANSMISIÓN, COMPRENSIÓN Y AFIANZAMIENTO DEL CONCEPTO DE DERIVADA”. De acuerdo con los criterios establecidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en esta unidad didáctica se desarrollan los contenidos correspondientes a la asignatura **Matemáticas I** del curso 1º de Bachillerato, concretamente al bloque 3 de análisis.

6.2 Justificación

La derivada de una función en un punto resulta una herramienta muy empleada en la actualidad en diversos ámbitos de la ciencia y tecnología. Se trata, así, de un recurso muy utilizado en diversas disciplinas.

Dentro de estas disciplinas, se encuentran las propias matemáticas, donde el uso de la derivada de una función resulta muy útil en diversas facetas del cálculo, las matemáticas aplicadas, etc.

Aparte de las matemáticas, las derivadas son empleadas en gran medida en el área de la física, donde además de resultar útiles son especialmente necesarias en procesos de cálculo diferencial. Por otra parte, se encontraría el área de la ingeniería. En ingeniería, los conceptos de matemáticas aplicadas y física son combinados entre sí para la resolución de problemas con una componente práctica y tecnológica, por lo que no es de extrañar observar una gran abundancia de las derivadas en distintas parcelas de la ingeniería (ingeniería mecánica, ingeniería eléctrica, ingeniería electrónica, etc.).

En definitiva, el alumno que posea una proyección académica de cara al futuro enfocada en el campo de las matemáticas, la ciencia o la tecnología, tendrá muy presente el concepto de derivada en diversas etapas de su trayectoria académica, necesitando así tanto una comprensión del concepto adecuada como un manejo solvente de las técnicas de resolución de problemas relacionados.

Con respecto a esto último, la mayoría de alumnos no suelen presentar problemas a la hora de resolver problemas y aplicar las reglas y técnicas de derivación correctamente. No obstante, se hace evidente, en base a los trabajos de investigación mencionados en el apartado “[Fundamentación didáctica](#)”, que gran parte de los alumnos presentan problemas a la hora de afianzar correctamente el concepto de

derivada en el momento de su presentación, cuando existe una primera toma de contacto. Si bien es muy común que el concepto de derivada y su significado global queden afianzados en etapas posteriores de aprendizaje, su comprensión tardía puede generar conflictos en las etapas intermedias.

Por otra parte, la no comprensión del concepto de derivada, así como el desconocimiento de su utilidad y su propósito, puede provocar una desmotivación del alumno generada por una percepción del contenido errónea que le lleve a concebir el contenido con una mayor dificultad de la que realmente posee. Dicho en otras palabras, el alumno que no es capaz de entender el concepto de la derivada, su utilidad y por qué ha sido una invención por parte de los matemáticos, puede verse desmotivado y percibir las derivadas como algo más difícil de lo que realmente es, generando un rechazo por su parte hacia los contenidos de análisis matemático.

En este punto es donde entra en juego esta unidad didáctica, aplicada al momento en el que los estudiantes tienen una primera toma de contacto con el concepto de derivada, en el curso de 1º de Bachillerato. La unidad didáctica será aplicada a la asignatura "*Matemáticas I*" ya que se considera que el impacto de las derivadas y de los conceptos de análisis en general tienen una mayor presencia futura en alumnos que cursen estudios relacionados con la ciencia y tecnología que, por el contrario, en los que opten por estudios relacionados con las ciencias sociales.

En definitiva, con esta unidad didáctica se pretende que en el curso de 1º de Bachillerato el alumno sea capaz de comprender el concepto de derivada, su función y propósito, además de proporcionarle solvencia en la resolución de problemas relacionados de cara a etapas posteriores.

De acuerdo con los contenidos incluidos en el RD 1105/2014 de 26 de diciembre, las derivadas serán una parte importante del contenido en la asignatura posterior de Matemáticas II en 2º de Bachillerato, donde el alumno tendrá que aplicarla en problemas de optimización, en el cálculo de límites mediante la regla de L'Hôpital y en el teorema de Rolle y del valor medio. Por otra parte, en la asignatura de 2º de Bachillerato de Física, el manejo de las derivadas será necesario para el entendimiento y la aplicación de leyes como, por ejemplo, las leyes de Faraday-Henry y Lenz en el campo del electromagnetismo.

El contenido de esta unidad didáctica se desarrolla sobre el tema 10 "Derivadas". Este tema vendrá precedido por el tema 9 "Límites y continuidad", dentro del mismo bloque de análisis. La ubicación de este tema es la correcta ya que, para la comprensión del concepto de derivada, es necesaria la previa comprensión del concepto de límite. A nivel de bloque, esta unidad didáctica vendrá precedida por el bloque 4 de geometría, ya que también resulta necesario que los alumnos adquieran una comprensión de la interpretación geométrica de la derivada a través de la recta tangente a una gráfica. En

este bloque de geometría, los alumnos habrán explorado los conceptos relacionados con las ecuaciones de la recta, entre los cuales resulta fundamental la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

Serán trabajos los conceptos relacionados con la derivada como pendiente de la recta tangente, la relación de la derivada con la tasa de variación media aplicando el concepto de límite, la visión de la derivada como límite del cociente incremental, técnicas de derivación y aplicaciones a la representación de funciones y el estudio de sus propiedades (monotonía, máximos y mínimos, asíntotas, concavidad y convexidad, etc.), además de la aplicación a problemas de optimización. Todo este contenido aportará una buena base de cara a etapas posteriores.

6.3 Contextualización del centro y del aula

Esta unidad didáctica está contextualizada para el C.D.P. “San Antonio de Padua”, un centro acogido al régimen de conciertos educativos en las etapas de Educación Infantil (2º ciclo), Educación Primaria y Secundaria regulado en el Título IV de la LOE, Título IV de la LOE y en sus normas de desarrollo. Asimismo, tiene una parte privada que consta de: Educación Infantil (1º ciclo) y Bachillerato.

Está situado en Martos, provincia de Jaén, en una población de unos 25.000 habitantes, que viven fundamentalmente de la agricultura olivarera y que además cuentan con un floreciente polígono industrial, con gran presencia de empresas afines al sector de la automoción y la logística.

El centro se adecua a los requerimientos previstos en el R.D. 132/2010 por el que se establecen los requisitos mínimos de los centros. Para el desarrollo de la asignatura de Matemáticas I de 1º de Bachillerato, el centro dispone de los medios y recursos suficientes. Concretamente, todas las aulas cuentan con ordenador, proyector, pantalla y pizarra. En el mismo hay también una biblioteca con libros, revistas y periódicos propios de la asignatura y varias aulas TIC, además del resto de las instalaciones.

La organización y el funcionamiento del centro responderán a los siguientes principios:

- a) El carácter católico del centro.
- b) La plena realización de la oferta educativa contenida en el carácter propio del centro.
- c) La configuración del centro como comunidad educativa.

Este centro abarca actualmente las etapas Infantil (1º y 2º Ciclo), Primaria (1º, 2º y 3º Ciclo), E.S.O. (1º y 2º ciclo), y Bachillerato.

El **Departamento de Matemáticas** consta de 4 profesores, de los cuales 3 imparten clase en cursos de E.S.O. y 1 imparte clase en ambos, Bachillerato y E.S.O.

El centro, entre otros, se encuentra inmerso en los siguientes planes y programas:

- Plan de Bilingüismo.
- Plan de Desarrollo Europeo.

En cuanto al curso de 1º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas I se cuenta con 9 alumnas y 15 alumnos. Ninguno de ellos requiere necesidades educativas especiales.

6.4 Objetivos

Los objetivos que se pretenden lograr con la elaboración y puesta en práctica de la presente unidad didáctica hacen referencia a una serie de logros marcados que se han de cumplir tras la consecución del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se clasifican en tres grupos: objetivos de etapa, objetivos de área y objetivos de la unidad.

6.4.1 Objetivos de etapa

Los objetivos de etapa se establecen de acuerdo al criterio establecido en el RD 1105/2014 de 26 de diciembre. De acuerdo con el documento oficial, el Bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
- Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.

- Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
- Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

6.4.2 Objetivos de área

Los objetivos de área hacen referencia a la asignatura específica de Matemáticas I del curso de 1º de Bachillerato y se encuentran enumerados en la Orden del 14 de julio de 2016.

- Conocer, comprender y aplicar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio y conocimiento de las distintas áreas del saber, ya sea en el de las propias Matemáticas como de otras Ciencias, así como aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de otros ámbitos.
- Conocer la existencia de demostraciones rigurosas como pilar fundamental para el desarrollo científico y tecnológico.
- Usar procedimientos, estrategias y destrezas propias de las Matemáticas (planteamiento de problemas, planificación, formulación, contraste de hipótesis, aplicación de deducción e inducción, etc.) para enfrentarse y resolver investigaciones y situaciones nuevas con autonomía y eficacia.
- Reconocer el desarrollo de las Matemáticas a lo largo de la historia como un proceso cambiante que se basa en el descubrimiento, para el enriquecimiento de los distintos campos del conocimiento.
- Utilizar los recursos y medios tecnológicos actuales para la resolución de problemas y para facilitar la comprensión de distintas situaciones dado su potencial para el cálculo y representación gráfica.
- Adquirir y manejar con desenvoltura vocabulario de términos y notaciones matemáticas y expresarse con rigor científico, precisión y eficacia de forma oral,

escrita y gráfica en diferentes circunstancias que se puedan tratar matemáticamente.

- Emplear el razonamiento lógico-matemático como método para plantear y abordar problemas de forma justificada, mostrar actitud abierta, crítica y tolerante ante otros razonamientos u opiniones.
- Valorar la precisión de los resultados, el trabajo en grupo y distintas formas de pensamiento y razonamiento para contribuir a un mismo fin.

6.4.3 Objetivos de la unidad

Estos objetivos hacen referencia a los logros que se plantean conseguir tras la aplicación de esta unidad didáctica. Los objetivos de la unidad han sido establecidos siguiendo como referencia los estándares de aprendizaje definidos en el RD 1105/2014 del 26 de diciembre, correspondientes al bloque 3 (análisis) de la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato.

Para facilitar las posteriores referencias hacia estos objetivos, estos aparecen representados con un identificador definido por las letras **OB** seguidas de un número identificativo.

OB1. Adquirir destreza en el cálculo de la derivada de una función identificando y empleando el método adecuado para su resolución y aplicando este conocimiento a la resolución de problemas o situaciones reales.

OB2. Comprender el concepto de una función compuesta y aplicar correctamente la regla de la cadena para hallar la derivada de este tipo de funciones.

OB3. Identificar propiedades de derivabilidad y continuidad de una función determinando los parámetros que aseguran el cumplimiento de estas propiedades.

OB4. Aplicar conocimientos de análisis matemático al estudio de las características de una función.

OB5. Emplear, asociar y dotar de significado los resultados obtenidos del análisis de una función para realizar correctamente su representación gráfica.

OB6. Comprender la utilidad de los medios tecnológicos en el análisis y representación de funciones y emplear los datos disponibles junto con estos medios para la resolución de problemas.

OB7. Comprender el concepto de derivada de una función en un punto, entender por qué es necesario y visualizar la utilidad y el potencial de las derivadas en la resolución de problemas de diversas áreas.

6.5 Competencias clave

Las competencias son definidas por el RD 1105/2014 de 26 de diciembre como capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

Las competencias hacen referencia, por tanto, no solo a la adquisición de conocimiento, sino al modo en el que las distintas vertientes de este conocimiento son **integradas** en el desempeño de una actividad compleja en la vida cotidiana. El proceso de enseñanza-aprendizaje implementado debe atender al desarrollo de las competencias mediante la ejecución de métodos que favorezcan la transversalidad y la integración entre el saber procedente de diversas áreas del conocimiento, con un carácter global e interdisciplinar.

Las competencias clave que serán trabajadas en esta unidad son las siguientes:

- **CMCT (competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología)**. Se trata de la competencia más destacable dentro de todas las competencias trabajadas. Esta competencia será adquirida a través de una serie de recursos.

Dentro del ámbito matemático, se pueden citar como recursos la resolución de problemas, la aplicación del conocimiento matemático a situaciones de la vida cotidiana, la representación, análisis e interpretación de funciones y gráficas y el conocimiento y uso de números, símbolos, operaciones y estrategias matemáticas.

En el ámbito de la ciencia y la tecnología, esa competencia será adquirida mediante la aplicación de las matemáticas a la realización de diseños experimentales y la resolución de problemas en física, química u otras ciencias naturales.

- **CCL (competencia en comunicación lingüística)**. El desarrollo de esta competencia se considera necesario para la unidad didáctica ya que, en matemáticas, es necesario saber expresar los conceptos matemáticos mediante el uso correcto del lenguaje. Este ejemplo atiende al carácter integrador de las competencias mencionado

anteriormente, ofreciendo transversalidad entre las asignaturas de lengua y matemáticas.

En matemáticas, concretamente en el análisis de funciones, es necesario en muchas ocasiones un adecuado empleo del lenguaje para poder expresar conclusiones, interpretar resultados, indicar fenómenos, realizar argumentaciones, etc. Por ello, es una competencia necesaria, que podrá ser desarrollada a través del uso de un vocabulario y una terminología específicos, una lectura, comprensión e interpretación correctas de los enunciados de los problemas matemáticos y una atención especial a la expresión verbal de los procedimientos llevados a cabo en la resolución de problemas. Este último recurso, puede verse potenciado en gran medida mediante la realización de actividades colaborativas y trabajos en grupo que puedan dar origen a un debate entre los alumnos, donde es necesaria una buena comunicación y expresión de las ideas y términos matemáticos involucrados en los procesos de resolución de problemas.

- **CD (competencia digital)**. Esta competencia se encuentra enfocada a la capacidad del alumno para utilizar los medios digitales de los que dispone y apoyarse en su uso para facilitar el desempeño de tareas complejas. Para desarrollar esta competencia resulta imprescindible en uso de tecnologías TIC como los ordenadores, Internet y software para la representación gráfica de funciones y el cálculo matemático como puede ser GeoGebra. Como se puede observar, el desarrollo de esta competencia busca integrar el uso de las tecnologías con el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Otros recursos adicionales que permiten desarrollar esta competencia son la búsqueda de información en medios digitales y el establecimiento de relaciones entre el lenguaje verbal, numérico, simbólico y algebraico.
- **CAA (competencia para aprender a aprender)**. Esta competencia implica que el alumno sea capaz de resolver problemas de forma autónoma, así como de aplicar las técnicas de aprendizaje adquiridas para evitar bloqueos que puedan surgir en la exposición del alumno ante situaciones nuevas. El alumno ha de ser capaz de razonar los conceptos de forma autónoma y desde un punto de vista crítico, llevando a cabo la autocorrección y comprobación de los resultados obtenidos en la resolución de problemas. Esta competencia se encuentra estrechamente ligada a la competencia digital (**CD**), ya que el uso de tecnologías TIC facilita que el alumno adopte la actitud mencionada anteriormente frente a la resolución las de actividades propuestas.

- **CSC (competencias sociales y cívicas)**. El desarrollo de esta competencia pretende integrar el uso de las matemáticas con la descripción de fenómenos sociales, la predicción y la toma de decisiones. Se busca que el alumno adopte una actitud abierta y sea capaz de valorar tanto las distintas posibilidades de abordar un problema como los distintos puntos de vista ajenos que puedan surgir en la toma de contacto con los distintos miembros de un grupo.

Debido a este último hecho, esta competencia será trabajada especialmente mediante el diseño de actividades colaborativas donde los alumnos se vean obligados a relacionarse entre ellos, debatir, llegar a un acuerdo, valorar las distintas ideas propuestas, y ejercer una actitud de respeto hacia todos los miembros del grupo. El alumno ha de aprender a expresar y discutir adecuadamente las ideas y los razonamientos, escuchar a los demás identificando los errores cometidos en el desempeño de una tarea y practicar el diálogo y fomentar actitudes de respeto y tolerancia.

SIEP (sentido de iniciativa y espíritu emprendedor). El sentido de iniciativa y espíritu emprendedor es una competencia que se desarrolla potenciando la confianza del alumnado en sus capacidades para resolver problemas, fomentando su perseverancia en la búsqueda de soluciones, fomentando su creatividad y autonomía a la hora de enfrentarse a un problema, etc. Resulta oportuno, además, fomentar su participación en el planteamiento, discusión y resolución de problemas, enseñarle a autoevaluar su actuación de una forma crítica y desarrollar sus cualidades personales, sobre todo aquellas relacionadas con la iniciativa, el espíritu de superación y perseverancia hacia situaciones difíciles, la autonomía en la resolución de tareas, la autocrítica, etc.

Resulta necesario, además, inculcar en el alumno hábitos relacionados con la organización de planes de trabajo basados en la revisión y modificación continua a la vez que se realiza una resolución del problema, la planificación de estrategias, la disposición a enfrentarse a nuevos retos sin miedo a encontrarse con situaciones de incertidumbre y un buen control de la toma de decisiones en el proceso de resolución de una tarea.

En este sentido, las actividades de indagación (IBL) contribuyen notoriamente al desarrollo de esta competencia, ya que, por lo general, este tipo de actividades impulsan al alumno a trabajar y a descubrir conceptos relacionados con el contenido estudiado de forma autónoma. Si estas actividades se combinan con un trabajo en

equipo, se potenciarán además todos los aspectos relacionados con la gestión, control y planificación del desarrollo de la tarea.

6.5.1 Relación de las competencias clave con los objetivos de la unidad

Las competencias clave mencionadas tendrán un impacto relevante en el proceso de enseñanza-aprendizaje asociado a la unidad didáctica. En efecto, estas competencias, se encuentran estrechamente relacionadas con los objetivos de la unidad planteados. El desarrollo de cada objetivo de la unidad didáctica se encuentra ligado al desarrollo de una o varias competencias clave determinadas. En la siguiente tabla, se muestra la relación presente entre los objetivos de la unidad y las competencias clave trabajadas para el logro y consecución de dichos objetivos. Esta relación ha sido efectuada en base al contenido de la Orden de 14 de julio de 2016, donde se asocian las competencias clave con los criterios de evaluación que a su vez se encuentran asociados a los estándares de evaluación que se han tomado como referencia para el diseño de los objetivos de la unidad.

Objetivos	Competencias clave
OB1. Adquirir destreza en el cálculo de la derivada de una función identificando y empleando el método adecuado para su resolución y aplicando este conocimiento a la resolución de problemas o situaciones reales.	CMCT, CAA, CCL
OB2. Comprender el concepto de una función compuesta y aplicar correctamente la regla de la cadena para hallar la derivada de este tipo de funciones.	CMCT, CAA, CCL
OB3. Identificar propiedades de derivabilidad y continuidad de una función determinando los parámetros que aseguran el cumplimiento de estas propiedades.	CMCT, CAA, CCL, CD, CSC, SIEP
OB4. Aplicar conocimientos de análisis matemático al estudio de las características de una función.	CMCT, CD, CSC, CAA, CCL, SIEP

OB5. Emplear, asociar y dotar de significado los resultados obtenidos del análisis de una función para realizar correctamente su representación gráfica.	CMCT, CD, CSC, CAA, CCL, SIEP
OB6. Comprender la utilidad de los medios tecnológicos en el análisis y representación de funciones y emplear los datos disponibles junto con estos medios para la resolución de problemas.	CMCT, CD, CSC, CAA, CCL, SIEP
OB7. Comprender el concepto de derivada de una función en un punto, entender por qué es necesario y visualizar la utilidad y el potencial de las derivadas en la resolución de problemas de diversas áreas.	CMCT, CSC, CAA, CCL, CD, SIEP

6.6 Contenidos

Los contenidos trabajados en esta unidad didáctica, correspondientes al bloque 3 (análisis) de la asignatura “Matemáticas I” de 1º de Bachillerato, aparecen enumerados en la Orden de 14 de julio de 2016. Estos contenidos se exponen a continuación:

- Derivada de una función en un punto.
- Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto.
- Recta tangente y normal.
- Función derivada.
- Cálculo de derivadas.
- Regla de la cadena.
- Representación gráfica de funciones.

6.7 Metodología

En el desarrollo de la unidad didáctica, se hará uso de las metodologías mencionadas en el apartado “[Fundamentación didáctica](#)”.

En primer lugar, cabe destacar el papel importante que va a jugar la metodología de indagación en la exploración, descubrimiento y entendimiento del concepto de derivada. En este sentido, la actividad principal de la unidad didáctica se tratará de una

actividad IBL realizada al inicio de la unidad. Con esta actividad, se obligará al alumnado a explorar los conceptos relacionados con la derivada antes de que el docente haya expuesto los conceptos teóricos sobre el tema correspondientes. El objetivo de esta metodología es motivar al alumnado y evitar un posible rechazo que pueda causar el hecho de comenzar directamente exponiendo el contenido teórico. En muchas ocasiones, el alumnado posee una concepción errónea o negativa acerca del concepto de derivada, concepción que le puede llevar a adoptar una actitud de rechazo o carente de motivación. No obstante, si se fomenta que el alumno descubra el concepto de derivada por su propia cuenta, indagando en una actividad, trabajando en equipo con sus compañeros y siendo capaz de resolver los problemas de forma autónoma, puede conseguirse un gran aumento de su motivación.

El objetivo de las actividades de indagación consiste principalmente en, mediante la realización de trabajos de forma autónoma, llevar a los alumnos a situaciones de bloqueo a las que se tendrán que enfrentar pero que, una vez superadas, contribuirán notablemente en la adquisición del contenido trabajado. Una vez superada una situación de bloqueo, el contenido que se emplea como recurso para resolver el problema asociado a esa situación tendrá un significado mucho mayor para el alumno que si se compara con el significado que tendría dicho recurso presentado mediante una metodología de trasmisión-recepción, con una actitud del alumno menos activa. En definitiva, el alumno tenderá a afianzar los contenidos con mayor firmeza cuando estos aparezcan como recursos para resolver una situación de bloqueo. Llevar a los alumnos hacia un proceso de bloqueo provocará que estos tengan que pensar, debatir con sus compañeros (en caso de tratarse de una actividad en grupo), aportar ideas, valorar soluciones, etc. En definitiva, se conseguirá que el alumno adopte una actitud activa y participativa, lo cual conllevará una disposición favorable a la adquisición del contenido.

La indagación resulta muy útil como metodología, en especial en la actividad 1 de esta unidad. Esta actividad trata de buscar que el alumno se bloquee, generando un gran interés en él por querer resolver el problema o encontrar la solución. Es en este momento, cuando se ha conseguido suscitar su alto interés, cuando se abre una oportunidad para afianzar correctamente el concepto de derivada y entender su utilidad.

Mediante el uso de actividades IBL, se permite potenciar de forma especial los desarrollos de las competencias SIEP y CAA. Si estas actividades se combinan con trabajos grupales, se fomentará un desarrollo de la competencia SIEP en el momento en el que el alumnado trabaje en identificar sus errores cometidos, ser capaz de llegar a un acuerdo común con los miembros del grupo, resolver posibles conflictos que puedan aparecer, tener iniciativa en la realización de las tareas, etc. Por otra parte, la

competencia CAA se ve reflejada claramente en el uso de la metodología IBL en el momento en el que el alumno ha de trabajar de forma autónoma.

En la realización de trabajos colaborativos, se hace hincapié en el desarrollo de la competencia CSC. Por tanto, empleando la metodología de aprendizaje cooperativo, se fomenta que los alumnos debatan entre sí, sean capaces de abordar discusiones de la mejor manera posible, y traten de llegar a un resultado en común siempre desde el respeto mutuo.

En las actividades IBL cooperativas, se fomentará además un desarrollo importante de la competencia CCL, mediante la mejora de la comunicación del alumno en grupo y la práctica a la hora de expresar ideas matemáticas mediante el lenguaje.

En este tipo de metodologías, es importante el papel del profesor actuando tanto como guía para los alumnos cuando no consigan salir de una situación de bloqueo, como moderando los debates y las discusiones para evitar situaciones de desacuerdo e incluso pelea que puedan resultar incontrolables entre los alumnos.

Por otro lado, se hará uso también de la metodología de modelización. Esta metodología resulta un recurso que puede ser empleado en gran medida en conjunción con otro tipo de actividades o metodologías.

La modelización es una técnica que se suele combinar a menudo con la realización de actividades de tipo IBL, así como en actividades de resolución de problemas. En ocasiones, resulta difícil distinguirla, así como determinar cuándo una actividad es una actividad de modelización o cuando no. Sin embargo, en la mayoría de los casos, siempre que haya un puente entre el mundo matemático y el mundo real, se considerará que se está haciendo uso en menor o mayor medida de esta metodología.

De este modo, en el desarrollo de la unidad didáctica se procurará en la medida de lo posible realizar actividades basadas en la resolución de problemas que se encuentren orientadas a situaciones del mundo real. El objetivo de la modelización es que el alumno no conciba el mundo matemático como un terreno aislado. En modelización, es necesario un proceso de formulación de un modelo matemático sobre el que se operará para posteriormente tomar el camino de vuelta mediante la interpretación de los resultados. La razón por la que en modelización existe un puente entre el mundo real y el matemático es porque así se consigue que el alumno perciba que lo que se hace en el mundo matemático no se encuentra aislado del mundo real, sino que tiene un sentido. Esto permite motivar al alumno considerablemente en la resolución de problemas.

Finalmente, destacar que la metodología de modelización estará presente especialmente en la realización de problemas de optimización de funciones.

Por otra parte, se tomará ventaja de los beneficios aportados por el uso de las tecnologías digitales de cara a la comprensión del concepto de derivada, tal y como se menciona en el apartado "[Fundamentación didáctica](#)".

En primer lugar, se hará uso de **GeoGebra**, programando una sesión exclusiva para el manejo de este software en el aula de informática. Esta sesión tendrá como objetivo el desarrollo de la competencia CD en el alumnado, con el fin de que el alumno adquiriera un manejo solvente del software, además de conseguir que el alumno perciba la utilidad del uso de las tecnologías digitales para la interpretación de funciones y gráficas en el ámbito matemático. En esta sesión, se apostará por una actividad guiada donde el alumnado trabaje con el software de forma autónoma y activa. Por otra parte, GeoGebra también será un recurso empleado por el docente en el aula siempre que necesite ilustrar ciertas ideas matemáticas que resulten complicadas de plasmar en la pizarra mediante un dibujo a mano alzada, facilitando así el proceso de enseñanza.

Además de Geogebra, se hará uso de otros recursos digitales relacionados con las TIC como puede ser "**Kahoot!**". Este recurso se trata de una plataforma online donde el docente puede crear actividades basadas en un conjunto de preguntas rápidas con 4 respuestas (preguntas tipo test) de las cuales solo una es correcta. Se crea así una sesión a la que los alumnos pueden acceder mediante un PC o un teléfono móvil y responder a dichas preguntas. El modo en el que alumnos realizan la tarea resulta ser bastante dinámico, ya que la aplicación crea una especie de competición donde el alumno que acierte un mayor número de preguntas en el menor tiempo posible sale victorioso. Resulta muy recomendable para el desarrollo de la competencia CD del alumnado. Este, normalmente, tiende a aumentar su motivación hacia la clase cuando se hace uso de las tecnologías digitales para proponer actividades dinámicas, juegos, etc.

Por otro lado, se hará uso de la aplicación **Science Journal de Google**, la cual permite a los alumnos trabajar con los sensores presentes en un teléfono móvil y analizar las gráficas mostradas en relación al comportamiento de estos sensores. Finalmente, se hará uso de la visualización de vídeos motivadores en la plataforma YouTube con el mismo fin de fomentar el interés del alumnado. También se fomentará la motivación del alumno con un recurso no digital, sino **musical**. Se trata de una guitarra eléctrica, lo cual ha sido establecido en base a que yo mismo sería quien pondría en marcha esta unidad didáctica. Esta elección se debe a que dicho instrumento basa sus principios de funcionamiento en leyes del electromagnetismo donde la derivada juega un papel fundamental.

Volviendo al uso de la metodología IBL o de indagación, cabe mencionar que, aparte de todas las ventajas que presenta esta metodología en el desarrollo de esta unidad didáctica, también presenta una importante contrapartida. El mayor inconveniente de esta metodología es que para el desarrollo de una actividad de

indagación se requiere consumir mucho tiempo de la sesión, lo cual provocará un avance lento en los contenidos. Por ello, es necesario e inevitable establecer una programación de la unidad realista, de modo que no se abusará en exceso de este tipo de actividades.

La metodología que resulta más cómoda a la hora de ofrecer un ritmo ligero en el proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo explicar y abordar los contenidos en el menor tiempo posible, es la metodología tradicional de transmisión-recepción. Si bien esta metodología resulta poco eficiente si se pretende que los alumnos afiancen correctamente los conceptos, es inevitable su uso si se pretende encajar el contenido que se ha de trabajar en las sesiones que hay disponibles.

De este modo, será inevitable combinar metodologías IBL, uso de tecnologías TIC, etc. con la metodología tradicional de transmisión-recepción. No obstante, se procurará minimizar el impacto causado por la posible actitud pasiva que se pueda generar en el alumno al emplear este tipo de metodología. Esto se conseguirá procurando que, en todo momento, la metodología de transmisión-recepción no esté muy enfocada a la exposición de contenido teórico, sino a la resolución de “actividades tipo” por parte del profesor. Mediante la realización de problemas prácticos, aunque sea el docente quien tome las riendas de la clase, se conseguirá minimizar el comportamiento pasivo del alumnado ya que este le verá más utilidad al contenido transmitido.

Es importante que el profesor se ponga en el papel del alumnado a la hora de realizar ejercicios. Cuando el profesor realiza “actividades tipo”, el alumnado estará observando justamente lo que tendrá que hacer posteriormente cuando sea su turno de enfrentarse a este tipo de actividades. Si el profesor se limita a transmitir conceptos teóricos, puede darse el caso no deseado de que el alumnado no le vea utilidad al contenido. Cuando esto ocurre, las probabilidades de que el alumnado olvide el contenido explicado por el docente son muy altas, ya que no le ve ninguna finalidad.

Sin embargo, el alumno tendrá que ser capaz de realizar las actividades propuestas y, en última instancia, el examen de la unidad. Por ello, cuando el contenido transmitido se enfoca a la posterior realización de las actividades propuestas, ya comienza a tener un propósito. Así, mediante la resolución de problemas prácticos, el alumnado sabrá qué es lo que tendrá que hacer posteriormente con las herramientas proporcionadas y cómo serán empleadas, entendiendo como estas herramientas los contenidos teóricos de la unidad.

Cabe mencionar, en relación a la desventaja que supone el tiempo consumido por las actividades IBL, que se podría compensar este efecto empleando la metodología de clase invertida o “flipped classroom”. En resumen, esta metodología se basa en fomentar que el alumno explore los conceptos teóricos en casa, antes de la clase donde

serán desarrollados. De este modo, se consigue bastante tiempo durante la clase para enfocarla a la resolución de problemas. No obstante, desde un punto de vista muy personal, se ha optado por no emplear esta metodología. La razón es que existe una alta posibilidad de que el alumnado no sea responsable y acuda a clase sin haber revisado los conceptos teóricos previamente. Si esto ocurre, la metodología “flipped classroom” pierde prácticamente toda su utilidad.

De este modo, se dará directamente un enfoque más práctico a las clases, incidiendo en la resolución de problemas y en que los alumnos adquieran destreza en este ámbito. Los contenidos teóricos serán captados por el alumnado principalmente en actividades exploratorias de indagación, de forma autónoma.

Por otra parte, mencionar que, en base a los trabajos mencionados en el apartado “[Fundamentación didáctica](#)”, se atenderá a intentar plasmar en el alumno un enfoque global de la derivada. Se evitará aislar los conceptos de tangente, límite de cociente incremental, variación media, etc., procurando interconectar todos estos conceptos hacia un único concepto primitivo, el concepto de derivada.

También cabe mencionar que se atenderá a fomentar la interdisciplinariedad entre distintas asignaturas, asociando los contenidos de matemáticas con contenidos estudiados en otras asignaturas, como puede ser física. Esto se consigue planteando actividades que relacionen conceptos ya vistos en otras asignaturas. El hecho de conectar las matemáticas con la física y la tecnología, asignaturas que presentan un enfoque más práctico a la vida cotidiana, provocará que el alumno se motive aún más.

A modo de conclusión, se empleará una metodología enfocada a que los alumnos consigan percibir la funcionalidad y utilidad del contenido, haciendo hincapié en la indagación y en la resolución de problemas. En cuando a la resolución de problemas, se buscará, siempre que se pueda, contextualizar los conceptos tratados, mediante problemas que se encuentren encajados en un contexto determinado, relacionados con la vida real. Se busca, en definitiva, una metodología que consiga motivar al alumnado, fomentar su interés, fomentar el trabajo en equipo, mejorar la comprensión del concepto de derivada y facilitar la adquisición de las competencias necesarias.

6.8 Actividades y recursos

Desde la Orden de 14 de julio de 2016, con respecto al bloque de contenidos asociado a las asignaturas “Matemáticas I” y “Matemáticas II”, aconsejan el uso de los recursos tecnológicos para la obtención y el proceso de información, la comprensión de conceptos y la resolución de problemas.

Como se menciona en el apartado anterior "[6.7 Metodología](#)", se hará especial hincapié en el uso de las tecnologías digitales para desarrollar la competencia CD. Este hecho, requerirá del uso de una serie de recursos digitales. Estos recursos empleados se enumeran a continuación:

- Ordenadores para los alumnos (aula de informática).
- Software GeoGebra.
- Aplicación Science Journal de Google.
- Aplicación "Kahoot!".
- Calculadora.
- Ordenadores para el profesor (aula estándar y aula de informática).
- Proyector.
- Teléfono móvil.

Además de estos recursos digitales, será necesario el uso de otra serie de recursos para llevar a cabo las metodologías programadas. Estos recursos adicionales se enumeran a continuación:

- Guiones de trabajo.
- Fichas para la resolución de actividades.
- Pizarra.
- Libro de texto.
- Cuaderno de trabajo.
- Folios.
- Herramientas de dibujo.
- Utensilios de escritura.
- Guitarra eléctrica (motivación).

Las actividades han sido planteadas siguiendo el propósito metodológico expuesto en el apartado "[6.7 Metodología](#)", atendiendo al cumplimiento de los objetivos (en especial los objetivos de la unidad didáctica) y de forma que abarquen los contenidos que son necesarios tratar de acuerdo con la normativa.

Se propone así el diseño de actividades de indagación IBL, actividades o problemas de modelización, actividades con GeoGebra, actividades con Kahoot y, en general, actividades basadas en la resolución de problemas, el cálculo de derivadas de funciones, actividades de interpretación de funciones y actividades de aplicación de las derivadas.

Las actividades propuestas para esta unidad didáctica aparecen en el [ANEXO I](#) de este trabajo.

6.9 Atención a la diversidad

En la programación de una unidad didáctica, es obligatorio según el marco legislativo atender a la diversidad de alumnos que puede estar presente en el aula, de modo que todos tengan las mismas oportunidades educativas en la medida de lo posible. Contextualizando con el aula a la que va dirigida esta unidad didáctica, no hay alumnos con necesidades educativas especiales. No obstante, es necesario establecer un plan de atención a la diversidad ya que siempre existe la posibilidad de que en otras promociones haya alumnos que requieran de una atención educativa especial.

La asignatura de “Matemáticas I” es una asignatura cursada por un gran número de estudiantes, por lo que a lo largo de los años existe la probabilidad de encontrar un aula muy diversa con presencia de alumnos que presenten necesidades educativas especiales a las que el docente ha de atender con el objetivo de ofrecer la oportunidad de someterse a un proceso de aprendizaje adecuado a todos y cada uno de los estudiantes, adaptándose a sus características.

A la hora de establecer un plan de atención a la diversidad, se tendrán en cuenta dos grupos principales de actuación. En primer lugar, se han de desarrollar procesos de enseñanza especiales para **alumnos con necesidades de refuerzo** que presenten dificultades en el aprendizaje, alumnos que presenten trastornos como TDA (trastorno de déficit de atención) o TDAH (trastorno de déficit de atención e hiperactividad) y alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE). En otro grupo, se encontrarían los **alumnos que presentan altas capacidades**.

Es posible que se dé el caso de necesitar adaptar los procesos de aprendizaje a alumnos del primer grupo, alumnos con necesidades de refuerzo que presenten dificultades a la hora de seguir el ritmo del resto de la clase. Esto puede ocurrir por varios motivos, puede darse el caso de que los conocimientos previos con respecto al resto de compañeros sean menores o porque presente habilidades cognitivas bajas en el área de las matemáticas. Se asegurará un proceso de enseñanza adaptado a este tipo de alumnos mediante la adaptación de problemas y actividades. Esta adaptación de los problemas y actividades ha de llevarse a cabo de un modo que el contenido visto sea prácticamente el mismo que el resto de los compañeros, garantizando las mismas oportunidades. Para ello, se fomentará que estos alumnos estudien los mismos contenidos que el resto de alumnos, pero desde un punto de vista más sencillo.

Este último hecho mencionado se conseguirá proponiendo actividades y problemas muy similares a los realizados por el resto de compañeros, pero con un nivel de dificultad menor. Por ejemplo, cuando se imparta el contenido relacionado con la aplicación de las reglas de derivación para el cálculo de la derivada de una función, se optará por confeccionar actividades especiales con un grado de dificultad menor pero

que traten los mismos puntos, los mismos contenidos, es decir, las mismas reglas de derivación. Si, por ejemplo, se está estudiando en un momento determinado la regla para obtener la derivada de una función aplicando la regla de la cadena, la actividad adaptada obligará al alumno a trabajar con funciones más sencillas que el resto, pero este alumno con necesidades de refuerzo aprenderá igualmente el método para obtener la derivada de una función mediante la regla de la cadena.

De este modo, aunque las actividades especiales de refuerzo propuestas presenten una dificultad menor, los procedimientos de resolución serán los mismos en la medida de lo posible. Concretando aún más con el desarrollo de la unidad didáctica, se establecerá una prioridad con respecto a que el alumno con necesidades adquiera los conceptos básicos para el cálculo de las derivadas, sin incidir demasiado en la comprensión plena del concepto teórico que hay detrás. Por otra parte, si es necesario, se prescindirá del uso de actividades de aplicación a problemas de la vida real, centrándose en que el alumno sea capaz simplemente de aplicar las técnicas básicas que se necesitan para resolver estos problemas. Las actividades de refuerzo propuestas, además, se caracterizarán por ser más guiadas.

En definitiva, todo esto es muy importante ya que el alumno con necesidades de refuerzo debe tener la oportunidad de trabajar a la par con el grupo ordinario de clase, viendo los mismos contenidos, pero en un grado menor de dificultad.

Por otro lado, también puede darse el caso de que haya alumnos con altas capacidades en el aula. Para estos alumnos, se realizará el proceso contrario, proponiendo actividades de ampliación que presenten una mayor dificultad. También se contemplará la posibilidad de ampliar contenidos, siempre y cuando el alumno en cierto modo lleve a cabo un procedimiento de aprendizaje de esos contenidos de forma autónoma, con ayuda de material o guiones proporcionados por el profesor, pero sin alterar el funcionamiento del grupo ordinario de clase. Todo esto resulta muy importante para que el alumno con altas capacidades no pierda el interés por la asignatura como consecuencia del bajo grado de dificultad de las actividades planteadas.

Las actividades especiales propuestas tanto para alumnos con necesidades de refuerzo como para alumnos con altas capacidades aparecen adjuntas en el [ANEXO II](#).

6.10 Temporalización

En este apartado se expondrá la programación de cada una de las sesiones atendiendo a los contenidos estudiados en cada sesión, así como las actividades empleadas y los recursos y objetivos asociados.

El desarrollo de la unidad didáctica se llevará cabo durante 12 sesiones. Si se tiene en cuenta que para la asignatura “Matemáticas I” se tienen 4 sesiones por semana, el desarrollo de la unidad tendría una duración de 3 semanas. A continuación, se mostrará en detalle el desarrollo de cada una de estas sesiones. Se mostrarán las actividades empleadas en cada sesión, los recursos necesarios para su desarrollo, los contenidos trabajados y las competencias clave desarrolladas.

SESIÓN 1 – INDAGACIÓN EN EL CONCEPTO DE DERIVADA

Actividades: Actividad 1 (IBL)	Recursos: Guion de trabajo de la actividad 1, cuaderno de trabajo, folios, calculadora
Contenidos: Derivada de una función en un punto	Competencias clave: CMCT, CAA, CCL, SIEP, CSC

Descripción de la sesión:

El objetivo de esta primera sesión consiste en acercar a los alumnos al concepto de derivada mediante un trabajo de indagación realizado de forma autónoma, una actividad de tipo IBL.

Para el desarrollo de esta actividad, se hará uso de toda la hora correspondiente a la sesión. Durante los primeros 10 minutos, el profesor explicará la tarea que han de realizar los alumnos y organizará la clase dividiéndola en grupos de aproximadamente 4 personas, ya que se tratará de una actividad realizada en equipo. Durante estos primeros 10 minutos, el profesor realizará también un repaso muy breve sobre el cálculo de la velocidad media de un móvil en un movimiento rectilíneo uniforme.

A continuación, se formarán los grupos y se repartirán los guiones de prácticas a los alumnos. Durante los 50 minutos restantes, los alumnos comenzarán a realizar el proceso de lectura, indagación, exploración de los contenidos, discusión y debate con sus compañeros de grupo. En caso de no finalizar la tarea a tiempo, cada alumno tratará de resolverla en casa individualmente para la próxima sesión, donde se pondrán en común las ideas y conclusiones obtenidas en esta primera sesión.

Atendiendo a la actividad, en esta se propone a los alumnos que realicen cálculos de la velocidad media en un móvil (o tasa de variación media) tomando intervalos de

velocidad constante cada vez más estrechos. Se trata de una actividad IBL en cierto modo guiada, pero sin perder la componente de indagación, exploración, duda, bloqueo, búsqueda de posibles soluciones en común, etc.

El objetivo con esta actividad es llevar al alumno a un bloqueo cuando en el último apartado se le pide calcular una velocidad instantánea. Para calcular la velocidad instantánea del móvil se ha de aplicar un límite, se necesita conocer el concepto de derivada, el cual todavía no ha sido expuesto en clase. No obstante, el alumno, en vista a lo que se le pide realizar en apartados anteriores (donde se toman intervalos de tiempo cada vez más estrechos), puede ver la tendencia presente en la actividad y llegar a establecer una aproximación bastante acertada calculando la velocidad media en torno al instante de tiempo pedido, tomando un intervalo de tiempo muy próximo a 0. En la actividad, de hecho, se proporcionan pistas para realizar esta aproximación (*“la distancia recorrida por el ciclista entre el segundo 5 y el segundo 5.0001 es de 0.00100001 metros”*).

Si el alumno es capaz de razonar esta posible aproximación, habrá concebido el concepto de derivada de una forma muy intuitiva, a través de un problema de aplicación y sin ser consciente de ello. El hecho de presentar el concepto de derivada como una solución para salir de un bloqueo (calcular la velocidad instantánea) permite que el alumno le vea una gran utilidad. Con esto se pretende que los alumnos trabajen el concepto de derivada de una forma aproximada de modo que no les cause rechazo y que, cuando el profesor exponga dicho concepto de derivada con mayor rigor matemático, recuerden lo que han realizado en esta actividad y consigan verle el sentido.

En definitiva, se pretende que los alumnos exploren el concepto de derivada de una forma autónoma, por sí mismos, apoyándose gracias al trabajo en equipo. La realización del trabajo por grupos hará que se trate de una actividad muy dinámica, favoreciendo la motivación del alumnado. Además, resolver esta actividad, será planteado como un reto bastante motivador.

Finalmente, es muy importante recalcar que, durante los 50 minutos de trabajo, el profesor rotará de un grupo a otro revisando el trabajo realizando y aportando pistas y consejos cuando lo considere necesario, pero sin comprometer la componente de trabajo autónomo a la que está enfocada la actividad.

SESIÓN 2 – DEFINICIÓN DE DERIVADA

<p>Actividades:</p> <p>2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6</p>	<p>Recursos:</p> <p>Pizarra, proyector, ordenador, GeoGebra, cuaderno de trabajo, utensilios de escritura, libro de texto, guitarra eléctrica</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Derivada de una función en un punto • Función derivada • Cálculo de derivadas 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL</p>

Descripción de la sesión:

Durante los primeros 15 minutos de la sesión, los alumnos pondrán en común con toda la clase los resultados obtenidos de la actividad 1 de indagación. Mientras se debaten las conclusiones a las que cada grupo ha llegado, el profesor mostrará cuáles son las maneras más óptimas de resolver esta actividad. Para esta explicación, hará uso de la pizarra y de GeoGebra en caso de necesitarlo.

A continuación, procederá a una breve presentación del tema de las derivadas con el objetivo de **motivar** a los alumnos. Para ello, comenzará ilustrando el **vídeo** que se adjunta en el siguiente enlace: "<https://www.youtube.com/watch?v=AzTGmJGlpI8>". Se trata de un vídeo muy relacionado con los conceptos trabajados en la actividad 1. Posteriormente, el profesor utilizará una **guitarra eléctrica** y la hará sonar explicándole brevemente a los alumnos que, el funcionamiento de este instrumento, está basado en la derivada de una función (el flujo magnético) que, al variar con respecto al tiempo, genera una fuerza electromotriz inducida. El profesor simplemente expresará la fuerza electromotriz como una función cuya variable es el flujo magnético. Este apartado tomará una duración aproximada de 10 minutos.

Durante los próximos 15 minutos, el profesor expondrá la definición de derivada de una función en un punto a través de la expresión del límite, relacionándola en todo momento con la actividad 1, por lo que los alumnos verán con claridad el sentido de la fórmula y la pondrán en contexto al haber indagado en el concepto en la sesión anterior. Posteriormente, el profesor expondrá los conceptos de derivada de una función constante, una función potencial y derivada de una constante por una función. Para no abusar de una explicación demasiado teórica, realizará al mismo tiempo las actividades 2.1, 2.2 y 2.4 en la pizarra, mientras los alumnos toman nota. En caso de que el docente lo considere oportuno, pedirá a ciertos alumnos que le ayuden en la realización de la actividad para fomentar una participación activa.

Durante los 20 minutos finales, los alumnos realizarán de forma autónoma las actividades 2.3, 2.5 y 2.6, las cuales tienen relación con el cálculo de la derivada de la función en un punto aplicando el límite y con el cálculo de funciones derivadas sencillas respectivamente. La actividad 2.6 propone el cálculo sencillo de la derivada de una función en un punto empleando el ejemplo de aplicación de la guitarra eléctrica. Durante estos 20 minutos, el profesor atenderá todas las dudas que puedan surgir. Si a algún alumno no le diese tiempo a finalizar la tarea, la tendría que acabar en casa para la posterior evaluación de actividades encargadas.

SESIÓN 3 – ÁLGEBRA DE DERIVADAS

<p>Actividades:</p> <p>3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6</p>	<p>Recursos:</p> <p>Pizarra, cuaderno de trabajo, utensilios de escritura, teléfono móvil, aplicación Science Journal de Google, libro de texto</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Función derivada • Cálculo de derivadas 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL, CD, CSC</p>

Descripción de la sesión:

Al inicio de la sesión, el profesor comenzará explicando las reglas para obtener la derivada de una suma, producto o cociente de funciones. Al mismo tiempo, pondrá los conceptos teóricos en práctica realizando la actividad 3.1 en la pizarra. Si el profesor lo considera oportuno, puede preguntar al alumnado aleatoriamente para que le indique cómo se realiza la actividad y así conseguir una participación activa. Esta parte tendrá una duración de 15 minutos.

A continuación, el profesor procederá a explicar las derivadas sucesivas. Para esta explicación se hará uso de la aplicación **Science Journal de Google** con el objetivo de **motivar** al alumnado. Mediante esta aplicación, los alumnos podrán hacer uso de los sensores de sus teléfonos móviles para representar diversas gráficas. La propuesta consiste en medir la aceleración lineal del teléfono. Los alumnos han estudiado en la actividad 1 que la velocidad se puede interpretar como la derivada de la posición, indicando si esta varía con el tiempo. La idea que se pretende con esta aplicación es mostrar a los alumnos que, en esta ocasión, si el móvil se desplaza a velocidad constante la aceleración no varía, la gráfica se mantiene en 0 ya que estamos estudiando la

derivada segunda de la posición con respecto al tiempo. Por ello, para observar un cambio en la gráfica, el alumno tendrá que mover el teléfono bruscamente. Esta parte tendrá una duración de 10 minutos.



Ilustración 14 - Interfaz de la aplicación Science Journal de Google (obtención a través del uso personal de la aplicación)

Durante los próximos 5 minutos, el profesor realizará la actividad 3.3 en la pizarra, habiendo consumido un total de 30 minutos de la sesión aproximadamente.

Durante los 30 minutos restantes, el alumno realizará las actividades 3.2, 3.4, 3.5 y 3.6 de forma autónoma, mientras el profesor supervisará al alumnado para resolver posibles dudas que puedan surgir. Como en otras ocasiones, el trabajo no finalizado a tiempo en clase deberá terminarse en casa. La actividad 3.6 se trata de una actividad sencilla de consolidación del concepto de “segunda derivada” mediante la exploración de la aplicación Science Journal de Google. La actividad 3.5 propone una situación de la vida real, acercando al alumnado al uso de la **modelización** y al concepto de máximo cuando se anula la función derivada. Esta actividad será corregida en la próxima sesión.

SESIÓN 4 – INDAGACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

<p>Actividades:</p> <p>Actividad 4 (IBL)</p>	<p>Recursos:</p> <p>Guion de trabajo de la actividad 4, cuaderno de trabajo, folios, calculadora, pizarra, herramientas de dibujo y utensilios de escritura</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto • Recta tangente y normal 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL, CSC, SIEP</p>

Descripción de la sesión:

Al comienzo de la sesión, el profesor mostrará en la pizarra la resolución de la actividad 3.5, lo cual le tomará aproximadamente 10 minutos. Posteriormente, se llevará a cabo el desarrollo de la actividad 4, una actividad basada en la metodología IBL.

En esta sesión, se les propone a los alumnos una actividad de indagación similar a la actividad 1. Esta actividad será realizada durante los 50 minutos restantes y seguirá un esquema similar a la actividad 1. Durante los primeros 10 minutos, el profesor hará un repaso de los conceptos relacionados con la ecuación de una recta y su pendiente y explicará brevemente el objetivo de la sesión. Durante los otros 40 minutos, los alumnos se organizarán en grupos de 4 personas para realizar esta actividad de forma colaborativa. Durante el transcurso de la sesión, el esquema seguido es igual al de la actividad 1. El profesor entregará los guiones de la actividad a cada grupo y los alumnos comenzarán el proceso de indagación, discusión, debate y exploración con el resto de sus compañeros. En caso de no finalizar a tiempo la actividad, tendrán que terminarla en casa de forma individual para la próxima sesión.

El objetivo de esta actividad es que los alumnos comprendan la interpretación geométrica de la derivada y perciban su utilidad en los cálculos relacionados con rectas tangentes a una función en un punto. El núcleo de la actividad es exactamente igual que en la actividad 1, los estudiantes tendrán que calcular cocientes incrementales determinados por dos puntos que cada vez se aproximan en mayor medida. No obstante, en esta sesión se les enfoca la actividad desde un punto de vista geométrico, introduciendo los conceptos de recta secante y tangente de modo que ahora el cociente incremental expresa la pendiente de estas rectas. Además, se introduce también el concepto de tasa de variación media.

Se espera que el alumno realice esta actividad con mayor rapidez y eficacia ya que resulta muy similar a la actividad realizada en la primera sesión. En esta actividad,

se buscará que el alumno adquiera solvencia y práctica en el cálculo de la ecuación de una recta para actividades posteriores.

Entrando en detalle, con esta actividad, el alumno calculará la ecuación de una recta secante a la gráfica de la función definida por dos puntos que cada vez se aproximan en mayor medida. Al igual que en la actividad 1 se pedía calcular la velocidad instantánea, en esta ocasión, el bloqueo del alumno es buscado pidiéndole calcular una aproximación de la ecuación de la recta tangente. Si el alumno es capaz de razonar que la pendiente de la recta tangente en el punto pedido se puede aproximar a la pendiente de una recta secante definida por este punto y otro muy próximo, habrá entendido la interpretación geométrica de la derivada.

Se consigue, además, que el alumno tenga un primer acercamiento a una función compuesta ya que posteriormente se trabajará la regla de la cadena. Además, no podrá resolver la tarea de otro modo que no sea tomando como aproximación puntos muy próximos entre sí, ya que en este punto no han aprendido a derivar una función compuesta.

SESIÓN 5 – RECTA TANGENTE Y NORMAL Y TASA DE VARIACIÓN

<p>Actividades:</p> <p>5.1, 5.2, 5.3, 5.4</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, ordenador, proyector, utensilios de escritura, pizarra, libro de texto</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto • Recta tangente y normal 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL</p>

Descripción de la sesión:

Al comienzo de la sesión se pondrán en común las conclusiones a las que llegó cada grupo en la actividad 4, mientras el profesor explica los métodos más adecuados para su resolución en la pizarra. Esta parte tomará aproximadamente 10 minutos.

A continuación, el profesor explicará la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, pero de una forma más rigurosa mediante la expresión del límite. Esta explicación se verá apoyada de la realización por parte del profesor en la pizarra de la actividad 5.1.

El profesor, hará uso adicionalmente del proyector para mostrar gráficamente los resultados del problema mediante GeoGebra y comprobar que se corresponden con los datos analíticos obtenidos. Esta parte tendrá una duración de 10 minutos.

A continuación, el profesor pasará a exponer las definiciones de tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Realizará la actividad 5.4 en la pizarra, la cual permite trabajar con los conceptos de tasa de variación relacionados con la velocidad física de un objeto en movimiento. Esta actividad 5.4 juega un papel integrador muy importante, ya que relaciona el concepto de velocidad trabajado en la actividad 1 con el concepto de tasa de variación, el cual fue asociado con la pendiente de la recta tangente en la actividad 4 y trabajado en la actividad 5.1, con lo que se permite que el alumno adquiera una **visión global** del concepto de derivada. Esta actividad tendrá una duración de 15 minutos.

Durante los 25 minutos restantes, se encargará a los alumnos la realización de las actividades 5.2 y 5.3 de forma autónoma. El profesor atenderá las dudas que puedan surgir y supervisará el desarrollo correcto de estas actividades. En caso de no acabar a tiempo se terminarían en casa.

SESIÓN 6 – REGLA DE LA CADENA. FUNCIONES EXP., LOG. Y TRIG.

<p>Actividades:</p> <p>6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, utensilios de escritura, pizarra, libro de texto</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de derivadas • Regla de la cadena 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL</p>

Descripción de la sesión:

Al inicio de la sesión, el profesor expondrá la definición de la regla de la cadena y basará su explicación principalmente en la realización de problemas prácticos, preguntando a los alumnos de forma aleatoria, si lo considera oportuno, para que le indiquen cómo se realizaría la actividad. En primer lugar, el profesor realizará la actividad 6.1, la cual aplica la regla de la cadena a derivadas de funciones vistas en apartados anteriores. Esta parte tendrá una duración de 10 minutos.

A continuación, el profesor expondrá las reglas para derivar funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Acto seguido, realizará en la pizarra las actividades 6.2 y 6.3, las cuales combinan la regla de la cadena con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Esta parte tendrá una duración de 20 minutos.

La media hora de sesión restante será empleada por los alumnos para realizar las actividades propuestas 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7. Las tres primeras son actividades similares a las que realizó el profesor en la primera hora de clase y su fundamento consiste en habituar a los alumnos a realizar con solvencia el cálculo de derivadas de funciones compuestas. La actividad 6.7 se trata de una actividad aplicada a la vida real, donde el alumno tendrá que aplicar técnicas de modelización para formular ecuaciones e interpretar los resultados obtenidos. Esta última actividad será comentada y corregida en la siguiente sesión. En caso de no finalizarlas, los alumnos terminarán la tarea en casa.

SESIÓN 7 – GEOGEBRA

<p>Actividades:</p> <p>Actividad 7</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, ordenador (profesores y alumnos), proyector, utensilios de escritura, pizarra, GeoGebra, guion de trabajo de la actividad y ficha para la resolución</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto • Recta tangente y normal • Derivada de una función en un punto. • Cálculo de derivadas • Regla de la cadena 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL, CD, CSC, SIEP</p>

Descripción de la sesión:

Los primeros 10 minutos de la sesión serán destinados a la corrección de la actividad 6.7 por parte del profesor en la pizarra. A continuación, comenzará a desarrollarse la actividad 6.

Para esta actividad, desarrollada en el aula de informática, los alumnos trabajarán en parejas de 2 personas. Durante los primeros 20 minutos de la actividad, el profesor entregará a los alumnos el guion de la práctica. El profesor, realizará con su ordenador las indicaciones seguidas por el guion paso a paso para que los alumnos puedan seguirle mientras tienen una primera toma de contacto con el software.

La media hora restante será dedicada para que los alumnos trabajen de forma autónoma en la realización de los ejercicios propuestos. Dichos ejercicios tienen como fin conectar el entorno gráfico de GeoGebra con los ejercicios realizados en papel por el alumnado. Se fomentará que el alumnado mejore su destreza en el cálculo de ecuaciones de rectas tangentes y normales en puntos de una función, así como su destreza en la aplicación de la regla de la cadena. Los alumnos establecerán una relación entre los resultados obtenidos al realizar la actividad a mano y al utilizar el software GeoGebra, ya que estos han de coincidir.

Finalmente, destacar que esta actividad permite desarrollar en gran medida la competencia digital (CD) del alumnado.

SESIÓN 8 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES (I)

<p>Actividades:</p> <p>8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, ordenador, proyector, utensilios de escritura, pizarra, GeoGebra, libro de texto</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representación gráfica de funciones. • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL</p>

Descripción de la sesión:

Al inicio de la sesión, el profesor explicará en la pizarra los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función, los extremos relativos y la concavidad y puntos de inflexión, conceptos necesarios para posteriormente ser capaces de representar funciones. El profesor se encargará de asociar permanentemente todos los conceptos de representación con los conceptos de la derivada de una función vistos hasta ahora. Para esta explicación, se hará uso del proyector y GeoGebra, con el objetivo

de ilustrar los conceptos con precisión. También se servirá de la realización de problemas de aplicación en la pizarra, concretamente, las actividades 8.1, 8.2 y 8.3. La duración de esta parte puede ser muy variable dependiendo del grado en el que el profesor profundice en los contenidos, pero se estima que puede llegar a los 45 minutos ya que el contenido dado resulta considerablemente extenso. No obstante, por este motivo, se han dedicado dos sesiones para la representación de funciones.

Durante los 15 minutos restantes, los alumnos trabajarán de forma individual y autónoma en las actividades 8.4, 8.5 y 8.6, que son similares a las actividades 8.1, 8.2 y 8.3 realizadas por el profesor. Los alumnos deberán finalizar este trabajo en casa.

SESIÓN 9 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES (II)

<p>Actividades:</p> <p>9.1, 9.2, 9.3</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, ordenador, proyector, utensilios de escritura, pizarra, GeoGebra, libro de texto</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representación gráfica de funciones. • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL, CSC, SIEP</p>

Descripción de la sesión:

Al inicio de la sesión, el profesor realizará un repaso de los conceptos de monotonía, extremos relativos y concavidad de funciones. Posteriormente, integrará todos los conceptos vistos en la sesión anterior en la realización de la actividad 9.1. Esta actividad pide directamente representar una función, por lo que hay que tener presente los pasos a seguir, así como los conceptos vistos en la sesión 8. Como siempre, realizará la explicación en la pizarra preguntando de forma aleatoria a los alumnos ciertos aspectos de la resolución del problema. Esta parte tendrá una duración de 30 minutos.

Durante los 30 minutos restantes, los alumnos realizarán las actividades 9.2 y 9.3 en parejas de 2 personas. Se opta por el trabajo colaborativo en esta parte ya que la dificultad de los contenidos en este punto del tema es ligeramente mayor, teniendo que ser capaces de integrar todos los conceptos vistos hasta el momento. En caso de no terminar la actividad en clase, se finalizará en casa de forma individual.

SESIÓN 10 – PROBLEMAS APLICADOS DE OPTIMIZACIÓN

<p>Actividades:</p> <p>10.1, 10.2, 10.3</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, ordenador, proyector, utensilios de escritura, pizarra, GeoGebra, libro de texto</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representación gráfica de funciones. • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. • Cálculo de derivadas • Derivada de una función en un punto • Función derivada 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL, CSC, SIEP</p>

Descripción de la sesión:

Al inicio de la sesión, el profesor explicará los criterios a tener en cuenta a la hora de enfrentarse a problemas de optimización. Deberá mostrar que estos problemas siempre presentan una tendencia a obtener una expresión que relacione dos variables, de modo que, tras construir una función, esta pueda ser derivada para obtener un máximo o un mínimo, según el enunciado del problema.

Para esta explicación el profesor hará uso de la pizarra y del proyector junto con GeoGebra, ya que resultará muy acertado representar las funciones obtenidas para visualizar los puntos donde se puede obtener un máximo o un mínimo. Durante la explicación, el profesor realizará en la pizarra la actividad 10.1.

En este apartado, los problemas propuestos hacen un gran uso de la metodología de **modelización**, ya que son problemas muy aplicados, donde es muy necesario formular un modelo matemático que ofrezca unas ecuaciones con las que resulte fácil trabajar. Este modelo matemático permite aplicar las técnicas de derivación y obtención de extremos relativos para posteriormente trasladar los resultados obtenidos hacia el mundo real mediante una interpretación de estos correcta.

La explicación del profesor, junto con el desarrollo de actividad 10.1, tomarán aproximadamente 30 minutos de la sesión. Durante la media hora restante, los alumnos se asociarán en grupos de 2 personas para realizar las actividades 10.2 y 10.3 de forma

autónoma. El profesor supervisará el desarrollo de las actividades y ayudará a aquellos grupos que presenten dificultades para la realización de la tarea. Los alumnos que no terminen la tarea deberán completarla en casa de forma individual. Finalmente, mencionar que la actividad 10.3 resulta destacable por la introducción de una componente de contribución con el **medio ambiente** y el **desarrollo sostenible**.

SESIÓN 11 – REPASO PREVIO AL EXAMEN

<p>Actividades:</p> <p>11.1, 11.2, 11.3, 11.4</p>	<p>Recursos:</p> <p>Cuaderno de trabajo, calculadora, ordenador, proyector, utensilios de escritura, pizarra, GeoGebra, libro de texto, teléfono móvil, Kahoot!</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representación gráfica de funciones. • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. • Cálculo de derivadas • Derivada de una función en un punto • Función derivada 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CAA, CCL, CSC, CD</p>

Descripción de la sesión:

Durante esta sesión, el profesor realizará en la pizarra las actividades 11.1, 11.2 y 11.3. Estas actividades serán muy similares a las que se incluirán en la prueba escrita correspondiente a la próxima sesión, por lo que sirven como repaso y para afianzar y consolidar los distintos conceptos estudiados a lo largo del tema. La realización de estos ejercicios buscará como siempre la participación activa del alumnado mediante preguntas por parte del profesor. Esta parte tendrá una duración de 30 minutos.

Durante los próximos 10 minutos, los alumnos realizarán la actividad 11.4 correspondiente con una prueba de 10 preguntas tipo test en la plataforma “Kahoot!”. Estas preguntas sirven también como repaso acerca de todos los contenidos vistos durante el desarrollo de la unidad didáctica.

Finalmente, los últimos 20 minutos serán dedicados a la resolución de dudas que pueda presentar el alumnado de cara al examen.

SESIÓN 12 - EXAMEN

<p>Actividades:</p> <p>Examen</p>	<p>Recursos:</p> <p>Guion del examen, ficha de entrega, calculadora, utensilios de escritura, folios</p>
<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Derivada de una función en un punto. • Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. • Recta tangente y normal. • Función derivada. • Cálculo de derivadas. • Regla de la cadena. • Representación gráfica de funciones. 	<p>Competencias clave:</p> <p>CMCT, CCL, SIEP</p>

Descripción de la sesión:

Esta sesión consistirá en la realización del examen escrito adjunto en el [ANEXO I](#) por parte de los alumnos. Para la realización del examen se empleará todo el tiempo de la sesión. El profesor comenzará leyendo las preguntas y explicando lo que se pide en ellas durante los primeros 5 minutos. Durante el resto de la sesión, los alumnos realizarán la prueba individualmente guardando una distancia suficiente para evitar plagio.

Finalmente, mencionar que los ejercicios del examen han sido elaborados en base a las actividades realizadas en la sesión anterior de repaso, y teniendo en cuenta que las tareas incluidas cubren todos los contenidos, criterios de evaluación y estándares de evaluación exigidos por la normativa.

6.11 Evaluación

Según la Orden de 14 de julio de 2016, la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado que será continua y diferenciada según las distintas materias, tendrá un carácter formativo y será un instrumento para la mejora tanto de los procesos de enseñanza como de los procesos de aprendizaje.

La evaluación es el instrumento que permite determinar si el alumnado ha cumplido los objetivos previstos en el desarrollo de sus habilidades y competencias. Los referentes para la evaluación en Bachillerato son:

- Los criterios de evaluación y su concreción en estándares de aprendizaje evaluables.
- Los criterios de calificación incluidos en las programaciones didácticas de las materias.

6.11.1 Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación son el referente que emplea el profesorado a la hora de determinar que el alumnado haya adquirido una serie de conocimientos y habilidades de acuerdo con los objetivos planteados y haya sido capaz de desarrollar las competencias básicas establecidas.

A continuación, se enumeran los criterios de evaluación correspondientes al desarrollo de esta unidad didáctica, según aparecen recogidos en el RD 1105/2014.

- **Crit. 3.3.** Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
- **Crit. 3.4.** Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.

6.11.2 Estándares de aprendizaje

Los estándares de aprendizaje son una concreción de los criterios de evaluación, permitiendo definir los resultados que se pretenden obtener en el alumnado tras la puesta en funcionamiento de los procesos de enseñanza.

A continuación, se enumeran los estándares correspondientes al desarrollo de esta unidad didáctica, según aparecen recogidos en el RD 1105/2014.

- **Est. 3.3.1.** Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
- **Est. 3.3.2.** Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

- **Est. 3.3.3.** Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- **Est. 3.4.1.** Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.
- **Est. 3.4.2.** Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

6.11.3 Procedimientos e instrumentos empleados en la evaluación

En la Orden de 14 de julio de 2016 se establecen tres momentos principales de evaluación:

- 1) **Evaluación inicial.** Esta evaluación tiene lugar durante el primer mes del curso escolar. El profesorado correspondiente a cada asignatura se encarga de emplear una serie de procedimientos, técnicas e instrumentos con el fin de conocer y valorar la situación inicial del alumnado con el objetivo de marcar un punto de referencia y orientar la toma de decisiones en relación a la elaboración de programaciones didácticas futuras.
- 2) **Evaluación continua.** Realizada por el equipo docente actuando de forma colegiada durante el proceso de evaluación y adoptando decisiones en base a los resultados. Se realizarán, al menos, tres sesiones de evaluación además de la evaluación inicial. Los datos recogidos en relación al progreso de los alumnos se usarán como orientación para la necesidad de adoptar medidas especiales de refuerzo o ampliación de los contenidos.
- 3) **Evaluación final.** Realizada al final de cada curso de la etapa, donde se valora el progreso de cada alumno en las diferentes materias y el nivel adquirido en el desarrollo de las competencias.

La evaluación de esta unidad didáctica, constará de una componente de evaluación continua en la que se analizará el progreso diario de cada alumno y de una componente de evaluación final cuya finalidad consiste en asegurar que se han cumplido los objetivos de aprendizaje establecidos.

Los instrumentos y procedimientos empleados en la evaluación del alumnado se exponen a continuación.

- **Observación sistemática.** Basada en un análisis constante del alumno con el objetivo de valorar procedimientos y actitudes fácilmente observables. En este apartado se valora adicionalmente la participación del alumnado y su comportamiento al trabajar de forma colaborativa.

- **Revisión y corrección del cuaderno de trabajo.** El profesor se encargará de evaluar las distintas actividades realizadas en clase, así como las que son encargadas para la realización en casa. Las actividades evaluables en este apartado y para esta unidad didáctica son: 2.3, 2.5, 2.6, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 5.2, 5.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 8.4, 8.5, 8.6, 8.2, 8.3, 10.2, 10.3.
- **Exámenes escritos.** Este tiene lugar en la última sesión de cada unidad. Concretando para la unidad didáctica desarrollada, este propone un total de 3 ejercicios. Estos 3 ejercicios abarcan todos los contenidos de la unidad de modo que el examen sirve como un instrumento para medir si el alumno cumple con todos los estándares de aprendizaje de la unidad.
- **Trabajos.** Los trabajos hacen referencia a las actividades de mayor peso. En concreto, para esta unidad didáctica, se trata de las actividades 1, 4 y 7.

Para la evaluación de la asignatura, se establece un porcentaje de peso para cada uno de estos instrumentos permitiendo así obtener una calificación final ponderada.

- Observación sistemática: **10%**
- Examen escrito: **60%**
- Trabajos: **20%**
- Revisión y corrección del cuaderno de trabajo: **10%**

7. Conclusiones

En el desarrollo del Trabajo Fin de Máster, se comienza elaborando una fundamentación didáctica donde se establece un análisis de las investigaciones más relevantes, las cuales consiguen aportar una serie de conocimientos útiles para abordar los problemas a los que se enfrentan muchos docentes en la actualidad. De este modo, se consiguen extraer una serie de conclusiones útiles acerca de las técnicas, metodologías y recursos que puede emplear el docente con el objetivo de establecer unos procesos de enseñanza óptimos en el ámbito matemático.

El posterior desarrollo de un tema perteneciente al temario oficial de oposiciones en la fundamentación epistemológica ha permitido establecer una base de conocimiento del contenido matemático bastante sólida. El hecho de profundizar en los contenidos matemáticos a tal nivel y con un alto rigor permitirá ofrecer al docente una visión global del contenido matemático que posteriormente será adaptada a un nivel inferior acorde al currículo del curso donde impartirá las clases.

Con respecto al análisis realizado en la fundamentación curricular, cabe destacar la utilidad de ambos libros de texto tanto para el docente como para el alumnado. Las definiciones y el lenguaje matemático empleado, la estructuración y organización de los

contenidos y las actividades y recursos de aprendizaje proporcionados han resultado estar a la altura de los contenidos exigidos por parte de la normativa. Adicionalmente, cabe destacar que, a pesar de que ambos cubren prácticamente los mismos contenidos, existen diferencias en la secuenciación de estos contenidos y en el uso de recursos ilustrativos con el objetivo de facilitar el aprendizaje y ofrecer una buena organización de las ideas.

Finalmente, el desarrollo de la unidad didáctica es el principal elemento de este Trabajo Fin de Máster, ya que es donde se concreta el procedimiento de enseñanza que llevará a cabo el docente, el cual será encargado de modificar la percepción que poseen los alumnos hacia las matemáticas y, en concreto, hacia el tema de las derivadas.

Gracias a la metodología empleada, a las actividades propuestas y a la distribución de estas a lo largo de las distintas sesiones, se ha conseguido ofrecer una propuesta muy particular de introducción del concepto de derivada.

En primer lugar, la idea principal obtenida como conclusión en el apartado de la fundamentación didáctica giraba en torno a ofrecer un punto de vista global de la derivada, integrando todas sus interpretaciones. Esto ha sido atendido en gran medida, procurando en todo momento que los conceptos de límite del cociente incremental, tasa de variación, pendiente de la recta tangente e incluso las posibles interpretaciones físicas que pueda ofrecer la derivada, se encuentren unidos entre sí. En todo momento se procura hacer ver al alumno que, a pesar de trabajar con la derivada en diferentes ámbitos, todas las interpretaciones desembocan en un mismo concepto.

Por otra parte, el uso de actividades orientadas a la indagación es el pilar fundamental de esta unidad didáctica. Con las metodologías tradicionales de transmisión del contenido, el alumno puede aprender a realizar tareas asociadas con la derivada sin ningún problema, especialmente en lo referido a tareas mecánicas de cálculo de derivadas. No obstante, lo más común al aplicar metodologías puramente transmisoras del contenido es que el concepto termine siendo afianzado en años posteriores.

Conseguir afianzar el concepto de derivada en la primera toma de contacto, durante el curso de 1º de Bachillerato, supondrá una ventaja considerable en etapas posteriores, especialmente en otras áreas de la ciencia y la tecnología donde la interpretación de la derivada juega un papel fundamental en la comprensión de los fenómenos estudiados. El alumno que, por ejemplo, curse el año siguiente la asignatura de física, comprenderá gran parte de los fenómenos estudiados en los que esté involucrado el cálculo diferencial.

Para conseguir afianzar el concepto de derivada, así como cualquier otro concepto matemático, resulta muy útil llevar al alumno hacia una fase de exploración

del contenido. Todos los teoremas matemáticos demostrados en la actualidad, han sido desarrollados por personas que han llevado a cabo una tarea de exploración de un determinado contenido. Esta actividad de indagación, investigación, análisis de los contenidos disponibles, etc. es la que lleva al matemático a enfrentarse a una situación de bloqueo y encontrar una llave para salir de esta.

El proceso de aprendizaje de los alumnos puede seguir un esquema similar al proceso de aprendizaje de los investigadores matemáticos. Eso es lo que se pretende conseguir con el desarrollo de las actividades IBL. En primer lugar, se pretende que el alumno descubra los conceptos por sí mismo, de forma autónoma, explorando e indagando en la tarea propuesta.

Si el alumno procede a realizar una exploración de los contenidos (con la ayuda de una guía proporcionada por el docente) antes de su explicación, en el momento en el que el docente proceda a explicar este contenido, el cual ya habrá sido previamente trabajado, los alumnos serán capaces de contextualizar los objetos matemáticos estudiados viéndole un gran sentido.

Adicionalmente, si los conceptos matemáticos trabajados son enfocados a problemas de la vida real, mediante el uso de metodologías como la modelización matemática, el alumno será capaz de verle más sentido aún a estos objetos matemáticos.

Además, las actividades propuestas son vistas como un reto, al pedirles a los alumnos que trabajen sobre un contenido que no han visto previamente a lo largo del curso. De este modo, para resolver los problemas planteados, estos han de pensar en gran medida, realizar un gran ejercicio mental, formular hipótesis y establecer conjeturas, debatir las ideas, etc. Todo esto generará una actitud muy activa y participativa, provocando un aumento de la motivación del alumno hacia la asignatura.

Se ha conseguido implementar una programación de la unidad bastante realista, donde se trabajan diversas metodologías y aspectos. La unidad didáctica llega a abarcar desde la realización de actividades colaborativas, contribuyendo al desarrollo de las competencias sociales del alumnado, hasta el uso de tecnologías digitales que permiten desarrollar unas competencias fundamentales en la actual sociedad de la información, tales como GeoGebra, Science Journal, Kahoot!, etc.

Por otra parte, el uso de modelización matemática y las propuestas de actividades sobre problemas enfocados a la vida real permiten que el alumno aprenda a interpretar los resultados de un problema matemático y sea capaz de ver el puente que une el mundo real y el mundo matemático en un gran número de situaciones de la vida cotidiana, así como de valorar las posibilidades que es capaz de ofrecer la formulación de un modelo matemático.

Se ha conseguido también establecer un modelo de enseñanza que busca fomentar las competencias del alumnado para que este sea capaz de aprender de forma autónoma, resolver situaciones adversas con un gran sentido de iniciativa, aprender a trabajar en grupo, a debatir, a resolver conflictos, a llegar a un acuerdo común, a escuchar las ideas de los demás y compartir las suyas, etc.

Finalmente, el desarrollo de esta unidad didáctica pretende que el alumno adopte una actitud favorable hacia las matemáticas contraria al rechazo, abriendo así una oportunidad para que pueda comprender los cimientos de las matemáticas de una forma muy sencilla, intuitiva y motivadora, de modo que, en el futuro, pueda elegir una trayectoria profesional en el mundo de la ciencia en la cual se sienta plenamente desarrollado tanto a nivel de competencias como a nivel personal.

8. Bibliografía

- Abril, A. M., García, F. J., Ariza, M. R., Quesada, A., & Ruiz, L. (2011). Aprendizaje en ciencias y matemáticas, basado en la investigación, para la formación del profesorado europeo (pp. 604-612).
- Amaya, C. S., Rojas, H. D., & Ballén, M. B. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, (26).
- Bassanezi, R., & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13-25.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics. In *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Springer, Boston, MA.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16(2), 105-125.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Higuera, L. R. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, 18(2), 37-74.
- Córdoba, Y., Ruiz, K. Y., & Rendón, C. E. (2015). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *RECME*, 1(1), 125-130.
- Cuevas, C. A., Rodríguez, A., & González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada.

- Gaisman, M. T. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, 9(46), 75-87.
- García-García, F. J., Quesada-Armenteros, A., Ariza, M. R., & Gallego, A. M. A. (2019). Promover la indagación en matemáticas y ciencias: desarrollo profesional docente en primaria y secundaria. *Educación XX1*, 22(2).
- Gavilán, J. M. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática*, 18(2), 167-170.
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R., & Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269).
- Nieto, L. B., Jiménez, V. M., & Macías, C. R. (1995). Conocimiento didáctico del contenido en ciencias experimentales y matemáticas y formación de profesores. *Rubto de Educetodn*, 607, 427-446.
- Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. *Universidad de Granada*.
- Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). PERSPECTIVA AMPLIADA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR. *Paradigma*, 36(1).
- Pino-Fan, L. R., Castro Gordillo, W. F., Godino, J. D., & Font Moll, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el curso de Bachillerato.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Moll, V. F. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 13(1).
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., Castro, W. F., & Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Urquieta, M., Yañez, J. C., & Andrade, J. S. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS* del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 403-429.

Vázquez, M. S., & del Rincón, T. O. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 87-115.

ANEXO I – ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1

En una carrera de ciclistas, se decide registrar durante 10 segundos la distancia que recorren una serie de ciclistas que pasan por un tramo del trayecto.

Como habréis estudiado en otras asignaturas como física, el cálculo de la velocidad de un móvil que describe un movimiento rectilíneo uniforme (a velocidad constante) se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

, donde Δs indica el espacio recorrido en metros y Δt el tiempo transcurrido en segundos.

Se registran los siguientes casos, donde para uno de los cuales se adjunta una gráfica de la posición del ciclista $s(t)$ con respecto al tiempo.

- 1) Un primer ciclista se mueve a velocidad constante en línea recta (describiendo un movimiento rectilíneo uniforme) y recorre una distancia de 100 metros en 10 segundos. Calcula la velocidad del ciclista en el intervalo de tiempo transcurrido desde el segundo 0 hasta el segundo 10.

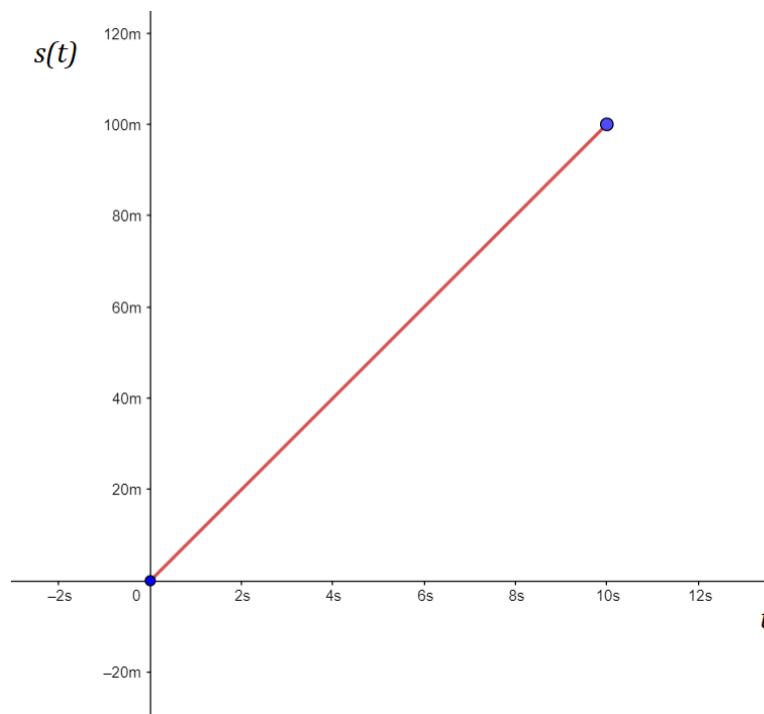


Ilustración 15 - Actividad 1, apartado 1 (elaboración propia)

- 2) Después pasa un segundo ciclista que también se mueve a velocidad constante y en línea recta, pero en un punto del trayecto cambia de repente de velocidad. Este cambio repentino de velocidad ocurre concretamente al cabo de 5 segundos. De este modo, el ciclista recorre una distancia de 40 metros (a velocidad constante) durante los primeros 5 segundos (entre el segundo 0 y el segundo 5), mientras que durante los siguientes 5 segundos (entre el segundo 5 y el segundo 10) recorre una distancia de 70 metros (a velocidad constante). ¿Cuál es la velocidad del ciclista durante los primeros 5 segundos? ¿Y cuál es la velocidad del ciclista durante los últimos 5 segundos?

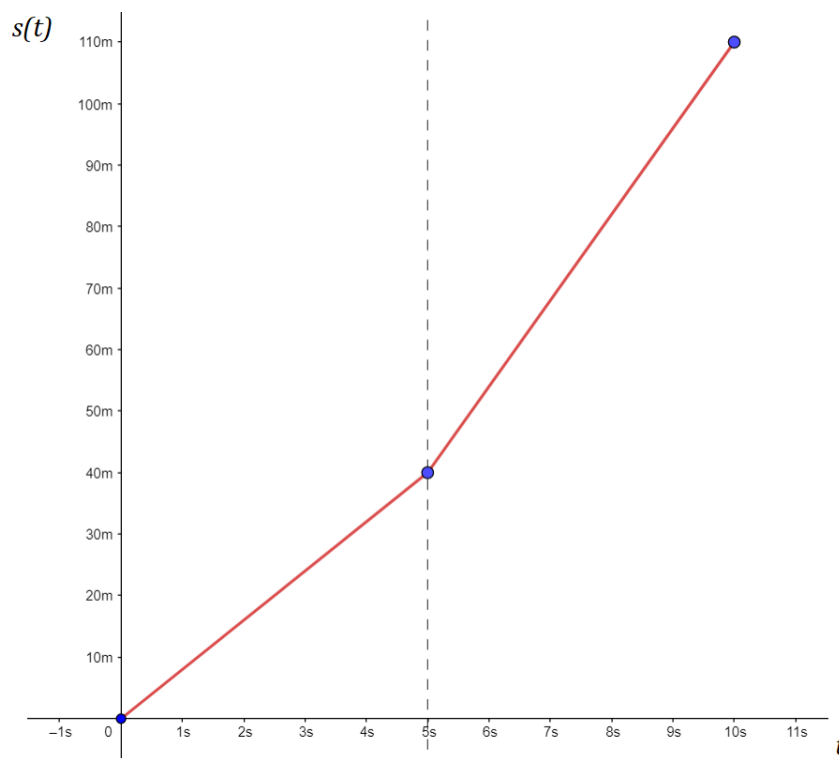


Ilustración 16 - Actividad 1, apartado 2 (elaboración propia)

- 3) Más tarde pasa un tercer ciclista. Este tercer ciclista se encuentra más alterado que los anteriores y llega a realizar un total de 3 cambios repentinos de velocidad. No obstante, en cada intervalo de tiempo delimitado por estos cambios repentinos de velocidad, el ciclista lleva una velocidad constante. En otras palabras, la velocidad que lleva el ciclista varía para cada uno de los 4 intervalos de tiempo que se forman, pero permanece constante en cada intervalo. Como datos sobre la distancia recorrida por el ciclista, se tiene que:

- Entre el segundo 0 y el segundo 2 este recorre 20 metros.

- Entre el segundo 2 y el segundo 5 recorre 50 metros.
- Entre el segundo 5 y el segundo 8 recorre 10 metros.
- Entre el segundo 8 y el segundo 10 recorre 30 metros.

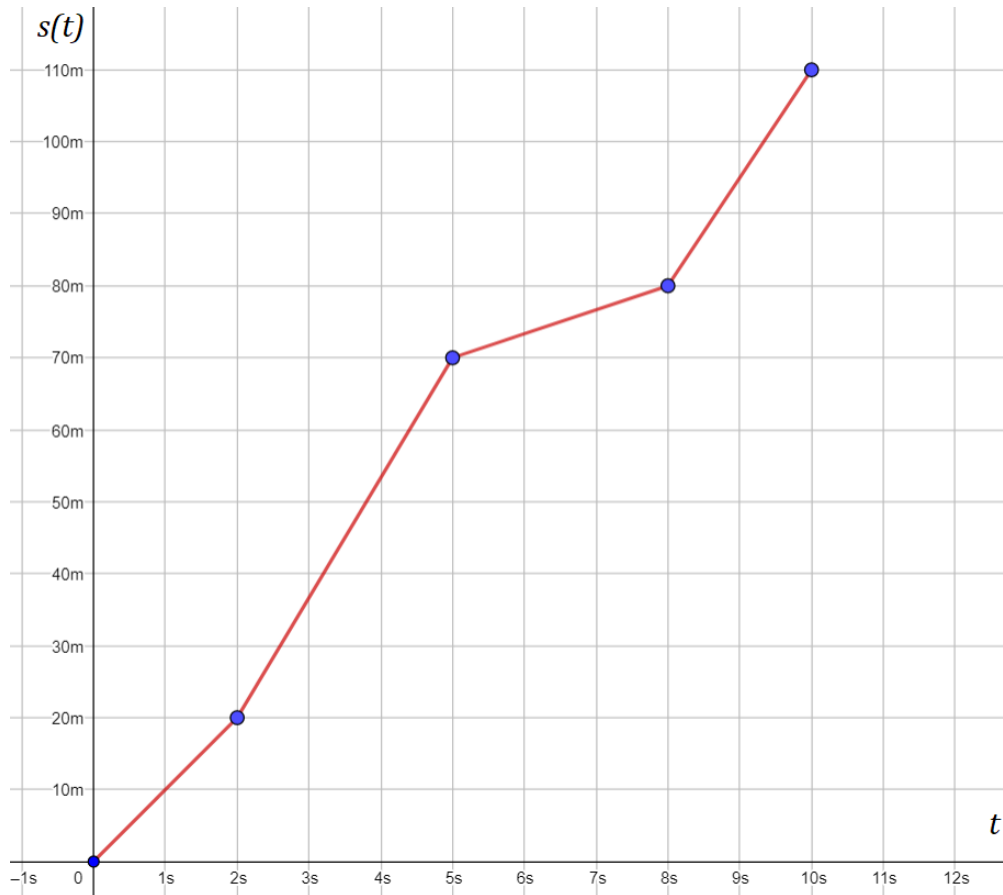


Ilustración 17 - Actividad 1, apartado 3 (elaboración propia)

Calcula la velocidad del ciclista en cada uno de estos 4 intervalos de tiempo.

En los apartados 2 y 3, ¿observas alguna relación entre la velocidad en cada tramo y la inclinación o **pendiente** de las rectas que aparecen en la gráfica? Si es así, comenta lo observado.

- 4) A continuación, pasa un cuarto ciclista. Este ciclista realiza aún más cambios repentinos de velocidad que los anteriores en los 10 segundos en los que se registra su posición, manteniendo, al igual que los anteriores, una velocidad constante para cada intervalo de tiempo. Los datos de la distancia recorrida se muestran a continuación:

- Entre el segundo 0 y el segundo 1 este recorre 20 metros.
- Entre el segundo 1 y el segundo 2 recorre 10 metros.
- Entre el segundo 2 y el segundo 3 recorre 30 metros.
- Entre el segundo 3 y el segundo 4 recorre 5 metros.
- Entre el segundo 4 y el segundo 5 recorre 20 metros.
- Entre el segundo 5 y el segundo 6 recorre 5 metros.
- Entre el segundo 6 y el segundo 7 recorre 40 metros.
- Entre el segundo 7 y el segundo 8 recorre 10 metros.
- Entre el segundo 8 y el segundo 9 recorre 5 metros.
- Entre el segundo 9 y el segundo 10 recorre 20 metros.

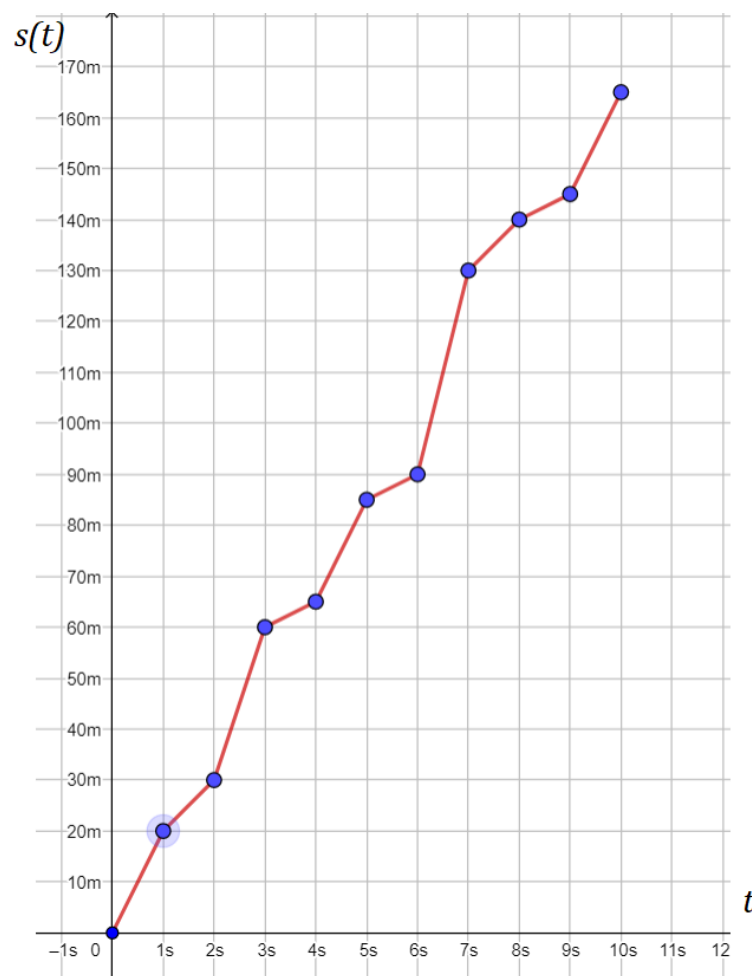


Ilustración 18 - Actividad 1, apartado 4 (elaboración propia)

Calcula la velocidad del ciclista en cada uno de estos 10 intervalos de tiempo. ¿Observas algún tipo de relación entre la forma de la gráfica de la posición con respecto al tiempo en un intervalo y el hecho de que la velocidad sea constante en ese mismo intervalo?

- 5) Hasta ahora hemos estado calculando la velocidad del ciclista en un determinado intervalo de tiempo. Estas velocidades se han podido calcular porque, en cada tramo o intervalo de tiempo, la velocidad del ciclista era constante. Si la velocidad es constante en un intervalo de tiempo, la velocidad media en el intervalo y la velocidad instantánea en cualquier punto del intervalo toman el mismo valor. Dicho de otro modo, si, por ejemplo, en un intervalo de 0 a 2 segundos la velocidad era de 10 m/s, el ciclista llevaría esa velocidad en todos los instantes de tiempo dentro de ese intervalo (en el segundo 0.5, en el segundo 1, en el segundo 1.5, etc.). Imagina que ahora pasa un quinto ciclista, pero la velocidad de este ciclista no cambia de forma brusca y repentina, sino que varía de forma suave, y no se mantiene constante en ningún tramo del recorrido. Supongamos que la distancia recorrida por el ciclista en los 10 segundos registrados se puede representar mediante la función $s(t) = t^2$, en cuyo caso, tendríamos la siguiente gráfica.

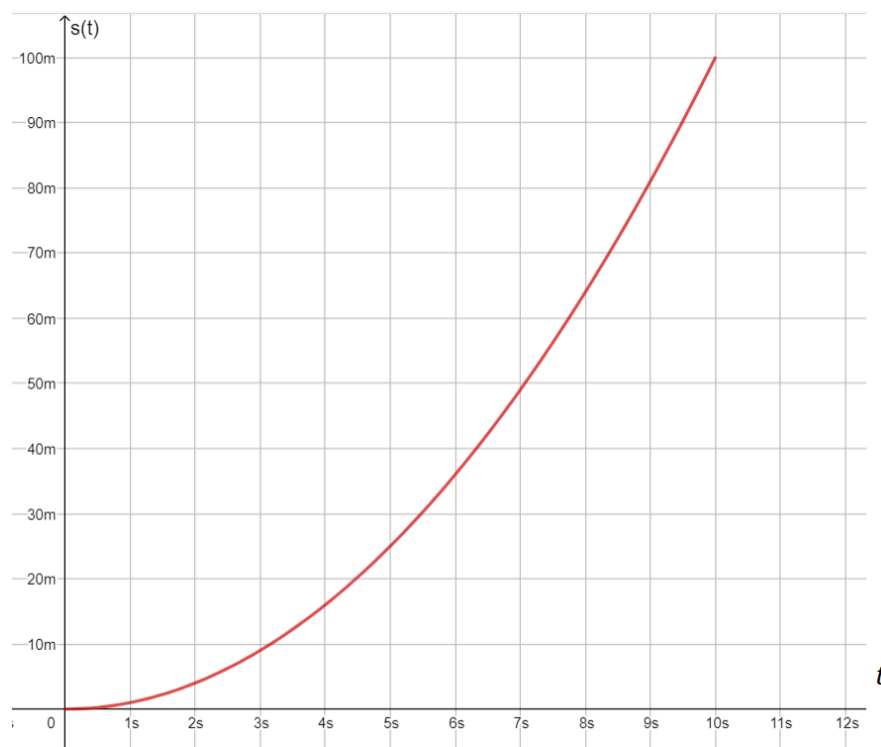


Ilustración 19 - Actividad 1, apartado 5 (elaboración propia)

Imagina que ahora en lugar de, por ejemplo, calcular la velocidad del ciclista en un intervalo de tiempo transcurrido entre el segundo 5 y el segundo 8, queremos calcular la velocidad instantánea del ciclista justamente en el instante de tiempo $t=5s$, sabiendo que la velocidad del ciclista no es constante y se encuentra variando

constantemente. ¿Serías capaz, de una forma muy aproximada, de calcular la velocidad que posee el ciclista justamente en el segundo 5? Si encuentras un método que consideras válido, justifica por qué crees que puede ser correcto.

Datos que podrían ser utilizados:

- La distancia recorrida por el ciclista entre el segundo 5 y el segundo 10 es de 75 metros.
- La distancia recorrida por el ciclista entre el segundo 5 y el segundo 7 es de 24 metros.
- La distancia recorrida por el ciclista entre el segundo 5 y el segundo 6 es de 11 metros.
- La distancia recorrida por el ciclista entre el segundo 5 y el segundo 5.01 es de 0.1001 metros.
- La distancia recorrida por el ciclista entre el segundo 5 y el segundo 5.0001 es de 0.00100001 metros.

Fíjate en lo que ocurre con la forma de la gráfica cuando se amplía en el punto de abscisa $t=5$.

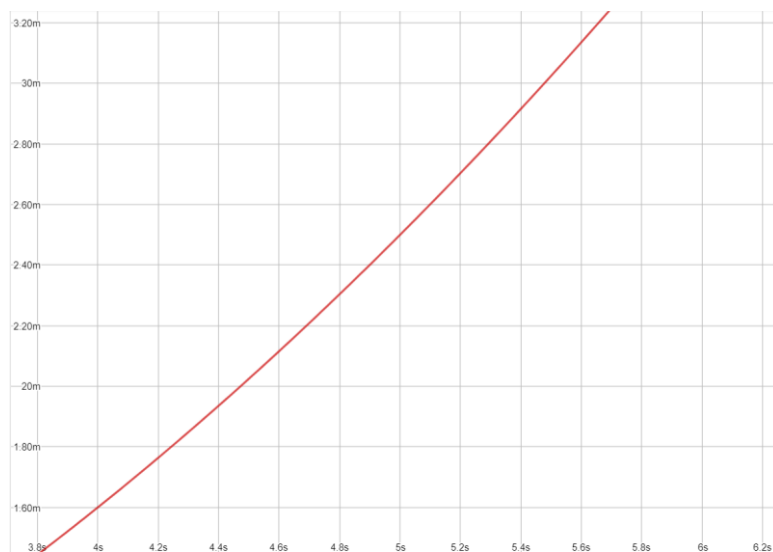


Ilustración 20 - Actividad 1, apartado 5 (imagen ampliada) (elaboración propia)

- 6) Prueba a evaluar una función nueva denominada $s'(t)$ cuya expresión es $s'(t) = 2t$ en $t = 5$. Indica si observas algo extraño en el resultado obtenido. ¿Crees que podría resultar útil para algo esta función?

ACTIVIDAD 2.1

Aplicando el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 1$. A continuación, calcula la derivada de la función f aplicando el límite en la forma $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

ACTIVIDAD 2.2

Aplicando el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2$ en $x = 2$.

ACTIVIDAD 2.3

Calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado aplicando un límite:

- a) $f(x) = 2 - 3x^2$ en $x = -1$
- b) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 1$
- c) $f(x) = 2x^2 + 5x$ en $x = 1$
- d) $f(x) = x^3 + 2$ en $x = 0$

ACTIVIDAD 2.4

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = 2x^2$
- b) $f(x) = x^6$
- c) $f(x) = x$
- d) $f(x) = \sqrt{x^3}$
- e) $f(x) = \frac{1}{x}$

ACTIVIDAD 2.5

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = 2x^2$
- b) $f(x) = x^6$
- c) $f(x) = x$
- d) $f(x) = \sqrt{x^3}$

$$e) f(x) = \frac{1}{x}$$

ACTIVIDAD 2.6

En una guitarra eléctrica, el sonido es producido gracias a unos elementos que actúan como imanes denominados “pastillas” y a un principio físico del electromagnetismo. De acuerdo con este principio físico, existe una variable denominada “flujo magnético”, la cual será representada como una función dependiente del tiempo $f(t)$. El flujo magnético varía cuando el guitarrista acciona las cuerdas de su guitarra



Ilustración 21 - Guitarra eléctrica, actividad 2.6 (elaboración propia)

provocando su vibración, lo cual permite generar una fuerza electromotriz inducida $E(t)$ que será encargada de enviar una corriente al amplificador. Esta fuerza electromotriz inducida depende tanto del número de espiras que conforman el bobinado del interior de la pastilla (N) como de la derivada del flujo magnético ($f'(t)$), de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$E(t) = N f'(t)$$

Supongamos que, por el modo de tocar del guitarrista, el flujo magnético a través de la pastilla activa se puede modelar mediante la siguiente función:

$$f(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5$$

Calcula la fuerza electromotriz inducida en el instante de tiempo $t = 1s$, teniendo en cuenta que la pastilla activa presenta un bobinado de 10 espiras. Expresa el resultado de la fuerza electromotriz inducida en Voltios (V).

ACTIVIDAD 3.1

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

- $f(x) = 4x^5$
- $f(x) = -2x$
- $f(x) = x^2 - 5x + 1$
- $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6$
- $f(x) = \frac{3}{x^3} + 2x$
- $f(x) = (3x - 6)(-x^2 + 1)$

g) $f(x) = 4x^2(3x + 2)(5x^2 + 3)$

h) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

i) $f(x) = \frac{x}{x^2-3}$

ACTIVIDAD 3.2

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^3$

b) $f(x) = 7x$

c) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$

d) $f(x) = x^3 + 3x + 6$

e) $f(x) = \frac{5}{x^2} + 2$

f) $f(x) = (3x^2 - 5x)(5x^2 + 6)$

g) $f(x) = x^2(3x + 2)(7x^2 - 3)$

h) $f(x) = \frac{2x^2}{x+3}$

i) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2-2}$

ACTIVIDAD 3.3

Calcula la derivada primera y segunda de la función $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

ACTIVIDAD 3.4

Calcula la derivada primera y segunda de la función $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x - 5$

ACTIVIDAD 3.5

Los ingresos mensuales que obtiene la empresa Appol con la venta de teléfonos móviles vienen dados por la siguiente función $I(p) = -7p^2 + 11200p$, siendo p el precio de venta un teléfono móvil en euros. Se pide:

a) Halla la expresión de la derivada de I ($I'(p)$).

b) Calcula el precio que cumple que la derivada se anule ($I'(p) = 0$). ¿Qué crees que puede significar este resultado? (Pista: recuerda cómo hallar el vértice de una parábola).

ACTIVIDAD 3.6

Utiliza la aplicación Science Journal de Google para medir la aceleración lineal de tu teléfono móvil.



Ilustración 22 - Aplicación Science Journal de Google, actividad 3.6 (obtención a través del uso personal de la aplicación)

Responde a las siguientes preguntas:

- Coloca el móvil en reposo de modo que permanezca en un determinado lugar sin moverlo. Observa la forma de la gráfica y justifica los valores obtenidos empleando el concepto de derivada.
- A continuación, mueve el teléfono de forma suave desplazándolo a una velocidad constante, sin cambios bruscos en el ritmo de desplazamiento. Justifica los valores de aceleración lineal obtenidos empleando el concepto de derivada.
- Por último, prueba a desplazar el teléfono de lado a lado, provocando cambios bruscos en la velocidad de desplazamiento (prueba a moverlo de golpe de un lado a otro y a dejarlo quieto durante un pequeño intervalo de tiempo antes de moverlo bruscamente hacia el otro lado). Comenta los resultados obtenidos y justifícalos aplicando el concepto de derivada estudiado.

ACTIVIDAD 4

Sea una función $f(x) = e^{0.25x^2} - 1$ representada por la siguiente gráfica:

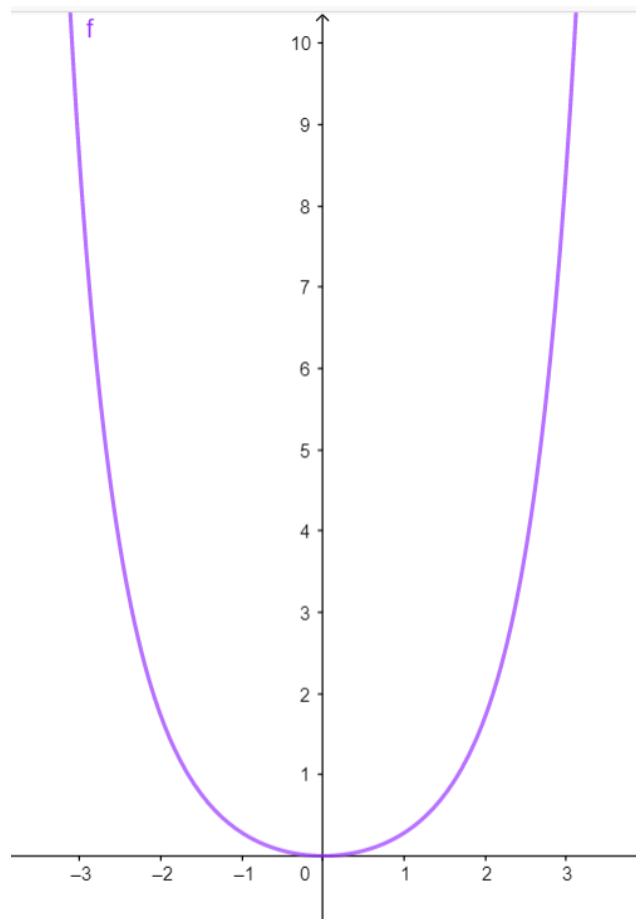


Ilustración 23 - Actividad 4, función estudiada (elaboración propia)

Teniendo en cuenta los conocimientos previos de geometría vistos en las anteriores unidades, la pendiente de una recta que pasa por dos puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ se calcularía de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En la siguiente imagen se muestra este concepto expresado gráficamente:

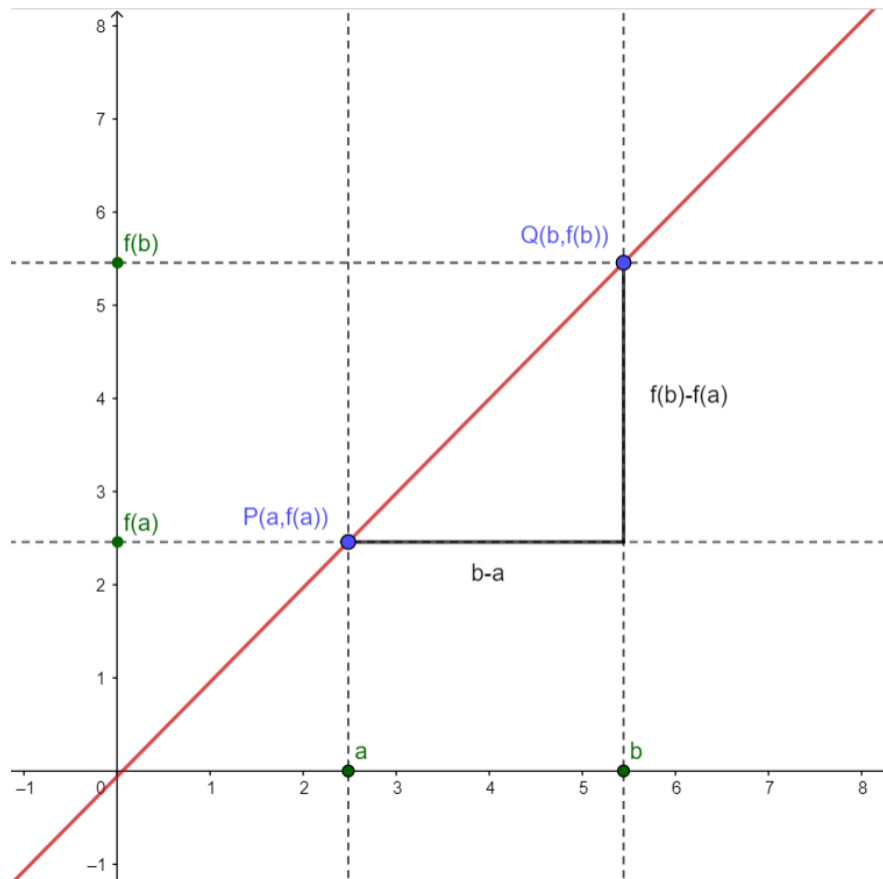


Ilustración 24 - Actividad 4, cálculo de pendientes (elaboración propia)

Además, una vez conocida la pendiente de la recta y un punto cualquiera de esta (para el caso de este ejemplo se tomará el punto $P(a, f(a))$), se puede obtener la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente de la siguiente manera:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

A continuación, se pide realizar una serie de cálculos. Se permite hacer uso de la calculadora cuando sea necesario y expresar los resultados como números decimales aproximados.

Nota: se aconseja redondear los resultados con, al menos, 4 cifras decimales y, si es posible, usar todos los decimales que nos proporcione la calculadora.

- 1) Calcula la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f en los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(3, f(3))$. Una vez obtenida la pendiente, expresa la ecuación de la recta secante en la forma punto-pendiente.

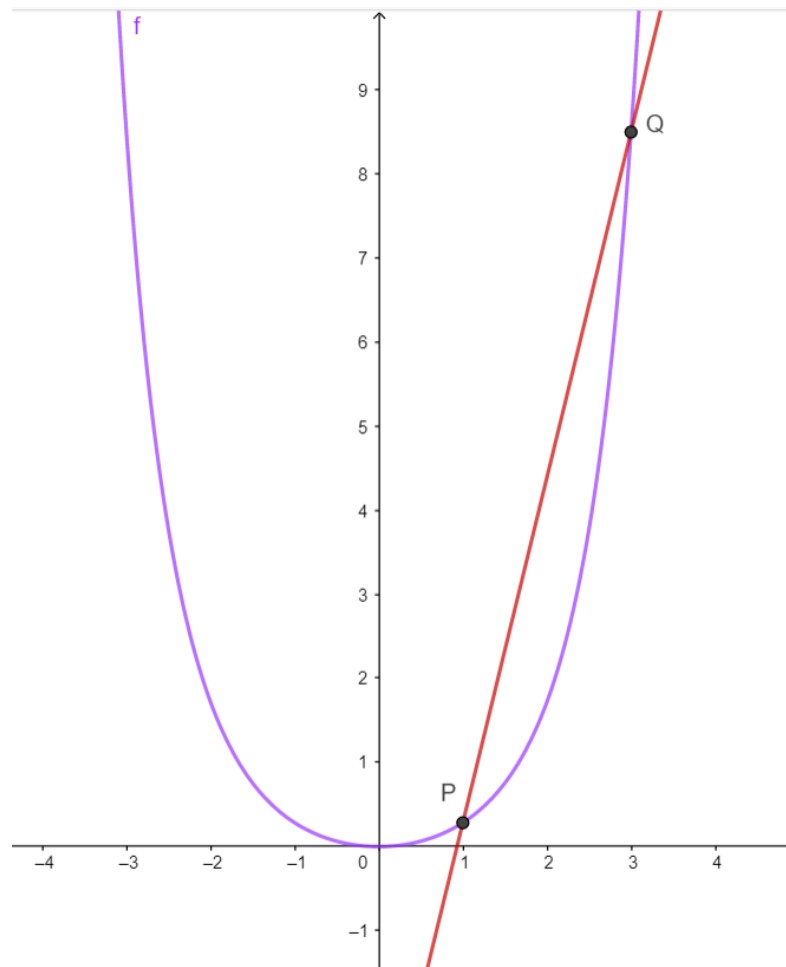


Ilustración 25 - Actividad 4, apartado 1 (elaboración propia)

- 2) Calcula la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f en los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(2.5, f(2.5))$. Una vez obtenida la pendiente, expresa la ecuación de la recta secante en la forma punto-pendiente.

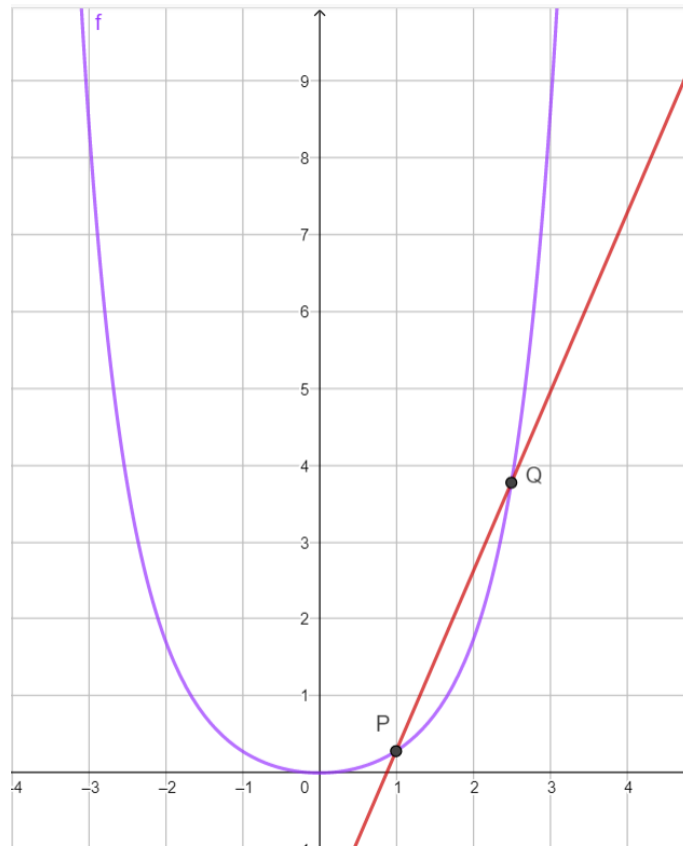


Ilustración 26 - Actividad 4, apartado 2 (elaboración propia)

- 3) Calcula la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f en los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(2, f(2))$. Una vez obtenida la pendiente, expresa la ecuación de la recta secante en la forma punto-pendiente.

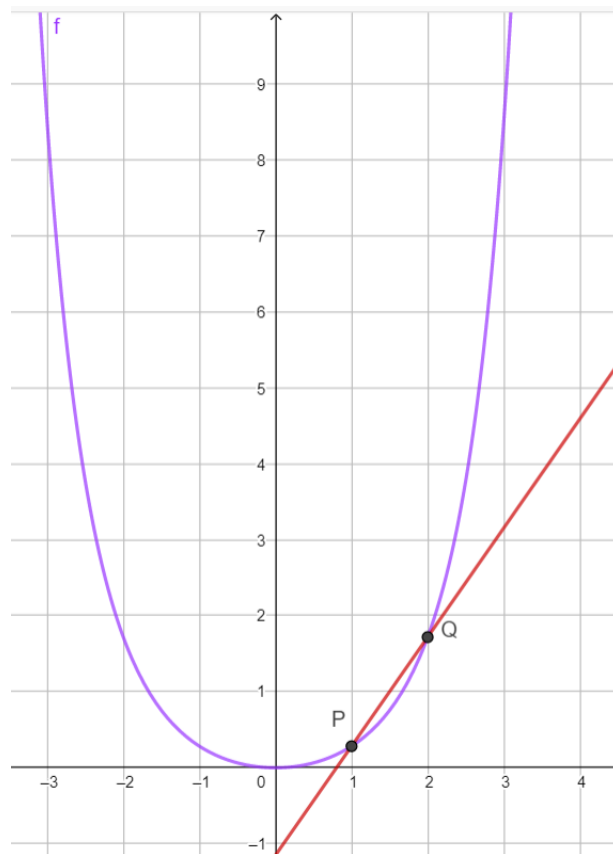


Ilustración 27 - Actividad 4, apartado 3 (elaboración propia)

4)

- ¿Sabrías dar un valor que indicase cuánto varía la función entre el punto de abscisa $x=1$ y el punto de abscisa $x=3$ en relación con la longitud del intervalo $[1,3]$?
- ¿Y otro valor que indicase cuánto varía la función entre el punto de abscisa $x=1$ y el punto de abscisa $x=2.5$ en relación con la longitud del intervalo $[1,2.5]$?
- Por último, ¿cuánto variaría la función entre el punto de abscisa $x=1$ y el punto de abscisa $x=2$ en relación con la longitud del intervalo $[1,2]$?
- Opcional: En base a lo estudiado en cursos anteriores, ¿sabes si estas medidas de la variación tienen algún nombre en concreto?
- ¿Encuentras alguna relación entre esta variación y la variación de la distancia recorrida con respecto al tiempo que utilizamos para calcular la velocidad del ciclista en la actividad 1?

5) Con respecto a las variaciones calculadas en el apartado 4, ¿observas alguna relación con algún otro parámetro?

- 6) Calcula esta vez la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f en los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(1.5, f(1.5))$. Una vez obtenida la pendiente, expresa la ecuación de la recta secante en la forma punto-pendiente.

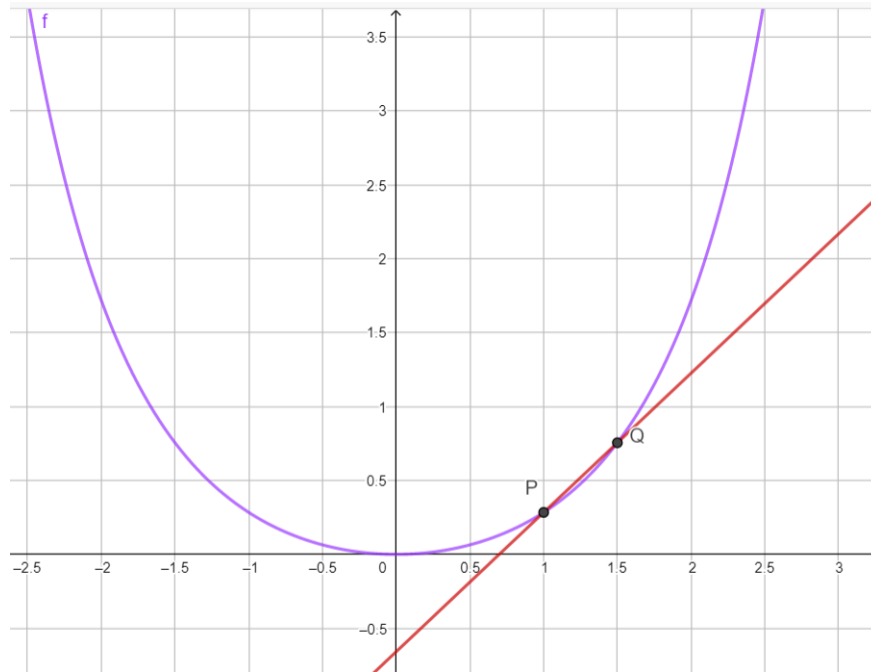


Ilustración 28 - Actividad 4, apartado 6 (elaboración propia)

- 7) La recta tangente a una función f en un punto $P(a, f(a))$ es una recta que toca a la curva solamente en el punto P . ¿Serías capaz de obtener una aproximación de la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{0.25x^2} - 1$ en el punto $P = (1, f(1))$? Expresa la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

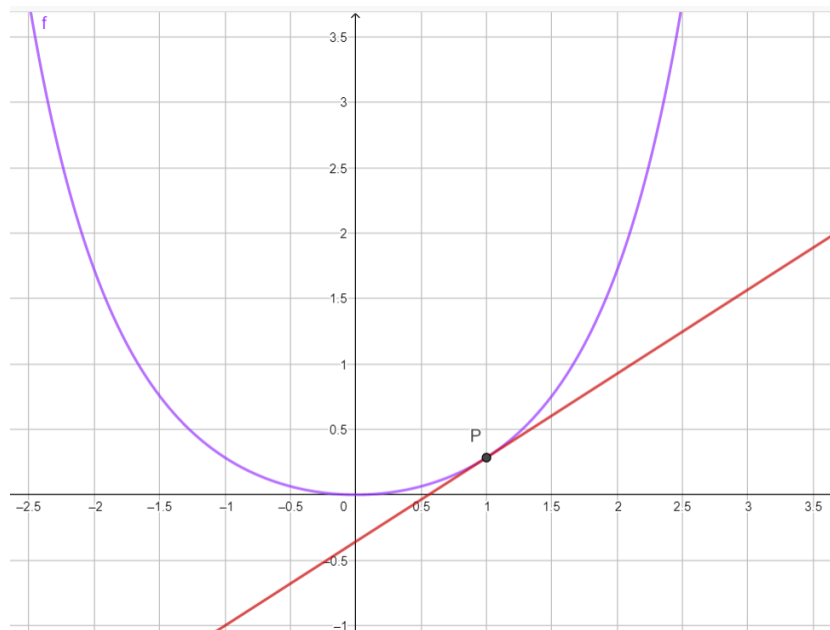


Ilustración 29 - Actividad 4, apartado 7 (elaboración propia)

Pista: Acuérdate de lo que hicimos en la actividad 1 y fíjate en lo que has estado realizando en los apartados anteriores.

Recuerda: se aconseja redondear los resultados con, al menos, 4 cifras decimales y, si es posible, usar todos los decimales que nos proporcione la calculadora.

- 8) Por arte de magia (ya veréis que incluso en matemáticas todos los trucos de magia tienen su secreto) nos aparece una función $f'(x) = 0.5x \cdot e^{0.25x^2}$. Evalúa la función $f'(x)$ en $x = 1$ y comenta si observas alguna curiosidad en el resultado si se compara con los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

ACTIVIDAD 5.1

Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

ACTIVIDAD 5.2

Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x^2 - 2.5$ en los puntos de corte de esta función con el eje X.

ACTIVIDAD 5.3

Los ingresos de la empresa Appol en los próximos años, expresados en millones de euros, pueden ser estimados por la siguiente función:

$$I(t) = 0.25t^2 + 6t$$

Donde I son los ingresos (en millones de euros) y t el tiempo transcurrido en años desde la puesta en funcionamiento de la empresa.

Calcula:

- Tasa de variación media de los ingresos entre el primer y el tercer año desde su puesta en funcionamiento.
- Para el tercer año de funcionamiento, calcula el ritmo al que se estima que crecerán los ingresos.

ACTIVIDAD 5.4

Desde la parte alta de un edificio, una persona situada a una altura de 450 metros de altura, deja caer un objeto. De acuerdo con las leyes físicas de la gravedad, la distancia recorrida por el objeto en función del tiempo viene dada por la función $s(t) = 4.9t^2$. Se pide calcular, aplicando los conceptos de tasa de variación:

- Velocidad media del objeto entre el segundo 7 desde que es lanzada y el segundo 8.
- Velocidad media del objeto entre el segundo 7 y el segundo 7.5.
- Velocidad media del objeto entre el segundo 7 desde que es lanzada y el segundo 7.1.
- Velocidad instantánea del objeto a los 7 segundos tras el lanzamiento.

ACTIVIDAD 6.1

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5(2x^2 + 1)^3$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
- $f(x) = \left(\frac{x}{x^2+2}\right)^3$

ACTIVIDAD 6.2

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x^2 e^x$
- b) $f(x) = \log_2 x^2$
- c) $f(x) = 2^{x^2+2}$
- d) $f(x) = \ln(3x^3 + 5)$

ACTIVIDAD 6.3

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x \cos(3x)$
- b) $f(x) = 5 \operatorname{sen}^2(x)$
- c) $f(x) = \tan(5x^2)$
- d) $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x)$

ACTIVIDAD 6.4

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- d) $f(x) = 2(5x^2 + 3x)^4$
- e) $f(x) = \sqrt{5x + 1}$
- f) $f(x) = \left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^2$

ACTIVIDAD 6.5

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- e) $f(x) = e^{x^2+1}$
- f) $f(x) = \log_2(2x^3 + 2)$
- g) $f(x) = 3x \cdot 2^{x^3}$
- h) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$

ACTIVIDAD 6.6

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- e) $f(x) = 5x \operatorname{sen}(x^2)$
- f) $f(x) = 8x^2 \operatorname{sen}^2(x)$
- g) $f(x) = \tan(2x - 1)$
- h) $f(x) = \operatorname{arccos}(2x^2)$

ACTIVIDAD 6.7

El precio de un dispositivo móvil de la empresa Appol, no se mantiene fijo con el tiempo, ya que conforme pasan los años los móviles se devalúan. Tras un estudio, se ha comprobado que el precio de sus dispositivos móviles se puede calcular en función del tiempo a través de la siguiente función:

$$P(t) = 1000 e^{-0.1t} \quad (t \geq 0)$$

Donde P es el precio en euros y t el tiempo transcurrido desde su salida al mercado.

Se pide:

- Determina el precio de salida del teléfono al mercado (cuánto costaba el día que se lanzó al mercado).
- Determina el precio del teléfono al cabo de 4 años y al cabo de 6 años de su salida.
- Determina el ritmo al que disminuye el precio cuando han pasado 4 años desde el momento de salida al mercado del teléfono.

ACTIVIDAD 7 – GEOGEBRA

GeoGebra es un software libre matemático interactivo que ofrece una gran variedad de recursos para trabajar con funciones, realizar su representación gráfica e interpretar los datos obtenidos en un problema de análisis matemático, así como una amplia variedad de posibilidades de trazado de construcciones geométricas.

En esta sesión, se explorará las posibilidades que presenta el uso de GeoGebra en relación al tema de las derivadas y, concretamente, a su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente.

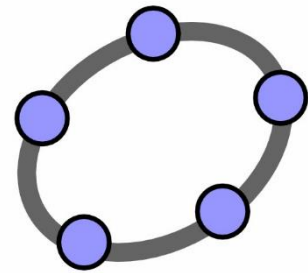


Ilustración 30 - Logotipo de GeoGebra, actividad 7 (obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>)

Guion de prácticas

En primer lugar, se muestra un tutorial básico de uso de GeoGebra. En este guion, se hará uso de la versión “classic” del software, aunque si alguien es capaz de utilizar cualquier otra versión puede hacerlo sin problema.

- 1) Para acceder a GeoGebra, se ha de introducir la siguiente dirección en el navegador: <https://www.geogebra.org/classic>
- 2) Una vez dentro, la interfaz del software presentará el siguiente aspecto:

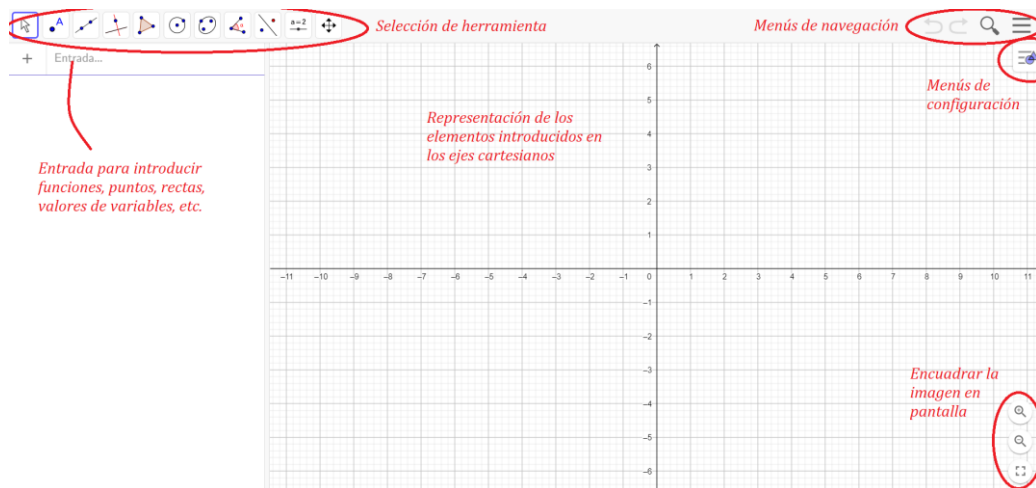


Ilustración 31 - Actividad 7, interfaz de GeoGebra (elaboración propia)

- 3) Prueba a introducir una función. Para ello, escribe donde pone “Entrada...” la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y presiona la tecla ENTER.

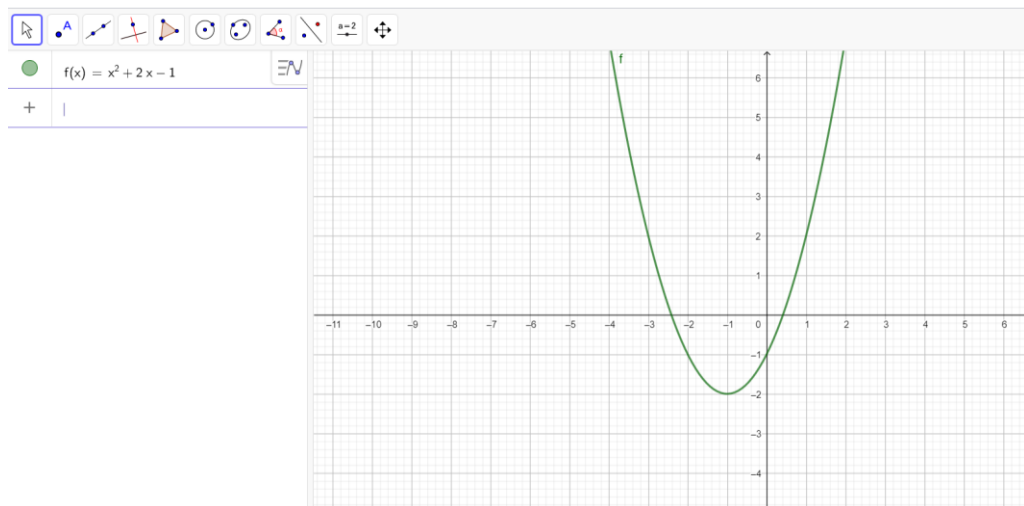


Ilustración 32 - Actividad 7, introducción de función en GeoGebra (elaboración propia)

- 4) A continuación, prueba a introducir una variable mediante un deslizador. Para ello, escribe una letra, por ejemplo, “a”, en otra entrada (debajo de la

entrada de la función). Observa que aparece un deslizador que permite modificar el valor de la variable a .

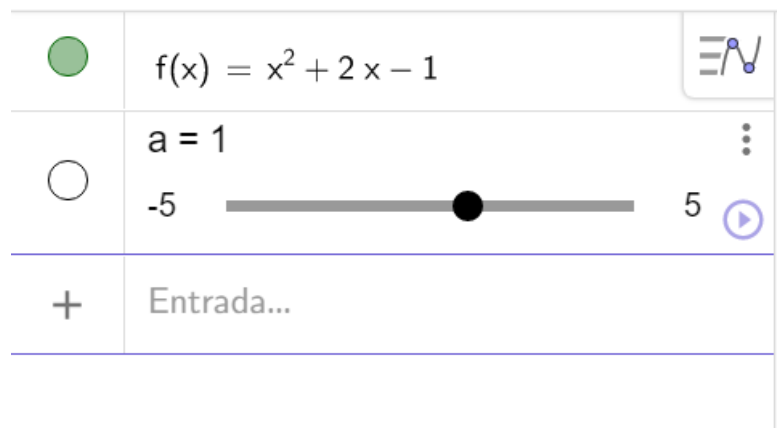


Ilustración 33 - Introducción de variable en GeoGebra (elaboración propia)

- 5) Prueba a introducir otra variable denominada b siguiendo el mismo procedimiento que para a . A continuación, prueba a introducir otra función, por ejemplo, $g(x) = ax + b$. Esta función dependerá de los valores de a y b que modifiquemos con los deslizadores.

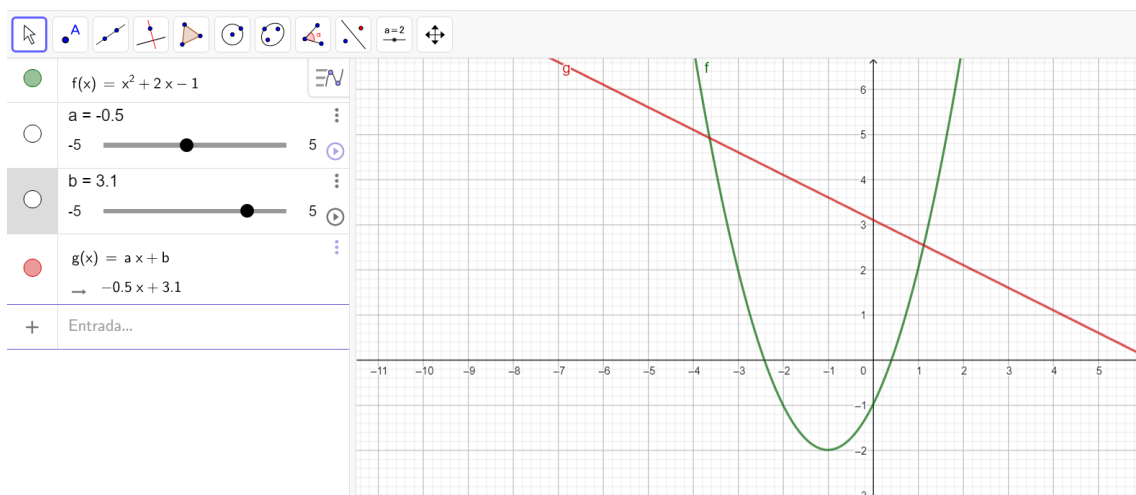


Ilustración 34 - Introducción de una segunda función, actividad 7 (elaboración propia)

- 6) Prueba a introducir un punto P . Para ello, escribe en otra entrada adicional " $P = (1,1)$ ".

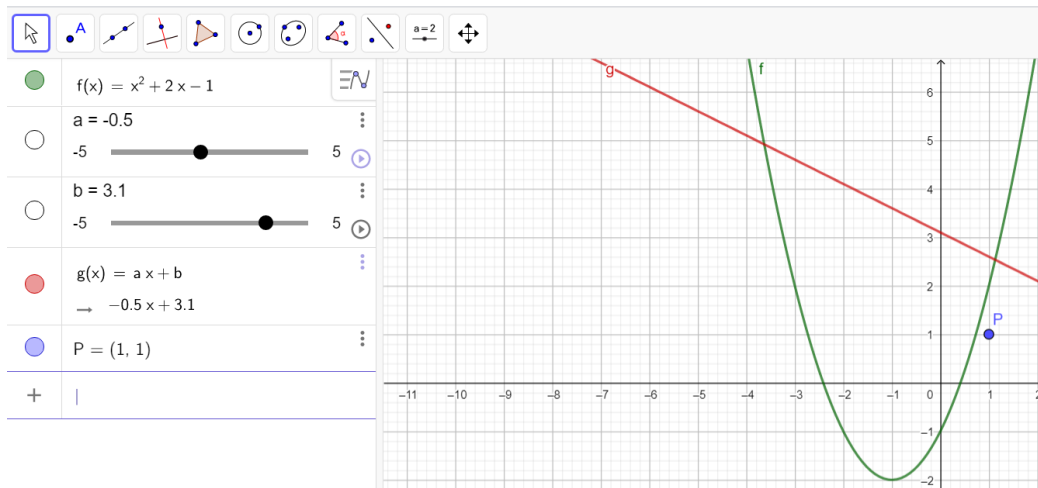


Ilustración 35 – Introducción de un punto, actividad 7 (elaboración propia)

- 7) A continuación, prueba a introducir un punto Q utilizando la herramienta “punto” situada en el menú de selección de herramienta (arriba a la izquierda). Sitúa el punto Q en algún lugar cerca del punto P. Se creará de forma predeterminada un punto A. Para renombrarlo, haz click sobre la entrada del punto que aparecerá en la lista de la izquierda y sustituye “A” por “Q”. Si lo deseas, puedes ajustar el valor exacto de las coordenadas del punto Q en el mismo sitio donde se renombra.

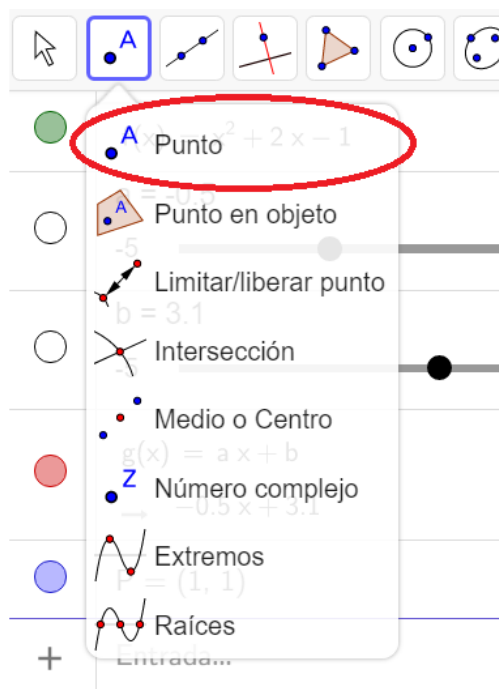


Ilustración 36 - Herramienta de selección de punto en GeoGebra (elaboración propia)

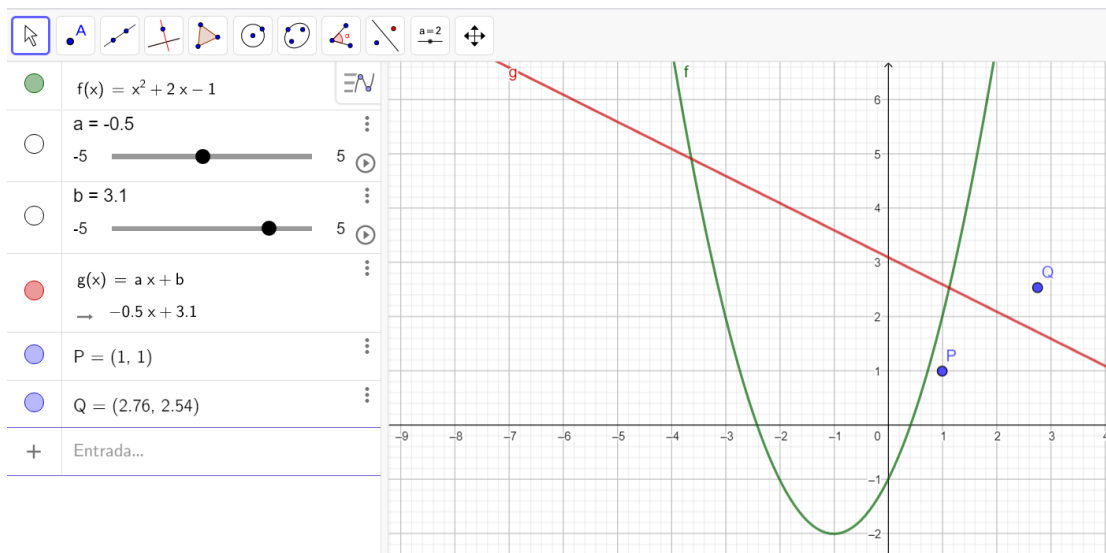


Ilustración 37 - Introducción de un segundo punto, actividad 7 (elaboración propia)

- 8) A continuación, prueba a introducir un punto R perteneciente a la función f . Para ello, escribe en la entrada “ $R = (-3, f(-3))$ ”.

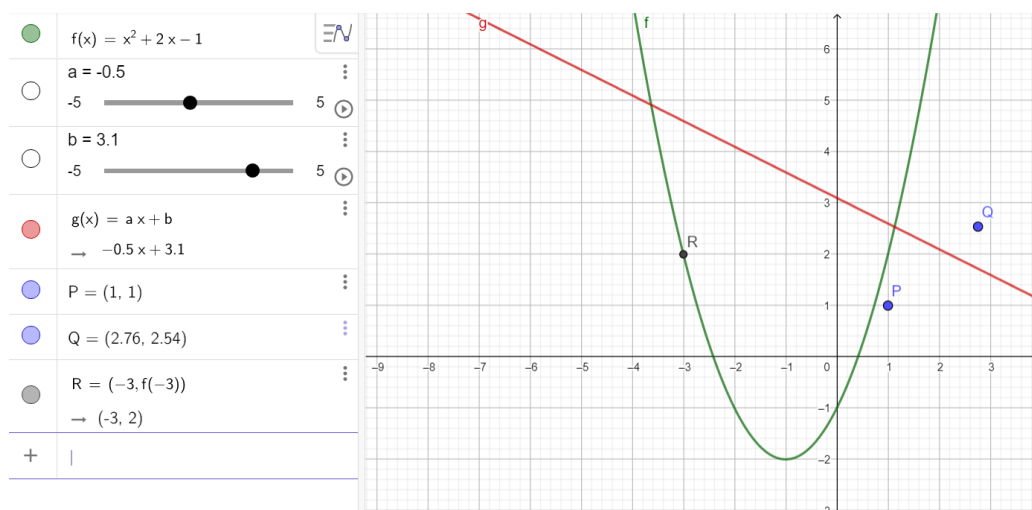


Ilustración 38 - Introducción de un punto perteneciente a una gráfica, actividad 7 (elaboración propia)

- 9) A continuación, procede a trazar la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto R. Para ello, haz click sobre el cuarto icono que aparece en la barra de selección de herramientas y selecciona posteriormente la opción “tangentes”. A continuación, haz click primero sobre el punto R y después sobre cualquier punto de la gráfica de f .

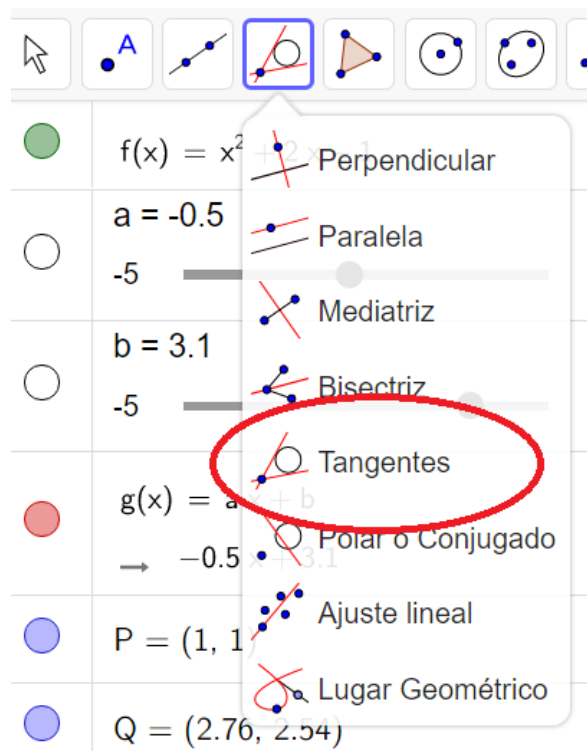


Ilustración 39 - Herramienta de selección de recta tangente a una gráfica en GeoGebra (elaboración propia)

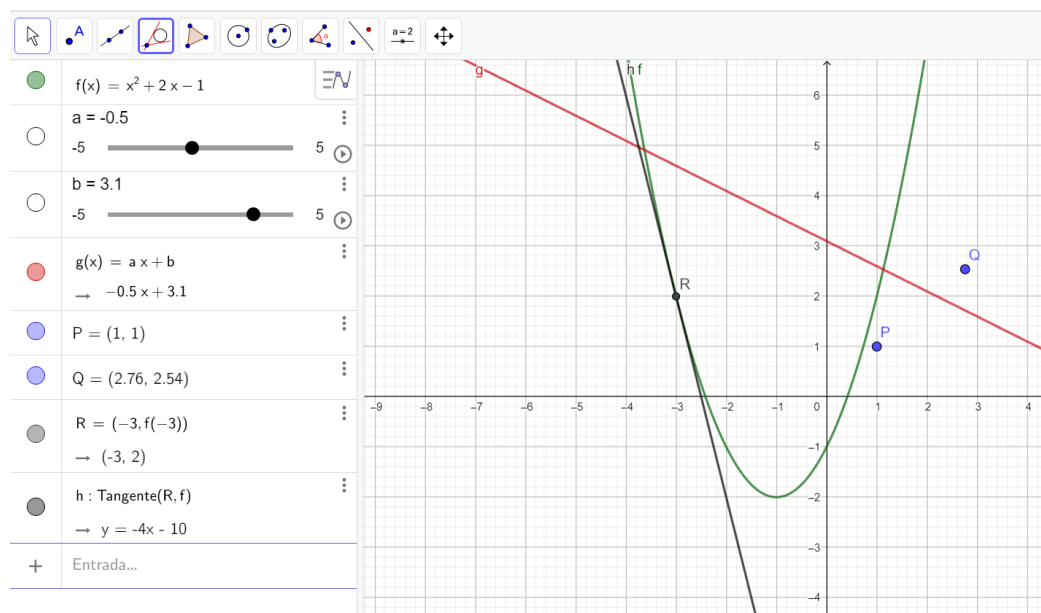


Ilustración 40 - Introducción de recta tangente, actividad 7 (elaboración propia)

10) Ahora vamos a ilustrar la recta normal a la gráfica de f en el punto R. Esta recta posee la particularidad de ser perpendicular a la recta tangente representada en el apartado anterior. Haz click en la cuarta opción de la barra de selección de herramienta, pero esta vez selecciona la opción

“perpendicular”. Posteriormente, selecciona primero el punto R y después un punto cualquiera de la recta tangente.

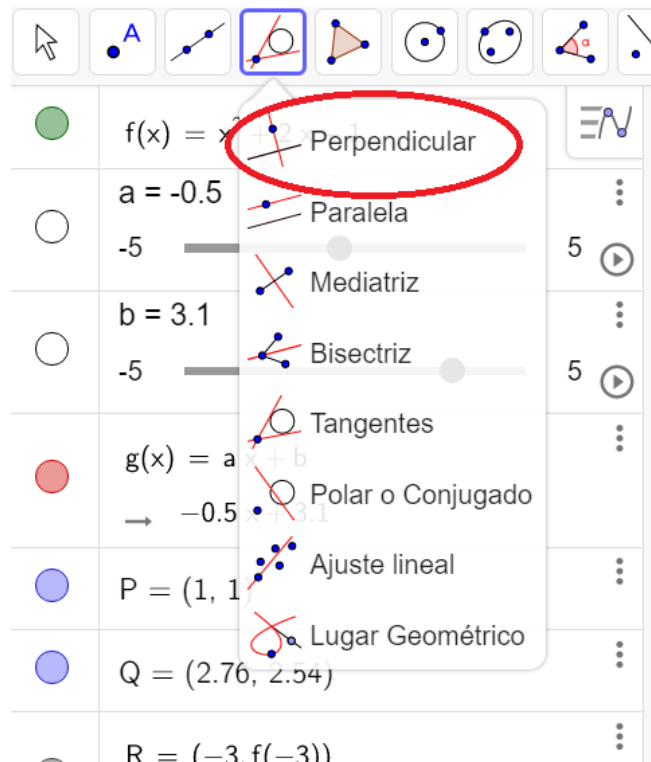


Ilustración 41 - Herramienta de selección de recta perpendicular en GeoGebra (elaboración propia)

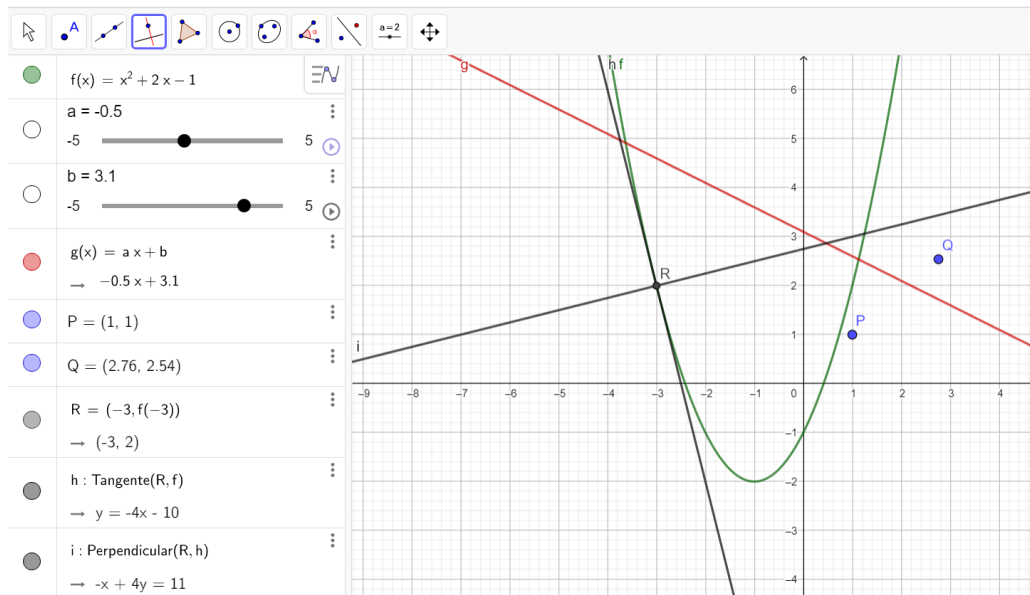


Ilustración 42 - Introducción de recta normal, actividad 7 (elaboración propia)

Para visualizar u ocultar un elemento, haz click sobre el círculo que aparece a la izquierda de la entrada de dicho elemento.

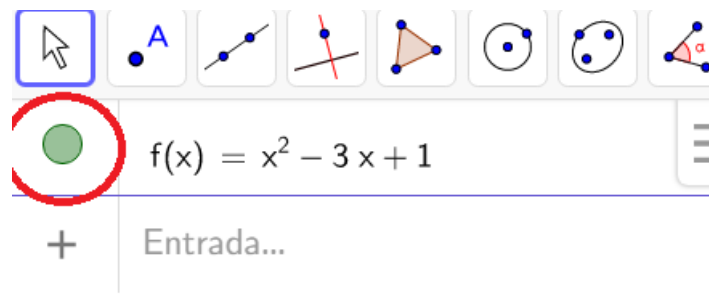


Ilustración 43 - Visibilizar u ocultar elemento en GeoGebra (elaboración propia)

EJERCICIOS:

1)

- Calcula a mano la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punto de abscisa $x=2$. Expresa el resultado de la ecuación de la recta tangente en forma explícita ($y = mx + n$).
- Introduce la función f en GeoGebra. A continuación, representa, usando las herramientas geométricas para el trazado de tangentes, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
- Una vez calculada la ecuación de la recta tangente en forma explícita, introdúcela en GeoGebra como una función g , sustituyendo y por $g(x)$ ($g(x) = mx + n$). Comprueba que la función g se superpone a la recta tangente representada en el apartado b).
- Repite los apartados anteriores siguiendo el mismo procedimiento pero para el cálculo de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=2$.

2)

- Calcula a mano la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ en el punto de abscisa $x=0$. Expresa el resultado de la ecuación de la recta tangente en forma explícita ($y = mx + n$).
- Introduce la función f en GeoGebra. A continuación, representa, usando las herramientas geométricas para el trazado de tangentes, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
- Una vez calculada la ecuación de la recta tangente en forma explícita, introdúcela en GeoGebra como una función g , sustituyendo y por $g(x)$ ($g(x) = mx + n$). Comprueba que la función g se superpone a la recta tangente representada en el apartado b).

- d) Repite los apartados anteriores siguiendo el mismo procedimiento pero para el cálculo de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$, en lugar de la recta tangente.

ACTIVIDAD 8.1

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

ACTIVIDAD 8.2

Determina los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$

ACTIVIDAD 8.3

Estudia los intervalos de concavidad y convexidad y determina los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 6x^2 - 3x + 12$

ACTIVIDAD 8.4

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 2$$

ACTIVIDAD 8.5

Determina los extremos relativos de la función $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 5x$

ACTIVIDAD 8.6

Estudia los intervalos de concavidad y convexidad y determina los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$

ACTIVIDAD 9.1

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2}$

ACTIVIDAD 9.2

Representa gráficamente la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$

ACTIVIDAD 9.3

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

ACTIVIDAD 10.1

Una empresa quiere comercializar un nuevo producto que consiste en un surtido de alimentos empaquetado en una caja. Por norma, la caja en la que han de enviar el surtido tiene que respetar una serie de condiciones. Estas restricciones son:

- La suma de las tres dimensiones de la caja (alto, ancho y largo) ha de ser de 300 cm.
- La altura de la caja ha de ser inferior a 100 cm.
- El largo y el ancho de la caja han de ser iguales.

Teniendo en mente estas consideraciones, la empresa pretende diseñar una caja con el máximo volumen posible para poder integrar en su interior la mayor cantidad de productos. ¿Cuáles serían las dimensiones que debería presentar la caja para que, respetando la normativa, su volumen sea máximo?

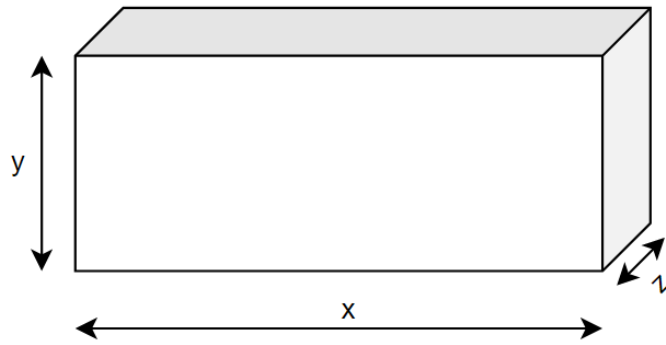


Ilustración 44 - Modelo actividad 10.1 (elaboración propia)

ACTIVIDAD 10.2

Un agricultor desea vallar su terreno para delimitar una zona de cultivo. Por limitaciones de espacio del terreno exterior, la zona vallada ha de presentar una parte semicircular sobre una parte rectangular para que pueda encajar dentro de la zona que tiene disponible. De este modo, la zona vallada ha de presentar la siguiente forma:

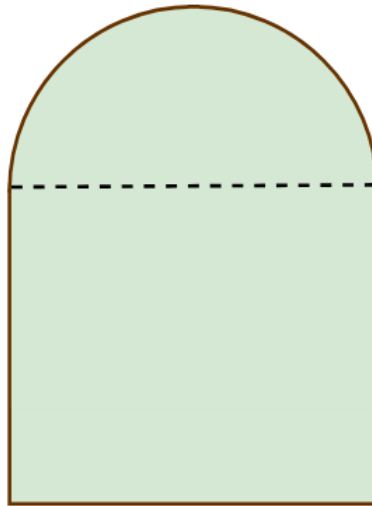


Ilustración 45 - Modelo actividad 10.2 (elaboración propia)

Si el agricultor ha comprado únicamente 40 metros de valla para cercar el terreno, ¿cómo tendría que disponerla para que, con la forma de la imagen anterior, el terreno vallado presente una superficie lo más grande posible?

ACTIVIDAD 10.3

Con el objetivo de contribuir con el desarrollo sostenible y minimizar el impacto ambiental, una empresa de bebidas estudia la forma en la que se deben construir las latas de 330 mL de capacidad. Suponiendo que la forma de la lata es cilíndrica, determina las dimensiones que debe presentar para que, albergando una capacidad de líquido de 330 mL, la cantidad de hojalata empleada para su construcción sea mínima.

ACTIVIDAD 11.1

Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

ACTIVIDAD 11.2

Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando el método de la regla de la cadena.

- a) $f(x) = 5 \cdot \text{sen}^3(x)$
- b) $g(x) = \text{sen}(\ln(4x^2 + 5x))$

ACTIVIDAD 11.3

Representa gráficamente la siguiente función.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x$$

ACTIVIDAD 11.4 – KAHOOT

- 1) Señala la opción correcta.
 - a. Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.
 - b. Toda función continua en un punto es derivable en dicho punto.
 - c. Una función no continua en un punto puede ser derivable en dicho punto.

- d. Si la recta tangente a una función en un punto es vertical, la función es derivable en dicho punto.

2) La derivada de una función f en un punto a viene dada por la siguiente expresión.

- a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
 b. $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(a-h)-f(h)}{a}$
 c. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(h)}{a}$
 d. $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h}$

3) La tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, x]$ viene dada por el cociente:

- a. $TVM = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
 b. $TVM = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
 c. $TVM = \frac{f(h)-f(a+h)}{h}$
 d. $TVM = \frac{f(x)-f(a)}{x}$

4) La derivada de la función $h(x) = f(x) + g(x)$ es:

- a. $h'(x) = f'(x) + g(x)$
 b. $h'(x) = f(x) + g'(x)$
 c. $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
 d. $h'(x) = f(x)g(x) + f'(x)g'(x)$

5) La derivada de la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es:

- a. $h'(x) = f'(x) - g(x)$
 b. $h'(x) = f(x)g(x) + f'(x)g(x)$
 c. $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
 d. $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

6) La derivada de la función $h(x) = f(x)g(x)$ es:

- a. $h'(x) = f'(x) + g(x)$
 b. $h'(x) = f(x)g(x) + f'(x)g(x)$
 c. $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
 d. $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

7) La derivada de la función $h(x) = g(f(x))$ es:

- a. $h'(x) = f'(x) + g(x)$
- b. $h'(x) = f(x)g(x) + f'(x)g(x)$
- c. $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- d. $h'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$

8) La derivada de la función $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ es:

- a. $f'(x) = \cos x * \frac{1}{x}$
- b. $f'(x) = -\cos(\ln x) * e^x$
- c. $f'(x) = -\cos(\ln x) * \frac{1}{x}$
- d. $f'(x) = \cos(\ln x) * \frac{1}{x}$

9)Cuál de estas igualdades se utiliza para hallar extremos relativos en una función:

- a. $f(x) = 0$
- b. $f'(x) = 0$
- c. $f''(x) \geq 0$
- d. $f'''(x) = 0$

10) Sea $f(x)$ una función cuya derivada segunda existe en un intervalo abierto (a, b) . La condición para que la función sea convexa en un punto x perteneciente al intervalo (a, b) es:

- a. $f(x) = 0$
- b. $f'(x) = 0$
- c. $f''(x) \geq 0$
- d. $f'''(x) = 0$

EXAMEN

1) Sea una función $f(x) = \frac{3}{x+2}$ obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$.

2) Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando el método de la regla de la cadena:

- a) $f(x) = 4(\ln x)^2 + 3 \cos(e^x)$
- b) $g(x) = 2 \text{sen}(x)\cos(\ln(x))$

3) Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$$

ANEXO II – ACTIVIDADES ESPECIALES DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

ACTIVIDADES DE REFUERZO

ACTIVIDAD 2.R

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = 1$
- b) $f(x) = 3$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = x^2$
- e) $f(x) = 2x^2$

ACTIVIDAD 3.R

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

- f) $f(x) = 1 + 3x$
- g) $f(x) = 2x + x^2$
- h) $f(x) = (x + 5)(x + 2)$
- i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
- j) $f(x) = \frac{3}{x+2}$

ACTIVIDAD 5.R.1

Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Guía para la resolución:

Ecuación de la recta tangente: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ecuación de la recta normal: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

El valor de a se corresponde con el punto de abscisa que indican en el enunciado. Para obtener $f(a)$ se ha de sustituir este valor de a en la expresión de $f(x) = x^2$.

Para calcular la derivada, primero se obtiene la expresión de $f'(x)$ y posteriormente se evalúa para el valor de x correspondiente a a .

ACTIVIDAD 5.R.2

Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ entre los puntos 2 y 4. Posteriormente, calcula la tasa de variación instantánea de la función f en el punto $x = 2$.

Guía para la resolución:

- Tasa de variación media (TVM) = $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
 - x y a son los puntos del intervalo de modo que $x > a$
- Tasa de variación instantánea (TVI) = $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
 - a es el punto donde nos piden la TVI y la x es una variable que se deja como x

ACTIVIDAD 6.R

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- g) $f(x) = (\ln(x))^2$
- i) $f(x) = e^{2x}$
- i) $f(x) = \text{sen}(x^2)$
- j) $f(x) = \text{sen}^2(x)$
- k) $f(x) = \cos(2x)$

ACTIVIDAD 8.R

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2$

ACTIVIDAD 9.R

Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 1$

ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN

ACTIVIDAD 5.A

Si se representase la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en el punto de abscisa $x = 1$ se vería que dicha recta tangente corta a la función en otro punto. Obtén las coordenadas de este punto.

ACTIVIDAD 8.A.1

Halla los extremos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[-3,3]$ y represéntalos. Determina en qué punto no existe la derivada de $f(x)$.

ACTIVIDAD 8.A.2

Calcula el valor máximo alcanzado por la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3(\cos x)}{1 + \tan^2 x}$

ACTIVIDAD 8.A.3

Calcula el valor mínimo alcanzado por la función $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$

ACTIVIDAD 9.A

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

ANEXO III – DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

DEMOSTRACIÓN 4.2.1

La condición para que la función f sea continua en a viene dada por la siguiente expresión:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

A continuación, se procede a desarrollar el límite $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)]$ tanto por la izquierda como por la derecha.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \rightarrow a^-} (x - a) \end{aligned}$$

Como f es derivable en a , existe el límite $\lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$ y el límite $\lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$, siendo ambos iguales y tratándose de un número finito ($f'(a)$), luego:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) = f'(a) * 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \rightarrow a^-} (x - a) = f'(a) * 0 = 0$$

A continuación, se procederá a realizar el desarrollo de los límites laterales de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \rightarrow a^+} f(a) \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow a^+} f(a) = 0 + f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \rightarrow a^-} f(a) \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow a^-} f(a) = 0 + f(a) \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple la condición de continuidad de la función f en a .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

De esta forma, queda demostrado que, si una función es derivable en un punto, es a la fuerza continua en dicho punto.

DEMOSTRACIÓN 4.2.2

Para demostrar esto se empleará como ejemplo la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = |x|$

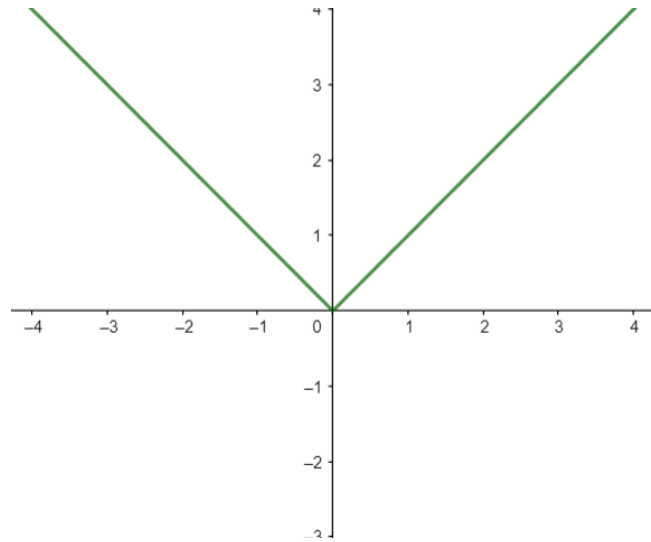


Ilustración 46 - Gráfica de la función $f(x)=|x|$ (elaboración propia)

Esta función f puede expresarse como una función definida a trozos de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

A continuación, se estudiará la derivabilidad de f en $x=0$. En primer lugar, se comprueba que f es continua en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

En segundo lugar, se estudia si f es derivable en $x=0$. La condición para que esto ocurra viene determinada por la siguiente igualdad.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Por un lado:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Como se calcula el límite por la derecha ($h \rightarrow 0^+$), la función $f(h)$ se sustituye por h .

Por otro lado:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

En este caso, al calcular el límite por la izquierda ($h \rightarrow 0^-$), la función $f(h)$ se sustituye por $-h$.

Como se cumple la siguiente expresión:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$1 \neq -1$$

Se demuestra que la función f es continua en $x=0$ pero no es derivable en este punto.

DEMOSTRACIÓN 4.4.1

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x)}{g(x+h)g(x)} - \frac{f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x) \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right) \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \left(g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN 4.5.1

Se define la función $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ como la siguiente función:

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z) - g(f(a))}{z - f(a)} - g'(f(a)), & z \neq f(a) \\ 0, & z = f(a) \end{cases}$$

En primer lugar, se comprueba que h es continua en $z = f(a)$.

$$h(f(a)) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow f(a)} h(z) &= \lim_{z \rightarrow f(a)} \left[\frac{g(z) - g(f(a))}{z - f(a)} - g'(f(a)) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow f(a)} \left[\frac{g(z) - g(f(a))}{z - f(a)} \right] - g'(f(a)) = g'(f(a)) - g'(f(a)) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow f(a)} h(z) &= h(f(a)) = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que f es continua en a , debido a que f es derivable en a por definición.

A continuación, se procede a demostrar que la función compuesta $(h \circ f)(x)$ es continua en a :

$$(h \circ f)(a) = h(f(a)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (h \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(f(a)) = 0$$

$$(h \circ f)(a) = \lim_{x \rightarrow a} (h \circ f)(x)$$

Ahora se procede a escribir la función compuesta $(h \circ f)(x)$ como $h(f(x))$ (se sustituye z por $f(x)$).

$$h(f(x)) = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} - g'(f(a)), & f(x) \neq f(a) \\ 0, & f(x) = f(a) \end{cases}$$

Para valores de x próximos a a pero distintos de a , se tiene que $f(x) \neq f(a)$, luego:

$$h(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} - g'(f(a))$$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = [h(f(x)) + g'(f(a))] \cdot [f(x) - f(a)]$$

Sustituyendo $g(f(x))$ por $(g \circ f)(x)$ y $g(f(a))$ por $(g \circ f)(a)$:

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = [h(f(x)) + g'(f(a))] \cdot [f(x) - f(a)]$$

A continuación, se desarrollará la expresión $(g \circ f)'(a)$ con el objetivo de llegar a obtener la igualdad $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ para concluir la demostración.

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [h(f(x)) + g'(f(a))] \cdot \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [h(f(x)) + g'(f(a))] \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) + \lim_{x \rightarrow a} g'(f(a)) \right] \cdot f'(a) \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) + g'(f(a)) \right] \cdot f'(a) \\ &\quad \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(f(a)) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$(g \circ f)'(a) = (0 + g'(f(a))) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

DEMOSTRACIÓN 4.6.1

Por definición, la derivada de la función inversa tiene la siguiente expresión aplicando límites.

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}}$$

Si $f^{-1}(y)$ es biyectiva, si $y \rightarrow b$ (lo cual quiere decir que y tiende a b pero que no llegan a ser el mismo elemento de J), se cumplirá que la imagen de y será distinta a la imagen de b puesto que son elementos distintos del dominio de f^{-1} , luego el denominador $f^{-1}(y) - f^{-1}(b)$ no se anula ya que $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$.

Teniendo en cuenta que $b = f(a)$, $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ y $f^{-1}(b) = a$:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}}$$

Por otra parte, si $y \rightarrow b$, como $x = f^{-1}(y)$, se cumple que $x \rightarrow f^{-1}(b)$, y como $a = f^{-1}(b)$, se concluye que $x \rightarrow a$. Sustituyendo límites:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

DEMOSTRACIÓN 4.7.1

Derivada de la función constante

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Derivada de la función identidad

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

Derivada de la función logarítmica

Para todo $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

El número e viene dado por el siguiente límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Si se realiza el cambio de variables $n = x/h$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{x/h} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ahora, se tiene en cuenta que cuando $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

Por otro lado (para $x > 0$):

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivada de la función exponencial

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x$$

Se parte de la igualdad siguiente:

$$\ln(e^x) = x$$

Derivando ambos miembros de la igualdad, aplicando la regla de la cadena al primer miembro:

$$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1$$

$$(e^x)' = f'(x) = e^x$$

Por otro lado (para $x \in \mathbb{R}$), aplicando la regla de la cadena:

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a} \rightarrow f'(x) = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Derivada de la función potencia

Para todo $x > 0$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^k$$

Aplicando logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad:

$$\ln(f(x)) = \ln(x^k)$$

$$\ln(f(x)) = k \ln x$$

A continuación, se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$(\ln(f(x)))' = (k \ln x)'$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = k \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = k \frac{f(x)}{x} = k \frac{x^k}{x} = k x^{k-1}$$

Derivadas trigonométricas

Función seno

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

Ahora se tiene en cuenta la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(a) - \text{sen}(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x) = 2 \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)$$

$$\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x) = 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \quad \text{por analogía con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

Función coseno

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x$$

Función tangente

Para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$:

$$f(x) = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Aplicando la regla de la derivada del cociente:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Funciones hiperbólicas

Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$h(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$h'(x) = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Funciones trigonométricas inversas

Para el cálculo de la derivada de estas funciones, se hace uso de la regla de la derivada de una función inversa.

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} \quad , \quad y = f(x) \quad , \quad x = f^{-1}(y)$$

Aplicando la regla a cada una de las funciones:

$$f(x) = \arcsen x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\sen y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{-1}{\sen y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arcsenh} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f(x) = \operatorname{arccosh} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f(x) = \operatorname{arctanh} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

DEMOSTRACIÓN 4.8.1

Para la demostración de este teorema se hará uso de una demostración por inducción. En este tipo de demostraciones, en primer lugar, se comprueba que el teorema es cierto y se cumple cuando $n = 1$.

Paso 1 ($n = 1$):

$$h' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{1-k} g^k = \binom{1}{0} f' g + \binom{1}{1} f g' = f' g + f g'$$

En efecto, este caso se cumple ya que se corresponde con la expresión de la derivada del producto de funciones.

Paso 2:

En un segundo paso, se supone que la hipótesis es cierta para $n - 1$. De este modo, se cumpliría la siguiente expresión:

$$h^{(n-1)} = \binom{n-1}{0} f^{(n-1)} g + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)} g' + \dots + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n-1)}$$

Paso 3:

En el tercer paso, hay que comprobar que si esta hipótesis se cumple para $n - 1$, también se cumple para n . Si se deriva $h^{(n-1)}$ de acuerdo con la expresión anterior, aplicando la regla de la derivada de la suma y la regla de la derivada del producto se obtiene:

$$\begin{aligned} (h^{(n-1)})' &= h^{(n)} \\ &= \binom{n-1}{0} f^{(n-1)} g' + \binom{n-1}{0} f^{(n)} g + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)} g'' \\ &\quad + \binom{n-1}{1} f^{(n-1)} g' + \dots + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n)} + \binom{n-1}{n-1} f' g^{(n-1)} \end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= \binom{n-1}{0} f^{(n-1)} g' + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n)} + \binom{n-1}{0} f^{(n)} g \\ &\quad + \binom{n-1}{1} f^{(n-1)} g' + \dots + \binom{n-1}{n-1} f' g^{(n-1)} \end{aligned}$$

Se procede a desarrollar esta expresión con más detalle para que se vea con mayor claridad la agrupación de términos realizada para obtener la expresión final.

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= \binom{n-1}{0} f^{(n-1)} g' + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n-1}{n-2} f' g^{(n-1)} + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n)} \\ &\quad + \binom{n-1}{0} f^{(n)} g + \binom{n-1}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n-1}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots \\ &\quad + \binom{n-1}{n-1} f' g^{(n-1)} \end{aligned}$$

De este modo, se agrupan los términos resaltados con el mismo color siguiendo la siguiente propiedad de los números combinatorios:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

$$h^{(n)} = \binom{n-1}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + \binom{n-1}{n-1} f g^{(n)}$$

Finalmente, atendiendo a estas dos propiedades de los números combinatorios,

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1$$

se obtiene la expresión final:

$$h^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f g^{(n)}$$

De esta forma, al demostrar que se cumple para el 1 (paso 1) y que, si se cumple para un número natural también se cumple para el siguiente (paso 2 y 3), queda demostrado el teorema para todo n .