



**UNIVERSIDAD DE JAÉN**  
Escuela Politécnica Superior de Linares

Trabajo Fin de Grado

---

**ESTUDIO Y PUESTA A  
PUNTO DE EQUIPO DE  
PANDEO DE BARRAS PARA  
PRÁCTICAS DE  
LABORATORIO**

**Alumno: Helios Alguacil Beltrán**

**Tutor:** Prof. D. Javier Fernández Aceituno  
**Depto.:** Ingeniería Mecánica y Minera

**Junio, 2021**

## ÍNDICE

<b>ÍNDICE</b> .....	1
<b>1 RESUMEN Y OBJETIVOS</b> .....	10
1.1 Resumen.....	10
1.2 Abstract .....	11
1.3 Objetivos.....	12
<b>2 INTRODUCCIÓN AL FENÓMENO DE PANDEO</b> .....	13
2.1 Ejemplos de soportes a lo largo de la historia.....	13
2.2 Tipos de pandeo. ....	16
2.2.1 Pandeo a flexión.....	17
2.2.2 Pandeo lateral. ....	18
2.2.3 Pandeo a torsión y flexión-torsión .....	21
2.2.4 Abolladura del alma. ....	23
<b>3 CONCEPTOS TEÓRICOS DEL PANDEO ELÁSTICO</b> .....	26
3.1 Equilibrio estable e inestable. ....	26
3.1.1 Aplicación a una barra.....	27
3.2 Pandeo de Euler .....	30
3.2.1 Hipótesis de Euler. ....	30
3.2.2 Expresión de la carga crítica de Euler.....	30
3.2.3 Variables que afectan a la fórmula de Euler. ....	34
3.2.4 Influencia de excentricidades en la barra. ....	35
3.2.5 Influencia de cargas transversales. ....	39
3.2.6 Esbeltez mecánica .....	44
3.2.7 Influencia de las condiciones de sustentación.....	46
3.2.8 Tensión crítica de Euler y limitación. ....	48

---

3.3	Pandeo Anelástico.....	50
3.4	Pandeo Real .....	54
3.4.1	Normativa.....	56
<b>4</b>	<b>MEDIDA EXPERIMENTAL DE LA ELÁSTICA CON EQUIPO GUNT WP-120</b> .....	<b>59</b>
4.1	Descripción del equipo. ....	59
4.1.1	Resumen de los experimentos a realizar. ....	65
4.2	Ensayo 1. Ensayo de prueba. ....	70
4.2.1	Descripción. ....	70
4.2.2	Cálculos teóricos. ....	71
4.2.3	Resultados experimentales. ....	72
4.2.4	Cálculo según normativa. ....	74
4.3	Ensayo 2. Influencia de tipos de sustentación. ....	78
4.3.1	Descripción. ....	78
4.3.2	Cálculos teóricos. ....	81
4.3.3	Resultados experimentales. ....	82
4.4	Ensayo 3. Influencia de la longitud.....	86
4.4.1	Descripción. ....	86
4.4.2	Cálculos teóricos. ....	88
4.4.3	Resultados experimentales. ....	89
4.5	Ensayo 4. Influencia del material.....	91
4.5.1	Descripción. ....	91
4.5.2	Cálculos teóricos. ....	93
4.5.3	Resultados experimentales. ....	94
4.6	Ensayo 5. Influencia de la sección.....	97
4.6.1	Descripción. ....	97
4.6.2	Cálculos teóricos. ....	99

4.6.3	Resultados experimentales. ....	102
4.7	Ensayo 6. Influencia de excentricidades. ....	104
4.7.1	Descripción. ....	104
4.7.2	Cálculos teóricos. ....	105
4.7.3	Resultados experimentales. ....	107
4.8	Ensayo 7. Influencia de cargas transversales. ....	109
4.8.1	Descripción. ....	109
4.8.2	Cálculos teóricos. ....	111
4.8.3	Resultados experimentales. ....	112
5	<b>CONCLUSIONES</b> .....	115
6	<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	118
7	<b>ANEXOS DE GUIÓN DE PRÁCTICAS</b> .....	121
7.1	Guion Ensayo 1 .....	121
7.2	Guion Ensayo 2.....	131

---

**ÍNDICE DE FIGURAS**

<b>Figura 2.1</b> Megalito Stonehenge de Inglaterra del 2500 a.C.....	13
<b>Figura 2.2</b> Partenón griego con pilares muy robustos. ....	14
<b>Figura 2.3</b> Catedral gótica de Sainte Chapelle en París. ....	14
<b>Figura 2.4</b> Dibujos de Leonardo Da Vinci sobre la flexión de piezas a compresión. ....	15
<b>Figura 2.5</b> Colada de hierro en una fundición. ....	15
<b>Figura 2.6</b> Viga sufre pandeo a flexión. ....	17
<b>Figura 2.7</b> Formas de pandeo dependiendo de los apoyos. ....	17
<b>Figura 2.8</b> Esfuerzos de compresión y tracción en una viga (Elaboración Propia).....	19
<b>Figura 2.9</b> Barra sometida a momentos flectores. (Elaboración Propia).....	19
<b>Figura 2.10</b> Esfuerzos que aparecen en la fibras de la sección. (Elaboración Propia).....	19
<b>Figura 2.11</b> Deformación del elemento sometido a dos momentos flectores. (Elaboración Propia) .....	20
<b>Figura 2.12</b> Barras sometidas a torsión. (Argüelles et al., 2013) .....	22
<b>Figura 2.13</b> Barra sometida a flexión-torsión. (Argüelles et al., 2013).....	23
<b>Figura 2.14</b> Abolladura del alma de una viga. ....	24
<b>Figura 2.15</b> Aplicación de fuerza repartida muy elevada en poco espacio. (Chacón et al., 2009).....	24
<b>Figura 2.16</b> Modos de abolladura más probables. (Chacón et al., 2009) .....	25
<b>Figura 3.1</b> Ejemplificación de equilibrio estable. (Capítulo X:Pandeo, 2016). ....	26
<b>Figura 3.2</b> Ejemplificación de equilibrio inestable. (Capítulo X:Pandeo, 2016). ....	26
<b>Figura 3.3</b> Ejemplificación de equilibrio indiferente. (Capítulo X:Pandeo, 2016). ....	27
<b>Figura 3.4</b> Aplicación de fuerza compresiva a viga biarticulada. (Jiménez-González et al,2020).....	28
<b>Figura 3.5</b> Viga biarticulada con corte imaginario en su sección. (Jiménez-González et al,2020).....	28
<b>Figura 3.6</b> Columna sometida a compresión y su posterior deformada. (Lapuebla, 2020)...	30

<b>Figura 3.7</b> Modos de pandeo de una barra biarticulada. (Morey, 2013) .....	32
<b>Figura 3.8</b> Gráfica de longitud de la viga con respecto a la fuerza de pandeo crítica. (Lapuebla, 2020).....	33
<b>Figura 3.9</b> Curva de comportamiento del acero según la tensión aplicada. (Berrocal, 2005) .....	34
<b>Figura 3.10</b> Barra con fuerza excéntrica aplicada. (Elaboración Propia).....	35
<b>Figura 3.11</b> Efecto de la excentricidad en una barra en la deflexión lateral producida por una carga a compresión. (Elaboración Propia).....	39
<b>Figura 3.12</b> Barra sometida a cargas transversal y compresiva. (Elaboración Propia) .....	40
<b>Figura 3.13</b> Comportamiento teórico de una barra sometida a pandeo con diferentes cargas transversales. (Elaboración Propia) .....	43
<b>Figura 3.14</b> Coeficiente de sustentación para viga biempotrada. (Morey, 2013) .....	47
<b>Figura 3.15</b> Coeficientes de sustentación en función de tipos de apoyo. (Jiménez-González et al., 2020).....	47
<b>Figura 3.16</b> Variación de la tensión crítica de pandeo con respecto a la esbeltez mecánica. (Morey, 2013).....	49
<b>Figura 3.17</b> Recta de Tetmajer para dar continuidad al material. (Gomez, (s.f).....	50
<b>Figura 3.18</b> Obtención del módulo E cuando no hay régimen elástico puro. (Capítulo X:Pandeo, 2016). .....	52
<b>Figura 3.19</b> Obtención de módulos E por la teoría del doble módulo. (Capítulo X:Pandeo, 2016).....	53
<b>Figura 3.20</b> Representación de tensiones en la barra. (Capítulo X:Pandeo, 2016). .....	53
<b>Figura 3.21</b> Comportamiento experimental con respecto al teórico. (Morey, 2013) .....	55
<b>Figura 3.22</b> Ejemplo de curvas europeas. (Morey, 2013) .....	55
<b>Figura 4.1</b> Equipo Gunt WP-120. (Gunt Hamburg).....	60
<b>Figura 4.2</b> Alojamiento inferior.....	60
<b>Figura 4.3</b> Apoyo articulado del alojamiento inferior. ....	61
<b>Figura 4.4</b> Pieza de presión unida a barra, simulando empotramiento.....	61
<b>Figura 4.5</b> Alojamiento superior. ....	62

---

<b>Figura 4.6</b> Apoyo articulado del alojamiento superior.....	62
<b>Figura 4.7</b> Pieza corta para empotramiento.....	63
<b>Figura 4.8</b> Medición de reloj comparador.....	63
<b>Figura 4.9</b> Dispositivo de carga transversal.....	64
<b>Figura 4.10</b> Maletín de barras del equipo Gunt WP-120.....	65
<b>Figura 4.11</b> Barra S2 usada en el ensayo de prueba.....	65
<b>Figura 4.12</b> Barras del ensayo de influencia de sustentación de superior a inferior son S7, S6 y S4.....	66
<b>Figura 4.13</b> Barras del ensayo de influencia de longitus. De superior a inferior son S5, S3, S2 y S1.....	66
<b>Figura 4.14</b> Barras del ensayo de influencia de longitud. De superior a inferior son S11, S9, S10 y S8.....	67
<b>Figura 4.15</b> Barras del ensayo de influencia de sección. De superior a inferior son SZ1 y SZ4.....	68
<b>Figura 4.16</b> Barras del ensayo de influencia de diámetro. De superior a inferior son SZ6 y SZ7.....	68
<b>Figura 4.17</b> Barras del ensayo de influencia de excentricidad. De superior a inferior son SZ1, SZ2 y SZ3.....	69
<b>Figura 4.18</b> Material de ensayo de la influencia de cargas transversales con la barra SZ1... ..	69
<b>Figura 4.19</b> Posición inicial de la barra S2, para el experimento de calibración.....	70
<b>Figura 4.20</b> Medición experimental de barra S2 comparando Fuerza (N)-Desviación (mm). ..	73
<b>Figura 4.21</b> Comparativa valor teórico y experimental.....	73
<b>Figura 4.22</b> Montaje de la barra S4.....	78
<b>Figura 4.23</b> Alojamiento inferior de la barra S7 que representa un empotramiento.....	79
<b>Figura 4.24</b> Alojamiento superior de la barra S7 que representa un empotramiento.....	79
<b>Figura 4.25</b> Montaje de la barra S7.....	80
<b>Figura 4.26</b> Montaje de la barra S6.....	80

---

<b>Figura 4.27</b> Conjunto de muestras experimentales sobre la influencia de condiciones de apoyo. ....	83
<b>Figura 4.28</b> Geometría deformada de la barra S4 para una carga de 510 N.....	84
<b>Figura 4.29</b> Longitud de pandeo en barra S6. ....	84
<b>Figura 4.30</b> Barra S7 sometida a pandeo.....	85
<b>Figura 4.31</b> Comparativa teórico experimental para barras con distinta sustentación. ....	85
<b>Figura 4.32</b> Montaje de la barra S1. ....	86
<b>Figura 4.33</b> Montaje de la barra S2. ....	86
<b>Figura 4.34</b> Montaje de la barra S3. ....	87
<b>Figura 4.35</b> Montaje de la barra S5. ....	87
<b>Figura 4.36</b> Influencia de la longitud en la carga crítica. ....	89
<b>Figura 4.37</b> Montaje de la barra S8. ....	91
<b>Figura 4.38</b> Montaje de la barra S9. ....	91
<b>Figura 4.39</b> Montaje de la barra S10. ....	92
<b>Figura 4.40</b> Montaje de la barra S11. ....	93
<b>Figura 4.41</b> Influencia del material en la carga crítica de pandeo.....	94
<b>Figura 4.42</b> Imagen de barra de módulo desconocido.....	95
<b>Figura 4.43</b> Montaje de la barra SZ1.....	97
<b>Figura 4.44</b> Montaje de la barra SZ4.....	98
<b>Figura 4.45</b> Montaje de la barra SZ6.....	99
<b>Figura 4.46</b> Montaje de la barra SZ7.....	99
<b>Figura 4.47</b> Influencia del ancho en la carga crítica de pandeo. ....	102
<b>Figura 4.48</b> Influencia del diámetro en la carga crítica de pandeo.....	103
<b>Figura 4.49</b> Excentricidad de la barra SZ2.....	104
<b>Figura 4.50</b> Excentricidad de la barra SZ3.....	105
<b>Figura 4.51</b> Fuerza con respecto a desplazamiento en barras excéntricas. ....	106
<b>Figura 4.52</b> Comportamiento experimental sobre la influencia de la excentricidad.....	107

<b>Figura 4.53</b> Comparativa de valores teóricos y experimentales de barras excéntricas. ...	108
<b>Figura 4.54</b> Montaje barra SZ1 con 0 Newton de carga transversal. ....	109
<b>Figura 4.55</b> Montaje SZ1 (izquierda) Barra con 5 N, (centro) barra con 10 N, (derecha) barra con 15 N. ....	110
<b>Figura 4.56</b> Montaje barra SZ1 con 20 Newton de carga transversal. ....	110
<b>Figura 4.57</b> Comportamiento teórico de las barras a experimentar.....	111
<b>Figura 4.58</b> Comportamiento experimental de influencia de cargas transversales. ....	113
<b>Figura 4.59</b> Comparativa de teórico-experimental en los casos de 5 N y 15 N. ....	114
<b>Figura A1.1</b> Columna sometida a compresión y su posterior deformada. (Lapuebla, 2020) .....	122
<b>Figura A1.2</b> Modos de pandeo de una barra biarticulada. (Morey, 2013) .....	124
<b>Figura A1.2</b> Barra con fuerza excéntrica aplicada .....	125
<b>Figura A1.3</b> Esquema del equipo Gunt WP-120.....	129
<b>Figura A1.4</b> Información sobre las barras empleadas .....	129
<b>Figura A1.5.</b> Barras estudiadas en este ensayo.....	129
<b>Figura A2.1</b> Columna sometida a compresión y su posterior deformada. (Lapuebla, 2020) .....	132
<b>Figura A2.2</b> Modos de pandeo de una barra biarticulada. (Morey, 2013) .....	134
<b>Figura A2.3</b> Barra sometida a cargas transversal y compresiva.....	135
<b>Figura A2.4</b> Comportamiento teórico de una barra con diferentes cargas transversales .	138
<b>Figura A2.3</b> Esquema del equipo Gunt WP-120.....	139
<b>Figura A2.4</b> Información barra empleada. ....	140

---

**ÍNDICE DE TABLAS**

<b>Tabla 3.1</b> Esquema de fórmulas usadas en la norma DIN 1935. (Gomez, (s.f)) .....	50
<b>Tabla 3.2</b> Tabla A22.6.1 del Anejo 22 del Código Estructural sobre coef. de imperfección. .....	57
<b>Tabla 3.3</b> Tabla similar a la A22.6.2. del Anejo 22 del Código Estructural.....	58
<b>Tabla 4.1</b> Datos sobre las barras del orden de S1 hasta A11.....	64
<b>Tabla 4.2</b> Datos sobre las barras del orden de SZ1 hasta AZ10..... .....	64 65
<b>Tabla 4.3</b> Tabla A22.6.1 del Anejo 22 para obtener el coef. de imperfección. ....	75
<b>Tabla 4.4</b> Tabla similar a la A22.6.2. del Anejo 22 del Código Estructural (figura extraída de la EAE). ....	75
<b>Tabla 4.5</b> Valores experimentales obtenidos en la barra S2.....	77
<b>Tabla 4.6</b> Comparativa teórico-experimental. ....	90

## **1 RESUMEN Y OBJETIVOS**

### **1.1 Resumen.**

La estabilidad estructural juega un papel muy importante en el día a día del ingeniero, como puede ser en el ámbito de la construcción. En este sentido, el pandeo, definido en la RAE como “flexión de una viga, provocada por una compresión lateral” tendrá un papel fundamental muy a tener en cuenta para que la estabilidad sea posible.

Pandeo es el nombre que recibe el fenómeno que produce una inestabilidad elástica de ciertos elementos al ser comprimidos. Esto provocará unos desplazamientos transversales mayores o menores debido a la compresión en función de la forma, longitud, apoyos y otros factores de los que se hablarán más adelante. Si esta deformación aumenta considerablemente se producirá un quiebre del objeto. Por tanto, se debe analizar cuáles son los límites que provocarán un riesgo estructural.

En esta memoria de trabajo, el objetivo es la demostración de los problemas más importantes y caracterización del pandeo, en el que se desarrolla el concepto de pandeo de barras, desde el punto de vista de estabilidad de sistemas. Se analiza para ello el aparato WP-120 de Gunt que permite hacer diferentes pruebas de barras de acero, cobre, latón, etc de distintas secciones y longitudes. Tras esto se elabora un informe detallado de cada una de las barras ensayadas y finalmente se establece un guion de prácticas tipo para utilizarlo en cualquiera de las barras.

## 1.2 Abstract

Nowadays structural stability plays a very important role in the day-to-day work of the engineer, such as the field of construction. In this way, buckling, defined in the RAE as "bending of a beam, caused by lateral compression" will play a fundamental role to be taken into account so that stability be achieved.

Buckling is the name given to the phenomenon that produces an elastic instability of certain elements when they are compressed. This will cause greater or lesser transverse displacements due to compression depending on the shape, length, supports and other factors which will be discussed later. If this deformation increases considerably, the object will break. Therefore, it must be analysed which are the limits that will cause a structural risk.

In this project, the objective is the demonstration of the most important problems and characterisation of buckling, in which the concept of buckling of members is developed from the point of view of system stability. For this purpose, the WP 120 apparatus is analysed, which allows different tests to be carried out on steel, copper and brass bars of different cross-sections and lengths. After this, a detailed report is drawn up for each of the bars tested and, finally, a standard practice script is established for use with any of the bars.

### **1.3 Objetivos**

Los objetivos de este TFG son los siguiente:

- El desarrollo del concepto de pandeo desde el punto de vista de estabilidad de sistemas mecánicos. Estudiando así el pandeo crítico de Euler y mencionando la normativa actual.
- Analizar el equipo de pandeo GUNT WP-120 disponible en el laboratorio de estructuras de la EPSL y los distintos tipos de ensayos que se pueden realizar en él.
- Comprobación práctica de los conceptos teóricos estudiados y grado de correlación entre ellos.
- Elaboración de informes detallados sobre los tipos de ensayo y las barras estudiadas.
- Establecer un guión de prácticas tipo para cualquiera de las barras ensayadas.

## 2 INTRODUCCIÓN AL FENÓMENO DE PANDEO

### 2.1 Ejemplos de soportes a lo largo de la historia.

A lo largo de la historia, la construcción ha ido cambiando y con ello evolucionan los elementos estructurales. Realmente se ha ido adaptando la filosofía de construcción a los materiales disponibles, herramientas y a las nuevas técnicas de construcción. El ser humano ha usado la construcción desde el inicio de sus días principalmente como cobijo y en el ámbito religioso para la adoración de sus divinidades. En las civilizaciones antiguas se usaban elementos cogidos directamente de la naturaleza para construir como plantas, madera, piedras... Un ejemplo de ello es el conjunto megalítico Stonehenge (Figura 2.1) de Inglaterra.



*Figura 2.1* Megalito Stonehenge de Inglaterra del 2500 a.C.

Conforme se avanza en el tiempo, en la Edad Antigua se empiezan a crear grandes comunidades y con ello la necesidad de defenderse y la adoración a sus dioses, que para ellos era de vital importancia. Por ello nace la figura del arquitecto en personas de vital importancia como sacerdotes o gobernadores de las comunidades. Las columnas de estos lugares religiosos eran no muy esbeltas de piedra (gránito y mármol) y no muy eficientes. Un ejemplo de ello puede ser el monumento religioso altar de Zeus que formaba parte de una acrópolis.

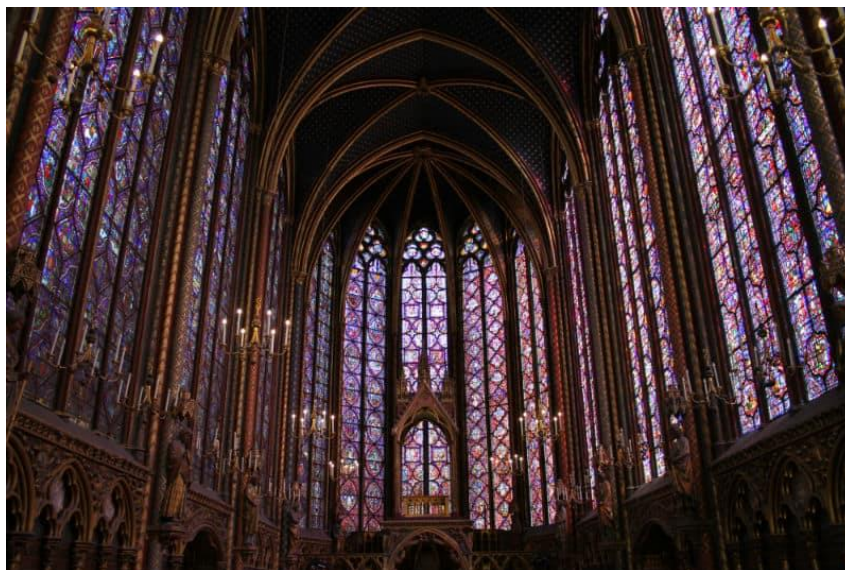
La arquitectura griega y después la romana tienen poco que ver con lo anteriormente visto, superando la arquitectura para adorar las divinidades y creando zonas comunes para la vida civil, donde eran necesarios grandes pórticos y columnas muy altas para alcanzar los cielos. Lo que hicieron fue sobredimensionar los pilares, siendo estos de gran sección para que no fracturen (Figura 2.2).



*Figura 2.2 Partenón griego con pilares muy robustos.*

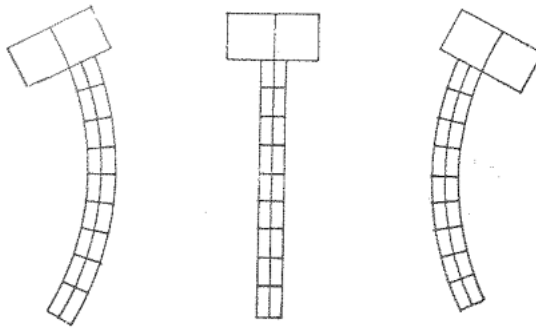
Tras la caída de los romanos y los siguientes años de invasiones y el feudalismo no se producen grandes avances en el mundo de la construcción.

Llega el gótico en el siglo XII, el cual buscaba catedrales que tuviesen algo más de luz y alcanzasen las estrellas. Es por ello que se buscaban vanos en vez de muros y la luz entraría a través de las vidrieras, que no soportan carga, por lo que las columnas son necesariamente más esbeltas (Figura 2.3). Para su construcción lo que se usó es una serie de reglas obtenidas de la experiencia y usando un conocimiento intuitivo, haciendo trabajar la piedra a compresión y no a tracción. Proceso de prueba y error. (Bassel y Guardiola, 2011)



*Figura 2.3 Catedral gótica de Sainte Chapelle en París.*

Posteriormente en el renacimiento se vuelve a estudiar a los clásicos y se buscan teorías científicas para explicar determinados sucesos. Por ejemplo, Leonardo Da Vinci sobre el siglo XVI estudia el comportamiento de piezas a compresión, viendo que ocurre un fenómeno que hace torcer el elemento. Algunos dibujos aparecen en la Figura 2.4. (Timoshenko, 1953)



*Figura 2.4 Dibujos de Leonardo Da Vinci sobre la flexión de piezas a compresión.*

Por fin, con la llegada del barroco (XVII a XVIII) se consolida el método experimental para verificar teorías. Aquí en 1744 será cuando Euler formule su teoría sobre la carga crítica que soporta una barra biarticulada ideal cuando está sometida a compresión, que será discutida durante los próximos dos siglos. Aparecen varias teorías distintas, hasta que se llevaron nuevos materiales al ámbito de la construcción como el acero y el hierro que reproducen con mayor exactitud lo que Euler estudió. En la Figura 2.5 se observa una colada de hierro. Este tipo de materiales las solicitaciones son mayores y la teoría de Euler es para barras muy esbeltas, es por ello que hay un mayor acercamiento.



*Figura 2.5 Colada de hierro en una fundición.*

En la revolución industrial sobre el siglo XVIII, ya comienza a usarse el hierro en muchas obras, siendo Gran Bretaña el primer país en usarlo. El puente Iron bridge fue la primera gran estructura completamente de hierro fundido. Donde para su realización se inspiraron en análogos con madera para las juntas y no hubo un cálculo estructural. (Morey, 2013)

Con el nacimiento del ferrocarril se hace necesaria la resolución práctica del pandeo, debido a varios colapsos en puentes, como por ejemplo el puente de Quebec en 1907. Este intentaba superar el record de otro puente y se produjo un fallo por compresión al hacer las columnas demasiado esbeltas con el paso de un ferrocarril.

Tras la revolución industrial, también se trató de estudiar el comportamiento de barras menos esbeltas y Tetmajer trató de darle un sentido para favorecer la continuidad del material.

Sobre el siglo XX aparece la figura de Engeser para tratar de explicar el comportamiento en esbelteces menores y la obtención de la carga crítica de estas, modificando ciertos términos de la teoría de Euler. Realiza dos teorías diferentes en distintos años:

- Teoría del módulo tangente.
- Teoría del doble módulo.

Teorías que fueron bastante polémicas y que Shanley en 1946 despejaría dudas sobre el comportamiento en régimen plástico.

Los avances en este campo fueron necesarios para ajustar los coeficientes de seguridad de las vigas, ahorrando así material a la vez que se cumple con un cierto grado de seguridad. También es un hecho muy importante el uso que se le da a ciertos materiales como el hormigón, que se usaría en conjunto con el acero para mejorar. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

## **2.2 Tipos de pandeo.**

Según una serie de variables se pueden observar distintos tipos de pandeo. Se observan cuatro tipos principalmente:

- Pandeo a flexión.
- Pandeo lateral.
- Pandeo a torsión y a flexión-torsión.
- Abolladura del alma.

### 2.2.1 Pandeo a flexión

El pandeo a flexión es producido por una carga de compresión aplicada en los extremos de una barra. Esta carga debe superar una carga crítica determinada y que la barra a su vez sea esbelta. En la Figura 2.6 se observa un ejemplo real de como se ve este pandeo.



**Figura 2.6** Viga sufre pandeo a flexión.

Esta forma de pandeo fue estudiada por Euler que nos predice la carga crítica necesaria para que una barra pandee en función de la esbeltez de la misma, todo esto con unas hipótesis ideales de la barra y con unas condiciones determinadas como que está biarticulada. En función de los apoyos se le aplican unos coeficientes para hacer así más precisa la ecuación de Euler, apreciando su forma en la Figura 2.7.



**Figura 2.7** Formas de pandeo dependiendo de los apoyos.

Para prevenir la falla de este tipo de pandeo es muy importante la esbeltez de la barra, siendo este el principal motivo de su estudio.

Este es el caso en el que se centra este trabajo, probando así de una manera teorica-práctica la relación y la afinidad de lo que se ve sobre el papel y la realidad.

### 2.2.2 *Pandeo lateral.*

El pandeo lateral es un fenómeno muy a tener en cuenta en las construcciones industriales. Es producido en las vigas solicitadas a flexión.

Antes de comenzar a hablar en que consiste y cómo actúan las fibras de la viga en este tipo de pandeo se requiere hacer una pequeña introducción de lo que ocurre cuando se somete un viga a compresión y tracción y cuáles son los límites que se producen. (Figura 2.8)

En el caso de tener una viga sometida a un esfuerzo de compresión, como el caso descrito en el apartado anterior, se ha explicado que al superar cierto límite y con una esbeltez determinada, la pieza pandea y experimenta una deformación transversal desplazándose esta de su eje.

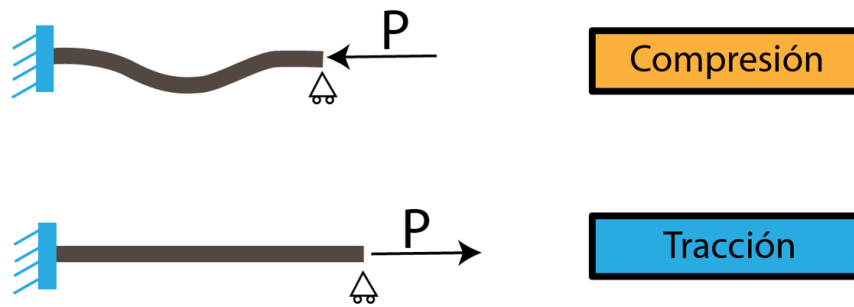
En el lado contrario si una viga está sometida a tracción, nunca puede ocurrir el pandeo y como estado límite es el del límite elástico del material, en el que la pieza comienza a plastificar que provoca que las deformaciones no sean reversibles como ocurre en el caso de no sobrepasar ese límite elástico. Según la ecuación (2.1) es posible ver este estado límite.

$$\sigma_{lim} \cdot S > P \quad (2.1)$$

$\sigma_{lim}$  es la tensión límite del material.

$S$  es la sección estudiada.

$P$  corresponde con la fuerza aplicada en el extremo del elemento en el sentido de su eje.



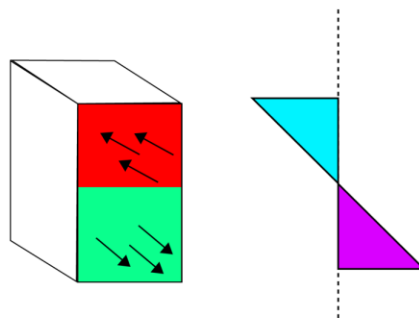
**Figura 2.8** Esfuerzos de compresión y tracción en una viga (Elaboración Propia)

Conocido lo anterior, es posible describir el pandeo lateral. Imaginemos una viga biarticulada a la que se le aplican dos momentos flectores puntuales en sus extremos, tal y como se muestra en la Figura 2.9, por lo que a lo largo de toda la viga, esta está sometida a un esfuerzo de flexión, siendo este constante a lo largo de toda la viga.



**Figura 2.9** Barra sometida a momentos flectores. (Elaboración Propia)

El momento flector aplicado en la sección de la viga produce una tensión axial, que quiere decir que es una tensión normal a la sección de la viga. Realmente este efecto provoca que unas fibras estén sometidas a compresión mientras que otras están sometidas a tracción, como se observa en las Figuras 2.10 y 2.11. Que sea en el ala superior o inferior depende del signo del momento aplicado.



**Figura 2.10** Esfuerzos que aparecen en la fibras de la sección. (Elaboración Propia)



**Figura 2.11** Deformación del elemento sometido a dos momentos flectores. (Elaboración Propia)

Teniendo claro lo descrito inicialmente acerca del comportamiento de las fibras respecto a esfuerzos de tracción y compresión es fácilmente imaginable lo que ocurre. Las fibras del ala superior al estar sometidas a compresión, tienden a pandear lateralmente saliéndose de su plano de flexión, mientras que la zona inferior al estar traccionada lo que hace es intentar sujetarla.

Este pandeo llega cuando le aparece un momento flector superior al momento crítico de pandeo. Para calcular este momento crítico existen varias expresiones que se pueden encontrar en la bibliografía (Argüelles et al., 1999). Uno de los métodos que se pueden aplicar, por ejemplo para el caso de vigas de alma llena es el artículo 6.3.3.3 de documento básico seguridad estructural acero del código técnico, en el que nos dice que en casos donde los apoyos de la estructura no dejen la deformación por torsión y la carga esta aplicada en el eje de la barra, la forma de calcular el momento crítico que produce el pandeo lateral es según la siguiente ecuación (2.2):

$$M_{cr} = \sqrt{M_{LT,V}^2 + M_{LT,W}^2} \quad (2.2)$$

$M_{LT,V}$  es la resistencia a torsión uniforme de la barra (sin alabeo). Se obtiene de la ecuación (2.3).

$M_{LT,W}$  es la resistencia por torsión no uniforme de la barra (incluyendo el efecto del alabeo) y se obtiene de la ecuación (2.4).

Lo realmente interesante de esta expresión del momento crítico llega al analizar las dos componentes que lo conforman, sabiendo así cómo se puede hacer que este efecto no aparezca y como hacerlo para ello.

$$M_{LT,V}^2 = C_1 \cdot \frac{\pi}{l_c} \cdot \sqrt{G \cdot I_T \cdot E \cdot I_Z} \quad (2.3)$$

$$M_{LT,W}^2 = C_1 \cdot W_{el,y} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{L_c^2} \cdot i_{t,z}^2 \quad (2.4)$$

Como factor importante que se observa es en  $L_c$  que es la longitud de pandeo lateral, siendo realmente la distancia entre los dos apoyos de la barra. Por decirlo de alguna manera es la sección efectiva de pandeo. Esta componente se encuentra dividiendo en los dos términos por lo que nos indica que es un factor importante que hace que el momento disminuya de manera considerable y si esta longitud es muy elevada, por lo que la viga pandeará más fácilmente.

- $C_1$  es el coeficiente que depende de las condiciones de apoyo de la viga .
- $E$  es el módulo de elasticidad del material.
- $G$  es el módulo de elasticidad transversal del material.
- $I_z$  es la inercia en  $z$ .
- $I_T$  la inercia de torsión.
- $i_{t,z}$  es el radio de giro, con respecto al eje de menor inercia.

Una vez vistas las componentes de cálculo de este momento crítico de pandeo lateral se pueden sacar conclusiones que ayuden o perjudiquen a este. Lo primero que se nos puede ocurrir para que no se produzca el pandeo lateral puede ser aumentar la sección, pero esto no es efectivo del todo, ya que si pensamos a modo estructural, sería cargar con más peso toda la estructura haciendo que sean necesarios una pilares mayores y por lo tanto economicamente hablando, más caros.

La otra conclusión a la que se puede llegar es disminuir la longitud crítica de pandeo lateral, donde se usan arriostramientos que se acomoden haciendo que haya sujeciones cada menor longitud y así disminuir la longitud efectiva de pandeo. Esto nos ayuda a que no aparezca, siendo esta una solución bastante coherente.

### 2.2.3 *Pandeo a torsión y flexión-torsión*

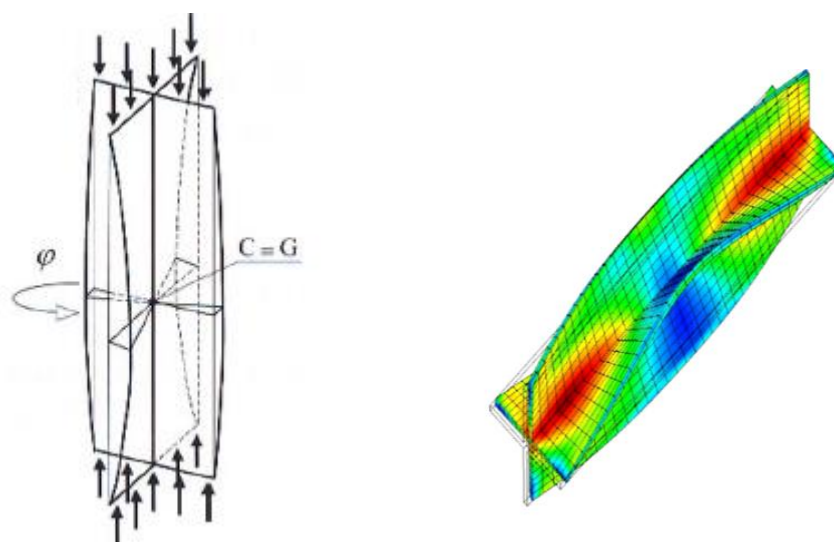
El pandeo a torsión es producido principalmente por cargas compresivas como el pandeo a flexión, aunque realmente lo que hace que pandee de una manera como rotatoria es debido a condiciones de diseño. Esto se produce principalmente en secciones transversales abiertas y que tienen una baja rigidez de torsión. De los casos que son propensos a pandear torsionalmente tenemos:

- Aquellas barras cuyas secciones se caracterizan por que, además de tener una baja rigidez torsional, su centro de esfuerzos cortantes coincide con el centro de gravedad de la sección.

Realmente la fuerza que provoca este suceso coincide con el pandeo a flexión del que se habla inicialmente, donde el origen es una fuerza compresiva sobre la sección. Así pues se debe tener conocimiento de en que casos es probable que ocurra la torsión:

Se pueden encontrar elementos no susceptibles a deformación por torsión donde la sección es debe ser hueca y con la torsión impedida como por ejemplo una barra de sección circular hueca.

En el otro lado tenemos elemento susceptibles a la deformación por torsión, tales como secciones abiertas donde la torsión no impedida, tal y como se observa en la Figura 2.12.



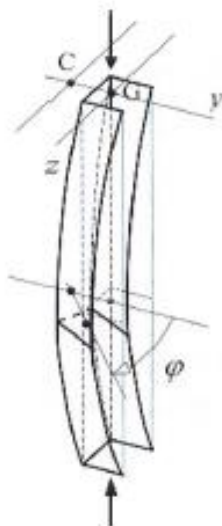
**Figura 2.12** Barras sometidas a torsión. (Argüelles et al., 2013)

Puede existir el caso en que se combinen los efectos de pandeo a flexión y torsión explicados anteriormente, es conocido como pandeo por flexión-torsión. (Estabilidad aplicada, s.f)

Por otro lado, en las barras cuya sección transversal no coincide el centro de gravedad con el centro de esfuerzos cortantes, puede producirse el flexión-torsión si la rigidez torsional de estas es baja. En estos casos se combina el efecto de flexión, que provoca es un cortante sobre la sección que es el que origina la torsión. Se conoce como la suma de los dos hechos estudiados anteriormente, la flexión y la torsión. (Argüelles et al., 2013)

Este hecho se produce cuando una viga esta únicamente apoyada sin ninguna restricción y es cargada a flexión, donde ya se vio que hace que el lado superior esté a compresión y el inferior a tracción. Esto sumado a la geometría abierta de una viga produce una torsión que ayudada por la forma de la sección hace que se tuerza y se desvie lateralmente.

Al igual que en el caso de la torsión pura, las secciones cerradas hacen que sea más difícil la torsión debido a la alta rigidez a torsión (Fig. 2.13).



**Figura 2.13** Barra sometida a flexión-torsión. (Argüelles et al., 2013)

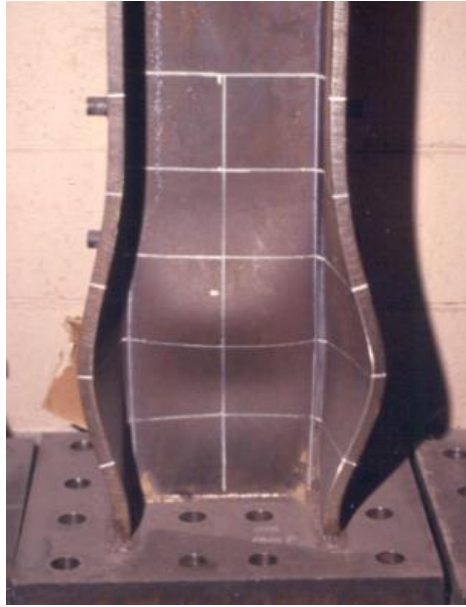
#### 2.2.4 Abolladura del alma.

Cuando se habla de abolladura del alma, se refiere en realidad a un fenómeno de pandeo a flexión del alma de una viga. (Fig. 2.14)

El problema de la abolladura del alma es muy usual en vigas armadas, que son estructuras de acero formadas por placas soldadas entre sí. Es muy común en el diseño de puentes, donde las vigas armadas tienen una gran esbeltez, lo que favorece este suceso.

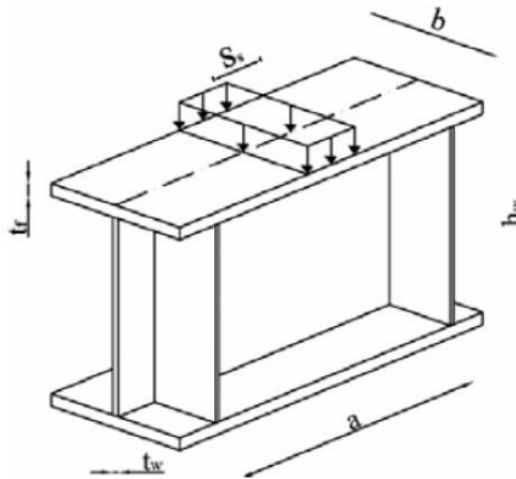
Las causas que pueden hacer que aparezca este fenómeno son:

- Tensiones tangenciales producidas por esfuerzos cortantes en la viga, lo que se traducen en tensiones de compresión sobre el alma.
- Tensiones normales de compresión.
- La suma de las dos anteriores.
- Fallos locales bajo cargas concentradas.



**Figura 2.14** Abolladura del alma de una viga.

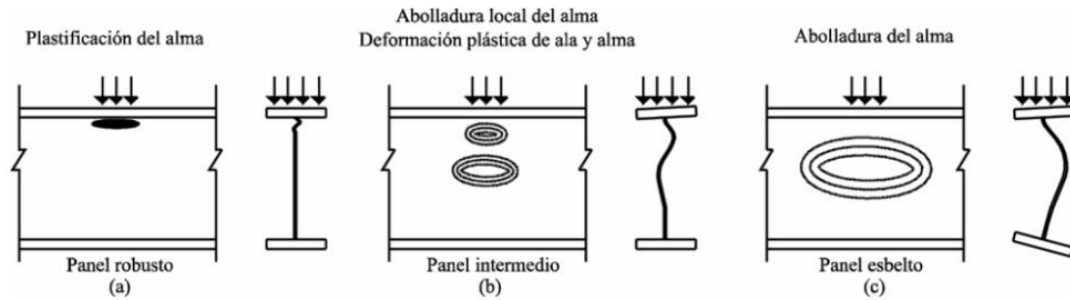
Al hablar de cargas concentradas se refiere al efecto producido por una carga puntual elevada, que es como si se tratase de una carga repartida muy fuerte sobre un pequeño campo de efecto, como aparece en Fig. 2.15. Pensando en donde se podrían dar estos casos, se pueden visualizar las reacciones de apoyos o el efecto de una carga directamente aplicada en la viga.



**Figura 2.15** Aplicación de fuerza repartida muy elevada en poco espacio. (Chacón et al., 2009)

Este efecto produce el agotamiento de la barra de la siguiente manera (Fig. 2.16):

- Aplastando la zona donde se aplica el esfuerzo, dejando así una deformación plástica.
- Aplastamiento de la zona del esfuerzo más abolladura localizada en la zona siguiente a esta. (No afecta a toda el alma).
- La abolladura del alma únicamente, siendo esta la forma más usual que se puede encontrar.



**Figura 2.16** Modos de abolladura más probables. (Chacón et al., 2009)

Como solución genérica en el caso de cargas concentradas se usa rigidizadores justo en los puntos de aplicación de esas posibles fuerzas intensas o en los apoyos. Los rigidizadores son perfiles o chapas que se unen al alma para que sea más rígida y por lo tanto soporte mejor los esfuerzos. Además, cuando se menciona el caso de abolladura por fuerzas compresivas es útil aumentar el espesor del alma o usar rigidizadores longitudinales. (Chacón et al., 2009)

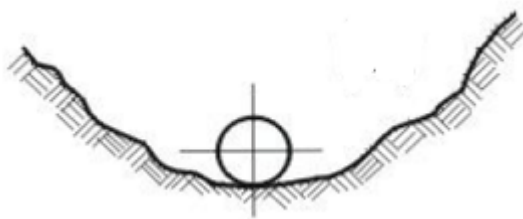
### 3 CONCEPTOS TEÓRICOS DEL PANDEO ELÁSTICO

#### 3.1 Equilibrio estable e inestable.

Antes de definir el término de pandeo, es útil conocer el concepto de estabilidad: “Esta es la propiedad de un sólido elástico de mantener su forma mientras que actúan cargas externas sobre ellos. Volviendo tras la desaparición de estas perturbaciones a su forma inicial.

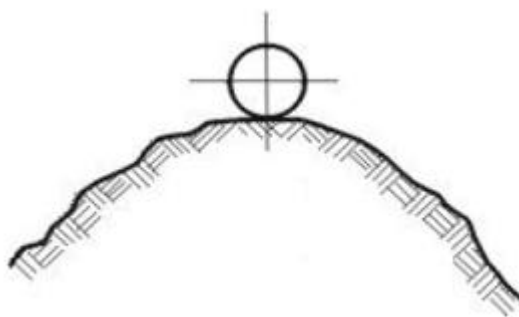
Con este término nos surgen otros tres conceptos muy importantes de equilibrio, pues nos será de ayuda a ejemplificar cómo actúa un elemento sometido a pandeo:

- Equilibrio estable: En este primer caso nos encontramos con una superficie cóncava, que nos provoca que el sistema vuelva a su estado original cuando lo sometemos a una fuerza determinada. Esto se puede comprobar moviendo el sólido a otra posición y observaremos en este caso como la pelota cae hasta quedar estática en el estado original como ocurre en Fig. 3.1.



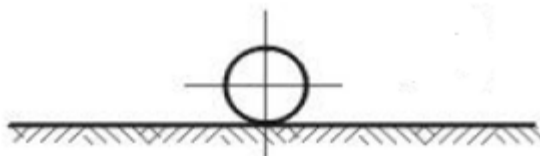
**Figura 3.1** Ejemplificación de equilibrio estable. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

- Equilibrio inestable: Siendo en este caso una superficie convexa, donde el sólido se colocaría en el punto de inflexión (la derivada es 0). Este sólido permanecería en reposo, pues justo en ese punto estaría en equilibrio, aunque si le aplicásemos cualquier carga horizontal para desplazar el sólido, esta se alejaría de su posición inicial, sin poder volver a ella. Este es el caso de Fig. 3.2.



**Figura 3.2** Ejemplificación de equilibrio inestable. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

- Equilibrio indiferente: La superficie sobre la que situamos la esfera es plana. Le aplicamos un desplazamiento con respecto a su posición inicial, que al dejar de aplicarlo la esfera volverá a un estado de reposo, pero en una posición diferente a la inicial. En este caso el sistema puede tomar distintas posiciones respecto a la inicial, pero no se producirá variación de posición, se encontrará en estado de reposo. Representado por Fig. 3.3.



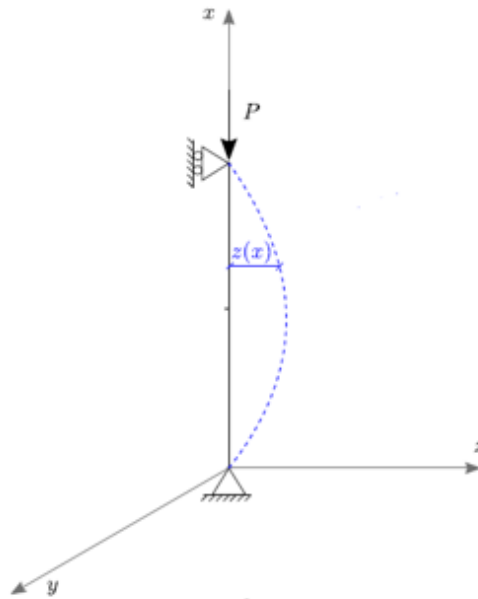
**Figura 3.3** Ejemplificación de equilibrio indiferente. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

Inestabilidad elástica se asemeja al caso b, equilibrio indiferente, aunque las fuerzas dejen de actuar, el objeto seguirá moviéndose. Es por ello que es necesario un análisis de estabilidad del sistema, que nos proporcione unos límites de valores para los esfuerzos externos, nombrando estos extremos como fuerzas críticas de pandeo. Al sobrepasar esos valores, producimos una inestabilidad elástica como hablamos en las definiciones anteriores que a su vez provocan la rotura del elemento y eso sería fatal en términos estructurales. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

### 3.1.1 Aplicación a una barra.

A la hora de estudiar el comportamiento que tendría una columna, al aplicar ciertas cargas de compresión, se piensa que la capacidad de mantenerse estaría siempre y cuando no se sobrepasase el límite elástico del material. Aunque esto no ocurre de este modo, ya que aparece el pandeo y este llega a ser más restrictivo que la condición mencionada. La rotura puede llegar antes debida al pandeo. (Jiménez-González et al., 2020)

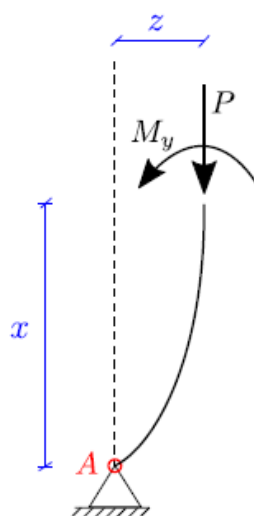
Se supone una viga biarticulada representada en Fig. 3.4. A esta misma se le aplica primeramente una fuerza compresiva. Esto provocará una variación de su posición inicial de forma de deformada transversal:



**Figura 3.4** Aplicación de fuerza compresiva a viga biarticulada. (Jiménez-González et al,2020)

Si en ese mismo momento es retirada la fuerza lateral y se hace un corte a la viga para estudiarla, se observa que la fuerza compresiva situada en el centro de la sección, al moverse, ya no quedaría justo en el eje de vertical. Se crearía una especie de excentricidad, generando así un momento flector que se visualiza indeformado en Fig. 3.5.

Por lo que se tiene una sumatoria de momentos igualada a 0, ya que no existe movimiento según la ecuación (3.1):



**Figura 3.5** Viga biarticulada con corte imaginario en su sección. (Jiménez-González et al,2020)

- Una fuerza compresiva  $P$
- Un momento generado por la excentricidad del pilar  $M_y$
- Una distancia  $Z$  (la excentricidad)
- Una distancia  $X$  hasta el apoyo

Analizamos si los momentos están en equilibrio:

$$\sum M_a = 0 \quad (3.1)$$

$$M_y - P z = 0 \quad (3.2)$$

Ahora pues si se analiza la ecuación (3.2), se observa que este sería el caso para que el sistema estuviera en equilibrio, pero aparecen dos casuísticas totalmente distintas que debemos analizar.

- Como primer caso:  $M_y > P z$   
El momento  $M_y$  provoca que la viga tienda a la posición inicial. Este caso correspondería con que la viga es estable.
- En el caso contrario:  $P z > M_y$   
Esa desviación que se produce comenzaría a aumentar, que llevaría al fallo catastrófico de la viga. Correspondería con el caso de un viga inestable

Este pequeño ejemplo demuestra que el pandeo llega cuando se desplaza la viga hasta el punto el que la excentricidad produce un momento mayor al momento flector de la sección. Así pues, llegando hasta el punto que falle totalmente la estructura. (Berrocal, 2005)

Llegado a esto es muy importante mencionar que en el fenómeno de pandeo no hay pequeñas deformaciones, por lo que se debe explicar con la teoría de segundo orden. Si la teoría de primer orden fuese usada, la columna tendría su eje longitudinal completamente recto.

## 3.2 Pandeo de Euler

### 3.2.1 Hipótesis de Euler.

Se habla en el apartado anterior sobre la necesidad de encontrar estos límites que existen en el pandeo. Euler en 1744 plantea y resuelve por primera vez el caso más simple, una columna sometida únicamente a un axil de compresión.

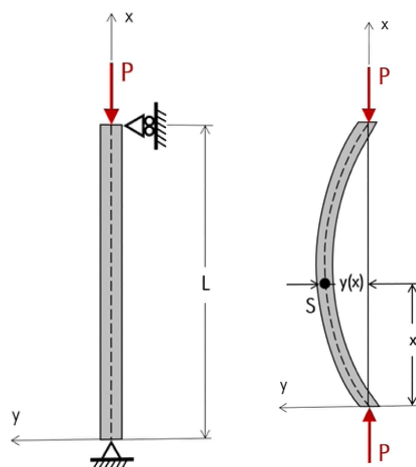
Euler realiza una serie de hipótesis necesarias para la resolución del problema haciendo de este un problema ideal:

- La columna tiene una sección constante, con un material homogéneo, elástico y sin imperfecciones que provoquen tensiones residuales.
- El eje del prisma es matemáticamente recto.
- Las cargas de compresión se aplican en el centro de la sección.

Estas connotaciones hacen que este sea un caso ideal, pues en la vida real se encuentran vigas con imperfecciones geométricas y tensiones residuales. Siendo la solución de este problema de mayor valor que la real. Por ello se aplican coeficientes para asemejar este valor a la realidad. (Jimenez-Gonzalez et al., 2020)

### 3.2.2 Expresión de la carga crítica de Euler.

Suponiendo una columna a compresión por una carga  $P$ , dibujada en los ejes  $y$ - $x$ , en la que se produce una deformación en este último (Figura 3.6). Teniendo en cuenta las hipótesis mencionadas anteriormente.



**Figura 3.6** Columna sometida a compresión y su posterior deformada. (Lapuebla, 2020)

Partiendo de la ecuación diferencial de la línea elástica, ecuación (3.3):

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-M_y}{E \cdot I_y} \quad (3.3)$$

Y sustituyendo el valor del momento en  $y$  por la fuerza compresiva aplicada multiplicada la excentricidad generada por la elástica (que tiene un valor de  $z$  y representa la condición necesaria para que la viga mantenga el equilibrio (Fig. 3.6):

$$M_y = P z \quad (3.4)$$

Si se combinan estas expresiones se obtiene (3.5):

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{P z}{E \cdot I_y} = 0 \quad (3.5)$$

Analizando esta ecuación se observan los siguientes parámetros:

- $P$  corresponde con la carga compresiva aplicada.
- $E$  es el Módulo de Young que caracteriza un material.
- $I_y$  es el momento de inercia de la viga en el eje  $y$ .

Siendo los valores mencionados constantes, se sustituyen por una constante  $k$ :

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_y} \quad (3.6)$$

Teniendo así (3.7), una ecuación diferencial que es lineal, homogénea y de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2 z = 0 \quad (3.7)$$

Cuya solución es del tipo:

$$z = C_1 \sin(k \cdot x) + C_2 \cos(k \cdot x) \quad (3.8)$$

Esta ecuación no está completa sin determinar los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ . Para ello se necesita imponer unas condiciones de contorno.

La primera condición de contorno corresponde cuando el desplazamiento en  $x$  es 0 Figura 3.6, por lo que el desplazamiento lateral es nulo:

$$z = C_1 \sin(k \cdot 0) + C_2 \cos(k \cdot 0) \quad (3.9)$$

Sabiendo que ( $z(x=0) = 0$ ):

$$0 = C_2 \cos(0) = C_2 \quad (3.10)$$

Se obtiene que la constante  $C_2$  tiene un valor de 0.

Por otro lado, queda por obtener la constante  $C_1$ , donde para ello se supone que  $x=L$  (Figura 3.6) y el desplazamiento lateral vale 0, es decir ( $z(x=L) = 0$ ), es sustituido:

$$0 = C_1 \sin(k \cdot L) + 0 \cos(k \cdot L) \quad (3.11)$$

$$0 = C_1 \sin(k \cdot L) \quad (3.12)$$

Como solución principal se encuentra que  $C_1$  sea nulo, pero esto correspondería con una solución trivial, ya que para ello tendría que ser que la barra no estuviese pandeada. Esto sería una solución no válida, pues se está realizando un problema de pandeo.

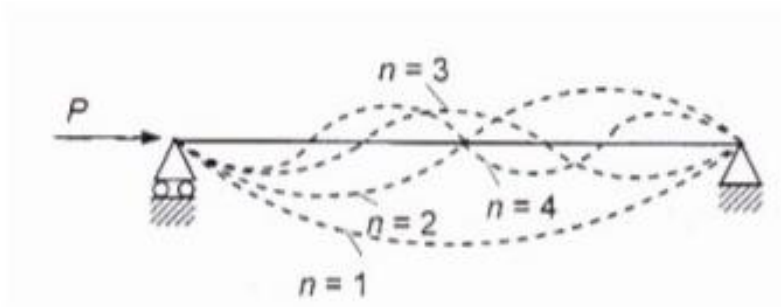
La opción viable en este caso es que (3.13):

$$0 = \sin(k \cdot L) \quad (3.13)$$

Para ello el valor del argumento tiene que ser un múltiplo de  $\pi$  (3.14):

$$k \cdot L = n \cdot \pi \quad (3.14)$$

Siendo  $n$  un número entero entre 0 e infinito, que recibe el nombre de modos de pandeo (Figura 3.7). Esto se representa como una curva compuesta por “ $n$ ” lóbulos que funcionan como diferentes configuraciones para la misma barra. Sabiendo que la configuración en que  $n=1$  es la predeterminada, porque es la de menor energía de deformación y solo se formará otra configuración si los apoyos impiden que esta primera se produzca. (Lapuebla, 2020)

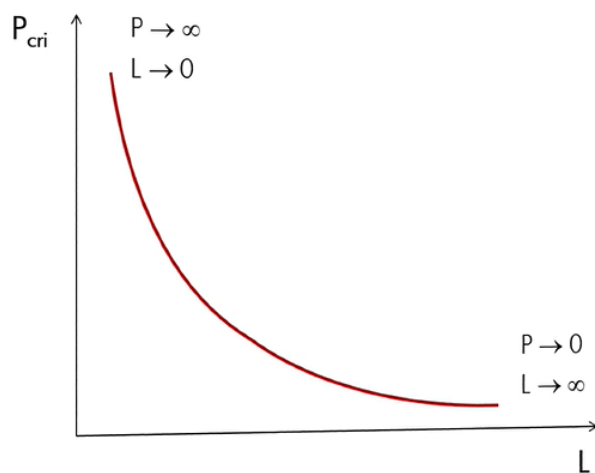


**Figura 3.7** Modos de pandeo de una barra biarticulada. (Morey, 2013)

Por lo mencionado anteriormente, para el cálculo de la carga crítica de pandeo de Euler usaremos la disposición en que  $n=1$ . Sustituyendo en la ecuación el valor real de  $k$  se obtiene que:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I \quad (3.15)$$

Si se representase esta ecuación gráficamente se observaría como si la longitud de pandeo tiende a 0, es decir que sea muy corta, la carga crítica de pandeo tiende a infinito. Esto indica que el fallo que se daría en dicha columna hipotética sería por aplastamiento. En el lado contrario, se tiene que la longitud de pandeo sea muy grande, lo que corresponde con una columna esbelta, donde la carga crítica de pandeo tiende a 0, por lo que sería muy probable que en este caso el fallo se produzca por pandeo (Figura 3.8). Por consiguiente, es importante saber que la carga crítica de Euler nos indica la frontera entre equilibrio estable e inestable.



**Figura 3.8** Gráfica de longitud de la viga con respecto a la fuerza de pandeo crítica.  
(Lapuebla, 2020)

Si la sección de la columna tiene un distinto momento de inercia para los ejes, la carga crítica de pandeo será distinta en función de hacia dónde se sitúen estos. Por lo que este será un concepto a tener en cuenta para la sustentación de la columna. A parte de este, existen otras variables que afectan directamente al pandeo, como son los tipos de apoyo que se explicará en el apartado 3.2.7. denominada como influencia de las condiciones de sustentación.

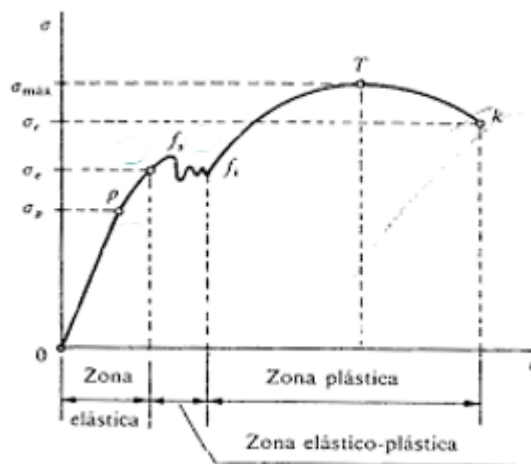
### 3.2.3 Variables que afectan a la fórmula de Euler.

#### Módulo de Young (E)

Conocido como módulo de Young o módulo de elasticidad longitudinal es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un determinado material. Se observa en la gráfica tensión-deformación de la Fig. 3.9 una serie de tramos, de los cuales hay que centrarse en el tramo 0-a. En este momento el material sigue un comportamiento elástico y lineal, por lo que tiene una relación entre tensión y deformación (3.16):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (3.16)$$

La relación obtenida es la pendiente de la recta, correspondiendo con el parámetro mencionado.



**Figura 3.9** Curva de comportamiento del acero según la tensión aplicada. (Berrocal, 2005)

Para la obtención de estos valores se realizan ensayos mayormente de tracción en pequeñas probetas del material que se desee estudiar.

#### Momento de inercia (I) o segundo momento de área.

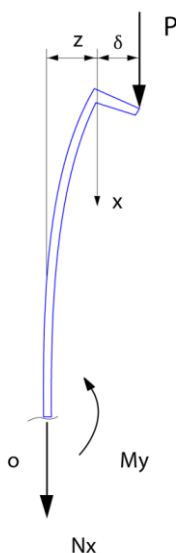
Es una propiedad geométrica de la sección transversal de elementos estructurales. Esta indica la resistencia a flexión de un elemento debido a la forma del elemento. La viga opondrá mayor resistencia en el eje de más momento de inercia, por lo que flexa en el otro sentido. Es por ello que se deben comprobar los ejes posibles de giro y estudiar para cuál de ellos es más probable que flexa.

## Longitud de pandeo

La longitud de pandeo depende tanto de la barra como de los tipos de apoyos. Este será explicado de forma más concisa en el apartado 3.2.7, donde se comenta los distintos casos de sustentaciones y sus coeficientes.

### 3.2.4 Influencia de excentricidades en la barra.

Este caso sirve como modelo para los casos experimentales que se usarán en laboratorio. En este modelo la carga será aplicada directamente sobre nuestro elemento con una excentricidad inicial, corresponde específicamente al caso en se estudia la influencia de la excentricidad en una barra.



**Figura 3.10** Barra con fuerza excéntrica aplicada. (Elaboración Propia)

Como se explica en el caso anterior, se hace uso de la teoría de segundo orden. La diferencia observada con respecto al caso anterior es la aparición de una pequeña excentricidad.

Datos que aparecen en la figura 3.10.

$P$  = Fuerza compresiva

$\delta$  = Excentricidad

$z$  = Distancia del eje central hasta el punto de la barra más próximo.

$M_y$  = Reacción del momento en el apoyo

$N_x$  = Reacción normal del eje x en el apoyo.

Se comienza planteando un equilibrio de momentos en el punto de sustentación:

$$\sum M_0 = M_y - P \cdot (z + \delta) = 0 \quad (3.17)$$

Relación entre el momento y la flexión  $z$ :

$$M_y = E \cdot I_y \cdot z'' \quad (3.18)$$

Sabiendo pues que  $z''$  coincide con la curvatura de la línea de flexión y es incluida en la primera ecuación mencionada.

$$z'' - \frac{P}{E \cdot I_y} \cdot (z + \delta) = 0 \quad (3.19)$$

Se obtiene una ecuación diferencial homogénea, de segundo grado (3.19). Como el valor  $f(x)$  es 0 se sabe que es una ecuación homogénea. Esta se resuelve por cambio de variable:

$$u = z + e \quad (3.20)$$

$$u'' = z'' \quad (3.21)$$

Quedando la ecuación según:

$$u'' - \frac{P}{E \cdot I_y} \cdot u = 0 \quad (3.22)$$

Puesto que se observa que es una ecuación diferencial homogénea, cuya solución puede ser del tipo:

$$u = e^{kx} \quad (3.23)$$

Igual que en la casuística anterior:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_y} \quad (3.24)$$

$$u'' + k^2 u = 0 \quad (3.25)$$

Cuya solución es del tipo:

$$z(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} - \delta \quad (3.26)$$

Esta puede reescribirse como (3.27):

$$z(x) = C_1 \sin(k \cdot x) + C_2 \cos(k \cdot x) - \delta \quad (3.27)$$

Las condiciones de contorno son que en  $z(0)=0$  y que  $z(L)=0$ , esto dice que en el punto de apoyo no hay desplazamiento y que en el punto con valor la longitud de la barra, es decir en el extremo no se produzca tampoco una desviación respecto del valor inicial 0.

Como soluciones se obtiene que:

$$C_1 = \delta \cdot \tan\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) \quad (3.28)$$

$$C_2 = \delta \quad (3.29)$$

Aplicando estos resultados se obtiene que la flexión de la barra con una excentricidad determinada sigue la ecuación:

$$z(x) = \delta \cdot \left( \frac{\cos(k \cdot (\frac{l}{2} - x))}{\cos(k \cdot \frac{l}{2})} - 1 \right) \quad (3.30)$$

Esta solución es extrapolable a cualquier lugar de la barra si se sitúa el valor  $x$  en el punto que se quiera calcular. Lo interesante es ver el valor de mitad de la barra, ya que corresponde con la flecha máxima de pandeo en el modo de pandeo de menor energía de deformación.

$$z\left(\frac{l}{2}\right) = \delta \cdot \left( \frac{1}{\cos(k \cdot \frac{l}{2})} - 1 \right) \quad (3.31)$$

Puesto que  $\cos(k \cdot \frac{l}{2})$  puede hacerse 0 en el punto en que  $(k \cdot \frac{l}{2})$  sea  $\frac{\pi}{2}$  radianes, es decir  $90^\circ$ . En este caso, cuanto se acerque a ese valor, la expresión entre paréntesis puede hacerse infinito. Esto conlleva que se tiene un sistema inestable.

Este punto de inestabilidad llega en (3.32):

$$\left(k \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.32)$$

Puesto que se puede sustituir  $k$ , se obtiene:

$$\left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}} \right) \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (3.33)$$

Para despejar esta ecuación se debe pasar a un lado los términos que no están sobre la raíz y se eleva al cuadrado en ambos lados y se opera hasta llegar a (3.37):

$$\left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}} \right) = \frac{\pi}{l} \quad (3.34)$$

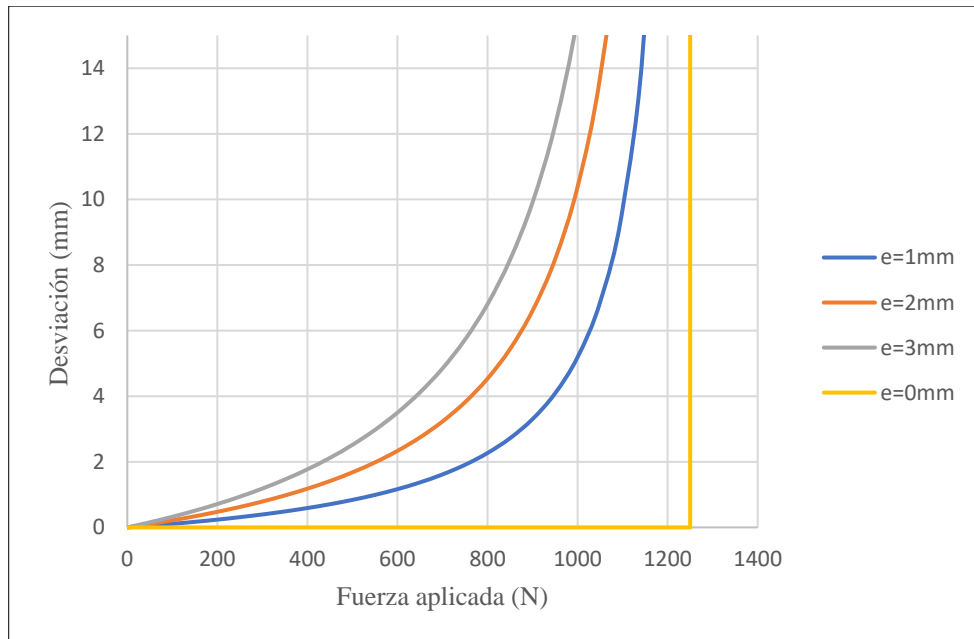
$$\left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (3.35)$$

$$\frac{P}{E \cdot I_y} = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (3.36)$$

$$P = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot E \cdot I_y \quad (3.37)$$

Viendo que este valor es la carga crítica de Euler. Este es el valor máximo de carga que soporta la barra en el límite que pandeo.

Puesto que el problema tiene una determinada excentricidad, en la figura 3.11 se va a graficar como afecta teóricamente la excentricidad a una barra. Siendo el valor obtenido en la fuerza crítica de pandeo el valor máximo posible y conforme va apareciendo una excentricidad mayor se producen unas curvas que se acerca a ese valor como si fuese una asíntota. En el caso de excentricidad 0 se produce pandeo de manera repentina, siendo esta la asíntota a la que se acercan las demás curvas. (Timoshenko, 1990)



**Figura 3.11** Efecto de la excentricidad en una barra en la deflexión lateral producida por una carga a compresión. (Elaboración Propia)

Los valores teóricos obtenidos son para una barra de las siguientes características:

- Aluminio, cuyo módulo E será  $70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ .
- La sección es de  $25 \times 6 \text{ mm}$ , por lo que tiene un momento de inercia de  $450 \text{ N/mm}^2$ .
- La longitud de  $500 \text{ mm}$ .

La fórmula aplicada corresponde con la ecuación:

$$z(x) = \delta \cdot \left( \frac{1}{\cos \left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}} \cdot \frac{l}{2} \right)} - 1 \right) \quad (3.38)$$

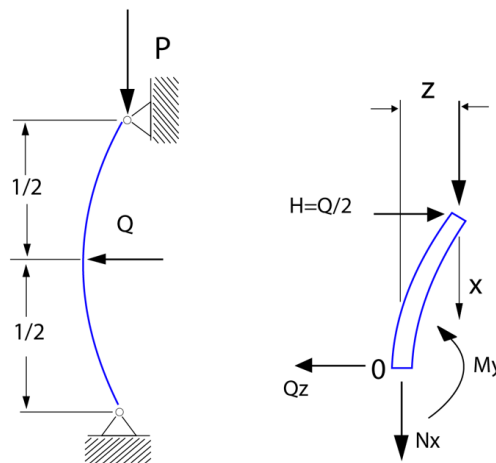
Donde delta depende de la excentricidad que se quiera calcular siendo esta de 1,2 y 3 mm.

### 3.2.5 Influencia de cargas transversales.

En la vida real, una barra es sometida a más de un esfuerzo. Este puede ser el caso de una barra que se somete a fuerzas compresivas llegando a pandear y a su vez tiene una carga transversal aplicada en la mitad de la longitud de la barra.

La fuerza transversal lo que hace es, si esta es suficientemente elevada, provoca que la barra flechte teniendo así una pequeña desviación. Sumando el efecto de compresión se produce que la barra flechte por pandeo en ese sentido debido a la desviación que produce la carga inicialmente.

Para comprobar que ocurre teóricamente se supone una barra biarticulada de longitud  $L$ , cuyo valor de carga compresiva es  $P$  y con carga transversal a una longitud de  $L/2$  de valor  $Q$ . La deflexión inicial que tiene la barra por pandeo es  $z$ . (Figura 3.12)



**Figura 3.12** Barra sometida a cargas transversal y compresiva. (Elaboración Propia)

Como en casos anteriores se hace un equilibrio de momentos, esta vez en el punto donde más variables se eliminen. Se hace en el punto nombrado como 0, puesto que así todo queda en función de  $F$  y de  $Q$ :

$$\sum M_0 = M_y - P \cdot z - \frac{Q}{2} \cdot x = 0 \quad (3.39)$$

Recordando el caso de excentricidad se mencionó la ecuación de la elástica:

$$M_y = E \cdot I_y \cdot z'' \quad (3.40)$$

Sustituyendo el momento flector en y por la elástica y despejando el término de  $z''$  se obtiene:

$$z'' - \frac{P}{E \cdot I_y} \cdot z = \frac{Q}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot x \quad (3.41)$$

Para usar menos símbolos se abrevia la ecuación con los siguientes términos:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_y} \quad (3.42)$$

$$\alpha = \frac{Q}{2} \cdot F \quad (3.43)$$

Por lo que queda de la siguiente manera:

$$z'' - k^2 \cdot z = \alpha \cdot x \quad (3.44)$$

La ecuación diferencial obtenida en este caso es no homogénea de segundo orden, que son del tipo:

$$a \cdot z'' + b \cdot z' + c \cdot z = f(x) \quad (3.45)$$

debido a que el factor  $f(x)$  no es igual a 0 y tiene un valor determinado. Este término  $f(x)$  es despejado en la parte derecha de la ecuación.

Las ecuaciones no homogéneas tienen dos soluciones, una homogénea y otra particular (Spiegel, 1983):

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) \quad (3.46)$$

La solución de la componente homogénea es parecida a la anterior de la barra excéntrica:

$$z_h(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} \quad (3.47)$$

Por otro lado, para la solución particular, es obtenida de bibliografía (Spiegel, 1983). Es del tipo:

$$z_h(x) = C_3(x) \cdot e^{kx} + C_4(x) \cdot e^{-kx} - e \quad (3.48)$$

Siendo  $C_3$  y  $C_4$ :

$$C_3 = -\frac{\alpha}{2} \cdot \left( \frac{2}{k} + x \right) \cdot e^{-kx} \quad (3.49)$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{2} \cdot \left( \frac{1}{k} - x \right) \cdot e^{kx} \quad (3.50)$$

Sustituyendo estas soluciones obtenidas en la solución particular y sumando esta solución a la homogénea se obtiene que:

$$z(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} - \alpha \cdot x \quad (3.51)$$

Se puede aprovechar la fórmula de Euler y ponerlo en forma de seno y coseno, así mediante condiciones de contorno se pueden obtener las nuevas constantes:

$$z(x) = A_1 \sin(k \cdot x) + A_2 \cos(k \cdot x) - \alpha \cdot x \quad (3.52)$$

Como condiciones se impone que  $z(0)=0$ , es decir que en el valor de longitud 0, no se sufra desviación, ya que se tiene un apoyo. De la misma manera debe ocurrir en la longitud L, en el otro extremo de la barra, donde no debe haber desviación ya que es el otro apoyo  $z(L)=0$ .

$$A_1 = \frac{\alpha \cdot L}{\text{sen}(k \cdot L)} \quad (3.53)$$

$$A_2 = 0 \quad (3.54)$$

$$z(x) = \alpha \cdot \left( L \cdot \frac{\text{sen}(k \cdot x)}{\text{sen}(k \cdot L)} - x \right) \quad (3.55)$$

Al igual que en el caso de las excentricidades, lo que interesa ver es el punto medio de la barra, puesto que este provoca la máxima desviación y mínima energía de deformación:

$$z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q \cdot L}{4 \cdot F} \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{(k \cdot L)}{2}\right)} - 1 \right) \quad (3.56)$$

El punto crítico llega en coseno de  $90^\circ$  (inestable), ya que si se hace el denominador un número muy pequeño, hace que el primer término del paréntesis tienda a infinito, que restado al segundo término sigue siendo infinito. Por lo que la flecha sería infinita.

Como en la excentricidad ocurría, el valor determinante es el denominador, que como tiende a infinito se genera la condición de inestabilidad:

$$\left(k \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.57)$$

Puesto que se pueden sustituir ciertos valores:

$$\left(k \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.58)$$

$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right) \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (3.59)$$

Para despejar esta ecuación se debe pasar a un lado los términos que no están sobre la raíz y se eleva al cuadrado en ambos lados:

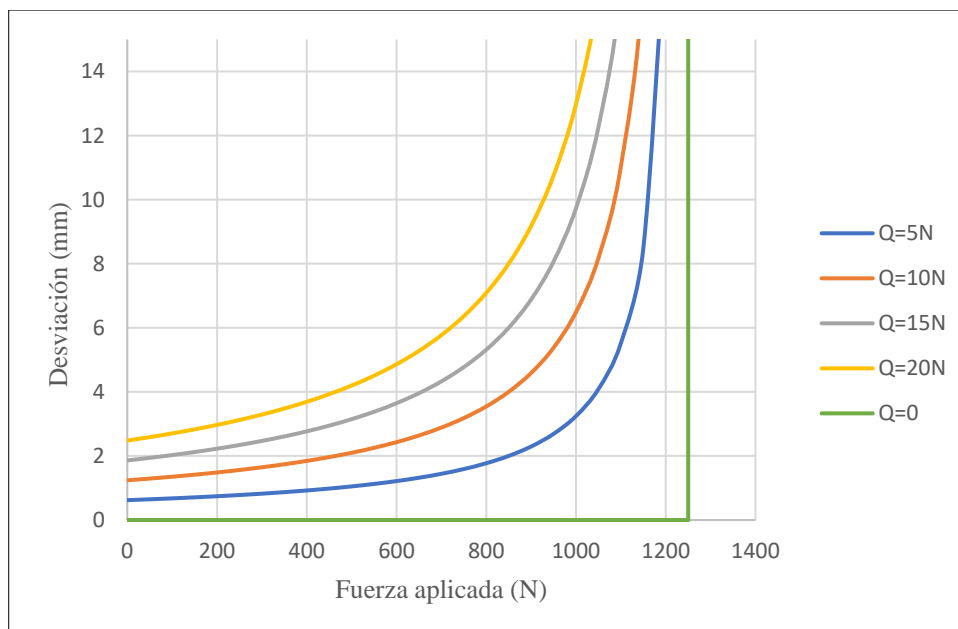
$$\left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}} \right) = \frac{\pi}{l} \quad (3.60)$$

$$\left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (3.61)$$

$$\frac{P}{E \cdot I_y} = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (3.62)$$

De manera similar a lo que ocurre con la estabilidad, el término  $\frac{Q \cdot L}{4 \cdot F}$  tiene la misma función que la excentricidad, siendo un factor agravante de la carga crítica de pandeo. (Timoshenko, 1990)

La Figura 3.13 representa el comportamiento teórico de barras sometidas a pandeo si sobre ellas influyen distintas cargas transversales:



**Figura 3.13** Comportamiento teórico de una barra sometida a pandeo con diferentes cargas transversales. (Elaboración Propia)

En esta gráfica se ven dos cosas muy interesantes, la primera es que el comportamiento de la carga transversal puede ser comparado con el caso de excentricidades, ya que un aumento genera que la carga crítica de pandeo se reduzca, el caso ideal en que no hay carga actúa como asíntota y los demás casos se acercan a su comportamiento, sin llegar a ella. El segundo hecho interesante es que al aproximar a 0, se observa que el hecho de la carga transversal si no tiene fuerza aplicada ya hay un valor de desviación de la barra.

Los valores han sido obtenidos de una barra con los siguientes valores:

- Longitud de 500 mm.
- Biarticulada.
- Sección de 25 x 6 mm.
- Hechas de aluminio.

Este será medido antes de comenzar los experimentos.

### 3.2.6 *Esbeltez mecánica*

Acabando en el apartado en el apartado anterior, se dice que ciertas variables pueden afectar de manera directa a la carga crítica de pandeo de Euler. Entre estas variables se encuentra una propiedad geométrica conocida como esbeltez mecánica, donde se conoce que a mayor esbeltez es más probable que la columna flecte.

*¿De qué variables depende la esbeltez mecánica?*

Con su fórmula es simple identificar estas variables:

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \quad (3.63)$$

Es directamente proporcional a la longitud de pandeo efectiva e inversamente proporcional al radio de giro. Esta ecuación puede ser aplicada en los dos ejes, pues tenemos una  $L_k$  (longitud de pandeo del elemento para cada uno de los ejes) e  $i$  (radio de giro de la sección). El radio de giro depende directamente del momento de inercia de ese eje y del área del elemento:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.64)$$

Para que el radio de giro aumente, lo que debe ocurrir es que el momento de inercia también aumente. La inercia aumenta distribuyendo mejor el material, de manera que lo alejemos del centroide. Para economizar el proyecto se decide usar el mismo área, pues aumentarla supondría un mayor coste económico.

Sustituyendo:

$$\lambda \cdot i = L_k \quad (3.65)$$

$$\lambda \cdot \sqrt{\frac{I}{A}} = L_k \quad (3.66)$$

En la ecuación de la carga crítica de Euler se obtiene:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E \cdot A \quad (3.67)$$

Una vez obtenidas las dos ecuaciones de la carga crítica de pandeo de Euler se puede llegar a una conclusión de que el pandeo se produce en:

- El punto donde la esbeltez mecánica es mayor. Afecta de manera inversa a la carga crítica de pandeo, es decir a mayor esbeltez, menor valor tendrá la carga crítica. Siendo favorable que la carga crítica sea lo mayor posible. Por ello usamos  $\lambda_{min}$ .
- El pandeo por lo tanto será en el eje que menor momento de inercia haya.
- El radio de giro al ser el menor posible favorece a que ocurra el pandeo.

Siguiendo estas premisas podemos determinar cual es el lado más desfavorable en que ocurrirá la flexión. Quedaría junto a esto un último apartado muy importante, en el que se habla sobre las condiciones de sustentación de las columnas. (Jiménez-González et al., 2020)

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{\lambda_{max}}\right)^2 \cdot E \cdot A \quad (3.68)$$

### 3.2.7 *Influencia de las condiciones de sustentación.*

En el estudio de Euler se consideraba una columna ideal biarticulada, es por ello que a priori esta ecuación es solamente válida para este tipo de vigas.

Claramente este ejemplo que predice Euler es uno de los más usados, pero no el único. Es por ello que esta ecuación necesita una pequeña corrección para satisfacer todos los casos posibles de apoyos que nos encontremos.

Partiendo de la ecuación:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I \quad (3.69)$$

Se observa el término  $L$  que corresponde con la longitud real de la columna. Este valor dependiendo de las condiciones de sustentación que aparezcan tendrán una apreciación distinta, en las que aplicamos un factor de corrección:

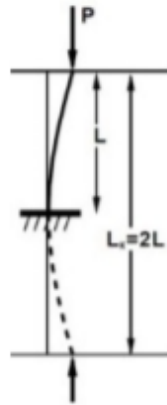
$$L_k = \beta \cdot L \quad (3.70)$$

Siendo  $\beta$  el factor correctivo del que estamos hablando conocido como coeficiente de esbeltez y  $L_k$  el nuevo valor conocido como longitud de pandeo. La terminología de longitud de pandeo de una columna corresponde con la longitud que tiene que tener una barra articulada en ambos extremos como la estudiada por Euler si se quisiese obtener la misma fuerza crítica de pandeo que en el caso que estemos estudiando.

Para la obtención de  $\beta$ , se supone que se debe tener la misma carga de pandeo que en una barra biarticulada ideal de Euler. Para su obtención se realiza un estudio de la elástica por flexión lateral, donde se compara la fracción de elástica en correspondencia con la biarticulada, es decir, siempre comparándola con la ideal estudiada por Euler. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

Se realiza un ejemplo para la mejor comprensión de la hipótesis:

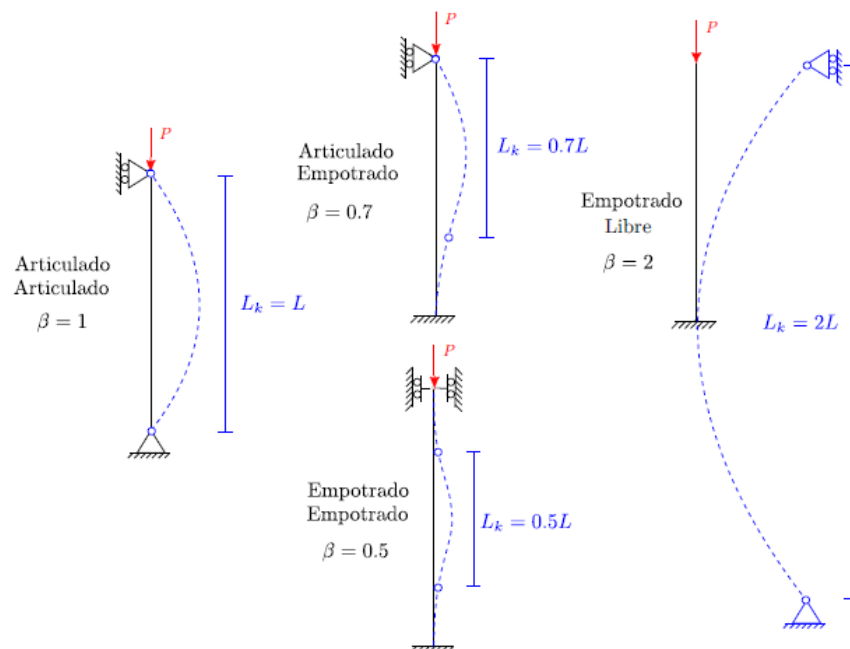
- Barra empotrada-libre, como se observa en la figura 3.14:



**Figura 3.14** Coeficiente de sustentación para viga biempotrada. (Morey, 2013)

La longitud necesaria para que en este caso se cumpla que la carga crítica de pandeo sea igual que en una biarticulada es que sea el doble. Por ello el coeficiente beta en este caso es 2.

En la siguiente figura 3.15, aparecen los valores de los coeficientes beta que se usan en función de las condiciones de apoyo que se estén estudiando. Estos se comprobarán más adelante cuando se realicen los ensayos de laboratorio.



**Figura 3.15** Coeficientes de sustentación en función de tipos de apoyo. (Jiménez-González et al., 2020)

### 3.2.8 Tensión crítica de Euler y limitación.

Una vez conocido el término de esbeltez mecánica, ya se puede describir cuales son las limitaciones, ya que se hará uso de este término para su explicación.

Se conoce pues que esbeltez mecánica se puede obtener de la longitud de pandeo entre el radio de giro:

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \quad (3.71)$$

Con esto, se sustituye en la ecuación de la carga crítica y la tensión crítica, de manera que se obtiene:

$$\sigma_{crit} = \frac{F_k}{A} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} \quad (3.72)$$

En una viga se tienen dos planos de pandeo y esta flexionará en el plano que se tenga una esbeltez mayor. Siempre que las condiciones de sustentación sean las mismas en los dos planos mencionados. Es por ello que se trabajará con  $\lambda_{m\acute{a}x}$ .

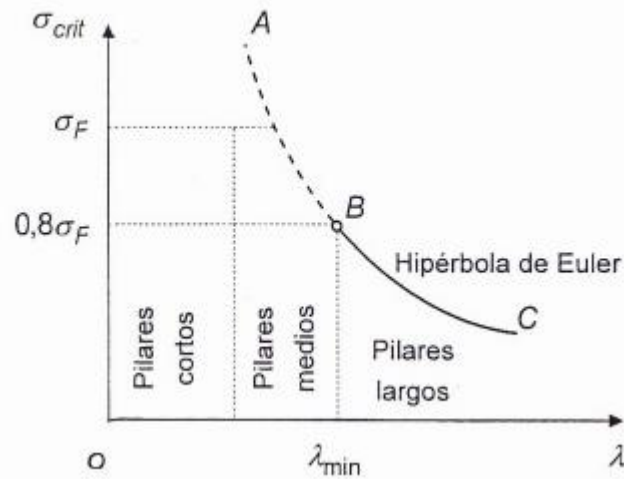
$$\sigma = \frac{F_k}{A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda_{m\acute{a}x}^2} \quad (3.73)$$

Como se ha hablado en apartados anteriores, en la barra se pueden observar los problemas en los que se debe poner precisión en su estudio. Bien puede vencer debido a sobrepasar las fuerzas compresivas o por sufrir pandeo. De este modo se entiende que, al calcular el valor de la tensión normal, si esta es inferior a la tensión de compresión permitida por el material, la barra pandea. En caso contrario la barra vencerá debido a sobrepasar la tensión de compresión permitida. En la figura 3.8 se observa la gráfica presión longitud en la que se explica que presión es necesaria para que rompa debido a pandeo una determinada barra, en función de su longitud. Esto no es real completamente, pues a partir de un punto determinado de esbeltez, que se graficará como B, se tiene la frontera que divide el fallo por pandeo o el fallo debido a la fuerza compresiva aplicada. (Morey, 2013)

Para el cálculo de este valor de esbeltez mecánica, de la ecuación anterior (3.73) se despeja el valor de la esbeltez, que ahora es el valor mínimo que debe tener esta para poder usar las ecuaciones descritas por Euler:

$$\lambda_{\min} \geq \sqrt{\frac{E \cdot \pi^2}{\sigma_p}} \quad (3.74)$$

De igual manera que se habla en el apartado de la ecuación de Euler, se obtiene con los nuevos términos una gráfica tensión-esbeltez mecánica que nos proporciona la tensión que produce la fractura por pandeo de ciertos elementos, según su esbeltez. (Figura 3.17)



**Figura 3.16** Variación de la tensión crítica de pandeo con respecto a la esbeltez mecánica. (Morey, 2013)

Se menciona en este mismo apartado que una barra puede llegar a su límite debido a pandeo y a compresión, pero en esta gráfica lo único que aparece es la tensión crítica aplicable en el caso de pandeo para que la barra llegue a su punto crítico. Para hacer más real esta, es necesario el cálculo con la ecuación de  $\lambda_{\min}$  (3.74) la esbeltez mínima en la que se puede aplicar la ecuación de Euler. Siendo cualquier esbeltez menor a esta, casos en los que la barra fractura debido a los esfuerzos de compresión del material donde se alcanza la tensión del límite elástico.

### 3.3 Pandeo Anelástico

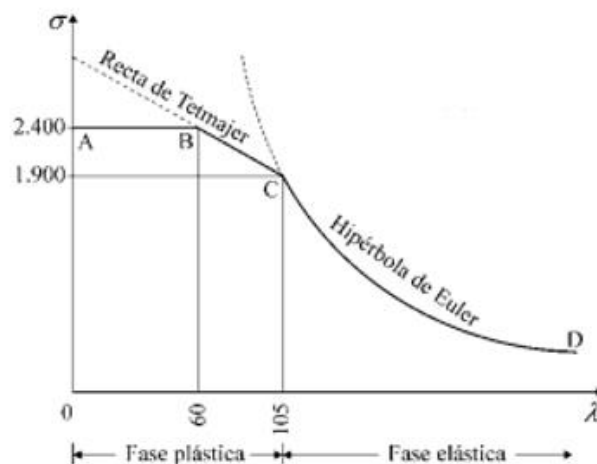
Se habla en casos anteriores que la esbeltez mecánica sitúa un punto crítico en el que para valores menores a este la ecuación de pandeo crítica de Euler deja de ser válida. Realmente Navier y Tetmajer fueron los primeros en tratar de formular una teoría válida. En las normas DIN 1935 se usaron las siguientes metodologías para conocer los límites del acero en función de la esbeltez, como se aprecia en la Tabla 3.1.

En la fase elástica	Hipérbola de Euler	Para $\lambda \geq 105$	$\sigma_K = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E$
En la fase plástica	Recta de Tetmajer	Para $60 < \lambda < 105$	$\sigma_K = 3.100 - 11,40 \cdot \lambda$
	Recta horizontal constante	Para $0 < \lambda < 60$ Limitación Reglamentaria	$\sigma_K = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$

**Tabla 3.1** Esquema de fórmulas usadas en la norma DIN 1935. (Gomez, (s.f))

Este método era muy simple, aunque con el tiempo se detectaron fallos conceptuales como:

- La no continuidad fluida del punto B.
- No continuidad de C, donde intersecan la recta de Tetmajer y la hipérbola. Pudiendo ser esta una tangente a la hipérbola, apreciable en la figura 3.17.



**Figura 3.17** Recta de Tetmajer para dar continuidad al material. (Gomez, (s.f))

Se considera un error ya que el material debe guardar una continuidad, por lo que debe suceder una transición más suave como una tangente en el punto C. (Gomez, (s.f))

Se producen varias revisiones, pero se opta por seguir usando esta metodología, ya que no se veía necesario un cambio total de ella.

Finalmente, debido a dos factores se decide cambiar el método:

- El primero de ellos es la necesidad de hacer estructuras más económicas, con la necesidad de usar coeficientes de seguridad más ajustados.
- Por otra parte, la aparición del hormigón en el campo de aplicación hace que se necesite un mejor aprovechamiento del acero.

Es por ello que Engesser sería el primero en tratar de formular una teoría en la fase plástica de pandeo en 1889. Realiza un estudio sobre el comportamiento teórico de diferentes elementos de acero entre los parámetros en los que se comporta de manera plástica. Como hipótesis principal, Engesser toma como punto de partida las mismas hipótesis que Euler, con la salvedad de que prescinde de la ley de Hooke. Esto quiere decir que el uso del módulo E ya no será constante. (Gomez, (s.f))

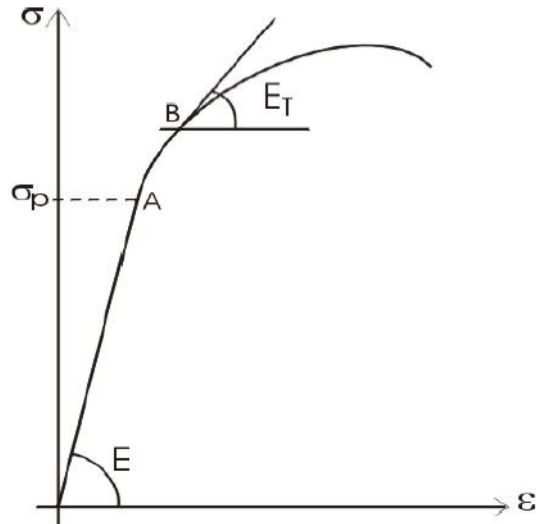
Propone dos hipótesis diferentes a lo largo de su vida:

- Teoría del módulo tangente
- Teoría del doble módulo

A modo de resumen, la razón por la que se estudia este caso es debido a que se encuentran casos donde la esbeltez es más pequeña que la esbeltez calculada por Euler (esbeltez exacta para que con la tensión límite de régimen elástico pandee sin alcanzar el límite plástico). En estas posibilidades lo que ocurre es que la barra es poco esbelta y esta plastifica antes de ocurrir el pandeo, por lo que es necesario conocer qué ocurre y qué se debe tener en cuenta para asemejarlo lo máximo posible a la realidad. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

### **Teoría del módulo tangente (1889)**

Si se visualiza el diagrama tensión-deformación, tras pasar el punto A (figura 3.18), en el que el material deja de ser proporcional. Se tiene un periodo en que el módulo E no coincide con el inicial, por lo que propuso, que para cierto intervalo el nuevo módulo fuese la tangente en la gráfica (recibe el nombre de  $E_T$ ). (Figueirido, 2012)



**Figura 3.18** Obtención del módulo  $E$  cuando no hay régimen elástico puro. (Capítulo X: Pandeo, 2016).

$$E_T = \arctg \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (3.75)$$

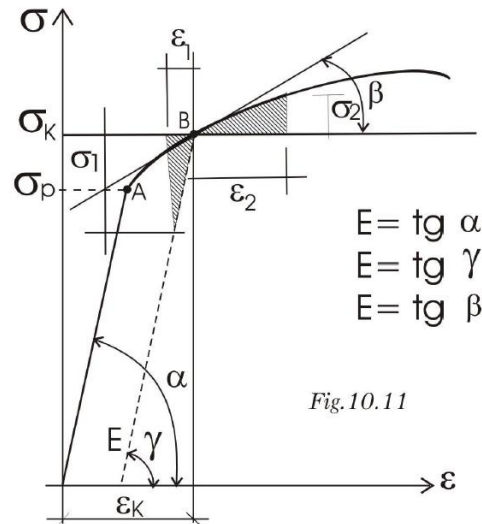
Engesser generaliza la ecuación de Euler y queda la tensión que tiene que ser mayor que la calculada por Euler.

$$\sigma_B = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot E_T \quad (3.76)$$

Pero esta teoría tendría algunos detractores como Karman debido al uso de un único módulo.

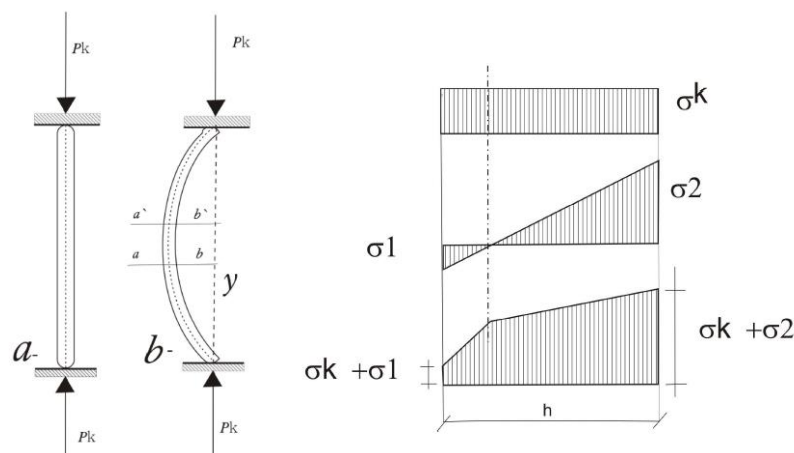
### Teoría del doble módulo (1895)

Las críticas hacia la anterior teoría eran debidas a que cuando se carga una barra por encima de la tensión crítica de régimen elástico, la barra al ser descargada no vuelve a tener el mismo módulo elástico que se observa inicialmente, si no que proporciona otro totalmente distinto en la región de comportamiento plástico. Visto en la figura 3.19.



**Figura 3.19** Obtención de módulos  $E$  por la teoría del doble módulo. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

En el caso en que se tenga una viga comprimida por una carga compresiva, mientras la barra permanezca recta, el esfuerzo por compresión será el mismo en toda la sección. Sin embargo, en el momento en la barra empieza a pandear debido al aumento de la carga compresiva, en una de las partes disminuirá la compresión, debido a que la barra sufre unos alargamientos de esas fibras. Por ello, se suman las tensiones que produce la fuerza compresiva inicial a las tensiones provocadas por la curvatura de la barra (Figura 3.20), que serán distintas en el lado izquierdo y en el derecho. Siendo una zona traccionada y en otra comprimida. (Capítulo X:Pandeo, 2016).



**Figura 3.20** Representación de tensiones en la barra. (Capítulo X:Pandeo, 2016).

Se puede encontrar más información en la siguiente (Capítulo X:Pandeo, 2016).

### 3.4 Pandeo Real

Para el estudio teórico se realizan suposiciones que idealizan el elemento estudiado, por lo que afectan menos variables que en la vida real. Ocurre de igual manera en lo presentado a lo largo de este trabajo. Se habla de varias hipótesis que tomamos como verdaderas en el cálculo de la carga crítica de pandeo de Euler, pero realmente esto no se produce, por lo que los valores obtenidos de la realidad serán menores que los obtenidos en los cálculos de la teoría de Euler.

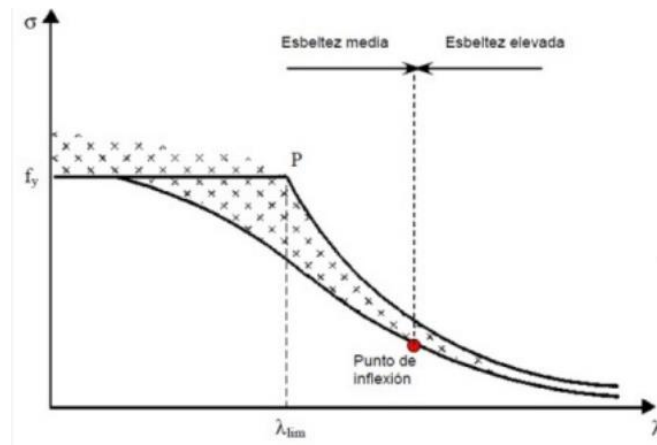
No se tienen en cuenta diversas imperfecciones de la barra:

- El material que compone la barra no es totalmente homogéneo como se ha estudiado.
- Aparecen imperfecciones geométricas, entre las que cabe destacar que el elemento no es completamente recto si no que se encuentran desviaciones produciendo excentricidades.
- La carga compresiva no está completamente en el centro de gravedad de la barra.
- La barra puede tener ciertas grietas o microfracturas que afecten a la estabilidad de la barra, como soldaduras...

Teniendo en cuenta las imperfecciones apreciables que se tomaron en principio como ideales se debe saber que habrá diferencia entre la realidad y la teoría. (Busto, 2014)

En este trabajo se realiza en laboratorio una serie de experimentos con distintas casuísticas que favorecen o perjudican la aparición de pandeo y se comprobará mediante fórmulas teóricas el grado de acercamiento con los datos obtenidos.

Con la finalidad de considerar los efectos reales que se comentan anteriormente la CECM (Convención Europea de la Construcción Metálica) realiza ensayos de pandeo y su ajuste numérico, considerando el comportamiento del acero. Se muestra que la dispersión depende de la forma de las secciones estudiada. Esto es tenido en cuenta en la normativa, a través del parámetro de 'coeficiente de imperfección elástica  $\alpha$ '.

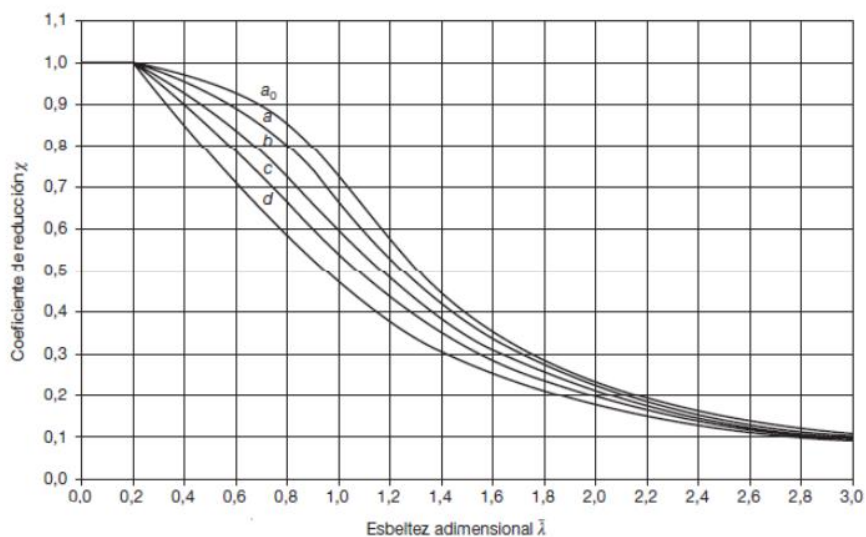


**Figura 3.21** Comportamiento experimental con respecto al teórico. (Morey, 2013)

Se observa de la figura 3.21 que se ha trazado un valor seguro para el que las barras reales no pandean, aun teniendo las imperfecciones mencionadas.

A simple vista la mayor diferencia entre teórico y real es en esbelteces medias, donde hay un efecto de las imperfecciones muy fuerte y este debe ser tenido en cuenta. Mientras que en esbelteces muy pequeñas y muy grandes se aprecia que las imperfecciones no son tan agravantes de este efecto. (Morey, 2013)

Las curvas europeas están basadas en un gran número experimentos, siendo estos ensayos sobre distintos perfiles y esbelteces. Se establecen 5 curvas distintas y cada una lleva asociado un coeficiente de imperfección elástica  $\alpha$ . Esto proporciona la posibilidad de realizar realmente un estudio fiable sobre la aparición de pandeo. La figura 3.22 representa estas curvas europeas.



**Figura 3.22** Ejemplo de curvas europeas. (Morey, 2013)

### 3.4.1 Normativa

Para hacer un conjunto de reglas dentro que cumplan con los requisitos necesarios se hace uso del Código Estructural. El Código Estructural del 10 de noviembre de 2021 es el marco normativo que establece las exigencias a las que deben adecuarse las estructuras de hormigón, de acero y las que tienen un conjunto de acero y hormigón. Se encarga de que se cumplan con una serie de requisitos para proporcionar la máxima seguridad estructural, teniendo también en cuenta el medio ambiente haciendo un uso responsable y eficiente de los recursos.

En este trabajo se va a experimentar con barras de acero sometidas a esfuerzos de compresión que corren el riesgo de sufrir pandeo, por ello se hace uso del apartado 6.3 del Anejo 22 del Código estructural titulado como ‘Resistencia a pandeo de los elementos’.

La metodología a seguir es la siguiente:

Se comprueba que:

$$\frac{N_{ED}}{N_{b,RD}} \geq 1 \quad (3.77)$$

Como términos aparecen:

- $N_{ED}$  corresponde con el esfuerzo del axil a compresión que actúa sobre una barra.
- $N_{b,RD}$  corresponde con la resistencia de cálculo a pandeo de la barra estudiada.

Puesto que el axil de compresión ya se tiene, se procede a calcular el términos del denominador:

$$N_{b,RD} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (3.78)$$

Los términos usados en esta ecuación son:

- $A$  es el área de la sección.
- $f_y$  es el límite elástico del material de la barra.
- $\gamma_{M1}$  es el coeficiente de seguridad. Se usa 1.05.
- $\chi$  es conocido como coeficiente de reducción por pandeo.

El coeficiente de reducción por pandeo se usa para minorar la cota obtenida de pandeo para dar un mayor grado de seguridad a la estructura y se evalúa de la siguiente manera:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 + \lambda^2}} \quad (3.79)$$

Este coeficiente de reducción por pandeo hay que calcularlo en las dos direcciones y y z.

Para el valor de  $\phi$  se soluciona la siguiente ecuación:

$$\phi = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\lambda - 0.2) + \lambda^2] \quad (3.80)$$

- $\alpha$  es el coeficiente de imperfección de la barra que depende de tres características:
  - o Tipo de sección transversal de la barra.
  - o Plano de pandeo considerado.
  - o Tipo de acero.

Para la obtención de los coeficientes de imperfección se hace uso de la Tabla 3.2:

Tabla A22.6.1 Coeficientes de imperfección para las curvas de pandeo					
Curva de pandeo	$a_0$	a	b	c	d
Coeficiente de imperfección $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

**Tabla 3.2** Tabla A22.6.1 del Anejo 22 del Código Estructural sobre coef. de imperfección.

Que a su vez requiere el uso de la Tabla 3.3:

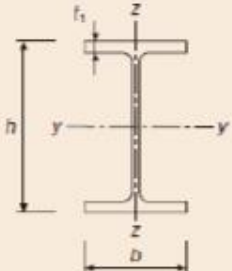
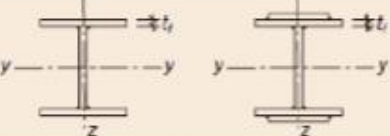

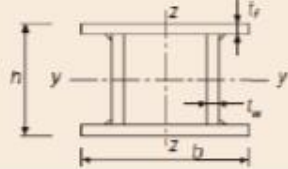
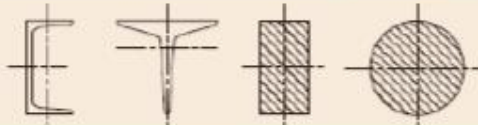

Sección transversal	Límites	Pandeo alrededor del eje	Curva de pandeo		
			S 225 S 275 S 355 S 420	S 400	
Secciones de perfiles laminados 	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	Y-Y Z-Z	a b	a <sub>0</sub> a <sub>0</sub>
		$40 \text{ mm} < t_f < 100 \text{ mm}$	Y-Y Z-Z	b c	a a
	$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	Y-Y Z-Z	b c	a a
		$t_f > 100 \text{ mm}$	Y-Y Z-Z	d d	c c
Secciones de vigas en I armadas soldadas 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	Y-Y Z-Z	b c	b c	
	$t_f > 40 \text{ mm}$	Y-Y Z-Z	c d	c d	
Secciones de perfiles huecos 	Acabados en caliente	Cualquiera	a	a <sub>0</sub>	
	Conformados en frío	Cualquiera	c	c	
Secciones de vigas en cajón armadas soldadas 	En general (excepto caso recuadro inferior)	Cualquiera	b	b	
	Soldadura gruesa $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	Cualquiera	c	c	
Secciones de perfiles en U, en T y macizas 		Cualquiera	c	c	
Secciones de perfiles angulares 		Cualquiera	b	b	

Tabla 3.3 Tabla similar a la A22.6.2. del Anejo 22 del Código Estructural.

- $\lambda$  es la esbeltez adimensional de la barra. Esta se calcula con la ecuación (3.81):

$$\lambda = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \tag{3.81}$$

Donde  $N_{cr}$  es el valor de la carga crítica de pandeo de Euler.

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{\lambda_{crit}}\right)^2 \cdot E \cdot A \tag{3.82}$$

## **4 MEDIDA EXPERIMENTAL DE LA ELÁSTICA CON EQUIPO GUNT WP-120**

### **4.1 Descripción del equipo.**

El estudio del pandeo, como se ha visto desde el inicio de este trabajo, es básicamente un problema de estabilidad. Al aplicar una carga compresiva e ir incrementándola se llega a un punto límite en que la barra rompe.

El equipo usado para hacer los experimentos se encarga de aplicar la carga, diseñar situaciones distintas y ver como influyen en varios elementos. Como elementos principales de los que se compone se encuentran:

Un armazón base que actúa como sujeción del equipo. En él se encuentra el alojamiento inferior de las barras, donde con distintas piezas se puede recrear el tipo de sujeción necesarias, bien sea empotramiento o un apoyo articulado. El alojamiento inferior además contiene una caja dinamométrica para mostrar la fuerza aplicada.

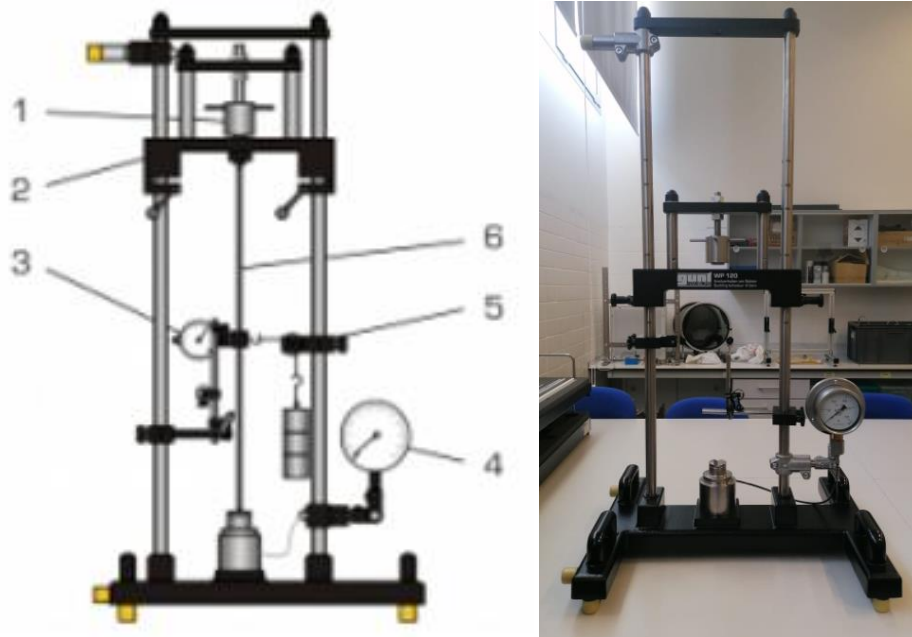
Dos columnas guía que sirven para ajustar la longitud de la barra que se espera estudiar, estas tienen las medidas de las barras que se vienen en el ensayo, para así hacer más simple su uso y no tener la necesidad de medir exactamente el punto necesario.

El travesaño de carga está fijo a las columnas guía y tiene un husillo de carga que con un movimiento rotatorio hace posible que se pueda aplicar la fuerza necesaria, que a su vez será medida por la caja y vendrá representada en el dinamómetro de la parte derecha. Bajo el husillo es necesario colocar los modelos de apoyos para representar también el apoyo superior y evitar que haya esfuerzos de torsión aplicados sobre la barra.

El equipo puede situarse de dos maneras, vertical y horizontal, aunque en la fase experimental se haya decidido que los experimentos sean realizados de manera vertical.

En la figura 4.1 y 4.2 se aprecia el equipo en posición vertical y seis partes bien diferenciadas:

- 1- Husillo.
- 2- Marco de carga variable.
- 3- Reloj comparador .
- 4- Dinamómetro.
- 5- Elemento para simular carga transversal.
- 6- Barra de prueba.



**Figura 4.1** Equipo Gunt WP-120. (Gunt Hamburg)

Como se ha comentado anteriormente, en la parte inferior se encuentra un alojamiento para la barra, que además se encarga de medir la fuerza. Esto es gracias a un caja dinamométrica hidráulica.

El alojamiento inferior figura 4.2 permite la entrada de dos simulaciones diferentes de apoyos:



**Figura 4.2** Alojamiento inferior.

- Un apoyo articulado, que no permite el movimiento horizontal ni vertical, pero si que la viga gire. Esto lo consigue gracias a su forma en V como se aprecia en la figura 4.3.



**Figura 4.3** Apoyo articulado del alojamiento inferior.

- Un empotramiento, en el que está bloqueado el movimiento vertical, horizontal y el giro. Esto es conseguido gracias al elemento de la figura 4.4 que va unido a las barras de prueba que los necesiten.



**Figura 4.4** Pieza de presión unida a barra, simulando empotramiento.

Por otro lado, en la zona superior también se encuentra un alojamiento que simula los distintos apoyos posibles. Según la figura 4.5:



*Figura 4.5 Alojamiento superior.*

- Para la articulación se observa en la figura 4.6 una pieza larga que en la zona de contacto con la barra tiene una entalladura en V. Al igual que en el caso anterior la forma de articulación es en V para que sea posible el giro. Esta pieza se introduce en las tomas guía del travesaño de carga.



*Figura 4.6 Apoyo articulado del alojamiento superior.*

- Para el empotramiento en la zona superior encontramos 2 partes diferenciadas. La primera corresponde a la unión de la figura 4.4 y la segunda es una pieza corta, parecida a la de la entalladura en V, pero con una superficie plana. Se puede ver en la figura 4.7. Esta pieza corta es para aplicar la fuerza a la barra, ya que la sección de la unión y la barra es demasiado elevada para entrar en la guía.



**Figura 4.7** Pieza corta para empotramiento.

La medición de pandeo se hace gracias a un reloj comparador y un soporte para este que viene incluido en el equipo (Fig. 4.8). Se tiene que colocar el reloj comparador en el punto donde se quiera medir el desplazamiento, por ejemplo si se tiene una barra biarticulada, la medición debe ser en el punto central de la barra. Debe ser lo más centrado posible y haciendo un ángulo de  $90^\circ$ , para que sea lo más real posible. Una vez bien colocado se sitúa en 0 el reloj y se comienza a medir.



**Figura 4.8** Medición de reloj comparador.

El equipo tiene un dispositivo para simular cargas transversales, aunque este solo se puede poner en marcha si el equipo se encuentra vertical. Se compone de polea, una cuerda, una brida y un conjunto de pesas (cuatro pesas de 5 N, pudiendo cargar la barra hasta 20 N). La brida junto con un pasador sirve para conectar la barra y las cuerdas, que a través de la polea hace que las pesas apliquen su fuerza de manera horizontal, como se ve en la figura 4.9.



*Figura 4.9* Dispositivo de carga transversal.

Por último y lo más importante son las barras de prueba que permiten la realización de distintas pruebas según longitud, material, geometría. Hay dos conjuntos de barras nombradas en Tabla 4.1 y Tabla 4.2. Y mostradas en su maletín en la Figura 4.10

Barras para experimentos WP-120				
Nombre	Material	Sección transversal (mm)	Longitud (mm)	Apoyos
S1	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	350	Biarticulada
S2	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	500	Biarticulada
S3	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	600	Biarticulada
S4	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	650	Biarticulada
S5	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	700	Biarticulada
S6	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	650	Empotramiento/ artic.
S7	Acero para herramientas 1.2842	20 x 4	650	Emp./ Emp
S8	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	600	Biarticulada
S9	Latón CuZn40Pb2	25 X 6	600	Biarticulada
S10	Cobre E-Cu	25 X 6	600	Biarticulada
S11	Fiberline	25 X 10	600	Biarticulada

*Tabla 4.1* Datos sobre las barras del orden de S1 hasta A11.

Barras para experimentos WP-120				
Nombre	Material	Sección transversal (mm)	Longitud (mm)	Apoyos
SZ1	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=0mm
SZ2	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=1mm
SZ3	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=3mm
SZ4	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	40 x 6	500	Biarticulada
SZ5	Fiberline	25 x 10	700	Biarticulada
SZ6	PVC	Ø 16 X 2	400	Biarticulada
SZ7	PVC	Ø 20 X 1.5	400	Biarticulada

*Tabla 4.2* Datos sobre las barras del orden de SZ1 hasta AZ10.



*Figura 4.10 Maletín de barras del equipo Gunt WP-120.*

#### *4.1.1 Resumen de los experimentos a realizar.*

En este trabajo se realizarán de manera experimental siete tipos diferentes de ensayos, donde se comprobará el resultado experimental con el valor teórico que debería de salir.

El primer de los experimentos es a modo de calibración de la máquina. En el se usa la barra 2 y consiste en aplicar un esfuerzo de compresión a una barra de acero de 500 mm de longitud, cuyos apoyos seran biarticulados. En este caso, para la comprobación teórica es aplicar la carga crítica de Euler, pues es un elemento biarticulado. (Figura 4.11)



*Figura 4.11 Barra S2 usada en el ensayo de prueba.*

En segundo lugar se realiza el experimento sobre la influencia de apoyos en una barra. Para ello es necesario hacer uso de las distintas formas de apoyos mencionada en el apartado anterior. Se usan las barras S4, S6 y S7 mostradas en la Figura 4.12. Las tres barras están formadas por el mismo material, tienen la misma sección y la misma longitud, la única salvedad es el diferente modo de apoyo.

- La barra S4 es biarticulada.
- La barra S7 es biempotrada.
- La barra S6 es empotramiento-articulación.



**Figura 4.12** Barras del ensayo de influencia de sustentación de superior a inferior son S7, S6 y S4.

En tercer lugar se trata de comprobar la influencia de la longitud, por lo que se usan las barra S1, S2, S3 y S5 que aparecen en la Figura 4.13. Estas barras vuelven a tener todas las mismas características, exceptuando la longitud, donde:

- La barra S1 es de 350 mm.
- La barra S2 es de 500 mm.
- La barra S3 es de 600 mm.
- La barra S5 es de 700 mm.

Todas son biarticuladas, de sección 20 x 4 mm y de acero.



**Figura 4.13** Barras del ensayo de influencia de longitus. De superior a inferior son S5, S3, S2 y S1.

En cuarto lugar se produce el experimento sobre la influencia de material y además se añade un apartado en el que se debe averiguar el material del que está hecha una barra incógnita. Gracias a los valores obtenidos de carga crítica tendrá un módulo E determinado y con un prontuario con varios módulos y los aspectos visuales determinamos cuál es el material.

Para la primera parte de este experimento se usan las barras (Figura 4.14):

- Barra S8 de aluminio.
- Barra S9 de latón.
- Barra S10 de cobre.

Con los datos de este experimento se debe llegar a la conclusión de que es el más favorable para usar en una viga y su semejanza con los valores teóricos.

Por otro lado, la segunda parte se realiza con la barra S11.



*Figura 4.14* Barras del ensayo de influencia de longitud. De superior a inferior son S11, S9, S10 y S8.

El quinto consiste en ver la influencia de la sección transversal de una barra. Se divide también en dos casuísticas. La primera es en dos barras de diferente ancho y la segunda en dos barras con distinto diámetro.

Para la influencia del ancho se usan las barras (Figura 4.15):

- SZ1 donde el ancho es 25 mm.
- SZ4 donde el ancho es 40 mm.



**Figura 4.15** Barras del ensayo de influencia de sección. De superior a inferior son SZ1 y SZ4.

Para la influencia de diámetro se usan las barras (Figura 4.16):

- SZ6 tiene un diámetro de 16 mm.
- SZ7 tiene un diámetro de 20 mm.



**Figura 4.16** Barras del ensayo de influencia de diámetro. De superior a inferior son SZ6 y SZ7.

El sexto de los experimentos consiste en tener excentricidades en las barras y cómo están afectan a la carga crítica de pandeo, es decir si esto provoca que se reduzca mucho la estabilidad de la viga o no es tan diferencial. Este experimento es muy interesante, pues en las barras ideales siempre se considera que no hay excentricidades, pero en la realidad esto es utópico.

Como barras de ensayo se usan las barras (Figura 4.17):

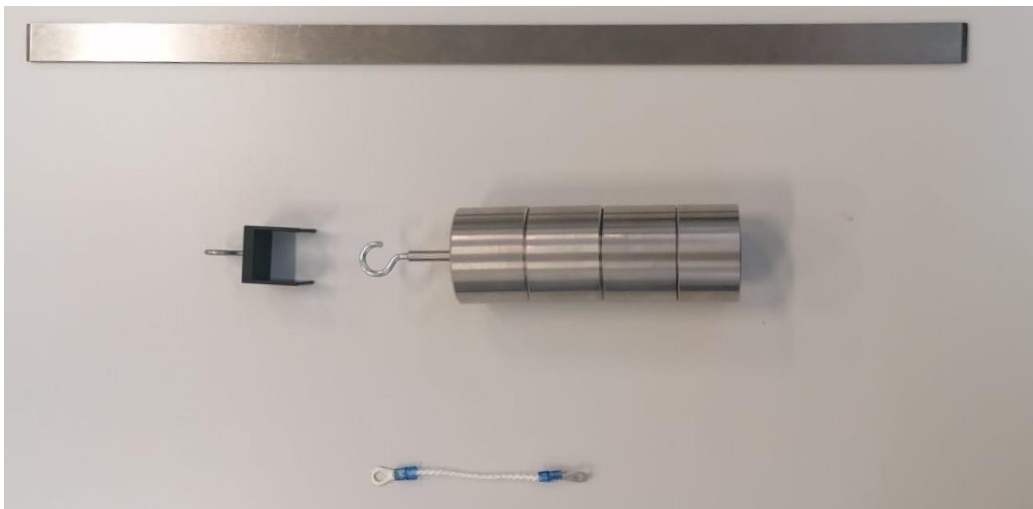
- SZ1 donde no existe excentricidad, 0mm.
- SZ2 donde la excentricidad es de 1 mm.
- SZ3 donde la excentricidad es de 3 mm.



**Figura 4.17** Barras del ensayo de influencia de excentricidad. De superior a inferior son SZ1, SZ2 y SZ3.

Como séptimo y último experimento se hace uso del dispositivo de carga transversal, ya que se trata de ver cómo afecta las distintas cargas transversales a una barra. Se usa una misma barra, pero se va cargando desde 0 N hasta 20 N, con un intervalo de 5 N.

Como barra se decide usar la SZ1. (Figura 4.18)

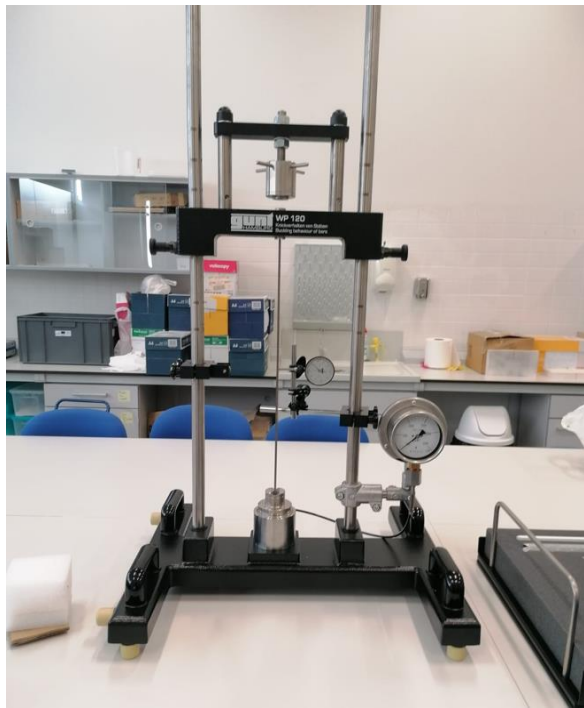


**Figura 4.18** Material de ensayo de la influencia de cargas transversales con la barra SZ1.

## 4.2 Ensayo 1. Ensayo de prueba.

### 4.2.1 Descripción.

Corresponde con la barra S2, de acero. Biarticulada, de 500 mm de longitud y con una sección de 20 mm x 4 mm. Se puede apreciar en la figura 4.19.



**Figura 4.19** Posición inicial de la barra S2, para el experimento de calibración.

Para la ejecución de este experimento el equipo se pone de manera vertical. Los apoyos son articulados, por lo que se hace uso de las piezas entalladas en V y el reloj comparador es colocado en la mitad de la barra, estando lo más centrado en la sección y con un ángulo de 90°. Se ajusta el reloj comparador a 0 y se empieza con la medición.

Se comienza a aplicar carga hasta que sufra 0.25 mm de desviación la barra y se anotan los valores. Cuando se observa que esta comienza a estabilizar, la medición pasa a ser de 0.5 mm en 0.5 mm. El experimento finaliza cuando se estabilice la carga, es decir cuando aplicando más fuerza y aumentando su desviación, la carga no varía de una manera ostensible. Otro indicador es el cálculo teórico realizado previamente. Antes del experimento se realizan los cálculos teóricos para así tener una cierta seguridad de que no se va a provocar daños permanentes en la barra como su plastificación o la rotura.

Una vez acabado el experimento se debe descargar lentamente la barra y se repite el experimento en el sentido contrario de pandeo. Así comprobamos si la barra ha sufrido algún daño. Para comprobar que esto no es así la desviación debe ser menor del 10 %.

#### 4.2.2 Cálculos teóricos.

Según lo estudiado, en este caso la carga crítica de pandeo viene dada por la fórmula de Euler. Siendo un apoyo biarticulado no es necesario ningún factor de corrección, por lo que  $L_k$  es la longitud normal de la barra. La expresión de carga crítica es (4.1):

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_k}\right)^2 \cdot E \cdot I \quad (4.1)$$

Los factores  $\pi$ ,  $L_k$  y  $E$  son conocidos respectivamente, siendo  $\pi$ , 500 mm y  $210 \cdot 10^3$  N/mm<sup>2</sup>. Queda por calcular el momento de inercia de la barra en el lado que es más probable que pandee. La ecuación del momento de inercia es (4.2):

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (4.2)$$

Siendo la base 20 mm y la altura 4 mm:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 4^3}{12} = 106.67 \text{ mm}^4$$

Se observa claramente que ese es el eje de menor inercia, pero se realiza si se desea realizar la comprobación:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4 \cdot 20^3}{12} = 2666.67 \text{ mm}^4$$

Puesto que el eje  $y$  tiene una menor inercia el pandeo será en ese sentido.

Con esto ya es posible calcular la carga crítica teórica que servirá como indicador para no sobrepasarla en los experimentos.

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{500}\right)^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67 = 884.34 \text{ N}$$

También es posible calcular la deflexión que produce esta carga, gracias a la ley de Navier. Puesto que la ley de Navier proporciona la tensión la tensión con la ecuación (4.3):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{m\acute{a}x} \quad (4.3)$$

Y también pudiendo dividir el momento flector en fuerza por distancia, donde la distancia corresponde con la excentricidad que aparece.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{P \cdot flecha}{I_y} \cdot z_{m\acute{a}x} \quad (4.4)$$

Sabiendo que la tensión máximo que debe sufrir la barra es el límite elástico de pandeo para no dejar cambios irreversibles en el elemento. Con ello se puede calcular la flecha que provocaría esta carga y así tener dos indicadores para no sobrepasar en la experimentación.

A esta flecha se le aplican unos coeficientes de seguridad para hacer menos probable que plastifique.

Si se reorganizan los terminos de la ecuación (4.4) se obtiene:

$$\frac{\left(\sigma_p - \frac{N}{A}\right) \cdot I_y}{P \cdot z_{m\acute{a}x}} = flecha \quad (4.5)$$

Puesto que el cálculo es realizado en la mitad del elemento la  $z_{m\acute{a}x}$  es de 2 mm.

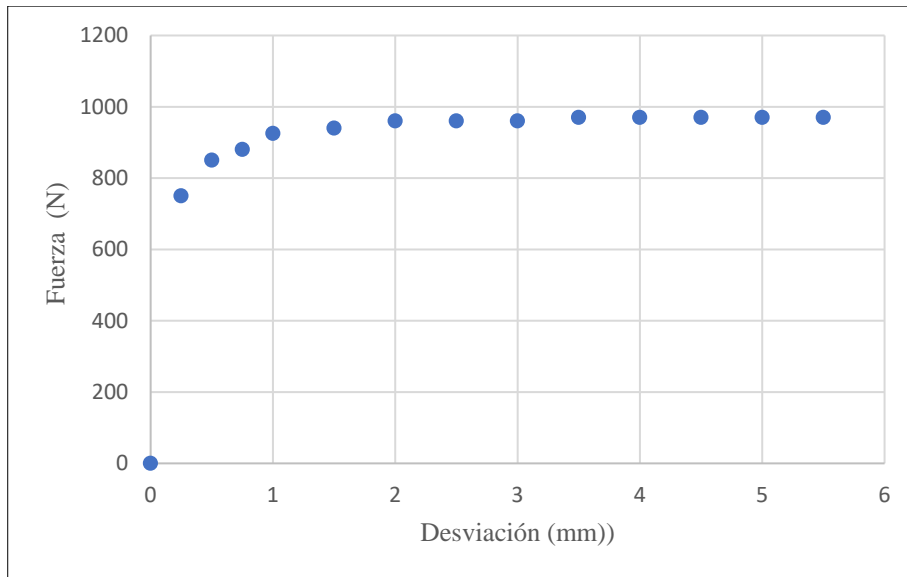
La tensión máxima en este punto corresponde con el límite de estabilidad del material.

$$\frac{\left(300 - \frac{1250}{80}\right) \cdot 106.67}{1250 \cdot 2} = 12.13 \text{ mm}$$

Puesto que este corresponde con el valor límite, se debe minorar esta medición para tener una cierta seguridad sobre la barra experimentada.

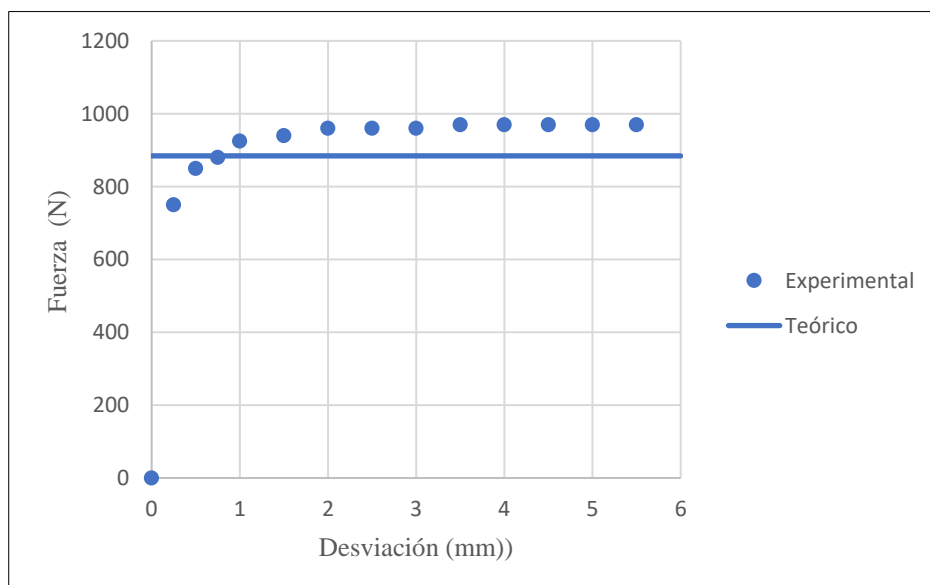
#### 4.2.3 Resultados experimentales.

Este es el primer ensayo realizado, pues es el más simple y permite la calibración de la máquina para ver si hay un acercamiento entre lo teórico y lo experimental. Para ello primeramente se ve que tensión se alcanzaría teóricamente con las condiciones de la barra. Siendo esta aproximadamente en el dinamómetro unos 884 Newtons.



**Figura 4.20** Medición experimental de barra S2 comparando Fuerza (N)-Desviación (mm).

Las Figura 4.20 comprende los valores obtenidos en laboratorio mediante la medición del ensayo. Posteriormente será comparada con el valor que teóricamente se debería obtener como ocurre con la Figura 4.21. En el caso práctico se obtiene unos 90 N más de lo que se debería, es decir, como carga crítica de pandeo unos 970 N. Siendo este valor bastante extraño por la gran diferencia entre uno y otro. Se procede a realizar la carga de pandeo en el sentido contrario y vuelve a darnos un valor en torno a 970 N, en concreto se mide unos 950 N. Como la desviación de las dos medidas en los dos sentidos de pandeo es menor del 10%, se descarta la falla de la barra.



**Figura 4.21** Comparativa valor teórico y experimental

#### 4.2.4 Cálculo según normativa.

Como esta barra está hecha de acero, se puede realizar el cálculo según el Código Estructural. Concretamente siguiendo el capítulo 20, Anejo 22 apartado 6.2.4 relativo a elementos sometidos a compresión.

El cálculo principalmente se basa en comprobar que (4.6):

$$\frac{N_{ED}}{N_{b,RD}} \geq 1 \quad (4.6)$$

$N_{ED}$  es el axil de cálculo que actúa sobre la barra, por lo que es el valor que se va a obtener de los cálculos y el resultado final que se obtiene.

$N_{b,RD}$  será el axil de compresión resistente de la barra, según normativa, calculado como (4.7):

$$N_{b,RD} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4.7)$$

Los términos usados en esta ecuación son:

- $A$  es el área de la sección. La barra tiene un sección rectangular de 20 x 4 mm.
 
$$A = 20 \cdot 4 = 80 \text{ mm}^2$$
- $f_y$  es el límite elástico del material de la barra. En este caso se usa acero para herramientas, donde la tensión permanente en límite de proporcionalidad es:
 
$$300 \text{ N/mm}^2$$
- $\gamma_{M1}$  es el coeficiente de seguridad. Se usa 1.05.
- $\chi$  es conocido como coeficiente de reducción por pandeo.

El coeficiente de reducción por pandeo se obtiene de(4.8):

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 + \lambda^2}} \quad (4.8)$$

Este coeficiente de reducción por pandeo hay que calcularlo en dos ejes de pandeo.

Pero antes se necesitan tener dos valores que son  $\Phi$  y  $\lambda$ :

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\lambda - 0.2) + \lambda^2]$$

Para la obtención de los coeficientes de imperfección se hace uso de la Tabla 4.3:

Tabla A22.6.1 Coeficientes de imperfección para las curvas de pandeo					
Curva de pandeo	a <sub>0</sub>	a	b	c	d
Coeficiente de imperfección α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabla 4.3 Tabla A22.6.1 del Anejo 22 para obtener el coef. de imperfección.

Que a su vez requiere el uso de la tabla 4.3 que indica qué curva de pandeo se debe usar:

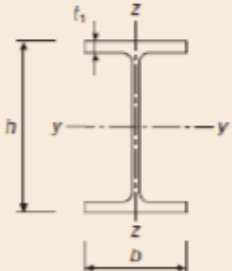
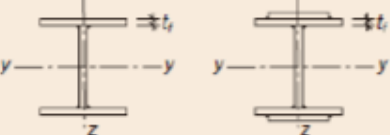

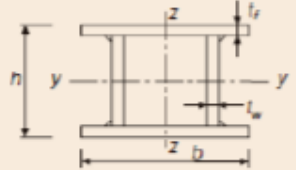
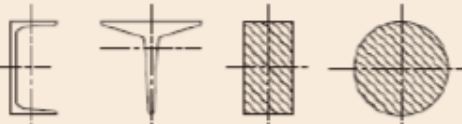
Sección transversal	Límites	Pandeo alrededor del eje	Curva de pandeo		
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460	
Secciones de perfiles laminados 	$h/b > 1,2$	Y-Y Z-Z	$t_f \leq 40$ mm	a b	a <sub>0</sub> a <sub>0</sub>
			$40 < t_f < 100$ mm	b c	a a
	$h/b \leq 1,2$	Y-Y Z-Z	$t_f \leq 100$ mm	b c	a a
			$t_f > 100$ mm	d d	c c
Secciones de vigas en I armadas soldadas 	$t_f \leq 40$ mm	Y-Y Z-Z	b c	b c	
	$t_f > 40$ mm	Y-Y Z-Z	c d	c d	
Secciones de perfiles huecos 	Acabados en caliente	Cualquiera	a	a <sub>0</sub>	
	Conformados en frío	Cualquiera	c	c	
Secciones de vigas en cajón armadas soldadas 	En general (excepto caso recuadro inferior)	Cualquiera	b	b	
	Soldadura gruesa $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	Cualquiera	c	c	
Secciones de perfiles en U, en T y macizas 		Cualquiera	c	c	

Tabla 4.4 Tabla similar a la A22.6.2. del Anejo 22 del Código Estructural (figura extraída de la EAE).

En esta tabla primeramente se debe tener claro que tipo de sección corresponde con la barra estudiada, siendo esta una sección de perfil maciza. Por ello se debe usar la última fila de la Tabla 4.1. El siguiente elemento en que se debe fijar es el plano de pandeo, donde en la tabla dice que cualquiera. Esto indica que es indiferente de cuál sea el plano. Por último se debe saber el tipo de acero del que está fabricada la barra, como en los dos casos la tabla indica que se debe hacer uso de la curva de pandeo C. Se coge la tabla de pandeo C.

Con la conclusión anterior se usa el coeficiente de imperfección C, donde dice que:

$$\alpha = 0.49$$

El otro valor necesario es la esbeltez adimensional ( $\lambda$ ) de la barra:

$$\lambda = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{80 \text{ mm}^2 \cdot \frac{300 \text{ N}}{\text{mm}^2}}{884.34 \text{ N}}} = 5.21$$

$N_{cr}$  es la carga crítica de pandeo que está calculada en el apartado 4.2.2 Cálculos teóricos. Siendo este valor de 844.34 N.

Como ya se tienen los valores se resuelve la ecuación:

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + 0.49 \cdot (5.21 - 0.2) + 5.21] = 15.30$$

Ahora es posible obtener el valor del coeficiente de reducción por pandeo:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 + \lambda^2}} = \frac{1}{15.30 + \sqrt{15.30^2 + 5.21^2}} = 0.03178$$

Por lo que finalmente se obtiene:

$$N_{b,RD} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = N_{b,RD} = 0.03178 \cdot \frac{80 \cdot 300}{1.05} = 726.4 \text{ N}$$

Por lo que el axil seguro para la barra según normativa correspondería con 726.4 N.

Se destaca este valor, ya que si se observan los valores tomados en laboratorio, el valor donde se visualiza un desplazamiento mínimo de 0.25 mm es con el axil de compresión de 750 N, por lo que en 726.4 N como se ha calculado, esta no pandea y deja un intervalo de seguridad suficiente. En la Tabla 4.5 se puede ver los valores obtenidos:

Desplazamiento (mm)	Fuerza (N)
0	0
0,25	750
0,5	850
0,75	880
1	925
1,5	940
2	960
2,5	960
3	960
3,5	970
4	970
4,5	970
5	970
5,5	970

*Tabla 4.5 Valores experimentales obtenidos en la barra S2.*

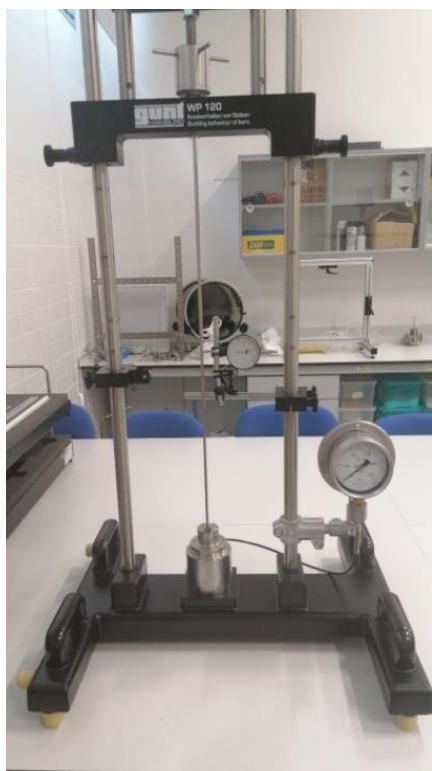
### 4.3 Ensayo 2. Influencia de tipos de sustentación.

#### 4.3.1 Descripción.

Este segundo ensayo trata de reflejar como afecta el tipo de sustentación a una barra, teniendo así los siguientes tipos:

- La barra S4 es biarticulada.
- La barra S7 es biempotrada.
- La barra S6 es empotramiento-articulación.

En primer lugar se realiza la barra S4, por lo que se necesita hacer uso de las dos piezas en V, en el alojamiento inferior hay unos tornillos de sujeción para fijar la pieza de presión en V y en el alojamiento superior se usa la pieza entallada en V. En este caso el reloj comparador está situado en el centro de la barra, ya que será el punto donde se produzca la mayor flexión posible. La figura 4.22 muestra el montaje de la barra S4.



*Figura 4.22 Montaje de la barra S4.*

En segundo lugar se realiza la pieza biempotrada, que corresponde con la barra S7. La barra viene ya diseñada con el sistema que simula el empotramiento, por lo que se debe quitar la pieza de presión inferior en V y fijar la barra S7 con los tornillos de sujeción a la zona inferior. Como se ve en la figura 4.23.

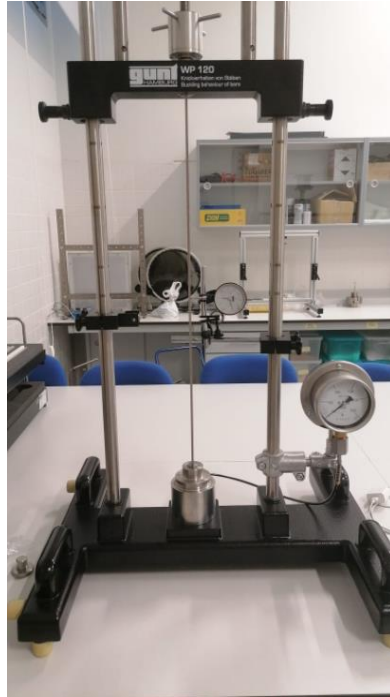


**Figura 4.23** Alojamiento inferior de la barra S7 que representa un empotramiento. En el alojamiento superior se usa una pieza corta para que la fuerza del torno superior sea aplicada, como se observa en la figura 4.24.



**Figura 4.24** Alojamiento superior de la barra S7 que representa un empotramiento.

Además el reloj comparador en este caso también está situado en mitad de la barra. (Figura 4.25)



**Figura 4.25** Montaje de la barra S7

Por último se realiza la barra S6, donde corresponde con el empotramiento-articulación. El empotramiento viene simulado en el alojamiento inferior, con el dispositivo mostrado en la Figura 4.5. Mientras que la articulación es en la zona superior con la entalladura en V. En reloj comparador se decide situar en el punto central. Como se observa en la figura 4.26.



**Figura 4.26** Montaje de la barra S6.

#### 4.3.2 Cálculos teóricos.

Puesto que se usan distintos métodos de sustentación, el factor clave en la fórmula de carga crítica de Euler es la variación del ajuste de coeficiente.

En la barra S4 se tiene un apoyo biarticulado, por lo que el factor de corrección en este caso es 1.

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I \quad (4.9)$$

En el caso de la barra S7 se hace biempotrada, por lo que no permite el giro tampoco y el factor de corrección es 0.5 que está elevado al cuadrado ya que:

$$Lk = \text{Factor de corrección} \cdot L$$

Para este caso la ecuación queda de la siguiente manera:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{0.25 \cdot L^2}$$

El último caso de este experimento es una barra cuyos extremos tienen una articulación y un empotramiento. Para este caso el factor de corrección es 0.7:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot I_y}{(0.7 \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot I_y}{0.49 \cdot L^2}$$

Una vez conocidas las fórmulas que hay que aplicar se procede a tener los datos necesarios para resolver la ecuación:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 4^3}{12} = 106.67 \text{ mm}^4$$

El módulo de elasticidad del acero es  $210 \cdot 10^3 \frac{N}{\text{mm}^2}$  y la longitud de la barra sin factor es 650 mm.

Esto hace que las soluciones teóricas de pandeo crítico sean:

- La barra S4:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67}{(650)^2} = 523.27 \text{ N}$$

- La barra S6:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{0.49 \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67}{0.49 \cdot (650)^2} = 1067.91 \text{ N}$$

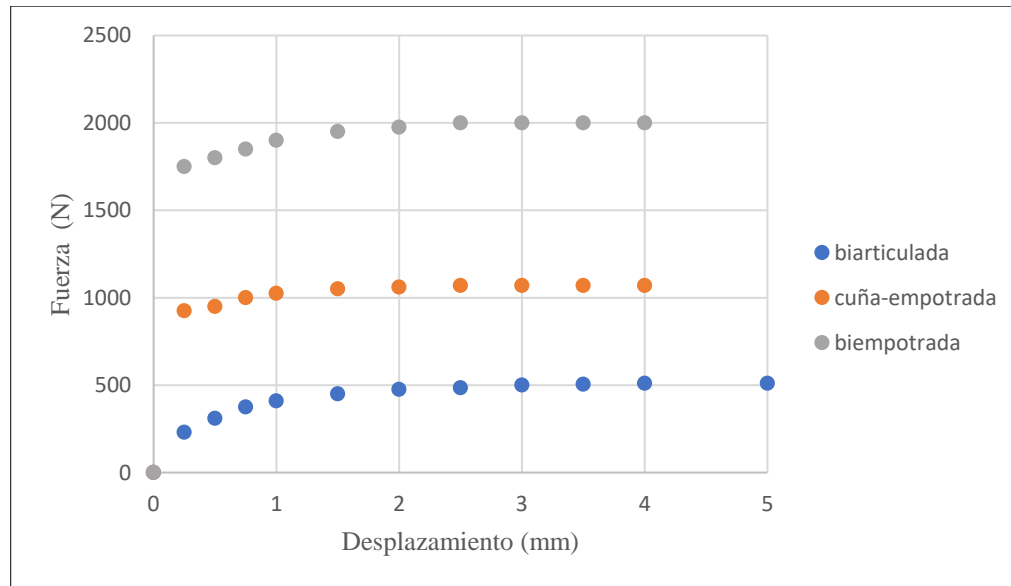
- La barra S7:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{0.25 \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67}{0.25 \cdot (650)^2} = 2093.13 \text{ N}$$

Como es previsible la mayor carga crítica de pandeo debe ser soportada por el caso biempotrado, es decir la barra S7. Esto es debido a las condiciones de apoyo haciendo que la longitud de pandeo sea más pequeña y por lo tanto la barra sea menos esbelta. La esbeltez es un factor crítico en el pandeo y reduciendolo es posible aumentar la carga crítica 4 veces más aproximadamente.

#### 4.3.3 Resultados experimentales.

En teoría, para el cálculo de vigas con distintas condiciones de sustentación se deben usar factores de corrección. Los valores teóricos están calculados en el apartado anterior y ahora queda comprobar la correlación con lo experimental. (Figura 4.27 y Figura 4.31)

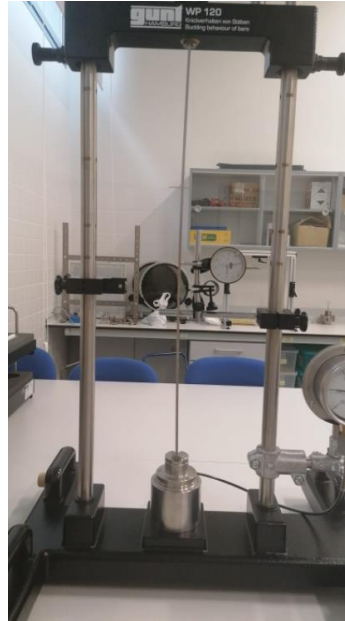


**Figura 4.27** Conjunto de muestras experimentales sobre la influencia de condiciones de apoyo.

Realmente, con una visual rápida se comprueba en primera estancia que los factores de corrección para los apoyos cumplen lo que realmente ocurre. En primer lugar, entre la viga biarticulada y la cuña-empotrada hay una diferencia de 2, por lo que el factor de sustentación que está elevado al cuadrado  $0.7^2=0.49$  cumple con la realidad. Siendo en la viga biarticulada la carga crítica de 510 N y en la de cuña-empotramiento 1070 N.

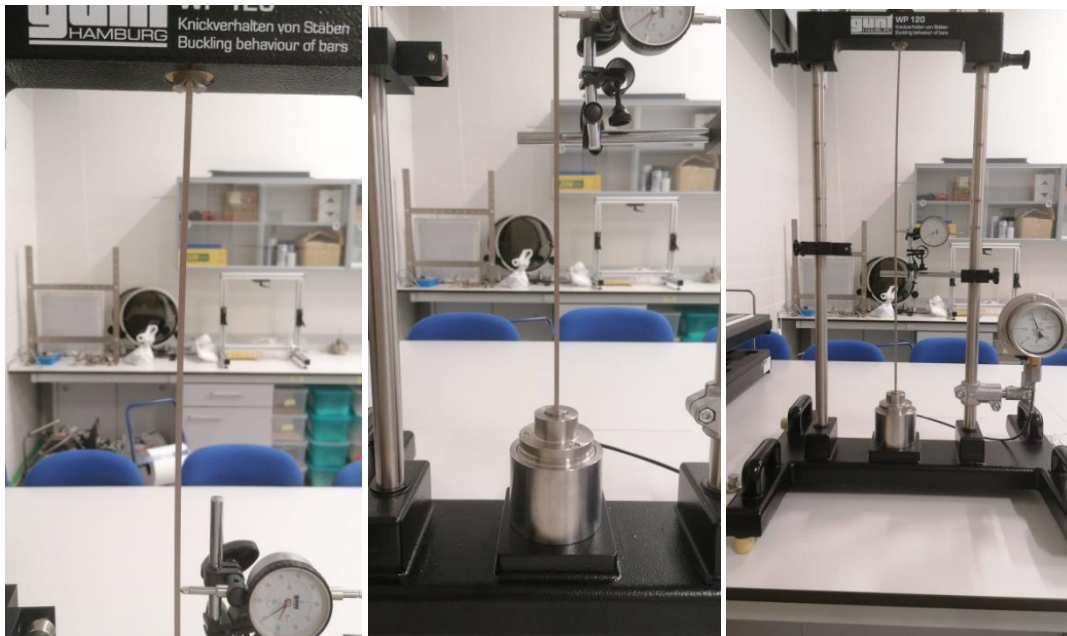
Por último la barra biempotrada tiene como carga crítica 4 veces más que la biarticulada, siendo esta carga de 2000 N. El factor de corrección es correcto.

Por otro lado, la realización de este experimento hace interesante ver la forma que aparece en las barras, por lo que se hace más visible la longitud de pandeo y los factores a que son debidos. En el experimento de la barra S4 es biarticulada y tiene de longitud de pandeo, la misma que la de la barra, por ello visualmente no se ve nada extraño. (Figura 4.28)

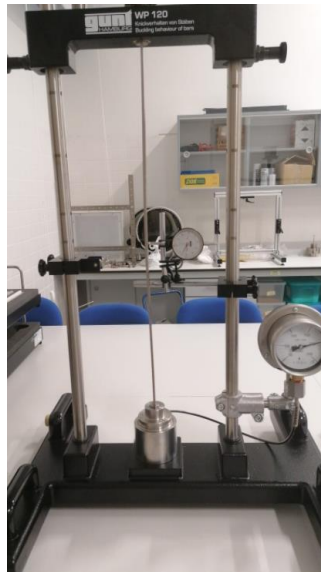


*Figura 4.28 Geometría deformada de la barra S4 para una carga de 510 N.*

Sobre el apoyo articulado, en este caso el superior la barra permite el giro, por lo que pandea y esa longitud se hace efectiva. En el apoyo empotrado inferior, al no permitir el giro, la barra no pandea en una zona de la longitud, haciendo así que la longitud de pandeo requiera de un factor. (Figura 4.29)

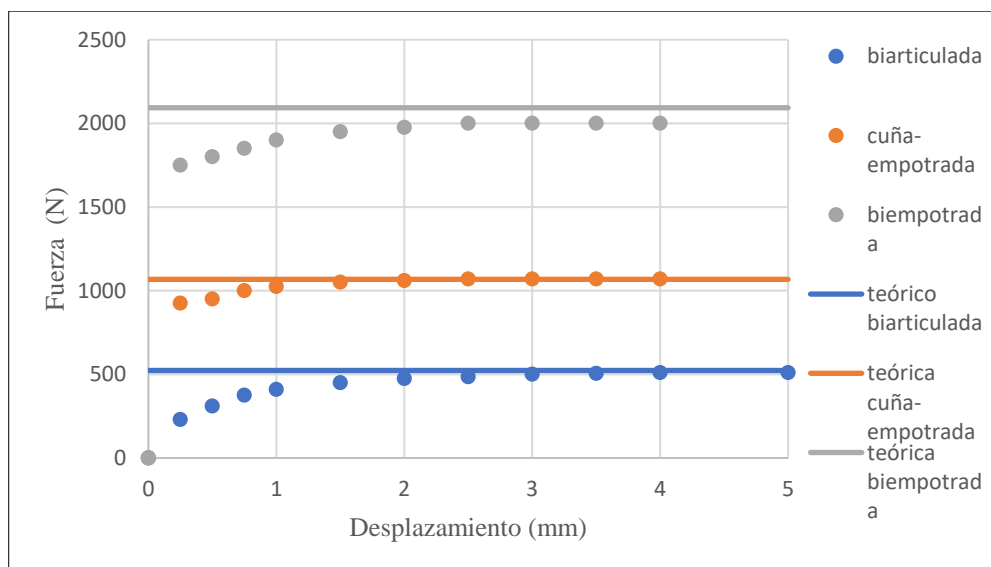


*Figura 4.29 Longitud de pandeo en barra S6.*



**Figura 4.30** Barra S7 sometida a pandeo.

Se observa como en las zonas de los apoyos, la barra permanece recta, haciendo así que la longitud de pandeo sea menor aún que en los casos anteriores. Esto provoca que sea menos esbelta si se cuanta la longitud de pandeo (debido a la reducción de la barra de manera efectiva). (Figura 4.30)



**Figura 4.31** Comparativa teórico experimental para barras con distinta sustentación.

#### 4.4 Ensayo 3. Influencia de la longitud.

##### 4.4.1 Descripción.

El ensayo 3 permite ver la influencia de la longitud en una barra con la misma sección, mismo material e igual forma de sustentación. Para este experimento se usan las barras S1, S2, S3 y S5. Lo único necesario para este experimento es mover el armazón superior sobre las barras guía, ajustando la longitud necesaria a la barra que se vaya a experimentar. La barra S1 es de 350 mm. (Fig. 4.32)



*Figura 4.32 Montaje de la barra S1.*

La barra S2 es de 500 mm. (Fig. 4.33)



*Figura 4.33 Montaje de la barra S2.*

La barra S3 es de 600 mm. (Fig. 4.34)



*Figura 4.34 Montaje de la barra S3.*

La barra S5 es de 700 mm. (Fig. 4.35)



*Figura 4.35 Montaje de la barra S5.*

Como hecho curioso de esta barra es que al ser tan esbelta, el reloj comparador hace que flecte de una manera mínima. Podría ser curioso para futuros experimentos el ver como actúa esta barra con cargas transversales y como disminuye su carga crítica de pandeo debido a este problema.

La sección de las barras es de 20 mm x 4mm, son biarticuladas y el material del que están constituidas es de acero.

#### 4.4.2 Cálculos teóricos.

Para la obtención de los valores de carga crítica en este ensayo se usa la fórmula de carga crítica de pandeo de Euler tal cual, ya que las condiciones de sustentación son las que usó el científico. La fórmula empleada en este caso es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{1 \cdot L^2} \quad (4.10)$$

La variación en este caso corresponde con el valor de L, siendo este el de cada barra y la inercia es la misma para todas:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 4^3}{12} = 106.67 \text{ mm}^4$$

- La barra S1 es de 350 mm.

$$P_{cr_1} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67 \text{ mm}^4}{(350)^2} = 1804.78 \text{ N}$$

- La barra S2 es de 500 mm.

$$P_{cr_2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67 \text{ mm}^4}{(500)^2} = 884.34 \text{ N}$$

- La barra S3 es de 600 mm.

$$P_{cr_3} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67 \text{ mm}^4}{(600)^2} = 614.13 \text{ N}$$

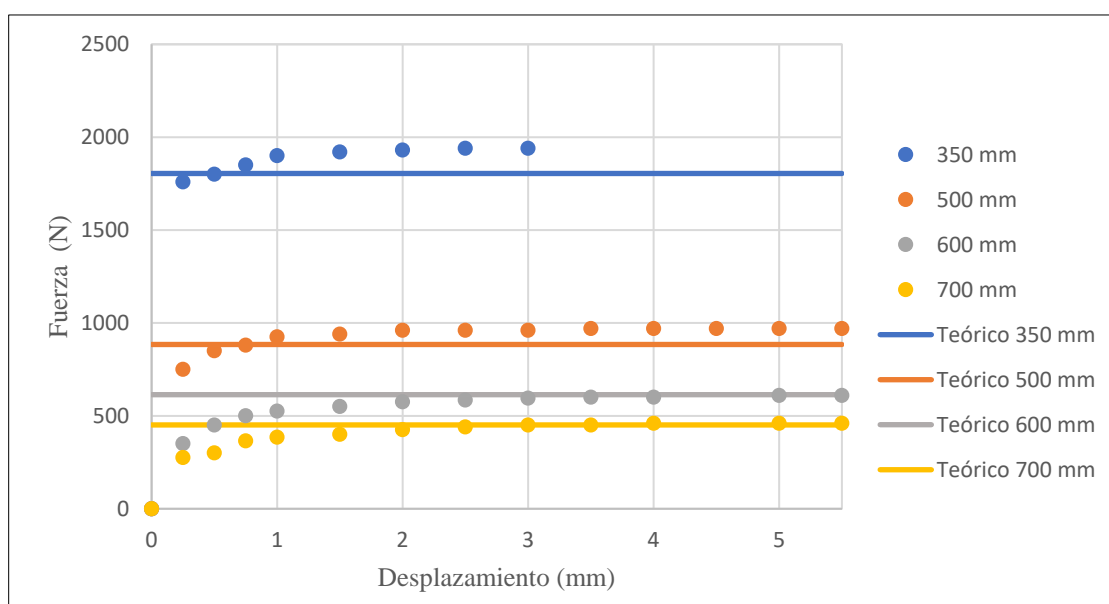
- La barra S5 es de 700 mm.

$$P_{cr_5} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 106.67 \text{ mm}^4}{(700)^2} = 451.20 \text{ N}$$

Debido a que la sección es la misma y el cambio viene en la longitud se observa que es un problema de la esbeltez mecánica de las barras. Cuanto más larga sea, al no aumentar también el grosor de la pieza se hace que disminuya la carga crítica a medida que aumenta la longitud. En teoría se disminuye hasta tres veces la carga crítica que puede soportar el barra 5 con respecto de la barra 1.

#### 4.4.3 Resultados experimentales.

En este experimento se ve claramente la influencia de la esbeltez mecánica de una barra. Los valores experimentales obtenidos son recogidos en la figura 4.36.



**Figura 4.36** Influencia de la longitud en la carga crítica.

En el caso de la barra más larga, es decir la barra S5 con 700 mm de longitud, el propio reloj de medición falsea un poco el valor obtenido, ya que actúa como si fuese una carga transversal mínima. A la hora de realizar el experimento, para comprobar que este efecto no provoca datos muy diferentes se trata de forzar la dirección de pandeo en el otro sentido, viendo que la barra tiende siempre hacia el mismo sentido se aplica con la mano una pequeña fuerza hacia el otro sentido. El dato de pandeo obtenido es prácticamente el mismo, siendo este de 450 N.

En cuanto a las otras barras la diferencia entre valores teóricos y experimentales es bastante distinta:

Barras	Teórico (N)	Experimental (N)	% Desviación
S1	1804,78	1940	7%
S2	884,34	970	9%
S3	614,13	610	-1%
S5	451,2	460	2%

*Tabla 4.6 Comparativa teórico-experimental.*

Lo óptimo para el aparato de medida es que la diferencia entre el valor teórico y el experimental sea menos de un 10%.

## 4.5 Ensayo 4. Influencia del material.

### 4.5.1 Descripción.

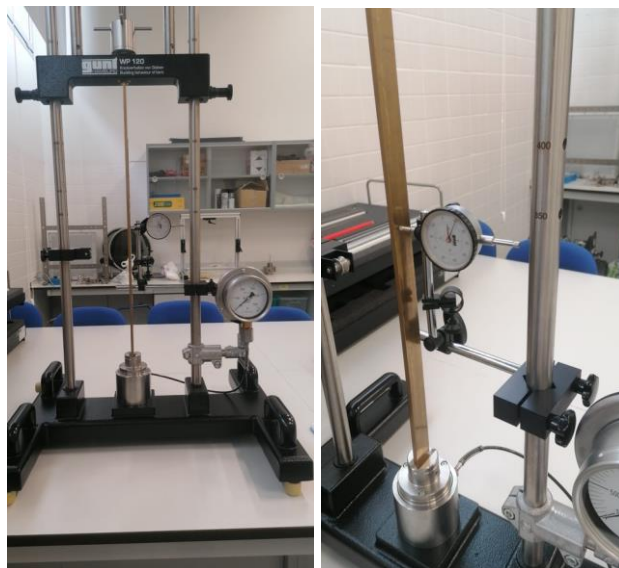
Este ensayo número 4 consiste en ver la influencia del material en la carga crítica de Euler. Tener un material diferente hace que varíe el módulo de elasticidad y por consiguiente la carga crítica será distinta. Las barras de las que se hace uso en este ensayo son:

- Barra S8 de aluminio. En este caso el módulo es  $70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  (Fig. 4.37)



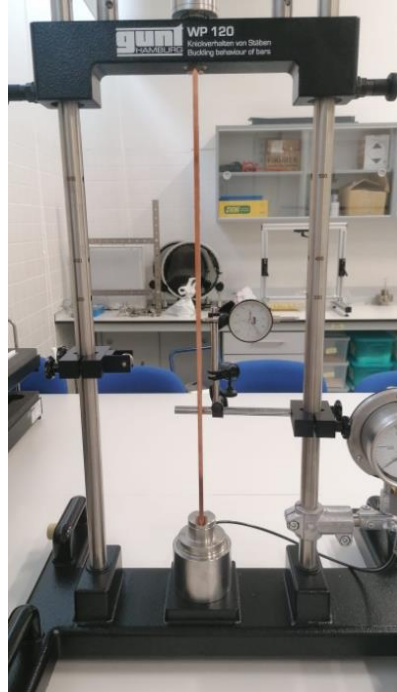
*Figura 4.37 Montaje de la barra S8.*

- Barra S9 de latón. El latón es de un color dorado y esto nos vale para diferenciarlo de las otras barras. En este caso el módulo es  $110 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  (Fig. 4.38).



*Figura 4.38 Montaje de la barra S9.*

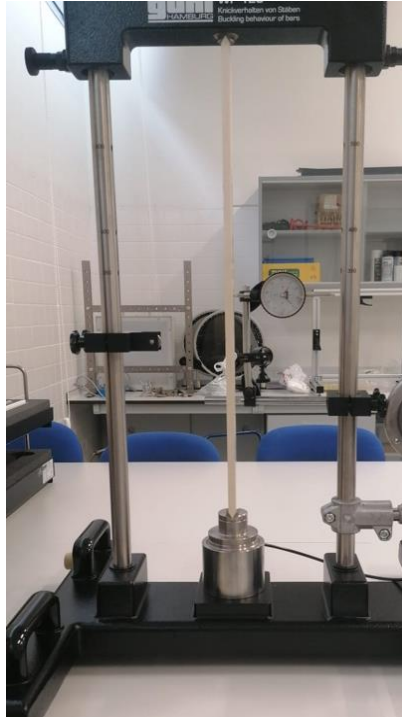
- Barra S10 de cobre. Para diferenciarla de las demás barras es importante saber que el cobre tiene un color rojizo bastante característico. En este caso el módulo es  $120 \text{ N/mm}^2$ . (Fig. 4.39)



**Figura 4.39** Montaje de la barra S10.

El reloj comparador está situado en el centro de la barra, ya que se usa una barra biarticulada. La sección es de  $25 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  y la longitud de la barra es de  $600 \text{ mm}$ .

Una vez acabada la primera parte del ensayo 4, se procede a pasar al segundo apartado. En este se tiene la barra S11, la cual no se tiene información del material del que está hecha. El objetivo es determinar el módulo  $E$  de la barra, viendo la carga crítica a la que llega y despejando de la fórmula de Euler. La barra es biarticulada, de una longitud de  $600 \text{ mm}$  y cuya sección es de  $25 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ . La figura 4.40 muestra la barra colocada para su experimentación.



**Figura 4.40** Montaje de la barra S11.

#### 4.5.2 Cálculos teóricos.

El material que se use en una barra es un factor determinante en la capacidad de estabilidad que tiene la misma. Es por ello que este experimento se hace necesario, mostrando así el poder que tiene este módulo de elasticidad. Las barras están hechas con los mismos datos de inercia, sección y condiciones de sustentación.

Como materiales usados están:

- Aluminio con módulo de elasticidad  $70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ .
- Latón con módulo de elasticidad  $110 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ .
- Cobre con módulo de elasticidad  $120 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ .

Puesto que el módulo de elasticidad ya es conocido, se procede a calcular el momento de inercia de las tres barras:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{25 \cdot 6^3}{12} = 450 \text{ mm}^4$$

Se procede al cálculo teórico de las tensiones:

- Carga crítica de pandeo de la barra S8:

$$P_{cr_8} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot 450}{(600)^2} = 863.59 \text{ N}$$

- Carga crítica de pandeo de la barra S9:

$$P_{cr_9} = \frac{\pi^2 \cdot 110 \cdot 10^3 \cdot 450}{(600)^2} = 1357.07 \text{ N}$$

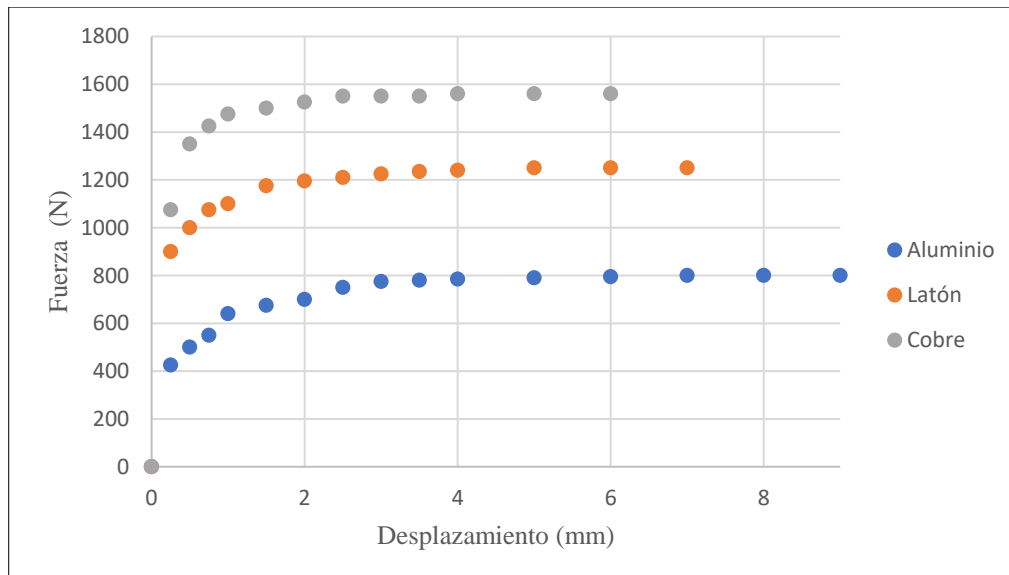
- Carga crítica de pandeo de la barra S10:

$$P_{cr_{10}} = \frac{\pi^2 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 450}{(600)^2} = 1480.44 \text{ N}$$

Como el valor del módulo E está en el numerador afecta de manera directa a la carga que soporta, por lo que cuanto mas elástico sea mayor carga es capaz de soportar.

#### 4.5.3 Resultados experimentales.

Las barras estudiadas de manera experimental son representadas en la Figura 4.41.



**Figura 4.41** Influencia del material en la carga crítica de pandeo.

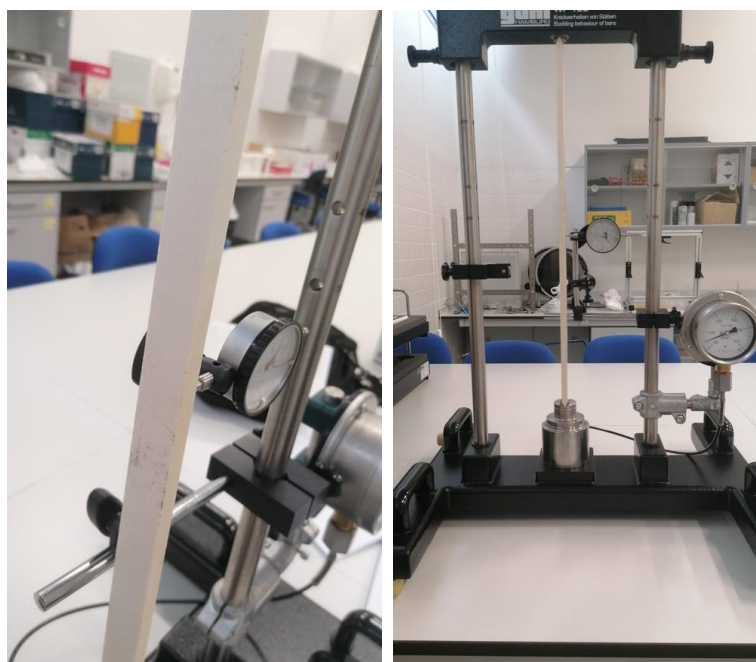
Observando la fórmula de Euler se puede tener un conocimiento del comportamiento de la carga crítica de pandeo con respecto al módulo de elasticidad.

Se observa experimentalmente que la hipótesis de que a mayor módulo de elasticidad se obtiene una carga mayor antes de que este pandee. Siendo el aluminio el material con menor módulo  $E$  se obtiene una carga crítica en torno a 800 N de carga. Es aproximadamente lo que se calculó en teoría, donde se obtuvo un valor de 860 N.

En el caso del latón se observa que la carga crítica de pandeo se alcanza en 1250 N, por lo que también es correcto con respecto a la teoría por su grado de acercamiento, ya que las barras están compuestas de una aleación de latón y el módulo  $E$  varía entre ciertos valores.

En último lugar se experimenta el cobre, siendo este el que mayor carga crítica de pandeo tiene con un valor de 1560 N. Se cumple por tanto con lo estudiado. El material también es una aleación de cobre, por lo que el módulo  $E$  no será exactamente el usado.

La segunda parte de este ensayo trata sobre la determinación del módulo  $E$  de una barra y la obtención del material. (Figura 4.42)



*Figura 4.42 Imagen de barra de módulo desconocido.*

Al realizar el estudio de esta barra se llega a la conclusión de que esta barra viene con una deformación permanente de fábrica. A la hora de realizar el ensayo y aplicar la fuerza de pandeo, esta siempre tiende a pandear en el mismo sentido, pese a intentar forzarla manualmente a que pandee en sentido opuesto.

Se considera realizar ensayos en las futuras prácticas de laboratorio para que los alumnos vean como es posible darse cuenta de si un experimento está realizandose correctamente o no y posteriormente hacer este mismo ensayo con otra barra que sea diseñada con una impresora 3D.

## 4.6 Ensayo 5. Influencia de la sección.

### 4.6.1 Descripción.

El experimento 5 trata sobre la influencia de la sección transversal sobre la carga crítica de pandeo. En este caso también se divide el experimento en dos secciones distintas. Una de ellas donde se modifique el ancho de la barra y otro donde se modifique el diámetro de la barra.

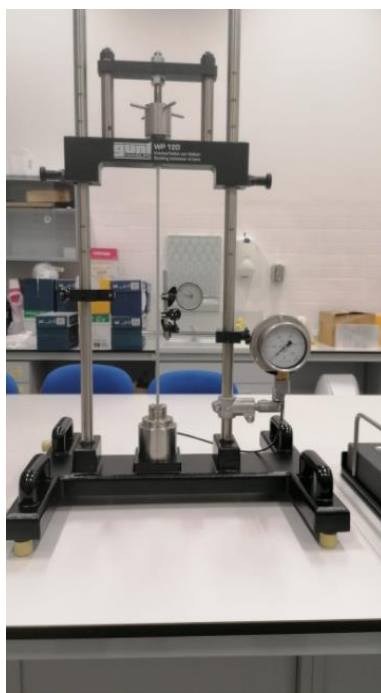
En el primero de los experimentos se usan las barras:

- SZ1 donde el ancho es 25 mm. (Fig 4.43)
- SZ4 donde el ancho es 40 mm. (Fig. 4.44).

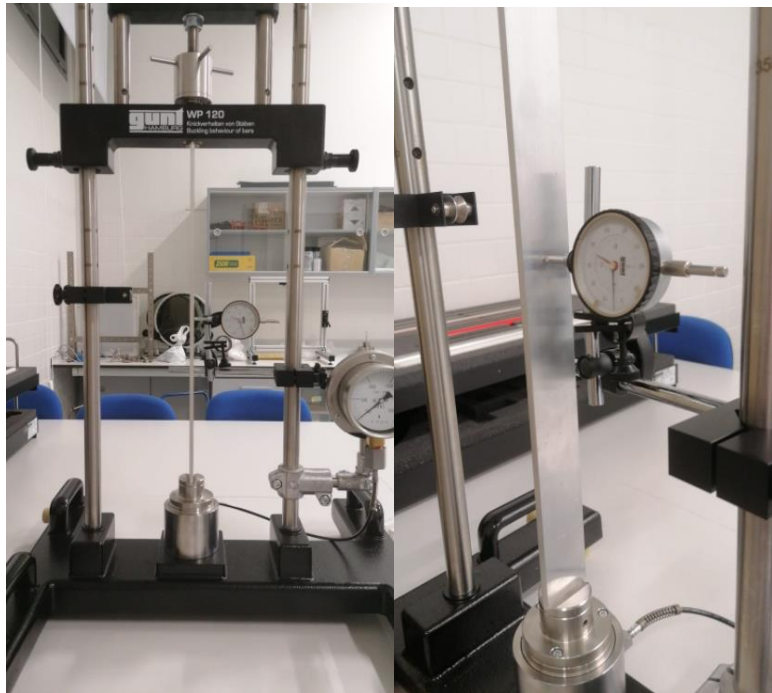
Para el segundo experimento se usan las barras:

- SZ6 tiene un diámetro de 16 mm. (Fig. 4.45).
- SZ7 tiene un diámetro de 20 mm. (Fig. 4.46).

Estos cambios hacen que se tenga una inercia distinta. Como en la fórmula de la carga crítica de pandeo de Euler esta se encuentra en el numerador y a su vez el ancho también está en el numerador, hace que el ancho actúe de manera directamente proporcional en el cálculo de la carga. Es decir, a mayor ancho, en teoría se debe necesitar una mayor fuerza aplicada para alcanzar el pandeo crítico.



**Figura 4.43** Montaje de la barra SZ1.



*Figura 4.44 Montaje de la barra SZ4.*

En el segundo caso al corresponder con una sección tubular hueco, la inercia cambia de fórmula, siendo esta la ecuación (4.11):

$$I_y = \frac{D^4 - d^4}{64} \cdot \pi \quad (4.11)$$

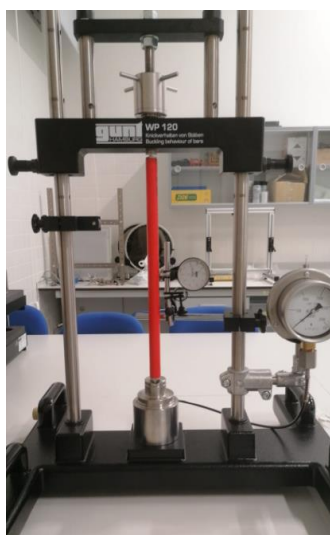
Puesto que en este caso la superficie de sección debe ser la misma para que sea una comparación lo más igualada posible y que lo único que cambia es el diámetro exterior e interior. Este se adapta para que el uso de material sea el mismo y así ver que una buena distribución del material hace que la carga de pandeo se eleve considerablemente.

Siendo en el tubo de 20 mm de diámetro 17 el diámetro interior y en el tubo de 16 mm de diámetro 12 mm el diámetro interior se va a comprobar cuál es la solución más eficiente para reorganizar el material.

Las barra tubulares son de PVC y una longitud de 400 mm. Son barras biarticuladas.



**Figura 4.45** Montaje de la barra SZ6.



**Figura 4.46** Montaje de la barra SZ7.

#### 4.6.2 Cálculos teóricos.

El ensayo en conjunto se basa en cambios en el momento de inercia para ver como se comporta la carga si esta varía, pero a su vez como se dice en la descripción se divide en dos.

El primero de los ensayos consiste en usar dos barras de distinto ancho, para así ver como afecta el ancho a la carga. Lo importante es ver el momento de inercia que tiene cada una.

En el primero de los experimentos se usan las barras:

- SZ1 donde el ancho es 25 mm.

El momento de inercia en este caso es:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{25 \cdot 6^3}{12} = 450 \text{ mm}^4$$

- SZ4 donde el ancho es 40 mm.

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 6^3}{12} = 720 \text{ mm}^4$$

Viendo la ecuación (4.10) de la carga crítica y sustituyendo la fórmula del momento de inercia en ella se aprecia que la b, que es correspondiente al ancho afecta de manera proporcional a la carga crítica. Por ello, si se divide 40 entre 25 sabemos cuantas veces mayor será la carga que soporte la barra SZ4 si es comparada con la barra SZ1. La diferencia será 1.6 veces.

Las cargas teóricas son:

- SZ1:

$$P_{cr_{Z1}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 6^3}{12 \cdot 500^2} = 1243.57 \text{ N}$$

- SZ4:

$$P_{cr_{Z4}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 6^3}{12 \cdot 500^2} = 1989.71 \text{ N}$$

Para el segundo experimento se usan las barras:

- SZ6 tiene un diámetro de 16 mm con un diámetro interior de 12 mm.
- SZ7 tiene un diámetro de 20 mm con un diámetro interior de 17 mm.

Como el módulo E del PVC puede variar entre 2.41 y 4.14 kN/mm<sup>2</sup> se decide aplicar el intervalo en el que se debería encontrar el valor experimental.

La inercia en este caso cambia de fórmula al tratarse de una sección tubular hueca. Las inercias de cada uno de los tubos y la carga que soportan son:

- SZ6:

$$I_y = \frac{D^4 - d^4}{64} \cdot \pi = \frac{16^4 - 12^4}{64} \cdot \pi = 700\pi \text{ mm}^4$$

$$P_{cr_{Z6}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.41 \cdot 10^3 \cdot 700\pi \text{ mm}^4}{(500)^2} = 209.24 \text{ N}$$

$$P_{cr_{Z6}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 4.14 \cdot 10^3 \cdot 700\pi \text{ mm}^4}{(500)^2} = 359.43 \text{ N}$$

- SZ7:

$$I_y = \frac{D^4 - d^4}{64} \cdot \pi = \frac{20^4 - 17^4}{64} \cdot \pi = 1194.98\pi \text{ mm}^4$$

$$P_{cr_{Z7}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2.41 \cdot 10^3 \cdot 1194.98\pi \text{ mm}^4}{(500)^2} = 357.19 \text{ N}$$

$$P_{cr_{Z7}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 4.14 \cdot 10^3 \cdot 1194.98\pi \text{ mm}^4}{(500)^2} = 613.59 \text{ N}$$

En este caso se ve como la sección tubular de mayor hueca de mayor diámetro puede soportar más carga crítica. A pesar de tener la misma cantidad de material, una mejor organización de este puede ayudar a que la carga aumente de una manera considerable.

Acerca de la desviación en la carga crítica se tiene la ecuación (4.12):

$$\frac{\left(\sigma_p - \frac{N}{A}\right) \cdot I_y}{P \cdot z_{m\acute{a}x}} = \text{flecha} \quad (4.12)$$

Siendo el límite de estabilidad del aluminio de 110 N/mm<sup>2</sup>.

$$\frac{\left(110 - \frac{1250}{25 \cdot 6}\right) \cdot 450}{1250 \cdot 3} = 13.1 \text{ mm}$$

Y en SZ4:

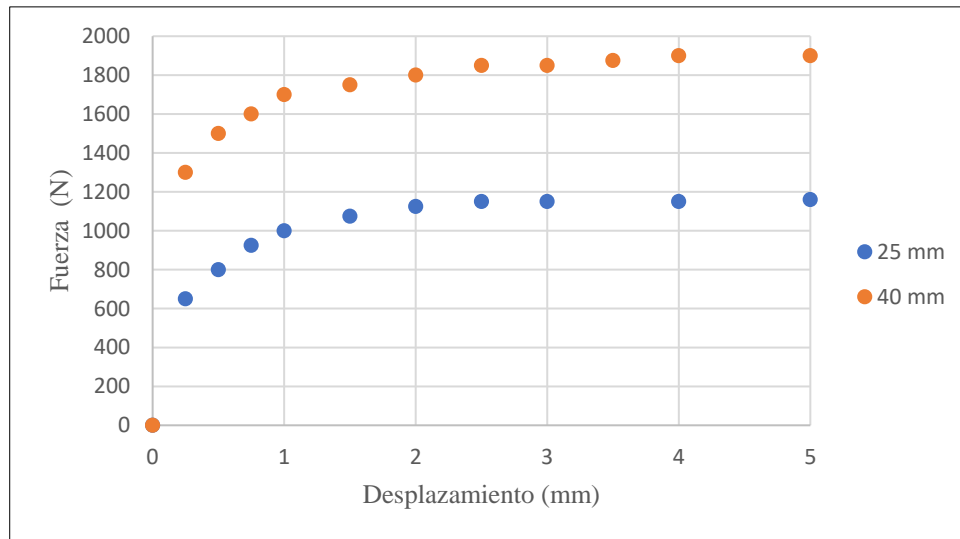
$$\frac{\left(110 - \frac{1250}{40 \cdot 6}\right) \cdot 720}{1250 \cdot 3} = 20.12 \text{ mm}$$

Se medirá hasta 5 mm para que haya margen suficiente para que no afecte a la barra.

#### 4.6.3 Resultados experimentales.

La parte 1 de este experimento comienza con la variación del ancho de una sección rectangular. Esta consideración aumenta la inercia del elemento y por consiguiente la fuerza de pandeo crítica es mayor cuanto más inercia.

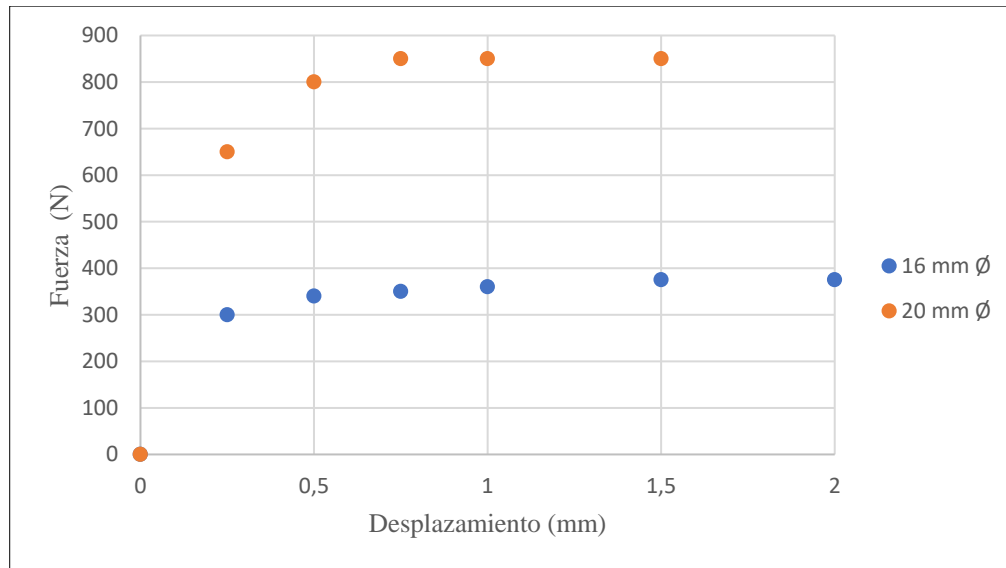
Se diferencian dos barras de 25 mm de ancho y 50 mm de ancho y estos son los datos experimentales obtenidos (Figura 4.47):



**Figura 4.47** Influencia del ancho en la carga crítica de pandeo.

Efectivamente se hace visible el efecto de la diferencia de ancho en una barra. Se alcanza alrededor de 1200 N en los 25 mm de ancho y sobre 1900 N en el caso de 40 mm de ancho. Teóricamente se debe alcanzar un poco más en los dos casos, pero como se habla en el apartado de pandeo real es debido a las consideraciones ideales que se hacen. El uso de más material lo que hace es aumentar la inercia que aumenta proporcionalmente el valor de la carga. Esto nos indica que está bien considerado en la fórmula y concuerda con la experiencia.

En el segundo caso se tienen las dos secciones tubulares y la gráfica con los datos obtenidos es la siguiente (Figura 4.48):



**Figura 4.48** Influencia del diámetro en la carga crítica de pandeo.

Estas dos barras tienen la peculiaridad de que son exactamente iguales en peso, longitud, la superficie de sección y la diferencia es los diámetros de cada una de ellas. En la barra de mayor diámetro se reduce el diámetro interior a 17 mm y en la barra de menor diámetro se reduce a 12 mm de diámetro interior. Es decir es más grueso en el caso de la menor. Esto puede hacer pensar que la menor sea la que va a conseguir un mayor soporte, no siendo esto así. La ordenación en el fenómeno de pandeo es esencial para aprovechar mejor el material que se tiene y ahorrar lo máximo posible.

Al igual que en el caso anterior aumentando el momento de inercia lo que se hace es aumentar consigo la carga crítica de pandeo. Con una mala ordenación se reduce en 2.26 la carga experimental desde el de 20 mm de diámetro al de 16 mm de diámetro.

La concordancia entre teórico y experimental es bastante cercana, aunque en este caso la teórico ha sido superado por lo experimental.

## 4.7 Ensayo 6. Influencia de excentricidades.

### 4.7.1 Descripción.

El ensayo número 6 prueba el efecto de las excentricidades en una barra. Para ello usa las barras SZ1, SZ2 Y SZ3.

- SZ1 no tiene excentricidad.
- SZ2 tiene una excentricidad de 1 mm. (Fig. 4.49)



**Figura 4.49** Excentricidad de la barra SZ2.

- SZ3 tiene una excentricidad de 3 mm. (Fig. 4.50).



*Figura 4.50 Excentricidad de la barra SZ3.*

En las barras que hay excentricidad, aunque esta sea mínima hará que pende siempre en un mismo sentido. Además en la parte experimental se realiza una gráfica con las tres experiencias para ver de una manera más visual como afecta esta excentricidad.

Las barras son de biarticuladas, de aluminio, con una sección de 25 mm x 6 mm y de 500 mm de longitud.

#### 4.7.2 Cálculos teóricos.

En apartados anteriores se realizó el estudio de como afecta las excentricidades en una barra, llegándose a la conclusión de que teóricamente la excentricidad era un problema para la estabilidad, pues sin ella se obtiene una mayor carga crítica de pandeo que sin su aparición.

Para estudiar como de grave puede ser este problema se realiza este experimento, viendo si puede llegar a ser un problema crítico. Se usan 3 barras que tienen las mismas características mecánicas, es decir mismo material misma sección mismo momento de inercia.

En este caso, como se puede calcular primero el caso ideal en que no haya ninguna excentricidad con la fórmula de Euler se va a ver el caso más favorable y la flecha que este produce. Sabiendo esto, ya se pueden tener unos parámetros para estudiar las barras con excentricidades, minorando levemente el efecto de las cargas en función de la excentricidad que se tenga.

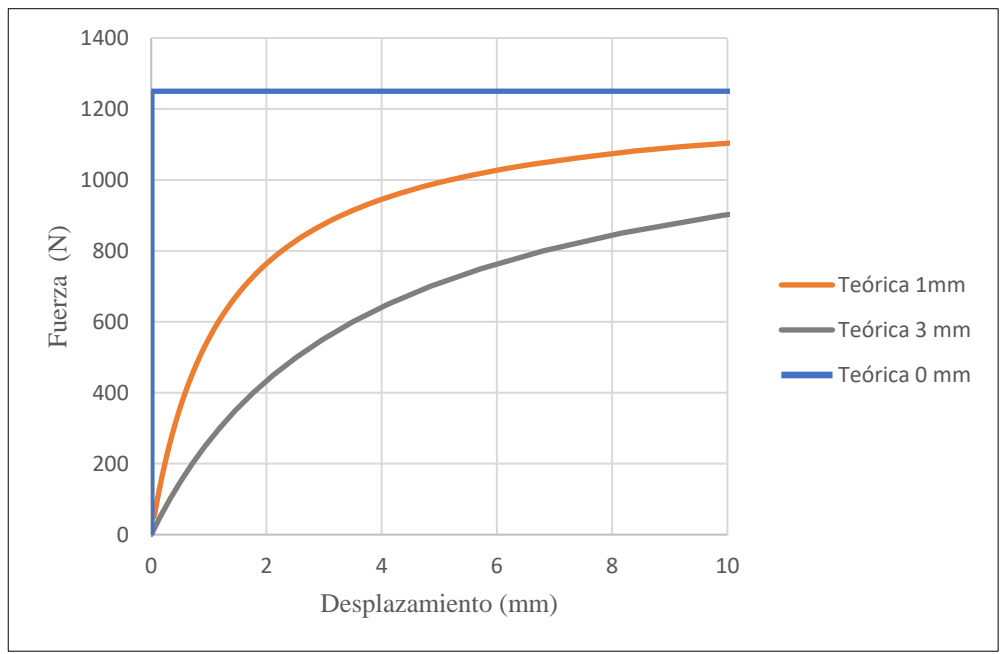
La carga crítica de pandeo ocurre en el valor de:

$$P_{cr_{z1}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 6^3}{12 \cdot 500^2} = 1250 \text{ N}$$

El efecto de la excentricidad viene representado por la ecuación (4.13):

$$z(x) = \delta \cdot \left( \frac{1}{\cos(k \cdot \frac{l}{2})} - 1 \right) \quad (4.13)$$

Realizando esta ecuación en Excel y representándola gráficamente en la figura 4.51, se observa los caso de 0 mm, 1 mm y 3 mm.



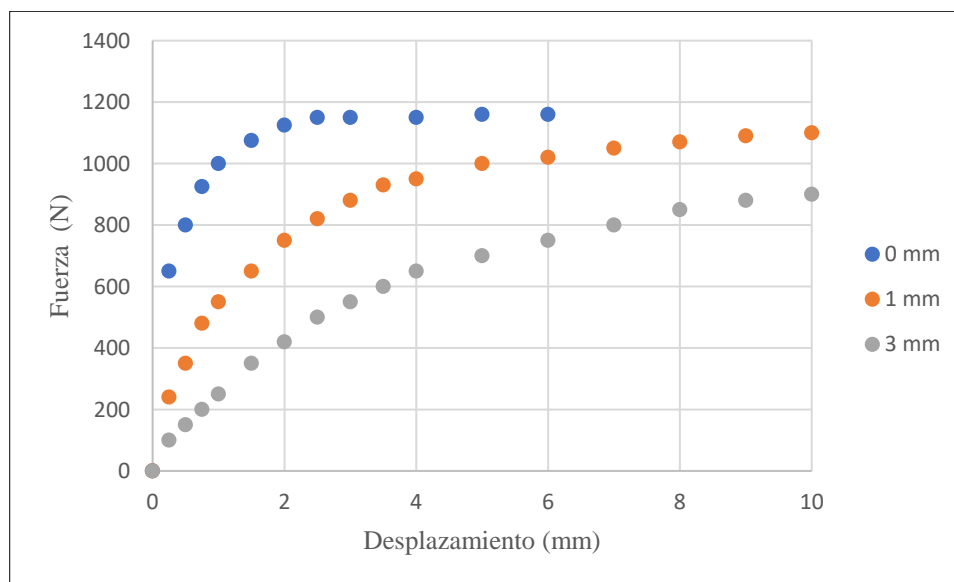
**Figura 4.51** Fuerza con respecto a desplazamiento en barras excéntricas.

Se observa en esta gráfica que teóricamente las barras con excentricidad tienen un comportamiento asintótico. Es por ello que para comprobar los elementos de manera experimental se debe saber cómo se comporta la barra ideal, sabiendo sus parámetros límite y minorando las cargas aplicadas.

En este experimento, de manera teórica no se puede observar un límite de carga crítico determinado. Lo que se tratará de ver es que el comportamiento de la excentricidad describa una curva parecida a la teórica.

#### 4.7.3 Resultados experimentales.

En el caso de la excentricidad se hace interesante ver el efecto de esta en el mismo apoyo. Conforme la excentricidad va aumentando en la barra cada vez es menor el punto inicial donde la barra comienza a flexionar, además de que el sentido de pandeo está determinado por el lugar donde esté la excentricidad. Siempre flexiona en el mismo sentido si una desviación de la barra existe. En la figura 4.52 se obtienen los resultados experimentales.



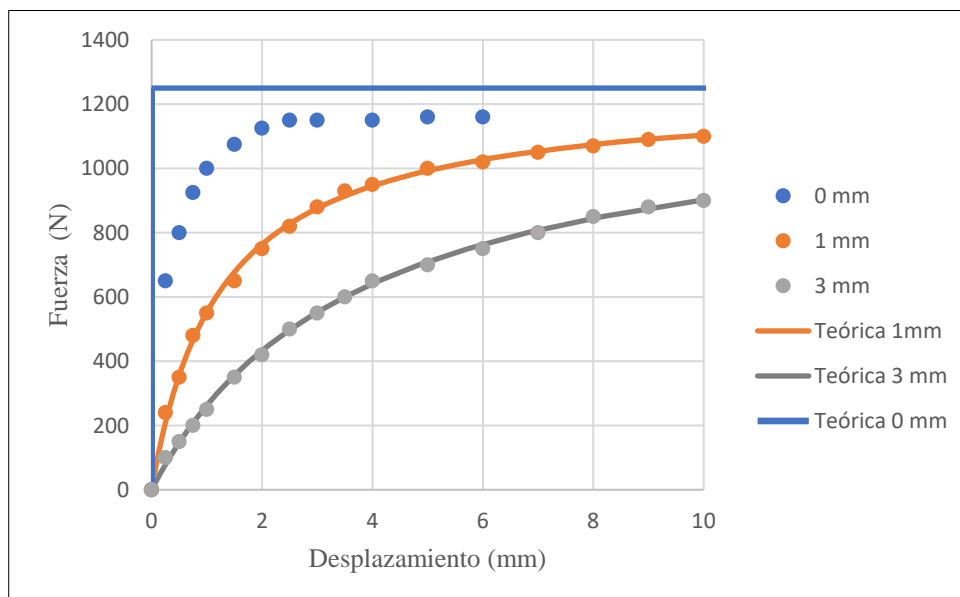
**Figura 4.52** Comportamiento experimental sobre la influencia de la excentricidad.

La barra SZ1 que no es excéntrica tiene un valor estable sobre 1200 N, cuando debería ser de 1250 N según Euler. En el caso de 1 mm de excentricidad se estabiliza alrededor de 1100 N, haciendo que la diferencia de un único milímetro de excentricidad se de 100 N en la carga crítica de pandeo.

En el caso de 3 mm no se llega a estabilizar la carga crítica de pandeo y para no dañar la barra se decide parar el ensayo en 10 mm. Aunque no se alcance este valor estable deja la enseñanza de que se disminuye considerablemente esta capacidad de soporte y que con una excentricidad de mm se penaliza bastante la barra.

La excentricidad en la realidad llega a ser un factor casi inevitable, ya que es imposible que una columna sea diseñada casi idealmente, es por ello que se debe considerar un factor de seguridad en la realidad y tener en cuenta como actúa la carga crítica con excentricidades.

Juntando los valores experimentales y los teóricos obtenidos se grafica la siguiente figura 4.53:



**Figura 4.53** Comparativa de valores teóricos y experimentales de barras excéntricas.

Los resultados tienen un grado muy alto de semejanza con lo que teóricamente se debería obtener, esto indica que las barras están en perfecto estado para la realización de experimentos futuros y la concordancia con lo estudiado se cumple.

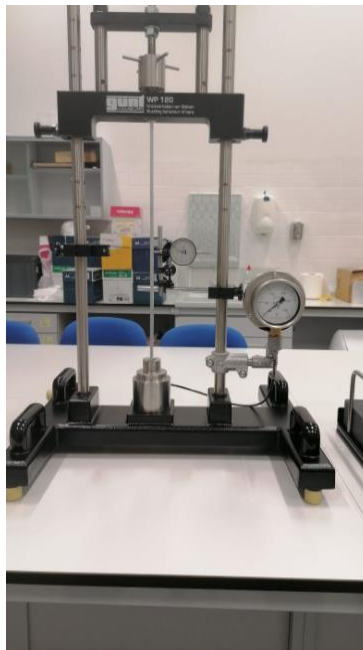
## 4.8 Ensayo 7. Influencia de cargas transversales.

### 4.8.1 Descripción.

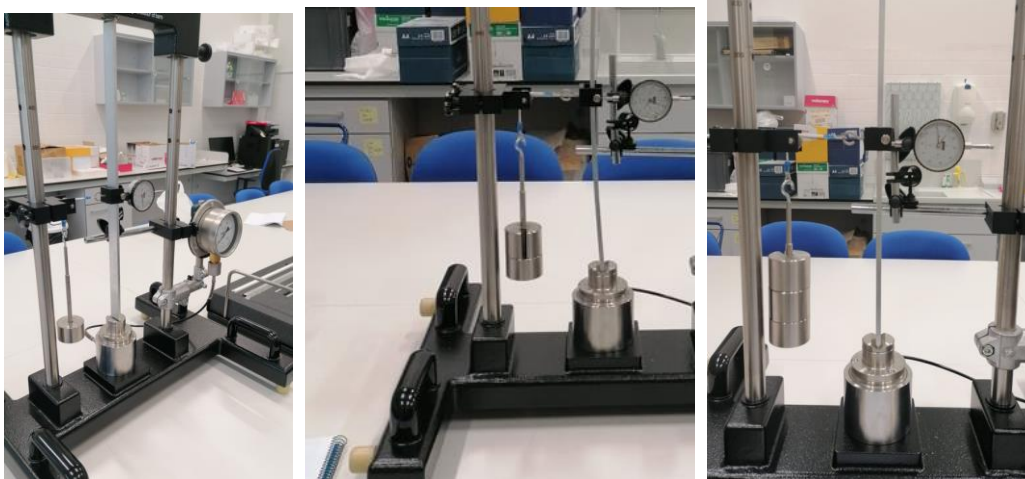
El último ensayo realizado hace uso del dispositivo de carga transversal, pues se dispondrán pesas simulando estas fuerzas transversales. La metodología usada será ir de 0 N hasta 20 N subiendo la carga en intervalos de 5 N. Se aprecia en las figuras 4.54, figura 4.45 y figura 4.56.

Puesto que antes de aplicar la fuerza compresiva ya actúa la carga de las pesas, lo normal es que si esta es suficiente hace que la barra en el comiendo del experimento ya cuente con una deformación. Esto provoca que a la hora de realizar los diagramas se tenga que poner que el experimento no empieza siempre en desviación 0. Hay que medir el efecto de las cargas y ese será el nuevo eje para cada barra.

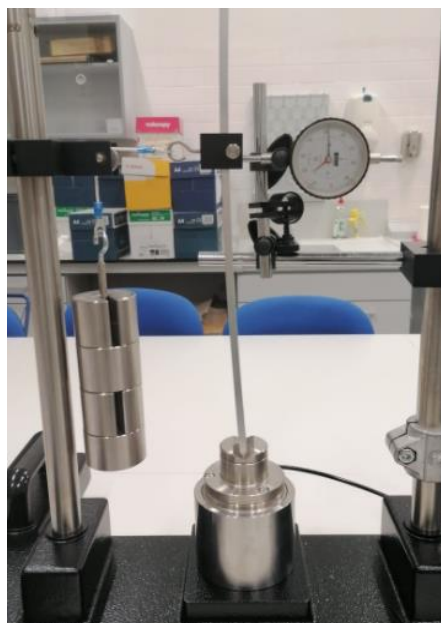
La barra usada para este experimento es la SZ1 de las que ya se conocen las características del ensayo 6 de excentricidades.



*Figura 4.54 Montaje barra SZ1 con 0 Newton de carga transversal.*



*Figura 4.55 Montaje SZ1 (izquierda) Barra con 5 N, (centro) barra con 10 N, (derecha) barra con 15 N.*



*Figura 4.56 Montaje barra SZ1 con 20 Newton de carga transversal.*

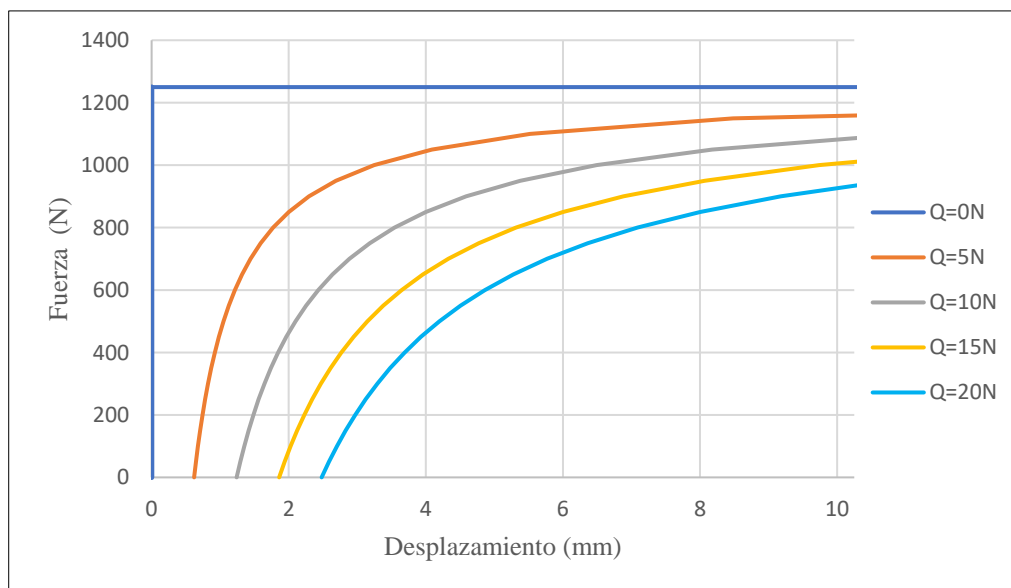
#### 4.8.2 Cálculos teóricos.

Una carga transversal provoca una deflexión en la barra inicial. Esta deflexión depende de la fuerza aplicada y hace que se reduzca la carga crítica de pandeo. Ayudando a que esta se doble.

Para el cálculo teórico de los casos que se van a estudiar de usa la ecuación 4.14 , que representa el estudio teórico de la acción de esta carga transversal en el centro de la barra:

$$z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q \cdot L}{4 \cdot F} \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{(k \cdot L)}{2}\right)} - 1 \right) \quad (4.14)$$

Sustituyendo los valores que se emplean en el experimento se busca el valor que teóricamente se debería obtener cuando se realicen los ensayos y son graficados en la figura 4.57:



**Figura 4.57** Comportamiento teórico de las barras a experimentar.

El punto de carga crítica de pandeo de la barra sin ninguna carga es de 1250 Newton, siendo este el mayor posible para esta barra. En los demás casos se produce una bajada de soporte con respecto al caso de 0 N. El comportamiento de los demás casos es asintótico y trata de acercarse a 1250 N.

Para saber cuál es la desviación máxima de la barra SZ1 se usa la ecuación (4.15):

$$\frac{\left(\sigma_p - \frac{N}{A}\right) \cdot I_y}{P \cdot z_{m\acute{a}x}} = flecha \quad (4.15)$$

Siendo el límite de estabilidad del aluminio de 110 N/mm<sup>2</sup>.

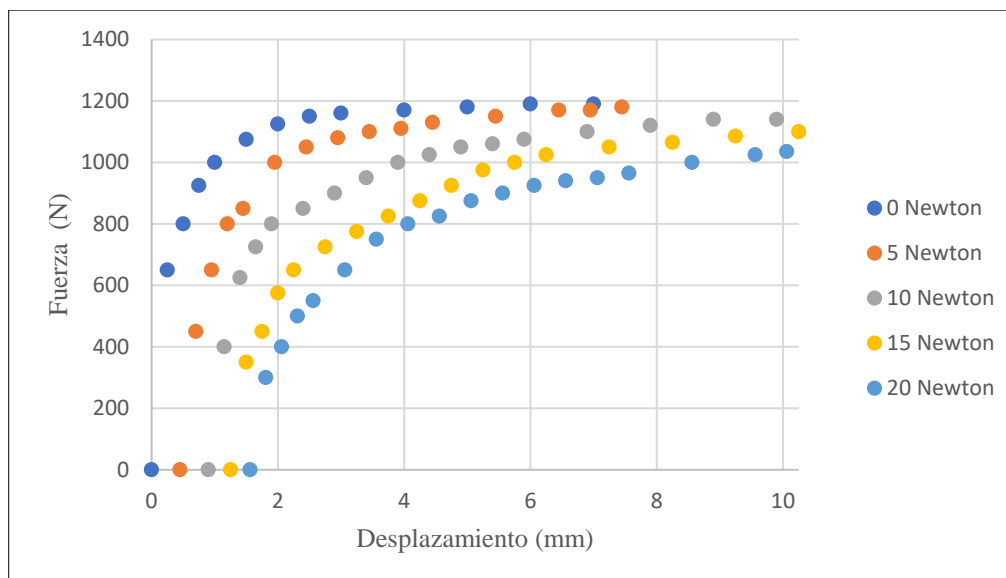
$$\frac{\left(110 - \frac{1250}{25 \cdot 6}\right) \cdot 450}{1250 \cdot 3} = 13.1 \text{ mm}$$

Por lo que ese será el límite que no se puede sobrepasar para que la barra no plastifique.

#### 4.8.3 Resultados experimentales.

De manera experimental se realiza el estudio con la barra SZ1, yendo de menor carga a mayor carga y realizando comprobaciones del ensayo de la barra para comprobar que no se ha producido ninguna falla en ella que provoque una desviación de permanente. La comprobación es realizar el ensayo con la barra sin carga hacia cada uno de los posibles sentidos de pandeo y que la desviación entre ellos no sea mayor de un 10 %.

Una vez recopilados los datos se hace la siguiente gráfica, que nos proporciona una visión general de lo ocurrido en el experimento. La dispersión de datos obtenidos está graficada en la figura 4.58:



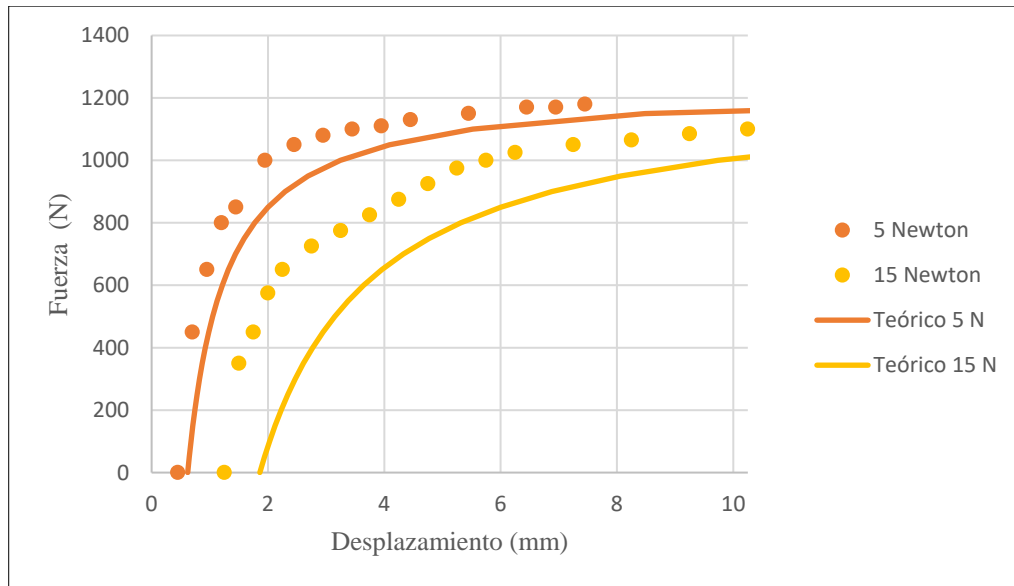
**Figura 4.58** Comportamiento experimental de influencia de cargas transversales.

Se cumple el hecho de que los efectos de la carga transversal provocan cierta desviación, no llegando a superarse el valor de 2 mm como parece verse en el experimento de 20 N.

Como visión general, también es reseñable que a mayor carga se disminuye la capacidad de carga de la misma barra. Aunque en el mismo caso de la propia barra sin carga se ve que hay variación entre el comportamiento real y el teórico. Teóricamente la barra debe soportar unos 1250 N de carga crítica de pandeo, pero en el laboratorio se consiguen uno 2000 N aproximadamente. No es una diferencia muy grande, pero se comprueba que se debe usar un coeficiente de seguridad en la realidad.

En el caso de 15 N y 20 N no se llega a estabilizar, no pudiendo tener así una carga crítica de pandeo para estos casos. Se intuye que en un valor cercano a los medidos se llega a esa carga. Como valor final de carga y cercano a la crítica de pandeo se tienen 1100 N y 1035 N respectivamente.

En el caso de 0 N, 5 N y 10 N las cargas críticas de pandeo son 1190 N, 1180 N y 1140 N. Se realiza una comparación en las cargas de 5 N y 15 N con respecto a los valores teóricos y se tiene la figura 5.59:



**Figura 4.59** Comparativa de teórico-experimental en los casos de 5 N y 15 N.

En este caso se observa que la deformación provocada por la carga transversal produce una deformación menor de la que era previsible que ocurriese de manera teórica. Se llega a la conclusión de que la barra estudiada tiene una deformación inicial, que puede ser por un fallo de fabricación. Para comprobarlo se debe de realizar el experimento de nuevo girando la barra 180° y fijándose en el valor de deformación inicial que aparece en el reloj medidor.

## 5 CONCLUSIONES.

Un TFG realizado mediante un estudio teórico-experimental permite contrastar la información estudiada, dando así un plus a la afirmación de esa teoría. Aumentando así la toma de decisiones y revisando desde la experiencia el tema tratado.

Tras realizar los estudios experimentales con el equipo Gunt WP-120 sería adecuado mencionar algunos detalles que se han ido observando durante los ensayos:

En el **ensayo 1** (ensayo de prueba) la barra S2 tiene una disparidad entre el resultado teórico y experimental. Es por ello que se decide comprobar el estado de la barra realizando el ensayo en los dos sentidos de pandeo posibles. Tras esto, al coincidir los datos de los dos ensayos se disipan las dudas de que la barra tenga una falla.

De este mismo ensayo 1 se realiza el cálculo según normativa, del que se observa de manera sorprendente que el axil seguro para la barra S2 corresponde con 726.4 N, siendo una cifra muy cercana al valor en el que comienza a mostrar los primeros signos de pandeo, en torno a los 0.25 mm de desplazamiento con una fuerza aplicada de 750 N.

En el **ensayo 2** (tipos de sustentación) se observa claramente el efecto del tipo de apoyos de cada barra, llegando a multiplicar por 4 veces la carga crítica entre una barra biarticulada y una biempotrada. Los valores experimentales y los teóricos son bastante similares en los tres casos estudiado, por lo que se puede mencionar que este experimento ha sido realizado con éxito.

En el laboratorio es interesante realizar este experimento para ver la longitud efectiva de pandeo según la sustentación. Viendo así en los empotramientos que la barra no permite el giro, mientras que en las articulaciones el giro si se produce. Se observa la barra totalmente rígida en los empotramientos, disminuyendo así la longitud crítica y esto en la teoría se refleja en el factor de corrección.

Sobre el **ensayo 3** (influencia de longitud) hay una influencia de la esbeltez mecánica en la carga crítica de pandeo. La coherencia entre los ensayos experimentales y el valor teórico es aceptable, por lo que el ensayo es correcto.

Como hecho reseñable se debe decir que en la barra de mayor longitud, nombrada como S5 se aprecia a la hora de realizar las mediciones que pese a que la fuerza aplicada por el reloj comparador es muy pequeña, este esfuerzo provoca una minúscula desviación en la barra, tendiendo así a pandear siempre en el mismo sentido. Aunque se trate de forzar la barra con una pequeña fuerza manual en el otro sentido, al dejar de aplicar la fuerza manual esta vuelve al sentido inicial que propone el reloj comparador. Es por ello que para futuros experimentos se experimente el efecto de cargas transversales en esta barra.

El **ensayo 4** (influencia del material) se diferencian subapartados, en el primero se experimenta con cobre, aluminio y latón. Pudiendo afirmar que el cobre es el elemento que mas carga crítica puede soportar, mientras que el aluminio por su lado es el que menos carga soporta. La comparativa entre los datos experimentales y los teóricos son correctos, debido al grado de acercamiento entre ellos.

En el segundo subapartado se trata de averiguar aplicando la teoría estudiada el módulo de elasticidad de la barra S11. Puesto que en la experimentación esta barra tiende siempre a pandear en el mismo sentido se detecta una posible falla, llegando a la conclusión de que este elemento viene con un fallo de fábrica. Para suplir este experimente se aconseja crear una barra nueva mediante impresión 3D y volver a realizar el experimento.

Del **ensayo 5** (influencia de la sección transversal) es interesante ver como una buena ordenación del material provoca un aumento de carga crítica. En el caso de las secciones tubulares el material usado es el mismo, aunque está diseñado para que se obtenga una mayor inercia, haciendo el material esté más alejado del eje central. Se consigue duplicar el valor de carga que soporta únicamente variando la inercia. Esto permite un ahorro económico si se aplica a grandes estructuras.

El **ensayo 6** (influencia de excentricidades) coinciden casi a la perfección el estudio teórico y experimental. En laboratorio es útil ver como afecta la excentricidad en las barras y conocer que cualquier elemento no es perfectamente recto. Por lo que se debe ser consciente de cómo actúa esta falla. Cuando una barra tiene este defecto el pandeo se realiza en ese mismo sentido, por lo que se puede detectar mejor que si por ejemplo existiese una grieta interna.

En el laboratorio no se llega a estabilizar la carga, por lo que no se puede llegar a un valor de carga crítica de pandeo en cualquiera de las dos excentricidades. Pero por seguridad e integridad de la barra se decide parar el experimento a los 10 mm de desplazamiento.

Por último, el **ensayo 7** (influencia de cargas transversales) donde la aplicación de estas cargas afecta negativamente a la capacidad de carga de la barra. Si se hace una comparación entre los valores teóricos y los experimentales la carga crítica final a la que llegan tiene coherencia entre lo estudiado y lo probado en laboratorio. Sin embargo, se observa que la deformación provocada por la carga transversal produce una deformación menor de la que era previsible que ocurriese de manera teórica. Se llega a la conclusión de que la barra estudiada tiene una deformación inicial, que puede ser por un fallo de fabricación.

La idea de este proyecto se ha basado en la coordinación de experimentación y fundamento teórico que proporciona una idea más visual sobre el estudio del pandeo. Esto ha supuesto para el estudiante el entendimiento desde una manera más práctica, haciendo así más simple su entendimiento. La fortuna de poder contar con esta clase de equipos en nuestra universidad proporciona una motivación extra para el estudiantado, ya que permiten observar fenómenos e interpretarlos, ayudando así a comprender los conceptos estudiado y a seguir una metodología en el manejo de ciertos equipos. Además fuerza al alumno a tomar decisiones y tener un pensamiento crítico acerca de lo que se está observando, llevando así a tomar ciertas acciones.

## 6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Timoshenko, S. (1953) *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Company.
- [2] Busto, L. (2014) SIMULACIÓN NUMÉRICA DE FENÓMENOS DE INESTABILIDAD EN ESTRUCTURAS METÁLICAS CON DLUBAL. Universidad de Zaragoza. Recuperado de: <https://zaguan.unizar.es/record/16015?ln=es#>
- [3] Bassel, L. y Guardiola, A.P. (2011). Evolución histórica del SOPORTE como elemento estructural. Universidad de Valencia. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10251/12872>
- [4] Morey, A. (2013). Pandeo en estructuras verticales. Universidad de Cartagena. Recuperado de: <https://repositorio.upct.es/handle/10317/3657>
- [5] Argüelles Alvarez, R., Argüelles Bustillos, R., Arriaga, F. y Atienza, J.R. (1999) Estructuras de acero, norma básica y eurocódigo, Bellisco, Ediciones Técnicas y Científicas .
- [6] *Estabilidad aplicada* (s.f), Instituto Técnico de la Estructura en Acero. Recuperado de: [http://www.webaero.net/ingenieria/estructuras/metallica/bibliografia\\_documentacion/itea/TOMO8.pdf](http://www.webaero.net/ingenieria/estructuras/metallica/bibliografia_documentacion/itea/TOMO8.pdf)
- [7] Chacón, Rolando, Mirambell, Enrique, & Real, Esther. (2009). *Resistencia de vigas armadas de acero sometidas a cargas concentradas en secciones no rigidizadas*. Boletín Técnico, 47(1), 1-16. Recuperado de: [http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0376-723X2009000100001&lng=es&tlng=es](http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0376-723X2009000100001&lng=es&tlng=es)
- [8] Jiménez, J. I., Aceituno, J., Suárez, F., & Carazo, J. D. D. (2020). *Fundamentos de Elasticidad y Resistencia de Materiales*. Paraninfo.
- [9] Berrocal, L. (2005). *Resistencia de Materiales - 2b*: Edición. McGraw-Hill Companies.
- [10] Lapuebla Ferri, A. (2020). *Pandeo. Carga crítica de Euler*. Universitat Politècnica de València. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10251/143801>

[11] (2016) *Estabilidad II, Capítulo X:Pandeo*, Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). Recuperado de: [http://ing.unne.edu.ar/mecap/Apuntes/Estabilidad\\_2/Cap10-Pandeo.pdf](http://ing.unne.edu.ar/mecap/Apuntes/Estabilidad_2/Cap10-Pandeo.pdf)

[12] Figueirido, D. (2012). *Estudio experimental del pandeo de perfiles tubulares rectangulares de acero, rellenos de hormigón de alta resistencia, bajo carga axial y diagrama de momentos variables*. Universidad de Valencia. Recuperado de: <https://riunet.upv.es/handle/10251/14724>

[13] Gomez, N (s.f), *Estructuras livianas de acero*. Recuperado de: <https://cmetalicas.tripod.com/sitebuildercontent/T2.pdf>

[14] Timoshenko, S. (1970). *Theory of elastic stability 2e*. Tata McGraw-Hill Education.

[15] Spiegel, M. R., & Garcia, H. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas* (No. 04; QA371, S6.). Prentice Hall.

[16] Gunt Hamburg, página web oficial, <https://www.gunt.de/es/productos/pandeo-de-barras/020.12000/wp120/glct-1:pa-150:pr-1528>

[17] Argüelles Alvarez, R., Argüelles Bustillos, R., Arriaga, F. y Atienza, J.R. (2013) *Fundamentos y cálculos según CTE, EAE y EC 3*, Bellisco, Ediciones Técnicas y Científicas .



## 7 ANEXOS DE GUIÓN DE PRÁCTICAS

### 7.1 Guion Ensayo 1.

---

#### **Práctica 1:**

### **Estudio sobre la influencia de excentricidades en el pandeo mediante el equipo Gunt WP-120.**

---

#### *INTRODUCCIÓN*

En nuestra etapa como ingenieros, se pide que en la construcción de elementos estructurales se tenga principalmente dos requisitos:

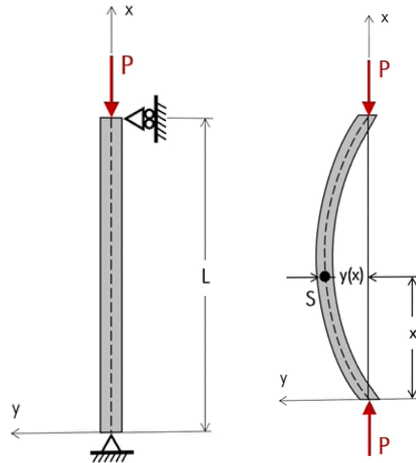
- Seguridad
- Económicos

Para ello se debe conocer bastante bien los problemas que pueden aparecer en cualquier proyecto y saber actuar frente a ellos. Uno de estos problemas es el pandeo.

El fenómeno de pandeo es un problema de estabilidad, que viene producida por la aplicación de fuerzas compresivas sobre elementos de soporte, como puede ser una viga. Las vigas que la sufren comienzan a flectar hasta llegar a romper. Lo importante de esto es que en ocasiones en las que la viga es demasiado esbelta, este fenómeno se produce con cargas críticas menores que las que necesita el material para plastificar, haciendo que disminuya considerablemente la capacidad de carga.

Euler calculó la carga crítica necesaria para que un elemento fallase por pandeo. Su fórmula es obtenida de la siguiente manera:

Suponiendo una columna a compresión por una carga  $P$ , dibujada en los ejes  $y-x$ , en la que se produce una deformación en este último (Figura 3.6). Teniendo en cuenta las hipótesis mencionadas anteriormente.



**Figura A1.1** Columna sometida a compresión y su posterior deformada. (Lapuebla, 2020)

Partiendo de la ecuación diferencial de la línea elástica, ecuación (3.3):

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-M_y}{E \cdot I_y}$$

Y sustituyendo el valor del momento en y por la fuerza compresiva aplicada multiplicada la excentricidad generada por la elástica (que tiene un valor de z y representa la condición necesaria para que la viga mantenga el equilibrio (Fig. 3.6):

$$M_y = P z$$

Si se combinan estas expresiones se obtiene (3.5):

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{P z}{E \cdot I_y} = 0$$

Analizando esta ecuación se observan los siguientes parámetros:

- P corresponde con la carga compresiva aplicada.
- E es el Módulo de Young que caracteriza un material.
- $I_y$  es el momento de inercia de la viga en el eje y.

Siendo los valores mencionados constantes, se sustituyen por una constante k:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_y}$$

Teniendo así (3.7), una ecuación diferencial que es lineal, homogénea y de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2 z = 0$$

Cuya solución es del tipo:

$$z = C_1 \sin(k \cdot x) + C_2 \cos(k \cdot x)$$

Esta ecuación no está completa sin determinar los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ . Para ello se necesita imponer unas condiciones de contorno.

La primera condición de contorno corresponde cuando el desplazamiento en  $x$  es 0 Figura 3.6, por lo que el desplazamiento lateral es nulo:

$$z = C_1 \sin(k \cdot 0) + C_2 \cos(k \cdot 0)$$

Sabiendo que ( $z(x=0) = 0$ ):

$$0 = C_2 \cos(0) = C_2$$

Se obtiene que la constante  $C_2$  tiene un valor de 0.

Por otro lado, queda por obtener la constante  $C_1$ , donde para ello se supone que  $x=L$  (Figura 3.6) y el desplazamiento lateral vale 0, es decir ( $z(x=L) = 0$ ), es sustituido:

$$0 = C_1 \sin(k \cdot L) + 0 \cos(k \cdot L)$$

$$0 = C_1 \sin(k \cdot L)$$

Como solución principal se encuentra que  $C_1$  sea nulo, pero esto correspondería con una solución trivial, ya que para ello tendría que ser que la barra no estuviese pandeada. Esto sería una solución no válida, pues se está realizando un problema de pandeo.

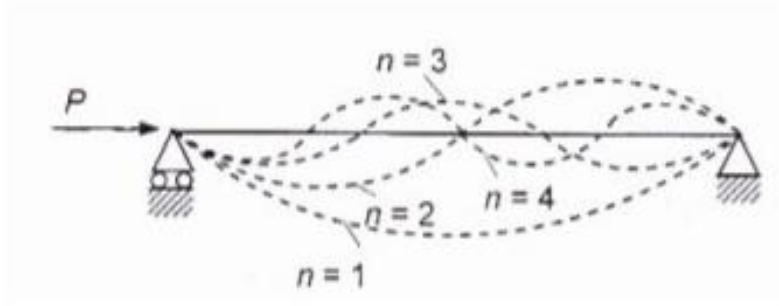
La opción viable en este caso es que (3.13):

$$0 = \sin(k \cdot L)$$

Para ello el valor del argumento tiene que ser un múltiplo de  $\pi$  (3.14):

$$k \cdot L = n \cdot \pi$$

Siendo  $n$  un número entero entre 0 e infinito, que recibe el nombre de modos de pandeo (Figura 3.7). Esto se representa como una curva compuesta por “ $n$ ” lóbulos que funcionan como diferentes configuraciones para la misma barra. Sabiendo que la configuración en que  $n=1$  es la predeterminada, porque es la de menor energía de deformación y solo se formará otra configuración si los apoyos impiden que esta primera se produzca. (Lapuebla, 2020)



**Figura A1.2** Modos de pandeo de una barra biarticulada. (Morey, 2013)

Por lo mencionado anteriormente, para el cálculo de la carga crítica de pandeo de Euler usaremos la disposición en que  $n=1$ . Sustituyendo en la ecuación el valor real de  $k$  se obtiene que:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I$$

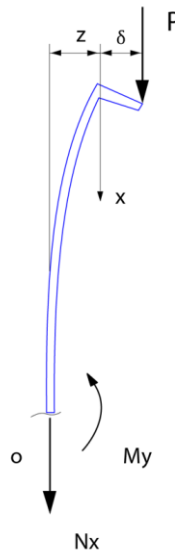
El cálculo de Euler para la carga crítica de una columna tiene una serie de hipótesis:

- La columna tiene una sección constante, con un material homogéneo, elástico y sin imperfecciones que provoquen tensiones residuales.
- El eje del prisma es matemáticamente recto.
- Las cargas de compresión se aplican en el centro de la sección.

Esto no incluye que las vigas tengan excentricidades, por lo que la carga que proporciona esta fórmula es ideal y en la realidad la desviación hará que la fuerza necesaria para que pandee disminuya.

**CÁLCULO TEÓRICO**

Suponiendo una barra donde se tiene una excentricidad permanente, se pretende calcular cómo afecta a la capacidad de carga de la misma:



**Figura A1.2** Barra con fuerza excéntrica aplicada.

La diferencia observada con respecto al caso anterior es la aparición de una pequeña excentricidad.

Datos que aparecen en la figura A1.2:

$P$  = Fuerza compresiva

$\delta$  = Excentricidad

$z$  = Distancia del eje central hasta el punto de la barra más próximo.

$M_y$  = Reacción del momento en el apoyo

$N_x$  = Reacción normal del eje  $x$  en el apoyo.

Se comienza planteando un equilibrio de momentos en el punto de sustentación:

$$\sum M_0 = M_y - P \cdot (z + \delta) = 0$$

Relación entre el momento y la flexión  $z$ :

$$M_y = E \cdot I_y \cdot z''$$

Sabiendo pues que  $z''$  coincide con la curvatura de la línea de flexión y es incluida en la primera ecuación mencionada.

$$z'' - \frac{P}{E \cdot I_y} \cdot (z + \delta) = 0$$

Se obtiene una ecuación diferencial homogénea, de segundo grado (3.19). Como el valor  $f(x)$  es 0 se sabe que es una ecuación homogénea. Esta se resuelve por cambio de variable:

$$\begin{aligned} u &= z + e \\ u'' &= z'' \end{aligned}$$

Quedando la ecuación según:

$$u'' - \frac{P}{E \cdot I_y} \cdot u = 0$$

Puesto que se observa que es una ecuación diferencial homogénea, cuya solución puede ser del tipo:

$$u = e^{kx}$$

Igual que en la casuística anterior:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{P}{E \cdot I_y} \\ u'' + k^2 u &= 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es del tipo:

$$z(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} - \delta$$

Esta puede reescribirse como:

$$z(x) = C_1 \sin(k \cdot x) + C_2 \cos(k \cdot x) - \delta$$

Las condiciones de contorno son que en  $z(0)=0$  y que  $z(L)=0$ , esto dice que en el punto de apoyo no hay desplazamiento y que en el punto con valor la longitud de la barra, es decir en el extremo no se produzca tampoco una desviación respecto del valor inicial 0.

Como soluciones se obtiene que:

$$C_1 = \delta \cdot \tan\left(\frac{k \cdot l}{2}\right)$$

$$C_2 = \delta$$

Aplicando estos resultados se obtiene que la flexión de la barra con una excentricidad determinada sigue la ecuación:

$$z(x) = \delta \cdot \left( \frac{\cos\left(k \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)\right)}{\cos\left(k \cdot \frac{l}{2}\right)} - 1 \right)$$

Esta solución es extrapolable a cualquier lugar de la barra si se sitúa el valor  $x$  en el punto que se quiera calcular. Lo interesante es ver el valor de mitad de la barra, ya que corresponde con la flecha máxima de pandeo en el modo de pandeo de menor energía de deformación.

$$z\left(\frac{l}{2}\right) = \delta \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(k \cdot \frac{l}{2}\right)} - 1 \right)$$

Puesto que  $\cos\left(k \cdot \frac{l}{2}\right)$  puede hacerse 0 en el punto en que  $\left(k \cdot \frac{l}{2}\right)$  sea  $\frac{\pi}{2}$  radianes, es decir  $90^\circ$ . En este caso, cuanto se acerque a ese valor, la expresión entre paréntesis puede hacerse infinito. Esto conlleva que se tiene un sistema inestable. Este punto de inestabilidad llega en:

$$\left(k \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Puesto que se puede sustituir  $k$ , se obtiene:

$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right) \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Para despejar esta ecuación se debe pasar a un lado los términos que no están sobre la raíz y se eleva al cuadrado en ambos lados y se opera hasta llegar a:

$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right) = \frac{\pi}{l}$$

$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$
$$\frac{P}{E \cdot I_y} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$
$$P = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot E \cdot I_y$$

Viendo que este valor es la carga crítica de Euler. Este es el valor máximo de carga que soporta la barra en el límite que pandea.

### ***MEDIDA EXPERIMENTAL EQUIPO***

El equipo usado para hacer los experimentos se encarga de aplicar la carga, diseñar situaciones distintas y ver como influyen en varios elementos. Como elementos principales de los que se compone se encuentran:

Un armazón base que actúa como sujeción del equipo. En el se encuentra el alojamiento inferior de las barras, donde con distintas piezas se puede recrear el tipo de apoyo necesario, bien sea empotramiento o un apoyo articulado. El alojamiento inferior además contiene una caja dinamométrica para mostrar la fuerza aplicada.

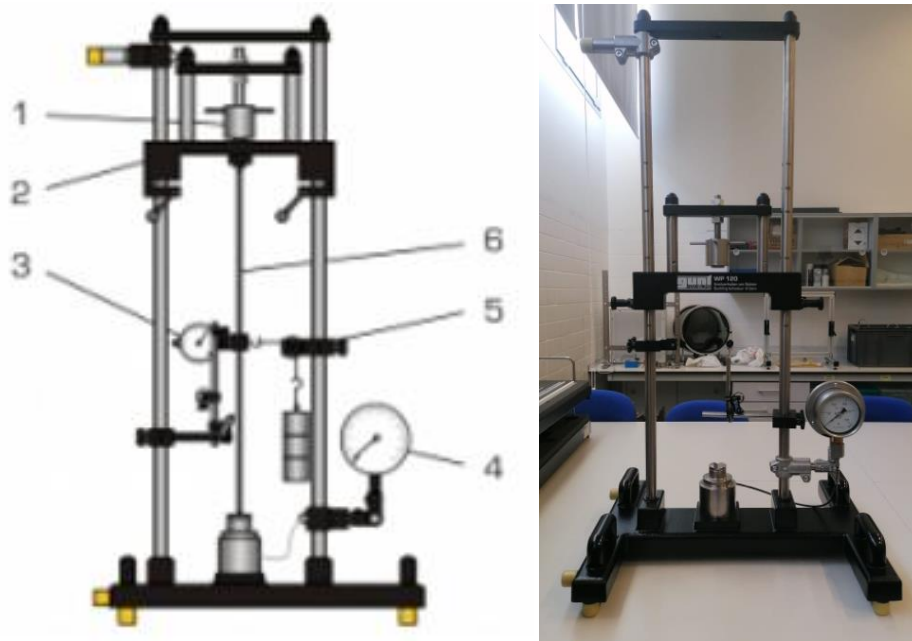
Dos columnas guía que sirven para ajustar la longitud de la barra que se espera estudiar, estas tienen las medidas de las barras que te vienen en el ensayo, para así hacer más simple su uso y no tener la necesidad de medir exactamente el punto necesario.

El travesaño de carga está fijo a las columnas guía y tiene un husillo de carga que con un movimiento rotatorio hace posible que se pueda aplicar la fuerza necesaria, que a su vez será medida por la caja y vendrá representada en el dinamómetro de la parte derecha. Bajo el husillo es necesario colocar los modelos de apoyos para representar también el apoyo superior y evitar que haya esfuerzos de torsión aplicados sobre la barra.

El equipo puede situarse de dos maneras, vertical y horizontal, aunque en la fase experimental se haya decidido que los experimentos sean realizados de manera vertical.

En la figura 4.1 se aprecia el equipo en posición vertical y seis partes bien diferenciadas:

- 1- Husillo.
- 2- Marco de carga variable.
- 3- Reloj comparador .
- 4- Dinamómetro.
- 5- Elemento para simular carga transversal.
- 6- Barra de prueba.



*Figura A1.3 Esquema del equipo Gunt WP-120.*

Como se ha comentado anteriormente, en la parte inferior se encuentra un alojamiento para la barra, que además se encarga de medir la fuerza. Esto es gracias a un caja dinamométrica hidráulica.

Como barras a emplar se usan:

Barras para experimentos WP-120				
Nombre	Material	Sección transversal (mm)	Longitud (mm)	Apoyos
SZ1	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=0mm
SZ2	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=1mm
SZ3	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=3mm

*Figura A1.4 Información sobre las barras empleadas*



*Figura A1.5. Barras estudiadas en este ensayo.*

**PROCEDIMIENTO**

1. La metodología usada en el experimento comienza con la preparación de la máquina para insertar la pieza. Para ello se debe ajustar la posición del armazón superior a la altura de 500 mm en la columna guía. Tras esto se colocan los apoyos articulados, por lo que en el alojamiento inferior se usa el acople en V y para el superior se tiene la pieza entallada en V, que se debe insertar en el hueco y sujetarlo hasta que se coloque la barra.
  2. Una vez la barra este colocada se debe colocar el reloj de medición en el centro de la barra, a una longitud de 250 mm y tras esto se ajusta el travesaño de carga sobre la columna guía.
  3. Cuando se ajuste el reloj al valor 0 ya se puede empezar la medición.
  4. Se comienza a girar el travesaño de carga hasta que el reloj marque 0.25 mm, este será el primer punto de medida y se anota la fuerza marcada por el dinamómetro. Este intervalo de 0.25 mm se seguirá hasta escribir el valor de 1 mm. A partir de 1 mm se aumenta el intervalo de carga hasta 0.5 mm.
  5. Es muy importante no sobrepasar el valor de 5 mm de desviación para no dañar la barra. El experimento acaba cuando se estabiliza el valor de la carga crítica y al aumentar la desviación, apenas afecta a la carga del dinamómetro.
  6. Al finalizar el experimento se debe disminuir la carga lentamente.
- Si se desea realizar un control sobre el estado de la barra se debe volver a realizar el experimento en el sentido contrario de pandeo, donde la desviación no debe ser mayor de un 10%.

## 7.2 Guion Ensayo 2

---

### Práctica 2:

## Estudio sobre la influencia de cargas transversales en el pandeo mediante el equipo Gunt WP-120.

---

### *INTRODUCCIÓN.*

En la vida de un ingeniero se debe tener en cuenta todo tipo de hechos que afecten a la seguridad estructural de un edificio, puente... Es por ello que se deben realizar estudios sobre como es su comportamiento antes de llevarlo a la realidad. Una viga sometida a compresión, si no está bien dimensionada, corre el riesgo de pandear. Además, este pandeo puede ocurrir con cargas menores debido a esfuerzos exteriores, como puede ser el caso de las cargas transversales sobre una viga.

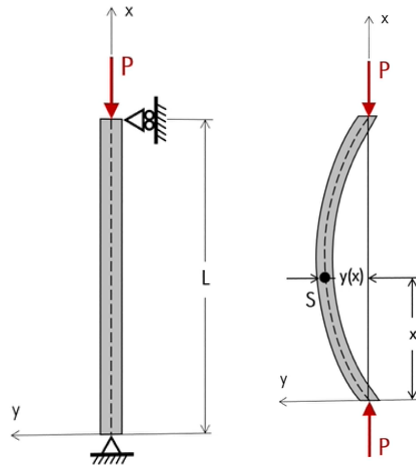
En esta práctica se van a realizar ensayos de pandeo con la máquina Gunt WP120 para ver de que manera afectan las cargas transversales sobre una barra sometida a compresión y si este hecho es determinante para la estructura.

### *CONTEXTO TEÓRICO.*

El fenómeno de pandeo es un problema de la estabilidad, que viene producida por la aplicación de fuerzas compresivas sobre elementos de soporte, como puede ser una viga. Las vigas la sufren comienzan a flectar hasta llegar a romper. Lo importante de esto es que en ocasiones en el que la viga es demasiado esbelta, este fenómeno se produce con cargas críticas menores que las que necesita el material para plastificar, haciendo que disminuya considerablemente la capacidad de carga. Euler calculó la carga crítica necesaria para que un elemento fallase por pandeo. Su fórmula es obtenida de la siguiente manera:

Suponiendo una columna a compresión por una carga  $P$ , dibujada en los ejes  $y-x$ , en la que se produce una deformación en este último. Teniendo en cuenta las hipótesis mencionadas anteriormente.

Suponiendo una columna a compresión por una carga  $P$ , dibujada en los ejes  $y$ - $x$ , en la que se produce una deformación en este último (Figura 3.6). Teniendo en cuenta las hipótesis mencionadas anteriormente.



**Figura A2.1** Columna sometida a compresión y su posterior deformada. (Lapuebla, 2020)

Partiendo de la ecuación diferencial de la línea elástica, ecuación (3.3):

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-M_y}{E \cdot I_y}$$

Y sustituyendo el valor del momento en  $y$  por la fuerza compresiva aplicada multiplicada la excentricidad generada por la elástica (que tiene un valor de  $z$  y representa la condición necesaria para que la viga mantenga el equilibrio (Fig. 3.6):

$$My = Pz$$

Si se combinan estas expresiones se obtiene (3.5):

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{Pz}{E \cdot I_y} = 0$$

Analizando esta ecuación se observan los siguientes parámetros:

- $P$  corresponde con la carga compresiva aplicada.
- $E$  es el Módulo de Young que caracteriza un material.
- $I_y$  es el momento de inercia de la viga en el eje  $y$ .

Siendo los valores mencionados constantes, se sustituyen por una constante  $k$ :

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_y}$$

Teniendo así (3.7), una ecuación diferencial que es lineal, homogénea y de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2 z = 0$$

Cuya solución es del tipo:

$$z = C_1 \sin(k \cdot x) + C_2 \cos(k \cdot x)$$

Esta ecuación no está completa sin determinar los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ . Para ello se necesita imponer unas condiciones de contorno.

La primera condición de contorno corresponde cuando el desplazamiento en  $x$  es 0 Figura 3.6, por lo que el desplazamiento lateral es nulo:

$$z = C_1 \sin(k \cdot 0) + C_2 \cos(k \cdot 0)$$

Sabiendo que ( $z(x=0) = 0$ ):

$$0 = C_2 \cos(0) = C_2$$

Se obtiene que la constante  $C_2$  tiene un valor de 0.

Por otro lado, queda por obtener la constante  $C_1$ , donde para ello se supone que  $x=L$  (Figura 3.6) y el desplazamiento lateral vale 0, es decir ( $z(x=L) = 0$ ), es sustituido:

$$0 = C_1 \sin(k \cdot L) + 0 \cos(k \cdot L)$$

$$0 = C_1 \sin(k \cdot L)$$

Como solución principal se encuentra que  $C_1$  sea nulo, pero esto correspondería con una solución trivial, ya que para ello tendría que ser que la barra no estuviese pandeada. Esto sería una solución no válida, pues se está realizando un problema de pandeo.

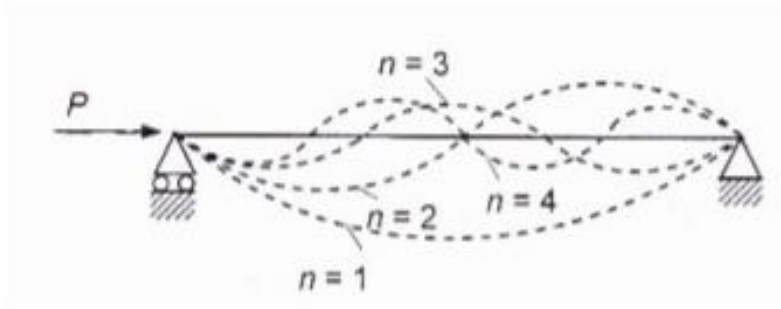
La opción viable en este caso es que (3.13):

$$0 = \sin(k \cdot L)$$

Para ello el valor del argumento tiene que ser un múltiplo de  $\pi$  (3.14):

$$k \cdot L = n \cdot \pi$$

Siendo  $n$  un número entero entre 0 e infinito, que recibe el nombre de modos de pandeo (Figura 3.7). Esto se representa como una curva compuesta por “ $n$ ” lóbulos que funcionan como diferentes configuraciones para la misma barra. Sabiendo que la configuración en que  $n=1$  es la predeterminada, porque es la de menor energía de deformación y solo se formará otra configuración si los apoyos impiden que esta primera se produzca. (Lapuebla, 2020)



**Figura A2.2** Modos de pandeo de una barra biarticulada. (Morey, 2013)

Por lo mencionado anteriormente, para el cálculo de la carga crítica de pandeo de Euler usaremos la disposición en que  $n=1$ . Sustituyendo en la ecuación el valor real de  $k$  se obtiene que:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I$$

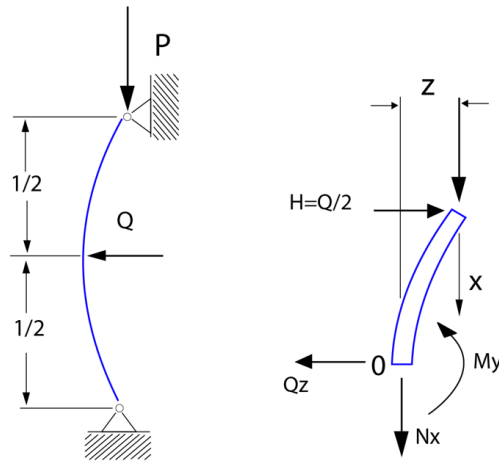
El cálculo de Euler para la carga crítica de una columna tiene una serie de hipótesis:

- La columna tiene una sección constante, con un material homogéneo, elástico y sin imperfecciones que provoquen tensiones residuales.
- El eje del prisma es matemáticamente recto.
- Las cargas de compresión se aplican en el centro de la sección.

### **CÁLCULO TEÓRICO.**

Este cálculo no incluye el efecto de cargas transversales, por lo que únicamente se calcula la carga crítica de un elemento sometido a compresión. Si se desea ver que ocurre con la aplicación de las cargas mencionadas se realiza el siguiente desarrollo:

Se tiene una barra biarticulada de longitud  $L$ , cuyo valor de carga compresiva es  $P$  y con carga transversal dispuesta a una longitud de  $L/2$  de valor  $Q$ . La deflexión inicial que tiene la barra por pandeo es  $z$ .



**Figura A2.3** Barra sometida a cargas transversal y compresiva.

Como en casos anteriores se hace un equilibrio de momentos, esta vez en el punto donde más variables se eliminen. Se hace en el punto nombrado como 0, puesto que así todo queda en función de P y de Q:

$$\sum M_0 = M_y - P \cdot z - \frac{Q}{2} \cdot x = 0 \quad (3.82)$$

Recordando el caso de excentricidad se mencionó la ecuación de la elástica:

$$M_y = E \cdot I_y \cdot z'' \quad (3.83)$$

Sustituyendo el momento flector en y por la elástica y despejando el término de  $z''$  se obtiene:

$$z'' - \frac{P}{E \cdot I_y} \cdot z = \frac{Q}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot x \quad (3.84)$$

Para usar menos símbolos se abrevia la ecuación con los siguientes términos:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I_y} \quad (3.85)$$

$$\alpha = \frac{Q}{2} \cdot F \quad (3.86)$$

Por lo que queda de la siguiente manera:

$$z'' - k^2 \cdot z = \alpha \cdot x \quad (3.87)$$

La ecuación diferencial obtenida en este caso es no homogénea de segundo orden, que son del tipo:

$$a \cdot z'' + b \cdot z' + c \cdot z = f(x) \quad (3.88)$$

debido a que el factor  $f(x)$  no es igual a 0 y tiene un valor determinado. Este término  $f(x)$  es despejado en la parte derecha de la ecuación.

Las ecuaciones no homogéneas tienen dos soluciones, una homogénea y otra particular (Spiegel, 1983):

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) \quad (3.89)$$

La solución de la componente homogénea es parecida a la anterior de la barra excéntrica:

$$z_h(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} \quad (3.90)$$

Por otro lado, para la solución particular, es obtenida de bibliografía (Spiegel, 1983). Es del tipo:

$$z_h(x) = C_3(x) \cdot e^{kx} + C_4(x) \cdot e^{-kx} - e \quad (3.91)$$

Siendo  $C_3$  y  $C_4$ :

$$C_3 = -\frac{\alpha}{2} \cdot \left( \frac{2}{k} + x \right) \cdot e^{-kx} \quad (3.92)$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{2} \cdot \left( \frac{1}{k} - x \right) \cdot e^{kx} \quad (3.93)$$

Sustituyendo estas soluciones obtenidas en la solución particular y sumando esta solución a la homogénea se obtiene que:

$$z(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} - \alpha \cdot x \quad (3.94)$$

Se puede aprovechar la fórmula de Euler y ponerlo en forma de seno y coseno, así mediante condiciones de contorno se pueden obtener las nuevas constantes:

$$z(x) = A_1 \sin(k \cdot x) + A_2 \cos(k \cdot x) - \alpha \cdot x \quad (3.95)$$

Como condiciones se impone que  $z(0)=0$ , es decir que en el valor de longitud 0, no se sufra desviación, ya que se tiene un apoyo. De la misma manera debe ocurrir en la longitud L, en el otro extremo de la barra, donde no debe haber desviación ya que es el otro apoyo  $z(L)=0$ .

$$A_1 = \frac{\alpha \cdot L}{\text{sen}(k \cdot L)} \quad (3.96)$$

$$A_2 = 0 \quad (3.97)$$

$$z(x) = \alpha \cdot \left( L \cdot \frac{\text{sen}(k \cdot x)}{\text{sen}(k \cdot L)} - x \right) \quad (3.98)$$

Al igual que en el caso de las excentricidades, lo que interesa ver es el punto medio de la barra, puesto que este provoca la máxima desviación y mínima energía de deformación:

$$z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q \cdot L}{4 \cdot F} \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{(k \cdot L)}{2}\right)} - 1 \right) \quad (3.99)$$

El punto crítico llega en coseno de  $90^\circ$  (inestable), ya que si se hace el denominador un número muy pequeño, hace que el primer término del paréntesis tienda a infinito, que restado al segundo término sigue siendo infinito. Por lo que la flecha sería infinita.

Como en la excentricidad ocurría, el valor determinante es el denominador, que como tiende a infinito se genera la condición de inestabilidad:

$$\left(k \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.100)$$

Puesto que se pueden sustituir ciertos valores:

$$\left(k \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.101)$$

$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right) \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (3.102)$$

Para despejar esta ecuación se debe pasar a un lado los términos que no están sobre la raíz y se eleva al cuadrado en ambos lados:

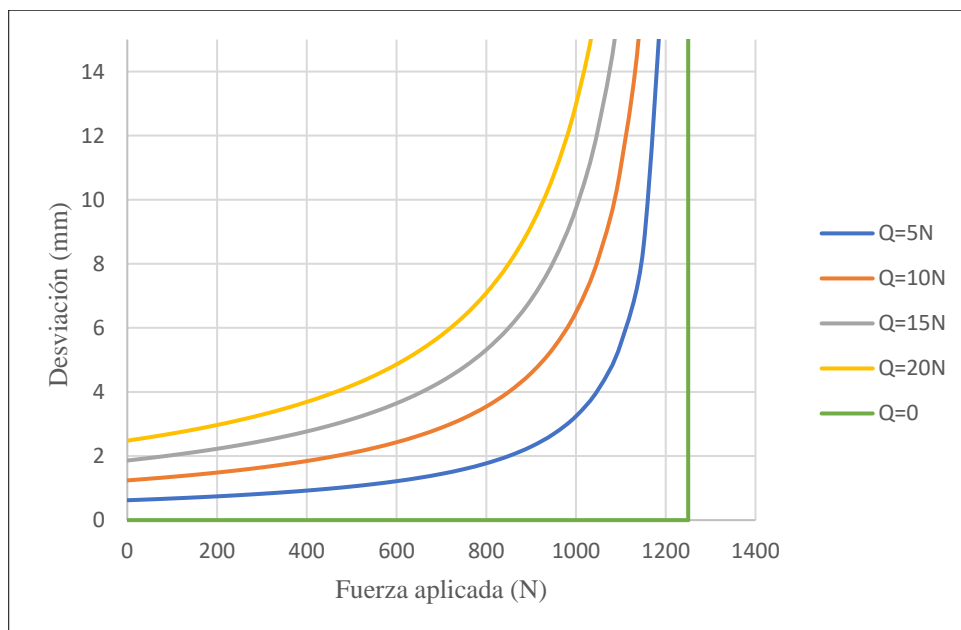
$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right) = \frac{\pi}{l} \quad (3.103)$$

$$\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (3.104)$$

$$\frac{P}{E \cdot I_y} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (3.105)$$

De manera similar a lo que ocurre con la estabilidad, el término  $\frac{Q \cdot L}{4 \cdot F}$  es factor agravante de la carga crítica de pandeo.

Si se busca el comportamiento teórico de las barras con carga transversal de manera gráfica se obtiene:



**Figura A2.4** Comportamiento teórico de una barra con diferentes cargas transversales.

### **MEDIDA EXPERIMENTAL EQUIPO**

El equipo usado para hacer los experimentos se encarga de aplicar la carga, diseñar situaciones distintas y ver como influyen en varios elementos. Como elementos principales de los que se compone se encuentran:

Un armazón base que actúa como sujeción del equipo. En el se encuentra el alojamiento inferior de las barras, donde con distintas piezas se puede recrear el tipo de apoyo necesario, bien sea empotramiento o un apoyo articulado. El alojamiento inferior además contiene una caja dinamométrica para mostrar la fuerza aplicada.

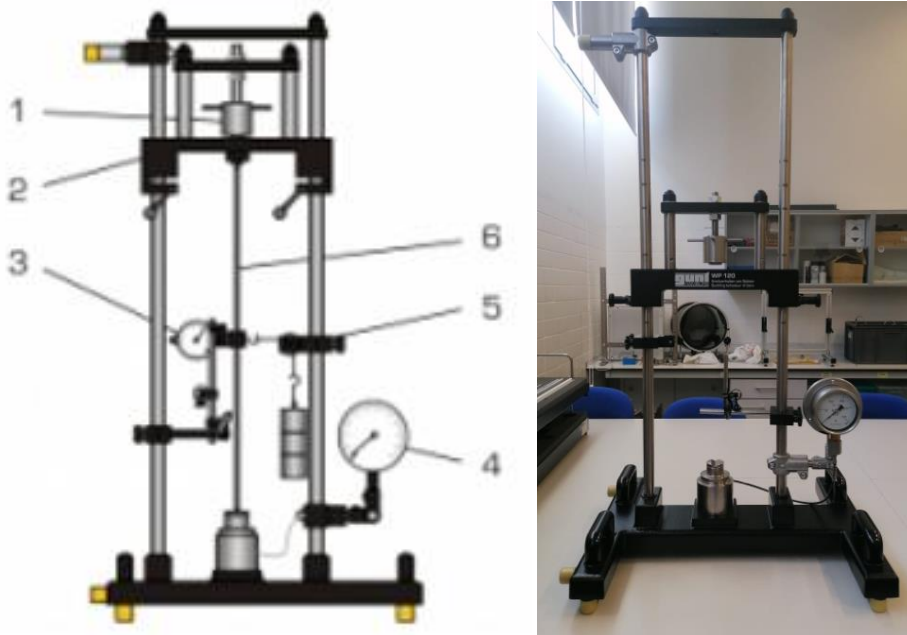
Dos columnas guía que sirven para ajustar la longitud de la barra que se espera estudiar, estas tienen las medidas de las barras que te vienen en el ensayo, para así hacer más simple su uso y no tener la necesidad de medir exactamente el punto necesario.

El travesaño de carga está fijo a las columnas guía y tiene un husillo de carga que con un movimiento rotatorio hace posible que se pueda aplicar la fuerza necesaria, que a su vez será medida por la caja y vendrá representada en el dinamómetro de la parte derecha. Bajo el husillo es necesario colocar los modelos de apoyos para representar también el apoyo superior y evitar que haya esfuerzos de torsión aplicados sobre la barra.

El equipo puede situarse de dos maneras, vertical y horizontal, aunque en la fase experimental se haya decidido que los experimentos sean realizados de manera vertical.

En la figura 4.1 se aprecia el equipo en posición vertical y seis partes bien diferenciadas:

- 1- Husillo.
- 2- Marco de carga variable.
- 3- Reloj comparador .
- 4- Dinamómetro.
- 5- Elemento para simular carga transversal.
- 6- Barra de prueba.



*Figura A2.3 Esquema del equipo Gunt WP-120.*

Como se ha comentado anteriormente, en la parte inferior se encuentra un alojamiento para la barra, que además se encarga de medir la fuerza. Esto es gracias a un caja dinamométrica hidráulica.

Como barra a emplear se usa:

Barras para experimentos WP-120				
Nombre	Material	Sección transversal (mm)	Longitud (mm)	Apoyos
SZ1	Aluminio AlMgSi 0.5 F22	25 X 6	500	Biarticulada e=0mm

*Figura A2.4 Información barra empleada.*



*Figura A2.5 Barra SZ1 y dispositivos de carga.*

El equipo tiene un dispositivo para simular cargas transversales, aunque este solo se puede poner en marcha si el equipo se encuentra vertical. Se compone de polea, una cuerda, una brida y un conjunto de pesas (cuatro pesas de 5 N, pudiendo cargar la barra hasta 20 N). La brida junto con un pasador sirve para conectar la barra y las cuerdas, que a través de la polea hace que las pesas apliquen su fuerza de manera horizontal, como se ve en la figura 4.7.



*Figura A2.6 Dispositivo de carga transversal.*

**PROCEDIMIENTO**

- 1- Primeramente, es necesario montar el equipo en la posición vertical, para así hacer uso del sistema de simulación de cargas transversales.
- 2- Tras esto se sitúa la barra en posición de ensayo, con los dos apoyos biarticulados de los alojamientos inferior y superior. Tienen la forma que se muestra en las siguientes figuras:



**Figura A2.7** Apoyo articulado del alojamiento inferior.



**Figura A2.8** Apoyo articulado del alojamiento superior.

- 3- Ajustar el reloj medidor en la mitad de la barra y regular en 0, para comenzar la medición.
- 4- Realizar un ensayo sin cargas transversales para ver como actúa la barra sin fuerzas externas aplicada. Los datos de fuerza y desviación se obtienen del siguiente modo. Los cuatro primeros valores se obtienen cada 0.25 mm y los siguientes cada 0.5 mm hasta llegar a una desviación de 9 mm totales en la barra.

- 5- Tras este primer ensayo, montar el sistema de carga transversal y colocarlo en la mitad de la barra, sin perjudicar al reloj medidor. Es decir, dejando unos milímetros entre uno y otro, siendo estos dos lo más cercanos posibles al centro de la barra.
- 6- Comenzar añadiendo los 5 Newton de carga y medir el desplazamiento provocado en la barra.
- 7- Tras apuntar la desviación inicial, aplicar fuerza compresiva con el husillo y anotar valores de desviación con respecto a la carga. Como criterio de anotación de valores se sigue que los cuatro primeros valores de carga sean cada 0.25 mm y tras esto sean cada 0.5 mm del reloj comparador. La desviación máxima de la que se le aplicará a la barra será 9 mm, teniendo en cuenta la desviación inicial de la carga transversal.
- 8- Repetir esta metodología con 10, 15 y 20 Newton.