



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

SEMEJANZA Y TEOREMA DE TALES: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA 2º DE ESO

Alumno/a: Moral Cortecero, Sergio

Tutor: Prof. D. Julio Guerrero García
Cotutora: Prof. Dña. Ana Huertas Armesto

Dpto: Matemáticas

Índice

Resumen.....	4
1. Introducción	5
2. Objetivos	6
3. Fundamentación didáctica.....	7
3.1. Artículo 1: “Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria”	8
3.2. Artículo 2: “El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos”	12
3.3. Artículo 3: “Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria”	16
3.4. Artículo 4: “La enseñanza del futuro: educación online”	18
4. Fundamentación epistemológica.....	21
4.1. La relación de semejanza en el plano. Consecuencias	22
4.1.1. Proporcionalidad de segmentos	22
4.1.2. Semejanza de triángulos	25
4.1.3. Polígonos semejantes	29
4.1.4. Homotecia en el plano	32
4.1.5. Semejanza en el plano	34
4.2. El Teorema de Tales	35
4.2.1. Teorema de Tales.....	35
4.2.2. Segmentos proporcionales producidos por un haz de rectas	37
4.2.3. Aplicaciones	39
4.3. Razones trigonométricas	41
4.3.1. Teorema de Pitágoras	41
4.3.2. Razones trigonométricas de un ángulo	44
4.3.3. Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante	48
4.3.4. Razones trigonométricas de un mismo ángulo	50
5. Fundamentación curricular.....	51
5.1. Análisis del currículo escolar	52

5.2. Análisis de los libros de texto.....	56
6. Diseño de una unidad didáctica	68
6.1. Título	68
6.2. Justificación	68
6.3. Contextualización del centro y del aula	69
6.3.1. Situación geográfica del centro	70
6.3.2. Descripción del centro	70
6.3.3. Descripción del aula	71
6.4. Objetivos	72
6.4.1. Objetivos Generales de la etapa	73
6.4.2. Los objetivos de matemáticas de la etapa	76
6.4.3. Objetivos de la unidad didáctica	77
6.5. Competencias Clave	77
6.6. Contenidos	79
6.7. Metodologías	80
6.8. Materiales y recursos	81
6.9. Organización del alumnado	82
6.10. Actividades y tareas	82
6.11. Atención a la diversidad	83
6.12. Actividades complementarias y extraescolares	84
6.13. Temporalización de Matemáticas de 2° de E.S.O	84
6.13.1. Desarrollo de la unidad didáctica	86
6.13.2. Desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica	86
6.14. Evaluación	94
6.14.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje	94
6.14.2. Instrumentos de evaluación	94
6.14.3. Aplicación de instrumentos y calificación.....	95
6.14.4. Procesos de evaluación.....	95
7. Conclusiones	96
8. Referencias bibliográficas	98

Anexo I: Desarrollo de las unidades didácticas y tipo de actividades en los libros de texto analizados	101
Anexo II: Aspectos demográficos y socioeconómicos y características del alumnado del centro educativo	105
Anexo III: Contenidos transversales de la unidad didáctica	107
Anexo IV: Atención a la diversidad: alumnado con necesidades educativas especiales y atención a la diversidad de aptitudes de aprendizaje	109
Anexo V: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la unidad didáctica	112
Anexo VI: Características del desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica	119
Anexo VII: Desarrollo de las actividades de la unidad didáctica	129
Anexo VIII: Plan de clase de la actividad de modelización	151
Anexo IX: Tablas de evaluación y rúbrica de los exámenes	161
Índice de Figuras	169
Índice de Tablas	170

Resumen

En el presente Trabajo Fin de Máster se elabora una unidad didáctica orientada a alumnos de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria, según la legislación autonómica y nacional vigente, perteneciente al bloque de geometría y que se denomina "Semejanza y Teorema de Tales".

En primer lugar, se analizan investigaciones relacionadas con la unidad didáctica, se elabora un tema de matemáticas en relación con los contenidos de la unidad didáctica, se analiza el currículo actual y se comparan libros de texto de diferentes editoriales.

Seguidamente, se desarrolla la unidad didáctica donde se realiza una justificación, se contextualiza el centro y se elaboran los objetivos, las competencias clave, los contenidos, las metodologías, los materiales y recursos, las actividades y tareas, la atención a la diversidad, la temporalización de la unidad didáctica y la evaluación.

Finalmente, se expone cómo se lleva al aula la unidad didáctica y cómo se evalúan sus contenidos, llevando a la práctica los conocimientos adquiridos durante el Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, en el curso 2019/2020.

Palabras Clave: Semejanza, Teorema de Tales, Unidad Didáctica, Educación Secundaria.

Abstract

In this Master's Final Project a didactic unit for students in the second year of Compulsory Secondary Education is developed, according to autonomous and national legislation, belonging to the geometry contents block and called "Similarity and Thales' Theorem".

First, research related to the didactic unit is analysed. Then, a Maths topic is developed in relation to the didactic unit's contents, the current curriculum is also analysed and, finally, textbooks from different publishers are compared.

Next, the didactic unit is developed where a justification is made, the educational centre is contextualized and the objectives, key competences, contents, methodologies, materials and resources, activities and tasks, attention to diversity, the programming of the didactic unit and evaluation are elaborated.

Finally, the way in which the didactic unit is implemented in the classroom and how its contents are evaluated is explained, putting into practice the knowledge acquired during the Master's Degree in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, in the speciality of Mathematics, in the 2019/2020 academic year.

Key Words: Similarity, Thales' Theorem, Didactic Unit, Secondary Education.

1. Introducción

Este Trabajo Fin de Máster (TFM) constituye la culminación del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la Especialidad en Matemáticas. Este máster ha sido realizado en la Universidad de Jaén durante el curso académico 2019-2020.

El objetivo de este TFM consiste en mostrar la fundamentación y diseño de una unidad didáctica sobre la semejanza y el Teorema de Tales, orientada a alumnos de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. El desarrollo del proyecto está relacionado con el Instituto de Educación Secundaria (IES) Miguel Sánchez López.

El razonamiento lógico y la resolución de problemas son dos características fundamentales de la geometría, razón por la cual he elegido este tema de Semejanza y Teorema de Tales que permite identificar, interpretar y resolver situaciones que aparecen en nuestro entorno, entre otras utilidades. El uso fundamental del Teorema de Tales es en la relación de triángulos y se usa principalmente para conocer proporciones y medidas desconocidas, se emplea con bastante frecuencia en campos de arquitectura e ingeniería.

En el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster, se han analizado distintos apartados que se determinan a continuación:

- Fundamentación didáctica, donde se identifican investigaciones y artículos centrados en errores y dificultades del alumnado, enseñanza online y metodologías docentes relacionadas con la unidad didáctica.
- Fundamentación epistemológica, la cual se centra en la confección del tema “Razón de semejanza en el plano, consecuencias, Teorema de Tales y razones trigonométricas,” correspondiente al tema 37 del temario oficial de oposiciones.
- Fundamentación curricular, en la que se realiza un análisis del currículo escolar y se analizan libros de texto de distintas editoriales con el currículo de matemáticas de segundo de Educación Secundaria Obligatoria de acuerdo con el Real Decreto (RD) 1105/2014.
- El diseño de una unidad didáctica, donde se planifica las actividades de aprendizaje relacionadas con los distintos elementos de la programación (título, justificación, contextualización del centro y del aula, objetivos, competencias, contenidos, metodología, actividades y recursos, atención a la diversidad, temporalización, evaluación y conclusiones).

- Conclusiones, con un contenido reflexivo en el que se valorará globalmente el proceso de elaboración del TFM desde una opinión crítica.
- Referencias bibliográficas empleadas durante la elaboración del trabajo Fin de Máster.

En mi opinión, las matemáticas, aparte de resolver problemas y ser útiles, enfocándolas adecuadamente pueden ser entretenidas para el alumnado. Este trabajo seguirá la línea de fomentar la motivación de los alumnos para incentivar el interés por la asignatura y cambiar la perspectiva de parte de los estudiantes sobre las matemáticas como una materia aburrida y difícil. En definitiva, este TFM es el comienzo de un gran camino de conocimientos que no presenta fin.

2. Objetivos

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es el desarrollo de una unidad didáctica a través de los conocimientos obtenidos en el propio Máster enfocados en el área de matemáticas.

A continuación, se presentan distintos objetivos generales que se pretenden alcanzar con la elaboración de este trabajo:

- Planificar y programar actividades y tareas en coherencia con el aula, ciclo y proyecto educativo del centro, entender el entorno sociocultural del centro y aplicar la normativa del sistema educativo.
- Diseñar y elaborar actividades y tareas que atiendan a la diversidad y las necesidades educativas especiales, para que el alumnado valore la igualdad de oportunidades y derechos entre ellos y rechacen la discriminación de personas por condiciones sociales, sexo, personal o de cualquiera otra índole. Detectar al alumnado con distintas capacidades y actuar conforme a sus necesidades.
- Establecer una unidad didáctica en el aula de Educación Secundaria Obligatoria y obtener la facultad de interpretar la legislación referente al sistema educativo autonómico y nacional.
Mostrar al alumnado la importancia de las matemáticas en nuestro entorno, impartiendo hábitos de disciplina, trabajo cooperativo y conseguir que los alumnos puedan afrontar las tareas y cumplir sus objetivos.
- Se analizarán las metodologías de enseñanza del centro educativo y su eficacia para poder analizar la situación actual y establecer estrategias para atraer la atención del alumnado.

- Se elaborarán herramientas didácticas y procedimientos lúdicos para impartir la docencia en el aula, relacionados con las tecnologías, tanto actuales como nuevas, para el progreso de la actividad docente.
- Utilizar fuentes para fundamentar actividades, tareas y trabajos, y conocer las interacciones de la ciencia y la tecnología con la sociedad y el medioambiente para prosperar hacia un futuro sostenible.

El docente debe seguir la estrategia de provocar la creatividad del alumnado, crear un adecuado clima de convivencia en el aula fomentando el trabajo por grupos, impulsando la tolerancia, la responsabilidad, la iniciativa, la colaboración y el espíritu emprendedor del alumnado, al cual de le debe asignar un papel fundamental en el proceso de aprendizaje de contenidos, fomentando la motivación para mejorar la actitud de los alumnos.

3. Fundamentación didáctica

En este apartado se van a analizar distintas investigaciones centradas en los contenidos de la unidad didáctica sobre la Semejanza y el Teorema de Tales, orientada a estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Después de realizar un análisis exhaustivo de múltiples fuentes de información sobre investigaciones en Semejanza y Tales se ha realizado un proceso de selección de manera que cubra diversos contenidos de la unidad didáctica y ayude al diseño de la misma.

Debido a la situación actual, he decidido incluir en este apartado una investigación sobre la docencia online, lo que me ha llevado a una reflexión acerca de la pandemia:

A medida que todo el mundo toma precauciones para protegerse contra la pandemia, es de vital importancia que los alumnos puedan seguir aprendiendo y que puedan hacerlo con calidad y equidad, pilares del sistema educativo.

En mi opinión, es difícil encontrar una solución que funcione para todo el mundo, tanto en el entorno educativo como en otros contextos, lo más adecuado sería plantear distintas estrategias regionales para evitar la brecha digital ante la crisis.

Entre tantas hipótesis lo que se puede afirmar es que el futuro es incierto y en un sistema educativo nacional con el mayor volumen de profesionales docentes que son funcionarios, se ha de elogiar a los profesores que están adaptándose rápidamente a las necesidades de los estudiantes. Es de vital importancia formar al profesorado para asegurar la igualdad de educación en centros públicos y privados, además de plantear reformas educativas abriendo un proceso de debate y consultas que desemboque en una propuesta curricular.

La educación online no sustituye a la educación presencial aunque, invirtiendo en tecnología de capacitación digital docente, competencia digital en los alumnos y herramientas tecnológicas adecuadas, puede ser un gran complemento a ésta.

Lógicamente el impacto de la pandemia es mayor en los sistemas educativos más vulnerables, se han perdido clases y los efectos son heterogéneos afectando en mayor medida a los alumnos más desfavorecidos.

Se ha articulado un sistema alternativo de aprendizaje a través de internet en el que, aunque el papel del docente es fundamental, las familias han de involucrarse en el proceso educativo de sus hijos. Para éstas ofrecemos una serie de consejos como pueden ser:

- Hacer diferenciar a los alumnos entre espacios para el estudio y para el ocio, con el objetivo de que no estén mucho tiempo en un lugar aislado y puedan relacionarse con la familia.
- Favorecer el uso equilibrado de las herramientas tecnológicas y utilizarlas solo cuando sean necesarias.
- Aconsejar a los alumnos a que no se distraigan con las redes sociales.
- Explicarle la importancia de la autoría y recordarle que no es adecuado copiar.
- Promover la comunicación con los profesores.

A pesar del impacto de la situación en la educación, se están desarrollando con rapidez nuevas formas de garantizar el derecho a la educación. Toda crisis es una oportunidad y los docentes han de contribuir con iniciativas educativas, recursos, tiempo, paciencia, voluntad y soluciones innovadoras. Pasamos ya a analizar la información anteriormente citada.

1.1. Artículo 1: “Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria”

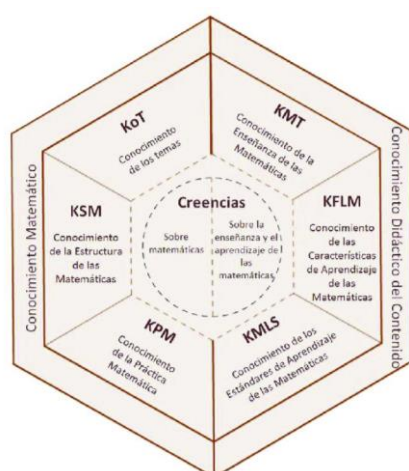


Figura 1. Subdominios del MTSK
(carrillo et al.,2013)

El objetivo de esta investigación es constituir relaciones entre el conocimiento del docente de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Se utiliza el modelo analítico MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge), para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas, el cual se representa la figura de la izquierda.

El **conocimiento matemático** queda definido por los siguientes conceptos:

- a) **Conocimiento de los temas (KOT):** incluye definiciones, significados, ejemplos que caractericen los temas abordados.
- b) **Conocimiento de la estructura matemáticas (KSM):** conexiones que permiten entender y desarrollar conceptos avanzados a partir de conceptos elementales.
- c) **Conocimiento de la práctica matemática (KPM):** conocimiento de las formas de crear, conocer o producir en matemáticas.

El **conocimiento didáctico del contenido** queda definido por los siguientes conceptos:

- a) **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT):** conocimiento de estrategias, recursos y/o ejemplos para dar a comprender contenidos.
- b) **Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM):** conocimiento de las características del proceso de comprensión del alumnado, sobre lenguaje, contenidos, errores, obstáculos o dificultades.
- c) **Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS):** abreviando, se define como lo que el alumno debe saber, comprender y saber hacer en la asignatura.

En esta investigación se indaga en el conocimiento de una docente de matemáticas y en el grupo escolar de alumnos entre 14 y 15 años de un centro educativo chileno en el que imparte docencia. A continuación, se hace un resumen de las distintas situaciones y de los resultados.

Análisis de la situación en el aula 1

La profesora recurre a la estrategia del cuestionamiento a los estudiantes y al lenguaje familiar, intentando establecer conexiones entre el vocabulario común y los conceptos matemáticos, por lo cual, conoce el vocabulario familiar y el conocimiento de las dificultades de los estudiantes para el uso de conceptos formales.

En la siguiente tabla se presentan las relaciones establecidas entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y las características del aprendizaje de las matemáticas

Conocimiento	De las características del aprendizaje de las matemáticas	De la enseñanza de las matemáticas
Indicador	- Conoce las dificultades de los estudiantes para el uso de conceptos de semejanza y congruencia. - Conocer el vocabulario común.	- Conoce la estrategia del cuestionamiento a los alumnos, basado en el desglose de las características definitorias del concepto parecido e igualito.

Tabla 1. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 1 (elaboración propia).

Análisis de la situación en el aula 2

La profesora utiliza la analogía de la ampliación de figuras para relacionar el concepto de semejanza con aplicaciones digitales de la vida cotidiana, dando indicios de los intereses de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas.

En la siguiente tabla se presentan las relaciones establecidas entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y las características del aprendizaje de las matemáticas.

Conocimiento	De las características del aprendizaje de las matemáticas	De la enseñanza de las matemáticas
Indicador	- Conoce el interés de los estudiantes por aplicaciones digitales de conceptos geométricos.	- Conoce analogías: "ampliación de letras en Word".

Tabla 2. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 2 (elaboración propia).

Análisis de la situación en el aula 3

Se observa evidencia del conocimiento de la profesora de las interacciones de los alumnos con el contenido matemático y se identifica el conocimiento de la docente de las estrategias de enseñanza desafiando a los alumnos en el planteamiento de problemas, en esta situación la profesora es capaz de redactar los principales errores del alumnado.

En la siguiente tabla se presentan las relaciones establecidas entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y las características del aprendizaje de las matemáticas.

Conocimiento	De las características del aprendizaje de las matemáticas	De la enseñanza de las matemáticas
Indicador	- Conoce errores del alumnado en el planteamiento de proporciones sin elementos homólogos. - Conoce que el alumnado suele plantear razones solo entre las medidas mayores y menores para comprobar la semejanza de triángulos.	- Conoce la estrategia de cuestionar planteamientos de las razones de los lados homólogos y el cálculo inverso de estos para la comprobación de semejanza

Tabla 3. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 3 (elaboración propia).

Análisis de la situación en el aula 4

El nivel de dificultad de la actividad es mayor y la profesora encamina al alumnado en la búsqueda de condiciones mediante cuestiones, manifestando una forma de enseñar basada en un supuesto de cómo el alumnado aprende las matemáticas.

La profesora manifiesta conocer teorías formales de enseñanza y que los alumnos aprenden a partir de actividades complejas que provocan cuestionar sus conocimientos (teoría personal de aprendizaje).

En la siguiente tabla se presentan las relaciones establecidas entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y las características del aprendizaje de las matemáticas

Conocimiento	De las características del aprendizaje de las matemáticas	De la enseñanza de las matemáticas
Indicador	- Conoce que el alumnado aprende a partir de actividades complejas que cuestionen sus conocimientos. - Conoce teorías formales de enseñanza	- Conoce tipos de tareas complejas para propiciar el aprendizaje de la semejanza de triángulos. - Conoce estrategias de enseñanza mediante preguntas de cuestionamiento y orientadas.

Tabla 4. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 4 (elaboración propia).

Análisis de la situación en el aula 5

En esta situación, la profesora plantea una actividad en la que el alumnado debe realizar mediciones con materiales tangibles, dando indicio del conocimiento de la docente en tareas que propician el aprendizaje de las matemáticas, la idea es que el alumnado intente dar solución al problema con sus conocimientos previos. La profesora es capaz a priori de conocer dificultades de los alumnados al realizar mediciones.

En la siguiente tabla se presentan las relaciones establecidas entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y las características del aprendizaje de las matemáticas

Conocimiento	De las características del aprendizaje de las matemáticas	De la enseñanza de las matemáticas
Indicador	- Conoce las dificultades de los estudiantes para realizar mediciones con el uso del transportador y regla. - Conoce los recursos materiales (regla y transportador)	- Conoce tipos de tareas para propiciar al alumnado el aprendizaje del Teorema de Tales y fomentar habilidades de medición.

Tabla 5. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 5 (elaboración propia).

■ **Conclusión del artículo 1**

La investigación finaliza con la discusión de los resultados obtenidos, en la que se van a destacar los contenidos más relevantes en relación a este Trabajo Fin de Máster.

Se puede apreciar en todas las situaciones la formación de la docente en la Didáctica de las Matemáticas, aportándole un aprendizaje adecuado en teorías de la enseñanza, el cual es un factor fundamental para el desempeño de su profesión en el aula.

En la mayoría de los casos la profesora conoce a priori los errores y dificultades que suele tener el alumnado a la hora de afrontar actividades relacionadas con los contenidos, haciendo posible una mejor preparación de las sesiones e indagando en solucionar los errores frecuentes de los alumnos. Para el desempeño de la labor docente es adecuado conocer el nivel de los alumnos a priori para poder diseñar las estrategias más adecuadas de enseñanza-aprendizaje.

Se puede apreciar en el primer caso el conocimiento de la profesora del lenguaje familiar y común de los estudiantes para poder relacionarlos con el lenguaje matemático, por lo cual es importante conocer el entorno social donde se está trabajando para ejercer la profesión de docente con la máxima calidad.

El uso de cuestiones es frecuente en todas las actividades, fomentando la motivación del alumnado y encaminando a los estudiantes a las soluciones de las actividades, esta estrategia es fundamental en el entorno de las matemáticas para que los estudiantes sigan el ritmo de las clases y sientan la motivación necesaria para no abandonar el hilo de las clases y obtener los conocimientos esperados.

El profesor ha de estudiar y analizar la interacción con los alumnos para seguir enriqueciéndose, aumentar su conocimiento y cambiar la estrategia para impartir las clases, a veces, las respuestas de los estudiantes no son las esperadas y es necesario evaluar y cambiar estrategias de aprendizaje.

El modelo empleado (MTSK) es una herramienta analítica compleja que permite estudiar el conocimiento del docente, formado por distintas dimensiones que se han abordado en este artículo.

Las situaciones analizadas en el estudio son fundamentales para el desarrollo de la temporalización de este TFM. Como se ha podido ver, es importante conocer el vocabulario común del alumnado y los conocimientos previos a la unidad, para los que se realizará una evaluación inicial en la primera sesión. En las situaciones analizadas se observan distintas interacciones profesor-alumnos que han sido de utilidad para afrontar las primeras sesiones del periodo de prácticas y para enfocar las metodologías que se han elaborado en el diseño de la unidad didáctica.

1.2. Artículo 2: “El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos”

Esta investigación tiene como objetivo plantear diferentes estrategias para la resolución de problemas matemáticos en alumnos de secundaria que se explicarán brevemente, se enunciarán las pautas a seguir por los estudiantes en la resolución de problemas y se comentarán los errores más comunes para esta etapa.

Uno de los objetivos fundamentales en el área de las matemáticas es que los estudiantes sean competentes en la resolución de actividades y problemas.

Miguel de Guzmán considera cinco fases para la resolución de problemas que se aprecia en el siguiente gráfico de procesos:

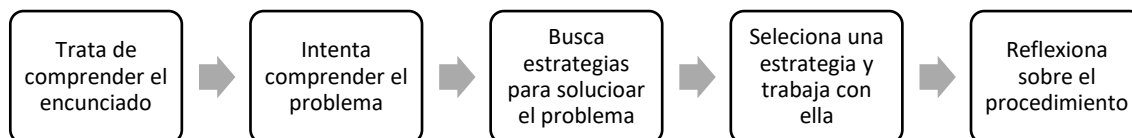


Tabla 6. Fases de resolución de problemas según Miguel de Guzmán (elaboración propia).

La resolución de problemas se puede clasificar en: **problemas de aplicación directa**, cuando se usan operaciones matemáticas simples; **problemas algorítmicos**, cuando existe una secuencia de operaciones que garantiza la obtención de la solución; **problemas heurísticos**, cuando presentan estrategias y planificaciones previas y **problemas creativos**, donde no existen patrones personalizados y no se garantiza una solución óptima.

Errores más comunes del alumnado

Se comentan casos particulares que se pueden generalizar como son:

- Al proponer problemas de cálculo de superficies y perímetros a partir de propiedades de ángulos y lados los alumnos presentan temor a la resolución, provocando un bloqueo en ellos.
- Los estudiantes frecuentemente asocian los problemas a la unidad que se está desarrollando.
- Los alumnos no realizan un análisis ni una lectura correcta de los problemas, buscando en un principio números en los problemas para llegar a la solución.
- Al desconocer algún término del problema los estudiantes dicen no saber hacerlo pidiendo ayuda antes de haber leído el problema completo.
- En problemas de geometría los alumnos presentan dificultades a la hora de expresar la solución en la unidad adecuada.

Existen numerosos tipos de bloqueos, entre los que se destacan: **el bloqueo de tipo inercial**, en el que se acomodan en unas reglas fijas, empobreciendo la capacidad y reduciendo las capacidades de éxito; **el bloqueo de origen afectivo**, debido a sentimientos como la pereza, apatía, miedo al fracaso, ansiedad..., **el bloqueo de tipo cognitivo**, producido por la dificultad para identificar, definir o percibir el problema y los **bloqueos de tipo cultural y ambiental**, debido al entorno socio-cultural, ya que las ideas y formas de pensar en nuestro ambiente influyen en la forma de trabajar.

Es importante que los estudiantes reconozcan que están bloqueados y lo acepten, desechen el pánico y realicen algo en los problemas para desbloquearse.

Estrategias de resolución de problemas

1. Razonamiento regresivo o considerar el problema resuelto.

Afrontar los problemas desde distintas perspectivas y/o caminos

2. Particularizar y generalizar.

Para entender el significado de las preguntas se puede concentrar la atención en algunos ejemplos o particularizar y también se puede pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto más extenso que lo incluya o generalizar.

3. Eliminación de términos técnicos. Definiciones.

Para entender los enunciados es necesario eliminar o traducir los términos desconocidos y buscar las definiciones de las palabras técnicas que no se comprendan.

4. Descomponer y recomponer el problema.

Los problemas complejos se pueden descomponer en problemas más sencillos gradualmente que si después los elementos se combinan de forma diferente se producirá una recomposición del problema dando lugar a nuevas pistas de resolución.

5. Representaciones gráficas: dibujos, figuras, esquemas, grafos...

Al trazar cualquier objeto que represente la situación del problema se obtendrá ayuda a comprender mejor el problema y llegar a la resolución del problema.

6. Problemas relacionados.

Comparar los problemas con otros similares ya resueltos ayuda a la interpretación del problema por medio de una particularización, generalización o anomalía.

7. Notación.

Es fundamental una buena notación en los problemas matemáticos, el lenguaje simbólico es parte de la materia de las matemáticas, cualquier error en la notación puede provocar una solución errónea en los problemas.

8. Analogía o semejanza.

Se puede usar la analogía para realizar una similitud en objetos que guardan relaciones entre sus elementos y buscar situaciones semejantes a las propuestas en el problema que provocará estrategias válidas para la resolución de problemas.

9. Reducción al absurdo y demostración indirecta.

El método de reducción al absurdo demuestra la falsedad de una afirmación deduciendo de ella una falsedad manifiesta, mientras que la demostración indirecta demuestra la verdad de una afirmación estableciendo la falsedad de la afirmación contraria.

10. Simulación.

Es una estrategia muy útil, basada en un modelo que imita aspectos de la realidad y permite trabajar en condiciones similares a la reales, obteniendo resultados a partir de elementos artificiales.

11. Ensayo y error.

Este es un método heurístico donde se elige un valor relacionado con las condiciones del problema y se va probando este valor para ver si funciona y resolver el problema.

■ **Conclusión del artículo 2**

Para trabajar la resolución de problemas de forma sistemática, el docente ha de ser consciente de la importancia de todo el proceso de resolución del problema, iniciar a los estudiantes en técnicas básicas de resolución de problemas y estrategias adecuadas. Se debe utilizar una didáctica flexible adaptada al alumno, tener en cuenta la importancia de los conceptos matemáticos, presentar la materia en relación a la sociedad, motivar al alumnado e inculcar la autocorrección para que el alumno tenga la capacidad de comprobar sus soluciones, valorar los procesos de resolución de los estudiantes, encaminar a los alumnos a comprender los problemas antes de que lo automaticen y enseñarles a expresar adecuadamente las soluciones.

El docente ha de conocer diversas estrategias de resolución de problemas y transmitirles al alumnado en el proceso enseñanza-aprendizaje, y conocer los errores generales del alumnado tanto como los bloqueos de estos para poder intervenir y subsanar las dificultades de los estudiantes.

En la investigación se presentan unas sugerencias para la creación de problemas como son: proponer ejercicios que sean ejemplos de algún modelo general, plantear el recíproco de una pregunta común, proponer ejercicios que requieran un ejemplo del estudiante, ejercicios realistas, con incógnitas que realmente tuviese motivos de averiguar, crear problemas imaginativos y problemas sin solución para motivar a la indagación.

Por último, se ha de comentar que este artículo se ha utilizado para ayudar a los alumnos a resolver problemas mediante las cinco fases propuestas de resolución de problemas e introducirle diferentes estrategias de resolución de problemas a partir de los bloqueos y los errores comunes que presentan los estudiantes de secundaria ante los problemas matemáticos.

1.3. Artículo 3: “Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria”

Esta investigación se fundamenta en cómo comprenden la noción de semejanza los estudiantes de secundaria al implementar con el uso de material tangible una situación didáctica, diseñando tareas en el marco teórico de la teoría de situaciones didácticas, y permitiendo analizar cómo el alumnado valida y formula estrategias para la resolución de un problema. Se utilizará el tangram como material de uso didáctico.



Figura 2. Tangram de piezas utilizado para la investigación (Briceño Solís y Alamillo Sánchez).

Dificultades en el aprendizaje de la semejanza

Gualdrón y Gutiérrez (2006, p. 4) manifiestan como problemática “que los estudiantes tienen dificultad para reconocer la semejanza cuando las medidas de los lados de las figuras no son enteras, y que recurren a la estrategia aditiva de forma errónea”.

En el artículo se expone una actividad propuesta de ampliación de figuras, donde se comprueba que los estudiantes recurren a la estrategia aditiva en vez de la multiplicativa.

En la investigación indagan en artículos y otras investigaciones considerando que la problemática del alumnado en la comprensión de la cuestión del tema de semejanza de figuras es causada por el uso de la estrategia aditiva como recurso nato del alumnado.

La Teoría de situaciones didácticas

La Teoría de situaciones didácticas fue propuesta por Brousseau en 1997, con el objetivo de entablar la relación entre alumno-profesor y medio didáctico. Esta teoría es fundamental en la investigación permitiendo conocer cómo comprende y construye el alumno la noción de semejanza mediante recursos didácticos tangibles. Además provoca la interacción del estudiante con el medido didáctico para la elaboración de estrategias a seguir para la construcción de un nuevo conocimiento mediante un proceso dividido en situaciones didácticas que son las que aparecen a continuación:

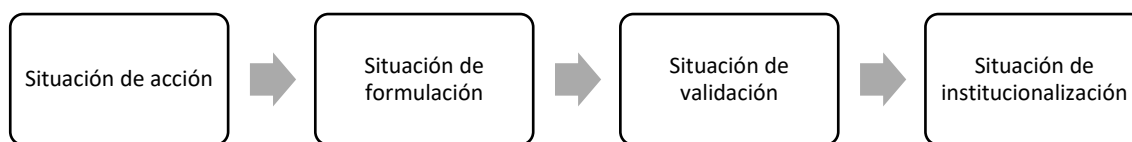


Figura 3. Fases de la teoría de situaciones didácticas según Brousseau (elaboración propia).

1. Situación de acción

Los alumnos trabajarán de forma individual con el tangram aplicando sus conocimientos. En la investigación se propone una actividad con el objetivo de que los alumnos tengan una primera toma de contacto e interactúen con la actividad para familiarizarse con las figuras geométricas.

A través de la situación de acción con la utilización del tangram los alumnos obtienen un conocimiento previo que se usa en la siguiente etapa. Esta acción facilita a los estudiantes experimentar de forma implícita.

2. Situación de formulación

En esta etapa, los estudiantes trabajan en grupo, donde es necesaria la comunicación entre ellos para realizar conjeturas relacionadas con el concepto de semejanza. El objetivo es que los alumnos comparen estratégicamente los resultados obtenidos en la situación de acción, manifestando el concepto de semejanza.

3. Situación de validación

El objetivo de esta etapa es poner a juicio de un interlocutor el resultado obtenido por los alumnos en las etapas anteriores. Se propone una pregunta para que los alumnos no puedan utilizar las estrategias de construcción anteriores y piensen en otras posibilidades.

4. Situación de institucionalización

En esta etapa el profesor formaliza los conceptos y analiza el proceso enseñanza-aprendizaje en el desarrollo del problema. El objetivo en la actividad es que los alumnos afiancen los contenidos, destacando los conceptos clave más importantes de la actividad.

■ **Conclusión del artículo 3**

El material tangible es un buen recurso didáctico para el proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, los datos obtenidos en la investigación nos indican que los alumnos comprenden la noción de semejanza mediante comparación y medición de figuras. En la situación de formulación, aunque no todos los equipos obtienen la solución de forma general comprenden el significado de las figuras semejantes de una forma más detallada.

En la situación de validación los estudiantes presentan nuevas estrategias que la justifican adecuadamente y en la formalización los alumnos logran obtener una idea implícita sobre el concepto de razón de semejanza.

Sería conveniente modificar las preguntas de la etapa de institucionalización para que los estudiantes consigan obtener una idea más clara sobre el concepto de semejanza, ya que como se ha comprobado los estudiantes no han llegado a la obtención del contenido en su totalidad.

La actividad desarrollada en esta investigación se puede utilizar en otras nociones de las matemáticas, y con otros recursos didácticos, enriqueciendo la didáctica de las matemáticas. Los alumnos pueden interactuar con material tangible afianzando objetivos y conocimientos, optando por metodologías cooperativas y dinámicas.

Este artículo será fundamental para la elaboración de un ejercicio de modelización que se realizará en una sesión de la temporalización de la unidad didáctica, ya que como se ha analizado, este tipo de actividades incluyen la posibilidad de representar los problemas, tomar decisiones, generar conjeturas, hacer predicciones e interpretar en contextos específicos, interactuando con el entorno y favoreciendo el aprendizaje del alumnado.

1.4. Artículo 4: “La enseñanza del futuro: educación online”

Este artículo recoge distintas herramientas de enseñanza online, con distintos ejemplos que se llevan a cabo, aportando formación a la población activa que no tiene tiempo material para formarse presencialmente.

A lo largo de la vida aprendemos de diversas maneras. La Unión Europea enfoca un aprendizaje global y amplio que relaciona entornos y métodos de aprendizaje como son el **aprendizaje no formal**; aprendizaje que se produce fuera del entorno escolar y/o formativo oficial, **aprendizaje informal**; el que no se estructura ni organiza en términos de tiempo, objetivos o instrucciones y **aprendizaje permanente**; significa el aprendizaje continuo a lo largo de la vida ya que para adaptarse a los cambios culturales, sociales y tecnológicos, es necesario combinar trabajo y educación para evitar la obsolescencia. A veces, es necesario una modalidad de formación que permita no abandonar el trabajo y no exija la presencia en el aula.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la modalidad online se diferencia claramente a los alumnos, que necesitan una flexibilización horaria y que en el transcurso de sesiones pueden tener acceso a tutorías individuales y colectivas, y a los docentes, siendo su función más compleja que la presencial, ya que se requiere de más habilidades, soportes complejos, formación para crear actividades interactivas y materiales didácticos, entre otras cualidades.

Herramientas TIC para el aula virtual

Exelearning

Herramienta flexible de libre acceso que tiene como objetivo estructurar los contenidos didácticos de una forma visual y permite a los docentes realizar contenidos didácticos habilitando la reproducción de los contenidos creados tanto en local como en web, donde los estudiantes pueden descargar los contenidos en pdf y realizar las actividades en dicho programa.

Moddle

Software gratuito y pívato que tiene como objetivo establecer un espacio colaborativo sustituyendo el aula física, siendo la base de la enseñanza online. En esta plataforma se pueden crear módulos (tareas, foros, diario, encuestas...) y permite la evaluación y la retroalimentación de los estudiantes, en ella se crean varios perfiles (alumno, tutor y administrador) facilitando el uso de la plataforma.

Agrega

Es una plataforma tecnológica instaurada en las administraciones educativas nacionales donde profesores, estudiantes o familias mediante un potente buscador pueden visualizar, buscar y descargar material educativo digital. Se puede rastrear contenidos de distintas Comunidades Autónomas, distintos idiomas, descargarlos y usarlos de una forma fácil y cómoda.

Epale

Es una plataforma electrónica dedicada a la enseñanza para personas adultas en Europa, abierta a docentes, formadores, voluntarios, responsables de la formulación de políticas, medios de comunicación, investigadores y académicos activos en el entorno del aprendizaje de adultos. Permite participar en debates e intercambiar experiencia y ofrece instrumentos de interés específico para los participantes de Erasmus+.

Una vez resumidas las herramientas TIC para el aula virtual, se nombran los ejemplos que desarrolla el artículo para tener una idea global de las distintas instituciones y conceptos de enseñanza a distancia:

IDEA: Instituto de Enseñanza a Distancia de Andalucía.

CIDEAD: Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia.

FP ONLINE: Centro de Formación profesional a distancia.

UNED: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

ENSEÑANZA SEMIPRESENCIAL: Enseñanzas que combinan las sesiones presenciales de obligada asistencia para los estudiantes con sesiones de docencia telemática.

Las principales modalidades de enseñanzas semipresenciales son:

- a) Formación profesional inicial.
- b) Educación permanente de personas adultas.
- c) Especializadas de idiomas.
- d) Deportivas.

▪ **Conclusión del artículo 4**

La educación online permite formarse a numerosas personas a lo largo de la vida, permitiendo compatibilizar los estudios con el entorno laboral, no es sustitutiva de la educación presencial, pero si un gran complemento que con los recursos tecnológicos adecuados y la formación adecuada de los docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede llegar a dar resultados óptimos.

Hoy en día es fundamental el conocimiento de los docentes de plataformas y entornos de educación online, debido a que, pueden surgir situaciones en la que los estudiantes no puedan asistir presencialmente a clase, ya sea de forma individual por alguna enfermedad u otra circunstancia, o de forma colectiva por alguna pandemia como ocurre en el curso escolar 2019-2020 o cualquier otra particularidad.

Existen variedad de recursos informáticos, plataformas y software como herramientas para la educación online aparte de las que se desarrollan en este artículo. Uno de los grandes problemas de la educación online es que no llega a todos los alumnos. A continuación, se realiza una tabla con las principales características entre la enseñanza presencial y enseñanza online.

<i>Característica</i>	<i>Enseñanza presencial</i>	<i>Enseñanza virtual</i>
Plan de clase	General	Detallado
Duración	Larga	Corta
Interacción	Directa	Indirecta
Seguimiento	Instantáneo	Pausado
Evaluación	Presencial	A distancia

Tabla 7. Características de la enseñanza presencial y enseñanza online (elaboración propia).

Esta investigación es de vital importancia en este TFM, debido a la situación excepcional motivada por la crisis sanitaria de este año 2020 que ha provocado la realización de las prácticas de modo virtual.

Con respecto a la metodología empleada en la docencia online, durante las prácticas Google Meet ha sido el servicio de videoconferencia utilizado y la herramienta de Google Classroom ha sido la utilizada para gestionar las aulas de forma colaborativa a través de internet, permitiendo un óptimo aprendizaje a distancia. A través de esta herramienta, se han compartido documentos con todos los alumnos, se han asignado tareas de forma masiva y de forma selectiva, entre otras funciones. Se ha de destacar que es una herramienta gratuita y tiene aplicaciones para móviles y tabletas además del cliente web, permitiendo el acceso prácticamente desde cualquier sitio.

Para mejorar las clases online, he adquirido una tableta gráfica enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje con una notable mejoría de calidad gráfica, característica fundamental en la materia de matemáticas, donde el lenguaje simbólico, la notación y las figuras gráficas hacen imprescindible una expresión clara.

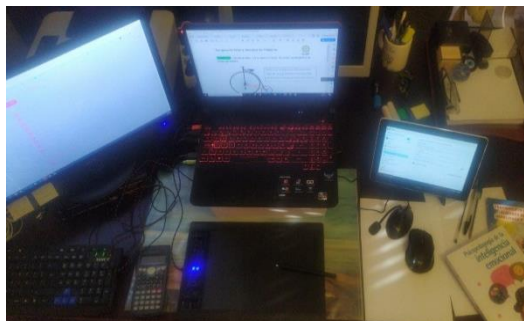


Figura 4. Equipo de trabajo en clases online (elaboración propia).

Entre las diversas pizarras virtuales, he utilizado la aplicación “Miro”, la cual es una pizarra virtual colaborativa e ilimitada que permite añadir imágenes, vídeos de YouTube, documentos GoogleDocs desde GoogleDrive, entre otras características. Esta aplicación es muy intuitiva y presenta versión premium mediante planes de pago, habilitando características avanzadas que no considero necesarias para el uso en la profesión docente.

En la asignación de tareas, además de la elaboración de ejercicios y problemas sobre los contenidos redactados en documentos, se ha utilizado la herramienta “Quizizz”, la cual permite realizar cuestionarios online permitiendo a los alumnos responder en forma de juego directo, como tarea o de manera individual. Es una herramienta gratuita e interesante, a la que se puede acceder a través de un dispositivo móvil, ordenador y/o tableta sin necesidad de descargar ninguna aplicación, también puede enlazarse con Google Classroom para que los alumnos puedan acceder automáticamente a los cuestionarios.

4. Fundamentación epistemológica

Para la realización de este apartado del TFM, se va a desarrollar un tema de las oposiciones de Profesorado de Secundaria en la especialidad de Matemáticas, según el BOE de 21 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio.

El tema relacionado con la unidad didáctica “Semejanza y Teorema de Tales” se corresponde con el tema 37: “**La semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Tales y razones trigonométricas**”. Se elaborará con rigor, coherencia y con una estructura lógica y correcta.

A continuación, se determinan los distintos contenidos del tema 37:

- **La relación de semejanza en el plano. Consecuencias:**
 - Proporcionalidad de segmentos.
 - Semejanza de triángulos.
 - Polígonos semejantes.
 - Homotecia en el plano
 - Semejanza en el plano
- **Teorema de Tales**
 - Teorema de Tales.
 - Segmentos proporcionales producidos por un haz de rectas.
 - Aplicaciones.
- **Razones trigonométricas**
 - Teorema de Pitágoras
 - Razones trigonométricas de un ángulo.
 - Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante
 - Razones trigonométricas de un mismo ángulo

Nomenclatura utilizada en la elaboración de este apartado:

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
$\overline{AB}$	Segmento de línea “AB”	La línea entre A y B
$\hat{A}$	Ángulo A	$\hat{A}$ y $\hat{B}$
$\overrightarrow{AB}$	Vector AB	El vector entre A y B
$\triangle ABC$	Triángulo ABC	Triángulo formado por los vértices A, B y C

Tabla 8. Nomenclatura utilizada en la fundamentación epistemológica (elaboración propia).

1.5. La relación de semejanza en el plano. Consecuencias

1.5.1. Proporcionalidad de segmentos

■ Definición 1:

Se denomina valor numérico de un segmento rectilíneo al número que expresa la relación entre el segmento citado y otro tomado como unidad. Es el resultado de la medida de un segmento.

■ Definición 2:

Se denomina razón de dos segmentos a la razón de sus valores numéricos referidos a la misma unidad.

Ejemplo: Si un segmento $\overline{AB}$ mide 8 metros y otro $\overline{CD}$ mide 4 metros, la razón entre estos segmentos es de $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{8}{4} = 2$.

■ **Definición 3:**

Dos segmentos a y b rectilíneos son proporcionales a dos segmentos c y d cuando sus valores numéricos son proporcionales.

- **La proporción es directa** si hay correspondencia directa entre los valores de a y b y los valores de c y d. Es decir, si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- **La proporción es inversa** si la razón de los dos primeros es igual a la inversa de los dos segundos segmentos. Es decir, si:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

- **La proporción es recíproca** cuando $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$.

Se llama “cuarto proporcional” a cualquier segmento de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Se denomina “proporción continua” cuando en la anterior proporción los términos segundo y tercero sean iguales: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$. En este caso se denomina

“media proporcional” al segmento repetido y a cada uno de los otros dos se les denomina “tercera proporcional”.

■ **Teorema**

Sean dos rectas, s y t en el plano. En la recta s, se toman dos segmentos iguales $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Al trazar por los extremos de los segmentos rectas paralelas entre sí cortando a la recta t, se determinarán dos segmentos iguales en dicha recta.

■ **Demostración:**

Se van a considerar dos casos para demostrar el teorema:

a) Las rectas s y t son paralelas

En este caso los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ sobre la recta t son iguales a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sobre la recta s debido a que los segmentos determinados son lados opuestos de paralelogramos.

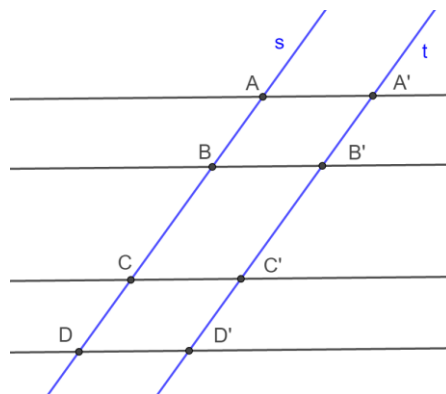


Figura 5. Construcción de rectas paralelas cortadas por rectas paralelas entres si (elaboración propia).

b) Las rectas s y t son secantes.

En primer lugar se trazan rectas paralelas entre sí que pasen por los puntos A , B , C y D , y que corten a la recta t , obteniendo los puntos A' , B' , C' y D' . Se trazan rectas paralelas a la recta s a partir de los puntos A' y C' que cortan a los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{DD'}$ respectivamente, obteniendo los puntos H' y L' . Por el caso (a), $\overline{A'H'} = \overline{AB} = \overline{C'L'} = \overline{CD}$.

Los triángulos $A'B'H'$ y $C'D'L'$ que se obtienen son iguales, ya que presentan lados y ángulos iguales quedando demostrado que los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ son iguales.

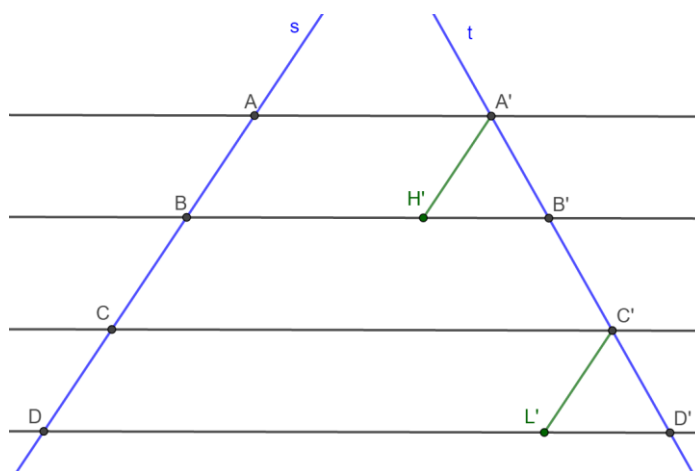


Figura 6. Construcción de rectas secantes cortadas por rectas paralelas (elaboración propia).

■ **Corolario:**

Si un segmento se ha de dividir en n partes iguales, se traza una recta en un extremo del segmento formando un ángulo agudo con éste y se divide la nueva recta en n partes iguales consecutivamente con la misma distancia. Se unirá el último extremo de la recta con el extremo libre del segmento y al trazar rectas paralelas a esta, partiendo de cada una de las n partes iguales se obtendrá la división en partes iguales del segmento.

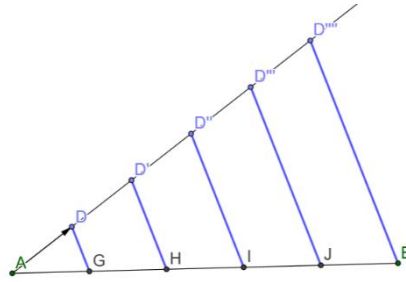


Figura 7. Construcción de un segmento dividido en partes iguales (elaboración propia).

1.5.2. Semejanza de triángulos

Se estudia la relación de semejanza con base a la semejanza de triángulos.

■ **Definición:**

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos son proporcionales, tal como podemos ver en esta figura:

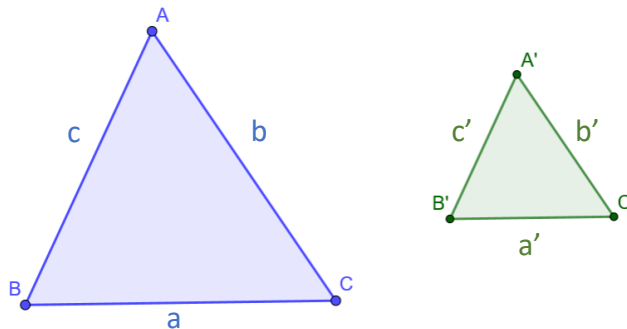


Figura 8. Triángulos semejantes (elaboración propia).

- a) **Ángulos homólogos:** ángulos correspondientes iguales de los triángulos semejantes.
- b) **Lados homólogos:** los lados opuestos a los ángulos homólogos.
- c) **Razón de semejanza:** relación constante existente entre dos lados homólogos.

Proporción que es constante entre los lados homólogos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}; \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}; \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = R = cte$$

Se puede manifestar entonces que la razón entre dos lados cualesquiera de uno de los triángulos es la misma a la razón entre sus homólogos. Según lo enseñado anteriormente, dos triángulos semejantes cumplen las condiciones siguientes.

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

Los triángulos semejantes se representarán de la siguiente forma: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

■ Criterios de semejanza de triángulos

Los criterios de semejanza de triángulos son unas reglas que posibilitan conocer si dos triángulos son semejantes evitando la comprobación de proporcionalidad de lados y de igualdad de triángulos.

a) Primer criterio

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos homólogos iguales.

■ Demostración

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ en los cuales se verifica: $\hat{A} = \hat{D}$ y $\hat{B} = \hat{E}$

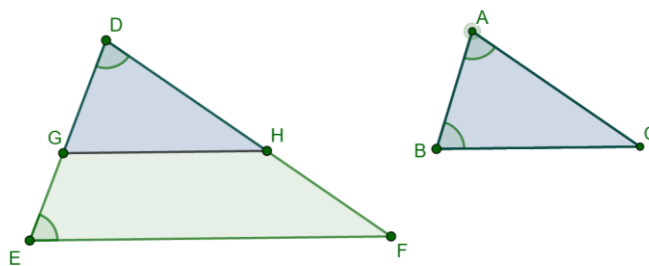


Figura 9. Triángulos semejantes a partir de dos ángulos homólogos iguales (elaboración propia).

En este caso, para que sean semejantes los triángulos han de tener los terceros ángulos iguales y que sean proporcionales los lados homólogos. Se tiene que $\hat{C} = \hat{F}$, por ser suplementarios a la suma de los otros dos.

Al observar dos lados homólogos, por ejemplo AB y DE , se va a probar la proporcionalidad, con lo cual, si los lados fueran iguales, la razón de semejanza sería la unidad y los triángulos serían iguales y semejantes. Si los lados son distintos, se traza en el lado DE del triángulo mayor un segmento $\overline{DG}$ igual al segmento $\overline{AB}$ y se traza una paralela a EF por el punto G y se obtiene el segmento $\overline{GH}$. Esta paralela determinará un triángulo $\triangle DGH$ semejante al $\triangle DEF$.

Se deduce la semejanza de los triángulos representados $\triangle DEF$ y $\triangle ABC$ al tener dos ángulos adyacentes iguales y un lado igual.

Consecuencias

1. Si se traza una paralela a uno de los lados de un triángulo por el punto medio de uno de los otros dos lados, esta paralela divide al tercer lado por la mitad y es igual a la mitad del segundo lado.

2. Son semejantes entre si dos triángulos rectángulos si tiene un ángulo agudo igual.
3. Son semejantes entre si dos triángulos isósceles si tienen igual el mismo ángulo desigual.

b) Segundo criterio

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos iguales.

■ Demostración

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ en los que se verifica: $\hat{A} = \hat{D}$ y $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

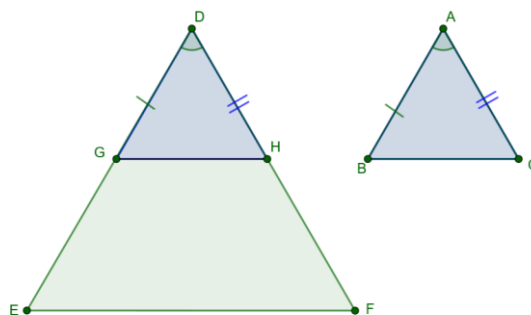


Figura 10. Triángulos semejantes a partir de dos lados proporcionales y ángulos comprendidos iguales (elaboración propia).

Se toma en el lado DE un segmento, $\overline{DG}$ igual a $\overline{AB}$ y se traza una paralela a EF que pase por G , los triángulos que resultan $\triangle DGH$ y $\triangle DEF$ son semejantes y se tendrá que:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DE}}$$

Teniendo en cuenta esta proporción, que $\overline{DG}$ es igual a $\overline{AB}$ y la que sirve de hipótesis, se obtiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

En la cual, $\overline{DG}$ es igual a $\overline{AC}$, y los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DGH$ son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Se ha visto que los triángulos $\triangle DGH$ y $\triangle DEF$ son semejantes, por consiguiente el triángulo $\triangle ABC$ también lo es, por lo cual $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

■ Consecuencia

1. Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales.

c) Tercer criterio

Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.

■ Demostración

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que verifican por hipótesis que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

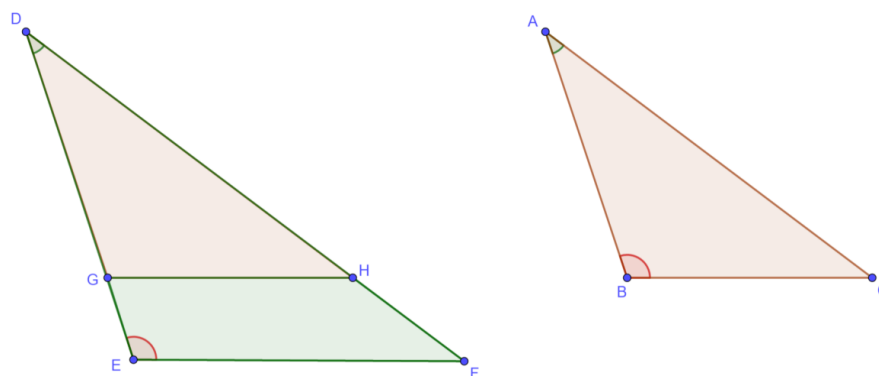


Figura 11. Triángulos semejantes a partir de tres lados proporcionales (elaboración propia).

Se toma en el lado DE un segmento, $\overline{DG}$ igual a $\overline{AB}$ y se traza una paralela a EF que pase por G , los triángulos que resultan $\triangle DGH$ y $\triangle DEF$ son semejantes y se tendrá que:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$$

Al comparar las razones de las hipótesis con estas, se observan que los términos consecuentes son iguales. $\overline{DG}$ igual a $\overline{AB}$, de la misma forma, por construcción se observa que los otros antecedentes son iguales, resultando: $\overline{AC} = \overline{DH}$ y $\overline{BC} = \overline{GH}$, quedando verificada la igualdad de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DGH$ al tener los lados correspondientes iguales.

Se ha observado que los triángulos $\triangle DGH$ y $\triangle DEF$ son semejantes, entonces el triángulo $\triangle ABC$ también lo es.

■ Conclusiones

1. Dos triángulos isósceles son semejantes si ambos tienen proporcionales las bases y el otro lado, siendo el lado desigual la base.
2. Son semejantes todos los triángulos que tengan sus lados proporcionales a tres números dados.

1.5.3. Polígonos semejantes

Dos polígonos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos homólogos son iguales.

- Lados homólogos: lados cuyos extremos están en vértices homólogos.
- Vértices homólogos: vértices de ángulos homólogos
- Ángulos homólogos: ángulos respectivamente iguales e igualmente dispuestos.

Los ángulos homólogos tienen la posibilidad de tener todos el mismo sentido siendo polígonos directamente semejantes o el sentido contrario siendo polígonos inversamente semejantes.

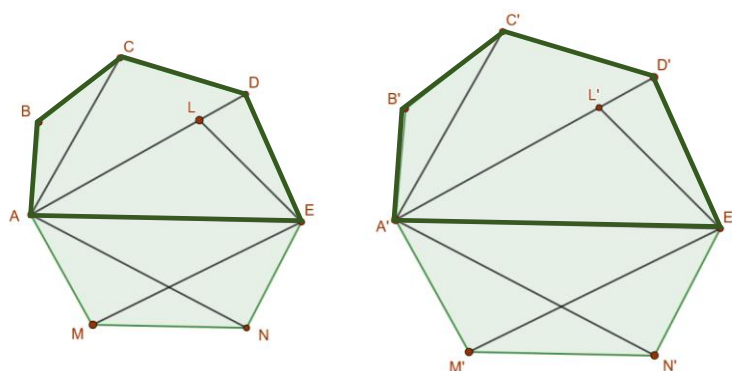


Figura 12. Polígonos semejantes de ocho vértices (elaboración propia).

Se observa que los polígonos formados por los vértices $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ de la figura anterior son semejantes si se verifica que:

$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad \hat{C} = \hat{C'} \quad \hat{D} = \hat{D'} \quad \hat{E} = \hat{E'}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$$

Donde $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, ..., son los lados homólogos.

Se supone que $\overline{AB}$ es k veces $\overline{A'B'}$, entonces la razón de semejanza de dichos polígonos es

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$$

También se puede decir que los puntos M y M' son homólogos si los triángulos AME y $A'M'E'$ a los cuales pertenece son semejantes y semejantemente dispuestos. De la misma forma se puede decir que los puntos L y L' son homólogos si los triángulos ALE y $A'L'E'$ a los cuales pertenece son semejantes y semejantemente dispuestos.

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{A'L'}} = k$$

Si los puntos M y M' y N y N' son homólogos, los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{M'N'}$ son homólogos también. Las diagonales de los polígonos semejantes de la misma forma, se puede apreciar que también son líneas homólogas.

■ Teoremas importantes

■ Teorema 1

La razón de los perímetros en dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza, es decir: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = K$

■ Demostración

Sean dos polígonos semejantes Q y Q' con perímetros q y q' y razón de semejanza k

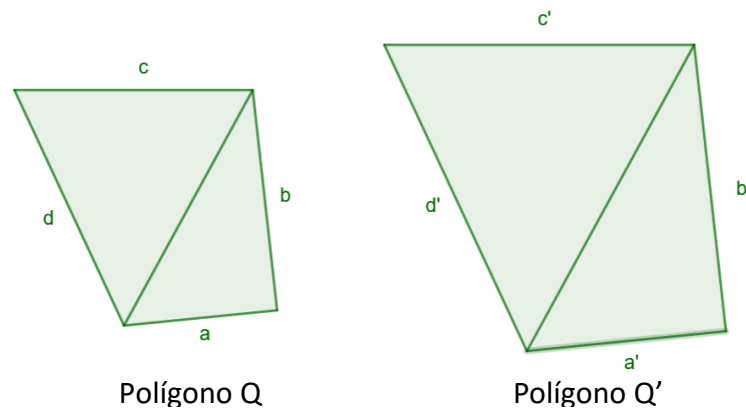


Figura 13. Polígonos semejantes de cuatro vértices (elaboración propia).

A partir de la semejanza de polígonos se obtiene: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$.

Según la propiedad de las series de razones iguales; en toda serie de razones iguales se verifica que la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes es igual a la razón entre un antecedente y su consecuente, con lo cual:

$$\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \frac{a}{a'} = k \Rightarrow \frac{q}{q'} = k$$

■ Teorema 2

Dos polígonos convexos son semejantes si pueden descomponerse mediante diagonales que unen sus vértices homólogos, en el mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.

■ Demostración

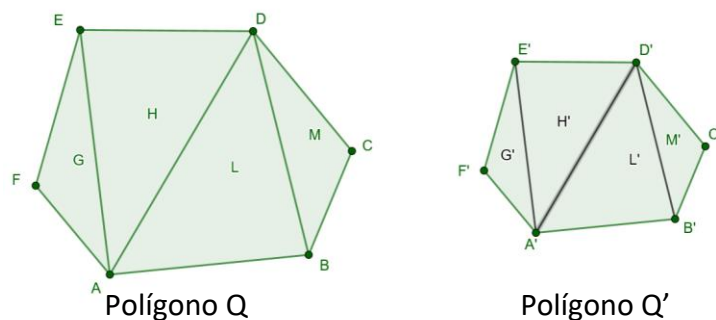


Figura 14. Polígonos semejantes de seis vértices (elaboración propia).

Sean dos polígonos Q y Q' en los cuales, los triángulos G, H, L, M del polígono Q y los triángulos G', H', L', M' del polígono Q' son semejantes respectivamente entonces los polígonos Q y Q' son semejantes.

Se puede escribir de la semejanza G y G' :

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} \text{ y } \begin{cases} \hat{F} = \hat{F}' \\ \widehat{FEA} = \widehat{F'E'A'} \end{cases}$$

Se deduce de la semejanza H y H' :

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} \text{ y } \begin{cases} \widehat{AED} = \widehat{A'E'D'} \\ \widehat{EDA} = \widehat{E'D'A'} \end{cases}$$

Al unificar los resultados anteriormente vistos se obtendrá:

$$\hat{F} = \hat{F}'; \widehat{FEA} + \widehat{AED} = \widehat{F'E'A'} + \widehat{A'E'D'} \Rightarrow \hat{E} = \hat{E}'$$

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}}$$

Del a misma forma, se realizarían las igualdades del resto de ángulos del polígono Q y el polígono Q' , y la proporcionalidad de sus lados homólogos, en consecuencia, son semejantes los polígonos.

■ Teorema 3

Al trazar rectas por los vértices de un polígono que converjan en el mismo punto O , y trazar rectas paralelas a los lados que componen el polígono, construyendo otros polígonos con los vértices pertenecientes al haz de rectas, y ordenados sobre los mismos rayos que el polígono supuesto, los polígonos resultantes son semejantes al primero. La razón de las distancias que hay desde el punto de convergencia O a dos puntos homólogos de dichos polígonos es igual a la razón de semejanza de estos polígonos.

■ Demostración

El polígono $ABCD$ tiene los ángulos respectivamente iguales al polígono $abcd$ por razones de paralelismo. Asimismo, al verificarse $\triangle ODC \sim \triangle Odc$, se deduce: $\frac{\overline{OC}}{\overline{Oc}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{dc}}$

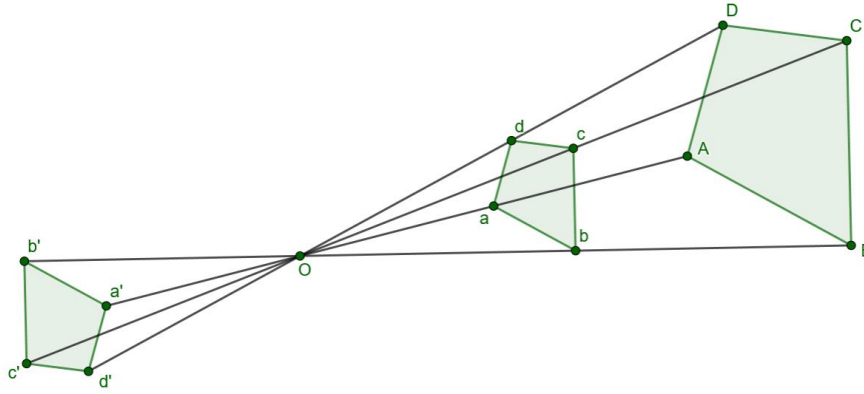


Figura 15. Construcción de polígonos homotéticos (elaboración propia).

De la misma forma, se aprecia $\triangle OCB \sim \triangle Ocb$ con lo que se deduce:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{Oc}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{cb}}, \text{ en donde: } \frac{\overline{DC}}{\overline{dc}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{cb}}$$

Por consiguiente, trabajando de la misma manera se deduce que las razones $\frac{\overline{BA}}{\overline{ba}}$ y $\frac{\overline{AD}}{\overline{ad}}$ son iguales a las anteriores:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{dc}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{ba}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{ad}}$$

La semejanza de ambos polígonos queda probada, la razón de semejanza k se puede calcular con la siguiente expresión: $\frac{\overline{OC}}{\overline{Oc}} = k$.

De forma análoga si se hubiera seleccionado el polígono $a'b'c'd'$ en vez del polígono $abcd$ se demostraría el teorema.

Es evidente que el recíproco de este teorema también se verifica, esto es, 'convergen en el mismo punto las rectas que unen los puntos homólogos de dos polígonos semejantes, siendo paralelos sus lados homólogos.'

1.5.4. Homotecia en el plano

■ Definición

La homotecia en el plano se define como la transformación de elementos (puntos, líneas, figuras...) a otros semejantes a ellos, en relación a un punto en el plano, denominado centro de homotecia y una razón dada, denominada razón de homotecia.

Se denomina homotecia de centro O , siendo O un punto en el plano y razón k , siendo k un número real distinto de cero. Se designará como $H_{O,k}$ a la aplicación que hace corresponder a cada punto del plano A otro punto del plano A' , tal que:

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Se denomina homotético de A al punto A' y se escribe de la siguiente forma:

$$H_{O,k}(A) = A'$$

- a) La homotecia se denomina directa Si $k > 0$; A y A' se encuentran al mismo lado del centro O .
- b) La homotecia se denomina inversa Si $k < 0$; A y A' se encuentran a distinto lado del centro al O .
- c) La homotecia es idéntica si $k = 1$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}$, A y A' son coincidentes.
- d) La homotecia es una simetría central de centro O si $k = -1$ y $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.

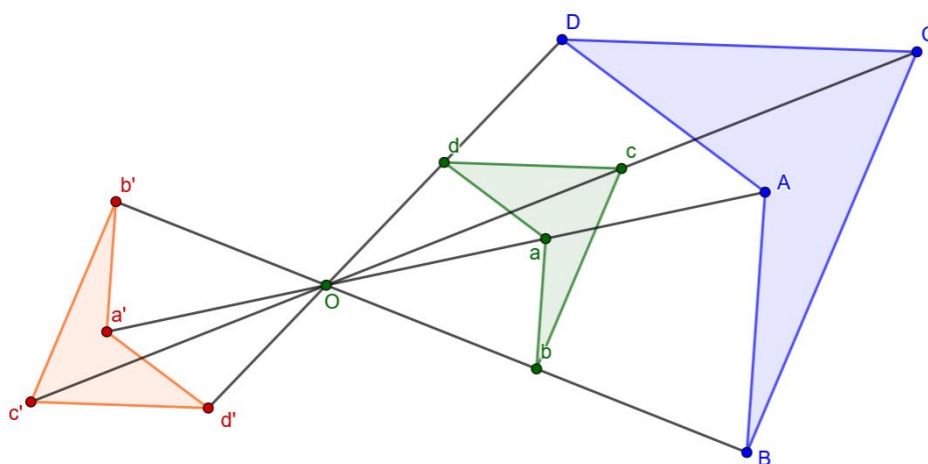


Figura 16. Construcción de figuras homotéticas (elaboración propia).

Las figuras $a'b'c'd'$ y $abcd$ son figuras homotéticas inversas.

Las figuras $ABCD$ y $abcd$ son figuras homotéticas directas.

Puntos invariantes:

Se define punto invariante a aquel punto que no cambia al aplicarle una transformación o conjunto de transformaciones, es decir, es un punto que permanece inalterado tras la acción de la transformación.

Con respecto a la homotecia en el plano se exponen las siguientes características:

- a) Todos los puntos son invariantes si $k = 1$.
- b) Solo el centro de la homotecia es punto invariante si $k \neq 1$.

Si A es un punto invariante y A' su homotético, por definición $A = A'$;

$$\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - k \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow (1-k)\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} = 0 \text{ por ser } k \neq 1.$$

Sin embargo, $\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow A \equiv O$.

- c) Son invariantes globalmente las rectas que pasan por el centro de la homotecia, deducido por la definición de homotecia.

1.5.5. Semejanza en el plano

Se define la semejanza en el plano como toda aplicación que pueda descomponerse en producto de una homotecia y un movimiento del plano (traslación y/o rotación).

$$A \xrightarrow{s} A'$$

Se verifica que: $\overrightarrow{O'A'} = r \cdot \overrightarrow{OA}$, siendo $r = |K|$, donde K es la razón de la semejanza que coincide con la de la homotecia.

Se denomina directa la semejanza si la homotecia es directa e inversa si la homotecia es inversa.

En la definición de homotecias elaborada en el apartado anterior, se ha visto como las homotecias conservan las formas de figuras y la proporcionalidad de sus longitudes. En este caso, la semejanza solo se fija en la forma de la figura. La semejanza mantiene las propiedades de invariancia de la homotecia en el movimiento, o lo que es lo mismo, independientes de la posición.

Si se considera en particular la homotecia identidad, las semejanzas son movimientos del plano.

Se puede decir que cuando dos figuras tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados homólogos proporcionales, son figuras semejantes.

■ Propiedades de la semejanza

- 1) Los segmentos homólogos son proporcionales.
- 2) Las semejanzas transforman puntos que están alineados en puntos alineados con el mismo orden y, por consiguiente, rectas en rectas.
- 3) Las semejanzas transforman ángulos en ángulos equivalentes, si la semejanza es directa del mismo sentido y si la semejanza es inversa de sentido contrario.
- 4) Las razones de homotecia y semejanza son iguales.

1.6. El Teorema de Tales

1.6.1. Teorema de Tales

Sean dos rectas s y t de un plano. Se toman dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ cualesquiera en la recta s y se trazan rectas paralelas entre sí por sus extremos hasta que corten a la recta t , con lo cual, se determinan dos segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ proporcionales en la recta t a los segmentos iniciales, y por lo cual se verifica la siguiente proporcionalidad de razones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

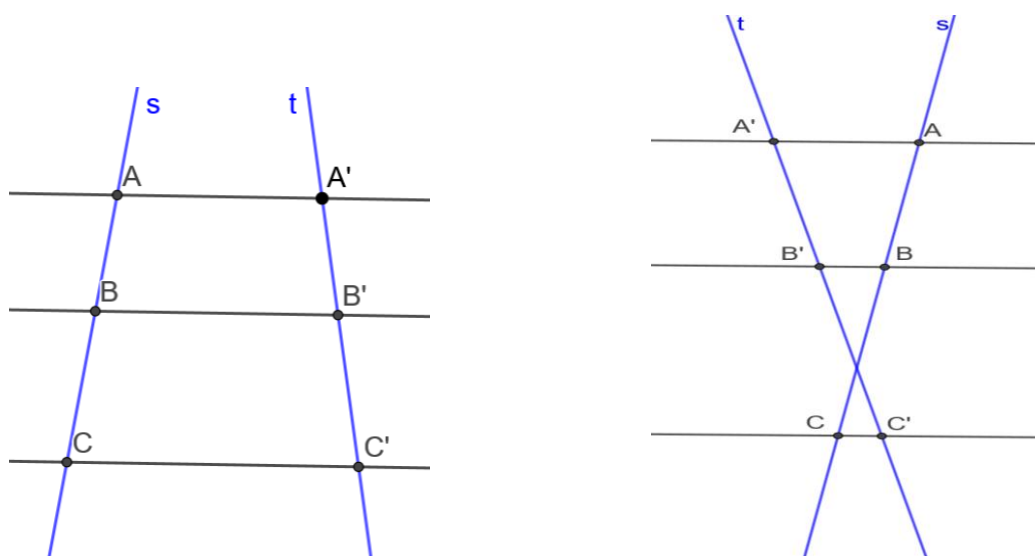


Figura 17. Construcción de rectas secantes para enunciar el Teorema de Tales (elaboración propia).

El Teorema de Tales se puede enunciar de otra forma;

Sean dos rectas s y t que se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos que se determinan por los puntos de intersección entre las rectas son proporcionales a los segmentos determinados por los puntos respectivos en la otra recta.

Se va a demostrar este teorema para el caso de rectas secantes y luego para rectas paralelas, usando los resultados del caso anterior.

Caso I):

■ Demostración,

Sean dos rectas secantes s y t , y el sistema de rectas paralelas AE , BF , CG , DH .

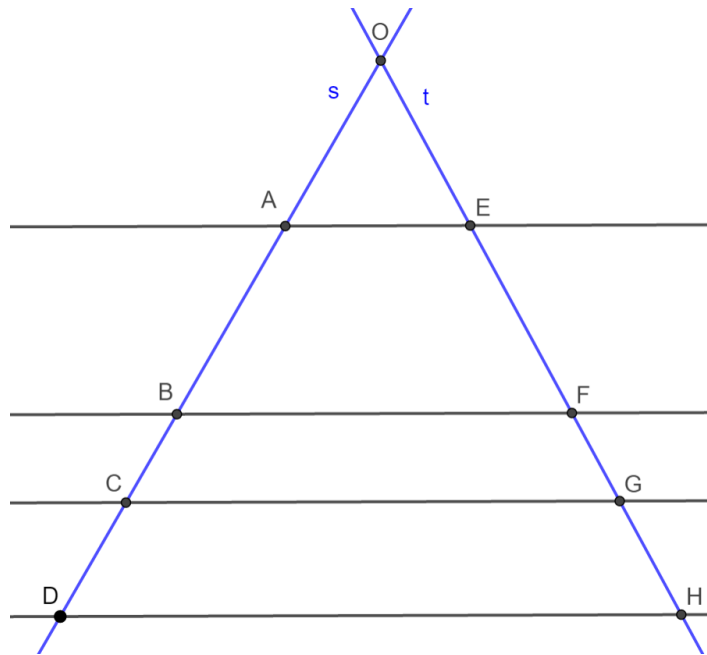


Figura 18. Esquema construido para la demostración del Teorema de Tales. Caso I (elaboración propia).

Sea el punto O la intersección de las rectas s y t . Los triángulos OAE , OBF , OCG , ODH tienen en común el ángulo formado en el vértice O e iguales los ángulos formados en A , B , C y D . Los triángulos OAE , OBF , OCG , ODH al tener dos ángulos iguales y el lado comprendido entre ellos proporcional son semejantes. Esto es; existe un número real r tal que:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OG} = \frac{OD}{OH} = r$$

Lo que implica:

$$AB = OB - OA = r OF - r OE = r (OF - OE) = r EF$$

$$BC = OC - OB = r OG - r OF = r (OG - OF) = r FG$$

$$CD = OD - OC = r OH - r OG = r (OH - OG) = r GH$$

Caso II):

Sean dos rectas paralelas s y m , y el sistema de rectas paralelas AE , BF , CG , DH

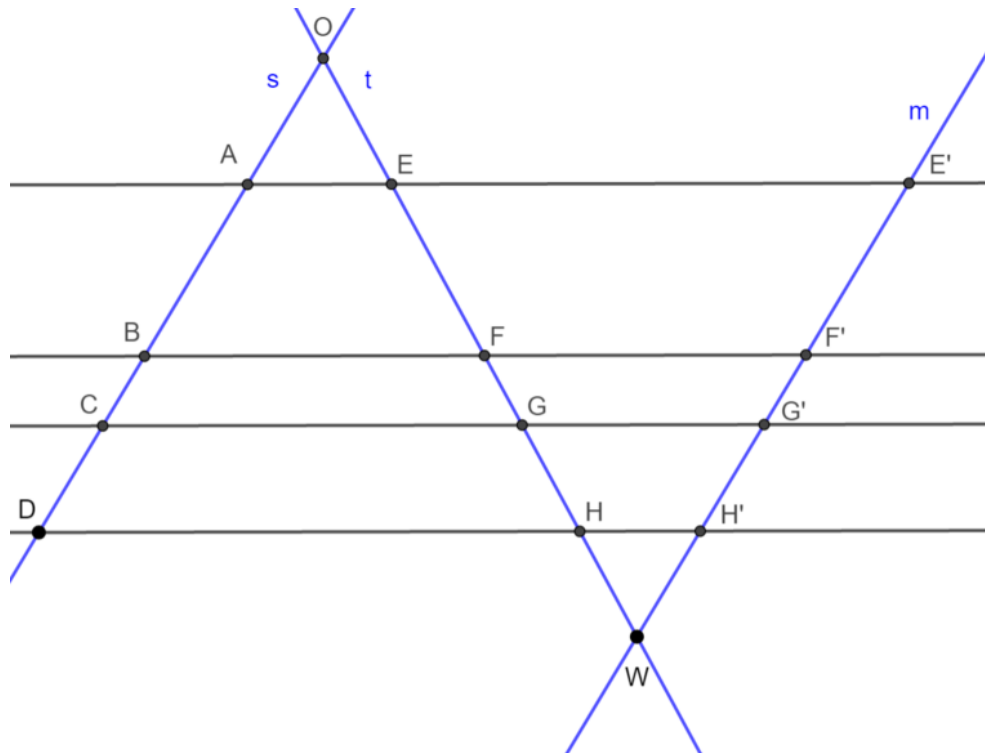


Figura 19. Esquema construido para la demostración del Teorema de Tales. Caso II (elaboración propia).

Se construye la recta t tal que las rectas t y m no sean rectas paralelas, cortándose en el punto W . De esta forma la recta t es secante a la recta s y se cortan en el punto O .

Ahora bien; por el caso 1, se tiene que existen números reales r y s tal que:

$$AB = r EF$$

$$EF = s E'F'$$

$$BC = r FG$$

$$FG = s F'G'$$

$$CD = r GH$$

$$GH = s G'H'$$

Por lo que entonces:

$$AB = r s E'F'$$

$$BC = r s F'G'$$

$$CD = r s G'H'$$

Quedando demostrado el Teorema de Tales.

1.6.2. Segmentos proporcionales producidos por un haz de rectas

■ Teorema

Dos rectas paralelas cualesquiera son cortadas por las rectas de un haz en segmentos proporcionales y recíprocamente, si varias rectas secantes $AA', BB', CC', \dots$ cortan a dos

rectas paralelas creando sobre ellas segmentos proporcionales, estas secantes convergen en un mismo punto.

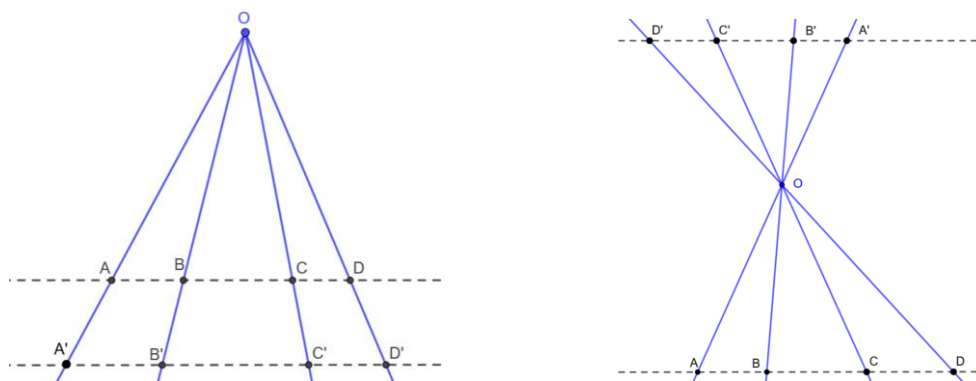


Figura 20. Construcción de segmentos proporcionales producidos por un haz de rectas (elaboración propia).

■ Demostración

Sean dos rectas paralelas AD y $A'D'$ que se cortan por un haz de rectas que convergen en O , en tal caso, los triángulos semejantes que conforman con las concurrentes verifica:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \\ \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \\ \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}}\end{aligned}$$

De estas relaciones se puede decir que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

A continuación, se va a demostrar el recíproco. Sean dos rectas paralelas s y s' , que se cortan por $AA', BB', CC', \dots$ de la forma:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}.$$

Se supone que AA', BB' convergen en el punto O y por otro lado, CC' no converge en el punto O .

Se traza una recta OC por el punto C que corte a la recta s' en el punto C'' y con lo descrito en la parte anterior se verifica:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C''}}$$

Al considerar esta expresión y la expresión anterior se obtiene que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{B'C'} = \overline{B'C''}$$

Esta igualdad es ilógica a no ser que C' y C'' sean coincidentes, con lo cual $CC' = CC''$ y convergen junto a las demás en el punto O .

■ Corolario

Al ser semejantes los triángulos que se forman por las rectas convergentes y las paralelas, los segmentos $\overline{OA}, \overline{OA'}, \overline{OB}, \overline{OB'}$... son proporcionales o lo que es lo mismo:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}} = \dots$$

1.6.3. Aplicaciones

■ Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados

Se denomina cuarto proporcional a la construcción del segmento x , tal que, dados otros tres segmentos a, b, c se verifica $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

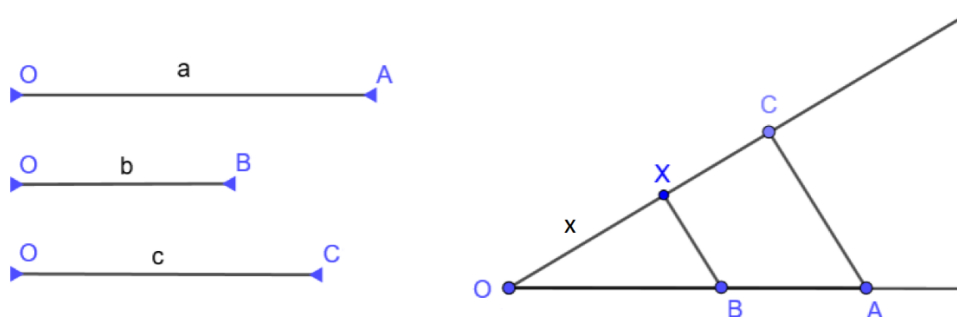


Figura 21. Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados. Fase I (elaboración propia).

A partir del vértice O , se trazan los segmentos a y b sobre un lado de un ángulo y el segmento c sobre el otro. Se unen los extremos A y C de los segmentos a y c , y se traza por B una paralela al segmento $\overline{AC}$ que cortara al segmento $\overline{OC}$ en el punto X , que será el extremo del segmento x medido a partir del vértice O .

La solución obtenida es independiente al ángulo elegido, debido a que todos los cuartos proporcionales a tres segmentos dados son iguales. Si b es igual a c , se obtendría el segmento denominado tercero proporcional entre a y b .

Al construirlo geométricamente tenemos:

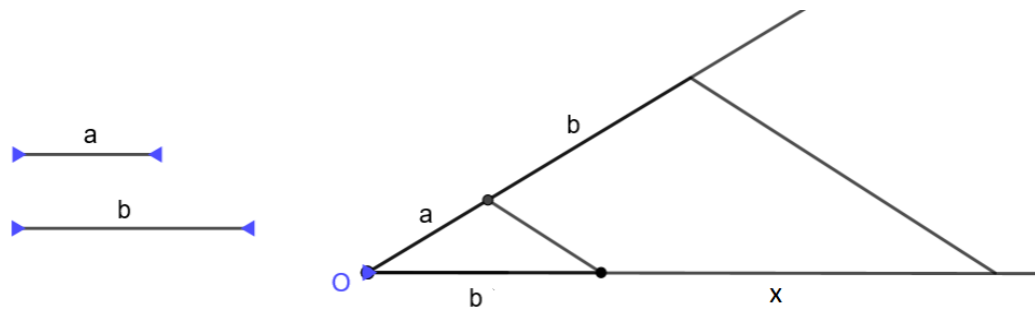


Figura 22. Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados. Fase II (elaboración propia).

■ División de un segmento en partes proporcionales a segmentos dados

A partir del Teorema de Tales, es posible dividir un segmento dado $\overline{AB}$ de una forma sencilla en partes proporcionales a otros segmentos m, n, p .

Trazando los segmentos m, n, p consecutivamente a partir de un vértice A , concurrente con el segmento dado, se une el extremo P obtenido por la suma de los segmentos $m + n + p$ con el punto B que será el extremo del segmento dado, y al realizar paralelas al segmento $\overline{PB}$ por los puntos de división M y N se determinaran en el segmento dado los nuevos segmentos x, y, z , que al sumarlos se obtiene el segmento $\overline{AB}$ y son proporcionales a m, n, p .

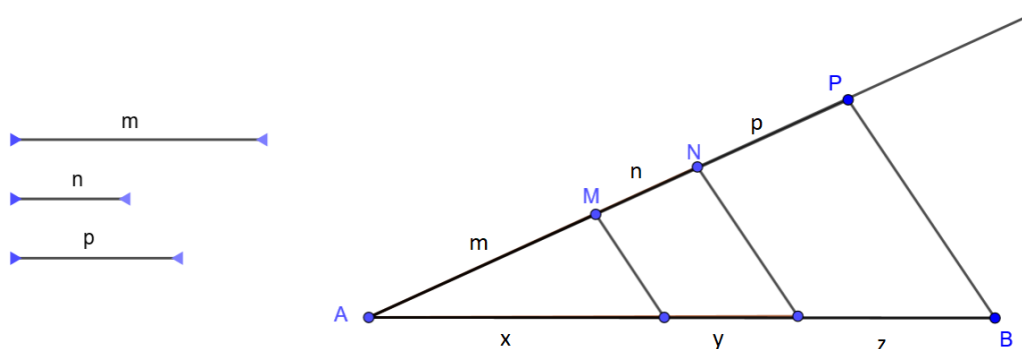


Figura 23. División de un segmento en partes proporcionales a segmentos dados (elaboración propia).

1.7. Razones trigonométricas

1.7.1. Teorema de Pitágoras

En primer lugar, se va a enunciar el Teorema de Pitágoras, el cual utilizaremos posteriormente.

Sea un triángulo rectángulo de catetos a y b y con hipotenusa c . Entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

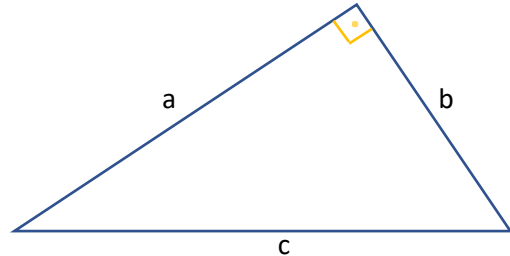


Figura 24. Triángulo rectángulo (elaboración propia).

■ Demostración

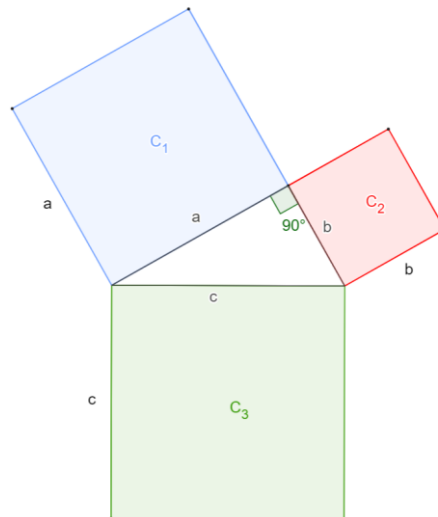


Figura 25. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase I (elaboración propia).

Se construyen cuadrados sobre las aristas exteriores del triángulo rectángulo, siendo sus respectivas áreas:

$$\text{Área } C_1 = a^2, \text{ Área } C_2 = b^2, \text{ Área } C_3 = c^2$$

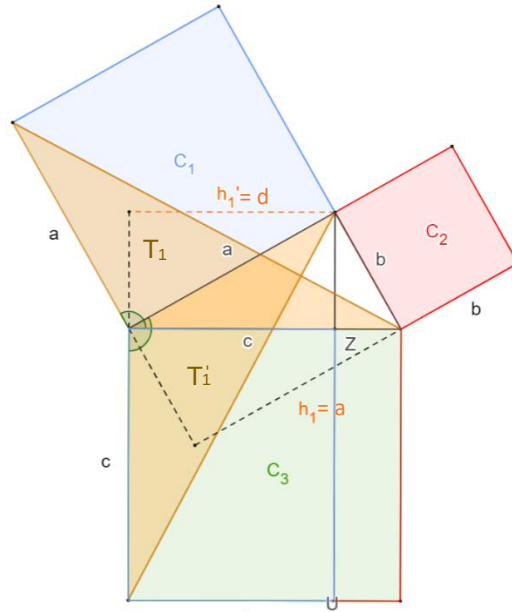


Figura 26. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase II (elaboración propia).

Se puede calcular a partir del esquema anterior, las respectivas áreas de los triángulos T_1 y T_1' .

$$\text{Área del triángulo } T_1 = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2} = \frac{(a) \cdot (h_1)}{2} = \frac{(a) \cdot (a)}{2} = \frac{a^2}{2}, \text{ donde } h_1 = a$$

$$\text{Área del triángulo } T_1' = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2} = \frac{(c) \cdot (h_1')}{2} = \frac{c \cdot d}{2}, \text{ donde } h_1' = d$$

Los triángulos T_1 y T_1' son congruentes debido a que dos de sus lados tienen la misma longitud y los ángulos correspondientes son iguales, por lo cual los triángulos T_1 y T_1' tienen el mismo área.

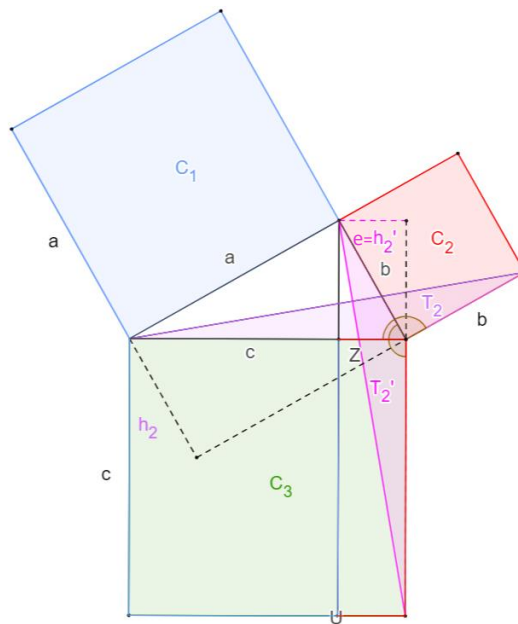


Figura 27. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase III (elaboración propia).

De la misma manera, se puede calcular a partir del esquema anterior, las respectivas áreas de los triángulos T_2 y T_2' .

$$\text{Área del triángulo } T_2 = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2} = \frac{(b) \cdot (h_2)}{2} = \frac{(b) \cdot (b)}{2} = \frac{b^2}{2}, \text{ donde } h_2 = b$$

$$\text{Área del triángulo } T_2' = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2} = \frac{(c) \cdot (h_2')}{2} = \frac{c \cdot e}{2}, \text{ donde } h_2' = e$$

Los triángulos T_2 y T_2' son congruentes debido a que dos de sus lados tienen la misma longitud y los ángulos correspondientes son iguales, por lo cual los triángulos T_2 y T_2' tienen el mismo área.

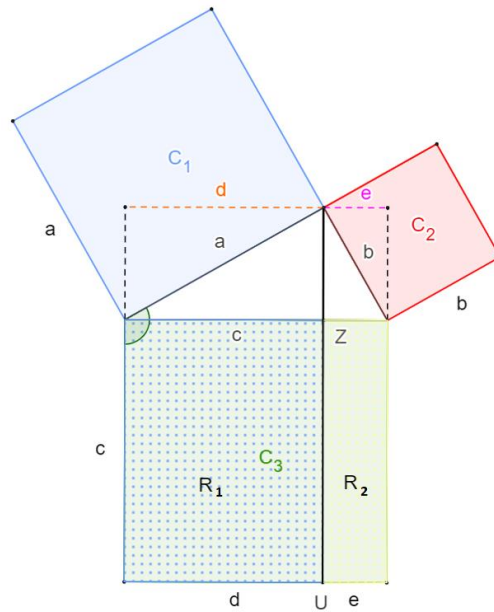


Figura 28 Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase IV (elaboración propia).

Se deducen las siguientes expresiones:

$$\text{Doble del área del triángulo } T_1 = 2 \left(\frac{a^2}{2} \right) = a^2, \text{ o lo que es lo mismo el área del cuadrado } C_1$$

$$\text{Doble del área del triángulo } T_2 = 2 \left(\frac{b^2}{2} \right) = b^2, \text{ o lo que es lo mismo el área del cuadrado } C_2$$

Vemos que el área de los cuadrados C_1 y C_2 es el doble del área de los triángulos T_1 y T_2 calculada anteriormente.

De la expresión del área del triángulo $T_1' = \frac{c \cdot d}{2}$, se despeja d y se obtiene:

$d = \frac{2 \cdot \text{Área del triángulo } T_1'}{c}$, en donde el área del rectángulo R_1 de lados c y d es igual al doble del área del triángulo T_1' o lo que es lo mismo a^2 lo que se correspondería con el área del cuadrado C_1 .

De la expresión del área del triángulo $T_2' = \frac{c \cdot e}{2}$, se despeja e y se obtiene:

$e = \frac{2 \cdot \text{Área del triángulo } T_2'}{c}$, en donde el área del rectángulo R_2 de lados c y e es igual al doble del área del triángulo T_2' o lo que es lo mismo b^2 lo que se correspondería con el área del cuadrado C_2 .

El cuadrado C_3 está compuesto por los rectángulos R_1 y R_2 por lo cual: $R_1 + R_2 = C_3$

Se puede comprobar que la suma del área del cuadrado 1 y el cuadrado 2 es igual al área del cuadrado 3, quedando demostrado el Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.

1.7.2. Razones trigonométricas de un ángulo

Se construye un triángulo rectángulo $\triangle OAB$ sobre el ángulo α con vértice en el punto O , comprendido entre los lados OX y OZ

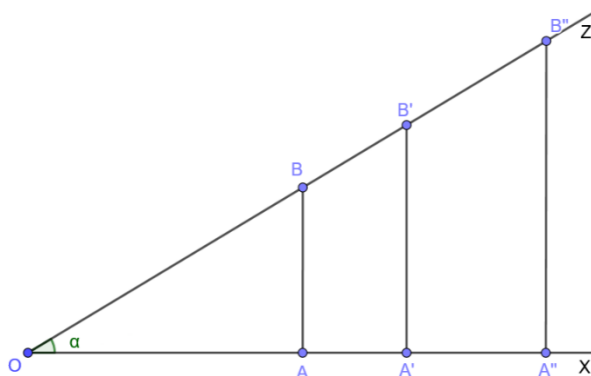


Figura 29. Construcción de un triángulo rectángulo sobre un ángulo α (elaboración propia).

■ Definiciones

- a) La razón entre el cateto opuesto $\overline{AB}$ y la hipotenusa $\overline{OB}$ se denomina **seno de** α

$$\text{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

- b) La razón entre el cateto adyacente $\overline{OA}$ y la hipotenusa $\overline{OB}$ se denomina **coseno de** α

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

- c) La razón entre el cateto opuesto $\overline{AB}$ y el cateto adyacente $\overline{OA}$ se denomina **tangente de α** .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

Al aplicar el Teorema de Tales en la figura anterior, si construimos otros triángulos rectángulos $OA'B'$; $OA''B''$, etc., se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OB''}} = \dots = \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OB''}} = \dots = \cos \alpha \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OA''}} = \dots = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Se puede deducir que las razones trigonométricas de un ángulo no dependen de las longitudes de sus lados.

Se analiza la relación existente entre seno, coseno y tangente de un mismo ángulo.

- 1) Se divide los miembros de las definiciones anteriores a) y b):

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} : \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

- 2) Se suman los miembros al cuadrado de las definiciones a) y b):

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \right)^2 + \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \right)^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}$$

Mediante el Teorema de Pitágoras definido anteriormente, resolvemos la expresión:

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = 1 \Rightarrow$$

$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y se obtiene la fórmula fundamental de la trigonometría.

Se define a continuación las razones inversas a las razones anteriores:

- 1) La razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto se denomina **cotangente de α**

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

2) La razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente se denomina **secante de α**

$$\sec \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

3) La razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto se denomina **cosecante de α**

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Veamos las definiciones anteriores en un sistema de ejes cartesianos (OX, OY) , considerando una circunferencia goniométrica de radio 1 y centro O .

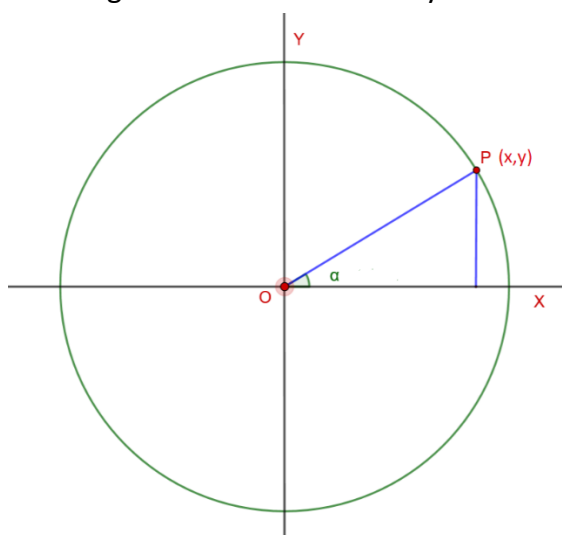


Figura 30. Construcción de una circunferencia goniométrica de radio 1 y centro O . (elaboración propia).

A partir de las definiciones anteriores y siendo P un punto de la circunferencia, se obtiene;

$$\operatorname{sen} \alpha = y \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\cos \alpha = x \quad \sec \alpha = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y}$$

A continuación, se van a estudiar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo a partir de los términos anteriores, para ello se va a utilizar el radián como unidad de medida para ángulos.

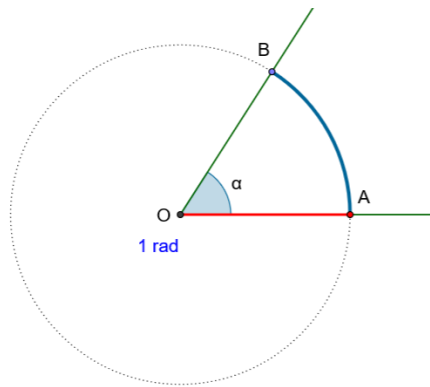


Figura 31. Construcción geométrica de un radián (elaboración propia).

Se define **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca cuenta con la misma longitud que el radio con el que se ha trazado, es decir, α es un radian debido a que la longitud del arco AB es igual a la del radio.

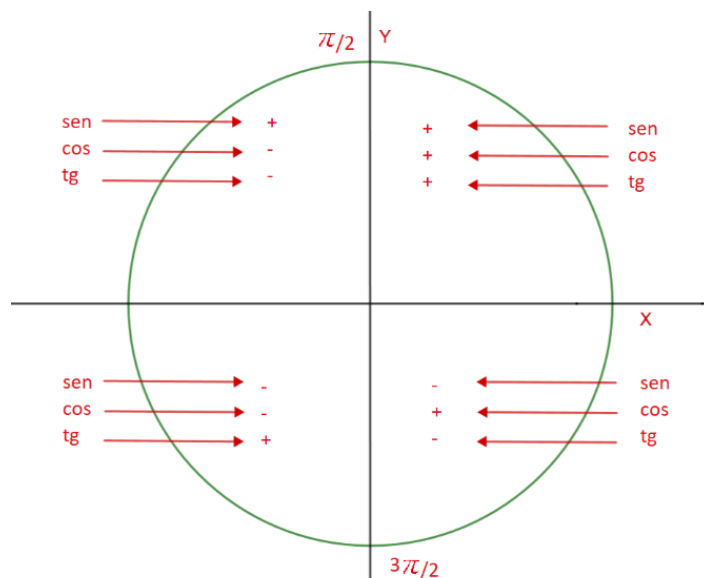


Figura 32. Signos de las razones trigonométricas por cuadrantes (elaboración propia).

- En ángulo se encuentra en el primer cuadrante y las razones son positivas para el ángulo α comprendido entre 0 y $\pi/2$.
- En ángulo se encuentra en el segundo cuadrante; el seno es positivo, coseno y tangente negativos para el ángulo α comprendido entre $\pi/2$ y π .
- En ángulo se encuentra en el tercer cuadrante; el seno y coseno son negativos y la tangente positiva para el ángulo α comprendido entre π y $3\pi/2$.
- En ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante; el coseno es positivo y el seno y la tangente son negativos para el ángulo α comprendido entre $3\pi/2$ y 2π .

1.7.3. Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante

Dado un ángulo en el primer cuadrante, comprendido entre $\pi/2$ y 0, existen otros ángulos en los otros cuadrantes para los que las razones trigonométricas son las mismas en valor absoluto al ángulo dado.

1. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios

Sea un ángulo $\widehat{AOP}$, se traza el punto P' simétrico del P respecto al eje OY . Se observa que triángulos rectángulos $\triangle PQO$ y $\triangle P'Q'O$ son los congruentes; por lo cual, $\widehat{AOP}$ y $\widehat{AOP'}$ son suplementarios. Si $\widehat{AOP} = \alpha$, $\widehat{AOP'} = \pi - \alpha$, y se tiene:

■ Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = y = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -x = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

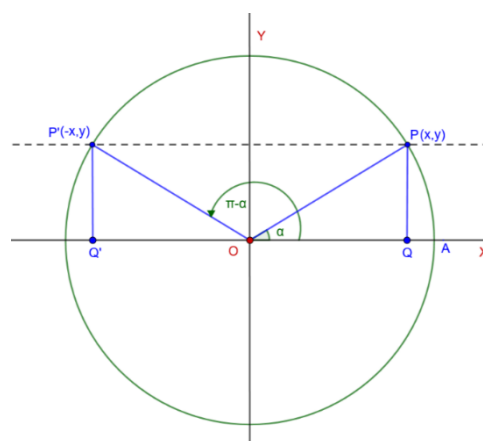


Figura 33. Razones trigonométricas. Caso I (elaboración propia).

2. Razones trigonométricas de los ángulos que difieren en $\pi/2$

En este caso los ángulos α y $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ se presentan según la figura que aparece a continuación. Se observa que los triángulos rectángulos $\triangle PQO$ y $\triangle P'Q'O$ son los mismos; teniendo en cuenta que $\widehat{AOP} = \alpha$, y que $\widehat{AOP'} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, se deducen las razones trigonométricas:

■ Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = x = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -y = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

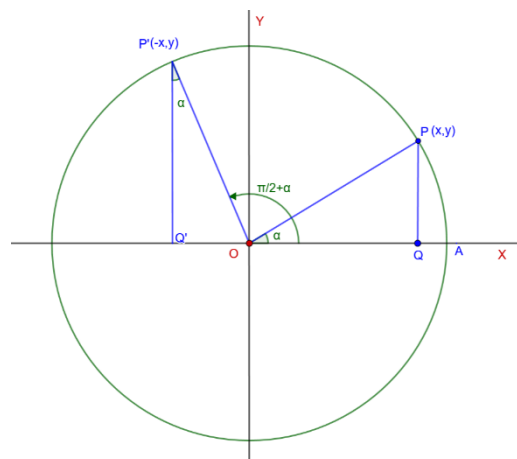


Figura 34 Razones trigonométricas. Caso II (elaboración propia).

3. Razones trigonométricas de los ángulos que difieren en π

En este caso los ángulos α y $(\pi + \alpha)$ se presentan según la figura que aparece a continuación. Se observa que triángulos rectángulos $\triangle PQO$ y $\triangle P'Q'O$ son los mismos; teniendo en cuenta que $\widehat{AOP} = \alpha$, y que $\widehat{AOP'} = \pi + \alpha$, se deducen las razones trigonométricas:

■ Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -y = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -x = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

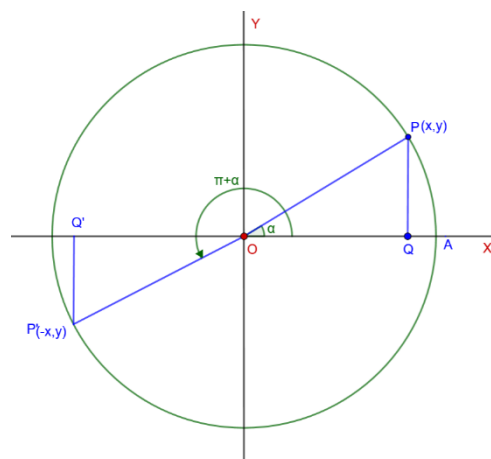


Figura 35. Razones trigonométricas. Caso III (elaboración propia).

4. Razones trigonométricas de ángulos que suman 2π

En este caso los ángulos α y $(2\pi - \alpha)$ se presentan según la figura que aparece a continuación. Se observa que los triángulos rectángulos $\triangle PQO$ y $\triangle P'Q'O$ son los mismos; teniendo en cuenta que $\widehat{AOP} = \alpha$, y que $\widehat{AOP'} = (2\pi - \alpha)$, y P' es simétrico del punto P respecto al eje OX se deducen las razones trigonométricas:

■ Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -y = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = x = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$$

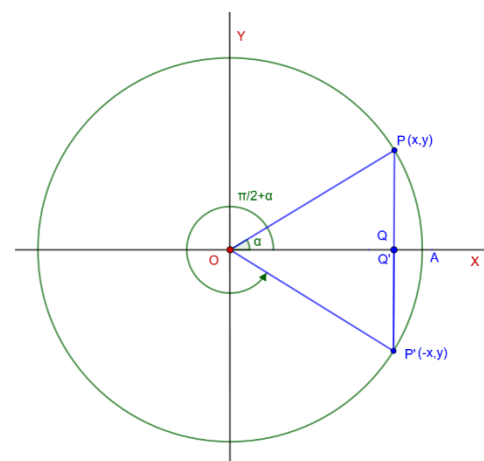


Figura 36. Razones trigonométricas. Caso IV (elaboración propia).

5. Razones trigonométricas de ángulos complementarios

En este caso los ángulos α y $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ se presentan según la figura que aparece a continuación. Se observa que triángulos rectángulos $\triangle PQO$ y $\triangle PP'O$ son los mismos; teniendo en cuenta que $\widehat{AOP} = \alpha$, y que $\widehat{P'OP} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, se deducen las razones trigonométricas.

■ Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \alpha$$

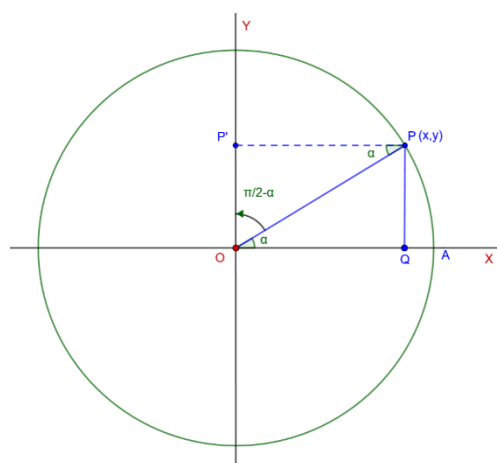


Figura 37. Razones trigonométricas. Caso V (elaboración propia).

6. Razones trigonométricas de ángulos mayores que 2π

Sean dos ángulos que difieren entre ellos un número entero de 2π radianes. Si uno de ellos es α , la dimensión del otro ángulo será $(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ambos ángulos coinciden en origen y en extremo, y sus razones trigonométricas serán iguales.

■ Razones trigonométricas

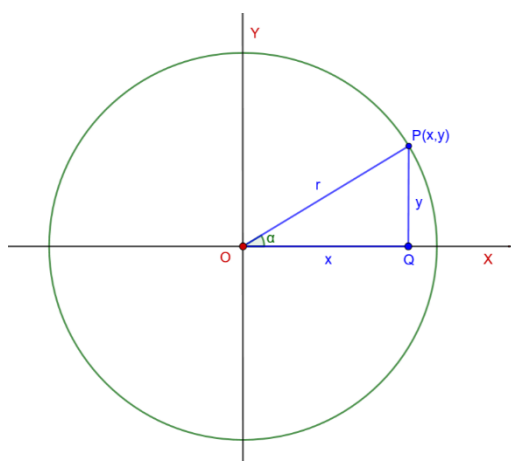
$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$$

1.7.4. Razones trigonométricas de un mismo ángulo

Al aplicar el Teorema de Pitágoras en el siguiente triángulo rectángulo $\triangle PQO$, se obtiene:



$$r^2 = x^2 + y^2;$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = y^2$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r^2 \cdot \cos^2 \alpha = x^2$$

Figura 38. Construcción de un triángulo rectángulo en una circunferencia (elaboración propia).

$$r^2 (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = r^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Se obtiene la relación fundamental de la Trigonometría, la cual nos permite relacionar las diferentes razones trigonométricas de un ángulo.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = y / r \\ \operatorname{cosec} \alpha = r / y \end{array} \right\} \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = x / r \\ \sec \alpha = r / x \end{array} \right\} \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = y / x \\ \operatorname{ctg} \alpha = x / y \end{array} \right\} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

5. Fundamentación curricular

La unidad didáctica elaborada en este TFM tiene como función principal estructurar y organizar las temáticas que se trabajan en el curso escolar del segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), siendo esta fase la última etapa académica para determinados alumnos y una etapa propedéutica para resto.

La evaluación del proceso aprendizaje-enseñanza de los estudiantes de la Educación Secundaria Obligatoria será continua, integradora y formativa, y permite al alumnado adquirir elementos básicos de la educación y desarrollar hábitos de estudio y trabajo. Cada centro dispone de autonomía para elaborar su propio proyecto educativo de

acuerdo con las indicaciones de la administración educativa, que identifica sus valores, identidad, metodología didáctica, etc.

La materia de matemáticas se impartirá como asignatura troncal los 3 primeros cursos y en el cuarto curso los alumnos podrán optar entre matemáticas orientadas a enseñanzas académicas y matemáticas orientadas a enseñanzas aplicadas.

A continuación, se realizará un análisis del currículo escolar a partir de los documentos oficiales de ámbito autonómico y nacional vigentes y un análisis de diferentes libros de texto de la editorial Grupo Anaya S.A., la editorial Santillana Grazalema S.L. y la editorial Guadiel-Edebé S.L.

1.8. Análisis del currículo escolar

El término currículo, en el sentido educativo, se identifica con toda actividad que programe una formación. Los contenidos del currículo de secundaria están relacionados con las capacidades obtenidas por los alumnos en primaria.

Se introduce el concepto de currículo a través del artículo: “Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para educación secundaria” elaborado por Luis Rico, profesor de la Universidad de Granada del Departamento de Didáctica de la Matemática.

El currículo escolar plantea dar solución a determinadas cuestiones a través de un plan de formación, como son: ¿Qué es el conocimiento?, ¿Qué es el aprendizaje?, ¿Qué es la enseñanza? ¿Para qué sirve el conocimiento? En definitiva, el currículo ha de ofrecer propuestas concisas en materia de: interpretar el aprendizaje, implementar la enseñanza, formas de entender el conocimiento y la evaluación de la utilidad del aprendizaje obtenido.

A partir de estas cuestiones se establecen cuatro dimensiones relacionadas, sobre las que se ha de reflexionar al planificar. La dimensión cultural y conceptual que está relacionada con el conocimiento, dimensión cognitiva o de desarrollo según entendamos el aprendizaje, dimensión ética según entendamos la enseñanza y la instrucción y la dimensión social.

A continuación, se muestra en esquema con la estructura del currículo formada por las cuatro dimensiones descritas.

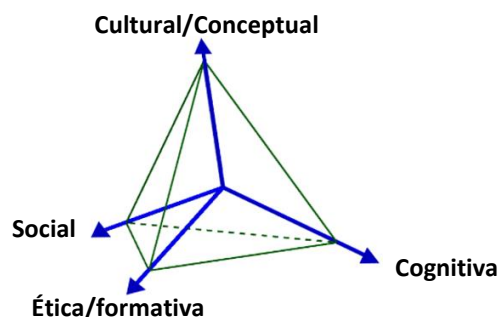


Figura 39. Dimensiones del currículo (Rico, 1997).

El concepto general de currículo contempla diferentes niveles de reflexión. Desde el punto de vista profesional los más interesantes son: el nivel de trabajo en el aula y un segundo nivel denominado nivel de diseño o concepción del currículo.

- El nivel de trabajo en el aula: es donde se produce la interacción alumno/profesor, resultando los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje escolar. Este nivel es el de desarrollo o puesta en práctica del currículo y tiene lugar en la escuela y en la sala de clase. Está compuesto por los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación.
- El nivel de diseño o concepción del currículo: no se puede entender el currículo sin un proyecto de desarrollo cuyo lugar esté en la administración. Los componentes del nivel de diseño son una extensión del triángulo didáctico: disciplina-alumno-profesor. Los componentes serán: el profesor, los estudiantes, la materia y el aula.

En la siguiente tabla, se exponen los niveles y las dimensiones en el estudio del currículo:

DIMENSIONES	Cultural/ conceptual	Cognitiva	Ética/ formativa	Social
Nivel de trabajo en el aula	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
Nivel de diseño	Materia	Estudiantes	Profesor	Aula

Tabla 9. Niveles y dimensiones en el estudio del currículo (Rico, 1997).

El currículo ha experimentado un cambio desde la Matemática Moderna (1960) hasta el modelo basado en competencias (2010). En la actualidad, la Educación Secundaria Obligatoria se rige por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E.) a nivel nacional, y la Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (L.E.A.) en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

El Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, describe el currículo del 2º curso de E.S.O., exponiendo los contenidos, criterios de evaluación y estándares de

aprendizaje evaluables en el que se desarrolla la unidad didáctica elaborada en este TFM, ubicada en el bloque 3 de Geometría.

En los resultados del mayor examen internacional de competencias educativas, conocido como informe PISA (Programa Internacional para la Evaluación Integral de Alumnos), recogidos en el año 2018 y publicados el 3 de diciembre de 2019, se aprecia que España empeora en matemáticas:

Prueba de matemáticas			
Japón	527	Francia	495
Corea del Sur	526	Islandia	495
Estonia	523	N. Zelanda	494
P. Bajos	519	Portugal	492
Polonia	516	Australia	491
Suiza	515	OCDE	489
Canadá	512	Italia	487
Dinamarca	509	Eslovaquia	486
Eslovenia	509	Luxemburgo	483
Bélgica	508	España	481
Finlandia	507	Hungría	481
Reino Unido	502	Lituania	481
Suecia	502	EEUU	478
Noruega	501	Israel	463
Alemania	500	Turquía	454
Irlanda	500	Grecia	451
Austria	499	Chile	417
R. Checa	499	México	409
Letonia	496	Colombia	391

Tabla 10. Puntuaciones en matemáticas por países (OCDE).

Estos resultados se obtuvieron a partir de 600.000 alumnos al terminar la educación secundaria de 79 países, y representa a 32 millones de adolescentes en todo el mundo. El promedio de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) es de 489 puntos, se puede comprobar que España se sitúa por debajo de la media internacional con 481 puntos. A continuación, se expresan los datos gráficamente para una mejor comprensión.

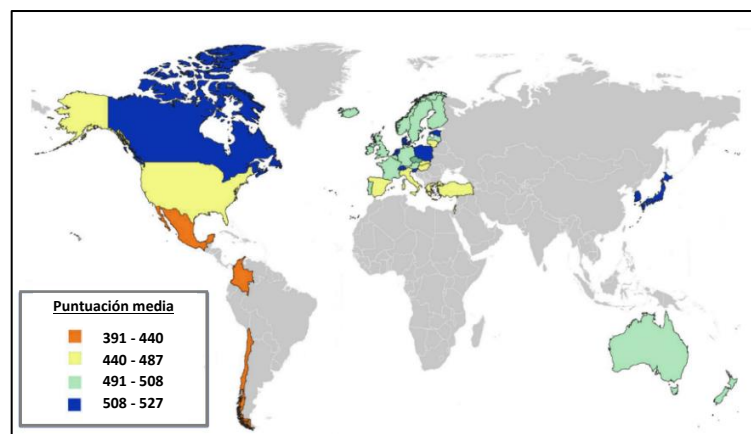


Figura 40. Nota de los alumnos españoles entre los países de la OCDE (Elaboración propia a partir de OCDE).

Es la primera vez que se evalúa el rendimiento de los alumnos españoles tras la aplicación de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E.) y en donde se aprecia una diferencia en género de seis puntos mayor en alumnos que alumnas como datos más relevantes.

Para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se han de tomar diferentes medidas.

Según Arrieta (1998), se observa que tradicionalmente las matemáticas se han enseñado de forma magistral, en sesiones donde el docente explica los conceptos en la pizarra y realiza ejercicios de los libros de texto, para que los alumnos adquieran el conocimiento a través de repeticiones. En este caso, los conceptos, aparte de ser utilizados por los alumnos, deben de aportarle valor social que trascienda lo que significa la materia teórica de las matemáticas. En la elaboración de este TFM, en el apartado de proyección didáctica, se abordarán diversas metodologías para afrontar el proceso de enseñanza-aprendizaje y se propondrán estrategias para realizar este proceso de una forma correcta.

De la Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación (L.E.A) a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E.) se han establecido siete leyes educativas españolas en la democracia, ligadas a la política nacional, provocando cambios constantes. En esta época, ningún alumno español ha finalizado los estudios sin ningún cambio en la educación durante su periodo escolar.

La formación para el acceso a la profesión de docente de matemáticas de secundaria está descompensada, aunque existe una carrera específica para obtener el título de profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato, desde la finalización del bachillerato existen otros caminos para llegar a esta profesión, con lo cual, el sistema de formación no está bien diseñado y no es el más adecuado.

1.9. Análisis de los libros de texto

Los contenidos de los libros de texto han de estar asociados y relacionados con los contenidos del currículo, por lo cual, en este apartado se va a llevar a cabo un análisis de los libros de texto de Enseñanza Secundaria Obligatoria editados en la Comunidad Autónoma de Andalucía, centrando la atención en la unidad didáctica de “Semejanza y Teorema de Tales”, de Matemáticas de 2º E.S.O.

Se ha de mencionar que la elección de las editoriales de los libros de texto depende de la autonomía pedagógica de los docentes. Según fuente de la Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza (A.N.E.L.E.) no existe una supervisión previa, aunque la inspección educativa podría investigar si algún libro no cumple con el currículo autonómico y nacional. Las editoriales han de cambiar los libros cada cuatro años o cada cambio de ley.

A partir de los datos ofrecidos por la Junta de Andalucía sobre los libros de textos seleccionados en los centros de enseñanza andaluces para cada nivel y materia, se ha segmentado las editoriales de matemáticas en el curso que compete a este TFM. Los datos obtenidos se representan en la siguiente tabla:

EDITORIAL	CENTROS
GRUPO ANAYA S.A.	559
EDICIONES SM S.A.	330
SANTILLANA GRAZALEMA S.L.	255
EDELVIVES (EDITORIAL LUIS VIVES S.A.)	97
GRUPO EDITORIAL BRUÑO S.L.	54
GUADIEL -EDEBÉ S.L.	44
OXFORD UNIVERSITY PRESS ESPAÑA S.A.	42
EDITORIAL VICENS VIVES S.A.	25
OTROS	15
EDITORIAL TEIDE S.A.	12

Tabla 11. Número de las distintas editoriales utilizadas en los centros educativos de Andalucía para el curso académico de 2º de ESO (Elaboración propia a partir de datos de la Junta de Andalucía).

Se elabora un gráfico circular donde se pueden observar las distintas editoriales utilizadas para la materia de matemáticas de 2º de ESO y su proporción para una apreciación más clara:

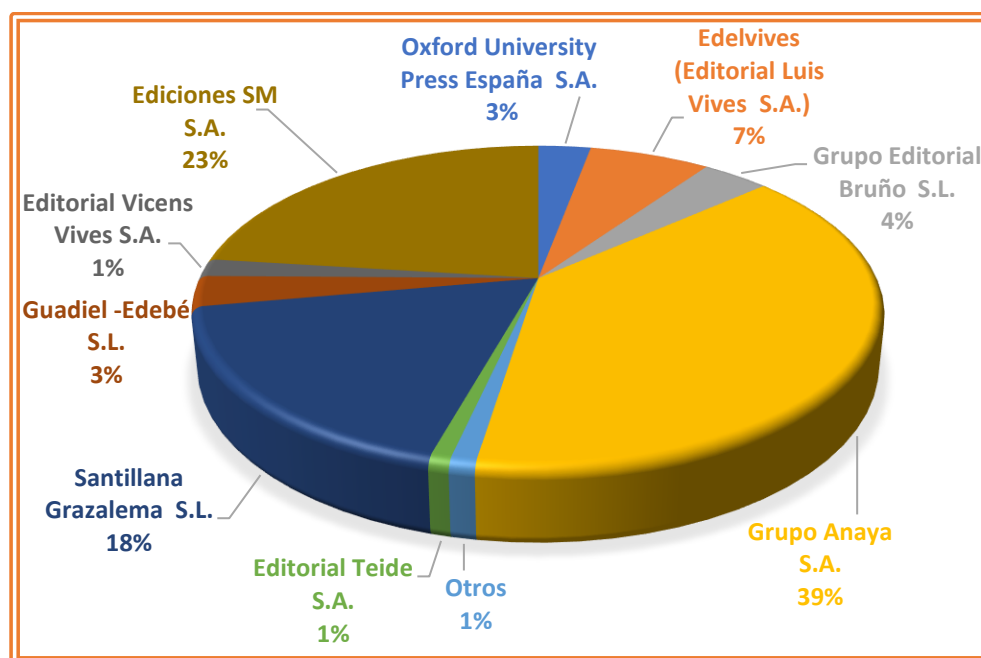


Figura 41. Porcentaje de las distintas editoriales utilizadas en los centros educativos de Andalucía para el curso académico de 2º de ESO (Elaboración propia)

Los tres libros más utilizados en los centros educativos que imparten matemáticas en 2º E.S.O de la Comunidad Autónoma de Andalucía son el que distribuye la editorial Grupo Anaya S.A. (559), seguida de Ediciones SM S.A. (330) y por último Santillana Grazalema S.L. (255), conformando el 80 % de la cantidad total.

En vista de estos resultados, se ha optado por analizar 3 editoriales; Grupo Anaya S.A. y Santillana Grazalema S.L. como dos de las más utilizadas, la tercera editorial será Guadiel-Edebé S.L. cuya representación es menor.

De esta forma a la vez que se analizan los libros de texto, se puede apreciar si existe el efecto bandwagon, es decir, si los centros educativos seleccionan los libros de texto arrastrados por la mayoría. Los 3 libros de texto que se van a analizar a continuación presentan además alta incidencia en el mercado nacional según datos de ANELE.

En el Anexo I, se desarrollan las unidades didácticas de los libros de texto y el tipo de actividades de la editorial Grupo Anaya S.A., la editorial Santillana Grazalema S.L. y la editorial Guadiel-Edebé S.L.

a) Libro de texto de la editorial Grupo Anaya S.A.

Con respecto a la contextualización del temario, después de la unidad del Teorema de Pitágoras, se desarrolla la unidad denominada: “Semejanza” correspondiente a este TFM y continúa con las unidades de cuerpos geométricos y medidas de volumen, completando el bloque de geometría.

Los contenidos dedicados a la semejanza se exponen en el libro de texto desde la página 192 a la página 213, empleando 22 páginas en total. Los contenidos que elabora la unidad se presentan en el siguiente esquema:

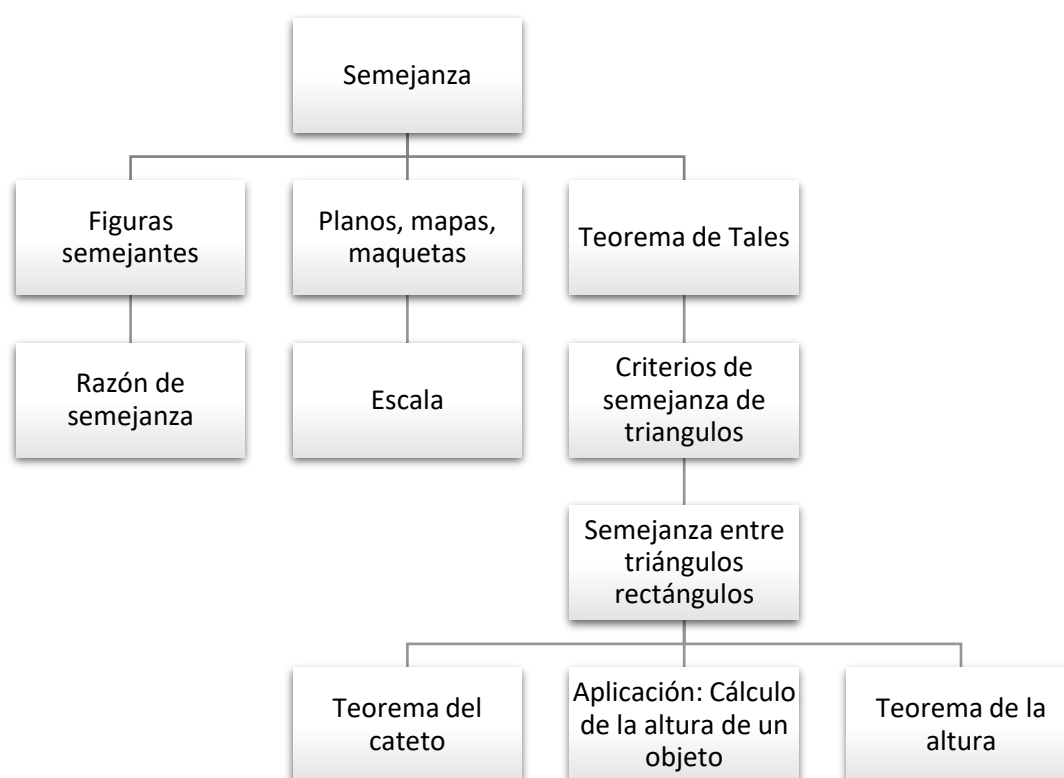
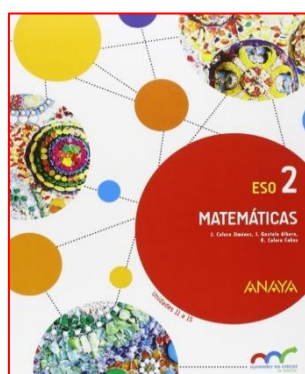


Figura 42. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Grupo Anaya S.A (elaboración propia).

Ficha técnica del libro de texto de la editorial Anaya



Título: Matemáticas 2.

Curso: 2º Educación Secundaria Obligatoria.

Autores: Cólera Jiménez, José / Gaztelu Alberro, Ignacio / Colera Cañas, Ramón.

Editorial: Anaya Educación. **Año:** 2017.

ISBN: 978-84-698-3219-6. **N.º páginas:** 344.

Tabla 12. Ficha técnica del libro de texto de la editorial Anaya (elaboración propia).

b) Libro de texto de la editorial Santillana Grazaalema S.L.

Con respecto a la contextualización del temario, la unidad que engloba los contenidos de la unidad didáctica correspondiente a este TFM se denomina: “Proporcionalidad geométrica”, se presenta como la primera unidad del bloque de geometría y le siguen las unidades de figuras planas, cuerpos geométricos y volumen de cuerpos geométricos para completar el bloque de geometría.

Los contenidos dedicados a la semejanza se exponen en el libro de texto desde la página 168 a la página 187, empleando 20 páginas en total. Los contenidos que elabora la unidad se presentan en el siguiente esquema:

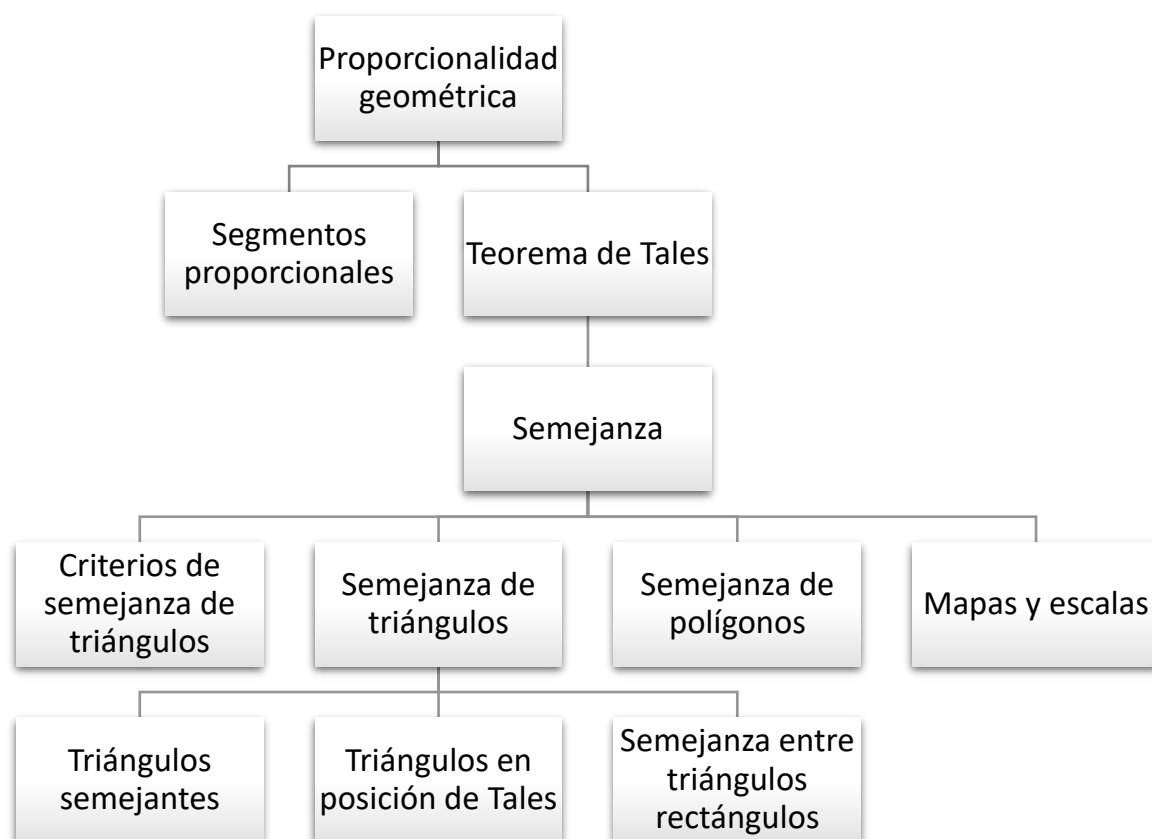


Figura 43. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Santillana Grazalema S.L. (elaboración propia).

Ficha técnica del libro de texto Santillana



Título: Matemáticas Andalucía, serie Resuelve 2 ESO

Curso: 2º Educación Secundaria Obligatoria.

Autores: Varios autores.

Editorial: Santillana Grazalema. **Año:** 2016

ISBN: 978-84-8305-691-2. **N.º páginas:** 296

Tabla 13. Ficha técnica del libro de texto Santillana (elaboración propia).

c) Libro de texto de la editorial Guadiel-Edebé S.L.

Con respecto a la contextualización del temario, en este libro de texto la unidad de semejanza correspondiente a este TFM se desarrolla en 2 unidades, un tema denominado: “Proporcionalidad geométrica” y el tema siguiente denominado: “Semejanza”. Las unidades de cuerpos geométricos y áreas y volúmenes son las siguientes unidades, y en su conjunto las 4 unidades forman el bloque de geometría.

Los contenidos dedicados a la semejanza se exponen en el libro de texto desde la página 174 a la página 198, empleando 25 páginas para los contenidos de proporcionalidad geométrica y desde la página 198 a la página 225, empleando 28 páginas para los contenidos de semejanza, en total se dedican 53 páginas a los contenidos que se desarrollan en la unidad didáctica de semejanza elaborada en este TFM. Los contenidos que elabora la unidad se presentan en el siguiente esquema:

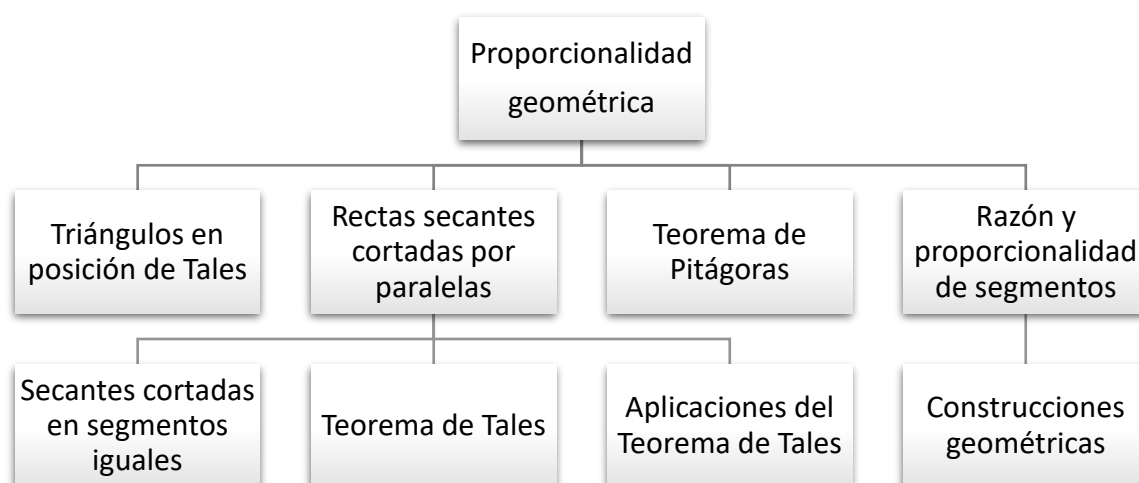


Figura 44. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Guadiel-Edebé S.L. Parte I (elaboración propia).

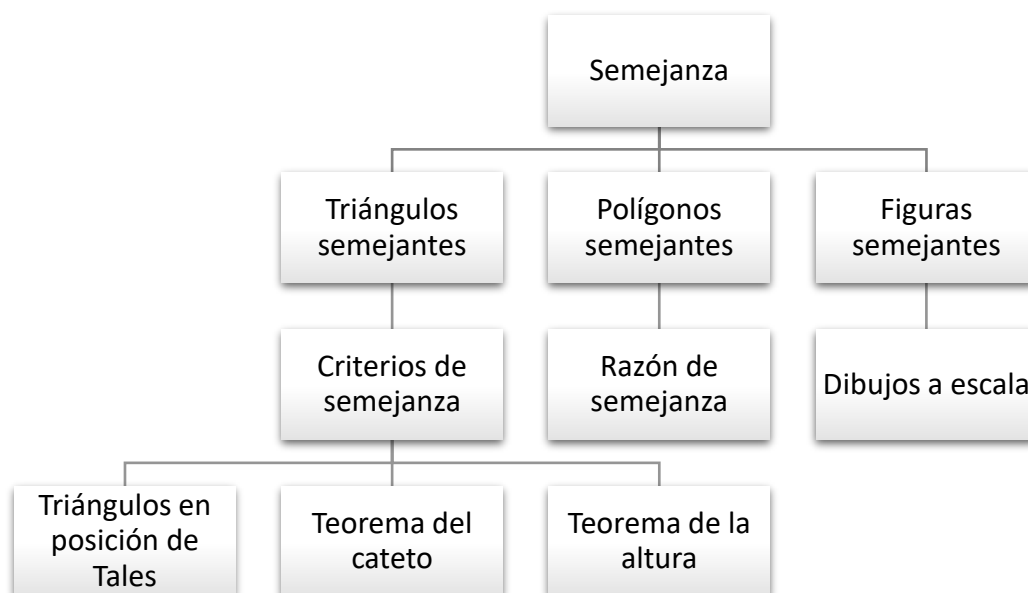
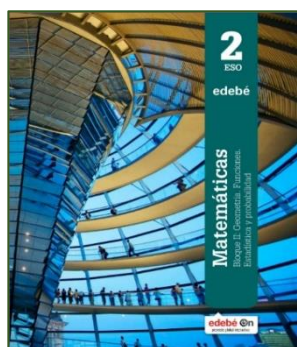


Figura 45. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Guadiel-Edebé S.L. Parte II (elaboración propia).

Ficha técnica del libro de texto Edebé



Título: Matemáticas 2

Curso: 2º Educación Secundaria Obligatoria.

Autores: Obra Colectiva Edebé.

Editorial: Grupo Edebé. **Año:** 2016

ISBN: 978-84-6831-677-5. **N.º páginas:** 368

Tabla 14. Ficha técnica del libro de texto Edebé (elaboración propia).

Comparativa de los libros de texto

Se han analizado los libros de texto de las tres editoriales para el curso de 2º de Educación Secundaria Obligatoria de Matemáticas, y en las tres editoriales el contenido analizado excede a los determinados por la legislación a nivel andaluz y estatal. El libro que mejor se ajusta a los contenidos es el de la editorial Anaya, que servirá de guía para la elaboración de la temporalización de la unidad didáctica que se está trabajando. El libro de Santillana se adapta a los contenidos, aunque introduce el tema con el concepto de proyección geométrica e introduce los contenidos de una forma más desconectada que el libro de la editorial Anaya. La editorial Edebé presenta el libro en 2 unidades, exponiendo los contenidos en un mayor número de páginas que los otros dos libros. Lo mejor del libro de la editorial Edebé es que presenta diversidad de actividades, siendo un buen recurso para que el docente pueda tener una extensa recopilación de estas, aunque debido al espacio temporal que disponemos para exponer los contenidos en el aula, presenta más contenidos de los necesarios para que los alumnos puedan alcanzar los objetivos con calidad.

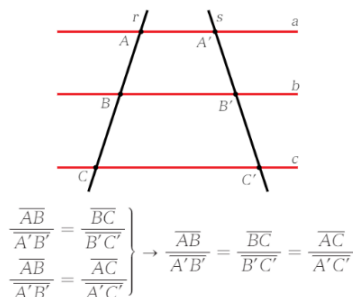
Para analizar de una forma más detallada los libros de texto, se ha seleccionado un mismo concepto en las 3 editoriales. El concepto en cuestión es el Teorema de Tales.

El libro de Santillana presenta el Teorema de Tales con una definición del teorema, su representación gráfica y finaliza con las expresiones del propio teorema. Se puede apreciar en la siguiente figura obtenida del libro de texto.

2

Teorema de Tales

Si tres rectas paralelas, a , b y c , cortan a dos rectas, r y s , los segmentos que determinan son proporcionales.



Esta igualdad se conoce como el **teorema de Tales**.

Figura 46. Definición del Teorema de Tales (Grupo Anaya S.A).

Una vez desarrollado el teorema, expone un ejemplo y propone dos actividades relacionadas.

En el libro Edebé, se define el concepto de rectas secantes cortadas en segmentos iguales y a partir de esta definición se propone el caso de que las rectas paralelas no determinen segmentos iguales en las rectas secantes, llegando a la definición del Teorema de Tales, que se aprecia en la siguiente figura obtenida del libro de texto.

Si dos **rectas secantes** son cortadas por un conjunto de **rectas paralelas**, los segmentos determinados en una de ellas son **proporcionales** a los segmentos correspondientes determinados en la otra.

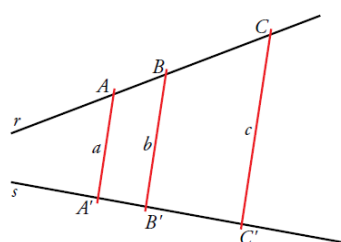
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots$$

Este principio es conocido como el **teorema de Tales**.

Figura 47. Definición del Teorema de Tales (Guadiel-Edebé S.L.).

Una vez definido el teorema expone dos ejemplos donde se puede apreciar el teorema de una forma gráfica y 2 actividades. Se ha de destacar que en los márgenes de la página se le propone al alumno acceder a una página web propia para que pueda ver un video de 12 minutos sobre la demostración del teorema.

El libro de Anaya introduce el teorema a partir de rectas paralelas que cortan a otras dos, en primer lugar, las rectas secantes dividen a las rectas en segmentos iguales, propone que los estudiantes midan sobre la figura y lo comprueben, después aumenta el doble la proporción para que los alumnos adquieran el concepto de proporcionalidad y finalmente define el teorema de Tales como se muestra en la siguiente figura obtenida del libro de texto.



Teorema de Tales

Si las rectas a , b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s , entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Figura 48. Definición del Teorema de Tales (Santillana Grazalema S.L.).

En este caso, no propone ningún ejemplo ni ejercicios resueltos, aunque redacta 2 problemas donde los estudiantes practican con la definición del teorema.

Las definiciones del Teorema de tales se realizan con un vocabulario sencillo en las 3 editoriales y con las mismas expresiones. En la editorial Edebé la representación gráfica la presenta cuando elabora el caso de rectas paralelas que no determinan segmentos iguales sobre las rectas secantes y en las otras dos editoriales el Teorema de Tales están representados gráficamente de forma similar. La mejor forma de exponer los contenidos se aprecia en los libros de texto de Anaya y Edebé. En ambos casos se obtiene la definición a partir de otros contenidos básicos, mientras que el libro de texto de Santillana impone la definición del Teorema de Tales.

La mejor forma de desarrollar este concepto como hemos analizado se realiza a través del libro Anaya, ya que obtiene el teorema a partir de contenidos básicos, aportando una representación gráfica idónea, y presenta un vocabulario sencillo y adecuado para el alumnado

Con respecto a las actividades, el lenguaje utilizado en las actividades es el adecuado para el nivel de los estudiantes a los que se dirige. Los contenidos, las metodología, definiciones y enunciados se conectan y relacionan entre sí y son claros y correctos.

Se realizan varios gráficos a partir de los datos obtenidos de cada libro de texto, desarrollados en el apartado anterior, donde se enumeran todas las variables que se han tenido en cuenta, para realizar la comparativa entre el tipo de actividades.

En primer lugar, se va a exponer las actividades según la tipología. Como se ha visto en el apartado anterior, el libro de texto de la editorial Edebé es el que más cantidad de actividades presenta, debido a que los contenidos se dividen en 2 unidades, por lo cual dedica aproximadamente el doble de páginas a la exposición de contenidos en comparativa con las editoriales Santillana y Anaya. A continuación, se expone el gráfico correspondiente:

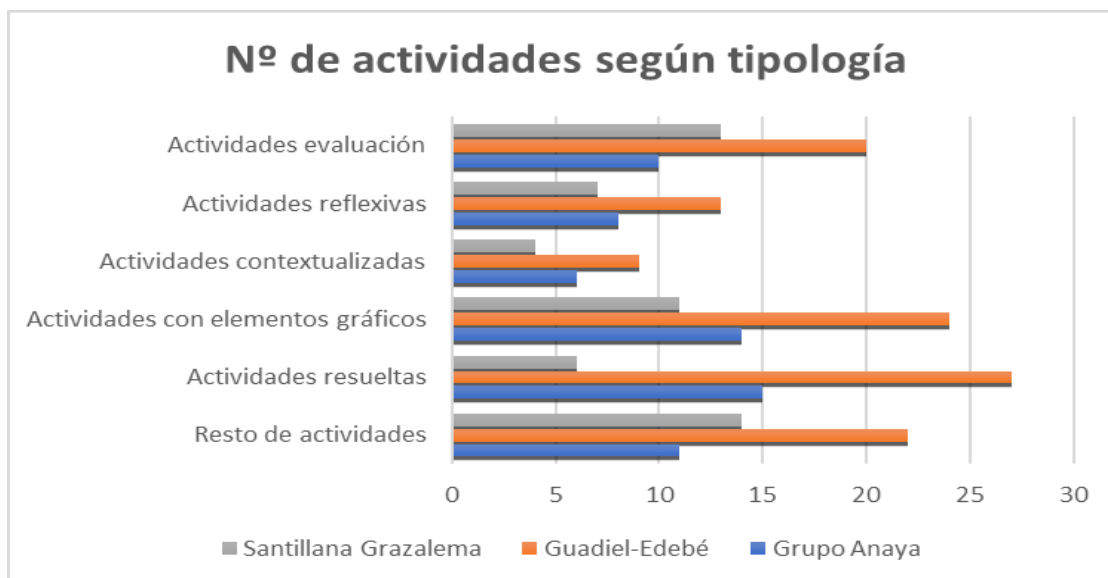


Figura 49. Número de actividades según tipología (elaboración propia).

Se puede apreciar que en las tres editoriales se exponen las actividades de diversas formas. Para poder realizar una comparativa óptima se han procesado estos datos, obteniendo los datos en porcentajes y poder establecer relaciones entre las cantidades, seguidamente se expone el gráfico en cuestión:

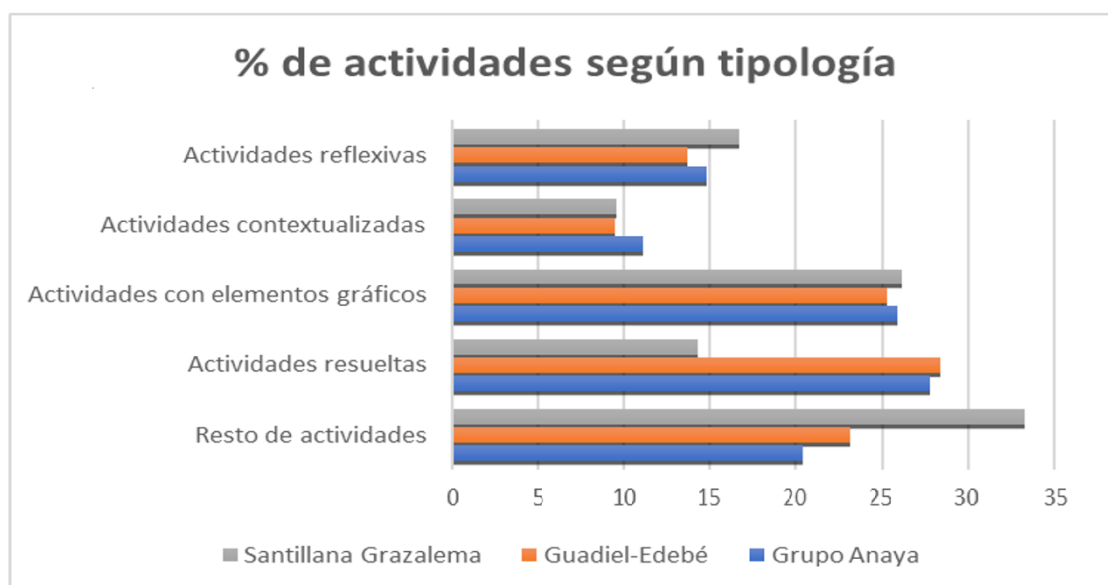


Figura 50. Porcentaje de actividades según tipología (elaboración propia).

Se puede apreciar en relación a las actividades totales, que la editorial Santillana presenta más actividades reflexivas, menor número de actividades resueltas y más actividades que no presentan elementos gráficos y no son reflexivas, contextualizadas están resueltas.

El libro de texto de la editorial Edebé, cuenta con mayor número de actividades resueltas, aunque similares a la del grupo Anaya, y presenta menor número de

actividades con elementos gráficos y actividades reflexivas y similares actividades con elementos gráficos y contextualizadas que las otras dos editoriales.

Con respecto al Grupo Anaya, se puede apreciar una buena distribución de actividades según la tipología, destacando en las actividades contextualizadas, y con buenos valores cuantitativos en actividades resueltas, reflexivas y actividades con elementos gráficos como son los esquemas y dibujos asociados a las tareas.

Al final de los tres libros de textos se desarrolla un apartado con las actividades finales, las cuales se han clasificado según su grado de dificultad. En el siguiente histograma se pueden ver los valores a nivel cuantitativo:

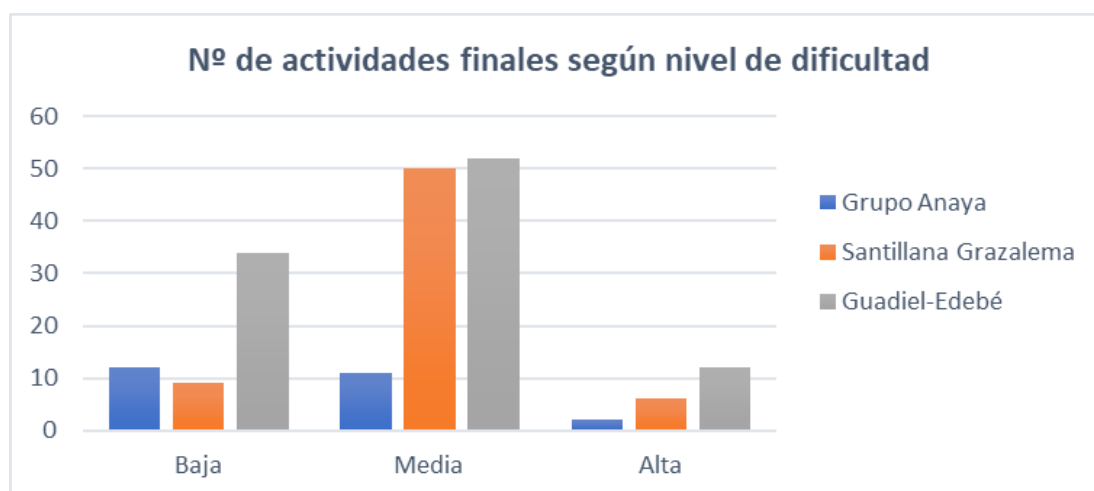


Figura 51. Número de actividades finales según nivel de dificultad (embarcación propia).

Igual que sucede en el análisis anterior, se puede apreciar que la editorial Guadiel-Edebé tiene mayor número de actividades debido a que el libro de texto expone los contenidos en dos unidades. Para relacionar los datos con las otras se elabora el histograma en datos porcentuales:



Figura 52. Porcentaje de actividades finales según nivel de dificultad (embarcación propia).

Según el gráfico obtenido, observamos que la editorial Edebé es la que tiene mayores actividades de alta dificultad, presentando una cifra del 12 % de sus actividades totales. La editorial Santillana presenta un 77 % de las actividades totales de dificultad media y un 9 % de actividades de alta dificultad y el Grupo Anaya tiene cifras similares para las actividades de dificultad baja (48%) y actividades de dificultad media (44%).

Es conveniente que los libros de texto presenten actividades de distintas dificultades, ya que cada grupo de alumnos va a tener características únicas y con variedad de actividades y niveles de dificultad el docente es el encargado de seleccionar las actividades más adecuadas para el grupo de clase. En la elaboración de la unidad didáctica es de vital importancia atender a la diversidad, y el hecho de disponer de actividades de diferente índole, facilita al docente mejorar la calidad educativa de alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo.

Teniendo en cuenta que este análisis corresponde a los contenidos de semejanza, los cuales se encuentran dentro del bloque de geometría y este a su vez pertenece a uno de los 5 bloques que forman los contenidos de la materia de matemáticas de segundo de Educación Obligatoria Secundaria, no podemos determinar cuál sería el libro que se adapte mejor al currículo del curso académico, pero se ha podido comprobar que con respecto a los contenidos de semejanza, los 3 libros abordan todos los contenidos establecidos por la ley. El libro de texto de la editorial Guadiel-Edebé presentan mayor información, ya que como hemos visto emplea dos unidades para desarrollar los contenidos de semejanza. El libro de texto de la editorial Santillana Grazalema cumple con los contenidos, aunque presenta escasos ejemplos y actividades resueltas. Por último, el libro de texto de la editorial Grupo Anaya es el que mejor desarrolla los contenidos para el perfil del alumnado al que se dirige y presenta gran cantidad de actividades, dándole distintos enfoques y planeando diferentes metodologías de resolución, por lo cual, es el libro de texto en que se enfocará este TFM, apoyándose en los otros dos analizados.

Se ha de mencionar que los tres libros analizados tienen un libro de adaptación curricular donde se seleccionan los contenidos prioritarios de las unidades y propuestas para profundizar en los usos de los conocimientos adquiridos. En el apartado de problemas finales las actividades se clasifican por nivel de dificultad, condicionando posiblemente a los estudiantes. Desde un punto de vista personal sería interesante mostrar esta clasificación solo en el libro de profesorado.

Valoración didáctica

Después de realizar un análisis exhaustivo de los libros de texto, se valorará a nivel didáctico cual es el mejor libro para el aprendizaje y asimilación de los contenidos para el alumnado, así como distintas mejoras en las disposiciones curriculares vigentes.

En la evaluación del rendimiento del alumnado en el informe PISA se ha visto que los alumnos españoles se sitúan por debajo de la media de la OCDE. En el currículo de matemáticas, cada vez se añaden más contenidos sin pensar en un nuevo modelo pedagógico que respondan a las necesidades de los estudiantes.

El currículo de la materia de matemáticas en secundaria se enfoca en que los alumnos memoricen fórmulas y utilicen procedimientos que hay que mecanizar, sin comprender lo que están haciendo. En este sentido, se presenta un mal enfoque del currículo, entrenado a los alumnos con rutinas en vez de motivarlos a pensar por sí mismos.

Otra posible mejora es aumentar el peso en el currículo de la geometría, que junto con la estadística son dos de las partes que se suelen exponer en el último trimestre y de forma rápida. El razonamiento lógico y la resolución de problemas son dos características fundamentales de la geometría que deben de tener mayor representación en el currículo.

A nivel legislativo, es interesante comentar que los gobiernos autonómicos intentan reflejar las peculiaridades de su territorio en el ámbito escolar. Por ejemplo, la Comunidad Autónoma de Andalucía pidió que los alicatados de la Alhambra y el triángulo cordobés aparecieran en los libros de texto. Al igual que en Andalucía, otras regiones operan de la misma forma, provocando disparidad de currículos autonómicos y un gran número de ediciones de libros de texto.

En los libros de texto he visto tareas con la denominación de: “cálculo mental”, pienso que “cálculo reflexivo” sería un nombre más aceptable para este tipo de actividades. En el análisis de las características de los libros de texto de la editorial Grupo Anaya S.A., la editorial Santillana Grazalema S.L. y la editorial Guadiel-Edebé S.L., se ha comentado que los tres libros abordan los contenidos mínimos que presenta el currículo, por lo que cualquiera de ellos se podría seleccionar por el departamento de matemáticas para el curso de 2º de Eso.

La Unidad didáctica “Semejanza y Teorema de Tales” elaborada en este TFM, estará relacionada con el libro de la editorial Grupo Anaya S.A. debido a que el tipo de tareas que presenta están relacionadas con razonamientos y motivación del alumnado y recoge una relación de tareas para trabajar y atender el aprendizaje cooperativo, el pensamiento crítico, el pensamiento comprensivo, la interdisciplinariedad, la resolución de problemas y el emprendimiento.

La unidad didáctica de semejanza presentada en el libro de texto Anaya está diseñada para dar respuesta a distintos ritmos de aprendizaje, incluyendo actividades de refuerzo y de ampliación. Presentan tareas que se pueden abordar de manera interdisciplinar, asociando iconos que sugieren metodologías a emplear. Se promociona el pensamiento racional y crítico con apartados de “Aprende a resolver problemas”, “Taller de

matemáticas” y “Pensamiento crítico”. En las actividades propuestas incluye procesos cognitivos (analizar, identificar, reconocer, asociar, razonar, reflexionar...). Se realizan propuestas de aprendizaje por investigación, como es el caso de la introducción histórica del Teorema de Tales, y apartados de “Talles de matemáticas” y “Emprendimiento” y plantea evaluación acorde a los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.

Es interesante comentar que el libro de texto de la editorial Grupo Anaya S.A, apoya la labor del profesorado con una plataforma digital, actividades interactivas, una herramienta denominada: “Evaluapp”, una propuesta didáctica del libro y materia y una web del profesorado donde la editorial ofrece publicaciones monográficas sobre temas actuales.

6. Diseño de una unidad didáctica

En la elaboración de esta unidad didáctica de “Semejanza y Teorema de Tales”, de matemáticas de 2º E.S.O, se realizará una justificación, se contextualizará el centro y se elaborarán los objetivos, competencias clave, contenidos, metodologías, materiales y recursos, actividades y tareas, atención a la diversidad, temporalización de la unidad didáctica y la evaluación.

1.10. Título

En este capítulo del TFM se va a elaborar la **unidad didáctica de Semejanza y Teorema de Tales**, perteneciente al curso académico de segundo de Educación Secundaria Obligatoria.

En la enseñanza de la Educación Secundaria Obligatoria las matemáticas están consideradas materia troncal, organizada en cinco bloques; el primero trata sobre procesos, métodos y actitudes en matemáticas, el segundo sobre números y álgebra, el tercero engloba la geometría, el cuarto las funciones y el quinto y último bloque presenta los contenidos de estadística y probabilidad.

1.11. Justificación

La materia de Matemáticas en 2º E.S.O va dirigida a todo el alumnado de este curso, ya que es una asignatura troncal y continúa desarrollando en el alumno el razonamiento matemático y lógico obtenido en el curso anterior, el alumnado debe seguir su desarrollo cognitivo y conseguir un nivel mayor de abstracción que el curso anterior.

Esta programación de la unidad didáctica se plantea para el curso académico 2019/2020, encuadrada en la Constitución Española de 1978, que reconoce a todas las personas el derecho a la educación en el artículo 27 y recogida en la ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, orientada a la mejora de la calidad educativa LOMCE.

Se considera el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, el cual establece el currículo básico de E.S.O y bachillerato, (así como la corrección de erratas), la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se especifican las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación, y el Real Decreto 310/2016, de 29 de julio, por el que se reglamentan las evaluaciones finales en la E.S.O (texto consolidado, 10-12-2016) y en el ámbito de la Comunidad Autónoma de Andalucía, se considera la Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación Andaluza LEA, en el Decreto 111/2016, de 14 de junio y en la Orden de 14 de julio.

La unidad didáctica de “Semejanza y Teorema de Tales”, se propone para realizarla en el tercer trimestre, si todo acontece según las previsiones, y tendrá una duración previsible de 10 horas.

Es de vital importancia la materia para que el alumno pueda enfrentarse a problemas reales en el entorno y comprenda distintas ramas científicas, como también saber tratar la información, desarrollar hipótesis, predicciones y comprobar resultados. La asimilación de los contenidos de esta unidad didáctica facilitará la asimilación de los contenidos de las materias de tecnología, dibujo técnico y física y es fundamental formar al alumno para que pueda llegar con los conceptos e ideas adecuadas al tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

1.12. Contextualización del centro y del aula

La unidad didáctica elaborada en este TFM, está relacionada con el Instituto de Educación Secundaria Miguel Sánchez López donde he realizado las prácticas formativas del Máster. En el Anexo II, se desarrollan los aspectos demográficos y socioeconómicos y las características del alumnado.



Figura 53. Edificio del Instituto de Educación Secundaria I.E.S. Miguel Sánchez López en 3D. (elaboración propia a partir de Google Earth 2020).

1.12.1. Situación geográfica del centro

El Instituto de Educación Secundaria Miguel Sánchez López se identifica en el registro oficial con la numeración 23003934, perteneciente a la Junta de Andalucía. Se encuentra ubicado en la Avenida de la Constitución s/n, en la villa de Torredelcampo, situada al suroeste de Jaén.

Se puede acceder al centro educativo desde la carretera N-321 entre Córdoba y Valencia, tomando la salida 70 hacia Torredelcampo (Oeste), continuando por Paseo de la Estación, girando a la derecha hacia Avenida de San Bartolomé para finalmente tomar en la intersección la Avenida de la Constitución donde se encuentra el centro de enseñanza.

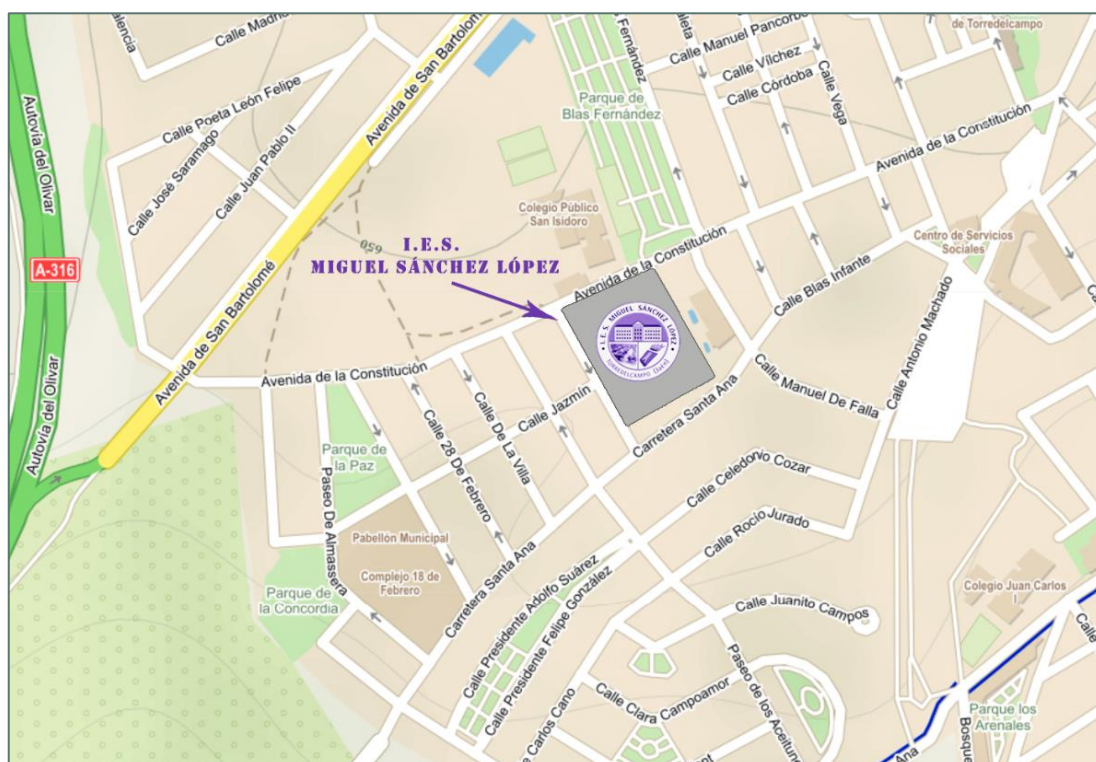


Figura 54. Plano de localización del Instituto de Educación Secundaria I.E.S. Miguel Sánchez López. (elaboración propia a partir de Google Maps 2020).

1.12.2. Descripción del centro

El centro educativo se fundó en 1970 y ha sufrido una gran remodelación y ampliación en el curso académico 2010 y 2011 para adecuarlo a las necesidades presentes.



Figura 55. Edificio del instituto de educación secundaria I.E.S. Miguel Sánchez López (elaboración propia)

Se encuentra en ámbito urbano, situado cerca del centro comercial y administrativo del municipio, facilitando el acceso a organismos públicos y privados de Torredelcampo. Se sitúa enfrente de unos de los parques públicos más grandes del municipio y en sus alrededores predominan las zonas recreativas y espacios abiertos.

El centro es público e imparte todos los cursos de educación secundaria y bachillerato en modalidades de Ciencias de la Salud y Tecnología, Humanidades y Ciencias Sociales, y el ciclo formativo de grado medio denominado: “Sistemas Microinformáticos y Redes”.

El instituto cuenta con espacios e instalaciones dotadas con la tecnología actual. Dispone de tres laboratorios de ciencias (biología, física y química), la biblioteca tiene más de 6000 volúmenes, hay 4 aulas de informática, un aula de tecnología, un gimnasio, un salón de actos, dos pistas polideportivas y 4 salas de proyecciones.

El horario del centro educativo es de 8:00 a 14:30 y el recreo es de 11:00 a 11:30. Los estudiantes de 2º de E.S.O. permanecen en el aula durante el cambio de clase, en el que suenan dos timbres separados 4 minutos.

1.12.3. Descripción del aula

Las aulas del centro donde se imparten los cursos son genéricas y dependiendo de las necesidades de cada curso escolar se redistribuyen para que en ellas se puedan desarrollar todos los contenidos del curso en condiciones óptimas.

Cada aula cuenta con dos puertas, percheros distribuidos en los espacios del aula, armarios percheros en un lateral del aula mientras que en el otro lateral se encuentran amplias ventanas que permiten una buena iluminación natural contribuyendo al ahorro energético.

Las mesas son individuales, aunque se agrupan por parejas, manteniendo un entorno de enseñanza tradicional. En la parte frontal se ubica la pizarra de escritura con tiza y otra pizarra inteligente, quedando en la esquina del aula la mesa del profesor. Se puede apreciar en el croquis que aparece a continuación:

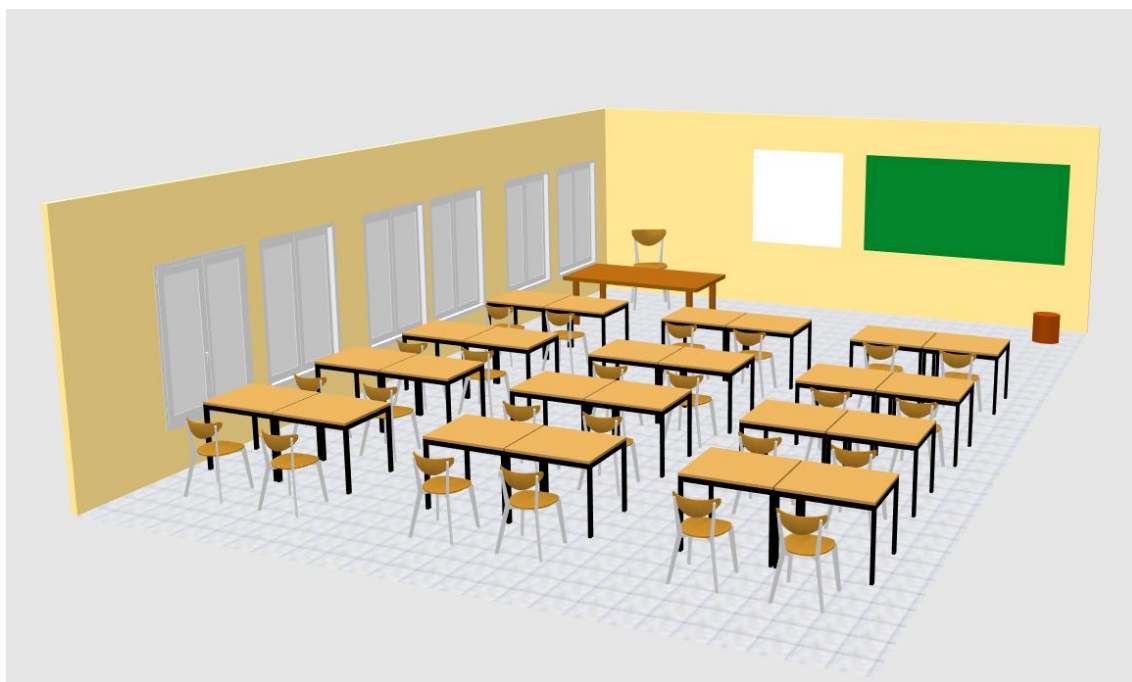


Figura 56. Croquis del aula (elaboración propia con el software Sweet Home 3D).

Todas las aulas están provistas de calefacción, proyector, altavoces y acceso wifi para los docentes, facilitándole el acceso al alumnado para actividades o tareas concretas.

1.13. Objetivos

Los objetivos que se elaborarán a continuación para el desarrollo de la unidad didáctica se estructuran en tres grados de concreción, desde los objetivos generales hasta los concretos. En este apartado, se analizarán los objetivos generales de la etapa, objetivos de matemáticas de la etapa y objetivos didácticos de la unidad Semejanza y Teorema de Tales.

1.13.1. Objetivos Generales de la etapa

Para que los alumnos superen la etapa han de superar unos logros como resultado de procesos enseñanza-aprendizaje, programados intencionadamente para cumplir estos objetivos.

Los objetivos generales de la etapa se disponen en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, así como en el Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. En este cuadro se describen los objetivos generales de etapa y su relación con las competencias clave.

OBJETIVOS GENERALES DE LA ETAPA	
OBJETIVOS GENERALES	RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS CLAVE
a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.	Competencias sociales y cívicas. (CSC)
b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.	Competencia para aprender a aprender. (CAA) Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. (SIEP)
c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los	Competencias sociales y cívicas. (CSC)

estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.	
d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.	Competencias sociales y cívicas. (CSC)
e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.	Competencia en comunicación lingüística. (CCL) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. (CMCT) Competencia digital. (CD)
f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. (CMCT)
g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.	Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP) Competencia para aprender a aprender (CAA)
h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.	Competencia en comunicación lingüística. (CCL)

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.	Competencia en comunicación lingüística. (CCL)
j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.	Conciencia y expresiones culturales. (CEC)
k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. (CMCT) Competencias sociales y c. (CSC)
l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.	Conciencia y expresiones culturales. (CEC)

Tabla 15. Objetivos generales de la etapa (Real Decreto 1105, 2014, p. 176 y 177).

De la misma manera, se establece la relación de las competencias clave con los objetivos generales añadidos por el artículo 3.2 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

a) Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades. (CCL, CEC)	Competencia en comunicación lingüística. (CCL) Conciencia y expresiones culturales. (CEC)
b) Conocer y apreciar los elementos específicos de la cultura andaluza para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.	Conciencia y expresiones culturales. (CEC)

Tabla 16. Objetivos generales de la etapa (Decreto 111,2016, p. 30).

1.13.2. Los objetivos de matemáticas de la etapa

La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa, según la Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, tiene como finalidad el alcance de los siguientes logros:

OBJETIVOS DE MATEMÁTICAS DE LA ETAPA

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Tabla 17. Objetivos de matemáticas de la etapa (Departamento de Matemáticas, 2020, a partir del RD 1105/2014 y el Decreto 144/2016).

1.13.3. Objetivos de la unidad didáctica

Los objetivos que el alumnado debe alcanzar en la unidad didáctica se exponen a continuación en relación con los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria, y los objetivos de matemáticas de la etapa. Estos objetivos propuestos están basados en los criterios y estándares de aprendizaje.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS	
OB1	Conocer y comprender la definición de semejanza.
OB2	Aplicar el concepto de razón de semejanza para el cálculo indirecto de longitudes y construcción de figuras semejantes.
OB3	Conocer y aplicar correctamente el Teorema de Tales.
OB4	Mediante el Teorema de Tales, resolver problemas de semejanza.
OB5	Conocer y comprender el concepto de escala.
OB6	Aplicar el concepto de escala para resolver problemas en el contexto matemático y en el entorno real.
OB7	Resolver problemas geométricos sencillos utilizando los conceptos y procedimientos propios de la semejanza.
OB8	Reconocer el entorno real en el que se puede aplicar los conocimientos asimilados.
OB9	Valorar los conceptos de escala, semejanza y Teorema de Tales y analizar qué pueden aportar en la vida cotidiana.

Tabla 18. Objetivos de la unidad didáctica (elaboración propia a partir del RD 1105/2014 y el Decreto 144/2016).

1.14. Competencias Clave

Se establecen siete competencias clave de acuerdo con lo establecido en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre y marcadas en la Orden de 14 de Julio de 2016 en la Comunidad Autónoma de Andalucía. El artículo 2, Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, que describe las relaciones entre contenidos, competencias y criterios de evaluación, realiza una descripción de las competencias clave en el sistema educativo.

Según la denominación adoptada por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y en línea con la Recomendación 2006/962/EC del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, las competencias clave son aquellas competencias que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo. A continuación, se exponen las distintas competencias clave relacionándolas con los aspectos de la unidad didáctica:

COMPETENCIAS CLAVE	
CCL	Comunicación lingüística.
El uso continuo de la expresión, comprensión escrita y comprensión oral en la formulación de hipótesis, interpretación de los enunciados y exposición de las soluciones, hacen que la materia de las matemáticas desarrolle la comunicación lingüística. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: entender las tareas, conceptos y procedimientos; expresar verbalmente y gramaticalmente actividades, hipótesis y críticas; y usar el lenguaje matemático específico.	
CMCT	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
Para la resolución de diversas actividades y problemas de en la vida real y los trabajos de investigación, se utiliza el razonamiento matemático que, a partir de las habilidades, conceptos, y actitudes adquiridas, contribuye a la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: identificar formulas y elementos geométricos en ámbitos tecnológicos y científicos; usar el lenguaje algebraico y las ecuaciones correctamente para resolver actividades, utilizar estrategias para solucionar actividades, y exponer las soluciones de forma correcta, coherente y precisa.	
CD	Competencia digital.
En el desarrollo de la unidad didáctica, como en el trascurso de la materia, se utilizan diversas herramientas para la resolución de actividades y comprobación de resultados, que sirven para construir modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento y consolida la obtención de habilidades tales como la perseverancia, autonomía, sistematización y reflexión crítica. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: utilizar aplicaciones, software y programas para el diseño geométrico y la utilización de TIC para la elaboración de tareas.	
CAA	Aprender a aprender.
Los alumnos desarrollan la capacidad para iniciar el aprendizaje e insistir en él, se propicia el desarrollo de esa competencia mediante la comprobación de las soluciones y las autocorrecciones. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: capacidad de clasificar los apuntes, elaborar esquemas, estudiar e investigar por propia voluntad; reestructurar ideas, planificar proyectos, gestionar habilidades y buscar resultados óptimos; adquirir conocimiento propio a partir del desarrollo de habilidades para obtener información, y utilizarlo en situaciones similares.	
CSC	Competencias sociales y cívicas.
Al predecir fenómenos sociales, describirlos, formular hipótesis, tomar decisiones y adoptar actitudes en diferentes escenarios se propicia el desarrollo de la competencias sociales y cívicas. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: motivación por la historia y evolución matemática; valorar el dialogo de las personas, las aportaciones al conocimiento por parte de otras fuentes y descubrimientos científicos de diferentes personas; respetar y tolerar a las personas y tomar decisiones responsables; abogar por hábitos de vida saludable y que no pongan en riesgo la salud; y participar en una sociedad intelectual mediante una base matemática y científica.	
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
La creatividad y capacidad de asumir riesgos, planificar las estrategias, modificar y revisar las metodologías, controlar los procedimientos en beneficio de la toma de decisiones, favorecen el sentido de la iniciativa y espíritu emprender. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: capacidad de trabajo individual y en grupos, de liderazgo y control; espíritu y conciencia crítica de los contenidos y datos obtenidos; iniciativa y cualidades de justificar fenómenos, verificarlos y desarrollar actividades sencillas sobre las matemáticas; y comprender las aportaciones de docentes, científicos y/o matemáticos al avance de la sociedad.	
CEC	Conciencia y expresiones culturales
Esta unidad didáctica se sitúa dentro del bloque de geometría, que es un concepto relacionado con la expresión artística y mediador para explorar y descubrir situación de la vida real, a través de la geometría se aprecia la belleza de la naturaleza en diversas manifestaciones artísticas. Se relaciona a las matemáticas con la expresión universal de la cultura, fomentando el desarrollo de la conciencia y de expresiones culturales. Se destacan diversas cualidades a desarrollar por el alumnado, como son: valorar la libertad de expresión y diversidad cultural; presentar motivación por conservar el patrimonio; conocer la herencia cultural e involucrarse en ella; y tener una actitud flexible a la las manifestaciones culturales y artísticas.	

Tabla 19. Competencias clave de la unidad didáctica (elaboración propia a partir de Orden ECD/65/2015)

1.15. Contenidos

La materia de Matemáticas es troncal para el curso de 2º E.S.O y sus contenidos se organizan en cinco bloques. El primero es **procesos, métodos y actitudes en matemáticas**, que es un bloque transversal y se desarrolla simultáneamente junto al resto de los bloques. En la Comunidad Autónoma de Andalucía este primer bloque actúa como bloque principal y se basa en la resolución de problemas, uso de los medios tecnológicos y dimensión social y cultural de la materia de matemáticas. Los demás bloques son: **números y álgebra** como segundo bloque, **geometría** que es el relacionado con la unidad didáctica elaborada, **funciones** como cuarto bloque y el quinto bloque de **estadística y probabilidad**. Los contenidos trasversales se desarrollan en el Anexo III.

Contenidos de la unidad didáctica

Los contenidos a tratar en esta unidad didáctica son coherentes a la Orden de 14 de Julio de 2016 y están conectados con los objetivos. Los contenidos a tratar del bloque 1: procesos, métodos y actitudes en matemáticas, y del bloque 3: geometría, en dicha unidad didáctica son los que se exponen a continuación.

<i>Contenidos de la UD10. "Semejanza y Teorema de Tales"</i>	
1.1	Organizar procesos de resolución de problemas
1.2	Reflexión, revisión, comprobación e interpretación de los resultados y búsquedas de soluciones alternativas.
1.3	Destreza en procesos de modelización en contextos matemáticos y reales.
1.4	Afrontar conflictos del trabajo científico y confiar en las capacidades para desplegar actitudes correctas.
1.5	Elaboración de tareas y actividades de investigación de forma individual o grupal.
1.6	Uso de herramientas tecnológicas e informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
3.1	Razón de semejanza y escala. Justificación geométrica y aplicaciones.
3.2	Identificación y resolución de situaciones geométricas a través del concepto de semejanza.
3.3	Identificación y resolución de situaciones geométricas a través del concepto de escala.
3.4	Teorema de Tales, Justificación geométrica y aplicaciones.
3.5	Identificación y resolución de situaciones geométricas a través del Teorema de Tales.
3.6	Razón y proporcionalidad de segmentos.
3.7	Semejanza de triángulos.
3.8	Cálculo y construcción de triángulos, polígonos y figuras semejantes.
3.9	Cálculo de longitudes y áreas en el mundo físico.

Tabla 20. Contenidos de la unidad didáctica (elaboración propia).

1.16. Metodologías

En este apartado se van a describir las distintas metodologías relacionadas con los contenidos de la asignatura: aprendizaje y enseñanzas de la materia de matemáticas.

- **Portafolio**

Método de enseñanza, aprendizaje y evaluación en el que se obtiene un conjunto de documentos realizados por el estudiante, el cual demuestra las capacidades adquiridas mediante la realización de actividades, conceptos y tareas, normalmente con un orden cronológico donde se muestra el progreso.

- **Test en el aula**

Tradicionalmente se usan los test como recursos de repaso, estudio y evaluación. En la elaboración de este TFM, se utilizará como metodología, dado que nos ayuda a tener un conocimiento previo, mide el grado de asimilación de contenidos, fomenta la curiosidad y nos ayuda a ajustar el nivel del grupo escolar.

- **Lección magistral / exposición**

Con esta metodología se pretende activar los procesos cognitivos y motivar al alumnado, se trata de presentar de forma ordenada la información entre profesor y alumnos o entre distintos alumnos.

- **Aprendizaje cooperativo**

Metodología que desarrolla la capacidad intelectual, las competencias emocionales y sociales del alumnado. Se caracteriza por promover el trabajo del alumno en equipo, el respeto de los compañeros, estimular el sentimiento de empatía y que el alumnado se sienta valorado.

Se trabajará en grupos pequeños, en los cuales cada alumno tendrá su propio papel, y se evaluarán las actividades dependiendo de la productividad del equipo.

- **Aprendizaje orientado a proyectos (AOP)**

Metodología que promueve el pensamiento crítico y trabajo en equipo, basado en la experiencia y la reflexión. El alumno se enfrenta a un problema práctico, normalmente de la vida real, sobre el que debe indagar, explorar y trabajar a través de conocimientos interdisciplinarios con la finalidad de dar solución a problemas complejos a partir de otras soluciones más sencillas y generales.

- **Contrato de aprendizaje**

En este proceso, los alumnos y el profesor intercambian opiniones, proyectos, necesidades de una forma explícita y coordinan la mejor forma de llevar a cabo el aprendizaje, se formaliza por escrito u oralmente. En esta estrategia se negocia con el alumnado el plan de aprendizaje proponiendo actividades y tareas, resultados y criterios de evaluación, con una propuesta de trabajo independiente.

- **Aprendizaje basado en problemas (ABP)**

Metodología en la cual los alumnos, a partir de problemas reales, aprenden en grupos buscando información acerca de dichos problemas para obtener soluciones, siempre bajo la supervisión del tutor.

- **Estudio de casos**

Esta es una metodología en la que el docente presenta situaciones profesionales y los alumnos son los encargados de analizarlas, para obtener un aprendizaje experiencial y averiguar soluciones eficaces.

- **Modelización**

Este proceso se basa en crear una representación o modelo con el objetivo de analizar e investigar la realidad, la modelización está ligada a la vida diaria y da una visión novedosa a la matemática.

- **Simulación y juego**

Esa estrategia permite a los estudiantes, a través de simulaciones y juegos, afrontar situaciones en el aula para las que tal vez no estarían capacitados en la vida real. Es una estrategia motivadora que promueven la autonomía y el aprendizaje significativo y permite reflexionar sobre los acontecimientos semejantes en contexto real.

1.17. Materiales y recursos

Los materiales y recursos didácticos empleados en la elaboración de esta unidad didáctica son:

- a) Recursos materiales del alumno: lápiz, hojas, bolígrafos, goma, reglas y compás.
- b) Recursos autoconstruidos: carteles, tangram, juegos y figuras de papiroflexia (poliedros, figuras...).
- c) Recursos impresos: libros de lectura, cuadernos del alumno, fichas, libros de texto y periódicos.
- d) Recursos audiovisuales: televisión, proyector y DVD.
- e) Recursos informáticos: Ordenadores, internet, GeoGebra, Excel, paginas interactivas, apps y videos.
- f) Recursos tecnológicos: portátil, cámara de fotos, pizarra digital, tabletas y calculadora científica.
- g) Recursos ambientales: se dividen en propios (aula, patio y biblioteca) y externos (parque, museos y ciudad).
- h) Recursos humanos / personales: profesor de matemáticas, alumnos, profesores de otras materias, equipo directivo, departamento de orientación, familias y personas invitadas a charlas, excursiones y otras actividades.

1.18. Organización del alumnado

- a) **Distribución individual:** el alumno trabaja de forma individual en las actividades, aunque pertenezca a un grupo.
- b) **Distribución en grupos:** Se pretende fomentar el aprendizaje horizontal, las tareas se puede afrontar por tiempos o simultáneamente y los grupos se pueden estructurar con diferente número de componentes.
- c) **Distribución masiva:** Se realiza una actividad donde la participación es masiva y solo hay un único grupo.

1.19. Actividades y tareas

Para la elaboración de este apartado las actividades y tareas que se van a definir viene propuestas por el profesor del Máster de Secundaria Luque Cañada, que ha impartido parte de la asignatura: aprendizaje y enseñanzas de la materia de matemáticas. Esas actividades cubren los contenidos y están relacionados con las metodologías empleadas. Quedan definidas a continuación:

<i>Tipo de Actividad</i>		<i>Finalidad de la Actividad</i>
Act. de diagnóstico	DIAG	Permiten realizar un cómputo del nivel de los alumnos
Act. de Introducción	INT	Permiten adaptarse al posterior ritmo de trabajo
Act. de motivación	MOT	Buscan la implicación y "motivación" del alumno
Act. de aprendizaje	AP	Adquirir destrezas procedimentales y conceptuales
Act. de desarrollo	DES	Permiten desarrollar y fijar los contenidos propuestos
Act. consolidación	CON	Buscan reforzar los aprendizajes
Act. creativas	CRE	Posibilitan a partir de ideas desarrollar la creatividad
Act. de conclusión	CONC	Permiten ser conscientes de los objetivos conseguidos
Act. de síntesis	SIN	Diferencian los objetivos más importantes a conseguir
Act. resumen	RESU	Permiten al alumno observar los progresos obtenidos
Act. de evaluación	EV	Determinan el grado de consecución de los objetivos
Act. de recuperación	RECU	Permiten individualizar la enseñanza
Act. de ampliación	AMP	Permiten individualizar la enseñanza

Tabla 21. Tipo de actividades didácticas (Luque-Cañada, 2020).

1.20. Atención a la diversidad

Es necesario establecer pautas de atención a la diversidad educativa, según el artículo 20.1 del decreto 111/2016, de 14 de junio, encaminadas a distintas capacidades, estilos de aprendizaje, ritmos, intereses, motivaciones, situaciones socio-económicas, lingüísticas, culturales y saludables del estudiante. En Andalucía la Orden de 25 de Julio de 2008 regula la atención a la diversidad.

Para elaborar este apartado se van a considerar las medidas propuestas en la mencionada orden de atención a la diversidad de carácter general para la enseñanza obligatoria, en las que se especifica que cada centro adoptará las medidas que consideren más oportunas, los profesores realizarán una propuesta de organización académica para la atención a la diversidad que contemple medidas como agrupamientos flexible temporal para facilitar la integración de los estudiantes, desdoblamientos de grupos en áreas y materias para reforzar su enseñanza, horario semanal flexible y apoyo de otros profesores sobre todo para materias básicas como son la Lengua Castellana y Literatura y Matemáticas, materia en la que se contempla esta unidad didáctica.

Los programas de refuerzo para la recuperación de los aprendizajes no adquiridos, incluidos en el artículo 9 de la citada ley son:

- 1.- El estudiante que promoció sin superar todas las materias tendrá un programa de refuerzo para recuperar los aprendizajes no adquiridos y debe de superar la evaluación del programa.
- 2.- Para la recuperación de los aprendizajes no adquiridos, se realizarán programas de refuerzo que incluirán tareas programadas, para realizar el asesoramiento, seguimiento, y atención personalizada de los alumnos con materias pendientes de otros cursos, así como criterios y estrategias de evaluación.
- 3.- Si la materia no superada tiene continuidad en el siguiente curso, el docente responsable será el tutor/a, maestro/a, en educación primaria y profesor/a en educación secundaria.
- 4.- Se asignará un docente al alumno, en caso de que la materia no tenga continuidad en el siguiente curso.
- 5.- Los alumnos que no superen el programa de recuperación en el programa de recuperación al terminar el curso académico podrán presentarse a la prueba extraordinaria.

Con respecto a la atención a la diversidad, se ha de atender al alumnado con necesidades educativas especiales, altas capacidades, desventaja social, dificultades

especificadas de aprendizaje, aunque también, y no menos importante, se ha de considerar la incorporación tardía al sistema educativo. Las medidas aplicadas van dirigidas a que el alumnado desarrolle sus capacidades al mayor nivel y que adquiera los objetivos y competencias clave establecidos para todo los alumnos y alumnas.

En primer lugar, se realiza una evaluación inicial a todo el alumnado para determinar el conocimiento individual y por grupos de los estudiantes. Esta evaluación se relacionará con los datos que posea el Departamento de Orientación, para poder delimitar conclusiones sobre las medidas a adoptar, los recursos necesarios y poder realizar un seguimiento con los estudiantes.

Se establecen dos líneas con respecto a la atención a la diversidad, por un lado, los estudiantes con necesidades educativas específicas y la atención a la diversidad de aptitudes de aprendizaje.

En el Anexo VI, se desarrollan dos apartados sobre el alumnado con necesidades educativas específicas y la atención a la diversidad de aptitudes de aprendizaje.

1.21. Actividades complementarias y extraescolares

En este apartado se exponen sugerencias de actividades complementarias y extraescolares que dependerán del docente que imparta la materia, las características del alumnado, la organización del curso y del presupuesto disponible.

Actividad	Objetivos	Responsable	Calendario	Lugar
Visita matemática a la ciudad	El objetivo principal es que los estudiantes relacionen el mundo real con lo aprendido.	Departamento de matemáticas	Tercer trimestre	El municipio donde se encuentra el centro
Concurso fotográfico de matemáticas	Motivar al alumnado y provocarle interés por la relación entre la naturaleza y las matemáticas.	Departamento de matemáticas	Tercer trimestre	El propio centro y alrededores

Tabla 22. Actividades complementarios y extraescolares (elaboración propia).

1.22. Temporalización de Matemáticas de 2º de E.S.O.

Esta temporalización se ha realizado para 13 unidades didácticas, añadiéndole una semana más al final de repaso para recuperar sesiones perdidas en el curso académico si hubiese sido el caso y para la realización de una evaluación global del curso académico.

En la temporalización, se realizará un anteproyecto de las expectativas que queremos alcanzar, aunque como cualquier temporalización será flexible a cambios, adaptándose al proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. A continuación, se expone la tabla con la temporalización para el grupo de segundo de ESO de matemáticas que se revisará conforme vayan avanzando las sesiones y los trimestres.

	Sesiones(h)	UNIDADES DE CONTENIDOS
1º-EVALUACIÓN	BLOQUE DE PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES (50 h)	
	10 h	UD.1.- Números naturales. Divisibilidad.
	10 h	UD.2.- Números enteros.
	10 h	UD.3.- Números decimales y fracciones.
	10 h	UD.4.- Operaciones con fracciones.
	10 h	UD.5.- Proporcionalidad numérica. Porcentajes.
2º-EVALUACIÓN	BLOQUE DE NÚMEROS Y ÁLGEBRA (36 h)	
	12h	UD.6.- Álgebra.
	12h	UD.7.- Ecuaciones.
	12h	UD.8.- Sistemas de ecuaciones.
	BLOQUE DE GEOMETRÍA (30 h)	
	8 h	UD.9.- Teorema de Pitágoras.
3º-EVALUACIÓN	10 h	UD.10.- Semejanza y Teorema de Tales
	12 h	UD.11.- Cuerpos geométricos y Medida de volumen.
	BLOQUE DE FUNCIONES (12 h)	
	12 h	UD.12.- Funciones.
	BLOQUE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (10 h)	
	10 h	UD.13.- Estadística. Cálculo de Probabilidades.

Tabla 23. Temporalización de 2 de E.S.O (elaboración propia).

La última semana se destina a repaso.

La unidad didáctica seleccionada es la **UD-10: “Semejanza y Teorema de Tales”** de segundo de ESO, como ya hemos visto en apartados anteriores. Se impartirá en el tercer trimestre, después de la unidad didáctica del Teorema de Pitágoras y cuando se finalice, se comenzará con el desarrollo de la unidad didáctica de cuerpos geométricos y medidas de volumen.

En el desarrollo del curso académico se impartirán un total de 138 sesiones sin contar la semana de repaso y se establecen 10 sesiones para la UD-10: “Semejanza y Teorema de Tales”. Al disponer de cuatro horas semanales para impartir la materia, la unidad didáctica se trabajará durante dos semanas y media.

1.22.1. Desarrollo de la unidad didáctica

El desarrollo de esta unidad didáctica se realizará en el tercer trimestre. A continuación, se determinan las distintas sesiones para 2º de ESO de la unidad didáctica 10: Semejanza y Teorema de Tales”.

2º ESO	Desarrollo de la UD.-10: "Semejanza y Teorema de Tales"
1ª Sesión (1h)	- Introducción y motivación del Teorema de Tales. - Evaluación inicial de conocimientos.
1ª Sesión (1h)	- Figuras semejantes. Razón de semejanza. - Actividad de apps y aplicaciones.
3ª Sesión (1h)	Escala. Planos y mapas.
4ª Sesión (1h)	- Semejanza entre triángulos con GeoGebra. - Construcciones geométricas con GeoGebra.
5ª Sesión (1h)	Teorema de Tales. Aplicaciones.
6ª Sesión (1h)	Actividad de modelización: 'El barco vikingo'.
7ª Sesión (1h)	Corrección de actividades y resolución dudas para el examen.
8ª Sesión (1h)	Examen de la Unidad didáctica.
9ª Sesión (1h)	- Revisión y corrección del examen. - Actividad contra el acoso escolar.
10ª Sesión (1h)	- Examen de recuperación. - Actividades de ampliación. - Actividades de refuerzo.

Tabla 24. Desarrollo de la UD.- “10: "Semejanza y Teorema de Tales" (elaboración propia).

1.22.2. Desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica

La elaboración de las sesiones de la UD-10: “Semejanza y Teorema de Tales” se desarrolla en el este apartado. Los objetivos, contenidos, competencias, actividades, metodología, organización, materiales y recursos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de las sesiones, se desarrollan en el Anexo VI.

Las actividades que componen las 10 sesiones de la unidad didáctica se desarrollan en el Anexo VII.

En el Anexo VIII se desarrolla la actividad de modelización que se realizará en la sesión número 6, “Actividad de modelización: El barco vikingo”.

Introducción y motivación del Teorema de Tales

Evaluación inicial de conocimientos

N.º sesión	1	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Desarrollo de las Actividades		Tiempo
1. Recepción. El profesor recibe al alumnado y le explica la estructura de las sesiones en las que se divide la unidad didáctica.		5'
2. Visionado de un video. Se visualizará un video (Actividad 1.1.) en el que se expondrá el Teorema de Tales, una breve introducción histórica y aplicaciones matemáticas básicas. El enlace es: https://www.youtube.com/watch?v=6nYnXeqrhKQ y tienen una duración de 5 min aproximadamente.		5'
3. Conceptos y comentarios. Se introducen los conceptos clave que se van a tratar en la unidad didáctica. Estos conceptos se anotarán en la pizarra indicando las páginas del libro de texto de la editorial del centro donde se encuentra referidos, para que el alumnado pueda identificarlos. Para la introducción del Teorema de Tales, se comentará el video proyectado anteriormente, analizando los contenidos y resolviendo las posibles dudas que puedan aparecer.		10'
4. Test evaluación inicial. Se realizará un test en el aula (Actividad 1.2.) sobre los conceptos básicos de la unidad didáctica. Este test de evaluación, se realizará con la plataforma Quizizz, que se podrá relacionar con la plataforma Classroom.		25'
5. Correcciones. El profesor mostrará en el proyector las soluciones correctas del test de evaluación que le servirá para ver el conocimiento del alumnado sobre los conceptos clave de la unidad didáctica.		5'
6. Dudas y explicación de los materiales necesarios para la próxima sesión. El profesor resuelve las dudas que el alumnado haya tenido durante la sesión y enuncia los contenidos que se van a exponer en la siguiente sesión, haciendo hincapié en la actividad de aplicaciones y apps.		5'

Tabla 25. Desarrollo de la sesión Nº1 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Figuras semejantes. Razón de semejanza Actividad de apps y aplicaciones						
N.º sesión	2	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Desarrollo de las Actividades		Tiempo
1. Recepción. El profesor recibe al alumnado y pregunta al grupo en general si existe alguna duda y/o curiosidad de la sesión anterior.		5'
2. Concepto de figuras semejantes y razón de semejanza. Se introduce el concepto de figuras semejantes a los alumnos, haciendo hincapié en la proporcionalidad de los lados. A partir de este concepto, se define la razón de semejanza.		10'
3. Realización de actividades relacionadas con los contenidos. Se realizarán dos ejemplos (actividad 2.1. y actividad 2.2.) con la participación voluntaria de alumnos en la que ayudaran en los cálculos mentales. En un ejercicio se emplearán ambos conceptos y en el otro se utilizará la razón de semejanza entre triángulos, para encaminar al alumnado al concepto de semejanza de triángulos de futuras sesiones.		10'
4. Introducción a la actividad de apps y recursos web. En este apartado, el profesor propone que los alumnos busquen aplicaciones de cálculo y resolución de figuras y triángulos semejantes en los recursos que dispongamos (ordenadores, móviles y/o tablets.)		5'
5. Trabajo de los alumnos en la actividad. Los estudiantes descargan aplicaciones e interactúan con ellas individualmente. Después de unos minutos se forman grupos de entre 3 y 5 alumnos para que comparen las aplicaciones encontradas, el profesor ayudará a los alumnos con más dificultades y propondrá más búsquedas a los alumnos que llevan más avanzada la actividad.		15'
6. Reflexión sobre la actividad. El profesor propondrá que cada grupo exponga en voz alta la aplicación más relevante que hayan encontrado y entre todos habrá una reflexión en la que el docente será el portavoz.		5'
7. Dudas de la sesión y propuesta de ejercicios para la siguiente sesión. El profesor resuelve las dudas que el alumnado haya tenido durante la sesión y se proponen 2 actividades (actividad 2.3. y actividad 2.4.) para realizar en casa y corregirlas en la próxima sesión.		5'

Tabla 26. Desarrollo de la sesión N°2 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Escala. Planos y mapas						
N.º sesión	3	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Desarrollo de las Actividades						Tiempo
1.	Recepción. El profesor recibe al alumnado y pregunta al grupo en general, si existe alguna duda y/o curiosidad de la sesión anterior.					5'
2.	Corrección de las actividades de la sesión anterior. Se les pregunta a los alumnos por los ejercicios realizados en casa (actividad 2.3. y actividad 2.4.) y se corrigen en la pizarra, seleccionando a alumnos al azar. Los compañeros deberán de seguir la corrección para comprobar sus actividades.					15'
3.	Concepto de Escala. El profesor explica el concepto de escala. Para ello utilizará los conceptos de plano, mapas y maquetas.					10'
4.	Obtención de la escala, mediante un ejemplo. El profesor resolverá la actividad 3.1. sobre el concepto de escala, incluyendo un apartado en la tarea donde los estudiantes pueden comprobar distintas medidas y hará hincapié en que los alumnos atiendan, advirtiéndole de que después de la explicación se realizará una actividad similar en clase.					10'
5.	Actividad para realizar en clase. Los alumnos realizarán en grupos de dos una tarea (actividad 3.2.) similar a la resuelta por el profesor en clase. Los últimos minutos se emplearán en la resolución de la actividad por un alumno en la pizarra. El profesor ha de motivar a todo el alumnado para que no siempre sean los mismos alumnos los que participen y podrá seleccionar a cualquier alumno para la resolución de la actividad.					10'
6.	Dudas de la sesión y propuesta de ejercicios para la siguiente sesión. El profesor resuelve las dudas que el alumnado haya tenido durante la sesión y propone 2 actividades (actividad 3.3 y actividad 3.4) para realizar en casa y corregirlas en la próxima sesión.					5'

Tabla 27. Desarrollo de la sesión N°3 de la unidad didáctica (elaboración propia).

GeoGebra: Semejanza entre triángulos y construcciones geométricas						
N.º sesión	4	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Desarrollo de las Actividades						Tiempo
1.	Recepción. El profesor recibe a los estudiantes y pregunta por los resultados de las actividades realizadas en casa, se resolverán las dudas, y de ser necesario el profesor resolverá en la pizarra las actividades.					5'
2.	Explicación de los criterios de semejanza de triángulos. El profesor explica los criterios de semejanza mediante la actividad 4.1. y la actividad 4.2. con la ayuda del software matemático de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/XhB3tt5q . La actividad presenta deslizadores para que los triángulos cambien de forma y los alumnos puedan apreciar de una manera óptima la semejanza.					25'
3.	División de un segmento con GeoGebra. El profesor realiza la división de un segmento en partes iguales mediante GeoGebra, siguiendo una serie de pasos que se exponen en la actividad 4.3.					20'
4.	Dudas de la sesión y propuesta de ejercicios para la siguiente sesión. El profesor resuelve las dudas de la sesión y propone una actividad 4.4. para realizar con GeoGebra: la división de un segmento en partes proporcionales a dos segmentos dados. Se les explica brevemente cómo se realiza la actividad.					5'

Tabla 28. Desarrollo de la sesión N°4 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Teorema de Tales. Aplicaciones						
N.º sesión	5	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Desarrollo de las Actividades						Tiempo
1.	Recepción. El profesor recibe a los estudiantes y pregunta por la actividad de GeoGebra que se propuso en la sesión anterior, resuelve las dudas y anuncia que en la sesión de hoy se explicará el Teorema de Tales y algunas de sus aplicaciones.					5'
2.	Introducción y enunciado del Teorema de Tales. El profesor enuncia el Teorema de Tales, definiéndolo como el teorema más importante que se estudiará en el curso académico junto con el Teorema de Pitágoras. Se recordará a los alumnos que en la primera sesión ya se presentó a Tales y se mostró la aplicación al cálculo de la altura de la pirámide mediante este teorema.					25'

	Se introduce el teorema a partir de rectas paralelas que cortan a otras dos, llegando al enunciado del Teorema de Tales, como ya se analizó en el apartado de fundamentación curricular a través del libro de texto de Anaya.	
3. Triángulos en posición de Tales.	El profesor explica la definición de triángulos en posición de Tales, manifestando literalmente que, si dos triángulos tienen un ángulo común y los lados opuestos a ese ángulo paralelos, se encuentra en posición de Tales y por lo tanto son semejantes.	5'
4. Cálculo de la altura de un objeto.	El profesor plantea dos actividades de cálculo de la altura de un objeto a partir de su sombra (actividad 5.1.) y sin recurrir a su sombra (actividad 5.2.) para que los alumnos resuelvan en el cuaderno de clase, mientras los alumnos realizan las actividades el profesor observará que tienen claros los conceptos, resolviendo individualmente sobre el pupitre los errores y dudas que detecte mientras se mueve por el aula. El profesor pide a los alumnos que comprueben los resultados a través del Teorema de Pitágoras, para que aprecien que en ciertas ocasiones se pueden utilizar ambos teoremas.	15'
5. Dudas de la sesión y referencia a la siguiente sesión de modelización.	El profesor resuelve las dudas de la sesión y enuncia que en la próxima sesión se va a trabajar con una actividad de modelización novedosa y que está relacionada con las atracciones de feria, en especial con el barco vikingo. Se les mandan a los alumnos dos tareas para casa (actividad 5.3. y actividad 5.4.).	5'

Tabla 29. Desarrollo de la sesión N°5 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Actividad de modelización: 'El barco vikingo'						
N.º sesión	6	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Desarrollo de las Actividades						Tiempo
1. Fase de inicio e introducción de la actividad	El profesor introduce la actividad en clase, dando una copia de la misma a cada alumno. A continuación, se anuncia que la clase de hoy va a ser diferente y expone los objetivos que se pretende cumplir.					10'
2. Fase exploratoria y desarrollo de la tarea	Se les pide a los alumnos que trabajen individualmente y luego en grupos de trabajo. El objetivo es que los alumnos lleguen a distintas soluciones posibles de la actividad.					20'
3. Fase de debate y discusión	Los alumnos exponen las soluciones obtenidas y la justificarán. El profesor puede entrar a valorar algunas ideas o dejarlo para la siguiente fase.					10'
4. Fase de sistematización del aprendizaje matemático						15'

En esta fase se va a reorganizar los conocimientos matemáticos más importantes, los procesos de los alumnos y las soluciones que no hayan podido alcanzar el alumnado.	
--	--

Tabla 30. Desarrollo de la sesión N°6 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Corrección de actividades y resolución dudas para el examen						
N.º sesión	7	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Desarrollo de las Actividades						Tiempo
1. Recepción.	El profesor recibe al alumnado y pregunta por la actividad de modelización 'El barco vikingo' con el objetivo de valorar las opiniones del alumnado y poder elaborar actividades similares en otras unidades didácticas.					5'
2. Corrección de las actividades de la sesión anterior.	Se corrigen las tareas pendientes de la sesión 5 en la pizarra (actividad 5.3. y actividad 5.4.). Para ello se seleccionan alumnos de forma voluntaria.					15'
3. Resolución de dudas para el examen.	Esta sesión es anterior al examen de la unidad didáctica, por lo cual se resolverán todas las dudas que presenten los alumnos. Si el grupo ha asimilado los contenidos y queda tiempo, se realizará un esquema con todos los contenidos vistos en la sesión. Se les pregunta a los alumnos qué le ha parecido la unidad didáctica, para que el profesor obtenga sus propias conclusiones y se les anima a los alumnos a estudiar y reforzar los contenidos para el examen.					35'

Tabla 31. Desarrollo de la sesión N°7 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Examen de la Unidad didáctica						
N.º sesión	8	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Desarrollo de las Actividades						Tiempo
1. Recepción.	El profesor recibe a los estudiantes, reparte el examen y lo lee en voz alta. Si algún alumno no entiende alguna actividad el docente resolverá la duda en voz alta para toda la clase.					5'
2. Examen de la unidad didáctica.	Los alumnos realizarán el examen (actividad 8.1.) a lo largo de la sesión. El examen estará compuesto por cinco ejercicios similares a los realizados en sesiones anteriores cubriendo todos los objetivos y contenidos contemplados en el marco legal. Uno de los ejercicios del examen del libro					45'

se obtendrá de los ejercicios finales del libro de texto, motivando al alumno a que realice las actividades del mismo.	
3. Entrega de examen. Cuando queden 5 minutos para terminar la sesión, el profesor recogerá los exámenes de los alumnos.	5'

Tabla 32. Desarrollo de la sesión N°8 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Revisión y corrección del examen Actividad contra el acoso escolar						
N.º sesión	9	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Desarrollo de las Actividades		Tiempo
1. Recepción. El profesor recibe a los estudiantes, pregunta de forma general cómo ha ido el examen de la sesión anterior y empieza con la revisión del examen (Actividad 9.1.).		5'
2. Revisión y corrección del examen. El profesor reparte los exámenes corregidos para que los alumnos puedan observar dónde han cometido errores y puedan apreciar los aciertos que han obtenido. Cuando termina de repartir los exámenes evaluados, corrige el examen en la pizarra debatiendo las soluciones con los estudiantes.		30'
3. Actividad contra el acoso escolar. El alumnado realiza la actividad 9.1, que trata del acoso escolar. Se presenta un caso de acoso escolar en un texto que leerá el profesor en voz alta y después los alumnos deben contestar a un breve cuestionario seleccionando la respuesta correcta entre varias opciones. Finalmente, se debatirán las respuestas en la que todo el alumnado debe llegar a una solución unánime. Nota: En el texto se usarán nombres de alumnos que no estén en el aula para que no se puedan identificar con los personajes del texto.		20'

Tabla 33. Desarrollo de la sesión N°9 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Examen de recuperación Actividades de ampliación y actividades de refuerzo						
N.º sesión	10	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Desarrollo de las Actividades		Tiempo
1. Recepción. El profesor recibe a los estudiantes y explica que, en esta sesión, se va a realizar el examen de recuperación para los alumnos que no hayan		5'

superado el examen anterior, así como actividades de ampliación y refuerzo para los demás alumnos.	
2. Examen de recuperación, actividades de ampliación y de refuerzo. Los alumnos que no hayan superado el examen anterior realizarán el examen de recuperación (actividad 10.1.) a lo largo de la sesión, el examen estará compuesto por cinco ejercicios similares a los del examen de la unidad didáctica. Los estudiantes que necesiten fortalecer contenidos aun habiendo superado el examen, realizarán el examen de recuperación (actividad 10.1.) que se evaluará como una actividad complementaria. Los estudiantes que haya asimilado los contenidos de una forma óptima, realizarán una actividad de ampliación con actividades de razonamiento y demostraciones (actividad 10.2.) de los contenidos de la unidad didáctica.	45'
3. Entrega de examen y actividades. Cuando queden 5 minutos para terminar la sesión, el profesor recogerá los exámenes de los alumnos, las actividades de refuerzo y actividades de ampliación.	5'

Tabla 34. Desarrollo de la sesión Nº10 de la unidad didáctica (elaboración propia).

1.23. Evaluación

Este apartado del TFM trata los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, los instrumentos de evaluación, la aplicación de instrumentos y su clasificación y por último se analizarán los procesos de evaluación.

1.23.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

A partir del RD 1105/2014 y en relación con la Orden de 14 de julio de 2016, se obtienen los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del curso académico 2º de ESO para la materia de matemáticas. En el Anexo V se presentan los distintos criterios y estándares relacionados con la unidad didáctica que se elabora en el TFM y que se encuentran en el Bloque 1 y Bloque 3.

1.23.2. Instrumentos de evaluación

La evaluación se considera un procedimiento integral y continuo donde se recopilan todos los datos que sean necesarios en el transcurso de la unidad didáctica, tanto la desarrollada en este TFM como en las demás unidades didácticas. Se han de considerar los instrumentos de evaluación que se definen a continuación:

1. Pruebas escritas y orales

Se valorarán los aspectos conceptuales, procesos y habilidades mediante cuestionarios escritos y orales.

2. Diario del profesor

El docente ha de observar y anotar en el diario de clase el trabajo realizado por los alumnos cada día, valorando aspectos como: actitudes, argumentación de cuestiones propuestas, calidad de las sugerencias, participación dentro y fuera del aula, habilidades y destrezas y hábitos de trabajo del alumnado.

3. Entrevistas individuales y grupales

El docente debe reunirse con los alumnos para planificar refuerzos y/o replantearse la programación.

4. Cuaderno de tareas y actividades de los alumnos.

El cuaderno de tareas debe estar siempre listo para su revisión y debe estar cumplimentado, se ha de valorar la comprensión y elaboración de tareas, hábitos de trabajo, nivel escrito y gráfico de los alumnos y el uso de fuentes de información.

1.23.3. Aplicación de instrumentos y calificación

En la unidad didáctica que se está elaborando y en las demás unidades didácticas cada estándar de aprendizaje recibirá la misma ponderación. Los instrumentos de evaluación se repartirán de la siguiente manera:

Instrumento	Valoración
Anotaciones en el diario del profesor.	5%
Cuaderno de tareas del alumnado.	5%
Actividades e intervenciones en el aula.	15%
Interés, actitud y comportamiento en clase.	5%
Colaboración en trabajos en grupo.	5%
Pruebas orales y escritas.	65%
Examen de la Unidad didáctica.	

Tabla 35. Instrumentos de evaluación (elaboración propia).

En el Anexo VI, se exponen distintas tablas de evaluación que se pueden emplear en el transcurso de la unidad didáctica, evaluando aspectos como: el trabajo del alumno, actividades individuales, cooperativas, comportamiento del alumno en el aula, etc.

1.23.4. Procesos de evaluación

En proceso de evaluación se va a diferenciar en tres partes, la evaluación inicial, la evaluación continua y la evaluación final. El departamento de orientación colaborará para plantear las estrategias adecuadas a los alumnos que presenten necesidades específicas de apoyo educativo y será el encargado de elaborar informes con las especificaciones necesarias para favorecer el acceso a la evaluación.

a) Evaluación inicial

Al comiendo del curso académico, se realizará un test inicial para conocer la situación del grupo escolar, para determinar la estrategia a seguir en el transcurso el año académico. Esta evaluación será orientativa, y nos servirá para tomar medidas de refuerzo, recuperación y/o ampliación si fuese necesario. De la misma forma se realizará un pequeño test al principio de cada unidad didáctica enfocándola al proceso descrito anteriormente y con los mismos objetivos.

b) Evaluación continua

En el desarrollo del curso escolar, se irán valorando las competencias claves adquiridas por el alumnado y los objetivos conseguidos, considerando los criterios y estándares de aprendizaje de referencia. Si el docente detecta algún inconveniente, tomará medidas de refuerzo, recuperación y/o ampliación.

c) Evaluación final

Después del procedimiento enseñanza-aprendizaje se realizará una evaluación con un examen final para determinar si los alumnos han logrado alcanzar los objetivos y han adquirido las competencias clave. El alumnado que no consiga superar la prueba final, realizara otra prueba de recuperación en sesiones posteriores.

7. Conclusiones

En primer lugar, me gustaría resaltar que la realización de este TFM ha sido muy gratificante, cumpliendo con mis objetivos, expectativas y adquiriendo competencias importantes entre las que destaco las siguientes:

- Planificar sesiones de clase y programar tareas, siendo de vital importancia construir nuevos conocimientos sobre los conocimientos previos del alumnado, que se pueden percibir a través de una evaluación inicial, conociendo las limitaciones de aprendizaje para anticiparse a posibles dificultades y no esperar a la evaluación final de la unidad didáctica. Entender el entorno sociocultural del centro y aplicar la normativa del sistema educativo.
- Implantar una unidad didáctica en el aula y realizar tareas y actividades que cumplen con los objetivos y contenidos contemplados en el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato según la legislación autonómica y nacional.
- Mejorar mi expresión oral y escrita motivada por mis tutores del TFM en el desarrollo de la unidad didáctica.

- Conocer estrategias y metodologías presenciales y online empleadas en la docencia, consiguiendo una preparación en el campo de las tecnologías relacionadas con el entorno académico.
- Analizar y utilizar libros de texto entre otras fuentes de información para fundamentar actividades, tareas y trabajos.
- Atender a la diversidad y las necesidades educativas especiales, motivar al alumnado para que pueda asimilar los contenidos del currículo e implantar actividades estimulantes de modelización, con herramientas tecnológicas, de razonamiento crítico y comprensivo, interdisciplinares, emprendimiento y aprendizaje cooperativo.
- En el periodo de prácticas he detectado que varios alumnos necesitan de más atención y un seguimiento personalizado. En este punto me gustaría aportar una reflexión: es muy importante que cuando se revisan los trabajos, actividades y/o tareas del alumnado no solo se anoten los errores que cometen, sino que también se haga hincapié en los aciertos y se valoren las destrezas, motivando al alumnado. El trabajo tanto de un alumno como de cualquier persona ha de ser valorado y si siempre nos centramos en potenciar los fallos, esto puede provocar desánimo y afectar a su formación.

En las prácticas docentes he puesto en práctica la realización de un plan de modelización elaborado en el TFM, que he llevado a cabo en una sesión con buenos resultados, aunque hubiera sido más conveniente realizarlo en clases presenciales, debido a que en este tipo de actividades los alumnos han de interactuar en grupos, tomar decisiones, generar hipótesis y analizar los resultados, características relacionadas con la enseñanza presencial. He implantado diversas tareas diseñadas en este TFM y he podido detectar en ejercicios de semejanza como los alumnos recurren a la estrategia aditiva de forma errónea en vez de la multiplicativa, tema tratado en el artículo 3 de la fundamentación epistemológica de este TFM.

En el artículo 4 de la fundamentación epistemológica he podido analizar herramientas para impartir clases online que me han servido como base para después comparar con herramientas tecnológicas actuales y poder impartir clases online de forma óptima. En el periodo de prácticas he observado algunos de los errores que se describen en el artículo 2, y he propuesto al alumnado la resolución de problemas a través de la secuencia de resolución sugerida en el artículo, que rescatamos a continuación:

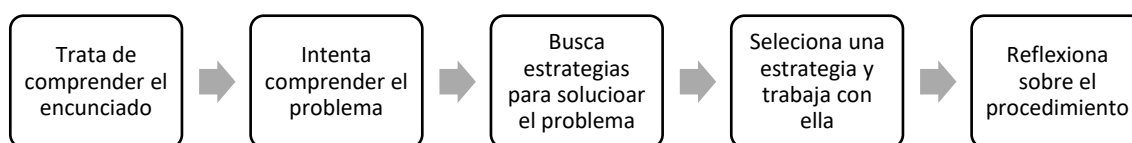


Tabla 36. Fases de resolución de problemas según Miguel de Guzmán (elaboración propia).

De forma reflexiva es conveniente manifestar que ser profesor no implica solo el hecho de exponer contenidos y realizar actividades. Además de tener un compromiso académico se debe tener, entre otros, un compromiso educativo y social al que se confía la educación de las futuras generaciones. Es un privilegio ser profesor, se mantiene un aprendizaje continuo, ayudas a formar a personas y eres una de las principales referencias para el alumnado, lo cual es un motivo de orgullo.

Aprendemos a ser profesor cuando somos alumnos, esta característica nos diferencia del resto de profesiones.

8. Referencias bibliográficas

Almodóvar Herráiz, J.A., Cuadrado Fernández, A., Díaz Ruiz, L., Dorce Polo, C., Gámez Pérez, J.C., Marín García, S., Pérez Saavedra, C., Redón Gómez, M., Sánchez Figueroa, D. (2016). *Matemáticas Andalucía, serie Resuelve 2 ESO*. Madrid: Ediciones Grazaalema, S.L.

Briceño Solís, E., Alamillo Sánchez, L. (2017) *Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria*. IE Revista de investigación educativa de la REDIECH vol.8, n.15. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200111&lng=es&nrm=iso (última consulta: 11/06/2020).

Conde Caballero, Y., Conde Caballero, R.J. (2005). *El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos*. Repositorio institucional de la Universidad Nacional de la Plata. Recuperado de <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/24662> (última consulta: 11/06/2020).

Consejería de educación y deporte (2018). Libros de texto utilizados en centros educativos en Andalucía. Junta de Andalucía. Recuperado de <https://www.juntadeandalucia.es/datosabiertos/portal/dataset/libros-de-texto-usados-en-centros-educativos> (última consulta: 10/06/2020).

Cólera Jiménez, J., Gaztelu Alberio, I., Colera Cañas, R. (2017). *Matemáticas 2 ESO*. Madrid: Grupo Anaya, S.A.

Dabán Guzmán, E., Dabán Guzmán, A.I., Puerta García, Ab. (2018). *La enseñanza del futuro: Educación Online*. Revista de educación e inspección: Supervisión 21. Recuperado de <https://usie.es/wp-content/uploads/2018/01/SP21-47-Art%C3%ADculo-Ense%C3%B1anza-en-el-futuro-ed-online-Daban-Guzman-y-altres.pdf> (última consulta: 11/06/2020).

Equipo directivo. (2017). Proyecto Educativo del I.E.S Miguel Sánchez López. Recuperado de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/23003934/helvia/sitio/upload/PROYECTO_EDUC_Revisado_Nov_2017.pdf (última consulta: 11/06/2020).

I.E.S. Miguel Sánchez López (2020). Recuperado de <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/23003934/helvia/sitio/>. (última consulta: 11/06/2020).

Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto de Evaluación. (2018). PISA 2018 *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE. Informe Español*. Madrid: Autor. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm> (última consulta: 10/06/2020).

Obra Colectiva Edebé (2016). *Matemáticas 2ºESO Andalucía*. Madrid: Grupo Edebé.

Puig Adam, P. (1975). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I*. Ed. Biblioteca Matemática.

Rico Romero, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Ed. Horsori: Universitat de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.

Rosa Del Barro, A. (1987). *Matemáticas: geometría y trigonometría*. Ed. Ingelek.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza Vásquez, G., Morales, S., Olfos Ayarza, R., Flores Medrano, E., Carrillo Yáñez, J. (2018). *Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria*. Publicado en: Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. Barcelona, 2018, v. 36, n. 2, junio; p. 105-123. Recuperado de <http://hdl.handle.net/11162/166894>. (última consulta: 10/06/2020).

■ **GeoGebra**

Ceferino, A. (2016). *Criterios De Congruencia Y Semejanza De Figuras*. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/XhB3tt5q> (última consulta: 8/06/2020).

■ **Videos**

Archimedes Tube (2018). El Teorema de Tales. Ejemplos. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=6nYnXeqrhKQ> (última consulta: 9/06/2020).

■ **Legislación**

Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de junio de 2016.

Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 26 de diciembre de 2007.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, de 10 de diciembre de 2013.

Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. Boletín Oficial del Estado, de 21 de septiembre de 1993.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 de enero de 2015.

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de julio de 2016.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015.

■ **Asignaturas**

García García, F.J. (2020). *Aprendizaje y enseñanza I de la materia de matemáticas*. Universidad de Jaén.

García Armenteros, M. (2020). *Aprendizaje y enseñanza II de la materia de matemáticas*. Universidad de Jaén.

Luque Cañada, L. (2020). *Aprendizaje y enseñanza I de la materia de matemáticas*. Universidad de Jaén.

Castro López, I. (2020). *Complementos de formación disciplinar en Matemáticas*. Universidad de Jaén

Roca Rodríguez, F. (2020). *Complementos de formación disciplinar en Matemáticas*. Universidad de Jaén

Anexo I: Desarrollo de las unidades didácticas y tipo de actividades en los libros de texto analizados

En el Anexo I, se desarrollan las unidades didácticas de los libros de texto de la editorial Grupo Anaya S.A., la editorial Santillana Grazalema S.L. y la editorial Guadiel-Edebé S.L.

Desarrollo de la unidad didáctica en el libro de texto de la editorial Anaya

La unidad didáctica comienza con una breve introducción histórica de los contenidos que se trabajan y sirve de motivación al alumnado.

Las características fundamentales de los contenidos de la unidad didáctica son:

- Las definiciones y contenidos más relevantes se encuentran destacados entre los demás.
- Se incluyen diversos ejemplos que sirven de práctica para los procesos más relevantes.
- Hay actividades y ejercicios denominados “Piensa y practica” sobre definiciones que se acaban de explicar y se resuelven de forma directa.
- En diversos ejemplos y ejercicios aparecen iconos en el enunciado que sugieren la metodología adecuada para afrontar el problema, se clasifican en: pensamiento crítico, aprendizaje cooperativo, interdisciplinariedad, emprendimiento, TIC y evaluación.

La unidad didáctica concluye con una relación de problemas y ejercicios de aplicación de los contenidos, un apartado denominado “Aprende a resolver problemas”, para que los estudiantes se enfrenten a los problemas y reflexionen sobre ellos y el apartado de taller de matemáticas con diversas actividades donde se trabajan criterios de evaluación del bloque de geometría y del primer bloque en común para todas las unidades que finaliza con una autoevaluación para los estudiantes.

Desarrollo de la unidad didáctica en el libro de texto de Santillana

Al inicio de la unidad didáctica se encuentra una autoevaluación para detectar si los estudiantes necesitan reforzar conceptos que debería tener asimilados y una evolución histórica de un concepto de la unidad.

Las características fundamentales de los contenidos de la unidad didáctica son:

- En las tareas denominadas “Saber hacer” se determinan los procesos básicos para que los estudiantes puedan repasar los contenidos.
- Los contenidos relevantes están marcados con recuadros de color para resaltar la información, y hay una serie de personajes animados durante toda la unidad con pancartas en las que se exponen ideas claves de la unidad.

- Actividades y ejemplos que sirven de práctica para los procedimientos más importantes.
- Es frecuente la exposición de recuadros en el desarrollo de la unidad para reforzar contenidos, que presentan como título expresiones del tipo: “Se escribe así”, “No olvides”, “Recuerda”.

La unidad didáctica concluye con una relación de actividades finales, una autoevaluación para verificar que los estudiantes han afianzado los contenidos de la unidad, un problema en la vida cotidiana, un problema para que los estudiantes utilicen el razonamiento matemático, un proyecto final para trabajar en grupo y varias pruebas PISA; actividades que sirven para trabajar criterios de evaluación del bloque de geometría y del bloque de procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Desarrollo de la unidad didáctica en el libro de texto Edebé

Al principio de la unidad didáctica se expone una introducción relacionando la unidad didáctica con algún acontecimiento histórico o tecnológico para motivar al alumnado, se enumeran los contenidos de la unidad y se propone un problema de pensamiento crítico orientado al trabajo cooperativo.

Las características fundamentales de los contenidos de la unidad didáctica son:

- Los contenidos más importantes se encuentran marcados para diferenciarse de los demás.
- Un apartado de la unidad didáctica se dedica a las tecnologías TIC, explicando detalladamente el procedimiento de realización de las actividades.
- En los márgenes de las paginas se ubican textos con información diversa, desde conceptos fundamentales, anotaciones, recordatorios hasta enlaces a páginas web.
- Las actividades se proponen normalmente al final de la página y en el desarrollo del contenido se expone multitud de conceptos y ejemplos con procedimientos explicados de forma exhaustiva para la resolución.
- A parte del libro del alumno, se puede acceder a el libro digital interactivo, en el que la unidad didáctica presenta diversos hipervínculos para acceder a contenidos web, actividades complementarias, videos explicativos y autoevaluaciones.

La unidad didáctica continua con una serie de actividades resueltas, una síntesis del todos los contenidos tratados en la unidad, una redacción de problemas denominada “Actividades finales” y concluye con actividades enfocadas en la creatividad de los alumnos, motivación y en metodologías como el aprendizaje basado en proyectos. En sus dos últimas páginas se trabajan cuestiones para que reflexione el alumnado y los

criterios de evaluación a través de una serie de actividades denominadas “Pon a prueba tus competencias”.

Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Anaya

Con respecto al tipo de actividades, se han clasificado en conceptos teóricos más relevantes de la unidad, actividades clasificadas dependiendo de si presentan elementos gráficos como pueden ser esquemas y/o dibujos, actividades resueltas, actividades contextualizadas en la vida real, actividades para que los estudiantes piensen y reflexionen, resto de actividades, actividades finales clasificadas según su dificultad y actividades de evaluación. En la siguiente tabla se puede apreciar el número de actividades para esta editorial:

Tipos de actividades	Cantidad de actividades		
Conceptos teóricos clave	12		
Actividades	11		
Actividades resueltas	15		
Actividades con elementos gráficos	14		
Actividades contextualizadas	6		
Actividades reflexivas	8		
Actividades finales (dificultad)	12 (Baja)	11 (Media)	2 (Alta)
Actividades evaluación	10		
Actividades Totales	Tema: 54	Finales: 25	Evaluación: 10

Tabla 37. Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Anaya (elaboración propia).

Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Santillana

Con respecto al tipo de actividades, al igual que en el caso anterior, se han clasificado en conceptos teóricos más relevantes de la unidad, actividades clasificadas dependiendo de si presentan elementos gráficos como pueden ser esquemas y/o dibujos, actividades resueltas, actividades contextualizadas en la vida real, actividades para que los estudiantes piensen y reflexionen, resto de actividades, actividades finales clasificadas según su dificultad y actividades de evaluación. En la siguiente tabla se puede apreciar el número de actividades para esta editorial:

Tipos de actividades	Cantidad de actividades		
Conceptos teóricos clave	10		
Actividades	14		
Actividades resueltas	6		
Actividades con elementos gráficos	11		
Actividades contextualizadas	4		
Actividades reflexivas	7		
Actividades finales (dificultad)	9 (Baja)	50 (Media)	6 (Alta)
Actividades evaluación	13		
Actividades Totales	Tema: 42	Finales: 65	Evaluación: 13

Tabla 38. Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Santillana (elaboración propia).

Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Edebé

Con respecto al tipo de actividades, al igual que en los dos casos anteriores, se han clasificado en conceptos teóricos más relevantes de la unidad, actividades clasificadas dependiendo de si presentan elementos gráficos como pueden ser esquemas y/o dibujos, actividades resueltas, actividades contextualizadas en la vida real, actividades para que los estudiantes piensen y reflexionen, resto de actividades, actividades finales clasificadas según su dificultad y actividades de evaluación. En la siguiente tabla se puede apreciar el número de actividades para esta editorial:

Tipos de actividades	Cantidad de actividades		
Conceptos teóricos clave	15		
Actividades	22		
Actividades resueltas	27		
Actividades con elementos gráficos	24		
Actividades contextualizadas	9		
Actividades reflexivas	13		
Actividades finales (dificultad)	34 (Baja)	52 (Media)	12 (Alta)
Actividades evaluación	20		
Actividades Totales	Tema: 95	Finales: 98	Evaluación: 20

Tabla 39. Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Edebé (elaboración propia).

Anexo II: Aspectos demográficos y socioeconómicos y características del alumnado del centro educativo

En el Anexo II, se desarrollan los aspectos demográficos y socioeconómicos y características del alumnado del Instituto de Educación Secundaria Miguel Sánchez López.

Aspectos demográficos y socioeconómicos

En el municipio de Torredelcampo, con población cercana a 14 mil habitantes, se encuentran cuatro Colegios de Educación Infantil y Primaria, el Instituto de Educación Secundaria Torre Olvidada impartiendo solo enseñanza obligatoria y el Instituto de Educación Secundaria Miguel Sánchez López que imparte clases de secundaria, postobligatoria y ciclos formativos.

El sector primario en el municipio es la agricultura, produciendo alrededor de 10 millones de kilos de aceite cada año, provocando que gran parte del alumnado participe en la labor agrícola durante el periodo de recolección. El sector industrial ha provocado la ampliación de una fase del polígono con 350.000 m² urbanizables distribuidos en naves industriales, viales, equipamiento deportivo, comercial y social, zonas verdes y plazas de aparcamiento. De menor importancia es el sector de la construcción y de servicios, aunque se sitúa en una posición favorecida debido a la cercanía con la capital.

El nivel económico familiar predominante de los alumnos del curso académico es el medio (61%), mientras que el 9 % tienen ingresos inferiores al salario mínimo, y el resto (30%) de las unidades familiares presenta un nivel económico alto. Estos datos se han extraído del proyecto educativo del centro, en el que se realizó un cuestionario al finalizar el curso académico de segundo de Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Según el proyecto educativo del centro, una gran parte del alumnado termina su etapa educativa al finalizar los estudios de Enseñanza Obligatoria e inician su etapa laboral en la industria del mueble, carpintería metálica, materiales de construcción, labores agrícolas, etc. Actualmente, se imparten cursos por distintas administraciones para atender a este sector demográfico.

Características del alumnado

En el Instituto de Educación Secundaria Miguel Sánchez López estudian cerca de 800 estudiantes, con una tendencia al alza y una ratio promedio de 26 estudiantes por aula. En la actualidad asisten al centro más alumnas que alumnos, aunque en general cada curso tiene variable porcentaje.

El instituto se nutre de alumnos y alumnas del municipio, pero también se encuentran estudiantes de Torredonjimeno y Jamilena en pequeña escala, siendo éstos dos

municipios colindantes. Los alumnos que se presentan a selectividad obtienen buenos resultados, llegando casi al 100% de aprobados en la convocatoria de junio.

Los intereses profesionales y académicos de los alumnos se resumen de la siguiente forma:

- Estudiantes que pretenden seguir sus estudios en Bachillerato: 58%.
- Estudiantes que pretenden seguir sus estudios en Ciclos formativos: 27%.
- Estudiantes que se encuentran en el centro por obligación: 15%.

En la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, según datos de la Agencia Andaluza de Evaluación Educativa (AGAEVE), la tasa de absentismo escolar en los últimos dos años es el 2%, la tasa de abandono escolar en estudios postobligatorios es el 30%, la tasa de promoción por curso del 82% y el 84% del alumnado alcanza la titulación correspondiente.

El alumnado dedica su tiempo libre a ocio o a actividades como practicar algún deporte, oír música, salir con amigos, leer, ver la televisión y jugar a videojuegos.

Anexo III: Contenidos transversales de la unidad didáctica

En el Anexo III, se desarrollan los contenidos transversales de la unidad didáctica “Semejanza y Teorema de Tales”.

Contenidos transversales

Según el Artículo 6 del RD 111/2016 sobre elementos transversales, sin perjuicio de su tratamiento específico en las materias de la E.S.O. que se vinculan directamente con los aspectos expuestos a continuación :

- a) El respeto al Estado de Derecho y a los derechos y libertades fundamentales recogidos en la Constitución Española y en el Estatuto de Autonomía de Andalucía.
- b) El desarrollo de las competencias personales y las habilidades sociales para el ejercicio de la participación, desde el conocimiento de los valores que sustentan la libertad, la justicia, la igualdad, el pluralismo político y la democracia.
- c) La educación para la convivencia y el respeto en las relaciones interpersonales, la competencia emocional, el autoconcepto, la imagen corporal y la autoestima como elementos necesarios para el adecuado desarrollo personal, el rechazo y la prevención de situaciones de acoso escolar, discriminación o maltrato, la promoción del bienestar, de la seguridad y de la protección de todos los miembros de la comunidad educativa.
- d) El fomento de los valores y las actuaciones necesarias para el impulso de la igualdad real y efectiva entre mujeres y hombres, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de nuestra sociedad y al conocimiento acumulado por la humanidad, el análisis de las causas, situaciones y posibles soluciones a las desigualdades por razón de sexo, el respeto a la orientación y a la identidad sexual, el rechazo de comportamientos, contenidos y actitudes sexistas y de los estereotipos de género, la prevención de la violencia de género y el rechazo a la explotación y abuso sexual.
- e) El fomento de los valores inherentes y las conductas adecuadas a los principios de igualdad de oportunidades, accesibilidad universal y no discriminación, así como la prevención de la violencia contra las personas con discapacidad.
- f) El fomento de la tolerancia y el reconocimiento de la diversidad y la convivencia intercultural, el conocimiento de la contribución de las diferentes sociedades, civilizaciones y culturas al desarrollo de la humanidad, el conocimiento de la historia y la cultura del pueblo gitano, la educación para la cultura de paz, el respeto a la libertad de conciencia, la consideración a las víctimas del terrorismo, el conocimiento de los elementos fundamentales de la memoria democrática vinculados principalmente con hechos que forman parte de la historia de Andalucía, y el rechazo y la prevención de la violencia terrorista y de cualquier otra forma de violencia, racismo o xenofobia.

- g) El desarrollo de las habilidades básicas para la comunicación interpersonal, la capacidad de escucha activa, la empatía, la racionalidad y el acuerdo a través del diálogo.
- h) La utilización crítica y el autocontrol en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación y los medios audiovisuales, la prevención de las situaciones de riesgo derivadas de su utilización inadecuada, su aportación a la enseñanza, al aprendizaje y al trabajo del alumnado, y los procesos de transformación de la información en conocimiento.
- i) La promoción de los valores y conductas inherentes a la convivencia vial, la prudencia y la prevención de los accidentes de tráfico. Asimismo, se tratarán temas relativos a la protección ante emergencias y catástrofes.
- j) La promoción de la actividad física para el desarrollo de la competencia motriz, de los hábitos de vida saludable, la utilización responsable del tiempo libre y del ocio y el fomento de la dieta equilibrada y de la alimentación saludable para el bienestar individual y colectivo, incluyendo conceptos relativos a la educación para el consumo y la salud laboral.
- k) La adquisición de competencias para la actuación en el ámbito económico y para la creación y desarrollo de los diversos modelos de empresas, la aportación al crecimiento económico desde principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social, la formación de una conciencia ciudadana que favorezca el cumplimiento correcto de las obligaciones tributarias y la lucha contra el fraude, como formas de contribuir al sostenimiento de los servicios públicos de acuerdo con los principios de solidaridad, justicia, igualdad y responsabilidad social, el fomento del emprendimiento, de la ética empresarial y de la igualdad de oportunidades.
- l) La toma de conciencia sobre temas y problemas que afectan a todas las personas en un mundo globalizado, entre los que se considerarán la salud, la pobreza en el mundo, la emigración y la desigualdad entre las personas, pueblos y naciones, así como los principios básicos que rigen el funcionamiento del medio físico y natural y las repercusiones que sobre el mismo tienen las actividades humanas, el agotamiento de los recursos naturales, la superpoblación, la contaminación o el calentamiento de la Tierra, todo ello, con objeto de fomentar la contribución activa en la defensa, conservación y mejora de nuestro entorno como elemento determinante de la calidad de vida.

Anexo IV: Atención a la diversidad: alumnado con necesidades educativas especiales y atención a la diversidad de aptitudes de aprendizaje

En el Anexo IV, se desarrollan dos apartados sobre la atención a la diversidad: alumnado con necesidades educativas especiales y atención a la diversidad de aptitudes de aprendizaje.

Alumnado con necesidades educativas especiales

a) Alumnado con altas capacidades

El departamento de Orientación se encargará de realizar la adaptación curricular individualizada al alumno, contemplando la flexibilidad académica de ese alumnado entre otras características. Se plantearán tareas de indagación y de profundización, motivando los intereses personales del alumno. Es conveniente incluir mayor transversalidad para materias que precisen de mayor comprensión de las matemáticas para este tipo de alumnado

b) Alumnado con necesidades educativas especiales

Estos alumnos presentan una mayor dificultad que el resto del alumnado para acceder a los aprendizajes determinados en un currículo de su edad, debido a determinados factores y se necesita compensar estas dificultades con adaptaciones curriculares, de acceso y adaptaciones curriculares significativas. En el alumnado con leves dificultades, las adaptaciones se centrarán en: metodología personalizada, reforzar técnicas de aprendizaje, tiempos de aprendizaje, mejoras en los procesos y actitudes y una mayor atención orientadora. En los alumnos con graves dificultades se realizarán adaptaciones significativas, con lo cual, se eliminarán contenidos, objetivos y criterios de evaluación, dependiendo de la situación personal del alumno.

c) Alumnado con dificultades específicas de aprendizaje

Se presentan cuando los alumnos muestran alguna perturbación en los procesos psicológicos básicos para el desarrollo del lenguaje hablado y/o escrito. Los problemas con la escritura, cálculo aritmético y lectura pueden aparecer a principio de Educación primaria. El alumnado detectado con dificultades específicas de aprendizaje se ha de someter a programas de mejoras de lectura, escritura, lenguaje oral y/o cálculo.

d) Incorporación tardía al sistema educativo

El alumnado presenta necesidades específicas de apoyo educativo por la incorporación tardía al sistema educativo. Se lo proporcionará apoyo idiomático para superar la barrera del idioma si fuera necesario, y aulas de acogida para integrarlo en el sistema educativo.

e) Alumnado en desventaja social

Se le prestará el material disponible en el departamento, tales como calculadora, libros, cuadernillos, entre otros, para atender a los alumnos que pertenezcan a familias con dificultad económica. Hay que destacar que la Junta de Andalucía sufraga los gastos de los libros de texto a todos los alumnos.

Atención a la diversidad de aptitudes de aprendizaje

La atención a la diversidad ha de ser una característica fundamental en la docencia educativa, en este caso se contempla en 3 niveles, en la programación de aula, en la metodología y en los materiales.

a) Atención a la diversidad en la programación de aula

La programación de aula ha de tener presente que el alumnado progresa a distinta velocidad y con distintas profundidades en los conocimientos, por lo cual se ha de establecer un nivel mínimo para todo el alumnado al finalizar la etapa, profundizando en los contenidos más interesantes para el alumnado y recuperando objetivos no consolidados.

La programación ha de adaptarse al grupo de alumnos, y ha de tener presente los contenidos en los que el alumnado obtiene rendimiento muy disperso que en la materia de matemáticas sucede en la resolución de problemas. Se recomienda organizar las tareas en ampliación y refuerzo, con la finalidad de poder trabajar los mismos contenidos con alumnos de diferentes necesidades.

Las tareas de investigación permiten al alumnado desempeñar de forma autónoma el trabajo y que este aplique el ritmo más adecuado a sus cualidades.

b) Atención a la diversidad en la metodología utilizada

Ha de estar presente en el proceso de aprendizaje y llevar al docente a:

- Detectar las capacidades de los alumnos y complimentar con una enseñanza compensatoria a los que se le detecte menores conocimientos.
- Favorecer a que el alumno marque la velocidad de aprendizaje.
- Destacar los contenidos e ideas importantes subrayándolos.
- Los nuevos conocimientos matemáticos deben conectar con los conocimientos previos adquiridos y ser adecuados a su nivel cognitivo.
- Descomponer actividades, problemas y tareas en situaciones más sencillas.
- Comunicar con un lenguaje claro, conciso y sencillo.
- Suministrar resúmenes a los alumnos si fuese necesario.

- Teniendo en cuenta el nivel del alumnado, en la medida de lo posible, ajustarse a los objetivos pretendidos.

Esta metodología posibilita la capacidad del alumnado para aprender por sí mismo y fomentar el trabajo en equipo, favorece el pensamiento crítico y racional, la cooperación de los alumnos en el aula, el trabajo individual, la investigación, la lectura y las posibilidades de expresión.

c) Atención a la diversidad en los materiales usados

Se utilizará el libro de texto como material esencial, que se va a complementar con el uso de materiales de ampliación o refuerzo. Algunos instrumentos para atender a la diversidad del alumnado son: los trabajos voluntarios, trabajos en grupos pequeños, variedad de tareas de refuerzo, variedad metodológica, diversidad de procesos en la evaluación de aprendizaje y diversidad de instrumentos de recuperación.

Para una atención a la diversidad correcta, se puede llevar a cabo una evaluación inicial detallada, encaminar el aula a un clima de aprendizaje bueno y aumentar los refuerzos positivos con el objetivo de mejorar la autoestima.

Anexo V: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la unidad didáctica

En el Anexo V, se presentan los distintos criterios y estándares relacionada con la unidad didáctica que se elabora en el TFM y que se encuentran en el Bloque 1 y Bloque 3, a partir del RD 1105/2014 y en relación con la Orden de 14 de julio de 2016. Los criterios y estándares de aprendizaje se exponen en la siguiente tabla:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	C.CLAVE
Bloque 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.”		
CE.1.1. Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	MAT1.1.1 Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.	CMCT CCL
CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	MAT1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). MAT1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. MAT1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. MAT1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.	CMCT SIEP

CE.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para hallar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	MAT1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. MAT1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables,	CMCT SIEP
CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	MAT1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. MAT1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variándolos datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.	CMCT CAA
CE.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	MAT1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.	CMCT CAA CCL SIEP
CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de	MAT1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad,	CMCT

la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	susceptibles de contener problemas de interés. MAT1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. MAT1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. MAT1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. MAT1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.	CAA SIEP
CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	MAT1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CMCT CAA

CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	MAT1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. MAT1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. MAT1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. MAT1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	CMCT CAA
CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	MAT1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CAA SIEP
CE.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	MAT1.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves,	CAA SIEP

	aprendiendo para situaciones futuras similares.	
CE. 1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	MAT1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. MAT1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extrae información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. MAT1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. MAT1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	CMCT CD CAA
CE.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje,	MAT1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda,	CMCT CD SIEP

buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. MAT1.12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. MAT1.12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, Canalizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.	
Bloque 3: Geometría		
CE.3.3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados contruidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.	MAT3.3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. MAT3.3.2. Aplica el Teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	CMCT CAA CEC SIEP

CE.3.4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	MAT3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. MAT3.4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.	CMCT CAA
CE.3.6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes y superficies del mundo físico.	MAT3.6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.	CMCT CSC CEC

Tabla 40. Criterios y estándares de aprendizaje (RD 1105/2014, p. 395).

Anexo VI: Características del desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica

En este Anexo VI se elaborarán las sesiones de la unidad didáctica.

Introducción y motivación del Teorema de Tales						
Evaluación inicial de conocimientos						
N.º sesión	1	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades			
1. OB1 3. OB3 5. OB7 7. OB9	2. OB2 4. OB4 6. OB8	C1. 1.3 C4. 3.4 C7. 3.8	C2. 1.3 C5. 3.5 C8. 3.9	C3. 1.6 C6.3.7	a) CCL c) CD e) CSC	b) CMCT d) CAA f) CEC A1. INT A2. MOT A3. DIAG
Metodología	Organización	Materiales y recursos				
- Exposición del profesor: con la presentación del video y conceptos. - Aprendizaje cooperativo: en las correcciones y dudas. - Test en el aula: En la realización del test inicial.	Esta sesión inicial se trabajará de forma individual, tanto en la visualización del video, como la toma de apuntes, la realización del test inicial y las correcciones y dudas de las actividades.	Recursos materiales de los alumnos, recursos audiovisuales: proyector, recursos informáticos y tecnológicos: tables, Ordenadores, móviles o similar y recursos ambientales propios: aula.				
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.			
1. Evaluación inicial.			- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.			

Tabla 41. Características del desarrollo de la sesión Nº1 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Figuras semejantes. Razón de semejanza						
Actividad de apps y aplicaciones						
N.º sesión	2	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades			
1. OB1 3. OB7 5. OB9	2. OB2 4. OB9 C1. 1.1 C2. 1.2 C3. 1.4 C4. 1.6 C5. 3.1 C6.3.2 C7. 3.6 C8. 3.7 C9. 3.8	a) CCL b) CMCT c) CD d) CAA e) CSC f) CEC g) SIEP	A1. MOT A2. AP A3. DES A4. CRE A5. SIN			
Metodología	Organización	Materiales y recursos				
- Exposición: al introducir los contenidos de la materia. - Aprendizaje cooperativo: en las dudas y correcciones. - Aprendizaje basado en problemas: al afrontar los problemas de la sesión. - Simulación y juego: al interactuar con las aplicaciones y apps.	Distribución masiva para la explicación de la actividad y la exposición de los contenidos. Distribución individual para la realización de los problemas y la primera parte de la actividad. Distribución en grupos para comparar los resultados individuales de la actividad.	Recursos materiales del alumno, recursos impresos: libro de texto, cuaderno del alumno, recursos informáticos: ordenadores, internet, apps, móviles, Tablet y recursos propios del aula.				
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.			
1. CE.1.1	5. CE.1.8	9. CE.1.12	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.			
2. CE.1.2	6. CE.1.9	10. CE.1.11				
3. CE.1.3	7. CE.1.10	11. CE.1.12				
4. CE.1.6	8. CE.1.11	12. CE.3.4				

Tabla 42. Características del desarrollo de la sesión N°2 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Escala. Planos y mapas						
N.º sesión	3	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades			
1. OB5 3. OB8	2. OB6 4. OB9	C1. 1.1 C4. 1.6 C7. 3.9	C2. 1.2 C5. 3.1	C3. 1.4 C6.3.3	a) CCL c) CD e) CSC	b) CMCT d) CAA f) CEC
					A1. AP A2. DES A3. CON	
Metodología	Organización	Materiales y recursos				
- Exposición: al introducir los contenidos de la sesión. - Aprendizaje cooperativo: en las dudas y correcciones. - Aprendizaje basado en problemas: al afrontar los problemas de la sesión.	Distribución masiva para la explicación de la actividad y la exposición de los contenidos. Distribución individual para la toma de apuntes. Distribución en grupos de dos para la realización de la tarea en clase.	Recursos materiales del alumno: calculadora, reglas, recursos impresos: libro de texto, cuaderno del alumno, y recursos propios del aula: pizarra y/o pizarra digital.				
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.			
1. CE.1.1	4. CE.1.4	7. CE.1.10	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.			
2. CE.1.2	5. CE.1.8	8. CE.3.4				
3. CE.1.3	6. CE.1.9	9. CE.3.6				

Tabla 43. Características del desarrollo de la sesión N°3 de la unidad didáctica (elaboración propia).

GeoGebra: Semejanza entre triángulos y construcciones geométricas						
N.º sesión	4	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades			
1. OB1 3. OB3 4. OB7	2. OB2 4. OB4	C1. 1.1 C4. 1.6 C7. 3.5	C2. 1.2 C5. 3.2 C8. 3.6	C3. 1.4 C6.3.4 C9. 3.7	a) CCL c) CD e) CSC	b) CMCT d) CAA f) CEC
					A1. AP A3. DES A4. CON	
Metodología	Organización	Materiales y recursos				
- Exposición: al introducir los contenidos de la sesión. - Aprendizaje cooperativo: en las dudas y correcciones. - Aprendizaje basado en problemas: al afrontar los problemas de la sesión.	Distribución masiva para la explicación de los contenidos y explicación con GeoGebra. Distribución individual para la toma de apuntes.	Recursos materiales del alumno, recursos impresos: libro de texto, cuaderno del alumno, recursos informáticos: GeoGebra, ordenadores, internet, apps, móviles, Tablet y recursos propios del aula.				
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.			
1. CE.1.4	3. CE.1.11	5. CE.3.4	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.			
2. CE.1.8	4. CE.1.12	6. CE.3.6				

Tabla 44. Características del desarrollo de la sesión Nª4 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Teorema de Tales. Aplicaciones											
N.º sesión		5	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.				
			Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.er Trimestre (10 sesiones)	10				
Objetivos			Contenidos				Competencias			Actividades	
1. OB3 3. OB7 5. OB9		2. OB4 4. OB8	C1. 1.1 C4. 3.2 C6. 3.7	C2. 1.2 C5. 3.4 C7. 3.8	C3. 1.4 C6.3.5	a) CCL c) CD e) CSC g) CEC	b) CMCT d) CAA f) CEC	A1. AP A2. DES A3. CON			
Metodología				Organización				Materiales y recursos			
- Exposición: al introducir los contenidos de la sesión. - Aprendizaje cooperativo: en las dudas y correcciones. - Aprendizaje basado en problemas: al afrontar los problemas de la sesión. - Aprendizaje basado en problemas: el alumno se enfrenta a problemas basados en hechos reales bajo la supervisión del docente.				Distribución masiva para la explicación de la actividad y la exposición de los contenidos. Distribución individual para la toma de apuntes y la resolución de los problemas planteados.				Recursos materiales del alumno: calculadora, reglas, recursos impresos: libro de texto, cuaderno del alumno, y recursos propios del aula: pizarra y/o pizarra digital.			
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje											
Criterios de evaluación						Instrumentos de evaluación en la U.D.					
1. CE.1.1		4. CE.1.4		8. CE.1.10		- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.					
2. CE.1.2		5. CE.1.8		9. CE.3.3							
3. CE.1.3		6. CE.1.9		7. CE.3.4							

Tabla 45. Características del desarrollo de la sesión N°5 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Actividad de modelización: 'El barco vikingo'						
N.º sesión	6	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10
Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades			
1. OB3 2. OB4 3. OB7 4. OB8 5. OB9	C1. 1.1 C4. 1.4 C7. 3.2 C10. 3.6 C12. 3.8 C2. 1.2 C5. 1.5 C8. 3.4 C11. 3.7 C13. 3.9 C3. 1.3 C6.3.1 C9. 3.5	a) CCL c) CD e) CSC g) CEC b) CMCT d) CAA f) CEC	A1. AP A2. DES A3. CON A4. CRE A5. MOT A6. CONC			
Metodología	Organización	Materiales y recursos				
La metodología empleada para el desarrollo de esta sesión es la modelización, como estrategia metodológica para lograr aprendizaje significativo que se relaciona con el Aprendizaje orientado a proyectos (AOP).	Distribución masiva para la explicación de la actividad, donde hay un solo grupo, a continuación, la distribución individual, para que cada alumno se implique en la actividad y por último distribución grupal.	Recursos materiales de los alumnos, recursos audiovisuales: proyector, recursos impresos: hoja de la actividad, recursos informáticos: tablets, Ordenadores, móviles o similar, internet y recursos ambientales propios: aula.				
Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.			
1. CE.1.1	5. CE.1.6	9. CE.1.10	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.			
2. CE.1.2	6. CE.1.7	10. CE.1.11				
3. CE.1.3	7. CE.1.8	11. CE.1.12				
4. CE.1.4	8. CE.1.9	12. CE.3.4 y 3.6				

Tabla 46. Características del desarrollo de la sesión N°6 de la unidad didáctica (elaboración propia)

Corrección de actividades y resolución dudas para el examen						
N.º sesión	7	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Objetivos 	Contenidos 	Competencias 	Actividades 
1. Esta sesión es de resolución de dudas y se pretende que el alumnado no tenga dudas de los contenidos	1. Al igual que los objetivos, los contenidos serán flexibles y dependerá de las dudas del alumnado.	a) CCL b) CMCT c) CD d) CAA e) CSC f) CEC	A1. AP A2. CON A3. SIN A4. RESU

Metodología 	Organización 	Materiales y recursos 
- Aprendizaje cooperativo: en las dudas y correcciones. - Contrato de aprendizaje: se intercambian opiniones entre el docente y el alumnado durante la resolución de dudas para el examen.	Distribución individual: en la corrección de actividades y en la resolución de dudas para el examen.	Recursos materiales del alumno: calculadora, reglas, recursos impresos: libro de texto, cuaderno del alumno, y recursos propios del aula: pizarra y/o pizarra digital.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje			
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.
1. CE.1.2	4. CE.1.9	7. CE.3.4	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.
2. CE.1.4	5. CE.1.10	8. CE.3.6	
3. CE.1.8	6. CE.3.3		

Tabla 47. Características del desarrollo de la sesión N°7 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Examen de la Unidad didáctica						
N.º sesión	8	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Objetivos 	Contenidos 	Competencias 	Actividades 
1. En esta sesión se realiza el examen con el objetivo de que los alumnos demuestren sus conocimientos adquiridos.	1. Se trabajará con todos los contenidos adquiridos durante la unidad didáctica.	a) CCL b) CMCT c) CSC	A1. EV final

Metodología 	Organización 	Materiales y recursos 
Autónoma del alumno para la realización del examen.	Distribución individual: con los pupitres separados para la realización del examen.	Recursos materiales del alumno: bolígrafo, reglas y calculadora.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje			
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.
1. CE.1.2	4. CE.1.11	7. CE.3.6	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.
2. CE.1.6	5. CE.3.3		
3. CE.1.8	6. CE.3.4		

Tabla 48. Características del desarrollo de la sesión N°8 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Revisión y corrección del examen Actividad contra el acoso escolar

N.º sesión	9	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Objetivos 	Contenidos 	Competencias 	Actividades 
1. Esta sesión es de revisión del examen y se pretende que el alumnado aclare los errores que ha cometido. 2. Concienciación con el acoso escolar.	1. Los contenidos serán flexibles y dependerá de los errores y aciertos del alumnado.	a) CCL b) CMCT c) CD d) CAA e) CSC f) CEC	A1. CON

Metodología 	Organización 	Materiales y recursos 
- Aprendizaje cooperativo: en las dudas y correcciones. - Contrato de aprendizaje: se intercambian opiniones entre el docente y el alumnado durante la revisión del examen.	Distribución individual: en la revisión del examen y en la resolución de los errores cometidos en el examen.	Recursos materiales del alumno: calculadora, reglas, recursos impresos: libro de texto, cuaderno del alumno, y recursos propios del aula: pizarra y/o pizarra digital.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación			Instrumentos de evaluación en la U.D.			
1. CE.1.1	4. CE.1.4	7. CE.1.11	- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.			
2. CE.1.2	5. CE.1.8	8. CE.3.3				
3. CE.1.3	6. CE.1.9	9. CE.3.4				
		10. CE.3.6				

Tabla 49. Características del desarrollo de la sesión N°9 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Examen de recuperación						
Actividades de ampliación y actividades de refuerzo						
N.º sesión	10	Área	Curso	Ciclo	Temporalización	U. D.
		Matemáticas	2º E.S.O.	1º ciclo	3.º Trimestre (10 sesiones)	10

Objetivos 	Contenidos 	Competencias 	Actividades 
1. En esta sesión se realiza el examen de recuperación y actividades de ampliación y refuerzo con el objetivo de que los alumnos demuestren sus conocimientos adquiridos.	1. Se trabajará con todos los contenidos adquiridos durante la unidad didáctica.	a) CCL b) CMCT c) CSC	A1. EV final A2. RECU A3. AMP

Metodología 	Organización 	Materiales y recursos 
Autónoma del alumno para la realización del examen.	Distribución individual: con los pupitres separados para la realización del examen y las actividades de refuerzo y ampliación.	Recursos materiales del alumno: bolígrafo, reglas y calculadora.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje						
Criterios de evaluación				Instrumentos de evaluación en la U.D.		
1. CE.1.2	4. CE.1.11	7. CE.3.6		- Pruebas escritas y orales. - Diario del profesor. - Entrevistas individuales y grupales. - Cuaderno de tareas del alumno.		
2. CE.1.6	5. CE.3.3					
3. CE.1.8	6. CE.3.4					

Tabla 50. Características del desarrollo de la sesión N°10 de la unidad didáctica (elaboración propia).

Anexo VII: Desarrollo de las actividades de la unidad didáctica

En este Anexo VII se encuentran desarrolladas las actividades que componen las distintas sesiones de la unidad didáctica de la UD-10: “Semejanza y Teorema de Tales”.

Actividad 1.1.: Video introductorio sobre el Teorema de Tales	
Desarrollo:	Duración: 5 minutos
Se ha seleccionado un video sobre el Teorema de Tales con el que se pretende motivar a los alumnos y que despierten cierto interés sobre el contenido que se va a desarrollar en la unidad didáctica. A continuación, se expone el enlace del video en cuestión: https://www.youtube.com/watch?v=6nYnXeqrhKQ	

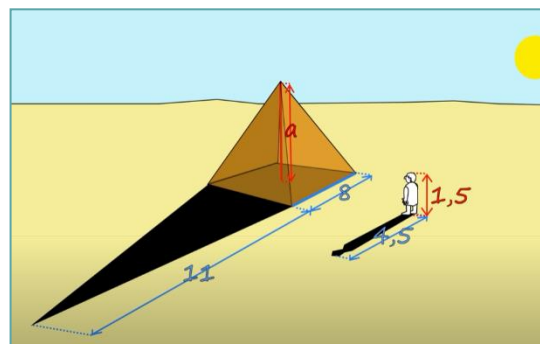
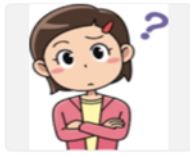


Tabla 51. Desarrollo de la Actividad 1.1. (elaboración propia).

Actividad 1.2.: Test de evaluación inicial	
Desarrollo:	Duración: 25 minutos
Se realiza un test de evaluación inicial, al igual que en todas las unidades didácticas, con los objetivos descritos en el apartado de evaluaciones, se utilizará la plataforma Quizizz, se redactarán 15 preguntas con los conceptos básicos que se realizarán simultáneamente en el aula con la ayuda del proyector, dispositivos móviles y tablets. Este test se puede enlazar con Classroom e impartir de forma virtual. A continuación, se exponen las preguntas del tipo test:	
Pregunta 1  Los dos triángulos que aparecen en la figuras son: — opciones de respuesta — ☐ Congruentes ☒ Semejantes ☐ Congruentes y Semejantes	

Pregunta 2



1. ¿Cuáles son las características de las figuras semejantes?

— opciones de respuesta —

- ☐ Son iguales
- ☐ Ángulos diferentes, distinto tamaño y misma forma
- ☒ Misma forma, lados proporcionales, distinto tamaño y ángulos iguales
- ☐ Distinta forma, distinto tamaño y ángulos diferentes

Pregunta 3

Tenemos dos triángulos semejantes, uno de los lados de un triángulo mide 9 metros, y el lado correspondiente en el otro triángulo mide 3 metros. ¿Cuál es la razón de semejanza?

— opciones de respuesta —

- ☐ La razón de semejanza es 2
- ☐ La razón de semejanza es 4
- ☒ La razón de semejanza es 3
- ☐ Ninguna de las respuestas es correcta

Pregunta 4

¿Cuál es la figura congruente de esta figura?



— opciones de respuesta —



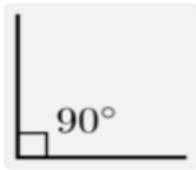
Pregunta 5

Dos triángulos son semejantes si no tienen los lados proporcionales.

— opciones de respuesta —

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso

Pregunta 6



El ángulo cuya medida es igual a 90° se denomina:

— opciones de respuesta —

- ☒ Recto
- ☐ Agudo

- ☐ Obtuso
- ☐ Hipotenusa

Pregunta 7

¿Qué indica la razón de proporción?

— opciones de respuesta —

- ☐ Indica que un lado se divide.
- ☐ Indica que la figura existe.
- ☐ Indica que una figura semejante es más pequeña.
- ☒ Indica las veces que es mayor o menor la figura semejante.

Pregunta 8



En mi casa tengo una maqueta de la catedral de Jaén que mide 3 cm. Si la altura real de la catedral es de 30 m, ¿cuál es la razón de semejanza?

— opciones de respuesta —

- ☒ 0,001
- ☐ 0,1
- ☐ 1000
- ☐ 10

Pregunta 9

¿Que es la escala?

— opciones de respuesta —

- ☐ Es una representación gráfica similar a una escalera
- ☐ Es un regla de sección triangular
- ☐ Es relación a priori entre la unidad representada y la graficada
- ☒ Es la relación entre la medida real y la representada

Pregunta 10



Escala 1:100. ¿Qué quiere decir?

— opciones de respuesta —



Que 1 cm en el plano equivale a 100 en la realidad



Que 1 cm en la realidad equivalen a 100mm en el plano

Pregunta 11



Para calcular la distancia de Sevilla a Madrid en un mapa a escala 1:180, se mide con una regla la distancia en el mapa y se multiplica por 180. ¿Es correcto?

— opciones de respuesta —

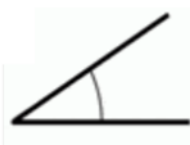


No



Sí

Pregunta 12



En la figura se muestra un ángulo agudo porque:

— opciones de respuesta —



Su ángulo es menor a 90°



Su ángulo es igual a 90°



Su ángulo es mayor a 90°



Su ángulo es igual a 180°

Pregunta 13

Cuando una figura tiene la misma forma pero es más pequeña, esto es una figura:

— opciones de respuesta —



semejante



congruente

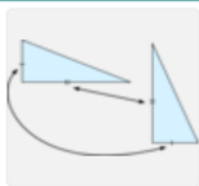


plana



tridimensional

Pregunta 14



Las figuras congruentes son figuras _____.

— opciones de respuesta —

- ☐ de diferentes tamaños
- ☐ de diferentes figuras
- ☐ diferentes formas
- ☒ exactamente iguales

Pregunta 15

En un triángulo, los ángulos miden 40° , 65° y 75° . Hay otro triángulo que tiene un ángulo de 40° . ¿Es semejante?

— opciones de respuesta —

- ☐ Depende de los la medida de los lados
- ☐ Sí lo son
- ☐ ¡Imposible que lo sean!
- ☒ Depende de los lados y de los otros dos ángulos. Con estos datos no se puede saber

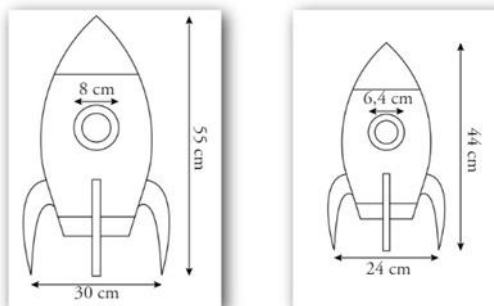
Tabla 52. Desarrollo de la Actividad 1.2. (elaboración propia).

Actividad 2.1.: Figuras semejantes y razón de semejanza

Desarrollo:

Duración: 5 minutos

1. Con una fotocopidora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?



Si dividimos cualquier segmento de la segunda figura por el correspondiente de la primera, el cociente es 0,8.

Por ejemplo:

- El alto del cohete $\rightarrow \frac{44}{55} = 0,8$
- El ancho del cohete $\rightarrow \frac{24}{30} = 0,8$
- El diámetro de la ventana $\rightarrow \frac{6,4}{8} = 0,8$

Este cociente (0,8) es la razón de semejanza que transforma la primera figura en la segunda.

Las fotocopadoras expresan la razón de semejanza en tantos por ciento. En este caso, es el 80 %.

Tabla 53. Desarrollo de la Actividad 2.1. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 2.2.: Razón de semejanza entre lados de triángulos	
Desarrollo:	Duración: 5 minutos
2. La razón de semejanza entre dos triángulos semejantes es 0,4. Si el mayor tiene 3 cm de base y 5 cm de altura, ¿cuánto miden la base y la altura del menor? Llamamos a y b a la altura y a la base del triángulo menor: $\frac{a}{5} = 0,4 \rightarrow a = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ cm}$ $\frac{b}{3} = 0,4 \rightarrow b = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ cm}$ Por tanto, el triángulo menor tiene 1,2 cm de base y 2 cm de altura.	

Tabla 54. Desarrollo de la Actividad 2.2. (elaboración propia a partir de Anaya).

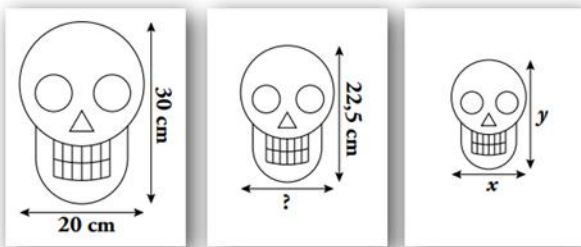
Actividad 2.3.: Figuras semejantes	
Desarrollo:	Tarea para casa
1. Las dos figuras de la derecha son reducciones que se han hecho en una fotocopidora sobre la figura de la izquierda:  a) ¿Qué reducción se ha aplicado a la página central? (Exprésala en tanto por ciento). b) ¿Cuánto mide el ancho de la calavera de la hoja central? c) Calcula los valores de x e y sabiendo que la reducción de la página de la derecha es del 60 %. a) $\frac{22,5}{30} = 0,75$. Se ha aplicado una reducción del 75 %. b) 75 % de 20 = 15. El ancho de la calavera central es de 15 cm. c) $y = 60 \%$ de 30 = 18 cm $x = 60 \%$ de 20 = 12 cm	

Tabla 55. Desarrollo de la Actividad 2.3. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 2.4.: Razón de semejanza	
Desarrollo:	Tarea para casa
2. Dos rectángulos semejantes tienen una razón de semejanza de 0,8. Las dimensiones del menor son 4 cm de ancho por 12 cm de alto. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo mayor? Ancho: $x \cdot 0,8 = 4 \rightarrow x = 4 : 0,8 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$ Alto: $y \cdot 0,8 = 12 \rightarrow y = 12 : 0,8 \rightarrow y = 15 \text{ cm}$	

Tabla 56. Desarrollo de la Actividad 2.4. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 3.1.: Escala

Desarrollo:

Duración: 10 minutos

En este mapa de la costa del Levante y las islas Baleares, la escala 1:5 000 000 significa que cada distancia de la realidad se obtiene multiplicando por 5 000 000 la correspondiente en el mapa.



Vamos a comprobar que efectivamente las distancias correspondientes a la realidad son 5 000 000 de veces sus medidas sobre el mapa.

Distancia entre Valencia y Palma de Mallorca:

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia en el mapa}} = \frac{260 \text{ km}}{52 \text{ mm}} = \frac{260\,000\,000 \text{ mm}}{52 \text{ mm}} = 5\,000\,000$$

- Comprueba tú el resto de las medidas.

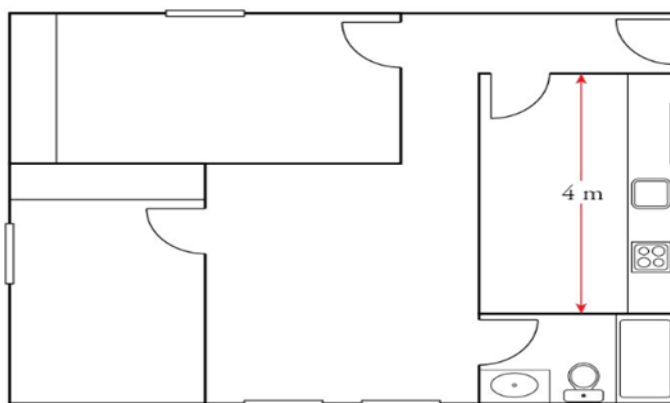
Tabla 57. Desarrollo de la Actividad 3.1. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 3.2.: Escala

Desarrollo:

Duración: 10 minutos

Tenemos el plano de nuestra casa, pero nos lo han dado sin escala. En lugar de medir todas las paredes, optamos por medir el largo de la cocina tanto en la realidad como en el plano.



Las medidas que obtenemos son:

En el plano: 4 cm

En la realidad: 4 m

Por tanto, la escala es 1:100.

Ahora podemos obtener cualquier otra distancia midiendo únicamente sobre el plano y multiplicando los resultados por 100.

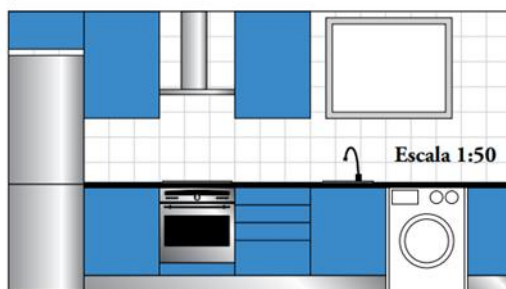
Tabla 58. Desarrollo de la Actividad 3.2. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 3.3.: Escala

Desarrollo:

Tarea para casa

1. Este es el plano de la pared de una cocina:



Halla sus dimensiones (largo y ancho); la superficie de la ventana y la distancia entre los fogones y la campana.

DIMENSIONES

Largo de la cocina: $8 \text{ cm} \cdot 50 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$

Alto de la cocina: $4,5 \text{ cm} \cdot 50 = 225 \text{ cm} = 2,25 \text{ m}$

SUPERFICIE DE LA VENTANA

Superficie de la ventana en el plano: $2 \cdot 1,6 = 3,2 \text{ cm}^2$

Superficie real de la ventana: $3,2 \cdot 50^2 = 8000 \text{ cm}^2 = 0,8 \text{ m}^2$

DISTANCIA ENTRE LOS FOGONES Y LA CAMPANA

Distancia en el plano entre los fogones y la campana: $1,4 \text{ cm}$

Distancia real entre los fogones y la campana: $1,4 \cdot 50 = 70 \text{ cm}$

Tabla 59. Desarrollo de la Actividad 3.3. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 3.4.: Escala

Desarrollo:

Tarea para casa

2. Sabiendo que la distancia que separa en la realidad el embarcadero de la fuente es 136 m, halla su escala y calcula las siguientes distancias:

a) Camping - playa.

b) Playa - fuente.

c) Fuente - barbacoa.

d) Fuente - camping.

$$\text{Escala} = \frac{6,8}{13\,600}$$

$$\text{a) } \frac{6,8}{13\,600} = \frac{4,9}{x} \rightarrow x = 98 \text{ m. La distancia camping - playa es de 98 m.}$$

$$\text{b) } \frac{6,8}{13\,600} = \frac{3,3}{x} \rightarrow x = 66 \text{ m. La distancia playa - fuente es de 66 m.}$$

$$\text{c) } \frac{6,8}{13\,600} = \frac{3,5}{x} \rightarrow x = 70 \text{ m. La distancia fuente - barbacoa es de 70 m.}$$

$$\text{d) } \frac{6,8}{13\,600} = \frac{1,9}{x} \rightarrow x = 38 \text{ m. La distancia fuente - camping es de 38 m.}$$

Tabla 60. Desarrollo de la Actividad 3.4. (elaboración propia a partir de Anaya).

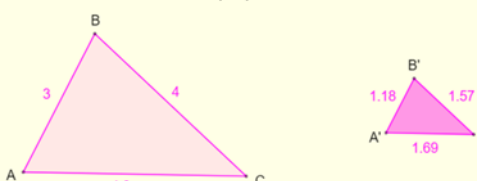
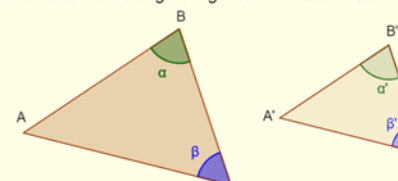
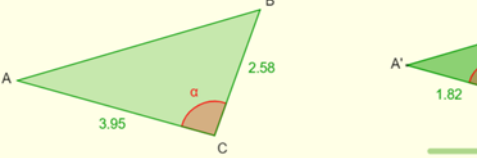
Actividad 4.1.: Criterios de semejanza (GeoGebra)	
Desarrollo:	Duración: 20 minutos
Criterio 1º : Los tres lados proporcionales $ABC \sim A'B'C'$  $\frac{AB}{A'B'} = 2.54$ $\frac{BC}{B'C'} = 2.54$ $\frac{AC}{A'C'} = 2.54$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ Criterio 2º : Dos ángulos iguales $ABC \sim A'B'C'$  $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ ☐ Ver Criterio 3º : Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales $ABC \sim A'B'C'$  $\frac{AC}{A'C'} = 2.17$ $\frac{BC}{B'C'} = 2.17$ $\alpha = \alpha'$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$	

Tabla 61. Desarrollo de la Actividad 4.1. (elaboración propia a partir de Anaya).

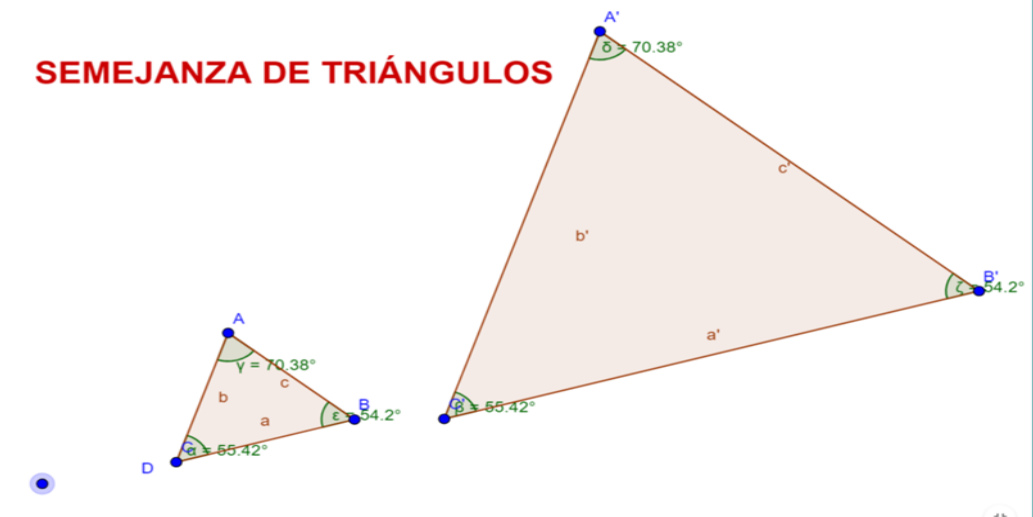
Actividad 4.2.: Criterios de semejanza (GeoGebra)	
Desarrollo:	Duración: 5 minutos
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS 	

Tabla 62. Desarrollo de la Actividad 4.2. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 4.3.: División de un segmento en partes iguales (Geogebra)

Desarrollo:

Duración: 20 minutos

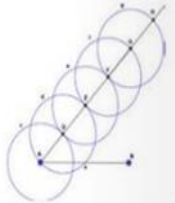
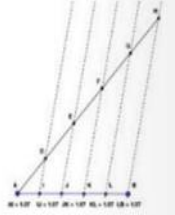
División de un segmento AB en partes iguales	Ejemplo En cinco partes iguales
Dibujamos el segmento AB con la opción <i>Segmento</i>  . Observamos que los puntos inicial y final elegidos como extremos quedan marcados en la vista gráfica.	
Con la opción <i>Semirrecta</i>  , dibujamos una semirrecta a partir del punto inicial del segmento AB.	
Trazamos una circunferencia con la opción <i>Circunferencia (centro, radio)</i>  , con centro en el punto A y radio el que queramos escoger. Con centro en el punto de intersección de la circunferencia con la semirrecta, delineamos otra circunferencia del mismo radio. Repetimos el proceso hasta obtener en la semirrecta los extremos de cinco segmentos iguales.	
Dibujamos los segmentos iguales a partir de los centros de las circunferencias trazadas con la opción <i>Segmento</i>  . A continuación, escondemos las circunferencias y la semirrecta con la opción <i>Mostrar/Ocultar objeto</i>  .	
Unimos mediante una recta, con la opción <i>Recta</i>  , el extremo del último segmento trazado sobre la semirrecta con el extremo del segmento AB.	
Dibujamos rectas paralelas a esta que pasen por los extremos de los segmentos mediante la opción <i>Recta paralela</i>  .	
Trazamos los segmentos determinados por las rectas paralelas sobre el segmento AB con la opción <i>Segmento</i>  y convertimos las rectas paralelas en discontinuas mediante la opción <i>Estilo de trazo</i> (dentro del menú <i>Propiedades</i> , que aparece al clicar el botón derecho del ratón encima de las rectas).	
Con la opción <i>Distancia o Longitud</i>  , medimos los segmentos que acabamos de trazar y comprobamos que hemos dividido el segmento AB en cinco partes iguales.	

Tabla 63. Desarrollo de la Actividad 4.3. (elaboración propia a partir de Edebé).

Actividad 4.4.: División de un segmento en partes proporcionales (GeoGebra)

Desarrollo:

Tarea para casa

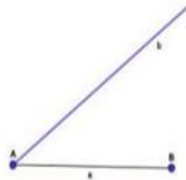
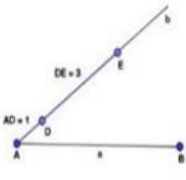
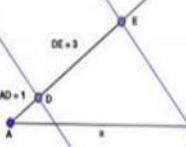
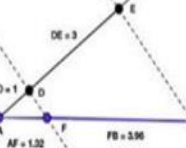
División de un segmento en partes proporcionales a dos segmentos dados	Ejemplo Segmentos proporcionales a 1 cm y 3 cm
Trazamos el segmento AB con la opción <i>Segmento</i>  . Observamos que los puntos inicial y final quedan marcados.	
Con la opción <i>Semirrecta</i>  , dibujamos una semirrecta a partir del punto A .	
Determinamos dos segmentos consecutivos a partir de A , cuyas longitudes sean 1 cm y 3 cm. Para ello, utilizamos la opción <i>Segmento de longitud dada</i>  y trasladamos dichos segmentos sobre la semirrecta con la opción <i>Elige y Mueve</i>  . Así, obtenemos dos puntos sobre la semirrecta situados a 1 cm y 4 cm del extremo A , que nos determinan los segmentos buscados.	
Unimos mediante una recta el último punto con el extremo B del segmento AB . Para ello, utilizamos la opción <i>Recta</i>  . Trazamos la recta paralela a esta que pase por el otro punto marcado en la semirrecta con la opción <i>Recta paralela</i>  .	
Dibujamos los segmentos determinados por las rectas paralelas sobre AB con la opción <i>Segmento</i>  .	
Transformamos las rectas paralelas en discontinuas en el menú <i>Propiedades de objeto</i> en <i>Estilo de trazo</i> .	
Medimos los segmentos trazados con la opción <i>Distancia o Longitud</i>  y así comprobamos que hemos dividido el segmento AB en dos segmentos proporcionales a los segmentos dados de la semirrecta.	

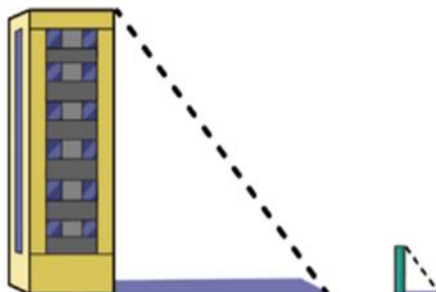
Tabla 64. Desarrollo de la Actividad 4.4. (elaboración propia a partir de Edebé).

Actividad 5.1.: Cálculo de la altura de un objeto a partir de su sombra

Desarrollo:

Duración: 5 minutos

1. Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una valla de 2 m proyecta una sombra de 1,25 m.



$$\frac{2}{1,25} = \frac{x}{49} \rightarrow x = 78,4$$

Tiene una altura de 78,4 m.

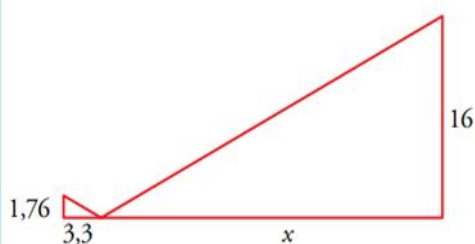
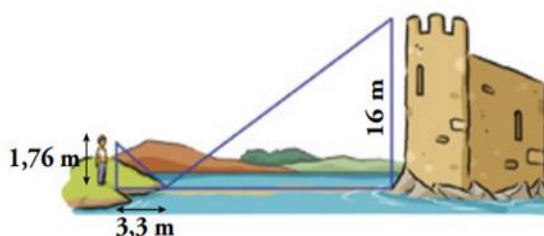
Tabla 65. Desarrollo de la Actividad 5.1. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 5.2.: Cálculo de la altura de un objeto sin recurrir a su sombra

Desarrollo:

Duración: 5 minutos

2. Halla la distancia de Marcos a la base de la torre a partir de los datos del dibujo.



$$\frac{1,76}{16} = \frac{3,3}{x} \rightarrow x = \frac{3,3 \cdot 16}{1,76} = 30 \text{ m}$$

La distancia entre Marcos y la base de la torre es de 33,3 m.

Tabla 66. Desarrollo de la Actividad 5.2. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 5.3.: Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Desarrollo:

Tarea para casa

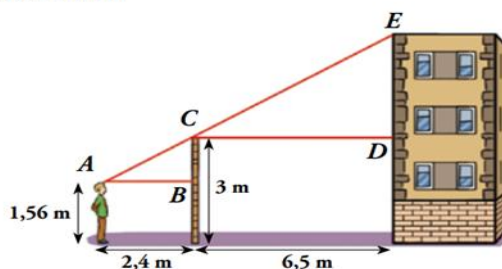
3. Observa de qué ingenioso método se vale Ramón para averiguar la altura del edificio:

Se sitúa de tal manera que la parte alta de la verja y la parte alta del edificio estén alineadas con sus ojos. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.

a) Explica por qué los triángulos ABC y CDE son semejantes.

b) Calcula $\overline{ED}$.

c) Calcula la altura del edificio.



a) Porque $\hat{A}$ del pequeño es igual que $\hat{C}$ del grande, y como son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual, son semejantes.

b) $3 - 1,56 = 1,44$

$$\frac{\overline{ED}}{1,44} = \frac{6,5}{2,4} \rightarrow \overline{ED} = 3,9 \text{ m}$$

c) $3 + 3,9 = 6,9 \text{ m}$

La altura del edificio es de 6,9 m.

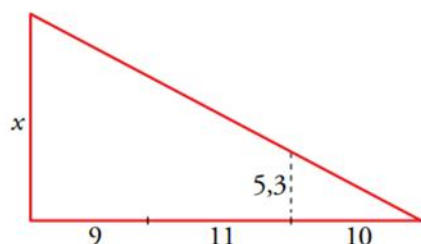
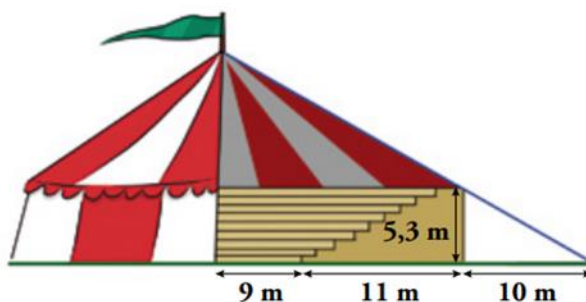
Tabla 67. Desarrollo de la Actividad 5.3. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 5.4.: Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Desarrollo:

Tarea para casa

4. ¿Qué altura tiene el circo del dibujo?



$$\frac{x}{30} = \frac{5,3}{10} \rightarrow x = 15,9 \text{ m}$$

La altura del circo es de 15,9 m.

Tabla 68. Desarrollo de la Actividad 5.4. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 6.1: 'El barco vikingo'

Desarrollo:

Duración: 55 minutos

Actividad1: La barca vikinga

¿Cómo podríamos determinar la altura sabiendo que no podemos acceder al punto más alto? ¿Se podría determinar la altura en un recinto cerrado?



¿A partir de una barca vikinga de dimensiones reales, podrías construir una maqueta? ¿Cómo lo harías? ¿Podrías diseñar una barca vikinga con los asientos, jaulas y demás elementos a partir de las dimensiones de uno de sus elementos?



Tabla 69. Desarrollo de la Actividad 6.1. (elaboración propia).

La planificación y solución de este problema se expondrá en el Anexo VIII.

Actividad 8.1.: Examen de la unidad didáctica

Desarrollo:

Cara A

ALUMNO: _____
CURSO: 2ª ESO. **FECHA:** ____/____/____
Asignatura: Matemáticas. **UD.** - Semejanza y Teorema de Tales.
Lee atentamente todas las preguntas. Puedes contestar en el orden que quieras (comienza por lo que mejor sepas).
Pregunta lo que no sepas y piensa antes de contestar. ¡Suerte!



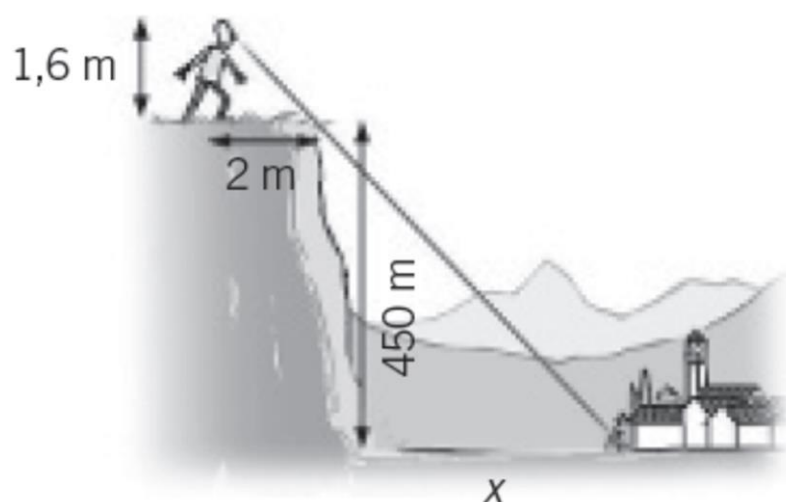
Actividad 1:

Dados un rectángulo de 30 cm de base y 20 cm de altura y otro rectángulo de 24 cm de base y 16 cm de altura:

- ¿Los rectángulos son semejantes?
- ¿Cuál es la razón de semejanza de estos rectángulos?
- Determina las dimensiones de otro rectángulo que sea semejante a ellos.

Actividad 2:

María está a 2 metros de un precipicio y ve alineada una ciudad con el borde del precipicio, como se muestra en la figura siguiente.



- ¿A qué distancia está el pueblo del precipicio?

Tabla 70. Desarrollo de la Actividad 8.1. Cara A. (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 8.1.: Examen de la unidad didáctica

Desarrollo:

Cara B

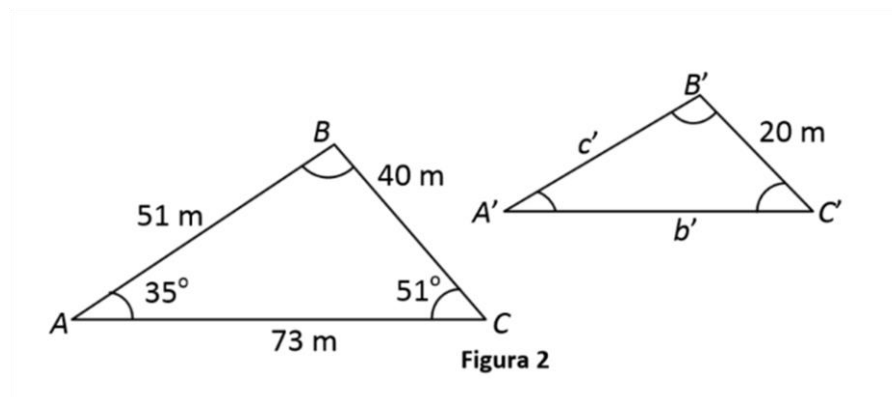
Actividad 3:

El plano de un piso está a escala 1:50.

- ¿Qué dimensiones tendrá la representación de un cuarto de baño de 5m x 3m?
- ¿Cuanto mide la superficie de una cama si en el plano viene representado por un cuadrado cuya diagonal es de 3 cm?
- Al consultar las dimensiones de una silla, el plano no permite ver en detalle las dimensiones y necesitamos un plano en donde podemos ver la silla más grande y se pueda medir las dimensiones. Se aprecia con mas detalle un plano a escala 1:5 u otro plano a escala 1:500. Razona la respuesta.

Actividad 4:

A partir de los triángulos semejantes que se representan a continuación, Halla los lados y los ángulos que faltan.



Actividad 5:

Pedro mide 1,78 m. Si en un cierto instante las sombras de Pedro, Raúl, Sara y Pablo miden, respectivamente, 445mm, 4'80dm, 42 cm y 0'45m.

- ¿Cuánto mide cada uno?
- ¿Qué longitud tendrá en ese mismo instante la sombra de un pino de 22 m de altura?

Tabla 71. Desarrollo de la Actividad 8.1. Cara B (elaboración propia a partir de Anaya).

Actividad 9.1.: Examen de la unidad didáctica. Solución y Evaluación

Desarrollo:

Solución

Actividad 1:

a) $\frac{30}{24} = \frac{20}{16}$; Los rectángulos son semejantes. b) La razón de semejanza es 1,25.

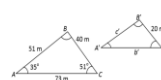
c) Cualquier rectángulo cuyos lados formen una razón de semejanza de 1,25; por ejemplo, 10 cm y 8 cm.

Actividad 2:

Los dos triángulos de la figura están en posición de Tales, es decir, son semejantes:

$$\frac{1,6}{450} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 450}{1,6} = 562,5 \text{ m}$$

3. Se sabe que los triángulos de la figura 2 son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan. (1 punto)



Actividad 3:

Una escala 1:50 significa que la distancia original es 50 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale 50 cm en el original.

a) $5 \cdot \frac{1}{50} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$ $3 \cdot \frac{1}{50} = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$

El cuarto de baño tendrá una representación de 10 cm x 6 cm.

b) Se calcula el lado del cuadrado en el gráfico: $3^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{2}} = 2,12 \text{ cm}$

La superficie en el gráfico es lado x lado = $2,12 \text{ cm} \cdot 2,12 \text{ cm} = 4,24 \text{ cm}^2$

La superficie real de la cama es $4,25 \times 50 = 225 \text{ cm}^2$

c) Escala 1:5000: 1 cm en el plano equivale a 50 metros en la realidad.

Escala 1:5: 1 cm en el plano equivale a 5 centímetros en la realidad.

La escala 1:5 presenta mayor ampliación que la escala 1:5000, por lo tanto, permite ver el diseño con más detalle.

Actividad 4:

$$\hat{A} = \hat{A}' = 35^\circ ; \hat{C} = \hat{C}' = 51^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{B}' = 180 - 35 - 51 = 94^\circ = \hat{C}'$$

$$\frac{40}{20} = \frac{51}{c'} \rightarrow c' = \frac{20 \cdot 51}{40} = 25,5 \text{ m} = c'$$

$$\frac{40}{20} = \frac{73}{b'} \rightarrow b' = \frac{20 \cdot 73}{40} = 36,5 \text{ m} = b'$$

Actividad 5:

a) Raul $\rightarrow 192 \text{ cm}$ Sara $\rightarrow 168 \text{ cm}$ Pablo $\rightarrow 180 \text{ cm}$

b) El chocho proyecta una sombra de 5,5 m.

Tabla 72. Desarrollo de la Actividad 9.1. Solución (elaboración propia a partir de Anaya)

Actividad 9.2.: Actividad contra el acoso escolar

Desarrollo:

Duración: 20 minutos

Texto sobre el acoso escolar:

No estoy a gusto en mi clase

Jon hoy ha escrito esto en su diario:

En nuestra clase hay un chico que se llama Mikel, que continuamente me está molestando. Cuando digo algo, me insulta, diciendo que soy un miedoso y un débil. Esto me duele y me enfada mucho, pero no me atrevo a hacer nada. Me da miedo que otros compañeros/-as empiecen a hacer lo mismo. Será mejor callarse, si no, seré yo quien salga perdiendo.

La mayoría del resto de mis compañeras y compañeros se ríen y no hacen nada. Creen que está de broma y se ríen de mí y no dicen nada en mi defensa.

El profesor sabe lo que ocurre, pero no sabe bien qué hacer. Por un lado, no quiere darle mucha importancia; pero, por otro lado, no quiere que este tipo de cosas ocurran en su clase.

Queremos ayudar a Jon, pero para eso tenemos que saber algunas cosas:

<u>1. ¿Cuál es el problema?</u> A. Jon no tiene amigos en clase. B. Jon no es el alumno favorito del profesor. C. No hay problema, es normal que ocurran esas cosas. D. Mikel se mete con Jon continuamente y Jon no se atreve a hacer nada.	<u>2. ¿Cómo podemos definir el comportamiento de Jon ante el problema?</u> A. Tranquilo. B. Agresivo. C. Pasivo. D. Inteligente
<u>3. ¿Qué consecuencias puede tener la conducta de Jon?</u> A. Seguirá como está, pero al menos la situación no irá a peor. B. La actitud que tiene Mikel con él, pueden repetirla también otros y otras con él. C. Como Jon muestra que es una buena persona, todos le querrán. D. Si Jon no hace nada, Mikel se aburrirá y le dejará en paz	<u>4. En tu opinión, ¿qué tendría que hacer el profesor?</u> A. Nada, sino el problema puede agrandarse. B. Cambiar a Jon de aula. C. Hablar con Jon y con Mikel, y también con las compañeras y compañeros de clase. D. Decírselo al jefe de estudios, para que haga algo.

Tabla 73. Desarrollo de la Actividad 9.2. (elaboración propia a partir de competencia social y ciudadana).

Actividad 10.1.: Examen de recuperación de la unidad didáctica

Desarrollo:

Cara A

ALUMNO: _____
CURSO: 2º ESO. **FECHA:** ____/____/____
Asignatura: Matemáticas. **UD.** - Semejanza y Teorema de Tales.
Lee atentamente todas las preguntas. Puedes contestar en el orden que quieras (comienza por lo que mejor sepas).
Pregunta lo que no sepas y piensa antes de contestar. ¡Suerte!



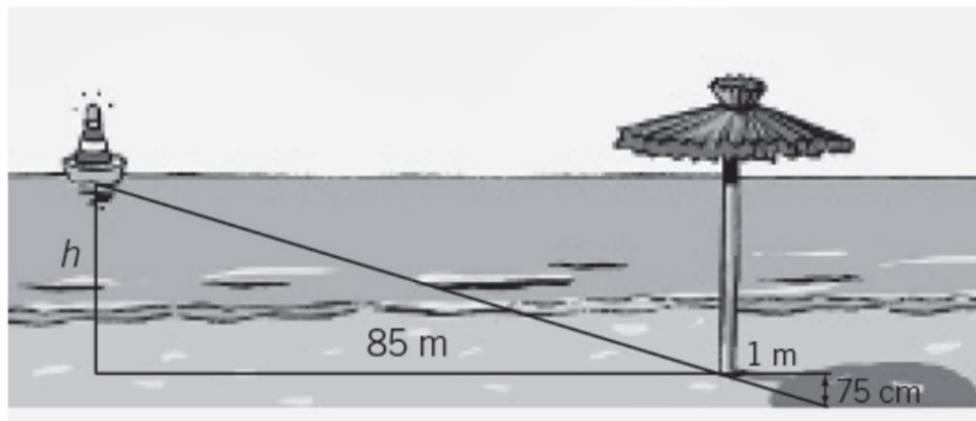
Actividad 1:

Explica que significa cada escala.

- a) 1:300 b) 1:60000 c) 1:12
- d) Calcula la distancia en un plano a escala 1:500 de un puente de 60 metros.

Actividad 2:

Observa la siguiente figura:



Calcula la distancia h de la figura anterior.

Tabla 74. Desarrollo de la Actividad 10.1. Cara A (elaboración propia).

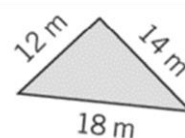
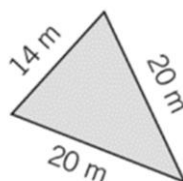
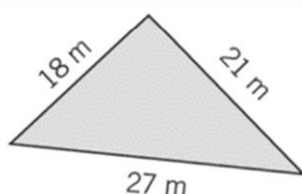
Actividad 10.1.: Examen de recuperación de la unidad didáctica

Desarrollo:

Cara B

Actividad 3:

Comprueba si los siguientes triángulos son semejantes o no.



Actividad 4:

Calcula la altura de una casa que proyecta una sombra de 49 metros en el mismo momento en que un bastón de 2 metros clavado en el suelo proyecta una sombra de 1'25 metros. Realiza un esquema de la situación.

Actividad 5:

Halla los datos que faltan

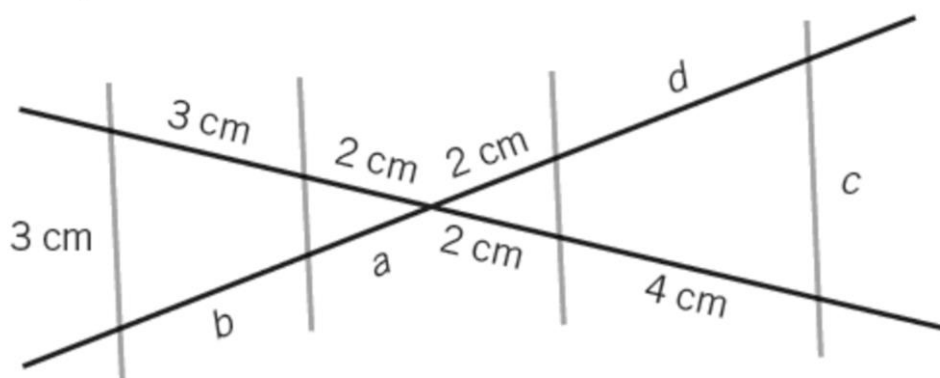


Tabla 75. Desarrollo de la Actividad 10.1. Cara B (elaboración propia).

Actividad 10.1.: Examen de recuperación. Solución y Evaluación

Desarrollo:

Solución

Actividad 1:

a) Una escala de 1:300 significa que la distancia del gráfico es 300 veces menor que la distancia real. Así, 1 cm del gráfico equivale a 3 m en el original.

b) Una escala de 1:60000 significa que la distancia del gráfico es 60000 veces menor que la distancia real. Así, 1 cm del gráfico equivale a 600 m en el original.

c) Una escala de 1:12 significa que la distancia del gráfico es 12 veces menor que la distancia real. Así, 1 cm del gráfico equivale a 12 cm en el original.

$$\text{d)} \quad 60 \cdot \frac{1}{500} = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

Actividad 2:

Los dos triángulos de la figura son semejantes, por lo tanto, se utiliza el Teorema de Tales

$$\frac{85}{h} = \frac{1}{0,75}$$

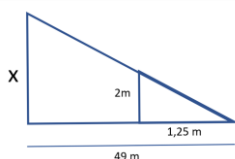
$$h = \frac{85 \cdot 0,75}{1} = 63,75 \text{ m}$$

Actividad 3:

Utilizando el segundo criterio de semejanza, se comprueba que los triángulos primero y tercero son semejantes, y su razón de semejanza es:

$$r = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{27}{18} = 1,5$$

Actividad 4:



$$\frac{x}{2} = \frac{49}{1,25} \rightarrow x = \frac{49 \cdot 2}{1,25} = 78,4 \text{ m}$$

Actividad 5:

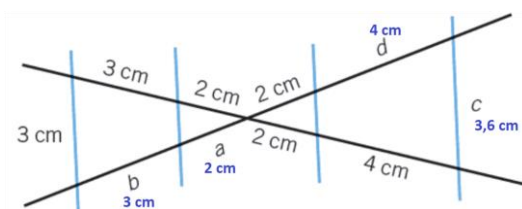


Tabla 76. Desarrollo de la Actividad 10.1. Solución (elaboración propia).

Actividad 10.2.: Actividad de ampliación de contenidos

Desarrollo:

Solución

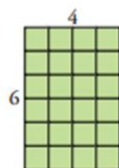
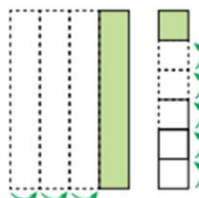
- ¿Qué fracción del triángulo grande se ha coloreado en rojo? ¿Cuál es la razón de semejanza entre estos dos triángulos?



El triángulo grande se divide en cuatro medianos y cada uno de estos, en cuatro pequeños. La parte coloreada es $1/16$ del triángulo grande.

La razón de semejanza entre las longitudes de los lados de los triángulos es $1/4$.

- Una hoja de papel con forma de rectángulo tiene un perímetro de 80 cm. Si la pliego en cuatro a lo largo y luego en seis a lo ancho, obtengo un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del papel?



La hoja tiene un perímetro de 20 "unidades".

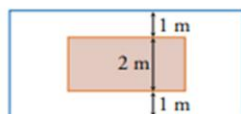
Cada una de estas unidades equivale a $80 \text{ cm} : 20 = 4 \text{ cm}$.

Así, la hoja de papel tiene un ancho de $4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$ y un largo de $4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$.

- Una vendedora de espárragos cree duplicar la cantidad de cada manojo duplicando la longitud de la cuerda con la que los envuelve, pero se equivoca. Si la cuerda se duplica, ¿qué pasa con la cantidad de espárragos que contiene?

La cantidad de espárragos se multiplica por 4.

- Una alfombra de $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ está centrada en el suelo de una habitación rectangular y ocupa la cuarta parte del piso. Los bordes más largos de la alfombra quedan a un metro de la pared. ¿A qué distancia de la pared quedan los bordes más cortos?



La superficie de la alfombra es de $2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2$.

La superficie de la habitación es, pues, 24 m^2 .

La habitación tiene 4 m de ancha. Por tanto, su longitud es $24 : 4 = 6 \text{ m}$.

Largo de la habitación – largo de la alfombra = $6 - 3 = 3 \text{ m}$

Los bordes están a 1,5 m de las paredes.

Tabla 77. Desarrollo de la Actividad 10.2. (elaboración propia a partir de Anaya).

Anexo VIII: Plan de clase de la actividad de modelización

En este Anexo VIII, se elabora el plan de clase de la actividad de modelización 'El barco vikingo', describiendo la tarea matemática a la que se van a enfrentar los alumnos, las posibles soluciones de la actividad, y el plan de clase.

Plan de modelización: 'El barco vikingo'	
Desarrollo:	Duración: 55 minutos
1. Descripción de la tarea matemática que van a hacer los alumnos	
El profesor selecciona un caso motivador para el alumnado como es el de una atracción de una feria, que a partir de unos propósitos y tras una metodología adecuada, los alumnos serán capaces de afianzar unos determinados objetivos, también se mencionara contenidos del curso anterior para refrescar los conocimientos adquiridos del alumnado. A continuación, se muestra la hoja de la actividad para entregar al alumnado:	
2. Hoja de la actividad para el alumno	
<u>Actividad1: La barca vikinga</u>	
¿Cómo podríamos determinar la altura sabiendo que no podemos acceder al punto más alto? ¿Se podría determinar la altura en un recinto cerrado?	
	
¿A partir de una barca vikinga de dimensiones reales, podrías construir una maqueta? ¿Cómo lo harías? ¿Podrías diseñar una barca vikinga con los asientos, jaulas y demás elementos a partir de las dimensiones de uno de sus elementos?	



3. Plan de clase

a) Fase de inicio e introducción de la actividad

En primer lugar, el profesor introduce la actividad en clase, dando una copia de la misma a cada alumno. A continuación, se anuncia que la clase de hoy va a ser diferente y los objetivos que se pretende cumplir.

“Se va a explorar una situación matemática en la clase de hoy. Entre todos vamos a calcular distintas dimensiones de una atracción de ferias, la barca vikinga. No se trata de típico problema de medidas y proporciones, en el cual, todos debéis llegar a la misma solución, sino que se ha de investigar, encontrar relaciones y proporciones y explorar diferentes casos.”

“Tenéis que ser creativos, buscar características y resultados que despierten vuestro interés, abordar el problema de diferentes maneras y al final, se llegaran a distintos tipos de soluciones.”

El profesor ha de leer las preguntas del enunciado en voz alta y asegurarse de que todos los alumnos comprenden la actividad y el vocabulario y a partir de aquí se resuelve las dudas que puedan tener los alumnos, también se puede realizar otro tipo de cuestiones para motivar el interés del alumnado que no se encuentren en la actividad, como puede ser:

¿Se podría calcular otras longitudes inaccesibles que no fuese la altura?

¿Os habéis preguntado como averiguar las longitudes de los elementos de la barca vikinga? (sean longitudes en la atracción real o en la maqueta).

¿Se ha de utilizar alguna propiedad matemática para la resolución de la tarea?

¿Qué es una razón? ¿Se podría aplicar alguna razón matemática en algunos de estos casos?

¿Se podría calcular el área de algún elemento como el de una jaula?

Pueden buscar datos acerca de la barca vikinga a través de internet, utilizando sus teléfonos móviles o dispositivo disponible.

b) Fase exploratoria y desarrollo de la tarea

Se les pide a los alumnos que trabajen individualmente en la actividad durante unos minutos para que asuman su propia responsabilidad e intenten hacer algo de forma individual, se espera que los alumnos empiecen a investigar datos reales, relacionen los problemas con el Teorema de Tales y semejanza, y vincule el aparatado de la maqueta con la razón de semejanza.

Se agrupan a los alumnos en grupos de 3-4 alumnos para contrastar las hipótesis que han obtenido de forma individual y se les pide que anoten las ideas y reflexiones más importantes que hayan obtenido en cada grupo. Se esperan que sean capaces grupalmente de llegar a una aproximación de la **solución a**, (propuesta en el apartado de soluciones), algunos a la **solución b** y pocos o nadie a la **solución c**. En los apartados de la maqueta pueden llegar a definir el concepto de razón de semejanza y algunos relacione este ejercicio con la simetría, que es un contenido que han de tener aprendido en el curso anterior.

Es importante circular entre los estudiantes evitando intervenir muy pronto, si algún grupo se atasca o van demasiado lentos, se ha de intervenir, aunque evitando decir lo que tienen que hacer o darles la solución. Por ejemplo:

- Si el grupo no es capaz de llegar a la aproximación de ninguna de las soluciones, el profesor puede preguntar: ¿Sabéis cómo calculo Tales de Mileto la altura de la pirámide Keops? ¿Cómo lo lograría?
- Si se observa que las soluciones no son adecuadas, se le puede preguntar: ¿Sería efectivo el procedimiento para todos los casos? ¿Se puede hacer para determinar la altura de un alumno?, con el objetivo de que puedan darse cuenta de los errores haciendo la actividad a pequeña escala y poder modificar sus soluciones.
- Si vemos idas incompletas o sin demostraciones se puede preguntar: ¿Estáis seguros? ¿Podrías explicárselo a tus compañeros? ¿Puedes poner otros

ejemplos? ¿Qué ocurre en otras situaciones? ¿Podrías convencerme a mi o a otras personas?

c) Fase de debate y discusión

En esta fase, se le pide a cada grupo que un participante formule en voz alta las ideas, soluciones y conclusiones obtenidas y que las anoten en la pizarra. A la misma vez que va anotando los datos en la pizarra, pide a los alumnos que intervengan en las ideas de los demás grupos y que justifiquen si tienen ideas parecidas y piensan que son más validas que las que están escritas en la pizarra, o mejoras de sus propias ideas a partir de las ideas de otros grupos. El profesor, puede entrar a valorar algunas ideas si se repiten o no, o dejarlo para la siguiente fase.

Se les pedirá a los grupos que justifiquen sus ideas mientras los demás permanecen en silencio, el profesor va preguntando si están de acuerdo, dependiendo del nivel del grupo, aparecen argumentaciones de tipo discusivo, o soluciones basadas en otros modelos geométricos, como puede ser el Teorema de Pitágoras.

d) Fase de sistematización del aprendizaje matemático

En esta fase, se va a reorganizar los conocimientos matemáticos más importantes, los procesos de los alumnos y las soluciones que no hayan podido alcanzar el alumnado.

Entre los conocimientos Matemáticos, se ha de destacar: el Teorema de Tales, semejanza y simetría.

Entre los procesos, se ha de mencionar: la modelización, descubrimiento de relaciones y conexiones, formulación de hipótesis, investigación y exploración sistemática y argumentación y prueba.

Se concretan las definiciones más importantes de la actividad:

Dos triángulos que tengan un ángulo agudo igual y sean rectángulos son semejantes

Dos figuras son semejantes cuando solo es diferente su tamaño. En este caso, los segmentos correspondientes son proporcionales, o lo que es lo mismo cada longitud de cada una de ellas se obtiene multiplicando la longitud de la otra por un número fijo, denominado **razón de semejanza**.

El profesor, debe de hacer referencia a casos elaborados por los alumnos, al momento de reorganizar el conocimiento matemático como cuando haga explícitos los procesos de indagación.

e) Posibles variables de la actividad

- Para la realización de esta actividad se le puede proporcionar al alumnado longitudes previas para que todos los alumnos lleguen a las mismas soluciones y conducirlos para disminuir la dispersión.
- En este caso en vez de la altura, se le puede pedir cualquier otra dimensión, cambiar las variables de la actividad, con lo cual conservará el contenido, pero se diferenciará en los procedimientos.
- Se puede enfocar la actividad al Teorema de Pitágoras, a la trigonometría u a otras metodologías, ya que este tipo de actividad es totalmente compatible.
- Esta actividad, se podría complementar con la asignatura de tecnología o física, ya que permite desarrollar contenidos de estas materias, asignando fuerzas, velocidades y/o variables relacionadas.

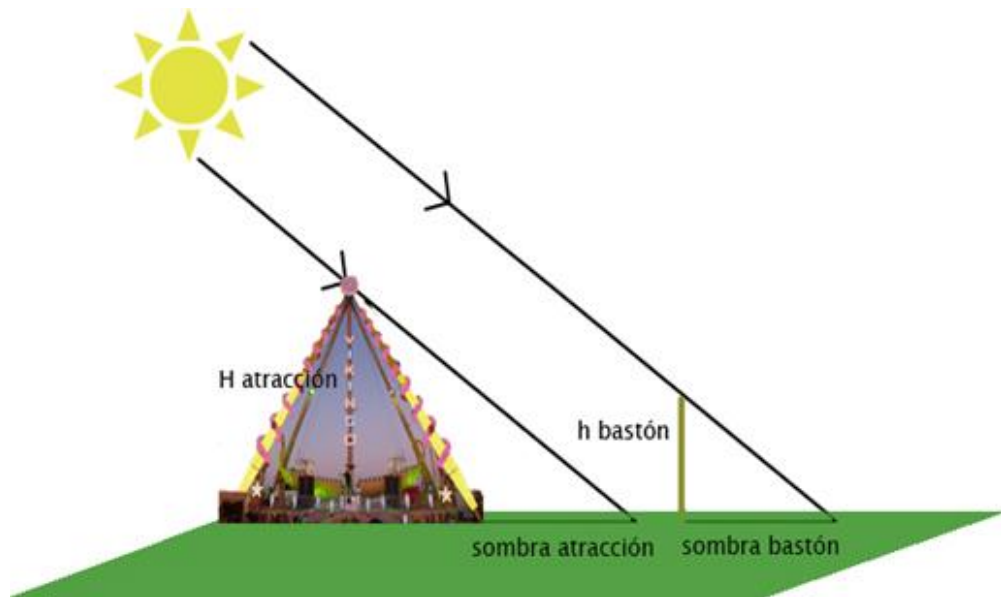
4. Posibles soluciones de la actividad

a) ¿Cómo podríamos determinar la altura sabiendo que no podemos acceder al punto más alto? ¿Se podría determinar la altura en un recinto cerrado?

Solución a:

Este problema se soluciona aplicando el Teorema de Tales, colocando un bastón y relacionando las sombras del bastón y la atracción. Se aborda el problema a través de semejanza de triángulos, y suponiendo que los rayos solares incidentes en el mismo momento de la medición son paralelos, se establece la razón de semejanza de los triángulos rectángulos que se forman,

por un lado, el que presenta como catetos la longitud de la sombra de la atracción y la altura de la misma y en el otro lado el que tiene como altura y sombra del bastón.



$$\frac{\text{altura atracción}}{\text{altura bastón}} = \frac{\text{sombra atracción}}{\text{sombra bastón}}$$

Para calcular la altura de la barca vikinga se despeja el valor correspondiente;

$$\text{altura de la atracción} = \frac{\text{sombra atracción} * \text{altura bastón}}{\text{sombra bastón}}$$

Se calcula para unos determinados valores:

Sombra atracción= 10 m

Sombra Bastón= 1m

Altura del Bastón=2,2 m

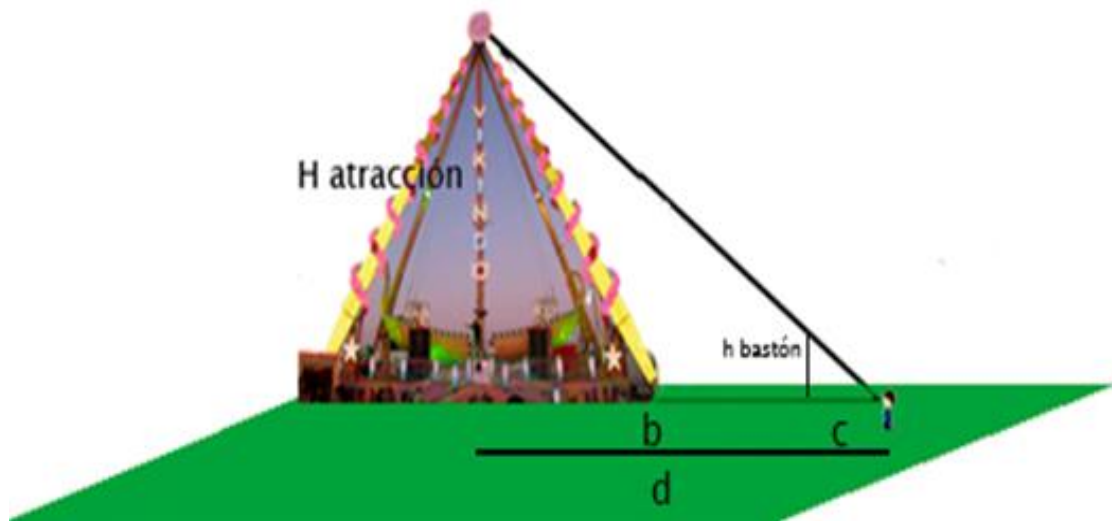
$$\text{altura de la atracción} = \frac{10 \text{ m} * 2,2 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 22 \text{ metros}$$

La altura de la barca vikinga con estos valores será de 22 metros.

Solución b:

Un alumno lanza una visual al punto más alto de la barca vikinga, y mueve el bastón hasta que quede alineado con la visual (el palo ha de estar vertical), se

forman dos triángulos rectángulos semejantes de catetos d y altura de la atracción, por un lado, y altura del bastón y c por el otro.



$$\frac{\text{altura atracción}}{\text{altura bastón}} = \frac{d}{c}$$

Para calcular la altura de la barca vikinga se despeja el valor correspondiente;

$$\text{altura de la atracción} = \frac{d * \text{altura bastón}}{c}$$

Se calcula para unos determinados valores:

$$d = 30 \text{ m}$$

$$c = 0,6 \text{ m}$$

$$\text{Altura del Bastón} = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{altura de la atracción} = \frac{30 \text{ m} * 0,5 \text{ m}}{0,6 \text{ m}} = 25 \text{ metros}$$

La altura de la barca vikinga con estos valores será de 25 metros.

Solución c:

Este problema se puede solucionar aplicando el Teorema de Tales, a continuación, se representa la atracción con los triángulos en posición de Tales para la resolución:



En este caso no se puede calcular mediante las sombras ya que estamos en un recinto cerrado, por lo tanto el problema se resuelve de la siguiente forma: Se puede medir la base de la atracción, con lo cual al dividir la base por la mitad obtenemos la distancia del **segmento b**, desde la esquina y coincidente con b con una cinta métrica, se marca una distancia pequeña, se obtiene el **segmento c**, y desde ese punto se mide la distancia perpendicular hasta que corte al segmento e y quedara definido el **segmento d**;

$$\frac{\text{segmento } a}{\text{segmento } d} = \frac{\text{segmento } b}{\text{segmento } c}$$

Para calcular la altura de la barca vikinga se despaja el valor de a;

$$\text{segmento } a = \text{altura de la atracción} = \frac{\text{segmento } b * \text{segmento } d}{\text{segmento } c}$$

Se calcula para unos determinados valores:

Base de la atracción 20 m

Distancia d=2 m

Distancia c= 1 m

$$\text{segmento } a = \text{altura de la atracción} = \frac{10 \text{ m} * 2 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 20 \text{ metros.}$$

La altura de la barca vikinga con estos valores será de 20 metros.

b) ¿A partir de una barca vikinga de dimensiones reales, podrías construir una maqueta? ¿Cómo lo harías? ¿Podrías diseñar una barca vikinga con los asientos, jaulas y demás elementos a partir de las dimensiones de uno de sus elementos?

Solución:

La maqueta de la barca vikinga ha de tener la misma forma, color y otros atributos, lo que ha de ser distinto es el tamaño, por lo cual serán figuras semejantes. Existe entonces, una razón de semejanza en la cual cualquier unidad medida en la maqueta se multiplica por un número fijo y se obtiene la longitud real a lo que se denomina razón de semejanza.

Se realiza un ejemplo con unos valores determinados;

Se determina la razón de semejanza, en este caso queremos que la altura sea de 40 centímetros y se supone una altura real de 20 metros. Veamos cuál es el valor de la razón de semejanza:

40 cm -> 20 m, entonces **1 cm -> 0,5m** y de la misma forma **1 m -> 50 m**

1:50



La razón de semejanza es 1:50. Se lee 1 es a 50 y significa que cualquier valor medido en la maqueta se multiplica por 50 para obtener la distancia real, se realiza un cuadro con algunos de los elementos de la barca vikinga para responder a la segunda pregunta propuesta de diseñar una barca vikinga con los asientos, jaulas y demás elementos a partir de las dimensiones de uno de sus elementos.

Elemento	Dimensión real	Dimensión maqueta
<i>Altura de la atracción</i>	20 m	40 cm
<i>Base de la atracción</i>	22 m	44 cm
<i>Mástil principal</i>	17 m	34 cm
<i>Jaulas</i>	2 m	4 cm
<i>Asientos</i>	3 m	6 cm

Esta tarea también es importante para recordar e implementar contenidos obtenidos en el curso anterior (1º E.S.O.), como es el concepto de simetría, si cortamos la figura con un eje de simetría por la mitad resultan dos partes iguales exactamente, aunque invertidas, con lo que definimos el eje de simetría.



Tabla 78. Plan de clase de la actividad de modelización (elaboración propia)

Anexo IX: Tablas de evaluación y rúbrica de los exámenes

En este Anexo X, se exponen distintas tablas de evaluación que se pueden emplear en el transcurso de la unidad didáctica y la rúbrica de los exámenes elaborados en el diseño de la unidad didáctica.

Rúbrica del examen final y examen de recuperación de la unidad didáctica

Examen final de la unidad didáctica

- **Actividad 1 (1,5 puntos):** 3 apartados; 0,5 puntos cada apartado correcto.
- **Actividad 2 (2,5 puntos):** razonamiento de aplicar el Teorema de Tales (0,5 puntos), planteamiento del problema (1punto) y resolución del problema (1 punto).
- **Actividad 3 (1,5 puntos):** 3 apartados; 0,5 puntos cada apartado correcto.
- **Actividad 4 (2 puntos):** cálculo de los ángulos (1 punto) y cálculo de los lados (1 punto)
- **Actividad 5 (2,5 puntos):** cálculo de las 3 alturas (0,5 puntos por altura) y cálculo de altura del pino (1 punto).

Nota: Se baja 1 punto por faltas graves en la expresión y/o uso del lenguaje matemático.

Se baja 0,1 punto en los resultados que no se especifiquen las unidades.

Se sube puntuación por aplicar conocimientos avanzados, dependiendo de estos.

Examen de recuperación de la unidad didáctica

- **Actividad 1 (2 puntos):** 4 apartados; 0,5 puntos cada apartado correcto
- **Actividad 2 (2 puntos):** razonamiento de aplicar el Teorema de Tales (0,5 puntos), planteamiento del problema (0,5 puntos) y resolución del problema (1 punto).
- **Actividad 3 (2 puntos):** razonamiento (1 punto) y cálculo de la razón de semejanza (1punto).
- **Actividad 4 (2 puntos):** razonamiento de aplicar el Teorema de Tales (0,5 puntos), realización del esquema (0,5 puntos), planteamiento del problema (0,5 puntos) y resolución del problema (0,5 puntos).
- **Actividad 5 (2 puntos):** 4 incógnitas; 0,5 puntos cada incógnita correcta.

Nota: Se baja 1 punto por faltas graves en la expresión y/o uso del lenguaje matemático.

Se baja 0,1 punto en los resultados que no se especifiquen las unidades.

Se sube puntuación por aplicar conocimientos avanzados, dependiendo de estos.

Rúbrica para la evaluación del cuaderno del alumnado:

	Excelente (4)	Bueno (3)	Adecuado (2)	Mejorable (1)	Ponderación	Valoración
Presentación					%	
Contenidos					%	
Organización					%	
Corrección					%	
Reflexión					%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 79. Rúbrica para la evaluación del cuaderno del alumnado (elaboración propia)

Rúbrica para evaluar la búsqueda y el tratamiento de la información:

	Excelente (4)	Bueno (3)	Adecuado (2)	Mejorable (1)	Ponderación	Valoración
Búsqueda de información					%	
Obtención de la información					%	
Tratamiento y análisis de la información					%	
Interpretación de los resultados					%	
Exposición de conclusiones					%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 80. Rúbrica para evaluar la búsqueda y el tratamiento de la información (elaboración propia).

Rúbrica para la resolución de problemas:

	Excelente (4)	Bueno (3)	Adecuado (2)	Mejorable (1)	Ponderación	Valoración
Lectura y comprensión del problema					%	
Selección y aplicación de la estrategia					%	
Solución					%	
Análisis de la solución					%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 81. Rúbrica para la resolución de problema (elaboración propia).

Rúbrica para evaluar las actividades individuales:

	Excelente (4)	Bueno (3)	Adecuado (2)	Mejorable (1)	Ponderación	Valoración
Autonomía					%	
Confianza					%	
Iniciativa					%	
Realiza cuestiones					%	
Investigación					%	
Presentación actividad					%	
Esquemas					%	
Creatividad					%	
Metodología					%	
Expresión oral					%	
Expresión escrita					%	
Se presenta como voluntario					%	
Soluciones					%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 82. Rúbrica para evaluar las actividades individuales (elaboración propia).

Rúbrica para evaluar las actividades en grupo:

	Excelente (4)	Bueno (3)	Adecuado (2)	Mejorable (1)	Ponderación	Valoración
Integración en el grupo					%	
Participación					%	
Respeto y tolerancia					%	
Iniciativa y liderazgo					%	
Investigación					%	
Presentación actividad					%	
Esquemas					%	
Creatividad					%	
Metodología					%	
Expresión oral					%	
Expresión escrita					%	
Uso de TIC					%	
Soluciones					%	
VALORACIÓN FINAL						

Tabla 83. Rúbrica para evaluar las actividades en grupo. (elaboración propia).

Rúbrica para evaluar la actitud y comportamiento en clase:

	Excelente (4)	Bueno (3)	Adecuado (2)	Mejorable (1)	Ponderación	Valoración
Participación en clase					%	
Respeto					%	
Compañerismo					%	
Comportamiento en clase					%	
Perjudica el aprendizaje en el aula						
Tolerancia						
Interés						

Tabla 84. Rúbrica para evaluar la actitud y comportamiento en clase (elaboración propia).

Registro para la autoevaluación del profesorado: planificación

	INDICADORES	VALORACIÓN	PROPUESTAS DE MEJORA
PLANIFICACIÓN	1. Programa la materia teniendo en cuenta los estándares de aprendizaje previstos en las leyes educativas.		
	2. Programa la materia teniendo en cuenta el tiempo disponible para su desarrollo.		
	3. Selecciona y secuencia de forma progresiva los contenidos de la programación de aula teniendo en cuenta las particularidades de cada uno de los grupos de estudiantes.		
	4. Programa actividades y estrategias en función de los estándares de aprendizaje.		
	5. Planifica las clases de modo flexible, preparando actividades y recursos ajustados a la programación de aula y a las necesidades y a los intereses del alumnado.		
	6. Establece los criterios, procedimientos y los instrumentos de evaluación y autoevaluación que permiten hacer el seguimiento del progreso de aprendizaje de sus alumnos y alumnas.		
	7. Se coordina con el profesorado de otros departamentos que puedan tener contenidos afines a su materia.		

Tabla 85. Registro para la autoevaluación del profesorado: planificación (Anaya).

Registro para la autoevaluación del profesorado: motivación del alumnado

	INDICADORES	VALORACIÓN	PROPUESTAS DE MEJORA
MOTIVACIÓN DEL ALUMNADO	1. Proporciona un plan de trabajo al principio de cada unidad.		
	2. Plantea situaciones que introduzcan la unidad (lecturas, debates, diálogos...).		
	3. Relaciona los aprendizajes con aplicaciones reales o con su funcionalidad.		
	4. Informa sobre los progresos conseguidos y las dificultades encontradas.		
	5. Relaciona los contenidos y las actividades con los intereses del alumnado.		
	6. Estimula la participación activa de los estudiantes en clase.		
	7. Promueve la reflexión de los temas tratados.		

Tabla 86. Registro para la autoevaluación del profesorado: motivación del alumnado (Anaya).

Registro para la autoevaluación del profesorado: desarrollo de la enseñanza

INDICADORES	VALORACIÓN	PROPUESTAS DE MEJORA
1. Resume las ideas fundamentales discutidas antes de pasar a una nueva unidad o tema con mapas conceptuales, esquemas...		
2. Cuando introduce conceptos nuevos, los relaciona, si es posible, con los ya conocidos; intercala preguntas aclaratorias; pone ejemplos...		
3. Tiene predisposición para aclarar dudas y ofrecer asesorías dentro y fuera de las clases.		
4. Optimiza el tiempo disponible para el desarrollo de cada unidad didáctica.		
5. Utiliza ayuda audiovisual o de otro tipo para apoyar los contenidos en el aula.		

6. Promueve el trabajo cooperativo y mantiene una comunicación fluida con los estudiantes.		
7. Desarrolla los contenidos de una forma ordenada y comprensible para los alumnos y las alumnas.		
8. Plantea actividades que permitan la adquisición de los estándares de aprendizaje y las destrezas propias de la etapa educativa.		
9. Plantea actividades grupales e individuales.		

Tabla 87. Registro para la autoevaluación del profesorado: desarrollo de la enseñanza (Anaya).

Registro para la autoevaluación del profesorado: seguimiento y evaluación del proceso de aprendizaje-enseñanza

	INDICADORES	VALORACIÓN	PROPUESTAS DE MEJORA
SEGUIMIENTO Y EVALUACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	1. Realiza la evaluación inicial al principio de curso para ajustar la programación al nivel de los estudiantes.		
	2. Detecta los conocimientos previos de cada unidad didáctica.		
	3. Revisa, con frecuencia, los trabajos propuestos en el aula y fuera de ella.		
	4. Proporciona la información necesaria sobre la resolución de las tareas y cómo puede mejorarlas.		
	5. Corrige y explica de forma habitual los trabajos y las actividades de los alumnos y las alumnas, y da pautas para la mejora de sus aprendizajes.		
	6. Utiliza suficientes criterios de evaluación que atiendan de manera equilibrada la evaluación de los diferentes contenidos.		
	7. Favorece los procesos de autoevaluación y coevaluación.		
	8. Propone nuevas actividades que faciliten la adquisición de objetivos cuando estos no han sido alcanzados suficientemente.		
	9. Propone nuevas actividades de mayor nivel cuando los objetivos han sido alcanzados con suficiencia.		

	10. Utiliza diferentes técnicas de evaluación en función de los contenidos, el nivel de los estudiantes, etc.		
	11. Emplea diferentes medios para informar de los resultados a los estudiantes y a los padres.		

Tabla 88. Registro para la autoevaluación del profesorado: seguimiento y evaluación del proceso de aprendizaje-enseñanza (Anaya).

18. Índice de Figuras

Figura 1. Subdominios del MTSK.....	8
Figura 2. Tangram de piezas utilizado para la investigación (Briceño Solís y Alamillo Sánchez).16	
Figura 3. Fases de la teoría de situaciones didácticas según Brousseau (elaboración propia). .	17
Figura 4. Equipo de trabajo en clases online (elaboración propia).....	21
Figura 5. Construcción de rectas paralelas cortadas por rectas paralelas entres si (elaboración propia).....	24
Figura 6. Construcción de rectas secantes cortadas por rectas paralelas (elaboración propia).24	
Figura 7. Construcción de un segmento dividido en partes iguales (elaboración propia).....	25
Figura 8. Triángulos semejantes (elaboración propia).....	25
Figura 9. Triángulos semejantes a partir de dos ángulos homólogos iguales (elaboración propia).....	26
Figura 10. Triángulos semejantes a partir de dos lados proporcionales y ángulos comprendidos iguales (elaboración propia).	27
Figura 11. Triángulos semejantes a partir de tres lados proporcionales (elaboración propia). .	28
Figura 12. Polígonos semejantes de ocho vértices (elaboración propia).	29
Figura 13. Polígonos semejantes de cuatro vértices (elaboración propia).....	30
Figura 14. Polígonos semejantes de seis vértices (elaboración propia).	31
Figura 15. Construcción de polígonos homotéticos (elaboración propia).....	32
Figura 16. Construcción de figuras homotéticas (elaboración propia).....	33
Figura 17. Construcción de rectas secantes para enunciar el Teorema de Tales (elaboración propia).....	35
Figura 18. Esquema construido para la demostración del Teorema de Tales. Caso I (elaboración propia).....	36
Figura 19. Esquema construido para la demostración del Teorema de Tales. Caso II (elaboración propia).....	37
Figura 20. Construcción de segmentos proporcionales producidos por un haz de rectas (elaboración propia).....	38
Figura 21. Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados. Fase I (elaboración propia).....	39
Figura 22. Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados. Fase II (elaboración propia).....	40
Figura 23. División de un segmento en partes proporcionales a segmentos dados (elaboración propia).....	40
Figura 24. Triangulo rectángulo (elaboración propia).	41
Figura 25. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase I (elaboración propia).	41
Figura 26. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase II (elaboración propia).	42
Figura 27. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase III (elaboración propia).	42
Figura 28. Demostración del Teorema de Pitágoras. Fase IV (elaboración propia).....	43
Figura 29. Construcción de un triángulo rectángulo sobre un ángulo α (elaboración propia)...	44
Figura 30. Construcción de una circunferencia goniométrica de radio 1 y centro O.	46
Figura 31. Construcción geométrica de un radián (elaboración propia).	47
Figura 32. Signos de las razones trigonométricas por cuadrantes (elaboración propia).....	47
Figura 33. Razones trigonométricas. Caso I (elaboración propia).	48
Figura 34 Razones trigonométricas. Caso II (elaboración propia).	48
Figura 35. Razones trigonométricas. Caso III (elaboración propia).	49

Figura 36. Razones trigonométricas. Caso IV (elaboración propia).....	49
Figura 37. Razones trigonométricas. Caso V (elaboración propia).....	50
Figura 38. Construcción de un triángulo rectángulo.....	51
Figura 39. Dimensiones del currículo (Rico, 1997).....	53
Figura 40. Nota de los alumnos españoles entre los países de la OCDE (Elaboración propia a partir de OCDE).	55
Figura 41. Porcentaje de las distintas editoriales utilizadas en los centros educativos de Andalucía para el curso académico de 2º de ESO (Elaboración propia).....	57
Figura 42. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Grupo Anaya S.A (elaboración propia).....	58
Figura 43. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Santillana Grazalema S.L. (elaboración propia).....	59
Figura 44. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Guadiel-Edebé S.L. Parte I (elaboración propia).....	60
Figura 45. Esquema de los contenidos del libro de texto de la editorial Guadiel-Edebé S.L. Parte II (elaboración propia).....	60
Figura 46. Definición del Teorema de Tales (Grupo Anaya S.A).	62
Figura 47. Definición del Teorema de Tales (Guadiel-Edebé S.L.).	62
Figura 48. Definición del Teorema de Tales (Santillana Grazalema S.L.).	63
Figura 49. Número de actividades según tipología (elaboración propia).....	64
Figura 50. Porcentaje de actividades según tipología (elaboración propia).....	64
Figura 51. Número de actividades finales según nivel de dificultad (embarcación propia).	65
Figura 52. Porcentaje de actividades finales según nivel de dificultad (embarcación propia)... ..	65
Figura 53. Edificio del Instituto de Educación Secundaria I.E.S. Miguel Sánchez López en 3D. (elaboración propia a partir de Google Earth 2020).	69
Figura 54. Plano de localización del Instituto de Educación Secundaria I.E.S. Miguel Sánchez López. (elaboración propia a partir de Google Maps 2020).	70
Figura 55. Edificio del instituto de educación secundaria I.E.S. Miguel Sánchez López (elaboración propia).....	71
Figura 56. Croquis del aula (elaboración propia con el software Sweet Home 3D).	72

19. Índice de Tablas

Tabla 1. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 1 (elaboración propia).	9
Tabla 2. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 2 (elaboración propia).	10
Tabla 3. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 3 (elaboración propia).	10
Tabla 4. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 4 (elaboración propia).	11
Tabla 5. Relaciones entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM en la situación en el aula 5 (elaboración propia).	11
Tabla 6. Fases de resolución de problemas según Miguel de Guzmán (elaboración propia).	13
Tabla 7. Características de la enseñanza presencial y enseñanza online (elaboración propia). ..	20
Tabla 8. Nomenclatura utilizada en la fundamentación epistemológica (elaboración propia)..	22

Tabla 9. Niveles y dimensiones en el estudio del currículo (Rico, 1997).	53
Tabla 10. Puntuaciones en matemáticas por países (OCDE).	54
Tabla 11. Número de las distintas editoriales utilizadas en los centros educativos de Andalucía para el curso académico de 2º de ESO (Elaboración propia a partir de datos de la Junta de Andalucía).	56
Tabla 12. Ficha técnica del libro de texto de la editorial Anaya (elaboración propia).....	58
Tabla 13. Ficha técnica del libro de texto Santillana (elaboración propia).....	59
Tabla 14. Ficha técnica del libro de texto Edebé (elaboración propia).....	61
Tabla 15. Objetivos generales de la etapa (Real Decreto 1105, 2014, p. 176 y 177).	75
Tabla 16. Objetivos generales de la etapa (Decreto 111,2016, p. 30).	75
Tabla 17. Objetivos de matemáticas de la etapa (Departamento de Matemáticas,2020, a partir del RD 1105/2014 y el Decreto 144/2016).	76
Tabla 18. Objetivos de la unidad didáctica (elaboración propia a partir del RD 1105/2014 y el Decreto 144/2016).....	77
Tabla 19. Competencias clave de la unidad didáctica (elaboración propia a partir de Orden ECD/65/2015).....	78
Tabla 20. Contenidos de la unidad didáctica (elaboración propia).	79
Tabla 21. Tipo de actividades didácticas (Luque-Cañada, 2020).	82
Tabla 22. Actividades complementarios y extraescolares (elaboración propia).	84
Tabla 23. Temporalización de 2 de E.S.O (elaboración propia).	85
Tabla 24. Desarrollo de la UD.- “10: "Semejanza y Teorema de Tales" (elaboración propia)....	86
Tabla 25. Desarrollo de la sesión Nº1 de la unidad didáctica (elaboración propia).	87
Tabla 26. Desarrollo de la sesión Nº2 de la unidad didáctica (elaboración propia).	88
Tabla 27. Desarrollo de la sesión Nº3 de la unidad didáctica (elaboración propia).	89
Tabla 28. Desarrollo de la sesión Nº4 de la unidad didáctica (elaboración propia).	90
Tabla 29. Desarrollo de la sesión Nº5 de la unidad didáctica (elaboración propia).	91
Tabla 30. Desarrollo de la sesión Nº6 de la unidad didáctica (elaboración propia).	92
Tabla 31. Desarrollo de la sesión Nº7 de la unidad didáctica (elaboración propia).	92
Tabla 32. Desarrollo de la sesión Nº8 de la unidad didáctica (elaboración propia).	93
Tabla 33. Desarrollo de la sesión Nº9 de la unidad didáctica (elaboración propia).	93
Tabla 34. Desarrollo de la sesión Nº10 de la unidad didáctica (elaboración propia).	94
Tabla 35. Instrumentos de evaluación (elaboración propia).	95
Tabla 36.Fases de resolución de problemas según Miguel de Guzmán (elaboración propia)....	97
Tabla 37. Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Anaya (elaboración propia). ..	103
Tabla 38. Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Santillana (elaboración propia).	103
Tabla 39. Tipo de actividades del libro de texto de la editorial Edebé (elaboración propia). ..	104
Tabla 40. Criterios y estándares de aprendizaje (RD 1105/2014, p. 395).....	118
Tabla 41. Características del desarrollo de la sesión Nº1 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	119
Tabla 42. Características del desarrollo de la sesión Nº2 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	120
Tabla 43. Características del desarrollo de la sesión Nº3 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	121
Tabla 44. Características del desarrollo de la sesión Nº4 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	122
Tabla 45. Características del desarrollo de la sesión Nº5 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	123

Tabla 46. Características del desarrollo de la sesión Nº6 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	124
Tabla 47. Características del desarrollo de la sesión Nº7 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	125
Tabla 48. Características del desarrollo de la sesión Nº8 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	126
Tabla 49. Características del desarrollo de la sesión Nº9 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	127
Tabla 50. Características del desarrollo de la sesión Nº10 de la unidad didáctica (elaboración propia).....	128
Tabla 51. Desarrollo de la Actividad 1.1. (elaboración propia).....	129
Tabla 52. Desarrollo de la Actividad 1.2. (elaboración propia).....	133
Tabla 53. Desarrollo de la Actividad 2.1. (elaboración propia a partir de Anaya).	133
Tabla 54. Desarrollo de la Actividad 2.2. (elaboración propia a partir de Anaya).	134
Tabla 55. Desarrollo de la Actividad 2.3. (elaboración propia a partir de Anaya).	134
Tabla 56. Desarrollo de la Actividad 2.4. (elaboración propia a partir de Anaya).	134
Tabla 57. Desarrollo de la Actividad 3.1. (elaboración propia a partir de Anaya).	135
Tabla 58. Desarrollo de la Actividad 3.2. (elaboración propia a partir de Anaya).	135
Tabla 59. Desarrollo de la Actividad 3.3. (elaboración propia a partir de Anaya).	136
Tabla 60. Desarrollo de la Actividad 3.4. (elaboración propia a partir de Anaya).	136
Tabla 61. Desarrollo de la Actividad 4.1. (elaboración propia a partir de Anaya).	137
Tabla 62. Desarrollo de la Actividad 4.2. (elaboración propia a partir de Anaya).	137
Tabla 63. Desarrollo de la Actividad 4.3. (elaboración propia a partir de Edebé).	138
Tabla 64. Desarrollo de la Actividad 4.4. (elaboración propia a partir de Edebé).	139
Tabla 65. Desarrollo de la Actividad 5.1. (elaboración propia a partir de Anaya).	140
Tabla 66. Desarrollo de la Actividad 5.2. (elaboración propia a partir de Anaya).	140
Tabla 67. Desarrollo de la Actividad 5.3. (elaboración propia a partir de Anaya).	141
Tabla 68. Desarrollo de la Actividad 5.4. (elaboración propia a partir de Anaya).	141
Tabla 69. Desarrollo de la Actividad 6.1. (elaboración propia).....	142
Tabla 70. Desarrollo de la Actividad 8.1. Cara A. (elaboración propia a partir de Anaya).	143
Tabla 71. Desarrollo de la Actividad 8.1. Cara B (elaboración propia a partir de Anaya).	144
Tabla 72. Desarrollo de la Actividad 9.1. Solución (elaboración propia a partir de Anaya).....	145
Tabla 73. Desarrollo de la Actividad 9.2. (elaboración propia a partir de competencia social y ciudadana).....	146
Tabla 74. Desarrollo de la Actividad 10.1. Cara A (elaboración propia).	147
Tabla 75. Desarrollo de la Actividad 10.1. Cara B (elaboración propia).	148
Tabla 76. Desarrollo de la Actividad 10.1. Solución (elaboración propia).	149
Tabla 77. Desarrollo de la Actividad 10.2. (elaboración propia a partir de Anaya).	150
Tabla 78. Plan de clase de la actividad de modelización (elaboración propia).....	160
Tabla 79. Rúbrica para la evaluación del cuaderno del alumnado (elaboración propia)	162
Tabla 80. Rúbrica para evaluar la búsqueda y el tratamiento de la información (elaboración propia).....	162
Tabla 81. Rúbrica para la resolución de problema (elaboración propia).....	163
Tabla 82. Rúbrica para evaluar las actividades individuales (elaboración propia).	163
Tabla 83. Rúbrica para evaluar las actividades en grupo. (elaboración propia).....	164
Tabla 84. Rúbrica para evaluar la actitud y comportamiento en clase (elaboración propia)...	164
Tabla 85. Registro para la autoevaluación del profesorado: planificación (Anaya).	165

Tabla 86. Registro para la autoevaluación del profesorado: motivación del alumnado (Anaya).	166
Tabla 87. Registro para la autoevaluación del profesorado: desarrollo de la enseñanza (Anaya).	167
Tabla 88. Registro para la autoevaluación del profesorado: seguimiento y evaluación del proceso de aprendizaje-enseñanza (Anaya).	168