



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

FRACCIONES

Alumno/a: **Mozas Aguilera, Ismael**

Tutor/a: Prof. D. Manuel García Armenteros
Dpto: Didáctica de las Matemáticas

Junio, 2019

Índice general

1. Introducción.	5
2. Objetivos.	7
3. Dimensión didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza.	9
3.1. Humor y fracciones en la formación de profesores de matemáticas (Revista Suma).	9
3.2. Errores <i>correctos</i> en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas (Revista Suma).	13
3.3. Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales	16
4. Dimensión epistemológica: desarrollo de un tema de oposición.	20
4.1. Construcción de los números racionales.	24
4.1.1. Definición: Relación de equivalencia.	25
4.1.2. Definición: Suma.	25
4.1.3. Definición: Producto.	27
4.1.4. Proposición.	27
4.1.5. Definición de $\mathbb{Q}$	30

4.1.6. Propiedades.	30
4.2. Orden en $\mathbb{Q}$	31
4.2.1. Definición.	32
4.2.2. Definición.	32
4.2.3. Proposición.	32
4.2.4. Proposición.	33
4.2.5. Orden arquimediano.	34
4.2.6. Densidad.	35
4.2.7. Proposición.	36
4.2.8. Proposición.	36
4.2.9. Proposición.	37
5. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica.	38
5.1. Título.	38
5.2. Justificación.	38
5.3. Contextualización del centro y del aula.	40
5.3.1. Descripción del centro.	40
5.3.2. Instalaciones y materiales del centro.	42
5.3.3. Organización de los espacios del centro.	43
5.4. Objetivos.	46
5.4.1. Objetivos generales de etapa.	46
5.4.2. Objetivos específicos del área.	47
5.4.3. Objetivos concretos de la unidad didáctica.	49
5.5. Competencias clave.	50
5.6. Contenidos.	51

5.7. Metodología.	52
5.8. Actividades y recursos.	53
5.9. Atención a la diversidad.	66
5.10. Temporalización.	67
5.11. Evaluación.	75
5.12. Conclusiones.	78
Bibliografía	80

Capítulo 1

Introducción.

Una vez cursadas y superadas tanto las asignaturas del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, como el Practicum realizado en el Colegio Bilingüe Altocastillo de Jaén; me dispongo a finalizar dicho Máster con la elaboración de este Trabajo Fin de Máster, valga la redundancia. Para ello vamos a recordar y aplicar todo lo aprendido durante este curso 2018-2019 e intentar realizar un buen trabajo con la finalidad de obtener este título habilitante, el cuál me permitirá ejercer como docente en el futuro.

Este trabajo corresponde a la especialidad de Matemáticas, concretamente trataremos el tema de fracciones dentro de los números racionales para el nivel de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para ello, lo dividiremos en tres dominios claramente diferenciados:

- Dimensión didáctica: realizaremos el análisis de varios artículos de investigación relacionados con nuestro tema.
- Dimensión epistemológica: desarrollaremos el tema de oposición de los “Números Racionales”.

- Proyección didáctica: elaboraremos una unidad didáctica.

Considero que las dos primeras partes son fundamentales de cara a la formación de un buen docente, todo profesor debe poseer buenos conocimientos acerca de la materia que va a enseñar y estar al día de algunas de las investigaciones que se están realizando en las diversas áreas de dicha materia. La última parte se centra más bien en poder planificar, desarrollar y evaluar las diferentes unidades didácticas que tendremos que enseñar durante nuestra carrera como docentes.

Capítulo 2

Objetivos.

La realización de este Trabajo Fin de Máster tiene como principales metas la formación de todos los estudiantes para conseguir que estos sean buenos docentes en el futuro, así como ayudarlos a poder desarrollar sus clases y realizar tareas propias de un buen profesor de matemáticas.

Como ya hemos comentado anteriormente, en el apartado de dimensión didáctica abordaremos diferentes tipos de investigaciones acerca de las fracciones, tanto desde un punto de vista un poco más “científico” como en lo referente a analizar las dificultades y errores con los que se suelen encontrar los estudiantes en este tema y así, poder disponer de la mayor información posible para solventarlos de la mejor forma posible.

La dimensión epistemológica también es una parte muy importante ya que el objetivo de esta es que el estudiante sea capaz de desarrollar un tema completo del temario oficial de oposiciones para la especialidad de matemáticas, en mi caso, el tema 5 de los números racionales. Este apartado centra su importancia en el conocimiento del contenido de la materia por parte del docente, este debe dominar en profundidad cualquiera de los temas que están presentes en este temario y ser capaz de abordarlos con suficiente fluidez, claridad y coherencia a la hora de usar la

Capítulo 3

Dimensión didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza.

En este apartado vamos a mostrar y explicar brevemente algunas investigaciones sobre las fracciones, para ello hemos seleccionado aquellos artículos que nos han parecido más relevantes y apropiados para el momento histórico en el que nos encontramos.

3.1. Humor y fracciones en la formación de profesores de matemáticas (Revista Suma).

Referencia: “<http://revistasuma.es/revistas/80-noviembre-2015/humor-y-fracciones-en-la-formacion.html>”.

Este artículo nos muestra un estudio realizado por una Universidad brasileña, la cual pretende reducir el fracaso escolar en matemáticas mediante un recurso didáctico bastante potente, a la vez que insólito; el humor.

Este recurso es utilizado con la finalidad de crear un medio fluido de comunicación en el que los alumnos se sientan cómodos y puedan asimilar los conceptos de una

manera más agradable y amena.

Además, se pueden crear situaciones humorísticas partiendo de problemas cotidianos que ocurren en nuestra vida real, planteando una situación en la que varios sujetos tengas asimilados de manera incorrecta alguno o varios conceptos, y como las matemáticas sirven para resolver dichos problemas. De esta manera, no sólo se potencia un clima de comunicación mucho más efectivo sino que, además, gracias a este ambiente de trabajo, podemos llegar a retener los conceptos en nuestra memoria durante mucho más tiempo que si los hubiéramos aprendido mediante el procedimiento habitual.

En este estudio se utiliza como temática el número racional por ser un concepto complejo y con diferentes representaciones posibles. Podemos crear numerosas viñetas y tareas de tono humorístico basándonos en cada una de estas representaciones y como, con frecuencia, no se tienen bien asimiladas y se utilizan de manera inadecuada. Mostramos algunos ejemplos:

Tarea 1. Mira las viñetas y el chiste y responde a las cuestiones planteadas



En la pizzería: ¿Quiere que corte su pizza en seis o en ocho trozos?
En seis, en seis. No creo que pueda comer ocho.

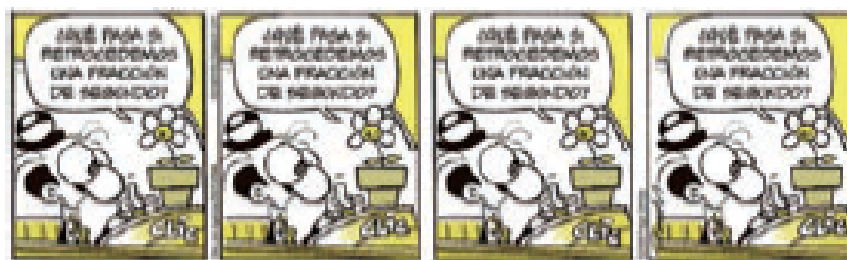
- Explica qué pasa en las viñetas y en el chiste.
- Resuelve la segunda viñeta. ¿Cuántos panes les toca a cada persona? Explica la respuesta del niño.
- Representa con dibujos la pizza del chiste cortada en seis y en ocho trozos. ¿A qué conclusión pudimos llegar sobre el tamaño de los trozos?
- ¿Cuál es la relación entre el número fraccionario, el decimal y la porcentaje?
- Escribe el porcentaje de la primera viñeta en número fraccionario y decimal. Escribe la fracción resultado de la segunda, en decimal y en porcentaje.

Figura 3.1: “Tarea 1”. Fuente: Revista Suma.

Tarea 2 : Explica qué pasa en las dos historietas ¿Qué significa la fracción en cada una de ellas, tanto en la vida cotidiana representada como el significado matemático?



"We found someone overseas who can drink coffee and talk about sports all day for a fraction of what we're paying you."



- Explica la historia que se describe en cada chiste
- ¿Te ha pasado una situación como esta en tus clases?
¿Cómo has reaccionado?
- ¿Cuál es la idea de fracción en cada historieta?

Figura 3.2: “Tarea 2”. Fuente: Revista Suma.

Estos ejemplos fueron trabajados por distintos profesores en varios institutos y, aunque se quedaron sorprendidos por la manera de trabajar y de introducir los conceptos, finalmente quedaron bastante sorprendidos con los resultados ya que la mayoría de los alumnos llegaron a entender los chistes y la ironía de estas viñetas

y llegaron a poder entender los diferentes conceptos de fracción, porcentaje, numerador, denominador, etc. Tanto fue así, que algunos crearon sus propios chistes matemáticos:

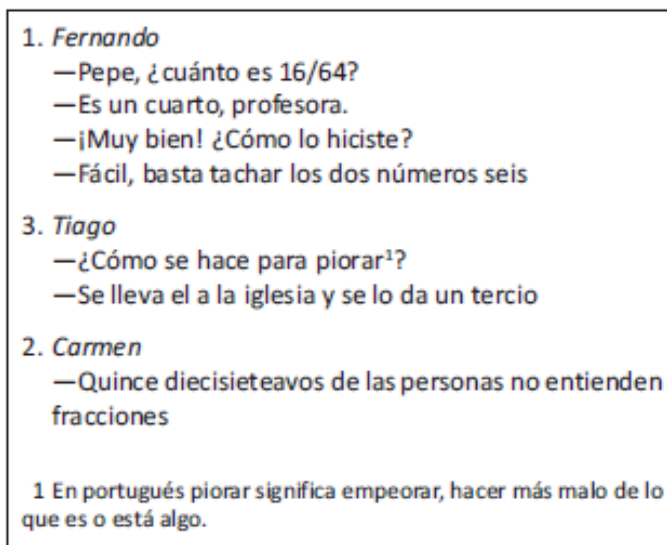


Figura 3.3: “Chistes creados por el alumnado ”. Fuente: Revista Suma.

A la vista de los resultados obtenidos en este estudio, creo que no hay mejor manera de combatir el fracaso escolar en matemáticas ya que, dada la complejidad y abstracción de la mayoría de conceptos matemático, que menos que tomarse dicha enseñanza con humor y hacer que las matemáticas sean un campo agradable y distendido en el que poder trabajar y aprender.

3.2. Errores *correctos* en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas (Revista Suma).

Referencia: “<http://revistasuma.es/revistas/63-febrero-2010/errores-correctos-en-la.html>”.

En este artículo se parte de algunos errores llamativos que realizan los alumnos a la hora de simplificar fracciones para terminar reflexionando sobre las prácticas docentes que existen a la hora de enseñar matemáticas.

$$\frac{\cancel{25}}{\cancel{15}} = \frac{2}{1}, \quad \frac{\cancel{25}}{\cancel{33}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\cancel{25}}{\cancel{32}} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\cancel{25}}{\cancel{27}} = \frac{5}{7}$$

Figura 3.4: “Errores a la hora de simplificar”. Fuente: Revista Suma.

Está claro que el proceso de simplificación de fracciones es un problema con el que los docentes deben enfrentarse año tras año, desde los primeros niveles de la ESO hasta incluso en el último nivel de bachillerato. El autor de este artículo atribuye estos errores de simplificación a tres causas fundamentales basadas en una inapropiada práctica docente algebraica:

- La omisión temprana del operador multiplicativo cuando cualquier número va multiplicando a alguna letra (15b), o se están multiplicando varias letras entre sí (abc).
- La escasa atención dedicada al desarrollo polinómico de los números, especialmente a la base decimal.
- La habitual tradición de tachar “/”, uno de los mayores problemas con los que nos encontramos a la hora de simplificar fracciones.

A continuación, para proseguir con el estudio, se realizó un cuestionario formado por 18 fracciones algebraicas, las cuales debían ser simplificadas, si esto era posible, y fue rellenado por alumnos de diferentes niveles académicos. Los principales errores encontrados fueron los siguientes: no simplificar letras, no sacar factor común,

$$\frac{3x-3}{(x-1)^2} = \frac{3x-3(x-1)^2}{(x-1)^2(x-1)^2} = \frac{x^2}{x+7} = \frac{x \cdot x}{x+7} = \frac{x}{7}$$

Sin embargo, en algunas ocasiones, utilizando un procedimiento erróneo, llegamos a soluciones correctas. Por ejemplo:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Por último, nuestro autor termina resaltando la gran importancia de las TICs para la enseñanza ya que estas nos proporcionan una gran variedad de posibilidades de aprendizaje y son mucho más atractivas para nuestros alumnos. Me gustaría resaltar

también la frase con la que cierra si estudio ya que creo que es muy apropiada: “¡Qué mejor aprender a aprender, que aprender de nuestros errores! ”.

3.3. Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales

Referencia: “file:///C:/Users/Ismael/Downloads/74-Texto %20del %20art %C3 %ADculo-313-1-10-20131106.pdf ”.

En este artículo los autores pretenden estudiar el grado de conocimiento y los recursos didácticos con los que debe contar una persona para que, en la práctica, pueda llegar a ser un buen profesor de matemáticas.

Autores como Shulman (1986; 1987) han centrado varias de sus investigaciones en este tema, es decir, en estudiar cual debe ser el conocimiento del contenido mínimo que deben de tener los docentes para que pueda producirse una enseñanza efectiva. Este distingue 3 dominios de conocimiento base que deben superarse para llegar a una enseñanza de calidad: “conocimiento del contenido a enseñar, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular ”.

Para una mayor comprensión del tema tratado, se analizaron y estudiaron otros estudios procedentes de una Universidad de Michigan, los cuales fueron realizados por autores con bastante peso en este ámbito. Estos investigadores definen el conocimiento matemático destinado a la enseñanza como: “¿el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos ”. Es decir, este conocimiento sería único de las personas destinadas a la enseñanza ya que deben contar con competencias y cualidades que no serían propias ni necesarias para un matemático que se encuentre enfocado hacia otra ocupación.

Rico (1997) realiza un análisis didáctico, en el cual define una serie de organizadores del currículo que ayudan al docente en su actividad de diseñar, desarrollar y evaluar las diferentes unidades didácticas que se les plantea. Dichos organizadores podrán, además, ayudar a solventar los errores y dificultades que puedan aparecer durante la práctica docente.

Para mostrar de una manera más práctica en lo que se centra esta investigación, se ha tomado el caso de un profesor que enseña el tema de los números racionales a alumnos de entre 9 y 10 años. Para ello, se realizó una recogida de datos en la cuál se grabaron todas las clases de dicho tema desde la parte de atrás del aula y se anotó todas las intervenciones que tuvieron lugar durante el desarrollo de la misma, ya fuera entre alumno y profesor o entre los propios alumnos. Mostramos dichos datos:

Tabla 1. *Episodio [1]*

<i>In</i>	<i>Su</i>	<i>Texto</i>	<i>*Análisis Didáctico</i>	<i>MKT</i>
1	P	Vamos a iniciar una nueva unidad de estudio: la unidad se llama <u>fracción</u> .	A. Cont. Término	CCK
2	As	Cómo, <u>fracción</u>		
3	P	Qué vamos a ver, niños, hoy día vamos a ver <u>fraccionamiento de enteros en partes iguales</u> , la <u>escritura</u> , la <u>escritura de fracciones</u> , trabajando con <u>papelitos</u> lustres que les pedí ayer que trajeran.[El papel lustre corresponde a un papel de color cuadrado de 10 cms de lado]	A. Cont. Fenomenología. A. Cont. Representaciones A. Instr. Materiales	SCK KCC KCT
4	P	[Profesor pide a los alumnos que escriban en su cuaderno][La imagen corresponde a lo que el profesor escribe en la pizarra] Unidad V: “Fracción” <u>Fraccionamiento, lectura y escritura de fracciones</u>	A. Instr. Oportunidades	KCT
5	P	[El profesor saca a tres alumnas adelante y explica la actividad]	A. Instr. Gestión tarea	KCT
6	P	Le voy a pasar a María <u>5 papeles</u> lustres y ella tiene que <u>repartir</u> entre sus <u>dos</u> compañeras en <u>partes iguales</u>	A. Cont. Fenomenología. A. Instr. Tarea, gestión, materiales	SCK KCC KCT

*A. Cont.: análisis de contenido; A. Instr.: análisis de instrucción; y, A. Cogn.: análisis cognitivo

Figura 3.6: “Desarrollo de la clase 1”. Fuente: Artículo.

Tabla 2. Episodio [2]

15	A	[Reparte cada pedazo (mitad de un papel) a cada niño]	A. Instr. Gestión tarea	KCT
16	P	A ver, <u>¿cuántos papeles enteros recibió cada niño?</u>	A. Instr. Gestión tarea	KCT
17	A	Dos, dos		
18	As	No, <u>dos y medio</u> [a coro los alumnos]		
19	P	<u>A ver, papeles enteros</u>	A. Instr. Gestión tarea	KCT
20	A	[una alumna] Dos enteros y dos medios	A. Instr. Respuesta	KCS
21	P	Puede <u>mostrar cuántos papeles recibió</u> [pide a las alumnas]	A. Instr. Respuesta	KCS
22	P	Ahí tiene <u>cada niña</u> , que recibió <u>dos papeles enteros</u>	A. Cont. Fenomenología	SCK
23	P	¿Ya, <u>y qué se tuvo que hacer con el otro papel para que cada niña recibiera lo mismo?</u>	A. Instr. Gestión tarea A. Cont. Fenomenología	KCT SCK
24	As	Partirlos <u>por la mitad</u>		
25	P	<u>Partirlo por la mitad</u> , están todos de acuerdo	A. Cont. Fenomenología	SCK
26	As	Sí		
27	P	Cada trozo de papelito que recibió cada niña se llama <u>fracción de papel</u> , le vamos a llamar	A. Instr. Gestión tarea A. Cont. Fenomenología	KCT
28	P	Pregunta: <u>¿qué fracción de papel recibió cada niño?</u>	A. Cont. Oportunidad	KCT
29	As	<u>Mitad, mitad...</u>	A. Cogn. Oportunidades	KCS
30	P	Bien, <u>la mitad</u>	A. Cont. Concepto, términos. Representación	SCK
31	P	Y vamos a llamarle <u>a la mitad un medio de la fracción</u>	A. Cont. Conceptual, términos. Representación	SCK
32	P	<u>Un medio es una fracción es un número fraccionario</u>	A. Cont. Conceptual, términos. Representación	CCK SCK

Figura 3.7: “Desarrollo de la clase 2”. Fuente: Artículo.

Tabla 3. Episodio [3]

91	P	Sí. Otro papel, <u>dividelo en cuatro partes iguales</u> . Pégalo en el cuaderno.	A. Cogn. Oportunidad A. Instr. Gestión tarea	KCS KCT
92	P	Y recuerde hay que <u>escribir el nombre igual que la vez pasada, un número</u> , el nombre de fracción.	A. Cont. Concepto, Representación	SCK KCT
93	A	<u>Un uno, una raya y un cuatro</u>	A. Cogn. Oportunidad	KCT
94	P	Muy bien.		
95	A	Profesor, yo no sé <u>partirlo en cuatro pedacitos</u> .		
96	A	Ya, cómo se llama <u>cada parte</u> [los alumnos mientras pegan el papel en el cuaderno, el profesor escribe en la pizarra]	A. Instr. Gestión tarea A. Cont. Fenomenología	KCT KCC
		Cada parte se llama un cuarto		
97	P	A ver, para ir terminando por hoy. A ver, Juan, una pregunta: <u>¿Cuántos medios tiene el entero?</u>	A. Cont. Fenomenología A. Cont. Oportunidad	KCC KCT
		Dos		
99	P	<u>Dos medios, bien</u>		
100	P	<u>¿Cuántos cuartos tiene el entero?</u>	A. Cont. Oportunidad	KCT
101	As	<u>Cuatro</u>		
102	P	Muy bien		

Figura 3.8: “Desarrollo de la clase 3”. Fuente: Artículo.

El análisis de esta situación les hizo identificar, efectivamente, diferentes componentes del conocimiento en matemáticas para la docencia. El conocimiento específico de la materia y de la enseñanza se puede apreciar cuando el profesor introduce los conceptos e ideas matemáticas de forma precisa y comienza con una actividad relacionada para así, poder introducir el tema de las fracciones. También podemos observar conocimiento del contenido y de enseñanza cuando inicia la definición de fracción, como relación parte-todo, mediante una actuación de reparto equitativo. Todo esto muestra que al tener los análisis conceptual, cognitivo y de instrucción, podemos obtener una mejor visión y una manera mucho más efectiva de abordar los diferentes temas de matemáticas y proporcionar a nuestros alumnos una enseñanza de mayor calidad.

Capítulo 4

Dimensión epistemológica: desarrollo de un tema de oposición.

Las fracciones ya eran conocidas en la Antigüedad, pero al no existir un sistema de numeración apropiado, recibieron durante mucho tiempo notaciones imprecisas, heterogéneas e inadaptadas a las aplicaciones prácticas.

Al principio las fracciones no fueron consideradas como números: ni siquiera se concebí la noción de fracción general m/n como "m" veces la inversa de "n". Los egipcios, por ejemplo, sólo conocían las llamadas fracciones unitarias (de numerador 1) y expresaban las fracciones ordinarias, mediante sumas de fracciones unitarias.

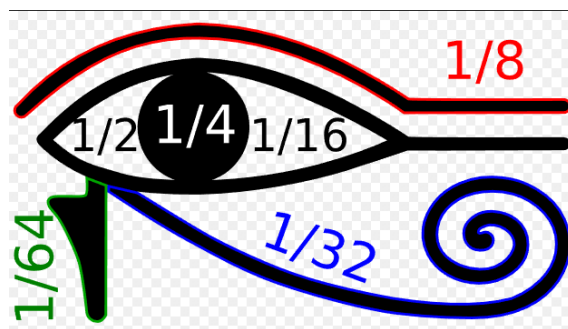


Figura 4.1: "Fracciones unitarios egipcias ". Fuente: Internet.

Con el desarrollo del cálculo y de la aritmética se descubrió, en época antigua, que las fracciones estaban sujetas a las mismas reglas que los naturales y que, por tanto, podían asimilarse a números.

Gracias a esta extensión, los números que antaño sólo servían para hacer recuentos se transformaron en referencias.^adaptadas a diversos usos. De ahora en adelante, no se conformaron con comparar dos magnitudes .^a ojo”; se las podía dividir, o al menos, suponerlas divididas, en partes iguales a una magnitud de la misma clase elegida como patrón. Pero, a pesar de este progreso, los antiguos, a causa de us notaciones imperfectas, no supieron ni unificar la noción de fracción ni construir un sistema coherente para sus unidades de medida.

Los babilonios, gracias a su numeración de posición en base sexagesimal, fueron los primeros que dieron a las fracciones una notación racional, convirtiéndolas en fracciones sexagesimales (fracciones cuyo denominador es igual a una potencia de 60) y expresándolas como algo parecido a la forma de expresar fracciones de horas en minutos y segundos:

$$17min \text{ y } 53seg = \frac{17}{60}h + \frac{53}{3600}h.$$

Pero los babilonios no conocieron el uso de la coma”para diferenciar los enteros de las fracciones sexagesimales de la unidad. De tal manera que la expresión 17;53 podía significar igual 17h 53 min, que 0h 17 min 53 seg. Era una notación ”flotante”que sólo se podía precisar por e contexto.

Los griegos, más tarde, intentaron dar una notación general a las fracciones ordinarias. Pero como era realmente difícil adaptar su numeración alfabética a esta simbolización, dejaron de intentarlo y adoptaron la notación sexagesimal de origen babilónico.

La notación moderna de las fracciones ordinarias se debe a los hindúes que, gracias

a su numeración decimal de posición, simbolizaron más o menos como nosotros una cierta fracción, por ejemplo $\frac{25}{724}$, escribían:

$$25(\text{numerador})$$

$$724(\text{denominador})$$

Mas tarde, esta notación hindú, fue adoptada y perfeccionada por los árabes que inventaron la famosa raya horizontal.

Posteriormente, gracias al descubrimiento de las fracciones llamadas "decimales" se descubrió poco a poco que resultaba práctico prolongar la numeración decimal de posición en el otro sentido, es decir, en términos modernos, representar números "después de la coma". Esto permitió representar todas las fracciones y hacer aparecer a los enteros como fracciones particulares.

En Europa, el belga Simón Stévin fue el primero que, en 1582, dio el paso decisivo hacia nuestro actual sistema de notación al escribir, donde nosotros escribiríamos 523,239:

$$523(0) \quad 2(1) \quad 3(2) \quad 9(3)$$

indicando 523 partes enteras, 2 unidades decimales de primer orden, 3 unidades decimales de segundo orden, etc.

Diez años más tarde, el suizo Jost Bürgi lo simplificó escribiendo: $523^{\circ}239$, es decir, poniendo encima de las unidades el signo (°).

El mismo año, el italiano Magini sustituyó el redondelito por un punto: 523.239 colocado entre las unidades y las décimas (notación que se conserva en los países anglosajones).

La coma que nosotros utilizamos fue ideada por el holandés Wilbord Snellius a prin-

cipios del XVII.

Las consecuencias de esta racionalización de la noción y representación de fracciones fueron incalculables en todos los campos.

Empezando por la invención del sistema métrico decimal. Sistema metrológico (relativo a los procedimientos de medida de una magnitud física) de base 10, totalmente coherente y perfectamente adaptado al cálculo numérico, que la Revolución Francesa ofreció en 1792 .^a todos los tiempos y todos los pueblos para su mayor provecho”, en sustitución de los antiguos sistemas de unidades arbitrarios, incoherentes y variantes.

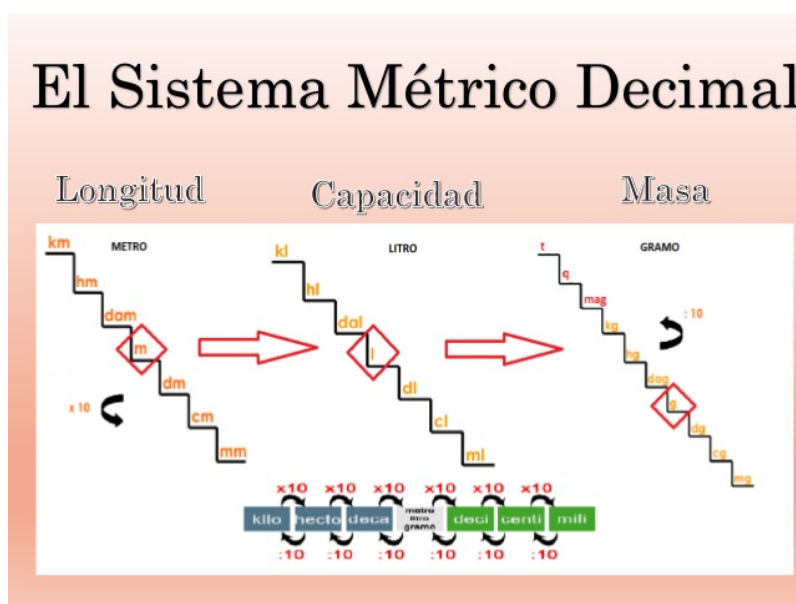


Figura 4.2: “Sistema métrico decimal ”. Fuente: Internet.

La numeración decimal e posición, una vez completada, nos introdujo en la infinita complejidad del universo de los números e hizo que las matemáticas dieran un salto prodigioso.

La construcción de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ la basaremos en que desde cualquier Dominio de integridad es posible construir un cuerpo de fracciones.

4.1. Construcción de los números racionales.

Consideramos el Dominio de Integridad $(Z, +, \cdot)$, donde no siempre existe solución de la ecuación $bx = \frac{a}{b}$, $b \in Z$.

Se trata, por tanto, de encontrar otro conjunto que, teniendo iguales propiedades que Z (respecto a las operaciones definidas en Z) sea simetrizable, es decir, que existiendo el simétrico de "b" para el producto, nos permita resolver la ecuación propuesta.

De acuerdo con lo anterior se trata de construir un Cuerpo Conmutativo $(K, +, \cdot)$, de forma que $(Z, +, \cdot)$ sea isomorfo a una parte de dicho Cuerpo, y, cumpliendo también, que el mismo K no contenga a un subcuerpo, que contenga al subanillo isomorfo a Z .

Supongamos que hemos hallado dicho cuerpo $(K, +, \cdot)$. Consideramos el producto cartesiano $Z \times (Z - \{0\})$, tomamos dos elementos del mismo: (a, b) y (a', b') . Que teniendo en cuenta el isomorfismo los podemos considerar de $K \times (K - \{0\})$.

Suponemos que tanto (a, b) como (a', b') dan la misma solución de la ecuación, sea esta solución $t \in K$ / $bt = a$ y $b't = a'$.

La solución "t" puede ser:

1. $t = 0 \in K$, de donde $a = 0 \in K$.
2. $t \neq 0 \in K$, como $b \in K - \{0\}, a \neq 0$.

En el primer caso: $a=a'=0 \Rightarrow ab' = ba'$.

En el segundo caso: como $bt = a$ y $a' = b't \Rightarrow bta' = ab't$, donde $t \neq 0$ y K es un cuerpo $\Rightarrow ba' = ab'$.

Así, en los dos casos: $ab' = ba'$.

Tenemos así una condición necesaria para que los elementos de $Z \times (Z - \{0\})$ definan

el mismo elemento del cuerpo a construir $(K, +, \cdot)$.

De acuerdo con lo expuesto:

4.1.1. Definición: Relación de equivalencia.

En $Z \times (Z - \{0\})$ relacionamos dos pares cualesquiera de la siguiente forma:

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow ab' = ba'$$

Definida esta relación entre pares se demuestra trivialmente las propiedades reflexivas, simétrica y transitiva (esta última distinguiendo dos casos):

Si $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ y $(c, d)R(e, f) \Leftrightarrow cf = de$, tendríamos que demostrar que $(a, b)R(e, f) \Leftrightarrow af = be$, que se hace distinguiendo dos casos: según “c” sea cero o no lo sea; en ambos casos se llega a la igualdad deseada.

La relación de equivalencia nos divide al conjunto en clases de equivalencia que formarán el conjunto cociente:

$\frac{Z \times (Z - \{0\})}{R} = \{[(a, b)]\}$, donde notamos por $[(a, b)]$ a la clase de equivalencia donde se encuentran todos los pares relacionados con $(a, b) \in Z \times (Z - \{0\})$.

En este conjunto cociente vamos a definir dos operaciones:

4.1.2. Definición: Suma.

$\forall (a, b), (a', b') \in Z \times (Z - \{0\})$, definimos:

$[(a, b)] + [(a', b')] = [(ab' + ba', bb')]$ operación que llamamos SUMA.

Veamos que es una operación interna:

Evidentemente nos da una clase cuyo representante es un elemento de $Z \times (Z - \{0\})$; veamos que es independiente de los representantes tomados:

tomamos $[(c, d)] + [(c', d')] = [(cd' + dc', dd')]$, donde las clases $[(a, b)]$ y $[(c, d)]$ son iguales $\Leftrightarrow ad = bc$; y las clases $[(a', b')]$ y $[(c', d')]$ son iguales $\Leftrightarrow a'd' = b'c'$; queremos

demostrar que $[(ab' + ba', bb')] = [(cd' + dc', dd')] \Leftrightarrow (ab' + ba') \cdot (dd') = (bb') \cdot (cd' + dc')$, tomamos la primera parte de esta igualdad a demostrar:

$$ab'dd' + ba'dd' = (ad)b'd' + (a'd')bd = bcb'd' + b'c'bd = bb'(cd' + dc') \quad c.q.d.$$

(Donde hemos sustituido ad por bc y $a'd'$ por $b'c'$).

Propiedades:

a) Asociativa (trivial).

b) Conmutativa (trivial).

c) Elemento neutro:

$$\forall [(a, b)] \in \frac{Z \times (Z - \{0\})}{R}, \exists [(e_1, e_2)] \in \frac{Z \times (Z - \{0\})}{R} \text{ tal que:}$$

$$[(e_1, e_2)] + [(a, b)] = [(a, b)] + [(e_1, e_2)] = [(a, b)] \text{ de donde:}$$

$$[(ae_2 + be_1, be_2)] = [(a, b)] \Leftrightarrow ae_2 + be_1 = a \text{ y } be_2 = b \Rightarrow e_2 = 1, ae_2 + be_1 = a + be_1 = a, be_1 = 0 \Rightarrow e_1 = 0, \text{ pues } b \in Z - \{0\}. \text{ Así, el elemento neutro es } [(0, 1)] \text{ (que además conmutará con cualquier elemento).}$$

d) Elemento simétrico:

$$\forall [(a, b)] \exists [(x, y)] / [(x, y)] + [(a, b)] = [(a, b)] + [(x, y)] = [(0, 1)]$$

La clase de equivalencia $[(0, 1)]$ es la misma que $[(0, -bb)]$ y así:

$$[(a, b)] + [(x, y)] = [(ay + bx, by)] = [(0, -bb)] \Leftrightarrow ay + bx = 0, by = -bb, \text{ de donde } y = -b, \text{ sustituyendo en } ay + bx = 0, -ab + bx = 0 \Rightarrow x = a.$$

Luego el elemento buscado es $[(a, -b)]$, elemento simétrico de la clase $[(a, b)]$ (evidentemente conmuta).

De todo lo cual $(K, +)$ es un grupo abeliano / $K = \frac{Z \times (Z - \{0\})}{R}$.

4.1.3. Definición: Producto.

$\forall(a, b), (a', b') \in Z \times (Z - \{0\})$ definimos:

$$[(a, b)] \cdot [(a', b')] = [(aa', bb')], \text{ operación que llamamos PRODUCTO.}$$

Se demuestra fácilmente que es una operación interna ya que nos da otra clase de equivalencia y que es independiente de los representantes elegidos.

Propiedades:

- a) Asociativa (por ser asociativo el producto de Z).
- b) Conmutativa (por ser $(Z, +, \cdot)$ anillo conmutativo).
- c) El Elemento neutro es $[(1, 1)]$.
- d) Todo elemento tiene simétrico:

$$\forall[(a, b)] \in K, \exists[(x, y)] \in K / [(a, b)] \cdot [(x, y)] = [(x, y)] \cdot [(a, b)] = [(1, 1)]$$

donde $[(1, 1)] = [(ab, ba)]$, pues $1 \cdot (ba) = 1 \cdot (ab)$

por lo cual: $[a, b] \cdot [(x, y)] = [(ab, ba)] \Leftrightarrow (ax = ab), x = b \text{ y } (by = ba), y = a$

$\Rightarrow$ el simétrico de la clase $[(a, b)]$ es la clase $[(b, a)]$, salvo que $[(a, b)]$ sea el neutro de la primera operación, es decir, la clase $[(0, 1)]$ no tiene simétrico para la segunda operación.

De todo lo cual $(K - \{[(0, 1)]\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

- e) Se cumple la propiedad distributiva de la segunda operación respecto de la primera operación (por ser $(Z, +, \cdot)$ anillo conmutativo).

Así, $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

4.1.4. Proposición.

Z está inmerso en K .

Veamos cómo:

Proposición: Isomorfismo.

Sea la aplicación $f : Z \rightarrow K / \forall a \in Z, f(a) = [(a, 1)]$. Es decir, si consideramos el conjunto $H = \{[(a, 1)] / a \in Z\}$ (se trata de un subconjunto de K), estudiaremos que Z y H son isomorfos para la aplicación f :

a) Se trata de un homomorfismo:

$$\forall a, b \in Z, \quad f(a + b) = [(a + b, 1)] = [a, 1] + [(b, 1)] = f(a) + f(b)$$

$$\forall a, b \in Z, \quad f(a \cdot b) = [(a \cdot b, 1)] = [(a, 1)] \cdot [(b, 1)] = f(a) \cdot f(b)$$

b) f es inyectiva, basta con que $\ker f = \{0\}$

$$\forall a \in Z, \quad f(a) = [(a, 1)] = [(0, 1)] \text{ (por la definición de } \ker f \text{); de cuya igualdad} \\ \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot 0, a = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}.$$

Tendremos que $f: Z \rightarrow K$ es homomorfismo inyectivo, si lo consideramos de Z en $H \subset K$, evidentemente es sobreyectivo y por lo tanto $(Z, +, \cdot)$ y $(H, +, \cdot)$ son isomorfos.

Consecuencia.

A partir de ahora, podemos identificar $\forall a \in Z$ con $[(a, 1)] \in K$ por comportarse de igual forma respecto de las operaciones definidas.

La ecuación $bx = a / a, b \in Z$, tendrá solución en K , $\forall b \neq 0$.

Donde dado que $b \neq 0 \Rightarrow$ Existe su simétrico respecto del producto:

Sea $b = [(b, 1)]$, su simétrico respecto al producto es $[(1, b)]$; tendremos:

$$bx = a; \quad [(b, 1)] \cdot x = [(a, 1)]; \quad [(1, b)] \cdot ([(b, 1)] \cdot x) = [(1, b)] \cdot [(a, 1)], \text{ aplicando la} \\ \text{asociatividad del producto} \Rightarrow x = [(1, b)] \cdot [(a, 1)] = [(a, b)] \in K \quad \text{c.q.d.}$$

Proposición.

En el apartado I se plantea que K no contenga a un subcuerpo que contenga al

subanillo isomorfo a Z :

Veamos que no existe otro subcuerpo distinto al K y contenido en K , conteniendo al subanillo isomorfo a Z , en efecto:

Sea ese otro cuerpo K' , que contendrá al conjunto $\{[(a, 1)]\}$, es decir al subconjunto $H \subset K$. Al ser K' subcuerpo contiene al conjunto de toas las clases simétricas (respecto al producto) de los $\{[(a, 1)]\}$ (naturalmente $a \neq 0$, pues el elemento neutro $(0, 1)$ no tenía simétrico para el producto):

$$\{[(1, a)]\} \subset K', \forall a \in Z, a \neq 0.$$

Vamos a demostrar que $K' \subset K$, e el propio K ; en efecto:

$\forall [(a, b)] \in K, [(a, b)] = [(a, 1)] \cdot [(1, b)]$ producto donde ambos factores son de K' , y así $[(a, b)] \in K'$, es decir $K = K'$. *c.q.d.*

La unicidad del cuerpo K , en el sentido de que siendo cuerpo conmutativo cumpla que el único subcuerpo suyo que contiene a un subanillo isomorfo a Z , sea el propio K , se demuestra siguiendo una serie de pasos:

- a) Se considera otro cuerpo J que cumpla esas mismas condiciones.
- b) Se construye una aplicación $\rho : K \rightarrow J$ teniendo en cuenta los isomorfismos respectivos entre Z y una parte de K y “ g ” entre Z y una parte de J .
 - b-1) En $g(Z) \times (g(Z) - \{0\})$ definimos una relación binaria que será de equivalencia, lo que dará lugar a un cuerpo conmutativo: W (el propio conjunto cociente), así $W \subset J$.
 - b-2) Definimos un isomorfismo “ h ” entre $W \rightarrow K$.
 - b-3) Definimos un isomorfismo “ j ” entre $W \rightarrow J$.
 - b-4) La aplicación buscada ρ es: $\rho = j \circ h^{-1}$.
- c) Se demuestra que $\rho = j \circ h^{-1} : K \rightarrow J$ es un isomorfismo.

4.1.5. Definición de $\mathbb{Q}$.

Quedaría así demostrada la unicidad del cuerpo K (salvo un isomorfismo). A partir de ahora, a ese cuerpo lo notaremos por $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y lo llamaremos el Cuerpo de los Números Racionales. (Las condiciones que cumple K hacen que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sea el Cuerpo de las fracciones sobre el dominio de integridad $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$).

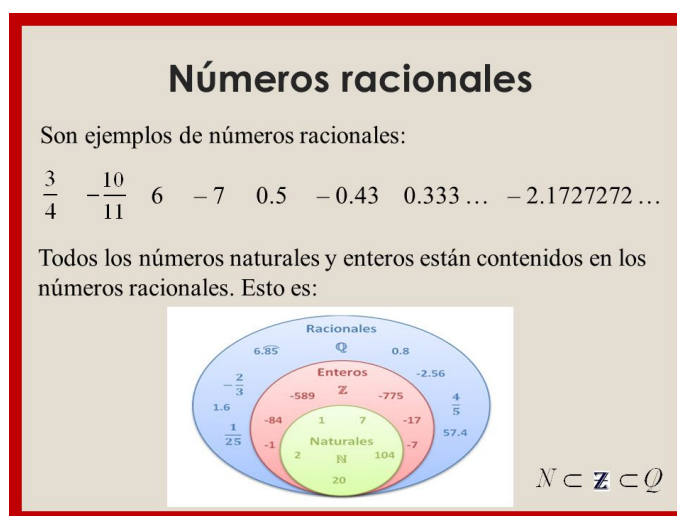


Figura 4.3: “Números racionales”. Fuente: Internet.

Antes de considerar el orden de $\mathbb{Q}$, podemos mencionar una serie de propiedades consecuentes con lo dicho hasta aquí.

4.1.6. Propiedades.

1. En $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ toda ecuación de primer grado con una incógnita tiene solución única.
2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, por lo tanto dominio de integridad, es decir, carece de divisores de cero.

3. En $(\mathbb{Q}, +\cdot)$ sólo existen ideales impropios, es decir, el ideal cero $(\{0\}, +\cdot)$ y el ideal $(\mathbb{Q}, +\cdot)$.
4. $(\mathbb{Q}, +\cdot)$ no es algebraicamente cerrado (Todo polinomio con coeficientes racionales no tiene, al menos, una raíz en $\mathbb{Q}$).

4.2. Orden en $\mathbb{Q}$.

Se trata de definir un orden que conserve la suma y el producto de positivos definidos en $\mathbb{Q}$, de forma que sea Orden total y, por último, que la restricción de dicho orden a $\mathbb{Z}$ sea el propio orden de $\mathbb{Z}$ (en total cuatro premisas).

Antes de definir ese Orden, tratemos de establecer que condiciones ha de cumplir:

Supongamos que ya tenemos establecido el orden $(\leq)$ requerido; al ser orden total, $\forall[(a, b)] \Rightarrow [(a, b)] > 0$ o bien $[(a, b)] \leq 0$.

Consideremos ambos casos:

1º) $[(a, b)] > 0$, donde $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$; pueden ocurrir otros dos casos:

1º-1) $b > 0 \Rightarrow [(b, 1)] > 0 \Rightarrow [(a, b)] \cdot [(b, 1)] > 0 \Leftrightarrow [(ab, b)] > 0 \Leftrightarrow [(a, 1)] > 0 \Rightarrow a > 0$ y así, $a \cdot b > 0$ (referido a $\mathbb{Z}$).

1º-2) $b < 0 \Rightarrow [(b, 1)] < 0 \Rightarrow [(-b, 1)] > 0 \Rightarrow [(a, b)] \cdot [(-b, 1)] > 0 \Leftrightarrow [(-ab, b)] > 0 \Leftrightarrow [(-a, 1)] > 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0$ de donde $a \cdot b > 0$ (referido a $\mathbb{Z}$).

(Hemos ido aplicando las cuatro premisas iniciales).

Luego si $[(a, b)] > 0$ hemos demostrado que $a \cdot b > 0$ (1)

2º) $[(a, b)] \leq 0$, lo podemos tratar a partir de $[(-a, b)] \geq 0$, al que aplicamos el primer caso y por tanto $-a \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b < 0$ (en el caso de $a = 0$, tendríamos la igualdad a cero). Por lo que:

Si $[(a, b)] \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$ (referido a $\mathbb{Z}$). (2)

Así, si definimos el orden buscado en $\mathbb{Q}$, deberá cumplir (1) y (2).

Por otro lado si $[(a, b)] \leq [(c, d)] \Leftrightarrow [(a, b)] - [(c, d)] \leq [(c, d)] - [(c, d)]$ (por ser el orden a definir compatible con la suma, según la primera premisa), de donde:

$[(a, b)] - [(c, d)] \leq 0$, es decir, se trataría de indicar que entendemos por racional ≤ 0 (o bien > 0).

Con todo lo expuesto.

4.2.1. Definición.

Decimos que $[(a, b)] \leq 0 \Leftrightarrow a \cdot b \leq 0$.

Definición que es independiente del representante elegido. En efecto, si $[(a, b)] = [(c, d)] \Rightarrow ad = bc$, $ad(bd) = bc(bd)$, $abd^2 = cdb^2$ y al ser positivos d^2 y $b^2 \Rightarrow ab$ y cd tienen igual signo.

4.2.2. Definición.

$[(a, b)] \leq [(c, d)] \Leftrightarrow [(a, b)] - [(c, d)] \leq 0$, que según lo anterior es independiente de los representantes tomados.

La definición anterior nos define una relación entre elementos de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

4.2.3. Proposición.

La relación $\leq$ es una relación de orden total en $\mathbb{Q}$.

Las tres propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva, se demuestran sin más que aplicar las propiedades del cuerpo conmutativo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; veamos que el orden es total:

Sean dos elementos $[(a, b)], [(c, d)] \in \mathbb{Q}$,

supondremos que no se cumple $[(a, b)] \leq [(c, d)]$, de donde:

$$\begin{aligned}
[(a, b)] - [(c, d)] \leq 0 &\Leftrightarrow^{(3)} [(a, b)] + [(c, -d)] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(-ad + bc, -bd)] \leq 0 \Leftrightarrow^{(4)} [(ad - bc, bd)] \leq 0
\end{aligned}$$

(3) por el elemento simétrico de $[(c, d)]$ para la suma.

(4) pues ambas clases son iguales.

es decir, si no se cumple $[(a, b)] \leq [(c, d)]$, no se cumplirá que $(ad - bc) \cdot bd \leq 0$.

Como $\mathbb{Z}$ está totalmente ordenado $\Rightarrow (ad - bc) \cdot bd > 0$, como en $\mathbb{Z}$ el orden es compatible con la suma $(bc - ad)bd < 0$ de donde $[(c, d)] < [(a, b)]$ *c.q.d.*

4.2.4. Proposición.

El conjunto $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ es un Cuerpo totalmente ordenado.

A lo expuesto le quedaría por añadir que la relación de orden total $(\leq)$ es compatible n la suma y el producto de elementos positivos de $\mathbb{Q}$:

a) Compatibilidad con la suma:

Demostraremos que si $[(a, b)] \leq [(c, d)] \Rightarrow \forall [(t, j)] \in \mathbb{Q}$

$$[(a, b)] + [(t, j)] \leq [(c, d)] + [(t, j)]$$

Así, habrá que demostrar:

$$[(aj + bt, bj)] \leq [(cj + dt, dj)] \Leftrightarrow [(aj + bt)dj - bj(cj + dt)]bjdj \leq 0.$$

Sea $b, d, t, j > 0$ (se demuestra análogamente en los otros casos).

Como $[(a, b)] \leq [(c, d)] \Leftrightarrow (ad - bc) \cdot bd \leq 0$, donde $bd > 0 \Rightarrow (ad - bc) \leq 0$; como $j > 0$, $(ad - bc)j \leq 0$; $adj - bcj \leq 0$, de donde $adj + btd - (bcj + btd) \leq 0$.

Multiplicamos por $j > 0$ y sacamos dos factores comunes:

$(aj + bt)dj - bj(cj + dt) \leq 0$ y al ser $b > 0, d > 0$, tenemos:

$$((aj + bt)dj - bj(cj + dt))bdj^2 \leq 0 \quad \quad \quad \text{c.q.d.}$$

b) El producto de racionales mayores o iguales que cero es mayor o igual que cero.

Si $[(a, b)] \geq 0$ y $[(c, d)] \geq 0$, entonces debemos demostrar que:

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] \geq 0$$

En efecto:

Si $[(a, b)] \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$, como $[(c, d)] \geq 0 \Rightarrow c \cdot d \geq 0^{(5)}$; como $\Rightarrow [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$, para que sea ≥ 0 se cumpliría que $(ac) \cdot (bd) \geq 0$, lo que se cumple por (5). (La relación de orden no es compatible con el producto; sólo se conserva si multiplico por un número positivo).

Vemos por último, que esa relación de orden total definida en $\mathbb{Q}$ es compatible con el orden de $\mathbb{Z}$:

En efecto: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, tomamos sus isomorfos correspondientes $[(a, 1)]$ y $[(b, 1)]$. Si $[(a, 1)] \leq [(b, 1)] \Leftrightarrow [(a, 1)] - [(b, 1)] \leq 0 \Leftrightarrow (a \cdot 1 - 1 \cdot b) \cdot 1 \cdot 1 \leq 0$; $a - b \leq 0$, $a \leq b$. c.q.d.

Así con todo, el orden construido en $\mathbb{Q}$ cumple todas las condiciones para ser un orden total en $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$ es, por tanto, un cuerpo totalmente ordenado y tal que el orden restringido a $\mathbb{Z}$ es el propio orden de $\mathbb{Z}$.

4.2.5. Orden arquimediano.

Sea $(\mathbb{Q}, +)$, se dice que es arquimediano si dados dos números positivos cualesquiera “p” y “q”, tal que $p < q$, existe un cierto $n \in \mathbb{N} / n \cdot p > q$.

En efecto: $p = [(a, b)]$, $q = [(c, d)]$; como $p < q \Leftrightarrow [(a, b)] < [(c, d)] \Leftrightarrow (ad - bc)bd < 0$.

Dados que p y q son positivos, podemos suponer $bd > 0^{(6)}$, de donde $ad - bc < 0$, $ad < bc$.

Al ser $\mathbb{Z}$ arquimediano $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / nad - bc > 0$, multiplicando por $bd > 0 \Rightarrow (nad - bc)bd > 0$ (5)

Queríamos demostrar que $n \cdot p > q$, es decir:

$[(a, b)] + [(a, b)] + \dots^{(n)} + [(a, b)] > [(c, d)] \Leftrightarrow [(na, b)] > [(c, d)]$ es decir, debemos demostrar que $[(c, d)] < [(na, b)] \Leftrightarrow (cb - dna)db < 0 \Leftrightarrow (nad - cd)db > 0$ que es justamente (5).

(Nota: en (6) hemos supuesto $b \cdot d > 0$, ya que siempre podremos encontrar representantes de las clases de p y q con esa condición).

4.2.6. Densidad.

Decimos que un conjunto $(E, \leq)$ es Denso cuando $\forall x, y \in E / x < y \exists j \in E / x < j < y$. Es decir, entre dos elementos cualesquiera existe otro.

- El conjunto de los números racionales es denso, lo cual quiere decir que "entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números racionales".

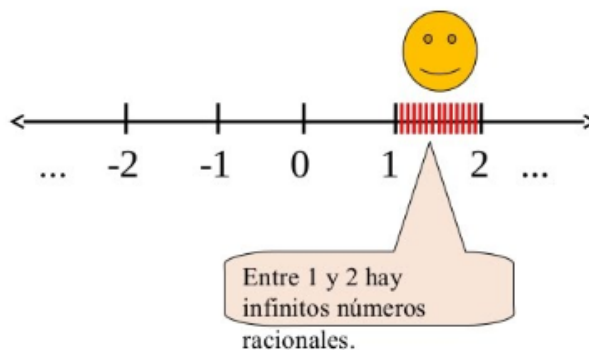


Figura 4.4: "Densidad de $\mathbb{Q}$ ". Fuente: Internet.

Demostraremos que en $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ tenemos establecido un orden denso:

$\forall p = [(a, b)], q = [(c, d)]$ de $\mathbb{Q}$, suponemos $p < q$, como el orden establecido es compatible con la suma $\Rightarrow p + p < p + q$ y también $p + q < q + q$, y así: $2p < p + q < 2q$, lo que nos indica que entre p y q se encuentra el número racional, producto del simétrico del 2 (para el producto) con la suma de los números racionales iniciales:

La clase del número 2 es: $[(2,1)]$; su simétrico para el producto es $[(1,2)] \Rightarrow [(1,2)] \cdot [(ad+bc, bd)] = [(ad+bc, 2bd)]$ que es la clase de equivalencia comprendida entre $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$.

Como consecuencia, entre dos racionales cualesquiera existen infinitos números racionales.

4.2.7. Proposición.

Los números racionales no tienen ni primer ni último elemento.

Demostración. Sea $l = [(t, j)]$, 1 primer elemento (donde suponemos “j” positivo), sea la clase $l' = [(t-1, j)]$, donde $l' < l$; en efecto:

si $[(t-1, j)] < [(t, j)] \Leftrightarrow ((t-1)j - jt)jj < 0 \Leftrightarrow (t-1) \cdot j - jt < 0, tj - j - jt < 0, -j < 0$, lo que es evidente pues $j > 0$ por hipótesis.

Así $l = [(t, j)]$ no es el primer elemento; análogamente se demuestra que no tiene último elemento. $\square$

4.2.8. Proposición.

$\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable.

El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable si existe una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y dicho conjunto.

Por otro lado, los conjuntos numerables cumplen:

- $N \times N$ es numerable.
- Si dos conjuntos son numerables lo es su producto cartesiano.
- La unión de conjuntos numerables es numerable.

De acuerdo con lo anterior:

Dado que $Q = Q^- \cup Q^+ \cup \{0\}$, donde Q^- lo obtenemos de $Z^- \times Z^+$ y Q^+ de $Z^+ \times Z^+$, por tanto Q^- y Q^+ son numerables y su unión también lo será.
c.q.d.

4.2.9. Proposición.

El orden en Q contiene huecos.

Para definir hueco, debemos primero conocer que se entiende por partición ordenada: Supongamos un conjunto ordenado $(T, \leq)$ y dos subconjuntos no vacíos T_0 y T_1 . Decimos que $\{T_0, T_1\}$ constituye una partición ordenada de T , si cumple:

- $T_0 \cup T_1 = T$
- $T_0 \cap T_1 = \emptyset$
- $\forall t_0 \in T_0, \forall t_1 \in T_1 \Rightarrow t_0 < t_1$

Un hueco T es una partición ordenada de T con la condición de que no existe un cierto elemento de T , tal que sea el último elemento de T_0 y que tampoco exista otro cierto elemento de T tal que fuese el primer elemento de T_1 .

Se demuestra que Q no tiene huecos basándonos en un teorema (que no demostraremos) que dice: Todo conjunto con orden denso numerable tiene huecos.

Capítulo 5

Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica.

5.1. Título.

Para la realización de este Trabajo Fin de Máster hemos decidido desarrollar una unidad didáctica que trate sobre el tema de las “Fracciones ”para el curso escolar de 3º de ESO.

5.2. Justificación.

Nuestra unidad didáctica se abordaría justo al inicio del año académico ya que es el primer tema que introducen la gran mayoría de editoriales y, sería cursado por los alumnos de 3º de ESO cuya modalidad hayan elegido las “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas”. En esta unidad se repasan y afianzan todos los conceptos sobre fracciones visto en los cursos anteriores. Además, se profundiza en la noción de número racional, comparación de fracciones, operaciones entre ellas tanto de manera simple como combinando una serie de operaciones y en la expresión decimal de un número racional.

Desde el primer ciclo de la ESO ya se le empieza a introducir al alumnado la idea de número racional, así como algunas operaciones y algunos porcentajes casi triviales. En este curso, los alumnos deben asimilar por completo ya la mayoría de estos conceptos y operaciones debido a que en 4º de ESO se centra más la atención en los números reales e irracionales y, este tema se suele abordar con bastante rapidez ya que el alumnado lo debería haber comprendido sin mayor dificultad en cursos anteriores.

Con respecto al contenido que los alumnos deberían conocer ya para una correcta comprensión e interpretación de esta unidad didáctica, es muy limitado. La mayoría de ellos saben ya lo que es un número racional, como pueden compararlos y realizar algunas operaciones sencillas con ellos pero, no obstante, todos y cada uno de estos conceptos se repasarán de nuevo en esta unidad y se solventarán todas las dudas que puedan ir surgiendo.

La unidad didáctica que nosotros estamos tratando se enmarcaría en el Bloque 2 de “Números y Álgebra”. Estos bloques aparecen en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y establecen el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria. Además, cada comunidad autónoma suele dar sus pequeñas aportaciones para regular la atención a la diversidad y la manera en la que se evalúa el proceso de aprendizaje de su alumnado. Nosotros tendremos presente la Orden de 14 de julio de 2016 que es la que regula la Comunidad Autónoma Andaluza.

5.3. Contextualización del centro y del aula.

5.3.1. Descripción del centro.

Desarrollaremos esta unidad didáctica para alumnos de 4º de ESO del centro bilingüe Altocastillo situado en Jaén, lugar donde he llevado a cabo las prácticas de este Máster de Profesorado.

En Jaén se encuentra también el colegio Guadalimar. El colegio Alto Castillo solo admite al género masculino mientras que Guadalimar sólo al femenino, salvo en preescolar que ambos géneros se encuentran en este último centro mencionado.

En ambos colegios al trabajar sólo con un género, no quiere decir que se discrimine al otro. Todo esto tiene su lógica. La filosofía con la que se trabaja es claramente favorecedora. Al trabajar sólo con un género se tiene más efectividad. A parte, las niñas tienen un desarrollo más temprano que los niños. Después, es sus vidas normales, los niños y niñas de estos colegios se juntan para salir, ir al cine, ir de compras, etc. con toda la normalidad.

El colegio Alto Castillo pertenece a la empresa ATTENDIS y es reconocido dentro de la comunidad escolar por la incorporación y el impulso de las enseñanzas europeas y el bilingüismo como un instrumento habitual de aprendizaje.

Altocastillo es centro oficial examinador de Trinity College, Cambridge y la Alliance Française. La atención que presta el colegio a los idiomas ha sido el origen de uno de los concursos nacionales de inglés más consolidados de Andalucía y Extremadura, el Concurso Scope. En las pruebas de selectividad del pasado curso, obtuvo un 100 % de aprobados en la convocatoria de junio.

Dispone de unas instalaciones amplias y adaptadas a las nuevas necesidades educativas, entre las que se incluyen aulas de informática, lo que permite una enseñanza

real y operativa con el apoyo de las nuevas tecnologías; aulas de psicomotricidad y pistas polideportivas.

Dentro del entorno social, los colegios de Attendis y el Opus Dei están directamente relacionados. El Opus Dei es una institución de la Iglesia Católica, que difunde el mensaje de que el trabajo y las circunstancias ordinarias son ocasión de encuentro con Dios, de servicio a los demás y de mejora de la sociedad. Su fundador, San José María Escrivá, fue canonizado por el papa Juan Pablo II en Roma el 6 de octubre de 2.002.

Por expreso deseo de los padres y madres que promovieron estos centros escolares, la Prelatura del Opus Dei presta ayuda espiritual de formas muy variadas: atención sacerdotal, clases de religión, asesoramiento doctrinal, etc.

Dentro del entorno cultural, como todos los colegios e institutos, existe una Asociación de madres y padres de alumnos. En los colegios Attendis sirven para articular de forma ordenada la participación de los padres en la vida de los centros. La AMPA se suma con su labor a la del resto de la comunidad escolar en la mejora del colegio tanto hacia fuera como hacia dentro. Los cometidos de la AMPA se encaminan, sobre todo, a la participación en las iniciativas del colegio para el cumplimiento de su misión de ayuda a las familias, y hacia la promoción y organización de todo tipo de actividades.

Dentro del entorno económico, el colegio Altocastillo es un colegio privado. La matrícula del niño por curso académico es de 5.000 euros el cual incluye, comedor, autobús de ida y vuelta y actividades extraescolares. Por lo que el nivel socio-económico es alto. La mayoría de los padres, por no decir casi su totalidad, tienen trabajos de altos cargos y un alto nivel adquisitivo.

Como antes se ha mencionado dentro de la matrícula del niño cuenta con el servicio

de autobús para ir y regresar del colegio desde distintas partes de Jaén, incluso desde diferentes pueblos y ciudades.

Los colegios de Attendis también cuentan con ayudas y becas a las familias.

5.3.2. Instalaciones y materiales del centro.

El Colegio cuenta con la siguiente infraestructura:

- **AULAS DE CLASE:** Se encuentran distribuidas en varios edificios.
 - **OTRAS AULAS:** Existen, además de las aulas asignadas a cada grupo, otras de uso compartido, dedicadas a desdoblamientos de grupos y agrupamientos en gran grupo. Aulas de informática, Laboratorios, Aulas Taller, etc.
 - **ESPACIOS ESPECIALES:** Consideramos espacios especiales a aquellos que se encuentran ligados, sobre todo, a la utilización de un material especial o específico que no tienen cabida en el aula regular, a una actividad que requiere mayor espacio o un hábitat especial. En lo referente a espacio, diseño, instalaciones y prestaciones todas ellas se adaptan a la Orden de 24 de enero de 2003 sobre diseño y construcción de centros, de la Junta de Andalucía, que traspone y actualiza los Reales Decretos de mínimos.
 - **BIBLIOTECA:** La biblioteca está integrada en el proyecto curricular y fomenta métodos activos de enseñanza, y especialmente para el desarrollo de la autonomía del alumnado en el proceso de aprendizaje.
 - **AULAS DE INFORMÁTICA Y MULTIMEDIA:** EL aula de informática por su equipamiento es multimedia y en algunos casos complementan la formación y en otros son parte implícita de la formación.
-

- LABORATORIOS: En general la utilización del laboratorio es multidisciplinar, en un solo espacio se incorporan tipos de actividades distintas, en Primaria esencialmente con conocimiento del medio y en Secundaria con actividades relacionadas con física, química y biología.
- OTROS ESPACIOS: Gimnasio, Campos de deporte, Oratorio, Despachos de directivos y profesores, Comedor y Secretaría.

Además, el Colegio cuenta con los siguientes materiales:

- Numerosos libro de lectura, diccionarios, biblias y revistas de diferentes temáticas.
- Ordenadores portátiles.
- Un proyector por clase.
- Dos pizarras digitales por clase.
- Equipos de sonido.

5.3.3. Organización de los espacios del centro.

- AULAS DE CLASE: Los alumnos permanecen en las aulas durante los períodos de clase sin salir de ella entre una y otra. A la hora de los recreos las aulas quedan cerradas con llave. Es responsabilidad del profesor que ha impartido clase antes del recreo cerrar con llave.

A última hora del día o a la última hora que los alumnos tengan clase en el aula ese día, éstos se encargarán de poner las sillas encima de las mesas (sillas con las patas hacia arriba) y recoger los papeles que hayan quedado por el suelo, para facilitar las labores de limpieza.

- OTRAS AULAS: Estas aulas estarán cerradas cuando no tengan un uso específico.

El profesor que utiliza uno de estos espacios es responsable de que quede en perfectas condiciones de limpieza y orden al terminar.

- ESPACIOS ESPECIALES: Debido a la complejidad de trasponer en los espacios comunes el uso de las zonas especiales, ya que disponemos en todos ellos de dos etapas educativas (Primaria y Secundaria, y en Secundaria ESO (obligatoria) y Bachillerato (postobligatoria)), la adaptación a nivel de diseño, espacio, instalaciones y prestaciones son siempre en aras de buscar el mayor rendimiento de estas instalaciones, es decir, haciéndolas flexibles para que puedan ser utilizadas por todos nuestros alumnos.

- BIBLIOTECA: Se utiliza para fomentar la lectura y como lugar de estudio, complementos imprescindibles para la formación integral de nuestros alumnos. Con ello conseguimos alumnos que sean capaces de ir a distintas fuentes de información, de hacer una selección crítica teniendo en cuenta principios formativos y morales y al mismo tiempo preparados para ir construyendo su propio conocimiento, con lo que hacemos alumnos más críticos, libres, formados e independientes.

La biblioteca en una de sus funciones como búsqueda y comparación de información, también se adapta a las nuevas tecnologías teniendo los medios audiovisuales e informáticos ? con acceso a Internet - como un elemento más de la misma.

Por lo tanto, la biblioteca se convierte en un centro de recursos documentales y como foco cultural y dinamizador de la vida educativa, encaminada a

apoyar, favorecer y enriquecer el desarrollo de la programación docente. Es un espacio de recursos, entendiendo por recurso todo aquel material que aporta información lingüística, numérica, sonora o plástica, que puede intervenir en el proceso de aprendizaje. Por todo ello conseguimos que sea un espacio ideal para la didáctica interdisciplinar y la transversalidad

- **AULAS DE INFORMÁTICA Y MULTIMEDIA:** El aula de informática con elementos multimedia y conexión a Internet (pizarra digital, medios audiovisuales, instalación de filtros...) es una pieza fundamental en la educación y formación de nuestros alumnos, no sólo por la parte referente a la formación intelectual, como búsqueda de información, aprendizaje de determinadas asignaturas, áreas o ámbitos mediante el uso de programas específicos, sino también en el ámbito formativo como herramienta para el desarrollo de la persona, sobre todo en el uso racional y adecuado de esta herramienta con tanta potencialidad.

- **LABORATORIOS:** El laboratorio tiene como finalidad principal explicitar la praxis de los distintos ámbitos, áreas y asignaturas para los que es útil. Ordinariamente su uso, por sus especiales características, es la concreción práctica mediante experimentos de la teoría explicada en clase, con lo que se rompe la monotonía de la formación y se concreta la misma, es decir se formaliza la abstracción.

El laboratorio cumple las medidas de Seguridad y tiene en función del área, ámbito o asignatura, unas normas para el uso del equipamiento y del espacio.

5.4. Objetivos.

Como la propia definición de la palabra indica, los objetivos son las metas que los alumnos deben haber superado una vez finalice el curso escolar. Nosotros, vamos a dividir estos objetivos en tres dominios en base a los distintos grados de concreción, desde los logros más generales de etapa a los más específicos de la materia. Estos objetivos los tomaremos de los documentos curriculares correspondientes (BOE y BOJA), donde seleccionaremos aquellos que tratemos en nuestra unidad didáctica de Fracciones para alumnos de 3º de ESO.

Además, formularemos los objetivos concretos de la unidad. Para ello, consultaremos las programaciones ofrecidas por algunas editoriales y objetivo expuestos en libros de texto.

5.4.1. Objetivos generales de etapa.

La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

- Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

5.4.2. Objetivos específicos del área.

La enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en 3º de ESO en Andalucía en esta unidad didáctica ayudará a desarrollar en los alumnos capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
 2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
 3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
 4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
 5. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
 6. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad
-

para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

7. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

5.4.3. Objetivos concretos de la unidad didáctica.

Tras finalizar la unidad didáctica de Fracciones, los alumnos deberán haber adquirido las capacidades enumeradas a continuación. Se hará referencia a ellas en los siguientes apartados mediante las siglas OU y su número correspondiente:

1. Reconocer y utilizar fracciones en contextos cotidianos.
 2. Realizar operaciones con números racionales.
 3. Distinguir entre números decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos. Hallar la fracción generatriz.
 4. Distinguir números racionales e irracionales.
 5. Plantear y resolver problemas en los que intervienen distintos tipos de números.
-

5.5. Competencias clave.

A aquellas capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa se les llama competencias clave, según el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre y la Orden ECD/65/2015 de 21 de enero. El aprendizaje basado en competencias se caracteriza por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral. Son siete las principales competencias clave:

1. Comunicación lingüística (CL).
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
3. Competencia digital (CD).
4. Aprender a aprender (CAA).
5. Competencias sociales y cívicas (CSC).
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE).
7. Conciencia y expresiones culturales (CC).

La materia de Matemáticas contribuye especialmente al desarrollo de la competencia matemática (CMCT), reconocida y considerada clave por la Unión Europea, así como a la formación intelectual del alumnado, lo que le permitirá desenvolverse mejor tanto en el ámbito personal como social. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta del máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. En este proceso

de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias además de la matemática, entre otras, la comunicación lingüística (CCL), al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y emprendimiento (SIEP), al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; la competencia digital (CD), al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; o la competencia social y cívica (CSC), al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones.

5.6. Contenidos.

Los contenidos son todos aquellos conocimientos, habilidades y destrezas que nos ayudan a alcanzar las metas propuestas por el sistema educativo y nos van dotando de las capacidades necesarias para nuestra formación. Para nuestra unidad didáctica de Fracciones de 3º de ESO, hemos revisado la Orden del 14 de julio de 2016 y hemos tomado aquellos que están relacionados con los objetivos que hemos mencionado anteriormente.

Bloque 2. Números y Álgebra:

- CB2a - Números decimales y racionales.
 - CB2b - Transformación de fracciones en decimales y viceversa.
 - CB2c - Números decimales exactos y periódicos.
 - CB2d - Fracción generatriz.
 - CB2e - Operaciones con fracciones y decimales.
-

5.7. Metodología.

El proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral. A continuación damos indicaciones concretas sobre como abordaremos los distintos bloques de contenido.

El bloque “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” es un bloque común a los dos cursos y transversal: debe desarrollarse simultáneamente al resto de bloques de contenido y es el eje fundamental de la asignatura.

En este bloque introduciremos el conocimiento histórico, social y cultural de las Matemáticas que servirá para la comprensión de los conceptos a través de la perspectiva histórica, así como para contrastar las situaciones sociales de otros tiempos y culturas con las realidades actuales. Para ello se deben realizar actividades de investigación que favorezcan el descubrimiento de personajes históricos y sus aportaciones.

El uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las calculadoras y el software específico se convertirán en herramientas habituales para la construcción del pensamiento matemático, introduciendo elementos novedosos como las aplicaciones multimedia que enriquecerán el proceso de evaluación del alumnado, tales como libros interactivos con simuladores, cuestionarios de corrección y autoevaluación automatizados, etc. Además, el uso de blogs, wikis, gestores de contenido CMS, plataformas de e-learning, repositorios multimedia, aplicaciones en línea y entornos colaborativos favorecen el aprendizaje constructivo y cooperativo.

En el bloque “Números y Álgebra” utilizaremos una metodología de tipo expositivo, más convencional, para explicar conceptos más concretos; combinada con otra en la

que se desarrolle un trabajo más cooperativo. En esta segunda forma de trabajar utilizaremos una técnica denominada “grupos de expertos”, para ello formaremos grupos heterogéneos de unos cuatro alumnos por grupo, pediremos a cada grupo que se centren en un tema diferente (relacionado con nuestra unidad didáctica) e investiguen hasta llegar a la mayor comprensión del mismo. Par finalizar, todos los grupos expondrán su tema y la clase completa adquirirá una enseñanza mucho más significativa y duradera.

Para todos los bloques, hay que destacar la importancia del uso de juegos matemáticos como cartas (chinchón algebraico, barajas de funciones...), dominós (de áreas, de ecuaciones...), bingos (de números reales, de operaciones,...), juegos de mesa (tres en raya algebraico, cuatro en raya polinómico,...), ruletas y dados.

5.8. Actividades y recursos.

Ayudándonos de libros de texto de distintas editoriales, repositorios web de materiales y teniendo presente la normativa vigente de la Orden del 14 de julio de 2016; enumeraremos a continuación una lista de recursos que tendremos a nuestra disposición para poder llevar a cabo, de la mejor forma posible, las actividades que plantearemos en nuestra unidad didáctica.

RECURSOS:

- En papel: Libro de texto, fichas y cuaderno.
 - Audiovisuales: Proyector y altavoces.
 - Tecnológicos: Pizarra digital y calculadora científica.
 - Informáticos: Portátiles, Internet y diversos programas.
-

ACTIVIDADES:

Según el profesor Lorenzo Luque, las siguientes actividades planteadas se clasifican en diferentes tipos, con sus respectivas finalidades:

TIPO DE ACTIVIDAD	FINALIDAD DE LA ACTIVIDAD
De diagnóstico (DIAG)	Permiten realizar un cómputo del nivel de los alumnos
De introducción (INT)	Permiten adaptarse al posterior ritmo de trabajo
De motivación (MOT)	Buscan la implicación y motivación del alumno
De aprendizaje (AP)	Para adquirir destrezas procedimentales y conceptuales
De desarrollo (DES)	Permiten desarrollar y fijar los contenidos propuestos
De consolidación (CON)	Buscan reforzar los aprendizajes
De investigación (INV)	Desarrollar el aprendizaje adquirido a partir de una idea
De evaluación (EV)	Determinan el grado de consecución de los objetivos

Tabla 5.1: Tipos y finalidad de las actividades que se plantean en la unidad didáctica (Luque,2018).

Actividad 1:

Coloca los números de la derecha de la manera necesaria para obtener fracciones equivalentes:

$\frac{2}{3} = \frac{6}{\square} = \frac{\square}{-9} = \frac{\square}{15}$

-6910

$\frac{6}{\square} = \frac{\square}{-5} = \frac{\square}{100} = \frac{3}{5}$

6010-3

$\frac{6}{\square} = \frac{\square}{2} = \frac{3}{\square} = \frac{37}{74}$

6112

$-\frac{\square}{3} = \frac{3}{\square} = \frac{\square}{9} = -\frac{\square}{9}$

93-9-3

Figura 5.1: “Fracciones equivalentes ”. Fuente: SM Educamos.

Actividad 2:

Encuentra la fracción irreducible de: $\frac{36}{54}$, $\frac{-280}{320}$, $\frac{150}{-275}$ y $\frac{121}{363}$.

Actividad 3:

¿Qué tipo de números conoces? ¿Qué sabes hacer con ellos?. Realiza los siguientes apartados para poder dar respuesta a estas preguntas:

- Si $x = 12$, ¿son equivalentes las siguientes fracciones?

$$\frac{13}{26} = \frac{6}{x}$$

- ¿Cuál es el denominador común de las siguientes fracciones?

$$\frac{2}{3}, \frac{9}{2}, \frac{4}{10} \text{ y } \frac{1}{5}$$

- La siguientes cadena de igualdades, ¿es cierta?

$$\frac{3}{18} = \frac{15}{90} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

- Completa las siguientes frases:

- Si los denominadores de tres fracciones son 4, 12 y 36, el denominador común será

- Si una fracción tiene numerador 4 y denominador 7, al multiplicar por 2 toda la fracción, quedará como numerador

- Un sexto de 54 es

- Manu y su amiga Rebeca van a comprar caramelos para la fiesta de cumpleaños de Marta. Saben que van a ser 25 amigos en total en la fiesta. En la tienda, Manu le dice a Rebeca: “deberíamos llevarnos al menos cinco doceavos de los caramelos que hay en este cesto”. Pero ella dice: “No, bastaría con llevarnos un tercio de los caramelos”. El dependiente les indica que hay 60 caramelos

en el cesto. ¿A quién deberíamos hacer caso para que en la fiesta ningún niño se quede sin un caramelo?

Actividad 4:

Realiza las siguientes operaciones y simplifica hasta obtener una fracción irreducible:

a) $\frac{3}{10} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{5} - \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right)$

c) $\left(2 - \frac{4}{7}\right) : \frac{3}{14}$

d) $5 + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

e) $\frac{7}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$

f) $-\frac{2}{5} : \frac{3}{4} - \frac{6}{5}$

Actividad 5:

Resuelve utilizando la jerarquía de operaciones y la propiedad distributiva. ¿Se obtiene el mismo resultado?

a) $\frac{3}{24} \left(\frac{2}{11} + \frac{18}{22}\right)$

b) $\left(\frac{3}{9} - \frac{4}{8}\right) \frac{5}{15}$

c) $\frac{3}{7} : \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{9}\right)$

Actividad 6:

Coloca los números de la derecha de la manera necesaria para que las siguientes operaciones sean correctas:

$$\begin{array}{l}
 -\frac{2}{7} : \left(2 \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) \right) = \frac{8}{\boxed{}} \\
 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{56}{\boxed{}} - \frac{8}{7} \right) = 0 \\
 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right) : \left(\frac{\boxed{}}{3} \right) = 1 \\
 \left(1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} \right) : \boxed{} = \frac{1}{4}
 \end{array}$$

Figura 5.2: “Operaciones con fracciones”. Fuente: SM Educamos.

Actividad 7:

Realice los siguientes apartados:

- ¿Es cierta la siguiente afirmación?: “Para conseguir la fracción que sea suma de dos fracciones, basta con sumar los numeradores y los denominadores.”
- Completa las siguientes frases:
 - Para seguir el orden en una cadena de operaciones, primero debemos atender a los
 - La de una fracción es aquella que al multiplicarla por la original se obtiene la unidad.
 - Los productos y cocientes en operaciones combinadas se realizan siempre de a derecha.
 - En la regla de los signos más por menos da
 - Para hacer más sencillos los cálculos, siempre debes las fracciones.

- Para realizar el producto de dos fracciones, se debe multiplicar el numerador de la primera por el de la segunda y se debe multiplicar el denominador de la primera por el denominador de la segunda.
- Para sumar o dos fracciones primero hay que reducir a común denominador y después sumar o restar los numeradores.
- Responde a los siguientes apartados teniendo en cuenta a fracción $\frac{12}{36}$:
 - Para conseguir el número 18 en el denominador, debemos por
 - La fracción irreducible de la original es
 - La inversa de la fracción irreducible es
- Indica cuáles de las siguientes operaciones son correctas:
 - $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20}$
 - $\frac{2}{7} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{14}$
 - $\frac{-2}{3} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{-8}{9}$
- Realiza la siguientes operación:
$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{3}\right)$$

Actividad 8:

Escribe las siguientes fracciones en forma decimal y clasifica los números decimales obtenidos:

- a) $\frac{8}{5}$
 - b) $\frac{1386}{99}$
 - c) $\frac{165}{111}$
 - d) $\frac{98765}{33000}$
-

Actividad 9:

Escribe la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

- a) 5,6
- b) $9,8\widehat{765}$
- c) 4,5678
- d) $1,2\widehat{6}$
- e) $1,\widehat{9}$
- f) $-2,75\widehat{3}$

Actividad 10:

Señala todos los conjuntos a los que pertenezca cada número:

	100 000 000	$\sqrt{99}$	$-\frac{1111}{2223}$	$\frac{666}{333}$	$-\left \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{12}\right $	π	-0,65434343...	3,1415926535...
N								
Z								
Q								
R								

Figura 5.3: “Conjuntos numéricos ”. Fuente: SM Educamos.

Actividad 11:

Realizaremos la siguiente actividades ayudándonos de los recursos TIC del centro.

Para ello utilizaremos el programa Geogebra:

Fracciones equivalentes

La aplicación muestra tres de las formas más habituales de representar gráficamente fracciones:

- 1 Sobre un círculo
- 2 Sobre un cuadrado
- 3 Sobre un rectángulo

Al pulsar en cada botón puedes ver la fracción propia que elijas en cualquiera de las las formas. Es conveniente seleccionar primero el denominador, y a continuación el numerador.

Selecciona el botón **Amplificar** para ver el procedimiento de calcular fracciones equivalentes multiplicando numerador y denominador por el número que elijas. Desde el botón **Simplificar** la aplicación calcula fracciones equivalentes dividiendo ambos términos en caso de que sea posible.

Moviendo los deslizadores selecciona:

- a) Una fracción que sea equivalente a $\frac{35}{42}$.
- b) Una fracción que sea equivalente a la fracción irreducible $\frac{3}{4}$. ¿Hay más de una fracción que lo verifique?

Figura 5.4: “Enunciado de actividad 6-Geogebra ”. Fuente: SM Educamos.

Fracciones equivalentes: **amplificar**

Representación

1 2 3

Sobre un círculo

Numerador = 1

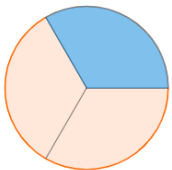
Denominador = 3

Amplificar Simplificar

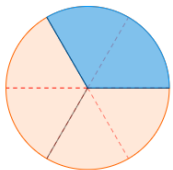
Mostrar ejercicios

Reiniciar construcción

$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{6}$



Multiplicar por 2

$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$

Figura 5.5: “Práctica de actividad 6-Geogebra ”. Fuente: SM Educamos.

Actividad 12:

Realizaremos la siguiente actividades ayudándonos de los recursos TIC del centro.

Para ello utilizaremos el programa Geogebra:

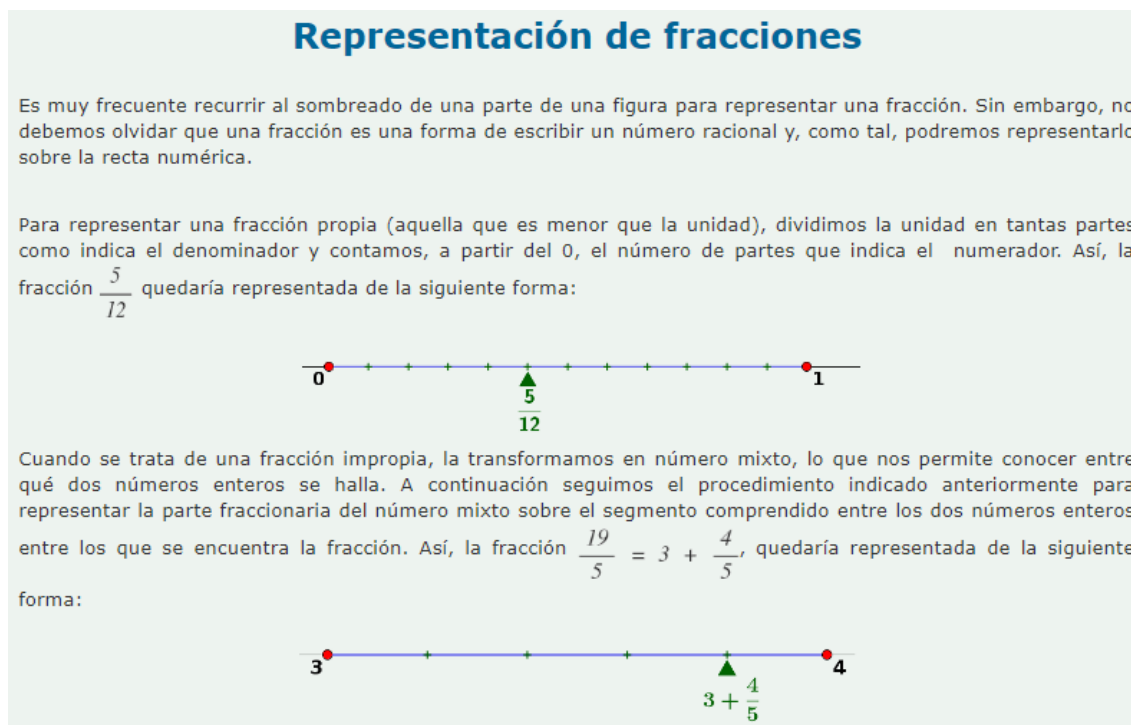


Figura 5.6: “Enunciado de actividad 7-Geogebra ”. Fuente: SM Educamos.

Usa la app y responde:

1. Sitúa sobre la recta real las siguientes fracciones. En cada caso, utiliza los deslizadores de la parte superior izquierda para escribir la fracción, con los deslizadores de la parte derecha selecciona el número entero inmediatamente anterior a la fracción que vas a representar y el número de partes en que hay que dividir a la unidad. Por último, sitúa el triángulo verde situado bajo el segmento en el lugar que representa la fracción. Cuando lo hayas hecho activa la casilla **Comprobar la solución** para verificar tu resultado.

$$\frac{5}{9} ; \frac{7}{12} ; \frac{16}{3} ; \frac{17}{4} ; \frac{17}{6} ; \frac{19}{7} ; \frac{12}{3} ; \frac{18}{5}$$

2. ¿Qué fracción está representada en cada uno de los siguientes casos? En cada caso, utiliza los deslizadores para seleccionar el número de divisiones adecuado, así como el número entero inmediatamente anterior y, a continuación, sitúa el triángulo verde en el lugar indicado en la imagen. Por último escribe la fracción que se corresponde utilizando los deslizadores de la parte superior izquierda de la aplicación. Cuando lo hayas hecho activa la casilla **Comprobar la solución** para verificar tu resultado.



3. ¿Qué ocurre cuando representamos sobre la recta numérica dos fracciones equivalentes? Compruébalo con la aplicación.

Figura 5.7: “Práctica de actividad 7-Geogebra ”. Fuente: SM Educamos.

Actividad 13:

Proponemos algunos ejercicios de Geogebra creados por Javier Cayetano Rodríguez.

Podemos encontrar muchos más en el siguiente enlace: “<https://www.geogebra.org/m/gP4um8bWcha>”

Ejercicios

Vamos a comprobar que has aprendido a simplificar fracciones.

En este ejercicio hay que escribir las **fracciones en su forma irreducible** (simplificando todo lo posible).

Introduce el numerador y el denominador en las casillas de la derecha. Si piensas que alguna fracción es un número entero, puedes indicar “1” en el denominador.

Practica...

Simplifica estas fracciones . . .	
[1] $\frac{330}{30} =$	
[2] $\frac{45}{60} =$	
[3] $\frac{48}{30} =$	
[4] $\frac{126}{693} =$	
[5] $\frac{75}{825} =$	

Figura 5.8: “Actividad 13.1 de Geogebra creada por Javier Cayetano Rodríguez ”.
Fuente: internet.

Comparar y Ordenar Fracciones

Autor: Javier Cayetano Rodríguez

Tema(s): Fracciones

¿Cómo averiguar si una fracción es mayor que otra?

- ✎ Cuando tenemos una representación gráfica de las fracciones, podemos decidirlo de un solo vistazo (viendo dónde hay más cantidad o cuál está más a la derecha en la recta numérica). Pero puede ser que no tengamos esa representación.
- ✎ También sería sencillo compararlas si conociésemos la expresión con decimales de cada fracción. Pero normalmente no la conocemos, y habría que hacer las divisiones con decimales.

✎ Sin embargo, usando las propiedades de las fracciones podemos ahorrarnos trabajo. Las reglas generales son:

- ✓ Fracciones con el **mismo denominador**: mismo orden que los numeradores.
- ✓ Fracciones con el **mismo numerador**: se ordenan **al revés** que los denominadores.
(*) Pensa por qué: $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{3}$: si repartimos 1€ entre 3 niños, ¡les toca más dinero que si lo repartimos entre 8!
- ✓ Caso **general**: reducimos a común denominador (MCM de los denominadores) y ya estamos en el primer caso. Comparamos los numeradores obtenidos.

Echa un vistazo a esta actividad para entender por qué, y cómo se hace.

Comparando Fracciones

★ Ordena de menor a mayor : $\frac{92}{25}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{4}{5}$.

Otro Ejemplo

$\frac{92}{25}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{4}{5}$

▼ Solución

$$\frac{1}{4} < \frac{4}{5} < \frac{92}{25}$$

▼ Con la **representación gráfica** es fácil resolverlo. Pero no siempre tenemos los dibujos, así que... ¿Cómo se resuelve **sin el dibujo**?

Figura 5.9: “Actividad 13.2 de Geogebra creada por Javier Cayetano Rodríguez”. Fuente: internet.

Prueba escrita:

1. Tres hermanas se han repartido una tarta de esta extraña manera: Julia se ha quedado con $\frac{1}{6}$ del total; Lucía con $\frac{7}{18}$ del total; y Belén $\frac{4}{9}$ del total.
 - a) Primero asegúrate de que el reparto es correcto. Es decir, las fracciones deben sumar 1.
 - b) Ordena a las hermanas de menos a más según la cantidad de tarta que les tocó.
 2. En mi colección de discos, $\frac{1}{3}$ son de Beethoven; $\frac{2}{5}$ del resto son de Bach; y los 42 que quedan son de Mozart. ¿Cuántos discos tengo en total?
 3. Realiza las siguientes operaciones y simplifica:
 - a) $\frac{7}{2} + \frac{3}{12} - \frac{1}{3}$
 - b) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$
 - c) $-2 \cdot \frac{3}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$
 - d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right)$
 4. Calcula la expresión decimal de: $\frac{17}{6}$, $\frac{23}{2}$ y $\frac{15}{4}$.
 5. Calcula la fracción generatriz de: $1,47\widehat{61}$, $3,5\widehat{6}$ y $14,3\widehat{2}$.
 6. Clasifica estos números en racionales o irracionales:
 - a) 3,11010010001...
 - b) $\sqrt{7}$
 - c) $-0,3\widehat{6}$
 - d) $\sqrt{9}$
-

5.9. Atención a la diversidad.

Este apartado puede variar enormemente dependiendo del tipo de alumnado con el que nos encontremos ya que dichos alumnos pueden presentar unas capacidades muy diferentes:

- Trastorno por Déficit de Atención (TDA) y Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH).
- Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE).
- Dificultades de aprendizaje.
- Falta de motivación.
- Incorporación tardía.
- Altas capacidades.

Dependiendo del tipo de caso al que nos enfrentemos, tendremos que desarrollar un plan de clase y unas actividades específicas para cada caso. Así, conseguiremos proporcionar una enseñanza de calidad y para todo tipo de alumnado.

Hay muchas actividades que son válidas para todo tipo de públicos y, otras, que sólo necesitan matizar pequeños detalles para poder adaptarlas a ciertas capacidades. Estas actividades sirven para alcanzar los mismos objetivos sólo que con metodologías diferentes o con un nivel de dificultades diferente. En la mayoría de casos, también es muy útil el refuerzo individual.

Para terminar, mostramos dos actividades que podrían sernos útiles en este contexto. La actividad 1 enfocada a un alumnado que, debido a ciertas dificultades, su rendimiento está por debajo del esperado y la actividad 2 está implementada para

aquellos alumnos que presentan altas capacidades.

Actividad 1:

REPRESENTACIÓN ESCRITA	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA
Cuatro quintos	$\frac{4}{5}$		_____
			_____
Siete quintos	$\frac{7}{5}$		_____
			_____

Figura 5.10: “Adaptación curricular - Bajo rendimiento ”. Fuente: web de Santillana.

Actividad 2:

$\frac{2}{3}$ de los habitantes de una ciudad tienen menos de 35 años y $\frac{5}{8}$ de éstos tienen menos de 18 años. Si la ciudad tiene 15000 habitantes, ¿cuántos habitantes tienen menos de 18 años?. ¿Cuántos tienen entre 18 y 35 años?. ¿Cuántos tienen más de 35 años?.

5.10. Temporalización.

Nuestra unidad didáctica se desarrollará a lo largo de 10 sesiones de 50 minutos cada una. Dado que en 3º de ESO hay 4 horas semanales de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, dicha unidad nos ocupará dos semanas y media. A continuación, realizamos un resumen en el que mostramos el planteamiento de cada

sesión. Para ello, nos ayudaremos de las actividades que hemos implementado en el apartado “5.8-Actividades y recursos”.

Sesión 1: Introducción al concepto de fracción y definición de fracciones equivalentes.

Iniciaríamos la unidad leyendo y haciendo una breve reflexión sobre el siguiente texto de Esteban Serrano. De esta manera los alumnos se darán cuenta de la importancia de los números racionales en la vida cotidiana. **(15 minutos)**

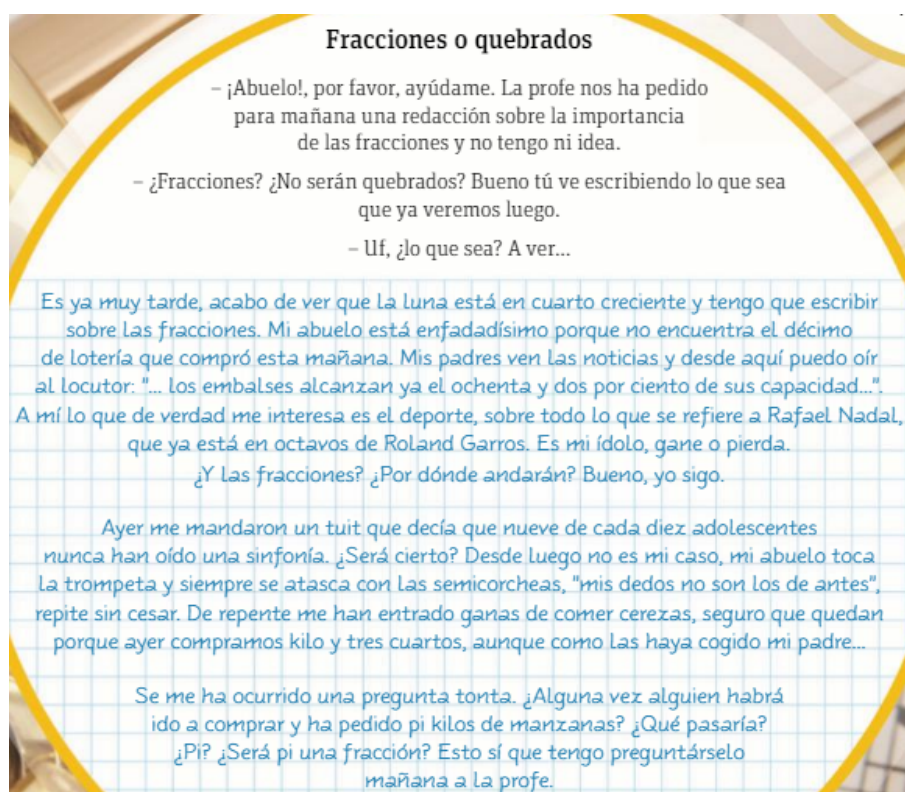


Figura 5.11: “Texto de Esteban Serrano ”. Fuente: SM Educamos.

Posteriormente, introduciremos los conceptos de fracción, número racional, fracción equivalente y fracción irreducible. Acompañaremos las definiciones con ejemplos

para dejar claro todos los conceptos y que se entiendan con claridad. **(20 minutos)**

Por último, para afianzar todo esto, propondremos las actividades 1 y 2, y resolveremos todas las dudas que puedan surgir al respecto. **(15 minutos)**

Sesión 2: Comparación de fracciones y fracción como operador.

Se recuerda como hallar el mínimo común múltiplo, para poder reducir a común denominador aquellas fracciones que lo necesiten para poder compararlas adecuadamente, y se explica como comparar diferentes fracciones. **(15 minutos)**

Luego explicamos que una fracción puede representar una parte concreta de una cantidad y realizamos un par de ejemplos para que los alumnos asimilen el procedimiento que hay que seguir en estos casos. **(15 minutos)**

Posteriormente, propondremos la actividad 3 para comprobar que han entendido el procedimiento adecuadamente y no hay ninguna duda al respecto. Además, aprovechamos para introducir algún apartado de la clase anterior y así hacemos un breve repaso. **(20 minutos)**

Sesión 3: Operaciones con fracciones: Suma, diferencia y producto.

Empezamos la sesión planteando los procedimientos para sumar, restar y multiplicar fracciones. Acompañaremos dicha explicación de varios ejemplos concretos y resolveremos todas las dudas que puedan surgir al respecto. **(20 minutos)**

Posteriormente, propondremos realizar las actividades 4 y 5 para que los alumnos practiquen e interioricen estos procedimientos. Como siempre, las corregiremos con ellos y solventaremos todas las dudas que puedan ir surgiendo durante el desarrollo de la clase. **(15 minutos)**

Para finalizar la sesión, realizaremos un juego en el cual pongamos en práctica lo

aprendido en esta clase. Para poner en marcha dicho juego organizaremos a los alumnos en grupos de 4 y solamente necesitaremos una baraja de cartas, una hoja por alumno y un dado para saber quien empieza la primera ronda. Una vez estén organizados:

- Se barajan las cartas y se colocan boca abajo sobre la mesa.
 - Se tira el dado para saber que jugador comenzará.
 - El primer jugador coge la carta de encima del taco y la coloca en alguno de los cuatro sitios de su hoja de juego.
 - Por turno, cada jugador va cogiendo la carta superior del taco y colocándola en un sitio de su hoja de juego.
 - Cuando todos los jugadores tienen cuatro cartas colocadas, deben por turno, decir el resultado simplificado del producto de las dos fracciones de su hoja de juego.
 - Si el resultado es correcto el jugador se lleva 10 puntos.
 - El jugador (o los jugadores) que haya obtenido el resultado más pequeño se lleva además otros 10 puntos.
 - Al acabar cada ronda, se barajan de nuevo las cartas y se vuelven a colocar boca abajo sobre la mesa.
 - El juego se acaba cuando se han hecho un número predeterminado de rondas.
 - Gana el jugador con la máxima puntuación.
-

Podemos observar este y otros juegos en el siguiente enlace:

[“https://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/numeros/fracciones/”](https://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/numeros/fracciones/). **(15 minutos)**

Sesión 4: Cociente y operaciones combinadas con fracciones.

Comenzamos planteando el proceso a seguir a la hora de realizar el cociente de fracciones. Para ello, utilizaremos varios ejemplos con la finalidad de que todos los alumnos lo entiendan lo mejor posible y no se queden con ninguna duda. **(15 minutos)**

Después, ya estaríamos en condiciones de poder realizar operaciones combinadas con fracciones. Para ello, explicaríamos la jerarquía existente a la hora de realizar estas operaciones combinadas y plantearíamos algunos ejemplos. **(15 minutos)**

Por último, para finalizar esta sesión, propondríamos realizar las actividades 6 y 7. Con esto, repasaríamos todas las operaciones vistas con fracciones y habremos hecho suficientes ejercicios para interiorizar estos procedimientos. **(20 minutos)**

Sesión 5: Expresión decimal y fracción generatriz de un número racional.

Iniciamos la sesión explicando que al dividir el numerador entre el denominador de una fracción se obtiene un número que puede ser entero, decimal exacto, decimal periódico puro o decimal periódico mixto. Además, mostramos algunos ejemplos que ilustren este hecho. **(20 minutos)**

Posteriormente, explicamos el concepto de fracción generatriz y mostramos algunos ejemplos en los que obtengamos la fracción generatriz de un número entero, decimal exacto, decimal periódico puro y decimal periódico mixto. **(20 minutos)**

Para finalizar, propondremos realizar las actividades 8 y 9. Ayudaremos a los alumnos en todas las dudas que le surjan e intentaremos solventarlas de la manera más efectiva posible. **(10 minutos)**

Sesión 6: Números racionales e irracionales.

Comenzamos dando la definición de números irracionales y ponemos varios ejemplos de números que pertenecen a este conjunto. **(10 minutos)**

Posteriormente, propondremos a los alumnos realizar la actividad 10. Les indicaremos, además, que una vez la hayan finalizado, pongan tres ejemplos de números irracionales. **(10 minutos)**

Después de esto, cogeremos los ordenadores portátiles del centro y propondremos a los alumnos realizar la lectura del siguiente enlace: “https://cdn.educamos.sm/savia/pieces/files/3895b646e0af.pdf?fn=3esoma_sv_es_ud01_da_amp.pdf”.

FICHA DE AMPLÍA El descubrimiento de los números irracionales

A lo largo de la historia, las matemáticas también han tenido sus crisis, tremendas crisis que muchos grandes matemáticos no supieron resolver. La primera gran crisis de las matemáticas tuvo como consecuencia el descubrimiento de los irracionales. Debemos viajar a Grecia y retroceder al siglo VI a. C.

Una mente privilegiada dominaba el conocimiento de la época, Pitágoras. Era filósofo, matemático y músico y había creado una escuela bajo el lema de TODO ES NÚMERO.

Defendía que el Universo entero y sus leyes se regían mediante números. En esa época sólo se conocían los números enteros positivos y las fracciones positivas (por supuesto desconocían la notación decimal y mucho menos los números negativos). Pitágoras y su escuela eran capaces de explicar la música y sus sonidos, también la situación de los planetas, etc., mediante fracciones. ¡Los números racionales estaban por todas partes!

Y de repente llegó la tragedia. Hipaso de Metaponto (según algunos historiadores), seguidor de la escuela de Pitágoras se le ocurrió calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1.



Por el teorema de Pitágoras dedujeron que la hipotenusa x debe cumplir:

$$x^2 = 1^2 + 1^2, \text{ es decir } x^2 = 2.$$

La longitud x es un número tal que al elevarlo al cuadrado se obtenga 2 (es decir, $\sqrt{2}$).

Entonces comenzaron a buscar una fracción que al elevarla al cuadrado diera 2 y fueron incapaces de encontrarla. ¡No había ningún número!

Toda su concepción del mundo se venía abajo: estaban viendo una longitud que podían tocar pero podían encontrar un número que midiese dicha longitud. Su lema de TODO ES NÚMERO quedaba en evidencia por un triste triángulito.

Los matemáticos siguieron luchando contra esa longitud irracional y al final optaron por empezar de nuevo. Inventaron una nueva manera de razonar, el **método axiomático deductivo**, y apartaron un poco los números y se centraron en la **geometría**.

¿Sabéis cuándo quedó totalmente resuelto el problema de los irracionales? Fue en el año 1858 cuando el matemático alemán Richard Dedekind (1831 – 1916) zanjó la cuestión definitivamente con un nuevo concepto llamado **cortadura**.

El problema de los irracionales, se solventó después de más de dos mil años de esfuerzo de la comunidad matemática.

1. Busca en internet la leyenda que se cuenta sobre la muerte de Hipaso de Metaponto

Figura 5.12: “Lectura sobre irracionales”. Fuente: SM Educamos.

Una vez lo hayan leído, les dejaremos como trabajo de investigación la actividad propuesta al final de la lectura: “Busca en internet la leyenda que se cuenta sobre la muerte de Hipaso de Metaponto”. Terminaremos dicho trabajo con una puesta en común de la información más relevante encontrada sobre este tema. **(30 minutos)**

Sesión 7: Repaso de la unidad didáctica.

Dedicaremos una sesión completa a hacer un breve repaso de todas las sesiones expuestas anteriormente, realizando los ejercicios más significativos de cada sesión y solventando todas las dudas que pueda presentar el alumnado. En este caso, es muy importante que los propios alumnos sean los que van marcando el desarrollo de la clase, agilicen aquellas partes que dominen con claridad y nos paren en las que presentan mayor número de dudas para poder ir abordándolas de manera correcta. **(50 minutos)**

Sesión 8: Práctica en el aula de informática.

En esta sesión iremos con los alumnos al aula de informática. Allí, cada alumno dispondrá de su propio ordenador. Dedicaremos esta clase a realizar las actividades 11, 12 y 13 con el programa Geogebra. Con esta metodología los alumnos repasan todos los conceptos aprendidos de una manera más amena y divertida. Además, aprenden a desenvolverse con programas informáticos que pueden serles muy útiles en el futuro. **(50 minutos)**

Sesión 9: Evaluación.

En esta última sesión de nuestra unidad didáctica realizaremos la prueba escrita, la cual se encuentra en la sección de actividades, para determinar si los alumnos han alcanzado las metas que nos habíamos propuesto al inicio de la misma. **(50 minutos)**

5.11. Evaluación.

Mediante la evaluación analizamos si los alumnos han alcanzado los objetivos específicos de esta unidad didáctica. Para ello, contamos con los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, los cuales hemos tomado de la normativa vigente:

BLOQUE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE
B.1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas	1.1. Expresar verbalmente y de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. (CCL, CMCT). 1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. (CMCT, CAA).	1.1.1 Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.

Figura 5.13: “Criterios y estándares de evaluación 1 ”. Fuente: internet.

B.1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas	1.6. Desarrollar procesos de <u>matematización</u> en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. (CMCT, CAA, CSC, SIEP) 1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. (CMCT).	1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema. 1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 1.8.2. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.
	1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. (CMCT, CD, CAA).	1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos lo impide o no se aconseja hacerlos manualmente. 1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

Figura 5.14: “Criterios y estándares de evaluación 2”. Fuente: internet.

BLOQUE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE
B.2. Números y Álgebra	2.1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida. (CMCT, CAA).	2.1.1. Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), indica el criterio utilizado para su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 2.1.2. Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman periodo. 2.1.3. Halla la fracción generatriz correspondiente a un decimal exacto o periódico. 2.1.9. Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones. 2.1.10. Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.

Figura 5.15: “Criterios y estándares de evaluación 3”. Fuente: internet.

Estos estándares de aprendizaje, relativos al Bloque 1, se evaluarán a lo largo de toda la unidad. Con respecto a los del Bloque 2, se evalúan también a lo largo de toda la unidad y a través de las diferentes actividades que se han ido proponiendo en clase.

Además, hemos revisado el siguiente material para completar la evaluación del alumnado en esta unidad y obtener una calificación final:

- Participación (10 %).
- Cuaderno de los alumnos (15 %).
- Actividades realizadas en clase (25 %).
- Prueba escrita (50 %).

5.12. Conclusiones.

En primer lugar, comentar que creo que se han logrado alcanzar todos los objetivos que nos propusimos al comienzo de este Trabajo Fin de Máster.

Con respecto al apartado de dimensión didáctica hemos analizado diferentes tipos de investigaciones sobre nuestro tema, algunas más científicas y otras basadas en las dificultades y errores que suelen presentar los estudiantes cuando se enfrentan a las fracciones. Viendo alguna de estas dificultades queda claro que hay metodologías de enseñanza que no son del todo buenas y, más allá de ayudar, complican el aprendizaje del alumnado. Esta claro que esto último es lo que debe de evitar un buen profesor en todo momento.

La parte epistemológica me ha servido para saber a lo que me voy a tener que enfrentar como futuro opositor en los próximos años. Creo que es una parte muy necesaria ya que todo profesor debería conocer en profundidad aquel tema sobre el ue va a dar clase y estar actualizado sobre dichos contenidos. No hay mayor error que intentar enseñar algo que ni uno mismo domina, este camino solo lleva a la indecisión y a procedimientos erróneos.

Por último, hemos sido capaces de planificar las clases de esta unidad y de preparar una serie de actividades bastante significativas para el aprendizaje de nuestros alumnos. Además, creo que hemos utilizado diferentes metodologías de trabajo y distintos recursos didácticos lo que hace que la unidad se haga más amena y entretenida. Creo que si seguimos esta rutina de trabajo y somos capaces de crear un ambiente distendido y cordial en clase, los alumnos empezarán a enamorarse de las matemáticas poco a poco y no las verán como ese gran enemigo al que hay que enfrentarse día tras día. Si conseguimos lo mencionado anteriormente, habremos alcanzado nuestro

objetivo personal de ser buenos profesores, y creo que no hay mayor satisfacción que saber que estamos contribuyendo a obtener una enseñanza de calidad.

Bibliografía

- [1] ABELLANAS, *Elementos de Matemáticas.*, Ed. H. Fournier.
- [2] BEATO, J., *Errores correctos en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en Matemáticas. Suma*, (63), 2010.
- [3] CARNEIRO, F., FLORES, P., *Humor y fracciones en la formación de profesores de matemáticas. Suma*, (80), 2015.
- [4] GOLDSTEIN, *Abstract Álgebra.*, Ed. Prentice-Hall.
- [5] IFRAH, G., *Las Cifras. Historia de una gran invención.*, Alianza Editorial.
- [6] LAINE, B., *Álgebra moderna.*, Vicens Vives.
- [7] PASTOR, R., *Análisis Algebraico.*, Kapelus.
- [8] ROJAS, N., FLORES, P., CARRILLO, J., *Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales.*, 2012.
- [9] *Foundations of Analysis.*, London.
- [10] **Material proporcionado en el Máster:**
Armenteros, M. (2018). Apuntes de clase de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas I y II. Especialidad de Matemáticas. Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato,

Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Luque, L. (2018). Apuntes de clase de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas I y II. Especialidad de Matemáticas. Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

[11] **Normativa:**

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, núm. 3, pp. 169 a 546.

España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986 a 7003.

España. Decreto 111/2016 de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 28 de junio de 2016, núm. 122, pp. 27 a 45.

España. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 28 de julio de 2016, núm. 144, pp. 108 a 396.

Reglamento de organización y funcionamiento. Centros educativos Vicencianos. Hijas de la Caridad (España-Sur) pp. 69 a 80.

[12] **Webgrafía:**

<https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/18>Junta de Andalucía.

[https://login.educamos.sm/SM Educamos](https://login.educamos.sm/SM_Educamos). Libro de texto.

<https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2017/11/07/cartas-multiplicar-y-dividir-fracciones/>

https://cdn.educamos.sm/savia/pieces/files/3895aa7d540e3762f5029f48de8679a3b646e0af.pdf?fn=3esoma_sv_es_ud01_da_amp.pdf

<https://www.geogebra.org/m/gP4um8bWchapter/155285>

[https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/santillana/Adaptacion %20Curricular %20Matem %C3 %A1ticas %203 %20ESO.pdf](https://www.matematicasonline.es/almacen/acis/santillana/Adaptacion%20Curricular%20Matem%C3%A1ticas%203%20ESO.pdf)

file:///C:/Users/Ismael/Downloads/3_ESO_FICHA_CONCepto_FRACci_n_problemas_Y_SOLUCIONES.pdf