

EL MODELO DE GOODWIN EN LA ECONOMÍA ESPAÑOLA DEL SIGLO XXI

Manuel José de Dios de Dios

PREÁMBULO

Los cambios que desde el conocido pacto de Bolonia se han ido introduciendo en las Universidades Europeas, han conllevado una homogeneización de los estudios universitarios en toda Europa. Creándose el llamado Espacio Europeo de Enseñanza Superior (EEES).

En este espacio, el estudiante cobra una cada vez mayor importancia, por lo que en los comienzos de la homogeneización, fue necesario cambiar el proceso de enseñanza universitaria, tradicionalmente caracterizado por un aprendizaje casi exclusivamente memorístico, y que obviamente, no implicaba que el estudiante fuera capaz de aplicarlo al mundo laboral. Para adaptarlo a una enseñanza por competencias, que requiere de un aprendizaje en el que el estudiante universitario sea capaz de realizar unas tareas determinadas en un contexto concreto. El fin es adquirir las competencias básicas establecidas, que le faciliten su incorporación y posterior permanencia con éxito en el mundo laboral, lo que es conocido con el término empleabilidad.

Dos de los acontecimientos más importantes que permitieron dicho cambio fueron, el Proyecto Tunning y los descriptores de Dublín. En los que se establecieron las competencias generales y las específicas que un estudiante tiene que superar para obtener una concreta titulación académica.

En la normativa española, nos encontramos el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. El cual establece en su artículo 12.7:

‘El Trabajo Final de Grado deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estará orientado a la evaluación de las competencias asociadas al Título.’

Con la presente memoria se pretende culminar los estudios del Grado en Finanzas

y Contabilidad. Se ha elegido realizar un pequeño trabajo de investigación, como una de las opciones recogidas en la guía docente del Trabajo Fin de Grado. Como cualquier investigación, se parte de una anterior, para aportar un pequeño grano de arena en la medida de lo posible. También se ha tratado de demostrar que han sido adquiridas las competencias necesarias para obtener dicho título, como marca la normativa del TFG. Se han utilizado no sólo las competencias adquiridas en las asignaturas relacionadas con la economía si no también las adquiridas gracias a las asignaturas relacionadas con el Departamento de Matemáticas. Concretamente se ha utilizado, como punto de partida, las nociones de función y de derivadas estudiadas dentro de la asignatura de Matemáticas I, así como las relaciones entre ellas. De esta manera aparece el concepto de ecuación diferencial visto en Matemáticas II. Señalar, que si bien, esto último se trataba de una introducción a las mismas, se ha dado un paso más adentrándonos en las ecuaciones no lineales. Esto ha permitido trabajar con la verdadera conexión entre la matemáticas y otras ramas del conocimiento, los *Modelos Matemáticos*.

RESUMEN

En un área tan cambiante como es la económica, donde continuamente se están creando y refutando nuevos modelos. Hemos pretendido con este trabajo, comprobar la validez de las hipótesis de Richard Goodwin para la economía española durante el presente siglo.

En esta memoria se desarrolla brevemente el modelo propuesto por Goodwin a partir de sus hipótesis. En dicho modelo se analiza la relación entre cuota dedicada a salarios y la tasa de empleo.

A partir de los datos recopilados de la realidad española a través del Instituto Nacional de Estadística, durante el periodo 2000-2015, se ha obtenido una solución del modelo de Goodwin. Con esta solución se establecen una serie de conclusiones.

Palabras clave: Modelos matemáticos para las finanzas, modelo de Goodwin, ecuaciones diferenciales ordinarias.

ABSTRACT:

In an area as changing as the economic because new models are continually being created and refuted. We have tried to verify Richard Goodwin's hypotheses for the Spanish economy during the present century.

In this paper, the model proposed by Goodwin is briefly developed from his hypotheses. This model analyzes the relationship between the share of wages and the rate of employment.

From the data collected from the Spanish reality through the National Institute of Statistics, during the period 2000-2015, a solution was obtained from the Goodwin model. This solution sets out a number of conclusions.

Key words: Financial Mathematics, Goodwin model, ordinary differential equations.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	6
2. FUNCIONES, ECUACIONES DIFERENCIALES Y MODELOS	9
2.1. Nomenclatura y definiciones	10
2.2. Modelos matemáticos	11
3. RICHARD GOODWIN	13
3.1. Notas biográficas	13
3.2. Su visión económica	14
4. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO Y SU RESOLUCIÓN	16
4.1. Planteamiento	16
4.2. Resolución	21
5. APLICACIÓN DEL MODELO. DATOS EMPÍRICOS	23
5.1. Productividad(parámetro α)	23
5.2. Población activa(parámetro β)	26
5.3. Capital invertido-producto(parámetro k)	28
5.4. Curva de Phillips(parámetros γ y ρ)	29
6. CONCLUSIONES	33
Bibliografía	38

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Un amigo mio es un apasionado de los galgos y por supuesto de sus carreras, un día tras perder una apuesta se encontró a un conocido, que casualmente era matemático, al que le expuso su problema, el deseo de encontrar alguna forma de predecir el resultado.

Es muy probable que pueda ayudarte - dijo el matemático - Es tan solo una masa en movimiento sobre un plano al que le afecta las fuerzas de la gravedad, la inercia, la velocidad, la fuerza del viento ... Tal vez podría desarrollar un modelo para predecir el resultado.

En un par de meses el matemático le dio el modelo. Mi amigo apostó todo su dinero al galgo que según el modelo iba a ganar. Pero tras finalizar la carrera ese galgo acabó en última posición. Como era de esperar, éste, se enfadó muchísimo con el matemático, el cual, no tenía idea de lo que había podido pasar. Así que me dio el documento donde el matemático había escrito su modelo. En la primera línea podía leerse:

-Considérese un galgo perfectamente esférico-.

Este chiste y sus múltiples versiones conocidas por todos, explican perfectamente lo que es un modelo matemático, que no es otra cosa que una representación muy esquematizada de la realidad. Pero, ¿Sirven para algo los modelos matemáticos? Diremos aquello de que la utopía siempre se encuentra a 10 km. de donde nos encontramos, pues tanto lo uno como lo otro sirve para andar camino.

Como todos sabemos representar la realidad matemáticamente es muy complicado por la cantidad de factores que influyen y que son imposible controlar. Por lo que, con un modelo se trata de representar una realidad sesgada, es decir, una realidad que se daría si ocurrieran determinados supuestos o hechos, que en verdad nunca se dan, como por ejemplo cuando en los modelos económicos se indica algo así como supongamos una economía cerrada, o una economía con ausencia de inflación o como ocurre en el modelo que posteriormente desarrollaremos que la población crece a tasa constante.

Muchos son, y han sido, los economistas que han tratado de explicar como un pequeño cambio en una variable hace que se produzcan otros pequeños o grandes cambios en otras variables tanto desde el punto de vista macroeconómico como desde el punto de vista microeconómico.

Famosos por este hecho han sido, entre otros, John Maynard Keynes (1883-1946) con su obra más importante “*Teoría General del empleo, interés y dinero*” (1936) que le hizo chocar con los denominados economistas clásicos. Keynes explicó que el empleo depende de la demanda, es decir, cuantos más productos sean demandados por una sociedad, más empleo se creará. Esto va unido al siguiente principio: Cuando el empleo aumenta, aumenta la renta de la sociedad. Todo lo anterior, por tanto, conlleva que al incrementar la renta mejora el consumo, pero obviamente menos que la renta, ya que parte de esta se destina al ahorro. **Pero para que se cree y sostenga el empleo, es imprescindible que aumente la inversión.** Karl Marx (1818-1883) con su “*Lucha de clases*” y su “*Teoría de la crisis*” establecida en su obra “*El Capital*” compuesto por tres volúmenes, el primero editado en 1867 y los dos siguientes como obras póstumas.

Pero nada o muy poco podrían haber hecho los economistas sin la inestimable ayuda de los matemáticos, los cuales tras mucho observar e investigar establecían fórmulas, ecuaciones y en definitiva modelos matemáticos, que pueden ser aplicados al mismo tiempo a campos tan dispares como el económico, el físico e incluso biológico como es el caso del modelo presa-depredador de los matemáticos Alfred J. Lotka y Vito Volterra (1926).

En este trabajo intentaremos ver si lo indicado en el modelo de Goodwin ha sido lo que ha ocurrido en la economía española en los primeros años del actual siglo.

En el **capítulo 2** veremos que son las funciones y ecuaciones diferenciales ordinarias(EDO), que como hemos mencionado en el preámbulo son la base del desarrollo

matemático de nuestro modelo. En este capítulo se verá la nomenclatura y una serie de definiciones básicas para entender que son las EDO.

El **capítulo 3** versará sobre Richard Goodwin, autor del modelo tratado en este trabajo, se verá su biografía, los aspectos más importantes de su vida y su visión de la economía que le llevó a establecer su modelo.

En el **capítulo 4** se procederá a construir, desarrollar y explicar el modelo de Goodwin partiendo de las variables a considerar y llegando al planteamiento de un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales. Si bien no es original, se ha tratado de hacer pedagogía explicándolo detalladamente, tanto el desarrollo como el planteamiento y la resolución del mencionado sistema.

Ya posteriormente en el **capítulo 5**, se unen esas ecuaciones diferenciales a los datos obtenidos del Instituto Nacional de Estadística sobre la economía española.

El **capítulo 6**, es el dedicado a las conclusiones, es decir, una vez que veamos los resultados obtenidos en el capítulo anterior, sacaremos las conclusiones sobre el grado de confianza de este modelo con respecto a la economía española.

Finalizaremos con un listado bibliográfico con las referencias que en mayor o menor medida se han utilizado para la elaboración de esta memoria.

Capítulo 2

FUNCIONES, ECUACIONES DIFERENCIALES Y MODELOS

En esta sección se hace una recopilación de las herramientas matemáticas. Dichas herramientas van a ser necesarias para acometer el estudio del problema, el cual se detallarán más adelante. Como se ha indicado en la introducción, está basada, dicha recopilación, en contenidos de las asignaturas de Matemáticas I y Matemáticas II. Se finaliza, este capítulo, con una referencia a los modelos matemáticos.

Las funciones proporcionan un marco en el que se relacionan diversas magnitudes. Ciñámonos al caso más sencillo, funciones de una sola variable. Una (*variable dependiente*) se obtiene en función de la otra (*variable independiente*). Está claro que se pueden aplicar a bastantes campos del conocimiento, ilustremos con algunos ejemplos:

Física: *Temperatura* de una varilla en función de la *distancia* al extremo de la misma.

Biología: *Cantidad* de bacterias de un cultivo en función del *tiempo*.

Economía: *Precio* de un determinado producto dependiendo del *tiempo*.

En cualquier ámbito, ya sea de la naturaleza o de la ciencias sociales, las magnitudes que intervienen están en constante cambio. Para analizar ese cambio, Newton y Leibniz de forma independiente, nos legaron esa maravillosa herramienta que es el **Cálculo Diferencial**. De esta manera no solo se obtendría la descripción de la dependencia entre las variables, mediante las funciones, sino que también se vería el cambio de una respecto de la

otra, es decir, el cambio de la variable dependiente respecto de la variable independiente. Con lo que entra en juego el concepto de *derivada*.

Avancemos un poco más. En un determinado contexto pueden estar relacionadas varias funciones, que asumamos que todas dependen de una única variable independiente. Algunas funciones las conoceremos y otras serán desconocidas, actuarán como *incógnitas*. Si relacionamos las funciones conocidas, las funciones desconocidas y sus derivadas estaremos ante lo que se conoce como *ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)*. Esto nos ayudará a matematizar la situación, es decir formular un modelo matemático.

2.1. Nomenclatura y definiciones

Utilizaremos las definiciones de [4]

Con $\mathbb{R}$ denotamos el conjunto de los números reales, y con I cualquier intervalo de número reales.

Definición 1 Una *función* es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. El conjunto de todos los números de entrada a los cuales se aplica la regla se le denomina **dominio** de la función. Al conjunto de todos los números de salida se le llama **recorrido**.

Ejemplo: Podemos poner como ejemplo de función la función cuadrática:

$$f(t) = -3t^2 + 5t + 2 \quad (2.1)$$

Indicar que no siempre tiene que obedecer a una expresión algebraica explícita.

Definición 2 : La **derivada** de una función f que se denota por f' que está definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(suponiendo que exista ese límite)

Se interpreta como la tasa de variación instantánea de la variable dependiente respecto de la variable independiente.

Definición 3 : A la regla que a cada valor x de entrada el número de salida $f'(x)$ (en caso de existir) se le llama **función derivada**.

Normalmente notaremos a la derivada como f' , aunque alguna vez se utilizará la notación $\frac{dy}{dt}$

Ejemplo: La función derivada de (2.1) es $f'(t) = -6t + 5$

Definición 4 : Ecuación diferencial ordinaria

El concepto de ecuación diferencial se reduce a una ecuación algebraica en la que la incógnita es una función de variable real y en la que intervienen: la función, la variable independiente y una o más derivadas de la función incógnita.

Ejemplo: Como ilustración de ecuación diferencial ordinaria podemos mostrar la que representa el crecimiento de poblaciones, debida al economista Thomas Malthus:

$$y'(t) = ky(t) \quad (2.2)$$

Definición 5 : Solución de Ecuación diferencial ordinaria

Es una función que satisface la ecuación. Una ecuación diferencial ordinaria puede tener infinitas soluciones. Para fijar la unicidad de la solución también debemos añadir unas condiciones adicionales sobre la función solución.

Ejemplo: La función $f(t) = e^{k \cdot t}$ es la solución de la ecuación diferencial (2.2)

Definición 6 Se define la **tasa de crecimiento** como el cociente $\frac{f'}{f}$

Ejemplo: La función $f(t) = e^{k \cdot t}$ tiene una tasa de crecimiento, en este caso constante, k .

A los sistemas que dependen de la variable tiempo, se les denomina **Sistemas Dinámicos**, precisamente por su evolución a través del tiempo. Para establecerlos se plantean los modelos matemáticos que se presentan en la siguiente sección.

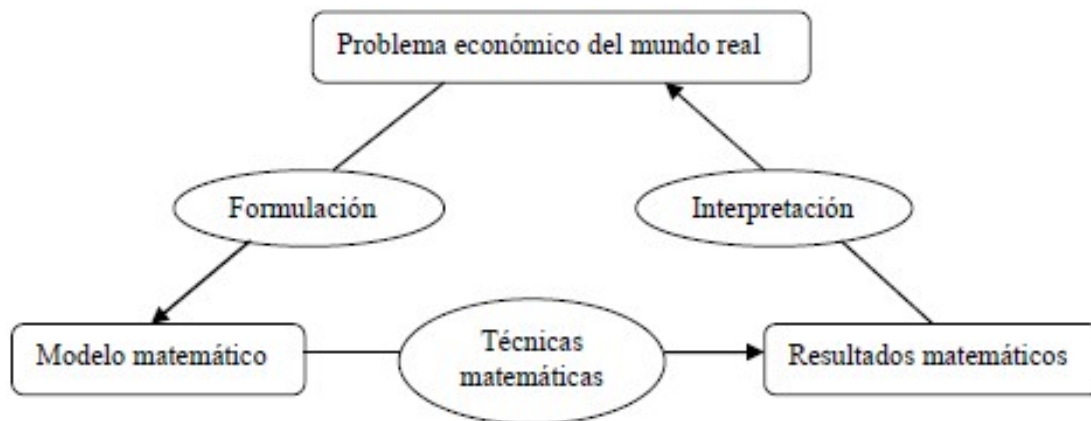
2.2. Modelos matemáticos

Finalizaremos este capítulo enumerando las fases de un tratamiento matemático no solo de problemas económicos si no de cualquier otra situación en otro contexto ‘real’. Es decir, adentrándose en la modelización matemática. Lo que viene a continuación está basado en el trabajo de Tenorio Villalón y otros (2013)[8]

- (I) Plantear el problema en términos económicos o de otro contexto.
- (II) Hacer una traslación de la situación ‘*real*’ a lenguaje matemático. Dado que suelen ser situaciones que evolucionan con el tiempo, las ecuaciones diferenciales van a estar presentes.
- (III) Dar una solución en términos matemáticos, utilizando las técnicas adecuadas.
- (IV) Reinterpretar la solución matemáticas en términos del contexto real. Esto puede llevar incluido el establecer predicciones de la evolución futura de la situación.

En ramas del conocimiento, más deterministas como la Física, la predicción podría resultar mas fiable. La dificultad principal de conseguir esa predicción, en las Ciencias Sociales, campo objeto de estudio en este trabajo, radica como hemos dicho en la introducción, en que para la elaboración de un modelo se escoge una serie de variables, dejando fuera del modelo otras que podría variar ese resultado futuro, sin olvidar que al tratarse de estudiar seres vivos, en economía social, hay variables que no pueden ser explicadas o controladas de forma matemática.

Vamos terminar este capítulo reproduciendo el gráfico que aparece en el trabajo de la referencia anterior, recordemos, Tenorio Villalón y otros (2013)[8], ya que muestra de una manera muy visual el proceso de la modelización matemática.



Capítulo 3

RICHARD GOODWIN

‘Economista muy notable, original, enigmático, no conformista’

Pasinetti¹

3.1. Notas biográficas

Richard Goodwin nació en Newcastle (Indiana) el 24 de febrero de 1913, falleciendo en Siena (Italia) el 13 de agosto de 1996. Hijo y nieto de banqueros, gracias al hecho de que su padre se arruinara durante la Gran Depresión de los años 30, entró en contacto con las teorías de Marx. Estudió ciencias políticas en Harvard desde 1930 hasta 1934, posteriormente marchó a Oxford, para proseguir sus estudios hasta 1938, año en que regresó a Harvard para doctorarse en economía. Impartiendo clases en dicha Universidad hasta 1950. Pero Goodwin no se encontraba cómodo en Harvard, debido fundamentalmente a las ideas conservadoras que imperaban en esa Universidad (Goodwin era conocido por todo lo contrario, con lo que su posibilidad de promoción estaba muy limitada). Decidiendo por tanto trasladarse a Inglaterra concretamente a la Universidad de Cambridge donde impartió docencia desde 1951 hasta 1980, año en que se jubiló. Sus inquietudes intelectuales le llevaron a trasladarse a Italia, donde la edad de jubilación para la universidad era de setenta y cinco años, ganando una plaza por el procedimiento de concurso abierto, en la Universidad de Siena. Pero siguió en activo como catedrático emérito en dicha Universidad hasta su fallecimiento en 1996.

¹Necrologica de R. Goodwin para el *Cambridge Journal of Economics*.

3.2. Su visión económica

Goodwin estudió a lo largo de su vida el funcionamiento del sistema capitalista, influenciado por tres economistas de referencia: Marx con sus leyes del movimiento del capitalismo, Schumpeter con sus estudios sobre el progreso técnico y la propagación de las innovaciones, y por supuesto, Keynes, con su demanda efectiva y su visión del paro involuntario.

Por lo que con todo lo anterior lo que pretendía Goodwin era analizar, explicar y anticipar la posible evolución del capitalismo industrial, fijando cuales eran las bases que tenían que ser analizadas, el progreso técnico y la demanda efectiva.

Su modelo más importante, y que es en el que se basa esta memoria, fue publicado en 1967 (Feinstein C.H. (ed) [1967])[5]. Se basa en estudiar la relación de dependencia entre la clase obrera y la clase capitalista, ya que ambas tratan de aumentar sus beneficios unos a costa de los otros, teniendo en cuenta que por las propias reglas del mercado ninguna de las dos partes puede quedarse con todo. Por tanto su modelo se basa en las luchas salariales entre las dos clases sociales establecidas por Marx con intereses supuestamente contrapuestos, digo supuestamente, porque en verdad ambas clases se complementan, de modo que los beneficios que obtienen los capitalistas se producen gracias al trabajo de los asalariados, y por supuesto, existen puestos de trabajo gracias al riesgo que corren los capitalistas cada vez que invierten en nuevos negocios sus beneficios.

De sus conclusiones se destaca que a largo plazo, ambas posiciones son constantes, siendo en el corto plazo donde se producen las oscilaciones dando lugar a cambios de ciclo. A la pregunta de ¿Porqué se producen esas oscilaciones? Se responde fácilmente utilizando la doctrina de Marx (hay que destacar que Goodwin fue admirador de este economista y miembro de los Partidos Comunistas de Gran Bretaña y de Estados Unidos). El aumento de los salarios hace que la clase capitalista invierta menos en producir (relación negativa) y por tanto al invertir menos, aumenta el desempleo.

‘El capitalismo se encuentra casi siempre en estados inestables, la explicación de ello es que es un juego jugado simultáneamente por millones de jugadores quienes no pueden tener la información necesaria para jugarlo bien, es decir, óptimamente. El resultado es un sistema que se bifurca entre estados estables e inestables: un estado de crecimiento inestable es de puro interés teórico, puesto que es una trayectoria del sistema que nunca permanecerá.’ (Citado por M. Desai y Ormenod [1998])[3]

Capítulo 4

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO Y SU RESOLUCIÓN

4.1. Planteamiento

A continuación se procede a dar los pasos necesarios para obtener de manera justificada el modelo de Goodwin. Fijemos que la variable independiente es el tiempo (t).

Como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, en el modelo de Goodwin se produce un único bien, para ello se utiliza capital inversor $c = c(t)$ y trabajo, Llamemos $q = q(t)$ que también lo denominaremos el nivel de producto. A partir de esto vamos a hacer dos suposiciones principales:

1ª Suposición

La razón capital-producto es una constante k , es decir:

$$\frac{c(t)}{q(t)} = k. \quad (4.1)$$

2ª Suposición

Toda la ganancia se reinvierte de manera íntegra y total, utilizando también plenamente el capital productivo.

Utilizando como punto de partida lo anterior, mostramos a continuación una serie de elementos que aparecen en juego en el proceso, junto con sus correspondiente expresiones y que nos van a conducir al planteamiento del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo que nos ocupa.

Productividad del trabajo: Riqueza generada por sujeto. Suponemos que sigue la exponencial $p(t) = p_0 e^{\alpha t}$. Con lo cual su tasa de crecimiento es la constante α . Crece de manera exógena.

Población activa: Sujetos en condiciones de trabajar. Sigue la exponencial $n(t) = n_0 e^{\beta t}$. También crece de manera exógena y en esta caso su tasa es la constante β

Nivel de empleo: Relaciona la demanda de trabajo q y la productividad p .

A mayor necesidad de trabajo mayor nivel de empleo y a mayor productividad menor nivel de empleo. Viene dado por la expresión:

$$l(t) = \frac{q(t)}{p(t)} \quad (4.2)$$

Salario unitario: Lo que percibe un solo sujeto, lo llamaremos w

Cuota del producto dedicada a salarios: Será la razón entre los salarios(que a su vez es el producto del salario unitario por el nivel de empleo) y el nivel de producto. Su expresión será:

$$u(t) = \frac{w(t) \cdot l(t)}{q(t)}, \quad (4.3)$$

donde si utilizamos la expresión (4.2), se obtiene:

$$u(t) = \frac{w(t)}{p(t)} \quad (4.4)$$

Tasa de empleo: Es la relación entre la población ocupada y la población activa u oferta laboral, ahí la siguiente expresión:

$$v(t) = \frac{l(t)}{n(t)} \quad (4.5)$$

Para relacionar la tasa de crecimiento de los salarios con la tasa de empleo, se hace la suposición de que sigue una versión lineal de la denominada curva de Phillips.

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -\gamma + \rho v, \quad \text{con } \gamma > 0, \text{ y } \rho > 0 \quad (4.6)$$

Williams Phillips (1914-1975) publicó en 1958 como había una correlación negativa entre la tasa de empleo y la inflación, es decir, si la tasa de inflación estaba alta, en

empleo estaba bajo y viceversa. Lipsey (1960) estableció que había una relación directa entre la tasa de crecimiento del salario y el exceso de demanda, que genera inflación.

Si $u(t)$ era la parte de $q(t)$ dedicada a salarios entonces $1 - u(t)$ es parte de $q(t)$ que se obtiene como beneficios. Por lo tanto para el incremento de capital podemos escribir:

$$c'(t) = (1 - u(t))q(t), \quad (4.7)$$

dividimos todo por $c(t)$ y tenemos en cuenta (4.1)

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{(1 - u(t))q(t)}{c(t)} = \frac{1 - u(t)}{k}.$$

También de (4.1), se tiene que $c(t) = k \cdot q(t)$, derivando $c'(t) = k \cdot q'(t)$ y dividiendo $\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{k \cdot q'(t)}{c(t)}$, que lleva a la conclusión:

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{1 - u(t)}{k}. \quad (4.8)$$

Por otra parte a partir de (4.4) se tiene que $u(t)p(t) = w(t)$ y derivando $u'(t)p(t) + u(t)p'(t) = w'(t)$, dividimos todo por $p(t)$ y operamos convenientemente,

$$u'(t) = \frac{w'(t) - u(t)p'(t)}{p(t)} \longrightarrow \frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{w'(t)}{u(t)p(t)} - \frac{u(t)p'(t)}{u(t)p(t)} \text{ llegamos a: } \frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{w'(t)}{w(t)} - \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

A partir de lo anterior tenemos en cuenta, que tanto la curva de Phillips(4.6) considerada, como que la tasa de crecimiento de la productividad es la constante α . De ahí se llega a nuestra primera ecuación diferencial del modelo.

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v \quad (4.9)$$

Ahora tomamos como punto de partida la expresión (4.2) y siguiendo un proceso similar es decir,

$l(t)p(t) = q(t)$ y derivando $l'(t)p(t) + l(t)p'(t) = q'(t)$, dividimos todo por $p(t)$ y operamos convenientemente,

$$l'(t) = \frac{q'(t) - l(t)p'(t)}{p(t)} \longrightarrow \frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{q'(t)}{l(t)p(t)} - \frac{l(t)p'(t)}{l(t)p(t)} \text{ llegamos a: } \frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{q'(t)}{q(t)} - \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Es el momento de utilizar la expresión (4.8) y que la tasa de crecimiento de la productividad es la constante α para conseguir la expresión,

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{1 - u(t)}{k} - \alpha. \quad (4.10)$$

Y de nuevo aplicando un proceso similar a partir de (4.5) se llega a,

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{l'(t)}{l(t)} - \frac{n'(t)}{n(t)},$$

y usando (4.10) y que la tasa de crecimiento de la población activa es β conseguimos la segunda ecuación del modelo

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{k} - (\alpha + \beta). \quad (4.11)$$

Recopilamos, por tanto, el sistema obtenido para el modelo de Goodwin.

$$\begin{cases} \frac{u'(t)}{u(t)} = -(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v(t) \\ \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{1-u(t)}{k} - (\alpha + \beta). \end{cases} \quad (4.12)$$

Viendo el modelo lo que se trata de analizar es la relación entre: la parte del producto dedicada a salarios (u) y la tasa de empleo (v).

Antes de andentrarnos en su resolución mostremos algunas observaciones basándonos en el trabajo de Solow (1990)[7]. En el hace un paralelismo de tipo cualitativo entre este modelo y el conocido modelo de depredador-presa, ecuaciones de Lokta - Volterra. Antes de nada mostrémoslo de manera rápida.

Lo mejor para explicar este modelo de forma clara y sencilla es utilizar un ejemplo: Imaginemos un ecosistema cerrado en el que sólo existen una clase de depredadores y una clase de presas, por ejemplo zorros y conejos o lobos y ovejas. También hay que suponer una serie de hipótesis:

- a) Las presas sólo mueren por la acción de los depredadores.
- b) Las presas en ausencia de depredadores crecen de forma exponencial.
- c) Los depredadores en ausencia de presas decrecen de forma exponencial.

Pues con todo lo anterior, estos dos matemáticos lograron demostrar con sus ecuaciones que, partiendo de un número elevado de presas, los depredadores irán aumentando progresivamente en cantidad. Conforme estos aumentan, disminuyen también progresivamente, el número de presas disponibles para comer. Esto conlleva a que cuando el número de presas

sea pequeño muchos depredadores morirán de hambre y por tanto al haber menos individuos que cacen a las presas, estas aumentarán su número, iniciándose de nuevo el ciclo. Mencionar un hecho paradójico y es que este modelo fue elaborado por los matemáticos Alfred J. Lotka y Vito Volterra, pero no como en un principio podría suponerse, trabajando de forma conjunta, si no que, trabajando de forma independiente y partiendo de observaciones iniciales distintas, llegaron a las mismas conclusiones prácticamente al mismo tiempo. El norteamericano Alfred J. Lotka (1880-1949) publicó en 1925 el libro titulado '*Elements of Physical Biology*', el primer libro sobre biología-matemática. En este libro el autor ampliaba los usos de un modelo matemático que explicaba el crecimiento de una población en la que hay un sólo tipo de ser vivo pero Lotka se le ocurrió averiguar y tratar de resolver que ocurriría si hubiera dos tipos de seres vivos y uno se como al otro. Mientras tanto, el matemático italiano Vito Volterra llegó a la misma conclusión pero con otros comienzos. Durante la Primera Guerra Mundial muchos pescadores de una zona concreta fueron reclutados como soldados. Al finalizar la contienda, se esperaba que al reducirse las capturas aumentara el número de peces, pero lo que ocurrió fue todo lo contrario disminuyeron, aumentando por contra los depredadores.

Resumamos en dos frases las conclusiones del modelo.

✓ La tasa de crecimiento de los depredadores es mayor cuanto más aumenta el número de presas.

✓ La tasa de crecimiento de las presas es mayor cuando menor es el número de depredadores.

Para establecer el paralelismo de tipo cualitativo del modelo de Goodwin con el de depredador-presa procedamos de la siguiente forma. Identificamos los depredadores con la tasa de empleo (v) asociada a los trabajadores y a la presa con la parte de beneficios ($1 - u$) asociada a los capitalistas.

La ecuación $\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{k} - (\alpha + \beta)$ del modelo (4.12) nos lleva a establecer la frase paralela:

✓ *El crecimiento de la tasa de empleo es mayor cuanto más aumenta el beneficio.*

Si en la ecuación $\frac{u'(t)}{u(t)} = -(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v(t)$ del modelo (4.12), realizamos el siguiente cambio de variable $\tilde{u} = 1 - u$ obtenemos.

Si en la ecuación $\frac{\tilde{u}'(t)}{\tilde{u}(t)} = (\gamma + \alpha) - \rho \cdot v(t)$ ya enunciamos la otra frase relacionada con

el referido modelo depredador presa.

✓ *Mayor crecimiento de beneficios menor tasa de empleo*

Esta claro que grandes beneficios conllevan altas inversiones, y como toda inversión es puesta en marcha, altas inversiones, implican rápido crecimiento del empleo. Por otra parte, baja ocupación implica salarios decrecientes y participación ascendente de los beneficios.

Otra posible identificación sería, dejar aparte a los capitalistas, identificar a los trabajadores con empleo (u) como los depredadores y los parados sus presas, crecen cuando lo hace v .

4.2. Resolución

Es el momento de resolver el sistema de EDO (4.12). Para ello vamos a utilizar la notación $y' = \frac{dy}{dt}$. De manera que nuestro sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (-(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v(t))u(t) \\ \frac{dv}{dt} = \left(\frac{1-u(t)}{k} - (\alpha + \beta)\right)v(t). \end{cases} \quad (4.13)$$

Dividimos ambas ecuaciones y proceemos por **separación de variables**.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{(-(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v)u}{\left(\frac{1-u}{k} - (\alpha + \beta)\right)v} \\ \frac{\frac{1-u}{k} - (\alpha + \beta)}{u} du &= \frac{-(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v}{v} dv \\ \left(k^{-1} \frac{1-u}{u} - (\alpha + \beta) \frac{1}{u}\right) du &= \left(-(\gamma + \alpha) \frac{1}{v} + \rho\right) dv \\ \int \left(\left(k^{-1} - (\alpha + \beta)\right) \frac{1}{u} - k^{-1}\right) du &= \int \left(-(\gamma + \alpha) \frac{1}{v} + \rho\right) dv \\ ((k^{-1} - (\alpha + \beta)) \ln u - k^{-1}u) &= -(\gamma + \alpha) \ln v + \rho v + H_0 \end{aligned}$$

Donde H_0 es la constante de integración. Esta ya es la solución de forma implícita, pero expresémosla de mejor manera.

$$(k^{-1} - (\alpha + \beta)) \ln u + (\gamma + \alpha) \ln v = -k^{-1}u + \rho v + H_0$$

$$\ln \left(u^{k^{-1}-(\alpha+\beta)} \cdot v^{\gamma+\alpha} \right) = k^{-1}u + \rho v + H_0$$

Realizamos la exponencial de ambas expresiones

$$u^{k^{-1}-(\alpha+\beta)} \cdot v^{\gamma+\alpha} = e^{k^{-1}u + \rho v + H_0}$$

que ordenando llegamos a la solución del sistema mediante la relación en forma implícita entre u y v

$$u^{k^{-1}-(\alpha+\beta)} \cdot e^{-k^{-1}u} = H \cdot v^{-\gamma+\alpha} \cdot e^{\rho v} \quad (4.14)$$

En general, son trayectorias cerradas, dependiendo de la constante H , marcada por las condiciones iniciales.

En el próximo capítulo, a partir de datos empíricos, se calcularán los parámetros de la solución del modelo. Posteriormente se analizarán.

Capítulo 5

APLICACIÓN DEL MODELO. DATOS EMPÍRICOS

En este capítulo se va a ajustar el modelo de Goodwin a los datos empíricos recogidos. Dichos datos se han obtenido de la página web del Instituto Nacional de Estadística (INE)[9]. Es importante mencionar que los datos referidos al año 2014 eran provisionales y los correspondientes al 2015 eran un avance. Se pretende establecer la relación entre la parte del producto dedicada a salarios $u(t)$ y la tasa de empleo $v(t)$. Recordemos la solución general obtenida en el capítulo anterior.

$$u^{k^{-1}-(\alpha+\beta)} \cdot e^{-k^{-1}u} = H \cdot v^{-\gamma+\alpha} \cdot e^{\rho v}$$

Como se observa, se necesita calcular determinados parámetros, vayamos a ello.

5.1. Productividad(parámetro α)

El primer parámetro a determinar va a ser α , que es la tasa de crecimiento de la productividad $p(t)$, que es constante, dado que en el modelo de Goodwin sigue una exponencial.

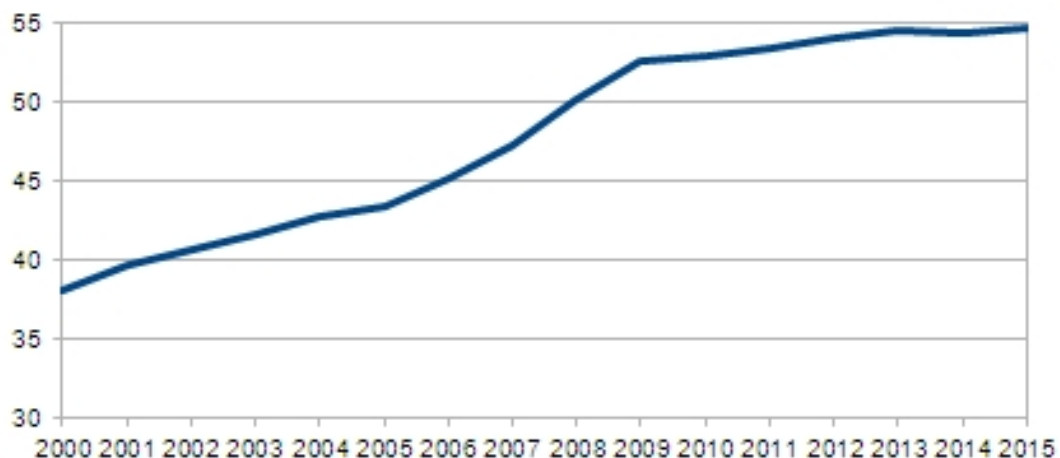
La productividad se obtiene del cociente entre el Valor Añadido Bruto(VAB), que se define como la riqueza que se genera durante el periodo considerado, y el empleo total. El VAB se encuentra expresado en millones de euros y los puestos de trabajo en miles.

En la siguiente tabla, además de reflejar lo anterior, se calcula la tasa de crecimiento de la productividad como promedio de la tasa de crecimiento anual, es decir, la hacemos discretizada, y ese promedio es precisamente la que vamos a tomar como la constante α para el modelo. Hacer notar que se podía haber procedido mediante un ajuste por mínimos cuadrados, pero se ha querido que interpole en el punto inicial.

TABLA 1

Año	VAB	Puestos de trabajo	Productividad	Tasa de crecimiento
2000	586 321	15 399,27	33,532416	
2001	636 824	16 039,20	35,26372	0,0516308
2002	682 380	16 790,10,1	36,921129	0,0470004
2003	727 685	17 475,60,1	38,138227	0,0329648
2004	776 193	18 142,25	39,261948	0,0294644
2005	834 247	19 939,10	40,495658	0,0314225
2006	900 092	19 939,10	41,890658	0,0344481
2007	972 855	20 579,90	43,880013	0,0474892
2008	1 025 672	20 469,70	46,281485	0,054728392
2009	1 006 122	19 106,90	48,344753	0,044580612
2010	989 913	18 724,50	48,671161	0,0067517
2011	983 721	18 421,40	49,644768	0,0200038
2012	954 026	17 632,70	50,334518	0,0138937
2013	935 655	17 139,00	50,754431	0,0083425
2014	943 779	17 344,20	50,616391	-0,00272
2015	975 795	17 866,00	50,945602	0,0066504

Gráfico 1
Evolución de la productividad



Gráfica 2
Evolución del VAB

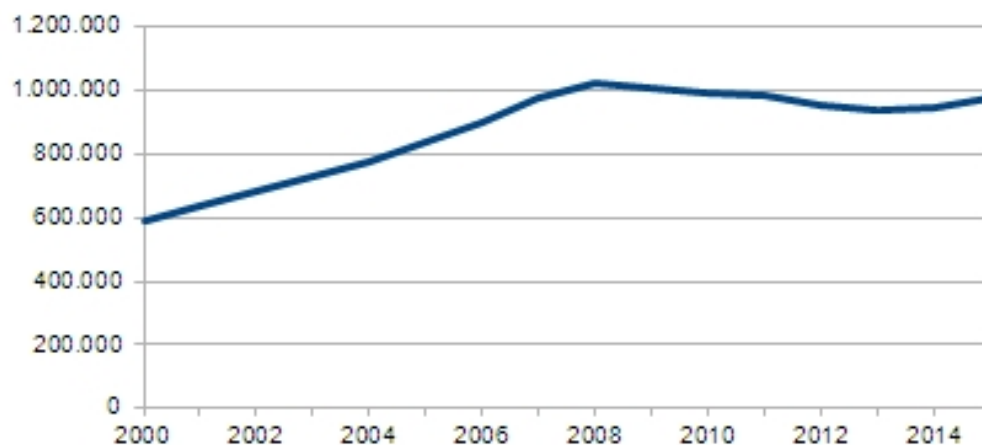
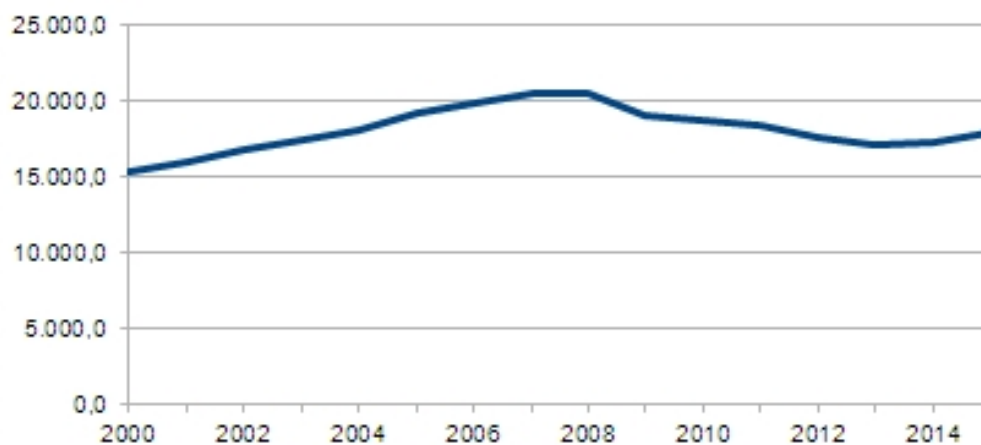


Gráfico 3
Evolución puestos de trabajo totales



Este crecimiento de la productividad, que si nos fijamos es muy pronunciado hasta el año 2009, es debido a los dos factores utilizados en nuestra fórmula. Es decir, o bien, se ha aumentado el Valor Añadido Bruto(VAB), que se encuentra en el numerador de nuestro cociente, o por el contrario se ha reducido el número de puestos de trabajo totales, es decir, se han perdido puestos de trabajo o se ha producido un incremento de ambos, siempre el del VAB mayor que el del puestos de trabajo o viceversa. Nos inclinamos a pensar que el motivo es un incremento en ambas variables, siendo mayor el del VAB que el de puestos de trabajo. Para apoyar esta tesis nos podemos fijar tanto en el Gráfico

2 como en el Gráfico 3, en los que ambos se ve como prácticamente esas dos variables se mueven de forma paralela produciéndose un punto de inflexión en el año 2008, una vez entrados en plena crisis ambas variables disminuyen de forma considerable, pero se puede observar fácilmente como la disminución del denominador, es decir, de los puestos de trabajo totales es más brusca que la del numerador. Como tasa de crecimiento α se ha cogido el promedio de la última columna.

En conclusión, para ajustar al modelo que nos ocupa, fijamos la productividad según la siguiente función

$$p(t) = 33,534416 \cdot e^{0,024517655 \cdot t},$$

con la consideración que $t = 0$ es el año 2000.

5.2. Población activa(parámetro β)

Se procede ahora a buscar la exponencial que modelice la población activa y de esta manera su tasa de crecimiento β , otra de las constantes del modelo. Por tanto partimos de los siguientes datos.

TABLA 2

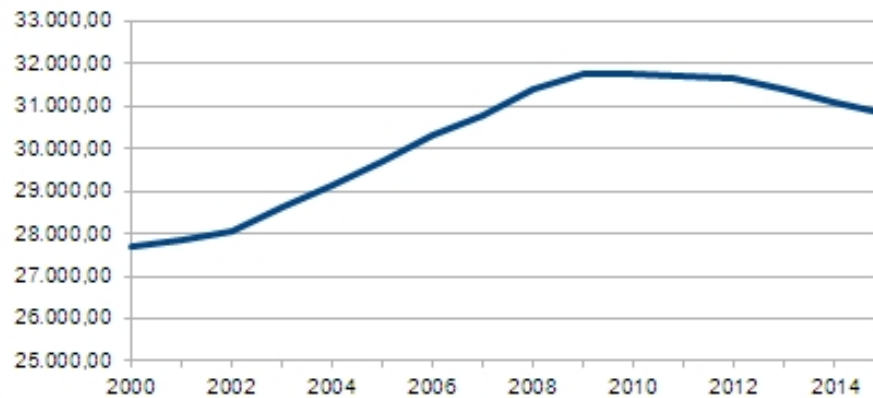
Año	Población en edad de trabajar	Tasa de crecimiento anual
2000	27 721,21	
2001	27 845,56	0,004857
2002	28 080,65	0,0084427
2003	28 622,73	0,0193044
2004	29 134,19	0,0178689
2005	29 720,57	0,0201268
2006	30 312,37	0,0199121
2007	30 773,34	0,0152074
2008	31 421,94	0,021076694
2009	31 756,60	0,01650565
2010	31 771,60	0,0004722
2011	31 723,56	-0,001512
2012	31 641,00	-0,002602
2013	31 417,54	-0,007062
2014	31 091,05	-0,010392
2015	30 855,39	-0,00758

El promedio de la tasa de crecimiento anual es de 0,0072266. Por lo tanto, utilizando el mismo criterio que con la productividad, tomaremos como $\beta = 0,0072266$ y por tanto modelizamos la población activa mediante la siguiente exponencial:

$$n(t) = 27721,21 \cdot e^{0,0072266 \cdot t},$$

recordando que $t = 0$ es el año 2000.

Gráfico 4
Evolución población activa



Antes de continuar, sería conveniente dar a conocer una serie de datos. Desde 1999 hasta 2009 se produjo en España un gran incremento de la población en edad de trabajar, fundamentalmente por el incremento de la inmigración. Todo lo contrario ocurre desde el año 2009 y hasta el 2015, que como se ve, se produce unos años de estancamiento y posterior disminución de la población activa. A esta disminución, se podrían añadir otras circunstancias que por motivos de la actual crisis económica afectan a este grupo de población, ya que se ha producido que parte de la población emigrante de otros países han vuelto a su país de origen ante la escasa perspectiva de encontrar trabajo y también en mayor medida por los más jóvenes que muchos se han visto obligados a emigrar a otros países, lo que puede explicar esta disminución apreciada en la gráfica.

Con este análisis vemos como en este periodo analizado, la realidad rompe claramente con uno de los principios establecidos en el modelo, concretamente el que establece que la población activa crece de forma exponencial y a una tasa constante. Esto se tendrá en cuenta cuando realicemos el análisis final.

5.3. Capital invertido-producto(parámetro k)

La siguiente constante es k , que recordemos es, la proporción entre el capital invertido y el producto. La variable escogida para representar el capital ha sido el **excedente bruto de explotación** que comprende tanto las rentas de la propiedad y de la empresa como el consumo de capital. En cuanto al producto, hemos seleccionado el **PIB a precios de mercado** y le hemos sustraído el **los impuestos netos sobre la producción y la importación**, para poder observar de esta forma que parte del PIB es debido a los salarios y que parte va destinada a remunerar el capital. Todos estos datos y las operaciones necesarias para alcanzar dicha constante k se encuentran recogidos en el siguiente cuadro. (ambos datos están expresados en millones de euros)

TABLA 3

Año	Capital	Producto	Ratio k
2000	270 834,00	584 097,00	0,46
2001	296 172,00	634 007,00	0,47
2002	319 075,00	679 765,00	0,47
2003	339 380,00	725 603,00	0,47
2004	362 133,00	773 453,00	0,47
2005	386 878,00	830 922,00	0,47
2006	417 480,00	898 632,00	0,46
2007	450 170,00	972 726,00	0,46
2008	465 182,00	1 024 959,00	0,45
2009	455 174,00	1 004 347,00	0,45
2010	445 879,00	987 354,00	0,45
2011	449 397,00	980 383,00	0,47
2012	446 722,00	925 708,00	0,48
2013	440 393,00	925 708,00	0,48
2014	441 025,00	932 777,00	0,47
2015	453 015,00	963 359,00	0,47

De esta manera se considerará $k = 0,46$ para el modelo.

5.4. Curva de Phillips(parámetros γ y ρ)

Para hallar los parámetros γ y ρ , se debe plantear un modelo lineal de la curva de Phillips. Dicha curva relaciona la tasa de crecimiento del salario unitario $\frac{w'}{w}$ y la tasa de empleo v de la siguiente forma:

$$\frac{w'}{w} = -\gamma + \rho \cdot v$$

Vayamos en busca de esa recta.

Para ello vamos a partir de la siguiente tabla, extraída, como los anteriores datos, del INE se reflejan el la cantidad total dedicada a salarios, la población ocupada y la población activa.

TABLA 4

Año	Salarios	Población ocupada	Población activa
2000	313.263,00	15.399,27	27.721,21
2001	337.835,00	16.039,20	27.845,56
2002	337.835,00	16.790,10	28.080,65
2003	386.223,00	17.475,60	28.622,73
2004	411.320,00	18.142,25	29.134,19
2005	444.044,00	19.207,00	29.720,57
2006	481.152,00	19.939,10	30.312,37
2007	522.556,00	20.579,90	30.773,34
2008	559.777,00	20.469,70	31.421,94
2009	549.173,00	19.106,90	31.756,60
2010	541.475,00	18.724,50	31.771,60
2011	530.986,00	18.421,40	31.723,56
2012	489.790,00	17.632,70	31.641,00
2013	485.313,00	17.139,00	31.417,54
2014	491.752,00	17.344,20	31.091,05
2015	510.344,00	17.866,00	30.855,39

A partir de la anterior tabla generamos otra. En la primera columna se refleja la tasa de empleo (v), que es el cociente entre la población ocupada y la población activa. En la segunda el salario unitario(w), cociente entre el total de la cantidad destinada a salarios y la población ocupada. Ya en la última, la tasa de crecimiento del salario unitario($\frac{w'}{w}$). Al tener datos discretos se utiliza la tasa de variación media.

TABLA 5

Año	Tasa de empleo(v)	Salario unitario(w)	Tasa crecimiento($\frac{w'}{w}$)
2000	0,56	20,34271754	
2001	0,58	21,06308295	0,035411464
2002	0,60	21,48230207	0,019903028
2003	0,61	22,10070041	0,028786409
2004	0,62	22,67193981	0,025847118
2005	0,65	23,11886291	0,01971261
2006	0,66	24,13107914	0,043783132
2007	0,67	25,39157139	0,052235221
2008	0,65	27,34661475	0,076995761
2009	0,60	28,74212981	0,051030633
2010	0,59	28,91799514	0,00611873
2011	0,58	28,82441074	-0,003236199
2012	0,56	27,77736819	-0,036324855
2013	0,55	28,31629617	0,019401693
2014	0,56	28,35253284	0,001279711
2015	0,58	28,56509571	0,007497139

A continuación se hace un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Dicha recta será la que tomaremos como curva de Phillips. Para ello se construye la siguiente tabla.

TABLA 6

	Tasa de empleo($v = X$)	Tasa crecimiento($\frac{w'}{w} = Y$)	X^2	$X \cdot Y$
	0,58	0,035411464	0,331782513	0,020397203
	0,60	0,019903028	0,357513269	0,011900501
	0,61	0,028786409	0,372770888	0,017575532
	0,62	0,025847118	0,387771938	0,016095346
	0,65	0,01971261	0,417642654	0,012739329
	0,66	0,043783132	0,432684531	0,028800001
	0,67	0,052235221	0,44723652	0,034932693
	0,65	0,076995761	0,424382012	0,050158588
	0,60	0,051030633	0,362003215	0,030703449
	0,59	0,00611873	0,347330082	0,003606056
	0,58	-0,003236199	0,337195314	-0,001879213
	0,56	-0,036324855	0,310554041	-0,020242889
	0,55	0,019401693	0,297595576	0,010584074
	0,56	0,001279711	0,311198598	0,000713889
	0,58	0,007497139	0,335268329	0,00434102
SUMA	$S_X = 9,04$	$S_Y = 0,35$	$S_{XX} = 5,47$	$S_{XY} = 0,22$

Aplicando las fórmulas correspondientes:

$$\rho = \frac{NS_{XY} - S_X S_Y}{NS_{XX} - S_X S_X} = 0,414129, \quad -\gamma = \frac{S_{XX} - S_X S_Y}{NS_{XX} - S_X S_X} = -0,226248$$

Con lo cual ya se tiene calculados todos los parámetros necesarios para nuestro modelo.

Para mayor claridad, se recopilan dichos parámetros en el siguiente cuadro.

Parámetro	Valor
α	0.024517655
β	0.007226607
k	0,46
γ	0.226248
ρ	0.414129

De manera que la solución del modelo con los datos del periodo 2000-2015 quedaría:

$$e^{-2,12766u}u^{2,09592} = He^{0,414129v}v^{-0,201731} \quad (5.1)$$

Como se puede apreciar, solo falta por determinar la constante de integración H . Para ello se utilizarán los datos empíricos recogidos durante el referido periodo. Además se contrastarán los datos empíricos con la solución del modelo, estableciendo las oportunas conclusiones. Todo esto ya en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Tanto para determinar la constante H de integración como para establecer conclusiones tengamos en cuenta la siguiente tabla. En ella se relacionan u (cuota del producto dedicada a salarios) y v (tasa de empleo). Para calcular u se ha tenido en cuenta la información sobre la productividad(p) que aparece en la **TABLA 1** y el salario unitario (w) que se puede ver en la **TABLA 5**. Y ahora se utiliza la relación entre ambas, que viene dada por la expresión (4.4)

TABLA 7

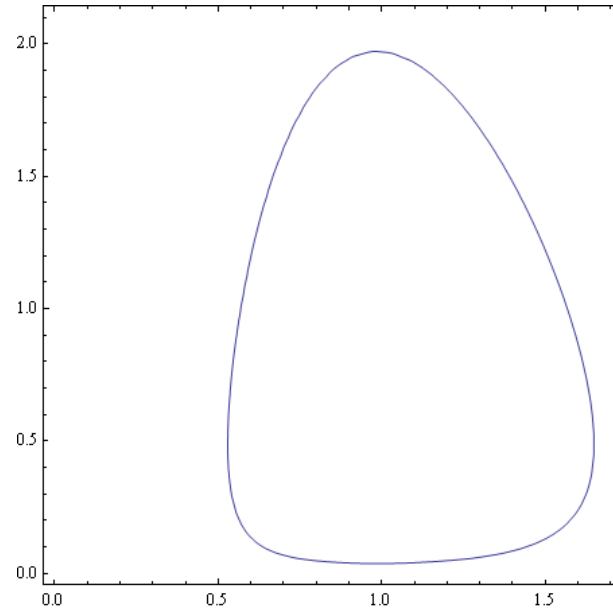
Año	u	v
2000	0,53	0,56
2001	0,53	0,58
2002	0,53	0,60
2003	0,53	0,61
2004	0,53	0,62
2005	0,53	0,65
2006	0,53	0,66
2007	0,54	0,67
2008	0,55	0,65
2009	0,55	0,60
2010	0,55	0,59
2011	0,54	0,58
2012	0,51	0,56
2013	0,52	0,55
2014	0,52	0,56
2015	0,52	0,58

De esta manera y tomando los datos del año 2000 como condición inicial obtenemos, ya sí, el modelo totalmente determinado:

$$e^{-2,12766u}u^{2,09592} = 0,0603744e^{0,414129v}v^{-0,201731} \quad (6.1)$$

Cuya solución gráfica (u, v) es:¹

GRÁFICO 5



El objetivo que nos marcamos al inicio del presente trabajo era comprobar si la doctrina establecida por Richard Goodwin a finales de los años sesenta se corresponde con los datos de la economía española de primeros del presente siglo.

La solución gráfica obtenida nos da la explicación de porqué las variables fluctúan y no permanecen constantes.

Cuando la economía está en auge, los empresarios se ven incentivados a reinvertir todos los beneficios que obtienen en producir nuevos bienes. Por lo que, poco a poco, se produce un aumento de la producción y por ende, se incrementa la tasa de empleo (v) y los salarios por encima de la productividad ($u = \frac{w}{p}$).

Estos incrementos conllevan que el beneficio capitalista se reduzca paulatinamente, por lo que cada vez se reinvierte menos en aumentar la producción y llegará un momento en que el empleo empiece a reducirse, aumentando con ello el desempleo. Disminuyendo

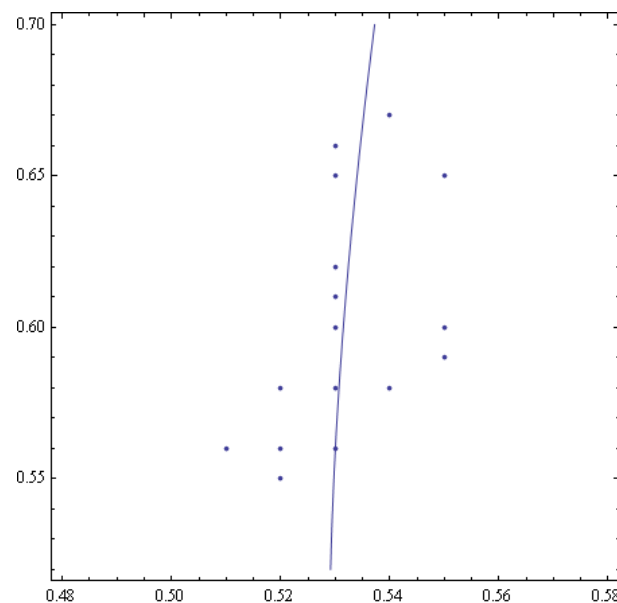
¹Para su realización se ha utilizado el programa de cálculo simbólico *Mathematica*.

también paulatinamente los salarios , aumentando con ello el beneficio empresarial y por ende, la inversión.

Iniciándose de esta manera un nuevo ciclo siguiendo siempre esta curva, es decir, la economía girará de forma indefinida en dicha curva hasta que algún acontecimiento la haga salir de esos límites, creando otra nueva curva que podrá situarse tanto dentro como fuera de los límites de la actual.

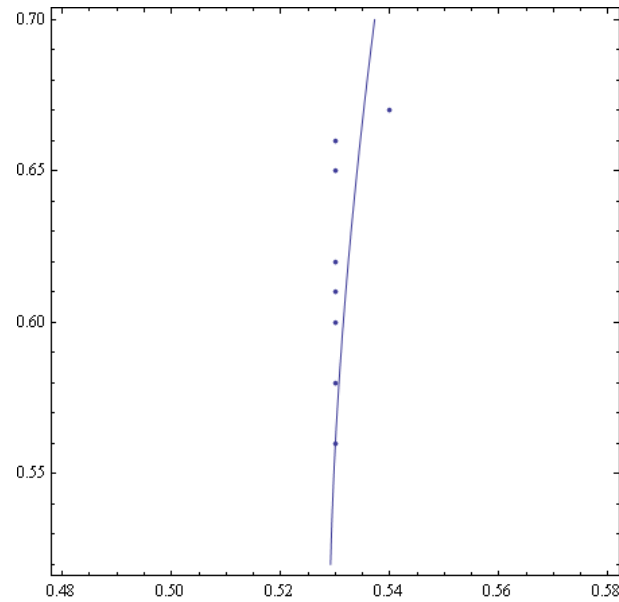
En la siguiente gráfica, se muestran de manera simultánea tanto, la solución teórica del problema, como los puntos discretos referidos a los datos empíricos recogidos.

GRÁFICO 6



Se observa que unos datos se aproximan más que otros. Como en el periodo analizado se ha producido el hecho denominado popularmente como boom inmobiliario que llevó a la última crisis económica vivida por nuestro país, y de la que aún nos estamos recuperando, vamos a dividir el periodo estudiado en dos partes. La primera parte que va desde el año 2000 hasta el año 2007 que serían los años de precrisis. Su representación gráfica sería:

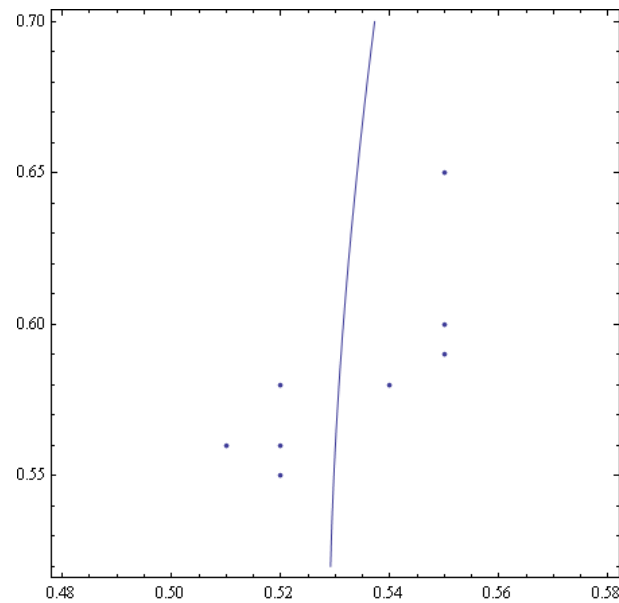
GRÁFICO 7



Se ve como los pares de puntos (u, v) reales obtenidos se aproximan bastante a lo establecido por Goodwin con su teoría, que recordamos eran crecimiento de la población activa y de la productividad.

La segunda parte iría entre los años 2008 y 2015 años de crisis y postcrisis. Su representación gráfica sería:

GRÁFICO 8



Se ve como los pares de puntos (u, v) reales obtenidos ya no siguen de manera tan aproximada lo establecido por Goodwin con su teoría, ya que entre otras cosas la población dejó de crecer, incluso como hemos visto en capítulos anteriores disminuyó.

Es decir, se puede concluir que la teoría de Goodwin funciona perfectamente cuando la economía está en auge y por ende, cercana al pleno empleo, mientras que en una economía en recesión el ajuste entre los datos reales y la previsión teórica no es tan buena tal y como él mismo reconoció en 1983.

Se ve como en los años anteriores a la crisis efectivamente, *nuestro galgo que era esférico (recuérdese la anécdota inicial)*, o casi. Es decir, el modelo y los datos empíricos se parecen bastante y se podría llegar a predecir de forma bastante certera la evolución de la economía española en años venideros. El problema llegó cuando al producirse en la economía un acontecimiento totalmente imprevisible, **la crisis**. Esto conllevó un cambio en las variables estudiadas, *el galgo perdió su forma casi esférica*. Los datos empíricos se alejaron del modelo. Con lo tratar de predecir lo que ocurrirá en el futuro usando el modelo de Goodwin es muy difícil y probablemente con escaso porcentaje de acierto.

Aunque tratar de predecir el futuro con este modelo es muy difícil, vamos a fijarnos en dos detalles:

1. El crack inmobiliario
2. Los pares de puntos (u, v) correspondientes a los años 2013, 2014 y 2015.

Hemos mencionado anteriormente que la economía girará indefinidamente en esa curva hasta que algún acontecimiento la haga salir de ella, creando una nueva curva. Pues bien, si nos fijamos en esos pares de puntos, siguen la misma trayectoria que los pares de puntos anteriores a la crisis (véase gráfica 6), es decir, años de bonanza. Por lo que cabría suponer que el crack inmobiliario que ha sumido este país en una profunda crisis ha hecho que la economía española salga de esa curva, para iniciar otra nueva fuera de los límites de la anterior y que se puede considerar según este modelo que hemos salido de la crisis desde el año 2013.

Tal vez en esto se basó el Gobierno cuando en una nota de prensa del 24/02/2014 afirmó lo siguiente:

‘En definitiva, la contabilidad nacional de los dos últimos trimestres del año confirma el inicio la recuperación de la actividad económica. La inversión en bienes de equipo lleva cuatro trimestres con tasas intertrimestrales positivas,

hasta alcanzar un crecimiento del 2,2% en media anual. El consumo privado, por su parte, lleva tres trimestres consecutivos con tasas de crecimiento positivas. Estos datos positivos también están llegando al empleo. El último trimestre del año fue el primero desde el comienzo de la crisis en el que el empleo creció tanto en términos de EPA como de contabilidad nacional y afiliaciones a la Seguridad Social, en datos desestacionalizados en los tres casos. Los principales indicadores adelantados y la composición de la demanda apuntan a un refuerzo de estas tendencias y a la recuperación de la producción y el empleo durante 2014.² ’

²Noticias | Prensa - Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (es)
<http://www.mineco.gob.es/portal/site/mineco/menuitem.ac30f9268750bd56a0b0240e>

Bibliografía

- [1] BANCO DE ESPAÑA, *La crisis y el crecimiento potencial de la economía española*, Informe anual (2009). pp 41–62.
- [2] BARCELÓ, ALFONS, *Richard Goodwin, Economista Singular*, Revista de Economía Crítica, 13 (2012). pp 122–128.
- [3] DESAI, MEGHNAD AND ORMENOD, PAUL, *Richard Goodwin: a short appreciation*, The Economic Journal, 108 (1998). pp 1431–1435.
- [4] ERNEST F. HAEUSSLER, JR. AND RICHARD S. PAUL , *Matemáticas para administración y economía*, Editorial iberoamérica (1992).
- [5] FEINSTEIN C.H., *Socialism, Capitalism an Economic Growth. Wssays presented to Maurice Dobb*, Cambridge University Press (1967). pp 54–58.
- [6] MORENO, ALVARO MARTIN, *El modelo de ciclo y crecimiento de Richard Goodwin. Una evaluación Empírica para Colombia*, Cuadernos de economía, 37 (2002).
- [7] SOLOW, ROBERT M., *Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Ruminaton*, Non-linear Multesectoral Macrodinamics, Londres, McMillan (1990). pp (31–41)
- [8] TENORIO, A. MARTÍN, A. PARALERA, C. CONTRERAS, I., *Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros*, Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa, 16, Universidad Pablo de Olavide (2013). pp (165-199)
- [9] WEB DEL INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA, <http://www.ine.es/>