



**Universidad de Jaén**

Máster en Matemáticas

***MODELOS ESTOCÁSTICOS EN EL ANÁLISIS DE  
PANDEMIAS***

***Trabajo Fin de Máster***

**Curso 2021-2022**

**Trabajo Fin de Máster presentado por  
María del Carmen Galiano Galiano**



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Máster en Matemáticas

Curso 2021-2022

***MODELOS ESTOCÁSTICOS EN EL ANÁLISIS DE  
PANDEMIAS***

**Trabajo Fin de Máster presentado por**

**María del Carmen Galiano Galiano**

**Tutor: Julio Guerrero García**

**Departamento de Matemáticas**



# Índice general

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| Índice de figuras                                             | VII       |
| Agradecimientos                                               | IX        |
| Introducción                                                  | XI        |
| <b>1. Preliminares</b>                                        | <b>1</b>  |
| 1.1. Procesos estocásticos . . . . .                          | 1         |
| 1.2. Movimiento Browniano . . . . .                           | 4         |
| 1.2.1. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano . .  | 5         |
| 1.3. Cálculo de Itô . . . . .                                 | 6         |
| 1.3.1. La integral de Itô . . . . .                           | 6         |
| 1.3.2. Propiedades de la integral de Itô . . . . .            | 8         |
| <b>2. Ecuaciones diferenciales estocásticas</b>               | <b>9</b>  |
| 2.1. Definición . . . . .                                     | 9         |
| 2.2. Tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . . | 10        |
| 2.2.1. SDEs lineales escalares . . . . .                      | 10        |
| 2.2.2. SDEs lineales vectoriales . . . . .                    | 11        |
| 2.2.3. SDEs no lineales . . . . .                             | 11        |
| 2.3. Soluciones de las EDEs . . . . .                         | 12        |
| 2.3.1. Un teorema general de existencia y unicidad . . . . .  | 12        |
| 2.3.2. Lema de Itô . . . . .                                  | 20        |
| 2.3.3. Métodos numéricos . . . . .                            | 23        |
| <b>3. Modelos diferenciales estocásticos</b>                  | <b>27</b> |
| 3.1. Movimiento Browniano geométrico . . . . .                | 27        |
| 3.2. Modelo de Vasicek . . . . .                              | 33        |
| 3.3. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) . . . . .             | 39        |
| <b>4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén</b>           | <b>45</b> |
| 4.1. El COVID-19 . . . . .                                    | 45        |
| 4.2. Modelo CIR . . . . .                                     | 47        |
| 4.2.1. Estimación de los parámetros . . . . .                 | 47        |

## Índice general

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2.2. Simulaciones numéricas . . . . .                          | 50        |
| 4.3. ARIMA . . . . .                                             | 53        |
| 4.4. Comparativa . . . . .                                       | 55        |
| <b>Conclusiones</b>                                              | <b>61</b> |
| <b>A. Apéndice</b>                                               | <b>63</b> |
| A.1. Código para el modelo Browniano Geométrico . . . . .        | 63        |
| A.2. Código para el modelo de Vasicek . . . . .                  | 65        |
| A.3. Código para el modelo CIR . . . . .                         | 67        |
| A.4. Código para estimar los parámetros del modelo CIR . . . . . | 69        |
| A.5. CIRobjective1 . . . . .                                     | 71        |
| A.6. Modelo ARIMA . . . . .                                      | 72        |
| A.7. Comparación CIR y ARMAX . . . . .                           | 75        |
| <b>Bibliografía</b>                                              | <b>81</b> |

# Índice de figuras

|       |                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1.  | Caminos simulados del Movimiento Browniano Geométrico . .                                                                                                                                                               | 28 |
| 3.2.  | Comparación media numérica (Azul) y teórica (Roja) del Movimiento Browniano Geométrico usando el método de Euler-Maruyama para 1000 caminos, con $x_0 = 3, \mu = 2$ y $\sigma = 0,5$ y 5000 subintervalos. . . . .      | 31 |
| 3.3.  | Comparación desviación estándar numérica (Azul) y teórica (Roja) del Movimiento Browniano Geométrico usando el método de Euler para 1000 caminos, con $x_0 = 3, \mu = 2$ y $\sigma = 0,5$ y 5000 subintervalos. . . . . | 32 |
| 3.4.  | Comparación media (izquierda) y desviación estándar (derecha) numéricas (Azules) y teóricas (Rojas) del Movimiento Browniano Geométrico usando el método de Milstein. . . . .                                           | 33 |
| 3.5.  | Caminos simulados del modelo de Vasicek. . . . .                                                                                                                                                                        | 34 |
| 3.6.  | Comparación media numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo de Vasicek con el método de Euler para 1000 caminos, con $x_0 = 1, \alpha = 2, \mu = 2$ y $\sigma = 0,5$ y 5000 subintervalos. . . . .                    | 36 |
| 3.7.  | Comparación desviación estándar numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo de Vasicek con el método de Euler para 1000 caminos, con $x_0 = 1, \alpha = 2, \mu = 2$ y $\sigma = 0,5$ y 5000 subintervalos. . . . .      | 38 |
| 3.8.  | Caminos simulados del modelo CIR. . . . .                                                                                                                                                                               | 40 |
| 3.9.  | Comparación media numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo CIR con el método de Euler para 1000 caminos, con $x_0 = 1, \alpha = 2, \mu = 2$ y $\sigma = 1$ y 5000 subintervalos. . . . .                             | 41 |
| 3.10. | Comparación desviación estándar numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo CIR con el método de Euler para 1000 caminos, con $x_0 = 1, \alpha = 2, \mu = 2$ y $\sigma = 1$ y 5000 subintervalos. . . . .               | 42 |
| 4.1.  | Total casos capital por días medias móviles 14 días. En el eje de abscisas se representan los días transcurridos desde el 2 de febrero de 2021. . . . .                                                                 | 46 |
| 4.2.  | Estimaciones aplicando los métodos de Euler (rojo) y Milstein (azul) para el modelo CIR, con $\text{win}=50, \text{tin}=1, \text{nforecast}=30$ y $\text{nsim}=1000$ . . . . .                                          | 51 |

## Índice de figuras

|                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.3. Diferencia de las aproximaciones de Milstein y Euler para el modelo CIR, con $\text{win}=50$ , $\text{tin}=1$ , $\text{nforecast}=30$ y $\text{nsim}=1000$ . . . | 51 |
| 4.4. Diferencia de las aproximaciones de Milstein y Euler el día 56. . .                                                                                              | 52 |
| 4.5. Estimación aplicando ARIMA, con $\text{win}=50$ , $\text{tin}=1$ , $\text{nforecast}=30$ y $\text{nsim}=1000$ . . . . .                                          | 54 |
| 4.6. Aproximaciones del método CIR con Euler-Maruyama y Milstein, y ARMAX con $\text{win}=100$ , $\text{tin}=1$ y $\text{nsim}=1000$ . . . . .                        | 55 |
| 4.7. Comparación de los modelos CIR y ARMAX. . . . .                                                                                                                  | 56 |
| 4.8. Etapa 1 (izquierda) y Etapa 2 (derecha) de crecimiento de la pandemia del COVID-19. . . . .                                                                      | 58 |
| 4.9. Etapa 3 (izquierda) y Etapa 4 (derecha) de decrecimiento de la pandemia del COVID-19. . . . .                                                                    | 58 |
| 4.10. Etapa relativamente constante de la pandemia. . . . .                                                                                                           | 59 |

# Agradecimientos

Quiero dar las gracias, en primer lugar, a mi tutor Julio Guerrero, por su apoyo, orientación y paciencia durante el desarrollo de este trabajo, y a Giuseppe Orlando por su ayuda en la parte numérica.

Agradecer también a la Consejería de Salud y Familia de la Junta de Andalucía por ceder los datos con los que se han trabajado en la memoria.

Y por supuesto, gracias a mi madre, mi hermana y mis amigos, por su apoyo y por confiar siempre en mí.



# Introducción

Durante mucho tiempo se han considerado modelos deterministas para el estudio de una amplia variedad de fenómenos naturales. Sin embargo, si observamos el mundo que nos rodea y queremos buscar un modelo matemático que justifique el comportamiento de un determinado suceso, nos damos cuenta de que en muchísimas ocasiones ese suceso presenta de manera inherente una parte aleatoria. Por tanto es esencial recurrir a la teoría de la probabilidad para poder entenderlos y considerar otro tipo de modelos que tengan en cuenta esta aleatoriedad, denominados modelos estocásticos.

Desde que el matemático japonés Kiyosi Itô desarrollara la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas [7, 8], éstas se han utilizado para modelar ese carácter aleatorio del que hablábamos. Los modelos estocásticos se han utilizado para la predicción de fenómenos de distinta naturaleza. Una de las ramas en la que más se utilizan estos modelos es en economía, ya que se adaptan muy bien a la hora de predecir las tasas de interés. En nuestro caso nos centraremos en una aplicación en epidemiología, más concretamente en los datos recogidos en la ciudad de Jaén en algunos periodos de la pandemia del COVID-19.

La elaboración del presente trabajo supone la culminación del Máster en Matemáticas, con el propósito de alcanzar los objetivos generales de dicho máster, que son:

- Promover la actualización científica y la interconexión entre las diversas parcelas del saber matemático.
- Mostrar las técnicas matemáticas actuales y sus aplicaciones.
- Capacitar para el uso de las tecnologías de la información y la Comunicación.

El objetivo general del trabajo, consiste en entender, analizar y simular algunos modelos matemáticos con cierta incertidumbre aleatoria, que nos permitirán ver la evolución de un sistema para poder hacer predicciones

sobre su comportamiento en el futuro con cierta confianza. Concretamente lo aplicaremos al impacto del COVID-19 en la ciudad de Jaén.

Los efectos de la pandemia del COVID han dado lugar al incremento de estudios que tratan de modelizar el desarrollo de la enfermedad. Así surgen modelos de diferente naturaleza y que tienen en cuenta variables distintas. En nuestro caso, nos centraremos como hemos dicho en los modelos estocásticos y para ello se deberá empezar estudiando los antecedentes existentes del tema para iniciar nuestro trabajo [22, 19].

Para lograr el objetivo general establecido, se deberán alcanzar una serie de objetivos específicos en cada uno de los capítulos de la memoria.

El estudio de modelos estocásticos necesitó el desarrollo de una teoría más amplia a la teoría básica de la probabilidad y del cálculo. Por ello, el objetivo del primer capítulo será recordar algunas nociones básicas de la teoría de la probabilidad para desarrollar las nociones fundamentales del cálculo estocástico [14], que servirán de base para los capítulos siguientes.

En el segundo capítulo, nuestro objetivo será estudiar las ecuaciones diferenciales estocásticas, dando su definición, los tipos que hay y un teorema que nos asegura la existencia y unicidad de la solución; y desarrollar dos métodos numéricos para discretizar modelos estocásticos. El primero será el método de Euler-Maruyama y el segundo el de Milstein [10].

En el capítulo tercero, el objetivo será desarrollar tres modelos estocásticos: el movimiento Browniano geométrico, el modelo de Vasicek y el modelo Cox-Ingersoll-Ross, también conocido como modelo CIR [3]. Estos modelos se suelen utilizar en economía para modelar los movimientos de las tasas de interés, aunque en nuestro caso, como hemos dicho antes, nos interesa poder aplicarlos para predecir los casos de positivos en COVID de la ciudad de Jaén.

Por último, en el cuarto capítulo, nuestro objetivo será aplicar los modelos estocásticos a un caso de la vida real. Para ello se realizarán diferentes simulaciones numéricas en varios intervalos de tiempo de la pandemia en Jaén, comprobando que realmente se ajustan a los datos. Una de las simulaciones se basará en el modelo estocástico CIR [9] y la otra en los modelos ARIMA, puramente estadísticos [5]. Para hacer una buena estimación de los datos reales y minimizar el error, será necesario ajustar los parámetros del modelo CIR, tarea que no es nada sencilla. Terminaremos comparando ambos métodos para ver cuál lo hace mejor y se darán unas conclusiones finales del trabajo.

# 1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir una serie de conceptos estocásticos que se necesitan para poder entender los modelos que posteriormente se detallarán y utilizarán a lo largo del trabajo.

Primero se definirá el concepto de espacio de probabilidad, junto con el de variable aleatoria, para después poder definir qué es un proceso estocástico, concepto en el que se basa toda la teoría de cálculo estocástico. Seguidamente se dará el concepto de proceso de Wiener o también llamado movimiento Browniano y, finalmente se introducirá el cálculo estocástico, dando el concepto de integral y diferencial estocástica, que más tarde nos permitirá dar el resultado más relevante de este nuevo cálculo, el lema de Itô.

## 1.1. Procesos estocásticos

Para definir qué es un proceso estocástico primero tenemos que dar un breve repaso a algunas definiciones básicas de teoría de la probabilidad [1]. Empezamos por la de espacio de probabilidad.

**Definición 1.1.** Un **espacio de probabilidad** o probabilístico es un triplete  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  donde:

1.  $\Omega$  es un conjunto no vacío llamado espacio muestral.
2.  $\mathcal{A}$  es una clase de subconjuntos de  $\Omega$ , con estructura de  $\sigma$ -álgebra, que verifica que es cerrada para complementarios y uniones numerables, es decir:
  - a)  $\forall A \in \mathcal{A}$  se verifica que su complementario  $\bar{A} \in \mathcal{A}$
  - b) Si  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \implies \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

## 1. Preliminares

3.  $P$  es una función de probabilidad

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

verificando los axiomas de probabilidad de Kolmogorov:

- a)  $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq 0$ ,
- b)  $P(\Omega) = 1$ ,
- c) Sean  $A_n \subset \mathcal{A}$  incompatibles dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Para introducir de manera formal el concepto de variable aleatoria, comenzamos definiendo la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.2.** Sobre el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel como la mínima clase de subconjuntos con estructura de  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ . Esto es, si  $\mathcal{Y}$  denota la clase de intervalos de  $\mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$ , es una clase de conjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , siendo  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  el conjunto potencia o conjunto de las partes de  $\mathbb{R}$ , tal que:

- 1.  $\mathcal{B} \supset \mathcal{Y}$ .
- 2.  $\mathcal{B}$  es  $\sigma$ -álgebra.
- 3.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  es una  $\sigma$ -álgebra, tal que  $\mathcal{A} \supset \mathcal{Y}$ , entonces  $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ .

Al par  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  se le denomina *espacio de Borel* y a los elementos de  $\mathcal{B}$  *conjuntos de Borel* o *Borelianos*.

Ya estamos en condiciones de dar la definición de variable aleatoria.

**Definición 1.3.** Una **variable aleatoria** definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  es una función  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  que verifica  $X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}$ , es decir:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}.$$

La función de distribución de  $X$ ,  $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dada por  $F(x) = P(X \leq x)$ , contiene toda la información probabilística de  $X$ .

Después de este breve repaso de los conceptos más importantes de la teoría de la probabilidad, ya estamos en condiciones de definir qué es un proceso estocástico.

**Definición 1.4.** Un **proceso estocástico**  $\{X_t, t \in T\} = \{X_t\}_{t \in T}$  es una colección de variables aleatorias contenidas en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  indexadas por una colección  $T$  que denota el tiempo de manera discreta o en un intervalo. De esta manera, un proceso estocástico  $X$  se puede escribir como una función:

$$X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$$

Aunque hemos introducido los procesos estocásticos como funciones de dos argumentos escribiremos  $X(t, \omega) = X(t)$  o  $X(t, \omega) = X_t$  indistintamente, según nos resulte más cómodo.

**Definición 1.5.** Una familia  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de  $\sigma$ -álgebras es una **filtración** si  $\forall 0 \leq s \leq t$  se cumple que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ .

**Definición 1.6.** Un **proceso de Markov**  $X$  es un tipo particular de proceso estocástico donde solo el valor presente de  $X(t)$  influye en la predicción futura de  $X$ . Por ello, el pasado y el futuro no tienen una conexión directa en los procesos de Markov.

**Definición 1.7.** Un proceso estocástico se denomina **Gaussiano**, si toda su probabilidad conjunta sigue una distribución Gaussiana, es decir, si  $X(t)$  es un proceso Gaussiano, entonces

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu(t), \sigma^2(t))$$

para todo  $t$ , donde  $\mu(t)$  y  $\sigma^2(t)$  caracterizan por completo el proceso y representan a la media y a la varianza.

Existen más procesos estocásticos, pero nosotros nos centraremos en algunos en los que se encuentra el *movimiento Browniano* o *proceso de Wiener*.

## 1.2. Movimiento Browniano

En 1826 el botánico Robert Brown observó, a través de un microscopio, que los granos de polen suspendidos en agua realizaban un movimiento irregular. Este movimiento era el resultado de las colisiones de las partículas con el fluido. Cada partícula era más grande y pesada que las del líquido, de modo que cada colisión de manera independiente era imperceptible, sin embargo, la superposición de muchas sí se podía observar. Al movimiento irregular de cada partícula se le llamó movimiento Browniano [12] y a cada una de esas partículas que lo realizaba, partícula Browniana. Más tarde descubrió que dicho movimiento también lo seguían partículas muy finas de varios minerales.

Las colisiones ocurren tantas veces y tan rápido que los pequeños cambios en las trayectorias no se puede observar y la trayectoria exacta se debe describir estadísticamente.

Posteriormente, en 1860, Norbert Wiener logró dar un modelo para las trayectorias irregulares de dichas partículas, como funciones continuas pero no diferenciables en ningún punto. Por ello el movimiento Browniano también es conocido como proceso de Wiener.

Desde entonces numerosos autores continuaron su estudio y las aplicaciones a diferentes áreas de la ciencia no han cesado. En 1930, Ornstein y Uhlenbeck [20] establecieron una nueva teoría del movimiento Browniano mediante el proceso de Ornstein- Uhlenbeck que se consideró dentro de la Teoría General de Procesos Estocásticos.

**Definición 1.8.** Un proceso estocástico  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un **movimiento Browniano** con varianza  $\sigma^2$  si cumple las siguientes condiciones:

1.  $W(0) = 0$ .
2.  $W$  tiene incrementos independientes: si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  entonces  $W(t_i) - W(t_{i-1}), 1 \leq m$  son independientes.
3.  $W$  tiene incrementos estacionarios: para todo  $s < t$ ,  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$ .
4. Las trayectorias del proceso  $t \rightarrow W(t)$  son funciones continuas.

A lo largo de la memoria denotaremos al Movimiento Browniano o proceso de Wiener por  $\{W(t), t \geq 0\}$ , si bien en numerosos textos se utiliza la notación  $\{B(t), t \geq 0\}$ .

### 1.2.1. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

A continuación, se exponen las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano [14].

**P.1.** La función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$E[W(t)] = 0, \forall t \geq 0$$

**P.2.** La función covarianza viene dada por:

$$Cov[W(t) - W(s)] = Min[t, s], \forall s, t \geq 0$$

**P.3.**  $W(t)$  es  $\frac{1}{2}$ -autosemejante:

$$W(T \cdot t) = \sqrt{T} \cdot W(t), \forall t, T \geq 0$$

**P.4.** Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas pero no diferenciables.

Cabe destacar que todas las trayectorias de  $W(t)$  pertenecen al espacio de funciones de  $[0, T]$  a  $\mathbb{R}$ ,  $L^2[0, T]$ , definida como:

$$L^2 = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_2 < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

### 1.3. Cálculo de Itô

Kiyoshi Itô fue un matemático japonés que desarrolló una teoría para la diferenciación e integración de procesos estocásticos conocida como Cálculo de Itô.

El Cálculo de Itô difiere de la teoría clásica de diferenciación e integración, por lo que se tiene que definir un nuevo concepto de integral, el de Integral de Itô. Uno de los resultados fundamentales del cálculo estocástico es el lema de Itô, que se usa fundamentalmente para obtener diferenciales estocásticas.

La teoría de Itô se aplica en numerosos campos para el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas. Nuestro trabajo se centra en ecuaciones diferenciales estocásticas que contienen una componente determinista y una aleatoria o estocástica con el movimiento Browniano, de la forma:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

donde  $f(t, X(t))$  es el término de arrastre o drift y  $g(t, X(t))$  el de dispersión o difusión.

Como hemos dicho antes, las trayectorias del movimiento Browniano son continuas pero no derivables, por tanto, el paso de un proceso a tiempo discreto a uno de tiempo continuo no es inmediato y requiere la construcción de una nueva herramienta matemática, la integral estocástica o de Itô.

#### 1.3.1. La integral de Itô

El objetivo de esta sección es definir la integral estocástica. Hay varias posibilidades que dan lugar a formalismos distintos, como son la integral de Itô o la integral de Stratonovich. Nosotros desarrollaremos la integral de Itô de manera progresiva, de modo similar a la de Riemann. Comenzamos dando el espacio de procesos para los cuales definiremos nuestra integral [2] y seguiremos con los procesos escalonados, que son análogos a las funciones constantes a trozos en la integral de Riemann [6].

**Definición 1.9.** Sea

$$\mathbb{L}^2 := L^2 \left( [0, T], \Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P \right)$$

$$:= \left\{ \{ (X(t), \mathcal{F}_t) \}_{t \in [0, T]} \mid X(t) \text{ es continuo}^1 \text{ y } E \left( \int_0^T X(t)^2 dt \right) < \infty \right\},$$

junto con la norma

$$\|X\|_T^2 := E \left( \int_0^T X(t)^2 dt \right)$$

Para ser exactos, no es una norma, sino una semi norma, pues si  $\|X(t) - Y(t)\|_T^2 = 0$  entonces solo podemos deducir que  $X(t) = Y(t)$  casi seguro en  $\lambda \otimes P$ . En tal caso diremos que  $X(t)$  es equivalente al proceso  $Y(t)$ .

**Definición 1.10.** Un proceso  $G(t) \in \mathbb{L}^2[0, T]$  se denomina proceso escalonado si existe una partición  $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$  tal que

$$G(t) \equiv G_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k \in \{0, \dots, m-1\}$$

**Definición 1.11.** Sea  $G(t) \in \mathbb{L}^2[0, T]$  un proceso escalonado. Entonces,

$$\int_0^T G(t) dW(t) := \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

se denomina Integral del Itô del proceso escalonado  $G$  en  $[0, T]$ .

Para definir la integral de Itô en el caso general introducimos un lema previo.

**Lema 1.1.** Dado  $G(t) \in \mathbb{L}^2[0, T]$ , existe una sucesión de procesos escalonados acotados  $G(t)^n \in \mathbb{L}^2[0, T]$  tal que

$$E \left( \int_0^T |G(t) - G(t)^n|^2 dt \right) \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

**Definición 1.12.** Sea  $G(t) \in \mathbb{L}^2[0, T]$ . Sea  $G(t)^n \in \mathbb{L}^2[0, T]$  como en el lema anterior. Entonces

$$\int_0^T G(t) dW(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G(t)^n dW(t)$$

---

<sup>1</sup>La hipótesis de continuidad no es estrictamente necesaria, pero la impondremos aquí para simplificar el desarrollo posterior

## 1. Preliminares

se denomina Integral de Itô de  $G$  en  $[0, T]$

La extensión de la Integral de Itô al caso multidimensional viene dado por la siguiente definición.

**Definición 1.13.** Sea  $G(t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2[0, T]$  entonces

$$\int_0^T G(t) dW(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G(t)^n dW$$

### 1.3.2. Propiedades de la integral de Itô

Si  $X(t), Y(t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2[0, T]$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

**P.1** La integral de Itô es lineal, es decir:

$$\int_0^T (aX(s) + bY(s)) dW(s) = a \int_0^T X(s) dW(s) + b \int_0^T Y(s) dW(s)$$

**P.2** Esperanza nula

$$E \left( \int_0^T X(s) dW(s) \right) = 0$$

**P.3** Isometría de Itô

$$E \left( \left| \int_0^T X(s) dW(s) \right|^2 \right) = E \left( \int_0^T |X(s)|^2 ds \right)$$

Después de construir la base teórica sobre la que se fundamenta todo el trabajo, estamos en condiciones de pasar al siguiente capítulo donde estudiaremos las ecuaciones diferenciales estocásticas, los diferentes tipos que hay y la existencia de sus soluciones.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este capítulo se estudiará la ecuación diferencial estocástica. Primero se dará una definición partiendo de las ecuaciones diferenciales ordinarias [17] y posteriormente las clasificaremos en lineales y no lineales, escalares y vectoriales.

Después de esto nos centraremos en estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Nos preguntaremos si existe algún resultado que nos garantice la existencia y unicidad de la solución [6], y tras esto, mencionaremos diferentes métodos para obtener dichas soluciones. La primera consiste en utilizar el cálculo de Itô y la segunda a partir de métodos numéricos, que nos darán soluciones aproximadas.

### 2.1. Definición

Para ilustrar el modelo general de una ecuación diferencial estocástica (SDE) partiremos de una ecuación diferencial ordinaria (ODE):

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X(t))$$

Para obtener una ecuación diferencial estocástica añadimos un ruido blanco a la ecuación. Entonces se tiene la siguiente expresión, conocida como ecuación de Langevin:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))\xi(t)$$

donde  $\xi(t)$  es un proceso de ruido blanco y podremos hacer la sustitución  $dW(t) = \xi(t)dt$ , donde  $dW(t)$  es la forma diferencial del movimiento Browniano estándar  $W(t)$ . La sustitución  $dW(t) = \xi(t)dt$  es meramente formal porque los caminos  $X(t)$  del movimiento Browniano son continuos pero no son diferenciables en ningún punto.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

De forma general, la forma de una SDE es:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

Diremos que un proceso estocástico  $X(t)$  es solución, en  $t \in [0, T]$  de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

cuando el proceso sea solución de la ecuación integral

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s)$$

con  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

La integral  $\int_0^t f(s, X(s))ds$  es de tipo Riemann, mientras que  $\int_0^t g(s, X(s))dW_s$  es de tipo Itô.

## 2.2. Tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas

Las ecuaciones diferenciales estocásticas se dividen en lineales o no lineales, y entre escalares y vectoriales. En nuestro caso diferenciaremos entre lineales escalares, lineales vectoriales y no lineales simplemente [17].

### 2.2.1. SDEs lineales escalares

Definimos la ecuación diferencial estocástica y escalar como:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

con la condición inicial  $X(0) = x_0$  para el proceso estocástico unidimensional  $X(t)$  si y solo si las funciones  $f(t, X(t))$  y  $g(t, X(t))$  son funciones de grado 1 en  $X(t) \in \mathbb{R}$ .

En el caso de estas ecuaciones podemos obtener soluciones exactas de manera analítica, como será el caso del Movimiento Browniano Geométrico que se verá en el siguiente capítulo, y también de manera computacional.

### 2.2.2. SDEs lineales vectoriales

Si extendemos las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales obtenemos las vectoriales.

Se define la ecuación diferencial estocásticas lineal vectorial como:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

con la condición inicial  $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  donde  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $f(t, X(t)) \in \mathbb{R}^n$  y  $g(t, X(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tienen que ser funciones afines de  $X(t)$ , siendo:

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= A(t)X(t) + a(t) \\ g(t, X(t)) &= [B_1(t)X(t) + b_1(t), \dots, B_m(t)X(t) + b_m(t)] \end{aligned}$$

donde  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_i(t) \in \mathbb{R}^n$  con  $i = 1, \dots, m$  y  $W(t) \in \mathbb{R}^m$  es un movimiento Browniano  $m$ - dimensional. Comentar que se ha usado la notación de Matlab para construir matrices.

### 2.2.3. SDEs no lineales

Este tipo de ecuaciones difieren de las ecuaciones lineales en la no linealidad del término de dispersión.

En comparación con las ecuaciones lineales, la resolución de éstas resulta mucho más complicada. Existen multitud de tipos de procesos no lineales pero nosotros solo comentaremos el que analizaremos más adelante, que se caracteriza por tener una raíz cuadrada en el término de dispersión, es decir, tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

con  $f(t, X(t)) = A(t)X(t) + a(t)$  y  $g(t, X(t)) = B(t)\sqrt{X(t)}$ , donde  $A(t)$ ,  $a(t)$  y  $B(t)$  son escalares reales.

Esta será una ecuación similar a la del modelo CIR que usaremos para modelar la evolución de la pandemia del coronavirus y a partir de la cual

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

realizaremos simulaciones para ver su comportamiento. Aunque no podemos llegar a una solución analítica como en otros procesos lineales podremos realizar una aproximación numérica con Matlab.

### 2.3. Soluciones de las EDEs

Después de dar la definición de ecuación diferencial estocástica y ver los distintos tipos que hay resulta natural preguntarse, ¿existe un resultado que nos garantice la existencia y la unicidad de las soluciones? La respuesta es sí y se refleja en el siguiente teorema [6, 2].

#### 2.3.1. Un teorema general de existencia y unicidad

Para probar la unicidad utilizamos el lema de Gronwall [6] que se enuncia a continuación.

**Lema 2.1.** Sean  $f, \phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones, siendo  $f$  continua y no negativa,  $\phi$  medible Borel, y sea  $C_0 \in \mathbb{R}$  una constante. Si

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f \phi ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

entonces

$$\phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f ds} \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

**Teorema 2.1.** Supongamos que  $f(t, x)$  y  $g(t, x)$  son continuas con

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq L|x - y| \\ |g(t, x) - g(t, y)| &\leq L|x - y| \end{aligned}$$

para  $0 \leq t \leq T$  y  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq L(1 + |x|) \\ |g(t, x)| &\leq L(1 + |x|) \end{aligned}$$

para  $0 \leq t \leq T$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , donde  $|\cdot|$  denota la norma Euclídea de dimensión adecuada,  $L$  es alguna constante y  $Z \in \mathbb{L}_n^2(\Omega)$ , entonces existe una única solución fuerte  $X(t)$  en  $\mathbb{L}_n^2[0, T]$  de

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = Z \end{cases} \quad (2.1)$$

*Demostración.* Probamos la existencia y unicidad de la solución basándonos en [2, 6]:

### 1) Existencia

Como en el caso determinista, la existencia de una solución se demuestra utilizando una iteración de Picard. Sea:

$$\begin{cases} X^0(t) = Z \\ X^{k+1}(t) = Z + \int_0^t f(s, X^k(s)) ds + \int_0^t g(s, X^k(s)) dW(s) \end{cases}$$

1) Veamos que está bien definida y que  $X^k \in \mathbb{L}_n^2[0, T]$ , para  $k \geq 1$ . Para ello usamos inducción:

-Para  $k = 0$  se cumple, pues  $Z \in \mathbb{L}_n^2(\Omega)$  por definición.

-Supongamos cierto para  $k$ , entonces como  $X^k \in \mathbb{L}_n^2[0, T]$  y  $|g(t, X^k(t))|^2 \leq L^2(1 + |X^k(t)|^2) \Rightarrow g(t, X^k(t)) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2[0, T]$ . De manera similar, como también  $X^k \in \mathbb{L}_n^1[0, T]$  y  $|f(t, X^k(t))| \leq L(1 + |X^k(t)|) \Rightarrow f(t, X^k(t)) \in \mathbb{L}_n^1[0, T]$ . Luego  $X^{k+1}$  está bien definido.

Veamos que  $X^{k+1} \in \mathbb{L}_n^2[0, T]$ .

$$\begin{aligned} E(|X^{k+1}(t)|^2) &\leq CE(|Z|^2) + CE\left(\left|\int_0^t f(s, X^k(s)) ds\right|^2\right) \\ &\quad + CE\left(\left|\int_0^t g(s, X^k(s)) dW(s)\right|^2\right) \end{aligned}$$

siendo  $C$  una constante sin especificar.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Por la desigualdad de Hölder se tiene:

$$\begin{aligned}
 E \left( \left| \int_0^t f(s, X^k(s)) ds \right|^2 \right) &\leq E \left( t \int_0^T |f(s, X^k(s))|^2 ds \right) \\
 &\leq E \left( T \int_0^T |f(s, X^k(s))|^2 ds \right) \\
 &\leq TL^2 E \left( \int_0^T (1 + |X^k(s)|)^2 ds \right) \\
 &\leq 2TL^2 \left( T + \|X^k\|_{\mathbb{L}_n^2[0,T]}^2 \right)
 \end{aligned}$$

Usando la isometría de Itô

$$\begin{aligned}
 E \left( \left| \int_0^t g(s, X^k(s)) dW(s) \right|^2 \right) &= E \left( \int_0^t |g(s, X^k(s))|^2 ds \right) \\
 &\leq E \left( \int_0^T |g(s, X^k(s))|^2 ds \right) \\
 &\leq L^2 E \left( \int_0^T (1 + |X^k(s)|)^2 ds \right) \\
 &\leq 2L^2 \left( T + \|X^k\|_{\mathbb{L}_n^2[0,T]}^2 \right)
 \end{aligned}$$

Por tanto, para todo  $t \in [0, T]$

$$E \left( |X^{k+1}(t)|^2 \right) \leq \underbrace{CE \left( |Z|^2 \right) + C \left( 2TL^2 + 2L^2 \right) \left( T + \|X^k\|_{\mathbb{L}_n^2[0,T]}^2 \right)}_D$$

Luego, integrando respecto a  $t$  concluimos que  $X^{k+1} \in \mathbb{L}_n[0, T]$  como se quería demostrar, es decir,

$$E \left( \int_0^T |X^{k+1}(t)|^2 dt \right) \leq DT < \infty$$

2) Veamos que  $\{X^k\}$  converge a la solución de la ecuación estocástica.

Empezamos probando que:

$$d^k(t) = E \left( |X^k(t) - X^{k-1}|^2 \right) \leq \frac{(Mt)^k}{k!}, \quad \forall k \geq 1$$

donde  $M = M(L, T, E(|Z|^2))$ . Usaremos nuevamente inducción. Para  $k = 1$  se tiene

$$\begin{aligned}
 d^1(t) &= E(|X^1(t) - Z|^2) \\
 &\leq 2E\left(\left|\int_0^t f(s, Z)ds\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t g(s, Z)dW(s)\right|^2\right) \\
 &\leq 2TE\left(\int_0^t |f(s, Z)|^2 ds\right) + 2E\left(\int_0^t |g(s, Z)|^2 ds\right) \\
 &\leq (2TL^2 + 2L^2)E\left(\int_0^t (1 + |z|)^2 ds\right) \\
 &\leq 4(T + 1)L^2\left(1 + E(|Z|^2)\right)t = Mt
 \end{aligned}$$

Supongamos cierto para  $k$  y lo demostramos para  $k + 1$

$$\begin{aligned}
 d^{k+1}(t) &= E(|X^{k+1}(t) - X^k(t)|^2) \\
 &\leq 2E\left(\left|\int_0^t f(s, X^k(s)) - f(s, X^{k-1}(s))ds\right|^2\right) \\
 &\quad + 2E\left(\left|\int_0^t g(s, X^k(s)) - g(s, X^{k-1}(s))dW(s)\right|^2\right) \\
 &\leq 2TE\left(\int_0^t |f(s, X^k(s)) - f(s, X^{k-1}(s))|^2 ds\right) \\
 &\quad + 2E\left(\int_0^t |g(s, X^k(s)) - g(s, X^{k-1}(s))|^2 ds\right) \\
 &\leq (2TL^2 + 2L^2)E\left(\int_0^t |X^k(s) - X^{k-1}(s)|^2 ds\right) \\
 &\leq 2(T + 1)L^2 \int_0^t \frac{M^k s^k}{k!} ds \leq \frac{M^{k+1} t^{k+1}}{(k + 1)!}
 \end{aligned}$$

Como queríamos demostrar, se tiene que

$$d^k(t) \leq \frac{(Mt)^k}{k!}$$

3) Gracias a la acotación se tiene que  $\{X^k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega, F_t, P)$ . Luego, sea  $X(t)$  su límite en  $L^2(\Omega, F_t, P)$ ,  $\{X(t), F_t\}_{t \in [0, T]}$  es un proceso estocástico.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Ahora vamos a ver que  $X(t)$  tiene una modificación  $\tilde{X}(t)$  tal que  $X^k(t) \rightarrow \tilde{X}(t)$  uniformemente en  $[0, T]$  casi seguro, probando que  $X^k(t)$  es uniformemente de Cauchy casi seguro de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |X^k(t) - X^{k-1}(t)|^2 &\leq 2TL^2 \int_0^T |X^{k-1}(s) - X^{k-2}(s)|^2 ds \\ &\quad + 2 \left| \int_0^t g(s, X^{k-1}(s)) - g(s, X^{k-2}(s)) dW(s) \right|^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E \left( \max_{0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^{k-1}(t)|^2 \right) &\leq 2TL^2 E \left( \int_0^T |X^{k-1}(s) - X^{k-2}(s)|^2 ds \right) \\ &\quad + 2E \left( \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s, X^{k-1}(s)) - g(s, X^{k-2}(s)) dW(s) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

Usando la desigualdad martingal

$$\begin{aligned} &E \left( \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s, X^{k-1}(s)) - g(s, X^{k-2}(s)) dW(s) \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n E \left( \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g_i(s, X^{k-1}(s)) - g_i(s, X^{k-2}(s)) dW(s) \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n 4E \left( \left| \int_0^t g_i(s, X^{k-1}(s)) - g_i(s, X^{k-2}(s)) dW(s) \right|^2 \right) \\ &= 4E \left( \left| \int_0^t g(s, X^{k-1}(s)) - g(s, X^{k-2}(s)) dW(s) \right|^2 \right) \\ &\leq 4L^2 E \left( \int_0^T |X^{k-1}(s) - X^{k-2}(s)|^2 ds \right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 & E \left( \max_{0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^{k-1}(t)|^2 \right) \\
 & \leq (2TL^2 + 8L^2) E \left( \int_0^T |X^{k-1}(s) - X^{k-2}(s)|^2 ds \right) \\
 & \leq (2TL^2 + 8L^2) \int_0^T \frac{M^{k-1}s^{k-1}}{(k-1)!} ds \\
 & \leq C \frac{M^k T^k}{k!}
 \end{aligned}$$

donde  $C = C(T, L)$ .

$$\begin{aligned}
 P \left( \max_{0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^{k-1}(t)| \geq \frac{1}{k^2} \right) &= P \left( \max_{0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^{k-1}(t)|^2 \geq \frac{1}{k^4} \right) \\
 &\leq k^4 E \left( \max_{0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^{k-1}(t)|^2 \right) \\
 &\leq C \frac{k^4 M^k T^k}{k!},
 \end{aligned}$$

Y como  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 M^k T^k}{k!} < \infty$  se concluye por el Lema de Borel Cantelli que para casi todo  $\omega$  con  $k \geq k_0(\omega)$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |X^k(t) - X^{k-1}(t)| < \frac{1}{k^2}$$

Luego  $X^k(t) \rightarrow \tilde{X}(t)$  uniformemente en  $[0, T]$  casi seguro y por tanto  $\tilde{X}(t)$  tiene trayectorias continuas casi seguro. Como para todo  $0 \leq t \leq T$ ,  $X^k(t) \rightarrow \tilde{X}(t)$  casi seguro tenemos que  $X(t) = \tilde{X}(t)$  casi seguro.

Supongamos entonces que  $X(t) = \tilde{X}(t)$ .  $X(t)$  verifica ser continuo. Como  $X^k \rightarrow X(t)$  casi seguro, entonces  $X^k(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$  casi seguro  $\lambda \otimes P$ , siendo  $\lambda$  la medida de Lebesgue en  $[0, T]$ .

4) Veamos ahora que  $X \in \mathbb{L}_n^2[0, T]$ . Para ello veamos que  $X^k \rightarrow X$  en  $\mathbb{L}_n^2[0, T]$ .

$$\begin{aligned}
 \|X^k - X^{k-1}\|_{\mathbb{L}_n^2[0, T]} &= E \left( \int_0^T |X^k(s) - X^{k-1}(s)|^2 ds \right) \\
 &\leq \int_0^T \frac{M^k s^k}{k!} \leq \frac{MT^{k+1}}{(k+1)!}
 \end{aligned}$$

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Tenemos que  $\{X^k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{L}_n^2[0, T]$ , como  $X^k(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$  casi seguro en  $\lambda \otimes P$  concluimos que  $X(t, \omega) = \tilde{X}(t, \omega)$  casi seguro.

5) Veamos que  $X(t)$  verifica la ecuación diferencial estocástica. Sea:

$$Y(t) = Z + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s)$$

$Y(t)$  está bien definida pues  $X \in \mathbb{L}_n^2[0, T]$ ,  $|g(t, X(t))| \leq L^2(1 + |X(t)|^2)$  y  $X \in L_n^1[0, T]$ ,  $|f(t, X(t))| \leq L^2(1 + |X(t)|)$

Veamos que  $X^{k+1}(t) \rightarrow Y(t)$  en  $L_n(\Omega) \forall 0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} E(|Y(t) - X^{k+1}(t)|^2) &\leq 2E\left(\left|\int_0^t f(s, X(s)) - f(s, X^k(s))ds\right|^2\right) \\ &\quad + 2E\left(\left|\int_0^t g(s, X(s)) - g(s, X^k(s))dW(s)\right|^2\right) \\ &\leq (2TL^2 + 2L^2)E\left(\int_0^t |X(s) - X^k(s)|^2 ds\right) \\ &\leq 2(T+1)L^2\|X - X^k\|_{\mathbb{L}_n^2[0, T]}^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Como  $X^{k+1}(t) \rightarrow X(t)$  en  $L_n^2(\Omega)$  tenemos que  $X(t) = Y(t)$  casi seguro para  $0 \leq t \leq T$ , entonces:

$$X(t) = Z + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s)$$

casi seguro, para todo  $0 \leq t \leq T$ , como se quería demostrar.

### II) Unicidad

Supongamos que  $X, \tilde{X} \in \mathbb{L}_n^2[0, T]$  son dos soluciones de la misma ecuación diferencial estocástica. Entonces:

$$X(t) - \tilde{X}(t) = \int_0^t f(s, X(s)) - f(s, \tilde{X}(s))ds + \int_0^t g(s, X(s)) - g(s, \tilde{X}(s))dW(s)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
E(|X(t) - \tilde{X}(t)|^2) &\leq 2E\left(\left|\int_0^t f(s, X(s)) - f(s, \tilde{X}(s))ds\right|^2\right) \\
&\quad + 2E\left(\left|\int_0^t g(s, X(s)) - g(s, \tilde{X}(s))dW(s)\right|^2\right) \\
&\leq (2TL^2 + 2L^2) \int_0^t E(|X(s) - \tilde{X}(s)|^2) ds.
\end{aligned}$$

Tomando  $\phi(t) = E(|X(t) - \tilde{X}(t)|^2)$  y  $C = 2TL^2 + 2L^2$  tenemos que:

$$\phi(t) \leq C \int_0^t \phi(s) ds$$

Por el Lema de Gronwall, si

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f\phi ds$$

siendo  $C_0 = 0$  y  $f = C$ , entonces:

$$\phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t C ds} = C_0 e^{Ct} = 0$$

Como  $\phi \equiv 0$ , entonces  $\tilde{X}$  es una modificación de  $X$  pero como ambos procesos son continuos casi seguro, concluimos que  $\tilde{X}$  y  $X$  son indistinguibles. Por tanto, hemos probado la unicidad  $\square$

Acabamos de ver que si tenemos una ecuación diferencial estocástica del tipo (2.1) existe solución y es única.

Si queremos obtener soluciones de SDEs se puede hacer de diferentes formas. La primera forma consiste en calcular una solución analítica aplicando el lema de Itô, que es una versión estocástica de la regla de la cadena para proceso estocásticos. La segunda forma es calcular una solución aproximada aplicando algún método numérico.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

### 2.3.2. Lema de Itô

A continuación, se enuncia uno de los resultado más importantes del calculo diferencial estocástico, el lema de Itô [7].

**Teorema 2.2.** Sea  $X(t)$  la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (2.2)$$

Si tenemos que la función  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene sus derivadas parciales  $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial F(t, x)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}$  continuas, entonces el proceso estocástico  $F(t, X(t))$  es solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dF(t, X(t)) = \alpha(t, X(t))dt + \beta(t, X(t))dW(t) \quad (2.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, x) \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \\ \beta(t, x) &= g(t, x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

*Demostración.* Para la demostración nos basamos en [11]. En primer lugar, notemos que si tomamos incrementos en (2.2) obtenemos:

$$\Delta X(t) = f(t, X(t))\Delta t + g(t, X(t))\Delta W(t) \quad (2.5)$$

Consideremos  $\Delta t, \Delta x$  y la función  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Haciendo el desarrollo de Taylor en el punto  $(t + \Delta t, x + \Delta x)$  alrededor del punto  $(t, x)$  obtenemos una expresión de  $F(t + \Delta t, x + \Delta x) - F(t, x) = \Delta F$  como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \Delta t \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

Como queremos que los términos  $\Delta t$  y  $\Delta x$  tiendan a cero podemos cambiar  $\Delta x$  por  $f\Delta t + g\Delta W$  como se sugiere en (2.5), donde  $\Delta W = W(t + \Delta t) - W(t)$  y  $f = f(t, x)$  y  $g = g(t, x)$  son funciones escalares, y consecuentemente  $(\Delta x)^2$  por  $f^2(\Delta t)^2 + 2fg\Delta t\Delta W + g^2(\Delta W)^2$ , para obtener:

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial x}(f\Delta t + g\Delta W) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}\left(f(\Delta t)^2 + g\Delta t\Delta W\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[f^2(\Delta t)^2 + 2fg\Delta t\Delta W + g^2(\Delta W)^2\right] + \dots\end{aligned}$$

Como  $\Delta W \sim N(0, \sigma^2\Delta t)$  si  $\sigma = 1$  entonces  $\Delta W \sim N(0, \Delta t) \Rightarrow E(\Delta W) = 0$ . Si  $E(\Delta W^2) - E(\Delta W)^2 = E(\Delta W^2) = \Delta t \Rightarrow (\Delta W)^2 \leq \Delta t$  y  $|\Delta W| \leq (\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ . Por tanto, para  $\Delta t$  pequeños podemos aproximar  $(\Delta W)^2$  por  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial x}(f\Delta t + g\Delta W) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}\left(f(\Delta t)^2 + g\Delta t\Delta W\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[f^2(\Delta t)^2 + 2fg\Delta t\Delta W + g^2(\Delta t)\right] + \dots\end{aligned}$$

Agrupando los términos que multiplican a  $\Delta t$  y  $\Delta W$  tenemos:

$$\Delta F = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + f\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]\Delta t + g\frac{\partial F}{\partial x}\Delta W + O(\Delta t\Delta W)$$

con  $O(\Delta t\Delta W) \simeq O((\Delta t)^{\frac{3}{2}})$ . Si en la ecuación anterior tomamos  $\Delta t \rightarrow 0$  se verifica (2.3) y (2.4), y el Lema de Itô quedaría demostrado  $\square$

A continuación vamos a dar una segunda versión del Lema de Itô [18], que nos será de gran utilidad a lo largo del trabajo.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

**Teorema 2.3.** Sea  $X(t)$  un procesos estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo Itô:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

y sea  $F(t, x)$  una función  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas:

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t}$$

$$F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}$$

$$F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}$$

Entonces, para  $t > 0$  se cumple:

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) - F(s, x_0) &= \int_0^t F_1(r, X(r))dr + f(r, X(r))F_2(r, X(r))dr \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, X(r)))^2 F_{22}(r, X(r))dr \\ &\quad + \int_0^t g(r, X(r))F_2(r, X(r))dW(r) \end{aligned}$$

El lema de Itô nos permite pasar de una ecuación diferencial estocástica a otra de la cual se puede calcular la solución, pero otras veces no nos proporciona una solución de manera explícita. Para ello es útil tener fórmulas como las que da el siguiente resultado [17]:

**Teorema 2.4.** Si tenemos una ecuación diferencial estocástica del tipo:

$$dX(t) = [a(t)X(t) + c(t)] dt + [b(t)X(t) + d(t)] dW(t)$$

entonces se tiene:

$$X(t) = \Phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} (c(s) - b(s)d(s)) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} d(s) dW(s) \right) \quad (2.6)$$

donde  $\Phi_{t,t_0}$  vale:

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t \left( a(s) - \frac{b(s)^2}{2} \right) ds + \int_{t_0}^t b(s) dW(s) \right)$$

**Ejemplo 2.1.** Vamos a aplicar el resultado anterior a la ecuación diferencial del movimiento Browniano geométrico:

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Estamos en condiciones de aplicar la ecuación (2.6) donde, en nuestro caso, tenemos que  $a(t) = \mu$ ,  $b(t) = \sigma$ ,  $c(t) = 0$  y  $d(t) = 0$ . Sabiendo que  $\int_0^t dW(s) = W(t)$  tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi_{t,0} &= \exp \left( \int_0^t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dW(s) \right) \\ &= \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right] \end{aligned}$$

Y la solución de la ecuación del movimiento Browniano geométrico viene dada por:

$$X(t) = \Phi_{t,0} \cdot X(0) = x_0 \cdot \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]$$

### 2.3.3. Métodos numéricos

Los dos métodos que se van a desarrollar están basados en la versión discretizada de una ecuación diferencial estocástica. En primer lugar se describe uno de los métodos más ampliamente utilizado conocido como método o esquema de Euler-Maruyama. A partir de este, se introduce el método de Milstein, que añade un término de orden dos [10].

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

### 2.3.3.1. Método de Euler-Maruyama

A continuación se presenta uno de los esquemas más usados en la discretización de ecuaciones diferenciales estocásticas, el esquema o método de Euler-Maruyama.

En el cálculo de Itô, es un método para calcular la solución numérica aproximada de una ecuación diferencial estocástica (SDE). Es una extensión del método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias a ecuaciones diferenciales estocásticas.

Sea un proceso de Itô  $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  que es solución de la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

donde  $W(t)$  representa el proceso de Wiener y supongamos que se quiere resolver esta SDE en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .

La aproximación de Euler-Maruyama  $Y_i$  a la verdadera solución de  $X$  viene definida de la siguiente manera:

- Dividimos el intervalo  $[0, T]$  en  $N$  subintervalos iguales de longitud  $\Delta t = T/N$  siendo  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ .
- Establecemos la condición inicial  $Y_0 = x_0$ .
- Definimos recursivamente  $Y_i$  para  $1 \leq i \leq N$

$$Y_{i+1} = Y_i + f(t_i, Y_i)\Delta t + g(t_i, Y_i)\Delta W_i$$

donde  $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ .

Las variables  $\Delta W_i$  son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas, es decir,  $\Delta W_i \sim \sqrt{\Delta t}Z$  con  $Z \sim N(0, 1)$ .

## 2.3.3.2. Método de Milstein

En matemáticas, es una técnica que se usa para hallar la solución numérica aproximada de una ecuación diferencial estocástica (SDE). Lleva el nombre de Grigori N. Milstein, quien publicó por primera vez el método en 1974 [13].

Este método se utiliza para incrementar la precisión del método de Euler-Maruyama. Esto se consigue introduciendo un término de orden 2 al utilizar la derivada parcial respecto de  $x$  de  $g(t, x)$ .

Dado un proceso de Itô  $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  que es solución de la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

donde  $W(t)$  representa el proceso de Wiener y supongamos que se quiere resolver esta SDE en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . La aproximación del método de Milstein  $Y_i$  a la verdadera solución de  $X$  viene dada por:

- Se divide el intervalo  $[0, T]$  en subintervalos de tamaño  $\Delta t = T/N$  con  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ .
- Tomamos como condición inicial  $Y_0 = x_0$ .
- Definimos recursivamente  $Y_i$  para  $1 \leq i \leq N$  por:

$$Y_{i+1} = Y_i + f(t_i, Y_i)\Delta t + g(t_i, Y_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}g(t_i, Y_i)\frac{\partial g(t_i, Y_i)}{\partial x}[(\Delta W_i)^2 - \Delta t]$$

donde  $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ .

Las variables  $\Delta W_i$  son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas, es decir,  $\Delta W_i \sim \sqrt{\Delta t}Z$  con  $Z \sim N(0, 1)$ .

Como vemos la expresión del esquema es el mismo que el de Euler, salvo que se añade el sumando

$$\frac{1}{2}g(t_i, Y_i)\frac{\partial g(t_i, Y_i)}{\partial x}[(\Delta W_i)^2 - \Delta t]$$

Por tanto, si  $\frac{\partial g(t, x)}{\partial x}$  resulta ser 0 este método es equivalente al método de Euler-Maruyama.

## 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Cuando se tiene que un método cumple  $E(|Y_i - X(t_i)|) \leq K(\Delta t)^\gamma$  para cierto  $\gamma$  se dice que ese método es una aproximación fuerte de orden  $\gamma$ .

Aplicando esto se tiene que el método de Euler-Maruyama es una aproximación fuerte de orden  $\gamma = 1/2$  mientras que, el método de Milstein es una aproximación fuerte de orden  $\gamma = 1$  si  $f(t, X_t)$  y  $g(t, X_t)$  son funciones  $\mathcal{C}^1$ . Las funciones con las que se está trabajando en estos modelos cumplen esto, por lo que el orden de convergencia del método de Milstein siempre será mayor que el de Euler-Maruyama.

## 3. Modelos diferenciales estocásticos

Como hemos dicho, nuestro estudio se centra en ecuaciones diferenciales estocásticas que contienen una componente determinista y una aleatoria o estocástica que involucra al movimiento Browniano. Entre los procesos estocásticos más estudiados se encuentra el movimiento Browniano geométrico, el proceso de Vasicek y el proceso CIR.

### 3.1. Movimiento Browniano geométrico

El movimiento Browniano geométrico o modelo Log-normal es un proceso estocástico que suele usarse con mucha frecuencia en el ámbito financiero para modelar los activos financieros [18].

Este modelo se basa en la siguiente ecuación diferencial estocástica tipo Itô:

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde:

- $x_0$  representa el valor en el instante  $t = 0$ .
- $\mu \in \mathbb{R}$  es un parámetro del modelo denominado drift o tendencia.
- $\sigma > 0$  es un parámetro del modelo denominado volatilidad local.
- $W(t)$  es un proceso estocástico de Wiener o Movimiento Browniano.

En la figura 3.1 se puede observar algunos caminos del Movimiento Browniano Geométrico para  $x_0 = 3$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 0,5$ .

A continuación, haciendo uso del cálculo de Itô, en particular del Lema de Itô, visto en el capítulo anterior, hallaremos la solución del modelo, así como la media y la varianza.

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

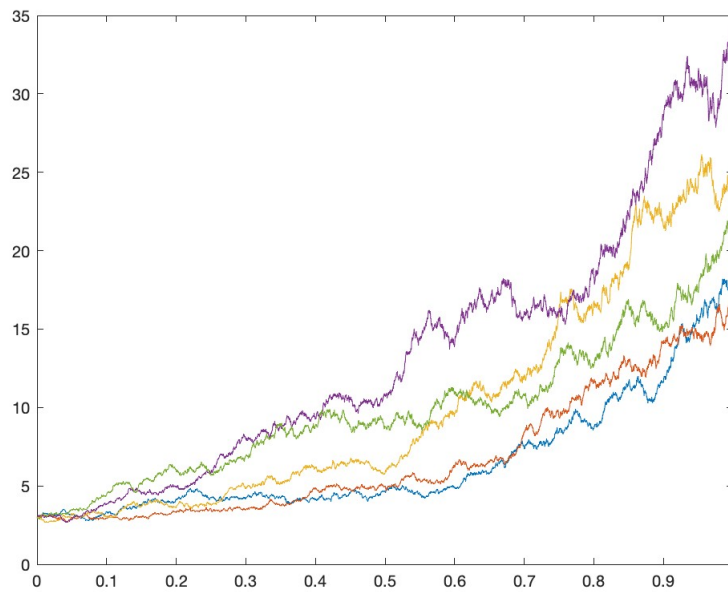


Figura 3.1.: Caminos simulados del Movimiento Browniano Geométrico

Escribimos (3.1) en forma integral:

$$\int_0^t dX(r) = \int_0^t \mu X(r) dr + \int_0^t \sigma X(r) dW(r)$$

o equivalentemente:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mu X(r) dr + \int_0^t \sigma X(r) dW(r)$$

A continuación, aplicamos el Lema de Itô:

$$f(t, x(t)) = \mu X(t)$$

$$g(t, x(t)) = \sigma X(t)$$

escogiendo

$$F(t, x) = \ln(x)$$

### 3.1. Movimiento Browniano geométrico

Calculamos las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= \frac{1}{x} \\ \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\ln(X(t)) - \ln(x_0) &= \int_0^t \left( \mu X(r) \frac{1}{X(r)} + \frac{1}{2} (\sigma X(r))^2 \left( \frac{-1}{(X(r))^2} \right) \right) dr \\ &\quad + \int_0^t \sigma X(r) \frac{1}{X(r)} dW(r)\end{aligned}$$

simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}\ln \left( \frac{X(t)}{x_0} \right) &= \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dW(r) \\ \ln \left( \frac{X(t)}{x_0} \right) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0))\end{aligned}$$

Como  $W(0) = 0$  con probabilidad 1 se obtiene:

$$\ln \left( \frac{X(t)}{x_0} \right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t)$$

Operando de manera oportuna tenemos:

$$\frac{X(t)}{x_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

$$X(t) = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

Por tanto, la expresión de la solución del Modelo Log- Normal es:

$$X(t) = x_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}$$

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

La solución anterior se utiliza para hacer predicciones con una cierta confianza, por ello es importante calcular las funciones media y varianza en  $t = T$ .

Tomando el operador media tenemos

$$E[X(T)] = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma W(T)}]$$

La propiedad de  $\frac{1}{2}$ -autosemejanza del Movimiento Browniano nos decía que:

$$W(T \cdot t) = \sqrt{T} \cdot W(t), \quad t \geq 0, T \geq 0$$

aplicada al caso particular  $t = 1$  se tiene:

$$W(T) = \sqrt{T} \cdot W(1)$$

donde por definición de Movimiento Browniano se sabe que  $W(1) \sim N(0, 1)$ . Por tanto

$$E[X(T)] = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma \sqrt{T} W(1)}]$$

Por otra parte se requiere de la siguiente propiedad:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N(0, 1)$$

Aplicándola se tiene:

$$E[X(T)] = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{(\sigma \sqrt{T})^2}{2}}$$

Por tanto,

$$E[X(T)] = x_0 e^{\mu T}$$

Si queremos comprobar que los valores esperados de la media y la desviación estándar coinciden con los valores teóricos calculados no nos bastará con 10 caminos, así que tendremos que aumentar al número de simulaciones.

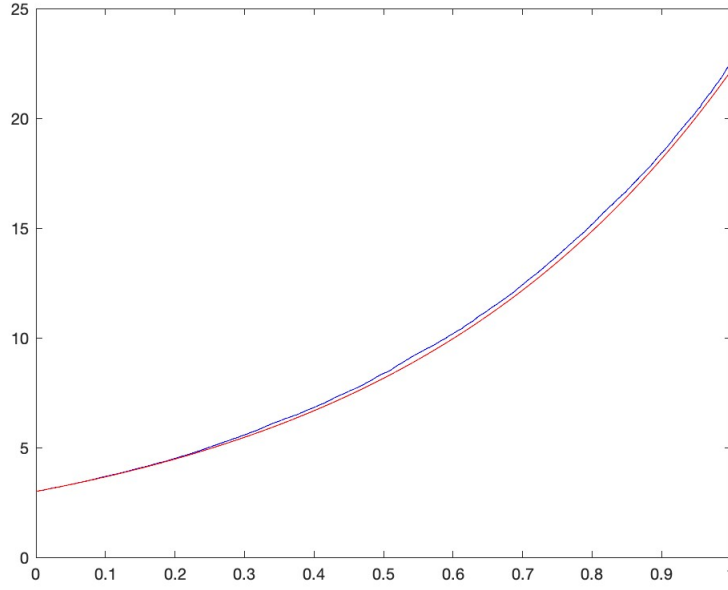


Figura 3.2.: Comparación media numérica (Azul) y teórica (Roja) del Movimiento Browniano Geométrico usando el método de Euler-Maruyama para 1000 caminos, con  $x_0 = 3$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 0,5$  y 5000 subintervalos.

La comparación de la media numérica calculada a partir de 1000 caminos y la media teórica del Movimiento Browniano Geométrico se puede observar en la figura 3.2.

Ahora calculamos la varianza de manera análoga a la media:

$$\begin{aligned}
 Var[X(T)] &= E[(X(T))^2] - E[X(T)]^2 \\
 &= E\left[x_0^2 e^{2\mu W(T) + 2(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}\right] - x_0^2 e^{2\mu T} \\
 &= x_0^2 e^{2\mu T} (E[e^{2\sigma W(T)}] e^{-\sigma^2 T} - 1) \\
 &= x_0^2 e^{2\mu T} (e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} e^{-\sigma^2 T} - 1)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Var[X(T)] = x_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

Así se tiene que la varianza crece a medida que lo hace  $T$ .

De la misma forma que antes, a partir de 1000 simulaciones, en la figura 3.3 se puede ver como la desviación estándar numérica se aproxima a la teórica.

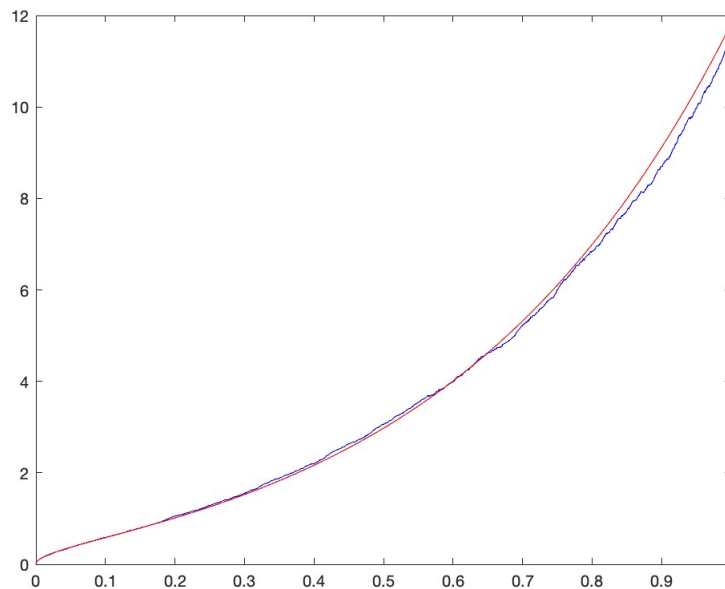


Figura 3.3.: Comparación desviación estándar numérica (Azul) y teórica (Roja) del Movimiento Browniano Geométrico usando el método de Euler para 1000 caminos, con  $x_0 = 3$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 0,5$  y 5000 subintervalos.

El método de Euler-Maruyama es una aproximación de primer orden por lo que es interesante aplicar otro método de orden superior que sea más preciso, como puede ser el método de Milstein.

En la figura 3.4 se puede ver la comparación de la media y la desviación estándar numéricas frente a las teóricas aplicando el método de Milstein para el Movimiento Browniano Geométrico.

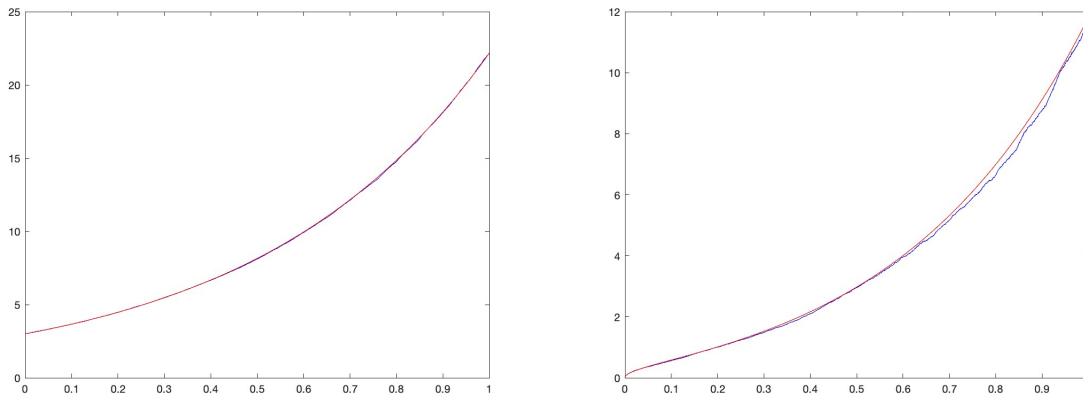


Figura 3.4.: Comparación media (izquierda) y desviación estándar (derecha) numéricas (Azules) y teóricas (Rojas) del Movimiento Browniano Geométrico usando el método de Milstein.

Si comparamos el error que se comete con ambos métodos respecto a la media y a la varianza, obtenemos resultados muy parecidos (véase la tabla 3.1), por tanto, podemos afirmar que ambos métodos son buenos y que aproximan bien los valores exactos.

|                  | Euler   | Milstein |
|------------------|---------|----------|
| Error media      | 0.04227 | 0.0013   |
| Error desviación | 0.0284  | 0.0221   |

Cuadro 3.1.: Comparación errores método de Euler y Milstein

## 3.2. Modelo de Vasicek

Este modelo fue introducido en 1977 por Oldrich Vasicek [21] para predecir los tipos de interés a largo plazo mediante la simulación de tipos de interés a corto plazo basándose en un proceso de tipo Ornstein–Uhlenbeck [20].

Sea  $\{W(t), t \geq 0\}$ , un movimiento Browniano definido sobre  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , el modelo de Vasicek viene dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma dW(r) \\ r(0) = r_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

con  $\alpha > 0$ ,  $\sigma > 0$  y  $\mu > 0$ .

Este tipo de ecuación ha sido usado extensamente para la evaluación de bonos y derivados que requieren de una estimación de la estructura temporal. En la figura 3.5 se puede observar algunos caminos del proceso de Vasicek.

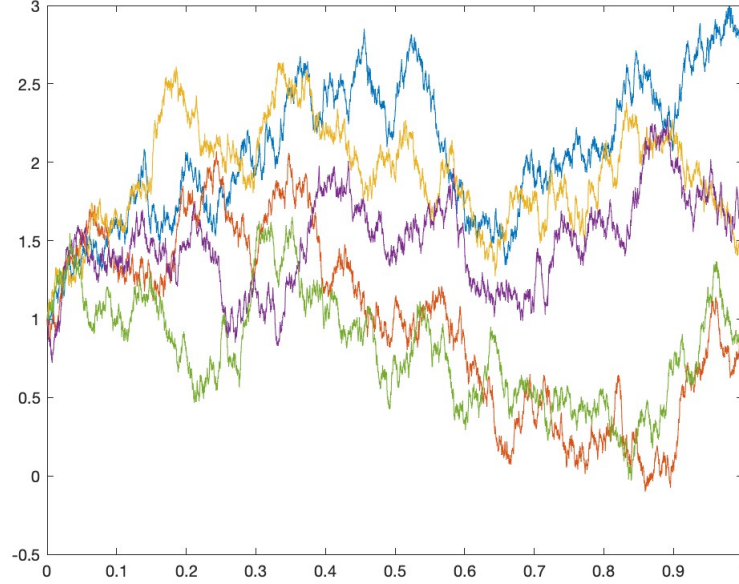


Figura 3.5.: Caminos simulados del modelo de Vasicek.

La ecuación anterior es una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô la cual se puede resolver aplicando el Cálculo de Itô como se muestra a continuación.

En primer lugar vamos a reformular la ecuación haciendo el siguiente cambio de variable:

$$X(t) = r(t) - \mu \Rightarrow \begin{cases} r(t) = X(t) + \mu \\ dX(t) = dr(t) \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha(-X(t))dt + \sigma dW(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW(t) \\ X(0) &= r(0) - \mu = r_0 - \mu \end{aligned}$$

Por tanto, la nueva ecuación del modelo viene dada por:

$$\begin{cases} dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW(t) \\ X(0) = r_0 - \mu \end{cases}$$

A continuación aplicamos el Lema de Itô:

$$f(t, X(t)) = -\alpha X_t$$

$$g(t, X(t)) = \sigma$$

escogiendo

$$F(t, X) = e^{\alpha t} X$$

Es necesario calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t} X$$

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial X} = e^{\alpha t}$$

$$\frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial x^2} = 0$$

Una vez calculadas aplicamos la fórmula del Lema de Itô:

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} X(t) - e^{\alpha 0} X(0) &= \int_0^t (\alpha e^{\alpha s} X(s) - \alpha X(s) e^{\alpha s}) ds \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 0 ds + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s) \end{aligned}$$

simplificando obtenemos:

$$e^{\alpha t} X(t) - X(0) = \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s)$$

Despejando  $X(t)$ , se llega a:

$$X(t) = e^{-\alpha t} \left( X(0) + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \right)$$

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

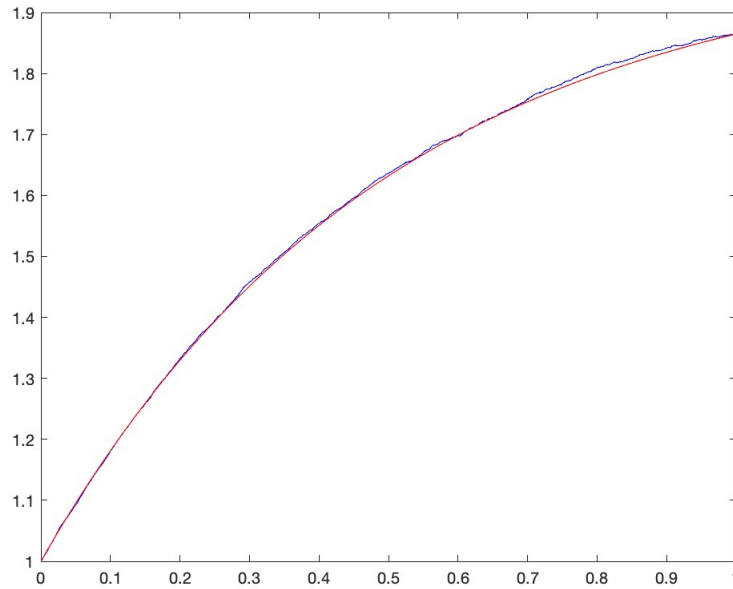


Figura 3.6.: Comparación media numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo de Vasicek con el método de Euler para 1000 caminos, con  $x_0 = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 0,5$  y 5000 subintervalos.

La incógnita a calcular inicialmente era  $r(t)$  por tanto se debe deshacer el cambio de variable que se introdujo:  $X(t) = r(t) - \mu$  con  $X(0) = r(0) - \mu$

$$r(t) - \mu = e^{-\alpha t} \left( r(0) - \mu + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \right)$$

Simplificando la última expresión y teniendo en cuenta que  $r(0) = r_0$  se tiene:

$$r(t) = \mu + e^{-\alpha t} (r_0 - \mu) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s)$$

A partir de esto, vemos que puede ser negativo, lo que no suele ser una propiedad deseable en muchas ocasiones. Esto se puede ver observando en la gráfica 3.5.

La densidad de la distribución de  $r(t)$  dada una condición inicial,  $r(0) = r_0$  es una normal con media:

$$\begin{aligned}
E[r_t|r_0] &= \mu + e^{-\alpha t} (r_0 - \mu) + \sigma E \left[ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right] \\
&= \mu + e^{-\alpha t} (r_0 - \mu) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} E[dW(s)]
\end{aligned}$$

Como  $dW(s) = \Delta W(s) = W(s) - W(s - \Delta t) \sim N(0, \Delta t) \Rightarrow E[dW(s)] = 0$ , por tanto se tiene que

$$E[r_t|r_0] = \mu + e^{-\alpha t} (r_0 - \mu)$$

Si hacemos tender  $t$  a infinito y usando que  $\alpha > 0$  tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r_t] = \mu$$

Nótese que el valor esperado describe un movimiento que tiende a  $\mu$  () la media, a mayor velocidad cuanto mayor es  $|r_0 - \mu|$  y  $|\alpha|$ . En este caso, el límite  $t \rightarrow \infty$  diverge.

Si fuese  $\alpha < 0$ , el valor esperado describe un movimiento que se aleja de  $\mu$ , a mayor velocidad cuanto mayor es  $|r_0 - \mu|$

La varianza condicionada viene dada por

$$\begin{aligned}
Var[r_t|r_0] &= Var \left[ \mu + e^{-\alpha t} (r_0 - \mu) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right] \\
&= Var \left[ \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \right]
\end{aligned}$$

Si tomamos  $s < s'$  se tiene que

$$\begin{aligned}
Cov(dW(s), dW(s')) &= E[(dW(s) - E[dW(s)])(dW(s') - E[dW(s')])] \\
&= E[dW(s)dW(s')] \\
&= E[(dW(s) + dW(s') - dW(s))dW(s)] \\
&= E[dW(s)^2] + E[(dW(s') - dW(s))dW(s)] = ds
\end{aligned}$$

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

Teniendo en cuenta que  $\text{Var}[aX + b] = a^2\text{Var}[X]$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales cualesquiera y que  $\text{Var}[dW(s)] = ds$ , de la expresión de la varianza se obtiene:

$$\text{Var}[r_t|r_0] = \sigma^2 \int_0^t \left( e^{-\alpha(t-s)} \right)^2 ds$$

Desarrollando el término de la derecha se obtiene la varianza del proceso estocástico solución:

$$\text{Var}[r_t|r_0] = \sigma^2 e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \left[ e^{2\alpha s} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left( 1 - e^{-2\alpha t} \right)$$

Consecuentemente, si hacemos tender  $t$  a infinito se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

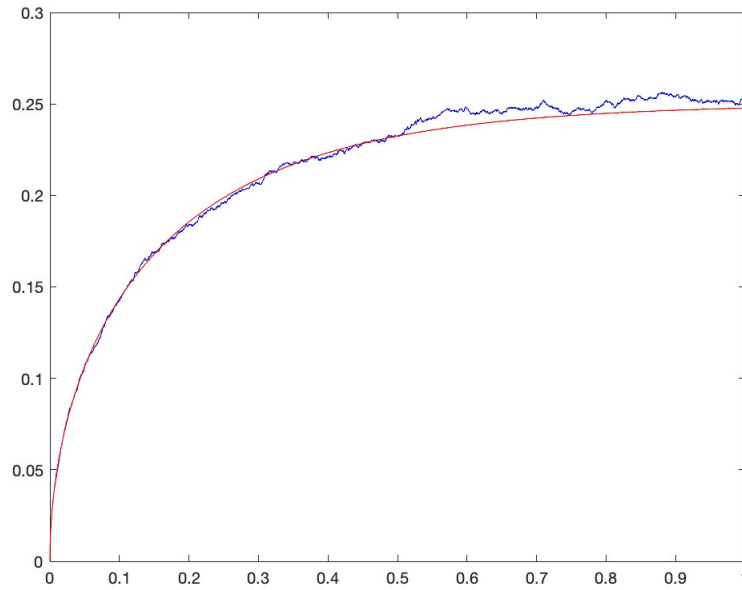


Figura 3.7.: Comparación desviación estándar numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo de Vasicek con el método de Euler para 1000 caminos, con  $x_0 = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 0,5$  y 5000 subintervalos.

### 3.3. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Este modelo surge en 1985 de la mano de John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll y Stephen A. Ross [3] como una mejora del modelo de Vasicek para afrontar las tasas de interés negativas de este. La aplicación de modelo CIR es muy importante en economía y existen numerosos estudios sobre extensiones de este modelo y su calibrado [15, 16].

El modelo CIR se basa en la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} dX(t) = \alpha(\mu - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Aquí,  $\alpha, \mu$  y  $\sigma$  son constantes positivas,  $X(t)$  es la tasa de interés,  $t$  es el tiempo y  $W(t)$  denota el proceso estándar de Wiener.

Sobre los parámetros cabe mencionar lo siguiente:

- $\alpha(\mu - X(t))$  es el mismo factor que en el modelo de Vasicek, por lo que la interpretación de la solución determinista es la misma.
- El factor de desviación estándar  $\sigma\sqrt{X(t)}$  elimina las tasas negativas.
- $\sqrt{X(t)}$  incrementa la desviación estándar cuando la tasa a corto plazo se incrementa.

Este modelo solo puede tener soluciones positivas, ya que cuando la tasa de interés es 0 acaba siendo positiva subsecuentemente. Además, cuando es baja o cercana a 0 la desviación estándar es cercana a 0.

La única solución de (3.3) es lo que se conoce como proceso CIR. Se tiene que:

$$X_t = X_s + \int_s^t \alpha(\mu - X_u)du + \sigma \int_s^t \sqrt{X_u}dW_u, \quad s < t$$

Por tanto,

$$E[X_t|X_s] = X_s + \int_s^t \alpha(\mu - E[X_u|X_s])du, \quad s < t$$

Si llamamos  $m_t = E[X_t|X_s]$  se tiene

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

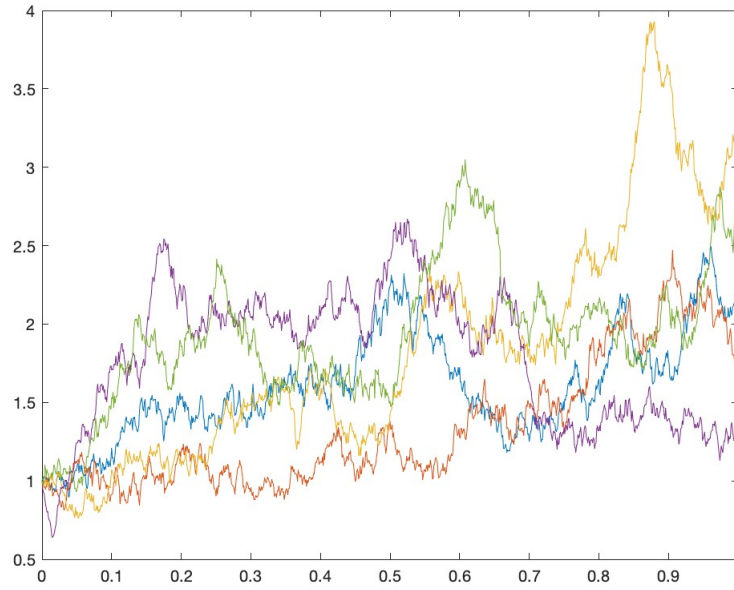


Figura 3.8.: Caminos simulados del modelo CIR.

$$\frac{d}{dt}m_t = \alpha(\mu - m_t), \quad s < t$$

cuya solución es:

$$m_t = X_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)})$$

Por tanto,

$$E[X_t|X_s] = X_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)}), \quad s < t$$

De manera similar se llega a que la varianza es:

$$\text{Var}[X_t|X_s] = \frac{X_s \sigma^2}{\alpha} (e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)}) + \frac{\mu \sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-s)})^2$$

Como se ha dicho al principio la ventaja fundamental de este modelo frente al modelo de Vasicek es que las soluciones son no negativas. Sin embargo, la

### 3.3. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

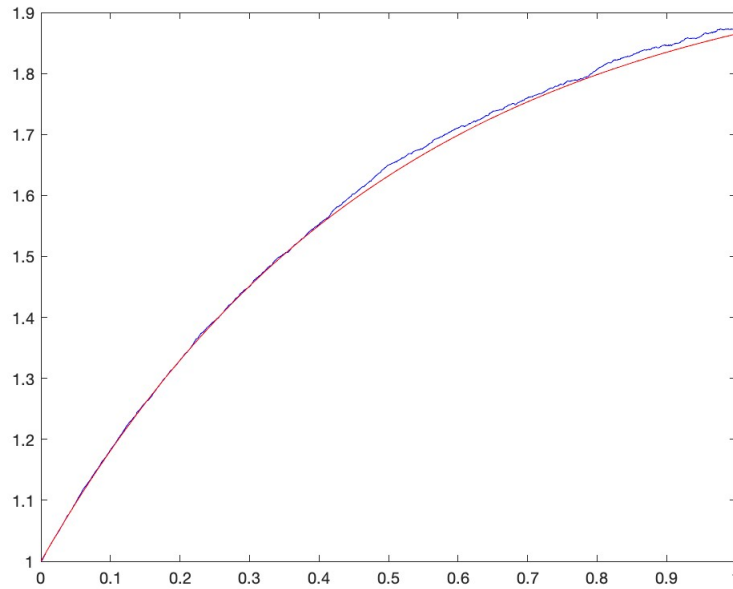


Figura 3.9.: Comparación media numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo CIR con el método de Euler para 1000 caminos, con  $x_0 = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 1$  y 5000 subintervalos.

distribución del modelo CIR no es Gaussiana como en la de Vasicek, lo que hace que sea más difícil su análisis.

La función de densidad viene dada por:

$$f(X_s, s, X_t, t) = ce^{-(u+v)} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv})$$

donde

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \\ u &= cX_s e^{-\alpha\Delta t} \\ v &= cX_t \\ q &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} - 1 \\ \Delta t &= t - s \end{aligned}$$

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

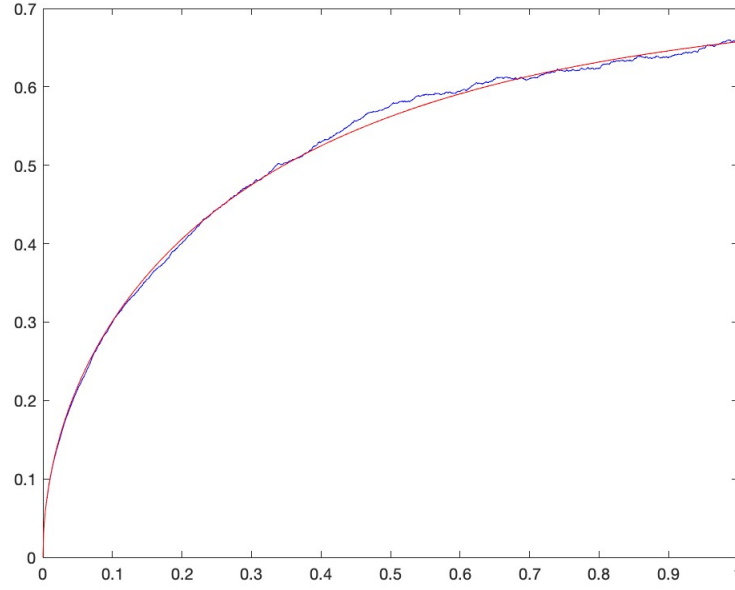


Figura 3.10.: Comparación desviación estándar numérica (Azul) y teórica (Roja) del modelo CIR con el método de Euler para 1000 caminos, con  $x_0 = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 2$  y  $\sigma = 1$  y 5000 subintervalos.

$I_q(\cdot)$  es una función de Bessel de primer tipo y orden  $q$ :

$$I_q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+q} \frac{1}{k! \Gamma(j+q+1)}$$

siendo  $\Gamma$  la función gamma.

Sea  $z_t = 2cr_t$ . Entonces la distribución condicionada de  $z_t$  dado  $z_s$  es una  $\chi_d^2(2u)$  no centrada, con  $d = \frac{4\alpha\mu}{\sigma^2}$  grados de libertad y el parámetro de no centralidad es  $\lambda = 2u$ .

Por tanto,

$$z_t | z_s \sim \chi^2(d, \lambda)$$

donde:

$$d = \frac{4\alpha\mu}{\sigma^2}$$

$$\lambda = \frac{4\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})} e^{-\alpha\Delta t} r_s$$

### 3.3. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Como  $z_t = 2cr_t$ ,  $r_t$  condicionado a  $r_s$  tiene la misma distribución que  $z_t/2c$  condicionado a  $z_s/2c$ . Por tanto,

$$r_t|r_s \sim \frac{z_t}{2c}|\frac{z_t}{2c} \sim \frac{1}{2c}\chi^2(d, \lambda)$$

Para terminar este capítulo vamos a hacer un estudio de los diferentes comportamientos que puede presentar la solución determinista de la ecuación del modelo CIR, lo cual nos será de utilidad en el siguiente capítulo para dar una interpretación de los parámetros del modelo, aunque sabemos que la parte estocástica daría oscilaciones respecto a dicho comportamiento.

Consideramos

$$dX = \alpha(\mu - X)dt$$

Haciendo separación de variables tenemos

$$\frac{dX}{\alpha(\mu - X)} = dt$$

Integrando ambos miembros obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\alpha} \log |\mu - X| + c &= t \\ \log |\mu - X| &= \alpha(c - t) \end{aligned}$$

Tomando exponenciales se tiene

$$|\mu - X| = e^{\alpha(c-t)} = e^{-\alpha t} \cdot C$$

siendo  $C$  una constante.

Distinguimos dos casos, dependiendo si  $X$  es mayor o menos que  $\mu$  y en cada caso dos subcasos, dependiendo si  $\alpha$  es positiva o negativa.

1. Si  $X < \mu$ :

- Si  $\alpha > 0$  entonces  $X$  tiende a  $\mu$  por abajo con una exponencial decreciente.
- Si  $\alpha < 0$  entonces  $X$  se aleja de  $\mu$  por debajo con una exponencial creciente.

### 3. Modelos diferenciales estocásticos

2. Si  $X > \mu$ :

- Si  $\alpha > 0$  entonces  $X$  tiende a  $\mu$  por arriba con una exponencial decreciente.
- Si  $\alpha < 0$  entonces  $X$  se aleja de  $\mu$  por arriba con una exponencial creciente.

Ahora ya estamos en condiciones de pasar al siguiente capítulo donde pondremos en práctica lo visto en los capítulos anteriores y aplicándolo a un caso real, como es el impacto de la pandemia del COVID-19 en la ciudad de Jaén.

## 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

El objetivo de este capítulo es dar aproximaciones numéricas de la evolución de la pandemia del COVID-19 en Jaén utilizando el software MATLAB.

En primer lugar se dará un breve resumen sobre qué es el COVID-19 y sobre cuándo aparecieron los primeros casos en España, y concretamente, en Jaén, a principios del año 2020.

A continuación, para dar una primera aproximación, se elegirá el modelo CIR visto en el capítulo 3. Para su aplicación usaremos los datos de las medias móviles de la capital a 14 días, es decir, cada dato representa el promedio de los infectados en los 14 días anteriores. Nuestro mayor problema será estimar los parámetros del modelo CIR, de tal forma que éste se ajuste lo mejor posible a los datos que se tienen sobre los casos de COVID en Jaén.

Seguidamente se dará otra aproximación, esta vez aplicando un modelo estadístico ARIMA (AutoRegresive Integrated Moving Average), para posteriormente comparar los resultados con los del modelo anterior.

### 4.1. El COVID-19

La enfermedad del coronavirus 2019 (COVID-19) es una enfermedad pulmonar producida por el síndrome respiratorio agudo grave coronavirus 2 (SARS-CoV-2). En diciembre de 2019, las autoridades chinas informaron sobre diferentes casos de este virus en Wuhan. Esta enfermedad se expandió rápidamente a todo el mundo desde menos de 30 casos a finales de diciembre del 2019 a mas de 8.455.738 casos confirmados el 20 de junio de 2021.

El primer caso en España fue un turista alemán, el 31 de enero de 2021, que estaba de vacaciones en La Gomera. A partir de ese momento, se empezaron a confirmar varios casos en todo el país. En Andalucía, el primer positivo se detectó en el Hospital Virgen del Rocío de Sevilla el 26 de febrero de 2020. Dos

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

días después se confirmó el primer caso en la provincia de Jaén, en Arjonilla, y el 6 de marzo se registró el primer caso de coronavirus en la capital.

Con el paso de los días, tras el elevado número de contagios en el país, se decretó el 14 de marzo el estado de alarma que se prorrogó hasta el 21 de junio. La aplicación de medidas como el empleo de mascarilla, los confinamientos perimetrales, el cierre de servicios no esenciales, etc., mejoraron el índice de contagios a las dos semanas de la declaración de cuarentena.

Durante estos años, multitud de investigadores de varias disciplinas han utilizado diversas herramientas de modelado para analizar el impacto de la pandemia a nivel global y local. En nuestro caso nos vamos a centrar en aproximar los contagios en Jaén de dos maneras diferentes. La primera se basará en el modelo CIR, estudiado en el capítulo 3 y la segunda, en un modelo ARIMA.

Los datos que tenemos son las medias móviles a 14 días de los infectados en la capital, desde el 2 de febrero de 2020 hasta el 8 de octubre de 2021 y han sido cedidos por la Consejería de Salud y Familia de la Junta de Andalucía.

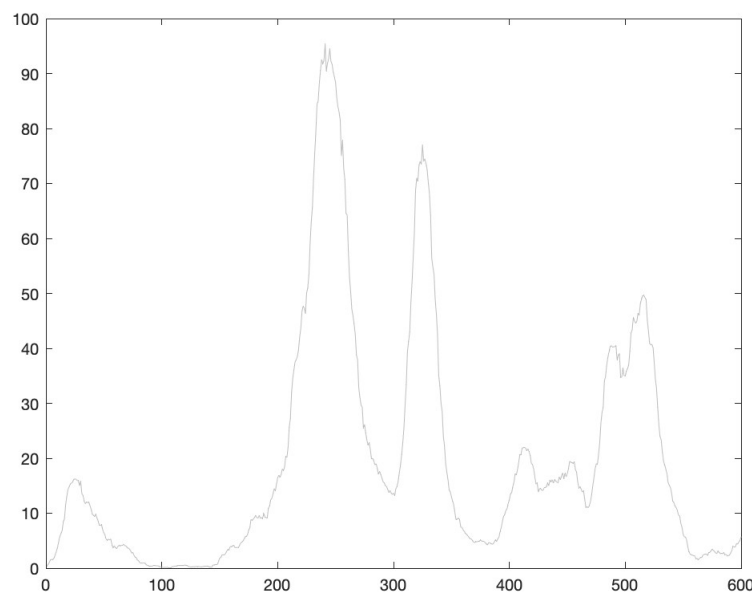


Figura 4.1.: Total casos capital por días medias móviles 14 días. En el eje de abscisas se representan los días transcurridos desde el 2 de febrero de 2021.

Nosotros solo usaremos algunos de esos datos, atendiendo a las etapas de la pandemia que nos resulten más interesantes, ya sean por un repunte de casos o por la baja incidencia, y se intentará dar una explicación a dicho fenómeno.

En la figura 4.1 representamos el total de casos en la capital por días de las medias móviles de 14 días.

## 4.2. Modelo CIR

El modelo que se va utilizar para modelar los datos del COVID es el modelo CIR, que como vimos en el capítulo 3 viene dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

En este capítulo utilizaremos la notación simplificada  $X_t = X(t)$ .

### 4.2.1. Estimación de los parámetros

Para aproximar bien los datos es necesario dar un buen ajuste de los parámetros. En el caso del modelo CIR debemos estimar tres parámetros,  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ . Generalmente nos referiremos a ellos como el vector de parámetros  $\theta \equiv (\alpha, \mu, \sigma)$ . El procedimiento que se seguirá para estimar los parámetros es el que se muestra en [9] y es el método de máxima verosimilitud, conocido como EMV y, en ocasiones MLE, por sus siglas en inglés, el cual se basa en maximizar la función objetivo de estudio. Para la estimación de máxima verosimilitud del vector de parámetros  $\theta \equiv (\alpha, \mu, \sigma)$  se requieren las densidades de transición. El proceso CIR es uno de los procesos de los que conocemos su función de densidad de forma explícita. Dado  $X_t$  en el tiempo  $t$ , la densidad de  $X_{t+\Delta t}$  en el tiempo  $t + \Delta t$  es:

$$p(X_{t+\Delta t}|X_t; \theta, \Delta t) = ce^{-(u+v)} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv})$$

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

donde

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \\ u &= cX_t e^{-\alpha\Delta t} \\ v &= cX_{t+\Delta t} \\ q &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} - 1 \end{aligned}$$

siendo  $I_q(2\sqrt{uv})$  una función de Bessel.

La función de verosimilitud para series de tiempo con  $N$  observaciones es:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{N-1} p(X_{t_{i+1}} | X_{t_i}; \theta, \Delta t) \quad (4.1)$$

Para simplificar los cálculos se suele trabajar con la expresión de log-verosimilitud que consiste en tomar logaritmos en la ecuación (4.1).

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln p(X_{t_{i+1}} | X_{t_i}; \theta, \Delta t)$$

de donde se puede derivar fácilmente la función de log-verosimilitud del proceso CIR.

$$\ln L(\theta) = (N-1) \ln c \sum_{i=1}^{N-1} \left[ -u_{t_i} - v_{t_{i+1}} + 0,5q \ln \left( \frac{v_{t_{i+1}}}{u_{t_i}} \right) + \ln (I_q (2\sqrt{u_{t_i}v_{t_{i+1}}})) \right] \quad (4.2)$$

donde  $u_{t_i} = cX_{t_i}e^{-\alpha\Delta t}$  y  $v_{t_{i+1}} = cX_{t_{i+1}}$

Para encontrar la estimación de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  del vector de parámetros  $\theta$  hay que maximizar la función (4.2) sobre su espacio de parámetros.

$$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta) \quad (4.3)$$

Como la función logaritmo es monótonamente creciente, maximizar la función de log-verosimilitud es equivalente a maximizar la función de verosimilitud.

Para resolver el problema (4.3) recurrimos al cálculo numérico.

Para la convergencia óptima global, los puntos iniciales de optimización son esenciales, para ello se va a usar el método de mínimos cuadrados.

Primero escribimos la ecuación del método CIR discretizada:

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \alpha(\mu - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{X_t}W_t \quad (4.4)$$

donde  $W_t$  se distribuye con media cero y varianza  $\Delta t$ .

Dividiendo la ecuación (4.4) por  $\sqrt{X_t}$  obtenemos:

$$\frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\sqrt{X_t}} = \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{X_t}} - \alpha\sqrt{X_t}\Delta t + \sigma W_t$$

Atendiendo a esta expresión, los valores iniciales de  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\mu}$  se encuentran minimizando la función:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\mu}) = \arg \min_{\alpha, \mu} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{X_{t_{i+1}} - X_{t_i}}{\sqrt{X_{t_i}}} - \frac{\alpha\mu\Delta t}{\sqrt{X_{t_i}}} + \alpha\sqrt{X_{t_i}}\Delta t \right)^2$$

La expresión exacta de la solución se encuentra en la página 3 de [9]. La estimación de  $\hat{\sigma}$  se encuentra como la desviación estándar de los residuos. La implementación en Matlab se puede encontrar en el Anexo, en la función *Cirestimation*.

Para implementar la función objetivo (4.2) se necesita evaluar la función de Bessel  $I_q(2\sqrt{uv})$ . En Matlab se encuentra implementada la función *besseli*, pero esta suele dar problemas, porque la función  $I_q = (2\sqrt{uv})$  se aproxima muy rápidamente a infinito. Afortunadamente, Matlab nos permite dar otra versión escalada, a la que llamaremos  $I_q^1(2\sqrt{uv})$ , que resuelve el problema de divergencia de manera que:

$$I_q^1(2\sqrt{uv}) = I_q(2\sqrt{uv}) \exp(-2\sqrt{uv})$$

Y por tanto:

$$I_q(2\sqrt{uv}) = \frac{I_q^1(2\sqrt{uv})}{\exp(-2\sqrt{uv})}$$

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

Reescribiendo la expresión (4.2) se obtiene :

$$\ln L(\theta) = (N - 1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} (-u_{t_i} - v_{t_{i+1}} + 0,5q \ln \left( \frac{v_{t_{i+1}}}{u_{t_i}} \right) + \ln \left( I_q^1(2\sqrt{u_{t_i}v_{t_{i+1}}}) \right) + 2\sqrt{u_{t_i}v_{t_{i+1}}})$$

El código de Matlab de la log-verosimilitud usando Besseli se puede encontrar en el Anexo con el nombre *CIRObjective1*.

#### 4.2.2. Simulaciones numéricas

Presentamos los resultados de estimar el proceso CIR para series de tiempo de observaciones diarias de positivos COVID en la ciudad de Jaén.

Para obtener una aproximación de la solución exacta de la ecuación necesitamos establecer un esquema numérico. En nuestro caso implementaremos el esquema numérico de Euler-Maruyama y el de Milstein, para ver si existen diferencias destacables entre ellos.

Como tenemos datos diarios establecemos el paso en el tiempo  $\Delta t = 1$ . Para comparar ambos métodos y ver que ajustan bien los datos reales que tenemos, vamos a elegir un periodo de tiempo concreto. Se va a tomar una ventana de 50 días a partir del primer dato real que se tiene y se estimarán los 30 días siguientes, es decir, del día 51 al 80, a partir de 1000 simulaciones. La predicción se hace para el día siguiente al último de la ventana, se desplaza la ventana en una unidad a la derecha y se repite el proceso.

En la figura 4.2, la curva roja representa la estimación aplicando el método de Euler-Maruyama de los casos reales COVID usando una media móvil de 14 días y las curvas negras discontinuas el intervalo de confianza al 95 %. Se puede observar que los datos reales, representados por la curva gris, están dentro del intervalo de confianza dado, con lo que podemos concluir que el modelo es adecuado. Del mismo modo, en la misma figura se muestra la aproximación a los casos COVID reales utilizando el método de Milstein. La curva azul representa la estimación de Milstein y las curvas negras discontinuas el intervalo de confianza al 95 %.

A simple vista podríamos decir que las dos estimaciones son prácticamente idénticas. Para compararlas de manera exacta se han intentado representar en la misma gráfica pero a esa escala una estimación cubre la otra, por lo

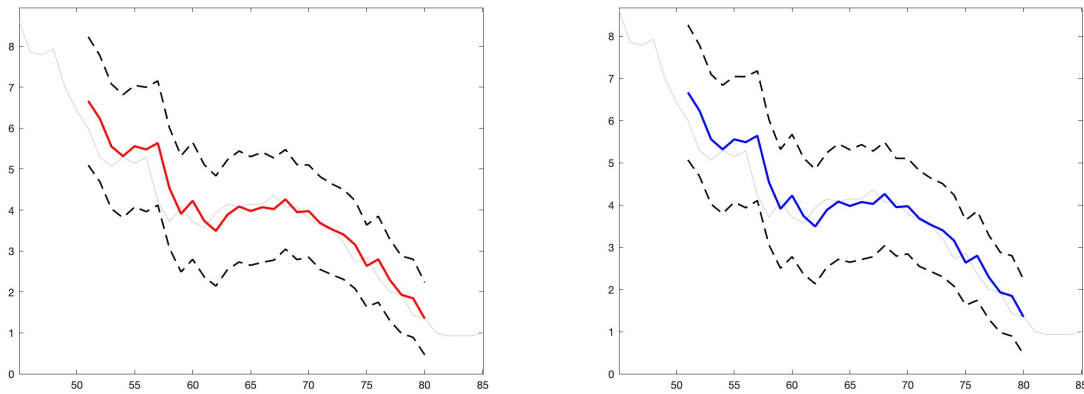


Figura 4.2.: Estimaciones aplicando los métodos de Euler (rojo) y Milstein (azul) para el modelo CIR, con  $\text{win}=50$ ,  $\text{tin}=1$ ,  $\text{nforecast}=30$  y  $\text{nsim}=1000$ .

que se ha decidido no incluirla en la memoria. Con el fin de comparar ambas estimaciones, en la figura 4.3 se muestran las diferencias entre los valores calculados aplicando el método de Milstein y los valores obtenidos con el de Euler-Maruyama. Así podemos ver que la diferencia de las aproximaciones es prácticamente cero ya que difieren en las milésimas.

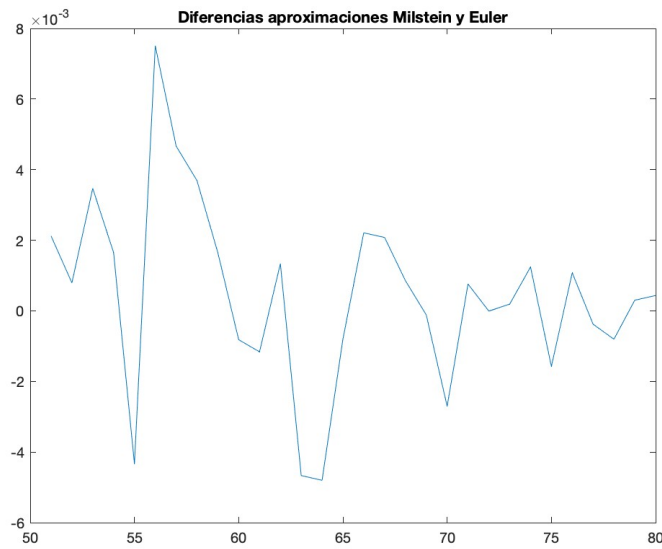


Figura 4.3.: Diferencia de las aproximaciones de Milstein y Euler para el modelo CIR, con  $\text{win}=50$ ,  $\text{tin}=1$ ,  $\text{nforecast}=30$  y  $\text{nsim}=1000$ .

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

El error más grande se da en el día 56. En la gráfica 4.4 se ha hecho zoom ese día para comparar ambos métodos y comprobar que efectivamente la diferencia se da en la tercera cifra decimal.

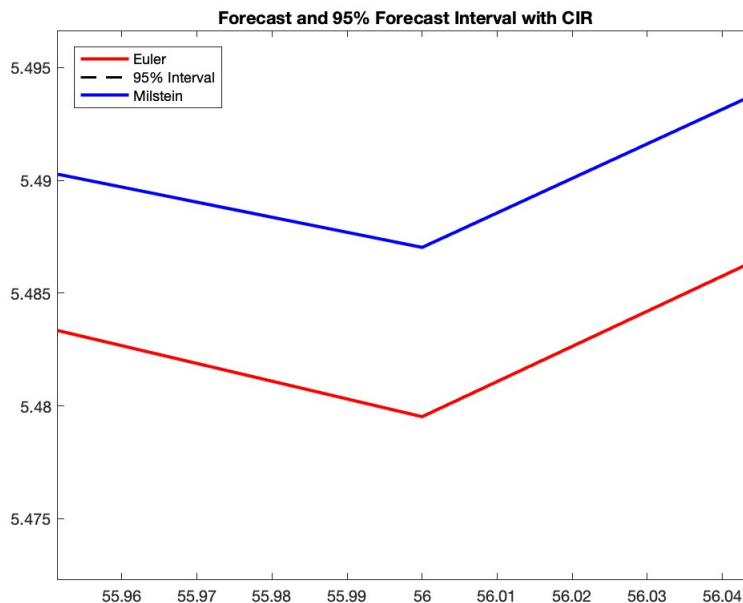


Figura 4.4.: Diferencia de las aproximaciones de Milstein y Euler el día 56.

También se ha calculado el error cuadrático medio (RME) de ambos métodos para ver la bondad del ajuste, que mide la distancia euclídea por término medio entre los valores observado y los estimados. Cuanto menor es el resultado del RMS, menor será el error en el modelo presentado.

Para los 30 valores estimados, en el caso del método de Euler-Maruyama, el RMS es 0,4476 mientras el RMS aplicando Milstein es 0,4486. Por tanto, una vez más se puede decir que ambos son muy parecidos y se puede concluir que los dos esquemas funcionan bien.

Si nos volvemos a fijar en la gráfica 4.2 podemos pensar que parece que existe un retraso en la predicción de los datos. Esto se debe a que cuando tomamos una ventana para estimar los parámetros del modelo CIR estamos estimando justamente los parámetros que mejor ajusta dicha ventana y al hacer la predicción de un dato siguiente se está haciendo con los parámetros anteriores y seguirán la tendencia de esos días. Por tanto, siempre se va a percibir una especie de retraso, ya que si la tendencia de los datos es subir y

de repente baja, el método no es capaz de detectar un cambio brusco debido a la tendencia de los parámetros ajustados hasta que no avancemos la ventana.

Este problema se suavizaría con más datos o con medias móviles de más días. En Jaén no se tienen muchos casos y es difícil predecir las tendencias, por mucho que la media móvil haya suavizado las posibles fluctuaciones. En ciudades más grandes como Madrid o tomando los casos de toda la provincia de Jaén, las tendencias tardarían mucho más en cambiar y por tanto la predicción del modelo sería mejor.

### 4.3. ARIMA

En 1970, Box y Jenkins desarrollaron una metodología para series temporales que tienen en cuenta la dependencia existente entre los datos, es decir, cada observación en un momento dado es modelada en función de los valores anteriores. Una parte importante de esta metodología está pensada para liberar al investigador econométrico de la tarea de especificación de los modelos dejando que los propios datos temporales de la variable a estudiar nos indiquen las características de la estructura probabilística subyacente [4]. Estos modelos se conocen con el nombre de ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average), que deriva de sus tres componentes AR (Autoregresivo), I(Integrado) y MA (Medias Móviles). La metodología de Box y Jenkins se resume en 4 fases según [5]:

1. Identificar el posible modelo ARIMA que sigue la serie. Para ello se requiere decidir qué transformaciones aplicar para convertir la serie observada en estacionaria y determinar un modelo ARMA para dicha serie, es decir, los órdenes  $p$  y  $q$ , de su estructura autorregresiva y de media móvil.
2. Estimación de los parámetros que mejor ajusta el modelo seleccionado. Para ello se usa el método de máxima verosimilitud.
3. Validación del modelo estimado, donde se comprueba que los residuos son independientes y siguen un proceso de ruido blanco. Si no se cumple esto se repiten las etapas anteriores hasta conseguir un modelo adecuado.
4. Predicción. Una vez se tienen el modelo adecuado se realizan predicciones con él.

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

En el Anexo se puede ver el código que se ha implementado con este método. En el script en el “forecast” además del valor estimado se obtiene la desviación estándar, y se dibujan además las gráficas por encima y por debajo que proporcionan el intervalo de confianza.

Para simular el modelo ARIMA hemos utilizado el mismo periodo que se utilizó con el modelo CIR, para poder comparar los resultados con los obtenidos anteriormente. Recordemos que se estimaron 30 días, del 51 al 80, tomando una ventana de 50 días empezando por el primer dato real que tenemos.

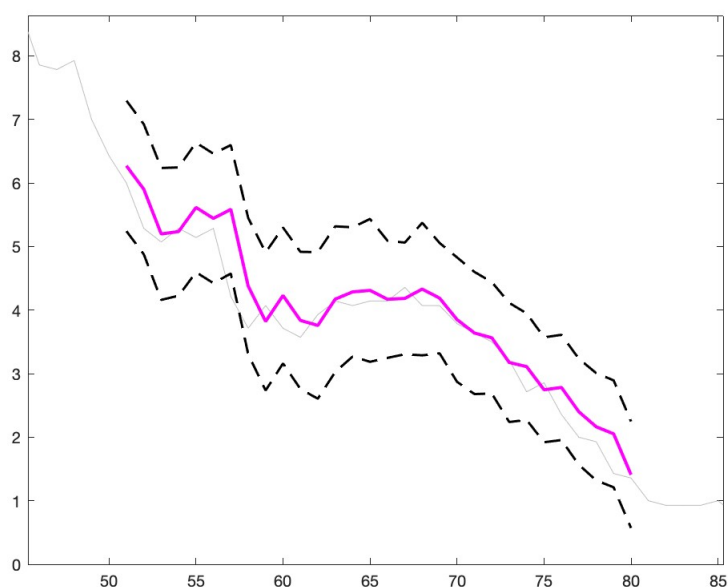


Figura 4.5.: Estimación aplicando ARIMA, con win=50, tin=1, nforecast=30 y nsim=1000.

La curva magenta representa la estimación de un modelo ARIMA de los contagios de COVID y las curvas negras discontinuas el intervalo de confianza al 95 %. Al igual que con el modelo CIR, se ha calculado el RMS obteniendo un error de 0.3925, es decir un error ligeramente menor a los anteriores. Sin embargo, con este resultado no sería adecuado asegurar que el modelo ARIMA es mejor que el CIR, ya que se están estimando solamente 30 días. Por ello, es necesario hacer un mejor análisis teniendo en cuenta un mayor número de días.

## 4.4. Comparativa

En esta sección nos vamos a encargar de dar un análisis más preciso, comparando el modelo CIR con el método de Euler-Maruyama, el modelo CIR con el método de Milstein y el modelo ARIMA. Además, se intentará dar una interpretación de los parámetros del modelo CIR en diferentes etapas de la pandemia.

Para las simulaciones vamos a utilizar una ventana de 100 días y se calcularán las estimaciones del resto de días, es decir, de 500 días. Al ejecutar el código con el modelo ARIMA se muestra un mensaje error, avisando de que el polinomio autorregresivo no estacional es inestable. Esto significa que algunos de los valores propios de la parte AR de la serie están fuera del círculo unitario, por lo que no son estacionarios. También encontramos casos en los que el polinomio no es invertible y por tanto no somos capaces de obtener una estimación de los valores. Para solucionar esto, se tomará un modelo ARMAX, que es una variante del ARMA, el cual no detallaremos de manera teórica ya que se escapa de nuestro objetivo. El nuevo código se puede encontrar en el Anexo.

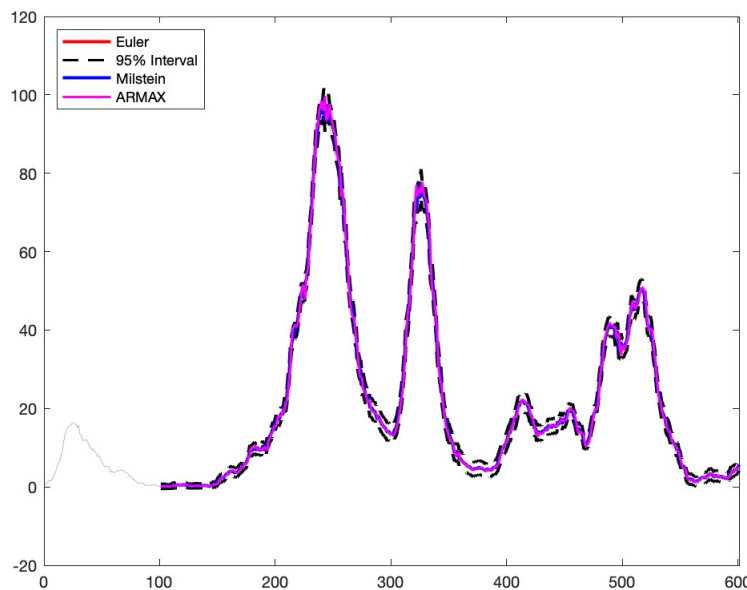


Figura 4.6.: Aproximaciones del método CIR con Euler-Maruyama y Milstein, y ARMAX con win=100, tin=1 y nsim=1000.

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

En la figura 4.6 se muestra las tres estimaciones que queremos comparar, pero como es lógico, con ese tamaño no se ven con detalle, simplemente se ha querido dar para mostrar como a simple vista las estimaciones de nuestros modelos se asemejan a los casos de COVID reales.

En la figura 4.7 la curva gris representa los datos reales que tenemos, la curva magenta son los valores calculados utilizando el modelo ARMAX y la curva azul se ha calculado utilizando el modelo CIR. Al igual que pasaba en la sección anterior, el método de Euler-Maruyama y Milstein son muy parecidos por lo que no se llegan a ver las diferencias en la gráfica a menos que se haga un zoom mayor.

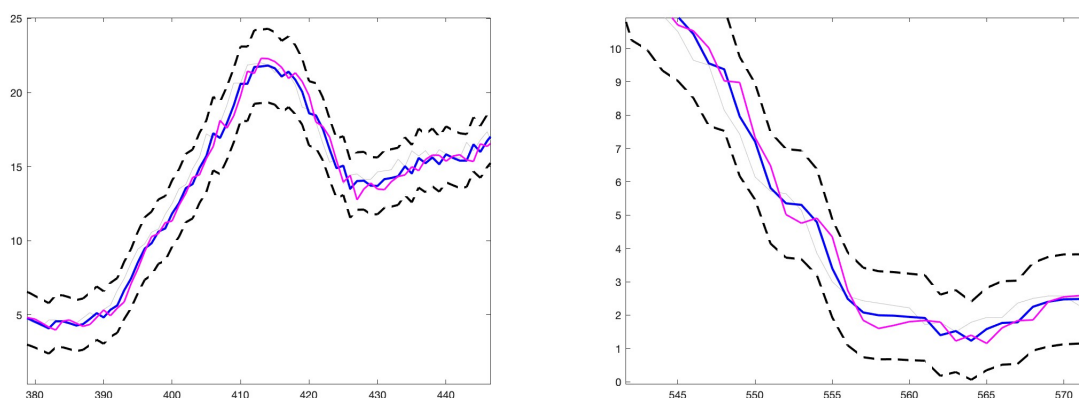


Figura 4.7.: Comparación de los modelos CIR y ARMAX.

Se puede ver que la curva azul generalmente se ajusta mejor a los datos reales, por tanto es lógico pensar que el modelo CIR es ligeramente mejor que el ARMAX. Para comprobar esto de manera rigurosa se han calculado los RMS del modelo CIR con el método de Euler-Maruyama y Milstein, y el RMS del modelo ARMAX. Estos errores se recogen en la siguiente tabla 4.1. Como vemos, el modelo CIR da mejores resultados que el modelo ARMAX.

|     | CIR con Euler | CIR con Milstein | ARMAX  |
|-----|---------------|------------------|--------|
| RMS | 1.0556        | 1.0558           | 2.2157 |

Cuadro 4.1.: Comparación errores modelo CIR (Euler-Maruyama y Milstein) y ARMAX

Para terminar la sección vamos a dar una interpretación a los parámetros del modelo CIR en diferentes etapas de la pandemia, basándonos en el análisis de la solución determinista del modelo CIR que se hizo al final del capítulo 3:

1. Si  $X < \mu$ :
  - Si  $\alpha > 0$  entonces  $X$  tiende a  $\mu$  por abajo.
  - Si  $\alpha < 0$  entonces  $X$  se aleja de  $\mu$  por debajo.
2. Si  $X > \mu$ :
  - Si  $\alpha > 0$  entonces  $X$  tiende a  $\mu$  por arriba.
  - Si  $\alpha < 0$  entonces  $X$  se aleja de  $\mu$  por arriba.

Comenzamos estudiando una etapa en la que los contagios estén aumentando.

Para que los parámetros estimados tengan la misma tendencia, la ventana a partir de la que se estiman tiene que estar también en el tramo de crecimiento, lo que nos obligará a tomar una ventana pequeña y estimar pocos valores, ya que si nos fijamos en la figura 4.1, vemos que los periodos en los que los contagios crecen no son de muchos días. Teniendo en cuenta esto, nos vamos a centrar en el tramo que va del día 210 al 229, es decir, 20 pronósticos, tomando una ventana de 30 días.

Atendiendo a los resultados obtenidos observamos que tanto la media de  $\alpha$  como  $\mu$  son negativas. Como los valores de los datos estimados son mayores que el de la media, entonces  $X$  se alejaría de la media por arriba.

Para corroborar que esto es cierto, se ha tomado otra etapa de aumento de casos de la pandemia, concretamente del día 310 al 319, es decir, 10 días, y una ventana de 30 días. Se ha tenido que reducir el número de pronósticos porque como ya se avisó anteriormente, la ventana de días debe de estar en el intervalo de crecimiento para un buen análisis.

En la gráfica 4.8 se puede observar ambos tramos y en la tabla 4.2, los valores exactos de la media de los parámetros en las dos etapas.

|                | Etapa 1 | Etapa 2 |
|----------------|---------|---------|
| Media $\alpha$ | -0.0562 | -0.0990 |
| Media $\mu$    | -3.6346 | -3.5105 |
| Media $\sigma$ | 0.2253  | 0.2007  |

Cuadro 4.2.: Etapas crecientes

Manteniendo las ideas que usamos del caso anterior, ahora tomamos un periodo de tiempo en el que los casos disminuyan. Estimamos la etapa de

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

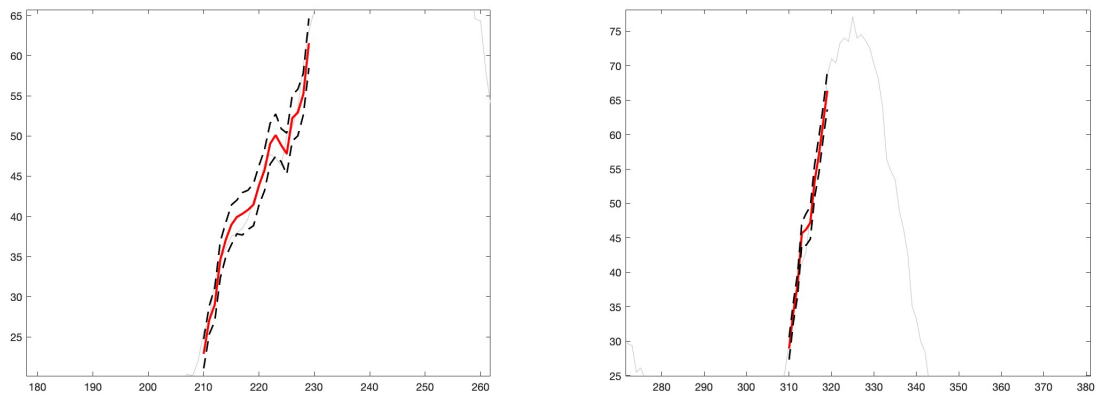


Figura 4.8.: Etapa 1 (izquierda) y Etapa 2 (derecha) de crecimiento de la pandemia del COVID-19.

tiempo que va del día 265 al 284. En este caso volvemos a obtener la media de  $\alpha$  negativa, lo que tiene sentido, ya que en los periodos de crecimiento o decrecimiento fuertes los valores se alejan de la media. Por el contrario, ahora la media del parámetro  $\mu$  es muy grande y supera la media de contagios en ese tramo, por tanto, los valores  $X$  se alejan de la media, pero esta vez por abajo.

Al igual que en el caso anterior se ha tomado otro tramo para verificar los resultados. Las estimaciones de ambas etapas se puede ver en la gráfica 4.9 y la comparación de los valores medios de los parámetros en la tabla 4.3.

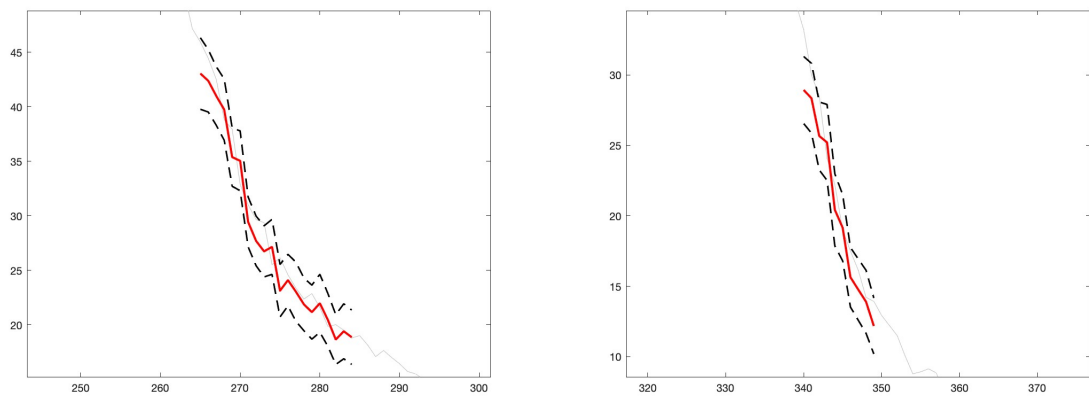


Figura 4.9.: Etapa 3 (izquierda) y Etapa 4 (derecha) de decrecimiento de la pandemia del COVID-19.

|                | Etapa 3  | Etapa 4 |
|----------------|----------|---------|
| Media $\alpha$ | -0.01664 | -0.0305 |
| Media $\mu$    | 190.5401 | 95.5082 |
| Media $\sigma$ | 0.2644   | 0.2925  |

Cuadro 4.3.: Etapas decrecientes

Por último, vamos a interpretar los parámetros en un tramo donde los valores sean relativamente constantes.

Tal y como se ve en la figura 4.1, hay pocos tramos donde ocurra esto. Vamos a tomar el periodo de días que va del 110 y 139, en el que se observa que los casos covid rozan el valor 0. Esto puede parecer sorprendente, pero tiene sentido porque justamente coincide con el estado de alarma. Como se observa en la parte derecha de la gráfica, a partir del día 150 los casos empiezan a aumentar, coincidiendo con el proceso de desescalada y el verano del 2020, donde se relajaron las restricciones.

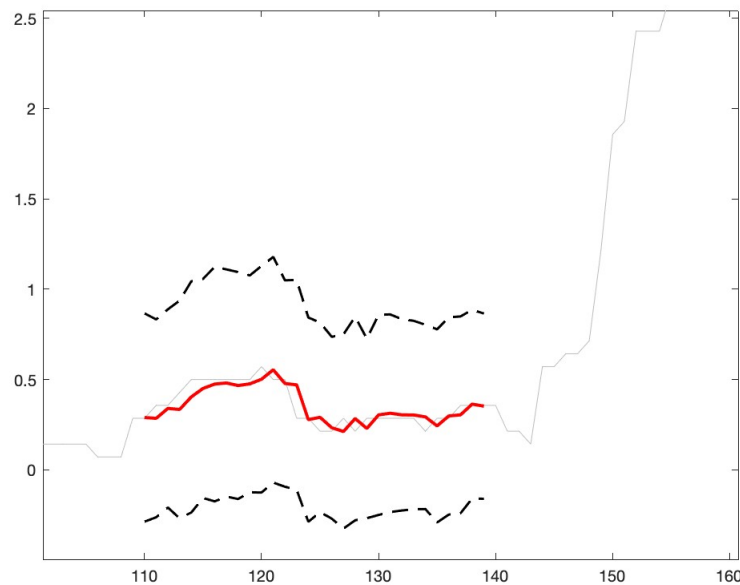


Figura 4.10.: Etapa relativamente constante de la pandemia.

En esta etapa, la media de los parámetros  $\alpha$  es 0.1397, es decir, positivo a diferencia de los casos anteriores. La media de los parámetros  $\mu$  es 0.3303 y la de  $\sigma$  es 0.1448, por lo que tenemos una desviación pequeña.

#### 4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén

|                | Etapa 5 |
|----------------|---------|
| Media $\alpha$ | 0.1397  |
| Media $\mu$    | 0.3303  |
| Media $\sigma$ | 0.1448  |

Cuadro 4.4.: Etapa relativamente constante

Según el análisis de la solución determinista,  $X$  tiende a la media por abajo, lo que tiene sentido, ya que la media real de esos días es cercana a 0 y el valor de los datos estimados no va a superar los 0.5 casos de COVID.

## Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo ha sido el estudio y desarrollo de algunos modelos estocásticos para aplicarlos en el impacto de la pandemia del COVID-19 en la ciudad de Jaén.

La realización del presente Trabajo de Fin de Máster ha requerido una ampliación de los conocimientos adquiridos en el Grado y en el Máster de Matemáticas. Lo primero que hemos tenido que hacer es asentar las bases del cálculo estocástico, una rama hasta ahora desconocida para mi.

Durante la primera parte de la memoria nos hemos centrado en dar un desarrollo teórico para cimentar las bases del trabajo, comenzando con algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, a partir de los cuales se construye la integral de Itô, un concepto imprescindible en el cálculo estocástico. Esta introducción es totalmente necesaria para tratar de manera rigurosa las ecuaciones diferenciales estocásticas y para la resolución teórica de los diferentes modelos de estudio.

En el capítulo 2 se ha estudiado la ecuación diferencial estocástica, y se da un resultado para garantizar que tenga solución y esta sea única, enunciando el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones. Para el cálculo exacto de soluciones se ha enunciado el lema de Itô, uno de los resultados más importantes del cálculo estocástico. Tras ello se revisaron dos métodos numéricos importantes para resolver ecuaciones estocásticas, el método de Euler-Maruyama y el de Milstein.

En el capítulo 3 de esta memoria se abarca el estudio y desarrollo de tres modelos estocásticos: el Browniano Geométrico, el de Vasicek y el CIR. Una parte complicada ha sido la creación propia de los algoritmos correspondientes a los métodos de Euler-Maruyama y Milstein para estos modelos, a partir de los cuales se generan los cálculos y los gráficos que se muestran en esta memoria. Los códigos se han desarrollado con MATLAB.

Posteriormente, en el capítulo 4, se adaptaron los códigos del modelo CIR, con el objetivo de modelizar los casos COVID de la pandemia en Jaén. Cabe notar que los datos que se tenían eran del día 2 de febrero de 2020 al 8 de octubre de 2021.

Para la construcción del modelo que aproxima esos valores, se ha requerido estimar los parámetros del modelo CIR. Para esta tarea se ha utilizado el método de máxima verosimilitud. Las estimaciones dadas con este modelo se

#### *4. Aplicación: pandemia del COVID-19 en Jaén*

han validado con intervalos de confianza al 95 % y con medidas estadísticas de bondad de ajuste, como el RMS. Los resultados obtenidos son coherentes con las observaciones y en ambos casos son bastante precisos. En este capítulo también se ha querido aproximar los datos con un modelo ARIMA y comparar ambos modelos, resultando ser el modelo CIR ligeramente mejor.

En futuros estudios que se quisiesen realizar, continuando con el trabajo de esta memoria, sería interesante tomar los casos no solo de la ciudad de Jaén, sino de toda la provincia, incluso de toda Andalucía, con lo que quizás se podrían mejorar los errores, ya que al tener un mayor número de datos la tendencia de los mismos tardarían más en cambiar. También se podría estudiar el número de curados y el de fallecidos, aunque este último, al ser mucho más pequeño, va a presentar los problemas antes mencionados.

Aunque nuestro trabajo se ha hecho solamente para una ecuación, también se podría generalizar para sistemas de ecuaciones y ver la interrelación entre diferentes ciudades.

Por último, notar que las ecuaciones diferenciales estocásticas no solo son una herramienta muy potente para modelar variables económico-financieras, sino también en el ámbito epidemiológico, quedando probado desde este punto de vista práctico.

## A. Apéndice

En este apéndice adjuntamos los códigos de los métodos que hemos utilizado para hacer las simulaciones del capítulo 3. El software matemático que hemos usado es Matlab.

### A.1. Código para el modelo Browniano Geométrico

```
1 clear all; close all;
2
3 T = 1; % Longitud del intervalo [0,T]
4
5 tit = 'Browniano_Geométrico';
6
7 %% Parámetros específicos del modelo
8 x0 = 1; % Posición inicial
9 sigma = 1; % Desviación estándar (volatility)
10 mu = 2; % drift
11
12 %% Parámetros de la simulación
13 NTime = 128; % Número de pasos de tiempo
14 NSim = 500; % Número de simulaciones
15 dt = T/NTime; % Tamaño de los pasos de tiempo
16 td=0:T/NTime:T;
17
18 % Media teórica esperada para el MBG
19 xbrownianogeo=x0.*exp(mu.*td);
20
21 % Desviación estándar esperada para el MBG
22 stdbrownianogeo=sqrt(x0^2.*exp(2*mu.*td).*(exp(sigma
    ^2.*td)-1));
23
24
```

## A. Apéndice

```
25 %% Monte Carlo
26 Tic=tic;
27 [Pathse,Pathsm]= MC_brownianogeo(x0,sigma,mu,T,NTime,
    NSim);
28 Toc=toc(Tic)
29
30 %figure(1)
31 %plot(td,Pathse')
32 %title('Camino simulados del Movimiento Browniano
33 Geométrico')
34
35 figure(2)
36 plot(td,mean(Pathse'),'b',td,mean(Pathsm),'m',td,
    xbrownianogeo,'r')
37 %title('Media Movimiento Browniano
38 Geométrico: (Azul) numérica, (Rojo) teórica');
39
40 figure(3)
41 plot(td,std(Pathse'),'b',td,std(Pathsm),'m',td,
    stdbrownianogeo,'r')
42 %title('Desviación estándar Movimiento Browniano
43 Geométrico: (Azul) numérica, (Rojo) teórica');
44
45 figure(4)
46 plot(td,abs(mean(Pathse)-xbrownianogeo),'b',td,abs(mean
    (Pathsm)-xbrownianogeo),'r')
47 title('Error:(Azul)Euler,(Rojo)Milstein');
48
49 errmediae = immse(mean(Pathse),xbrownianogeo)
50 errmediam = immse(mean(Pathsm),xbrownianogeo)
51 errdesviacione = immse(std(Pathse),stdbrownianogeo)
52 errdesviacionm = immse(std(Pathsm),stdbrownianogeo)
53 rmserrore=rms(mean(Pathse)-xbrownianogeo,'all')
54 rmserrorem=rms(mean(Pathsm)-xbrownianogeo,'all')
55
56 function [Ye,Ym] = MC_brownianogeo(x0,sigma,mu,T,NTime,
    NSim);
57
58 dt = T/NTime;
59 Ye = zeros(NSim,NTime+1);
```

```

60 Ye(:,1) = x0;
61 Ym=Ye;
62
63 Z = randn(NSim,NTime);
64
65 for k = 1:NTime
66
67     dW = sqrt(dt)* Z(:,k);
68 % Solución exacta
69 %     Y(:,k+1) =Y(:,k).*exp((mu-sigma^2/2).*dt+sigma.*
        dW);
70 % Aproximación de Milsteinn
71     Ym(:,k+1) =Ym(:,k)+Ym(:,k).*(mu.*dt+sigma.*dW)+Ym(:,
        k).*sigma^2/2.*(dW.^2-dt);
72 % Aproximación de Euler
73     Ye(:,k+1) =Ye(:,k)+Ye(:,k).*(mu.*dt+sigma.*dW);
74 end
75 end

```

## A.2. Código para el modelo de Vasicek

```

1 clear all; clc; close all;
2
3 T = 1;    [0,T]
4
5 tit = 'vasicek';
6
7 %% Parámetros específicos del modelo
8 x0 = 1;   % Posición inicial
9 sigma = 0.5; %% Desviación estándar
10 mu = 2;   % drift
11 alpha = 2;
12
13 %% Parámetros de la simulación
14 NTime = 5000; % Número de pasos de tiempo
15 NSim = 1000;
16
17 dt = T/NTime; % Tamaño de los pasos de tiempo

```

## A. Apéndice

```
18 td=0:T/NTime:T;
19
20 % Media teórica esperada para el modelo de Vasicek
21 xvasicek=mu+exp(-alpha.*td)*(x0-mu);
22
23 % Desviación estándar esperada para el modelo de Vasicek
24 stdvasicek=sqrt((sigma^2/(2*alpha))*(1-exp(-2*alpha.*td
    )));
25
26 %% Monte Carlo
27 Tic=tic;
28 Paths= MC_Vasicek(x0,sigma,mu,alpha,T,NTime,NSim);
29 Toc=toc(Tic)
30
31 figure(1)
32 plot(td,Paths')
33 %title('MonteCarlo Paths for Vasicek')
34
35 figure(2)
36 plot(td,mean(Paths)','b',td,xvasicek,'r')
37 %title('Mean of Monte Carlo paths for Vasicek: (Blue)
    numerical, (Red) theoretical');
38
39 figure(3)
40 plot(td,std(Paths)','b',td,stdvasicek,'r')
41 %title('Standard deviation of Monte Carlo paths for
    Vasicek: (Blue) numerical, (Red) theoretical');
42
43
44 function Y = MC_Vasicek(x0,sigma,mu,alpha,T,NTime,NSim)
    ;
45
46 dt = T/NTime;
47 Y = zeros(NSim,NTime+1);
48 Y(:,1) = x0;
49
50 Z = randn(NSim,NTime);
51
52 for k = 1:NTime
53
```

```

54     dW = sqrt(dt)* Z(:,k);
55     Y(:,k+1) =Y(:,k)+ alpha.*(mu-Y(:,k))*dt+sigma.*dW;
56
57 end
58 end

```

### A.3. Código para el modelo CIR

```

1  clear all; clc; close all;
2
3  T = 1;  % Longitud del intervalo [0,T]
4
5  tit = 'CIR';
6
7  %% Parámetros específicos
8  x0 = 1;  % Posición inicial
9  sigma = 1; % Desviación estándar
10 mu = 2; % drift
11 alpha = 2;
12
13 %% Parámetros de la simulación
14 NTime = 1200; % Número de pasos de tiempo
15 NSim = 10000;
16
17 dt = T/NTime; % Tamaño de los pasos de tiempo
18 td=0:T/NTime:T;
19
20 % Media teórica esperada para el modelo CIR
21 xcir=x0*exp(-alpha.*td)+mu.*(1-exp(-alpha.*td));
22
23 % Desviación estándar esperada para el modelo CIR
24 stdcir=sqrt((x0*sigma.^2)/alpha)*(exp(-alpha.*td)-exp
    (-2*alpha.*td))+((mu.*sigma.^2)/(2*alpha))*(1-exp(-
    alpha.*td)).^2);
25
26
27 %% Monte Carlo
28 Tic=tic;

```

## A. Apéndice

```
29 [Pathse,Pathsm]= MC_Cir(x0,sigma,mu,alpha,T,NTime,NSim)
    ;
30 Toc=toc(Tic)
31
32 figure(1)
33 plot(td,Pathse')
34 %title('MonteCarlo Paths for Cir')
35
36 figure(2)
37 plot(td,mean(Pathse)','b',td,xcir,'r')
38 %title('Mean of Monte Carlo paths for Cir: (Blue)
    numerical, (Red) theoretical');
39
40 figure(3)
41 plot(td,std(Pathse)','b',td,stdcir,'r')
42 %title('Standard deviation of Monte Carlo paths for Cir
    : (Blue) numerical, (Red) theoretical');
43
44 errmedia = immse(mean(Pathse),xcir)
45 errdesviacion = immse(std(Pathse),stdcir)
46 mediaerrore=mean(abs(mean(Pathse)-xcir))
47 mediaerrorm=mean(abs(mean(Pathsm)-xcir))
48 rmserrore=rms(mean(Pathse)-xcir,"all")
49 rmserrorem=rms(mean(Pathsm)-xcir,"all")
50
51 function [Ye,Ym] = MC_Cir(x0,sigma,mu,alpha,T,NTime,
    NSim);
52
53 dt = T/NTime;
54 Ye = zeros(NSim,NTime+1);
55 Ym = zeros(NSim,NTime+1);
56 Ye(:,1) = x0;
57 Ym(:,1) = x0;
58
59 Z = randn(NSim,NTime);
60
61 for k = 1:NTime
62
63     dW = sqrt(dt)* Z(:,k);
64
```

#### A.4. Código para estimar los parámetros del modelo CIR

```
65 %Euler
66 Ye(:,k+1) =Ye(:,k)+ alpha.*(mu-Ye(:,k))*dt+sigma
    .*sqrt(Ye(:,k)).*dW;
67 %Milstein
68 Ym(:,k+1) =Ym(:,k)+ alpha.*(mu-Ym(:,k))*dt+sigma
    .*sqrt(Ym(:,k)).*dW +sigma^2/4.*(dW.^2-dt);
69 end
70 end
```

#### A.4. Código para estimar los parámetros del modelo CIR

```
1 function Results = CIRestimation(Model)
2 % =====
3 % PURPOSE : CIR process maximum likelihood estimation
4 %           1) OLS initial parameters estimation
5 %           2) Log-likelihood function optimization
6 %           3) Printing Results
7 % =====
8 % USAGE : Model.Data = Time series of interest rates
    observations
9 % :Model.TimeStep = Delta t; recommended: 1/250 for
    daily data
10 % 1/12 for monthly data
11 % :Model.Disp = 'y' , 'n', (default: 'n')
12 % : Model.Method = 'ncx2pdf', besseli' (default: '
    besseli')
13 % : Model.MatlabDisp = 'off','iter','notify','final' (
    default: 'off')
14 % =====
15 % RETURNS : Results.Params =Estimated parameters (alpha
    , mu, sigma)
16 % : Results.Fval = Objective function value
17 % =====
18 % Kamil Kladivko; Technical Computing Prague 2007
19 % Date: October 2007
20 % Questions? kladivko@gmail.com
```

## A. Apéndice

```
21
22 % Initial parameters using OLS
23 Nobs = length(Model.Data);
24 x = Model.Data(1:end-1);
25 dx = diff(Model.Data);
26 dx = dx./x.^0.5;
27 regressors = [Model.TimeStep./x.^0.5, Model.TimeStep
    *x.^0.5];
28 drift = regressors\dx;
29 res = regressors*drift - dx;
30 alpha = -drift(2);
31 mu = -drift(1)/drift(2);
32 sigma = sqrt(var(res, 1)/Model.TimeStep);
33 InitialParams = [alpha mu sigma];
34
35 if ~isfield(Model, 'Disp'), Model.Disp = 'y'; end;
36 if strcmp(Model.Disp, 'y')
37     fprintf('\n_initial_alpha=_%+3.6f\n_initial_mu=
        _%+3.6f\n_initial_sigma=_%+3.6f\n', alpha,
        mu, sigma);
38 end
39
40 % Optimization using fminsearch
41 if ~isfield(Model, 'MatlabDisp'), Model.MatlabDisp =
    'off'; end;
42 options = optimset('LargeScale', 'off', 'MaxIter',
    300, 'MaxFunEvals', 300, 'Display', Model.
    MatlabDisp, 'TolFun', 1e-4, 'TolX', 1e-4, 'TolCon
    ', 1e-4);
43 if ~isfield(Model, 'Method'), Model.Method = '
    besseli'; end;
44 if strcmp(Model.Method, 'ncx2pdf')
45     [Params, Fval, Exitflag] = fminsearch(@(Params)
        CIObjective2(Params, Model), InitialParams,
        options);
46 else
47     [Params, Fval, Exitflag] = fminsearch(@(Params)
        CIObjective1(Params, Model), InitialParams,
        options);
48 end
```

```

49 %tol = 1e-6;
50 %lb = [ tol,  tol,  tol];
51 %ub = [ inf,  inf,  inf];
52 %[Params, Fval, Exitflag] = fmincon(@(Params)
    CIRobjective1(Params, Model), InitialParams, [],
    [], [], [], lb, ub, [], options);
53
54 Results.Params = Params;
55 Results.Fval = -Fval/Nobs;
56 Results.Exitflag = Exitflag;
57
58 if strcmp(Model.Disp, 'y')
59     fprintf('\n_alpha=_ %3.6f\n_mu=_ %3.6f\n_sigma
        _=_ %3.6f\n', Params(1), Params(2), Params(3)
        );
60     fprintf('\n_log-likelihood=_ %3.6f\n', -Fval/Nobs
        );
61 end
62 end

```

## A.5. CIRobjective1

```

1 function lnL = CIRobjective1(Params, Model)
2 % =====
3 % PURPOSE : Log-likelihood objective function (
    multiplied by -1) for the
4 %           CIR process using MATLAB besseli function
5 % =====
6 % USAGE: Model.TimeStep = Delta t
7 % Model.Data = Time series of interest rates
    observations
8 % Params = Model parameters (alpha, mu, sigma)
9 % =====
10 % RETURNS : lnL= Objective function value
11 % =====
12 % Kamil Kladivko for Technical Computing Prague 2007
13 % Date: October 2007
14 % Questions? kladivko@gmail.com

```

## A. Apéndice

```
15
16     Data = Model.Data;
17     DataF = Data(2:end);
18     DataL = Data(1:end-1);
19     Nobs = length(Data);
20     TimeStep = Model.TimeStep;
21     alpha = Params(1);
22     mu = Params(2);
23     sigma = Params(3);
24
25     c = 2*alpha/(sigma^2*(1-exp(-alpha*TimeStep)));
26     q = 2*alpha*mu/sigma^2-1;
27     u = c*exp(-alpha*TimeStep)*DataL;
28     v = c*DataF;
29     z = 2*sqrt(u.*v);
30     bf = besseli(q,z,1);
31     lnL = -(Nobs-1)*log(c) + sum(u + v - 0.5*q*log(v./u)
32         - log(bf) - z);
32 end
```

## A.6. Modelo ARIMA

```
1 clear all; clc; close all;
2 datosdia14=load('
    total_casos_capital_por_dia_medias_moviles_14_dias.
    dat');
3 datosdia14(1:end,1)=datosdia14(1:end,1)-13;
4
5 win=100;
6 tin=1;
7 nforecast=50;
8 %nforecast=size(datosdia14,1)-win;
9 pqrang=1:2;
10 LogL = zeros(pqrang(1),pqrang(2)); % Initialize
11 PQ = zeros(pqrang(1),pqrang(2));
12 yF=NaN(size(datosdia14,1),1);
13 lower=yF; upper=lower; yMSE=upper;
14 j=win;
```

```

15
16 for i=1:nforecast
17
18     Y=datosdia14(tin:win+i-1,2);
19     [minP, minQ]=estpar(pqrange,LogL,PQ,Y);
20
21     Mdl = arima(minP,0,minQ);
22
23     EstMdl = estimate(Mdl,Y);
24     %summarize(EstMdl);
25
26     %Estimaciones
27     j=j+1;
28     [yF(j) yMSE(j)] = forecast(EstMdl,1,Y);
29     upper(j) = yF(j) + 1.96*sqrt(yMSE(j));
30     lower(j) = yF(j) - 1.96*sqrt(yMSE(j));
31
32     tin=tin+1;
33 end
34
35 figure
36 plot(datosdia14(:,2),'Color',[.75,.75,.75])
37 hold on
38 h1 = plot(yF,'m','LineWidth',2);
39 h2 = plot(upper,'k--','LineWidth',1.5);
40 plot(lower,'k--','LineWidth',1.5)
41 xlim([0,size(datosdia14,1)])
42 %title('Forecast and 95% Forecast Interval')
43 %legend([h1,h2],'Forecast','95% Interval','Location','
    NorthWest')
44 hold off
45
46 tin=1;
47 % hold on
48 % plot(datosdia14(tin:win+nforecast,1),datosdia14(tin:
    win+nforecast,2),'b',datosdia14(tin+win:win+
    nforecast,1),Yf,'r')
49 % hold off
50
51 mediaerror=0;

```

## A. Apéndice

```
52
53 mediaerror=mean(abs(datosdia14(win+1:win+nforecast,2)-
    yF(win+1:win+nforecast)))
54 rmseerror=rms(datosdia14(win+1:win+nforecast,2)-yF(win
    +1:win+nforecast),'all')
55
56
57 function [minP,minQ]=estpar(pqrange,LogL,PQ,Y);
58
59 len=pqrange(2)-pqrange(1)+1;
60 for p = pqrange
61     for q = pqrange
62         Mdl = arima(p,0,q);
63         [EstMdl,~,LogL(p,q)] = estimate(Mdl,Y, '
            Display','off');
64         PQ(p,q) = p + q;
65     end
66 end
67
68 logL = LogL(:);
69 pq = PQ(:);
70 [~,bic] = aicbic(logL,pq+1,length(Y));
71 BIC = reshape(bic,len,len);
72
73 minBIC = min(BIC,[],'all');
74
75 [minP,minQ] = find(minBIC == BIC);
76 end
```

## A.7. Comparación CIR y ARMAX

```

1 clear all; clc; close all;
2
3 Model.TimeStep = 1
4 Model.Disp = 'y';
5 Model.MatlabDisp = 'iter';
6 Model.Method = 'besseli';
7
8 % load data
9 %datosdia14=load(' ../datos_preparados/
    total_casos_capital_por_dia_medias_moviles_14_dias.
    dat');
10 datosdia14=load('
    total_casos_capital_por_dia_medias_moviles_14_dias.
    dat');
11
12 % Shift the initial date (14, due to the moving average
    ) to 1
13 datosdia14(1:end,1)=datosdia14(1:end,1)-13;
14
15 % Define initial parameters for starting and window
    width to estimate parameters. It cannot be too small
    otherwise the estimation does not work
16 win=100;
17 tin=1; % time to start estimating
18
19 % number of forecast
20 nforecast=length(datosdia14(:,1))-win-tin+1; % To
    forecast all data
21 %nforecast=30;
22
23 % number of simulations (for averaging ) in each step
    of the forecast
24 nsim=10000;
25
26 % Initialize variables
27 yFe=NaN(size(datosdia14,1),1);
28 yFm=NaN(size(datosdia14,1),1);

```

## A. Apéndice

```
29 yFimp=NaN(size(datosdia14,1),1);
30 lower=yFe; uppere=lower; yMSEe=uppere;
31 lowerm=yFm; upperm=lowerm; yMSE=upperm;
32
33 % initialize index to label vectors in the forecast
    loop
34 j=win+tin-1;
35
36 % Loop for the moving window to estimate and forecasts
37 for i=1:nforecast
38     %increase index
39     j=j+1;
40
41     % Model.Data=datosdia14(tin:win+i-1,2);
42     Model.Data=datosdia14(j-win:j-1,2);
43
44     % Estimate parameters for the CIR model
45     Result=CIRestimation(Model);
46
47     alpha=Result.Params(1);
48     mu=Result.Params(2);
49     sigma=Result.Params(3);
50
51     %Store parameters in a vector
52     valpha(i)=alpha;
53     vmu(i)=mu;
54     vsigma(i)=sigma;
55
56     % Forecast: nsim simulations (of a single step) and
        store the mean and std
57     sys = armax(Model.Data,[2 1],'IntegrateNoise',true);
58     %sys = ar(Model.Data,2);
59     p(j) = forecast(sys,Model.Data,1);
60     % forecast with one step of MonteCarlo Simulation
        with calibrated data
61     % and original observations
62     Y = MC_Cir(Model.Data(end),sigma,mu,alpha,1,1,nsim);
63
64     % forecast with one step of MonteCarlo Simulation
        with calibrated data
```

```

65 % and original observations including the armax
    estimation
66 if j==win+tin
67     Yimp = MC_Cir(p(j),sigma,mu,alpha,1,1,nsim);
68 else
69     Yimp = MC_Cir(p(j-1),sigma,mu,alpha,1,1,nsim);
70 end
71
72 yF(j) =mean(Y(:,2));
73 yMSE(j)=std(Y(:,2));
74 yFimp(j)=mean(Yimp(:,2));
75
76 % Forecast: nsim simulations (of a single step) and
    store the mean and std
77
78 [Pathse,Pathsm] = MC_Cir(Model.Data(end),sigma,mu,
    alpha,1,1,nsim);
79 yFe(j) =mean(Pathse(:,2));
80 yFm(j) =mean(Pathsm(:,2));
81 yMSEe(j)=std(Pathse(:,2));
82 yMSEm(j)=std(Pathsm(:,2));
83
84 % Confindence interval
85 uppere(j) = yFe(j) + 1.96*sqrt(yMSEe(j));
86 lowere(j) = yFe(j) - 1.96*sqrt(yMSEe(j));
87
88 upperm(j) = yFm(j) + 1.96*sqrt(yMSEm(j));
89 lowerm(j) = yFm(j) - 1.96*sqrt(yMSEm(j));
90
91
92 end
93
94 % Mean and std of the parameters (this makes sense for
    small intervals)
95 meanalpha=mean(valpha);
96 meanmu=mean(vmu);
97 meansigma=mean(vsigma);
98
99 stdalpha=std(valpha);
100 stdmu=std(vmu);

```

## A. Apéndice

```
101 stdsigma=std(vsigma);
102
103
104 % Plot results
105 figure(1)
106 plot(datosdia14(:,1),datosdia14(:,2),'Color '
      ,['.75,.75,.75'])
107 hold on
108
109 h1 = plot(datosdia14(:,1),yFe,'r','LineWidth',2);
110 h2 = plot(datosdia14(:,1),uppere,'k--','LineWidth',1.5)
      ;
111 plot(datosdia14(:,1),lowere,'k--','LineWidth',1.5)
112 xlim([0,size(datosdia14,1)])
113 %title('Forecast and 95% Forecast Interval with CIR')
114 h3 = plot(datosdia14(:,1),yFm,'b','LineWidth',2);
115 h4 = plot(datosdia14(:,1),yFimp,'m','LineWidth',1.5);
116 legend([h1,h2,h3,h4],'Euler','95%_Interval','Milstein',
      'ARMAX','Location','NorthWest')
117
118 hold off
119
120 % Compute the mean error and std
121 start=win+tin;
122 finish=start+nforecast-1;
123 errore=abs(datosdia14(start:finish,2)-yFe(start:finish)
      );
124 errorrm=abs(datosdia14(start:finish,2)-yFm(start:finish)
      );
125 mediaerrore=mean(errore)
126 mediaerrorrm=mean(errorrm)
127 stande=std(errore)
128 standm=std(errorrm)
129 rmserrore=rms(datosdia14(start:finish,2)-yFe(start:
      finish),'all')
130 rmerrorrm=rms(datosdia14(start:finish,2)-yFm(start:
      finish),'all')
131 errorAR=abs(datosdia14(start:finish,2)-yFimp(start:
      finish));
132 mediaerrorAR=mean(errore)
```

```

133 rmseerrorAR=rms(datosdia14(start:finish,2)-yFimp(start:
    finish),'all')
134
135 figure(2)
136 plot(datosdia14(:,1),datosdia14(:,2),'Color '
    ,[.75,.75,.75])
137 hold on
138
139 h1 = plot(datosdia14(:,1),yFe,'r','LineWidth',2);
140 h2 = plot(datosdia14(:,1),uppere,'k--','LineWidth',1.5)
    ;
141 plot(datosdia14(:,1),lowere,'k--','LineWidth',1.5)
142 xlim([0,size(datosdia14,1)])
143
144 hold off
145
146 figure(3)
147 plot(datosdia14(:,1),datosdia14(:,2),'Color '
    ,[.75,.75,.75])
148 hold on
149
150 h3 = plot(datosdia14(:,1),yFm,'b','LineWidth',2);
151 h4 = plot(datosdia14(:,1),upperm,'k--','LineWidth',1.5)
    ;
152 plot(datosdia14(:,1),lowerm,'k--','LineWidth',1.5)
153 xlim([0,size(datosdia14,1)])
154
155 hold off
156
157
158 dif=yFm-yFe;
159
160
161 figure(4)
162 h5=plot(datosdia14(:,1),dif)
163 title('Diferencias_aproximaciones_Milstein_y_Euler')
164
165
166 function [Ye,Ym] = MC_Cir(x0,sigma,mu,alpha,T,NTime,
    NSim);

```

## A. Apéndice

```
167
168 dt = T/NTime;
169 Ye = zeros(NSim,NTime+1);
170 Ym = zeros(NSim,NTime+1);
171 Ye(:,1) = x0;
172 Ym(:,1) = x0;
173
174 Z = randn(NSim,NTime);
175
176 for k = 1:NTime
177
178     dW = sqrt(dt)* Z(:,k);
179     %Milstein
180     Ym(:,k+1) =Ym(:,k)+ alpha.*(mu-Ym(:,k))*dt+sigma.*
        sqrt(Ym(:,k)).*dW + sigma^2/4.*(dW.^2-dt)
181     %Euler
182     Ye(:,k+1) =Ye(:,k)+ alpha.*(mu-Ye(:,k))*dt+sigma.*
        sqrt(Ye(:,k)).*dW;
183
184 end
185 end
```

## Bibliografía

- [1] Aleksandr A. Borovkov. *Probability theory*. CRC Press, 1999.
- [2] Alexis Carmona. *Ecuaciones diferenciales estocásticas*. PhD thesis, Thesis. Universidad de Buenos Aires, Argentina, 2009.
- [3] John C Cox, Jonathan E Ingersoll Jr, and Stephen A Ross. *A theory of the term structure of interest rates*, volume 53, No.2. *Econometrica*, 1985.
- [4] Rafael De Arce and Ramón Mahía. Modelos ARIMA. *Programa CITUS: Técnicas de Variables Financieras*, 2003.
- [5] Santiago de la Fuente. Series temporales: Modelo ARIMA. *Univ. Autónoma Madrid*, page 53, 2016.
- [6] Lawrence C Evans. *An introduction to stochastic differential equations*, volume 82. American Mathematical Soc., 2012.
- [7] Kiyosi Itô. Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.
- [8] Kiyosi Itô. *On stochastic differential equations*. Number 4. American Mathematical Soc., 1951.
- [9] Kamil Kladívko. Maximum likelihood estimation of the Cox-Ingersoll-Ross process: the MATLAB implementation. *Technical Computing Prague*, 7(8), 2007.
- [10] Peter E Kloeden and Eckhard Platen. Stochastic differential equations. In *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1992.
- [11] Hiroshi Kunita. Itô's stochastic calculus: its surprising power for applications. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(5):622–652, 2010.
- [12] Jean-François Le Gall et al. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, volume 274. Springer, 2016.
- [13] Grigori N. Milstein. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications*, 19(3):557–562, 1975.

- [14] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] Giuseppe Orlando, Rosa Maria Mininni, and Michele Bufalo. A new approach to CIR short-term rates modelling. In *New Methods in Fixed Income Modeling*, pages 35–43. Springer, 2018.
- [16] Giuseppe Orlando, Rosa Maria Mininni, and Michele Bufalo. Forecasting interest rates through Vasicek and CIR models: A partitioning approach. *Journal of Forecasting*, 39(4):569–579, 2020.
- [17] Marco A. Pacheco. Teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas y sus aplicaciones. *Universitat Politècnica de València*, 2020.
- [18] Daniel Pérez. *Cálculo estocástico en finanzas: aplicación del Modelo Browniano Geométrico para la predicción del activo subyacente FCC. MC en el IBEX 35*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Valencia, 2015.
- [19] Fathalla A Rihan, Hebatallah J Alsakaji, and C Rajivganthi. Stochastic SIRC epidemic model with time-delay for COVID-19. *Advances in difference equations*, 2020(1):1–20, 2020.
- [20] George E Uhlenbeck and Leonard S Ornstein. On the theory of the Brownian motion. *Physical Review*, 36(5):823, 1930.
- [21] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188, 1977.
- [22] Zizhen Zhang, Anwar Zeb, Sultan Hussain, and Ebraheem Alzahrani. Dynamics of COVID-19 mathematical model with stochastic perturbation. *Advances in Difference Equations*, 2020(1):1–12, 2020.