



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

INFERENCIA ESTADÍSTICA

Alumno/a: **Huertas Lorite, Inmaculada**

Tutor: Prof. D. José Domingo Jiménez López

Dpto: Departamento de Estadística e Investigación
Operativa

Cotutora: Prof.^ª D.^ª Rosa María Fernández Alcalá

Dpto: Departamento de Estadística e Investigación
Operativa

Octubre, 2020

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	2
2. OBJETIVOS	4
3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	5
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA	15
4.1. Inferencia estadística. Muestreo aleatorio simple	15
4.2 Estimación de parámetros	19
4.3 Intervalos de confianza	22
4.4 Contraste de hipótesis	25
5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA.....	30
5.1. Análisis de los errores más comunes en estadística	30
5.2. Observaciones sobre la enseñanza de la Estadística	32
6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA.....	35
6.1 Título	35
6.2. Justificación	35
6.3. Contextualización del centro y del aula	36
6.4. Objetivos	40
6.4.1. Objetivos de etapa	40
6.4.2. Objetivos de área	41
6.4.3. Objetivos de la unidad	42
6.5. Competencias clave	42
6.6. Contenidos	43
6.7. Metodología.....	44
6.8. Actividades y recursos.....	45
6.9. Atención a la diversidad	54
6.10. Temporalización.....	54
6.11. Evaluación	56
7. CONCLUSIONES	57
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

RESUMEN

El objetivo que persigue la realización de este proyecto es la finalización de la formación como futura docente de matemáticas, afianzar y desarrollar todos los conocimientos adquiridos durante el máster en el curso académico. Con este fin, realizamos una investigación sobre las necesidades que los alumnos van mostrando a la hora de comprender los conocimientos relacionados con la inferencia estadística. También se sugieren algunos métodos de enseñanza – aprendizaje para dar solución a dichas necesidades.

La finalidad principal de este proyecto recoge la realización de una unidad didáctica que corresponde al tema de inferencia estadística de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II para 2º de Bachillerato. La elaboración de dicha unidad didáctica estará fundamentada en el análisis del currículo de las leyes autonómica y nacional, y la comparación de dicho contenido con el de los libros de texto proporcionados para esta asignatura y curso. Además, desarrollaremos un tema de oposiciones con un cierto rigor matemático y se hará una investigación relacionada con la didáctica en la inferencia estadística.

Palabras clave: Inferencia Estadística, matemáticas, unidad didáctica, investigación, bachillerato.

ABSTRACT

The aim that this project pursues is to complete the training to become a mathematics teacher, as well as to consolidate and to apply the knowledge acquired during the academic year in the Master's degree. To achieve this objective, we carry out research on the needs that students show when it comes to understanding knowledge related to statistical interference. Some teaching-learning methods to address these needs are also suggested.

The main purpose of this project includes developing a didactic unit about statistical interference which belongs to the subject Mathematics Applied to Social Sciences II for grade 12 (2º de Bachillerato). The creation of said didactic unit will be based on the analysis of the curriculum of the regional and national laws, and the comparison of this content with these of the textbooks provided for this subject and grade. We will also develop a subject of competitions with a certain mathematical rigour and research related to the didactics in statistical inference will be made.

Keywords: statistical interference, mathematics, didactic unit, research, secondary education.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, y en concreto la estadística, es una disciplina que impacta en prácticamente todos los aspectos de nuestra vida, ya que a partir de todas las actividades que realizamos podemos recopilar datos para analizar, y una vez analizados nos permiten tomar decisiones.

Actualmente, existe una inclinación bastante notoria por parte de los alumnos a mostrar indiferencia por las matemáticas, escogiendo estudios de grado bastante distantes a la ciencia. Es por esta razón, que se aspira a aumentar el interés de los alumnos en dicha disciplina favoreciendo la comprensión de los contenidos de la materia de una manera menos compleja.

El motivo principal de este trabajo es que los alumnos consigan entender y afianzar el concepto de Inferencia Estadística, lo cual es difícil de conseguir hasta etapas posteriores al Bachillerato. El único objetivo no es que sepan resolver problemas de Inferencia Estadística a la perfección, sino que, comprendan lo que están haciendo y lo apliquen en su vida cotidiana.

De esta manera, como la Inferencia Estadística, y la Estadística en general, es algo que nos puede ayudar en muchos aspectos de la vida cotidiana, el procedimiento que queremos seguir, es mostrarles a los alumnos este contenido de la asignatura de matemáticas como un recurso que puedan utilizar en su día a día y que les ayude a solucionar problemas, que, hasta día de hoy, no hubieran pensado que podrían solucionarlos con conocimientos adquiridos en clase. Esto ayudará a que los alumnos se enfrenten a estos contenidos con más interés y no crean que lo que estudian no tiene ningún propósito o no les va a servir para nada en un futuro.

Este proyecto tiene como finalidad aplicar todos los conocimientos adquiridos a lo largo del curso como estudiante del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, de la Universidad de Jaén.

El proyecto tiene como objetivo principal el desarrollo de una unidad didáctica específica, en concreto el tema de “Inferencia Estadística” de 2º Bachillerato de Ciencias Sociales en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Con el desarrollo de dicha unidad didáctica se pretende que los alumnos consigan alcanzar las aptitudes matemáticas necesarias, promoviendo las competencias de los alumnos en cuanto a realizar trabajos en equipo, de forma autónoma, etc.

El presente trabajo se encuentra sustentado en cuatro bloques principales.

En primer lugar, se realiza una fundamentación curricular dónde se desarrolla un análisis sobre el currículo escolar, en este caso de 2º de Bachillerato y realizamos una comparativa de lo que viene descrito en las normativas tanto nacional como autonómica con los libros utilizados por los profesores.

En segundo lugar, realizamos una fundamentación epistemológica, dónde se desarrolla uno de los temas del temario recogido en la orden de 21 de septiembre de 1993 dónde se aprueba el temario correspondiente para los procedimientos de ingreso de los cuerpos de maestros, profesores de Enseñanza Secundaria y profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. En este caso el tema elegido es el tema 67 “Inferencia Estadística. Test de Hipótesis”. En este apartado se demuestran los conocimientos adquiridos sobre el tema con un mayor rigor matemático.

En tercer lugar, se realiza una fundamentación didáctica en la cual analizamos e investigamos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística, y más en concreto sobre la Inferencia estadística, hablando de las principales dificultades con las que se encuentran los estudiantes.

Por último, realizamos una proyección didáctica, que consiste en desarrollar una unidad didáctica de un tema de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

2. OBJETIVOS

El objetivo principal que se pretende conseguir con el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster es el siguiente:

- Aplicar todos los conocimientos aprendidos durante el Máster y ponerlos en práctica a la hora de la realización de una unidad didáctica.

Para conseguir el objetivo principal desarrollaremos los siguientes objetivos específicos:

- Profundizar en la enseñanza de la estadística referente al curso de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.
- Analizar el currículo escolar en 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales para la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en las normativas vigentes.
- Investigar sobre las dificultades con las que se encuentra el alumno en la estadística.
- Observar las mejoras que producen las TICs en la enseñanza.
- Adaptar lo exigido en el currículo a una programación didáctica de un centro y un curso en concreto.
- Conseguir aportar a los alumnos una base sólida en cuanto a la Inferencia Estadística.
- Establecer un método de enseñanza - aprendizaje con el que los alumnos disfruten de la educación y sientan interés sobre la inferencia estadística, comprendiendo lo útil que les puede ser en la vida cotidiana.
- Proponer actividades complementarias.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En primer lugar, vamos a realizar un análisis sobre el currículo escolar a nivel tanto autonómico como nacional.

Nivel nacional:

La ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, modificó el artículo 6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación para definir el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas.

En concreto, nos basaremos en la normativa de la etapa de Bachillerato, que viene recogida en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, en el cual se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

El cumplimiento de la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, es obligatorio, para el desarrollo de las competencias clave, las cuales describen las relaciones entre las mismas, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y el bachillerato.

Como viene estipulado en el capítulo III de dicho Decreto, se establece, en el Artículo 24. Principios generales, que el bachillerato tiene como finalidad proporcionar al alumnado formación, madurez intelectual y humana, conocimiento y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia. Asimismo, capacitará al alumnado para acceder a la educación superior. También vienen definidos en los siguientes artículos los objetivos, organización general, organización por cursos, procesos de aprendizaje, evaluaciones, evaluación final de Bachillerato, promoción, continuidad entre materias de bachillerato y título de bachiller.

Nos centramos en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de segundo de bachillerato de Ciencias Sociales, dónde vienen recogidos los elementos que constituyen el currículo básico, incidiendo en los diferentes bloques de la asignatura.

Vamos a analizar en concreto, el bloque 4 de Estadística y Probabilidad.

Contenidos:

- Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.
- Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.

- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.
- Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra.
- Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual.
- Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes.
- Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

Nivel autonómico:

En Andalucía, la ley vigente de Educación es la L.E.A. (Ley de Educación de Andalucía), ley 17/2007, de 10 de diciembre. Dicha ley es una ley de ámbito autonómico diseñada a partir de la estructura organizativa de la educación en Andalucía, y se encuentra en línea con la Ley Orgánica De Educación, aprobada en el BOJA número 252 de 26 de diciembre de 2007.

En concreto, el Decreto 110/2016, de 14 de junio, establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en Andalucía, en conformidad con lo dispuesto en la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, por el cual se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El artículo 4.2. del Decreto 110/2016, de 14 de junio, es el que dispone los elementos que integran el currículo de Bachillerato en Andalucía. Dicho currículo vincula los distintos elementos que lo componen mediante la realización de actividades y tareas relevantes para la consecución de los objetivos perseguidos.

Dentro del capítulo I de dicho decreto, vienen definidos los siguientes artículos sobre el Bachillerato: Objeto y ámbito de aplicación, elementos del currículo, elementos transversales, recomendaciones de metodología didáctica y autonomía de los centros docentes.

La organización curricular de cada una de las modalidades existentes en el Bachillerato viene recogida en el capítulo II.

Centrándonos en segundo de Bachillerato, y en concreto, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, y más específicamente en el bloque 4. Estadística y Probabilidad, analizamos los contenidos de dicho bloque:

- Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.
- Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.
- Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra.
- Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual.
- Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes.
- Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

Como podemos comprobar, los contenidos son los mismos que los que recoge el BOE. De dichos contenidos, los correspondientes a la unidad didáctica a desarrollar en este trabajo son los siguientes:

- Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra.
- Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual.

- Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

Ahora vamos a analizar los contenidos de los principales libros de texto utilizados en segundo de Bachillerato para la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, y vamos a comparar, los contenidos recogidos en la ley nacional y autonómica, con los de dichos libros.

Los libros de texto que vamos a utilizar para dicho análisis son de las editoriales Guadiel (Grupo Edebé), Anaya y SM.

En las tres editoriales, el bloque de estadística y probabilidad corresponde al tercer y último bloque del libro.

A continuación, se muestra una tabla en la que viene recogida la organización de dicho bloque en los tres manuales.

Guadiel (Grupo Edebé)	Tema 10. Combinatoria Tema 11. Probabilidad Tema 12. Muestreo y estimación Tema 13. Contraste de hipótesis
Anaya	Tema 10. Cálculo de probabilidades Tema 11. Las muestras estadísticas Tema 12. Inferencia estadística: estimación de la media Tema 13. Inferencia estadística: estimación de una proporción Tema 14. Inferencia estadística: contrastos de hipótesis

	Tema 9. Combinatoria
	Tema 10. Probabilidad
SM	Tema 11. Distribuciones de probabilidad
	Tema 12. Muestreo estadístico
	Tema 13. Intervalos de confianza

Tabla 1. *Resumen de los contenidos recogidos en el bloque de estadística y probabilidad en las diferentes editoriales*

Como podemos observar, los contenidos en los tres libros de texto son muy similares, pero la distribución varía entre uno y otro.

La editorial SM es la única que no incluye en sus contenidos los contrastes de hipótesis, ya que en los contenidos recogidos por las leyes tanto nacional como autonómica no viene reflejada la parte de contrastes de hipótesis, y por lo tanto no es obligatoria, sin embargo, las editoriales Guadiel (Grupo Edebé) y Anaya dedican un tema completo a estas técnicas de estadística inferencial.

Por otro lado, la editorial SM es la única que dedica un tema a distribuciones de probabilidad, las editoriales Guadiel (Grupo Edebé) y Anaya introducen estos contenidos en otros de sus temas.

En el caso de la editorial Guadiel (Grupo Edebé) los contenidos de distribuciones de probabilidad los introduce en el tema 12: “muestreo y estimación”, y la editorial Anaya los divide en dos temas, tema 12: “inferencia estadística: estimación de la media”, y tema 13: “inferencia estadística: estimación de una proporción”.

A continuación, vamos a comparar los temas que incluyen los contenidos necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica del presente trabajo de cada una de las editoriales.

Guadiel (Grupo Edebé)

De esta editorial, el tema que recoge los contenidos de la unidad didáctica de este trabajo es el tema 12: muestreo y estimación.

El tema se distribuye de la siguiente manera:

1. Muestreo
 - 1.1. Tipos de muestreo
 - 1.2. Distribuciones de muestreo

2. Estimación

2.1. Estimación puntual

2.2. Estimación por intervalos de confianza

2.3. Error de estimación y tamaño muestral

3. Interpretación de una ficha técnica

En primer lugar, contiene una página a modo de introducción en la cual vienen detallados los objetivos de la unidad, contenidos y una introducción con conceptos para recordar de unidades anteriores necesarios para dicha unidad. A continuación, va desarrollando cada uno de los puntos, en primer lugar, define el concepto de muestreo y hace referencia a la diferencia entre población y muestra. Describe los tipos de muestreo: muestreo aleatorio simple, muestreo aleatorio sistemático y muestreo aleatorio estratificado, poniendo ejemplos de cada uno de ellos y actividades. En cuanto al apartado 1.2. Distribuciones de muestreo, desarrolla las distribuciones siguientes: binomial, normal, muestral de las medias, muestral de las proporciones y muestral de la diferencia de medias, poniendo de cada una de ellas ejemplos y actividades para que las realice el alumno.

Dentro del apartado de estimación puntual desarrolla los conceptos de estimadores insesgados, eficiencia de un estimador y consistencia de un estimador, con sus ejemplos y actividades correspondientes.

Los intervalos de confianza que describe el libro de texto son los siguientes: intervalo de confianza para la media μ , intervalo de confianza para la proporción p , intervalo de confianza para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$. Acaba este punto con la explicación de error de estimación y tamaño muestral. A lo largo del apartado hay varios ejemplos y ejercicios.

El último apartado del tema es donde se explican los pasos necesarios para la interpretación de una ficha técnica

Para finalizar el tema hay varias páginas a modo de resumen y con actividades complementarias.

Anaya

La editorial Anaya, dedica tres temas a los contenidos necesarios para la unidad didáctica del presente trabajo. Tema 11: las muestras estadísticas, tema 12: inferencia estadística: estimación de la media y tema 13: inferencia estadística: estimación de una proporción. Divide el muestreo y los diferentes tipos de estimación en temas diferentes.

Tema 11: Las muestras estadísticas

1. El papel de las muestras
2. ¿Cómo deben ser las muestras?
3. Tipos de muestreos aleatorios
4. Técnicas para obtener una muestra aleatoria de una población finita

Esta unidad empieza con una introducción de la historia de las muestras estadísticas, unos ejercicios para reflexionar sobre el contenido de la unidad que van a ver a continuación y un resumen de lo que se verá en la unidad. A continuación, describe los conceptos de población, muestra y los diferentes tipos de muestreo: muestreo aleatorio, muestreo aleatorio simple, muestreo aleatorio sistemático y muestreo aleatorio estratificado. Para terminar, desarrolla algunas técnicas para la obtención de muestras aleatorias en poblaciones finitas: extracción sin y con reemplazamiento y la obtención de números aleatorios. En todos los apartados de la unidad se proponen ejercicios para el alumnado, y al finalizar el tema vienen ejercicios resueltos de cada uno de los apartados de la unidad y, más ejercicios para practicar.

Tema 12: Inferencia estadística: estimación de la media

1. Distribución normal. Repaso de técnicas básicas
2. Intervalos característicos
3. Distribución de las medias muestrales
4. En que consiste la estadística inferencial
5. Intervalo de confianza para la media
6. Relación entre el nivel de confianza, error admisible y tamaño de la muestra.

Como la unidad anterior, esta también comienza con una breve introducción sobre historia estadística, en este caso de las estimaciones, un par de ejercicios para que los alumnos reflexionen sobre la unidad que van a comenzar a estudiar y un resumen de los contenidos de dicha unidad.

En primer lugar, comienzan con un repaso de técnicas básicas para las distribuciones, como la utilización de la tabla de la normal y cálculo de probabilidades en distribuciones normales.

A continuación, el libro de texto sigue con la explicación de los intervalos en las distribuciones, estimación puntual y el desarrollo de los conceptos: nivel de confianza, error admisible y tamaño de la muestra.

Para finalizar con los contenidos, la unidad termina con el desarrollo de los intervalos de confianza para la media.

En cada uno de los apartados vienen ejercicios propuestos para el alumnado, y al finalizar, al igual que en el tema anterior nos encontramos con ejercicios resueltos y una gran cantidad de ejercicios propuestos.

Tema 13: Inferencia estadística: estimación de una proporción

1. Distribución binomial. Repaso de técnicas básicas para el muestreo
2. Distribución de las proporciones muestrales
3. Intervalo de confianza para una proporción o una probabilidad

Esta unidad comienza como las anteriores, una breve introducción sobre la historia, en este caso, de a lo que proporciones se refiere, un par de ejercicios para reflexionar sobre lo que van a estudiar en la unidad y un resumen de los contenidos.

Esta unidad es más corta, ya que solamente tiene contenidos sobre repaso de distribución binomial y técnicas básicas para utilizar en la distribución de las proporciones muestrales e intervalos de confianza para una proporción.

Al igual que las unidades anteriores, a lo largo de los apartados cuenta con ejercicios propuestos para el alumnado, y al finalizar el tema cuenta tanto con ejercicios resueltos como propuestos.

SM

La editorial SM recoge los contenidos necesarios para la unidad didáctica del presente trabajo en dos temas diferentes, tema 12: muestreo estadístico, y tema 13: intervalos de confianza.

Los temas se distribuyen de la siguiente manera:

Tema 12: Muestreo estadístico

1. Población y muestra
2. Técnicas de muestreo
3. Distribución en el muestreo de la media muestral

4. Distribución en el muestreo de una proporción
5. Distribución en el muestreo de las sumas muestrales
6. Distribución en el muestreo de la suma y la diferencia de medias muestrales
7. Teorema central del límite

Los contenidos que contiene este tema dentro de cada apartado son los siguientes: en primer lugar, explica y desarrolla los términos de población y muestra. A continuación, las técnicas de muestreo que describe son las siguientes: muestreos no aleatorios, muestreos aleatorios, muestreo aleatorio simple, muestreo sistemático, muestreo estratificado, muestreo por conglomerados y representatividad de la muestra (muestreo probabilístico), al finalizar este punto hay ejercicios propuestos para el alumnado. Por último, dedica un apartado completo para cada una de las distribuciones mencionadas anteriormente con ejemplos y ejercicios propuestos.

Tema 13: Intervalos de confianza

1. Estimación puntual. Propiedades
2. Estimación por intervalos de confianza
3. Intervalos de confianza para la media poblacional
4. Intervalos de confianza para una proporción
5. Intervalos de confianza para la diferencia de medias
6. Error en la estimación por intervalos. Tamaño de la muestra
7. Análisis de informaciones estadísticas: la ficha técnica
8. Aplicaciones a las ciencias sociales

En este tema, en el primer punto desarrolla el concepto de parámetro y estimador y a continuación desarrolla las propiedades de un estimador: insesgado y sesgado. A continuación, hace una introducción a los intervalos de confianza y después dedica un apartado para cada uno de los tipos de intervalos de confianza. Para terminar, detalla el error de estimación, tamaño muestral y la ficha técnica. En cada uno de los puntos hay ejercicios propuestos para el alumnado.

Como podemos observar los contenidos son muy similares en las tres editoriales, pero en el caso de la editorial Anaya, la estructura de los contenidos, al dividirlos en temas diferentes y dedicarle a cada apartado su tiempo, puede resultar más fácil de comprender por parte del alumnado, al inicio de cada unidad hace hincapié en lo que se va a estudiar, y viene una gran cantidad de ejercicios resueltos para que el alumnado pueda comprender cada proceso, y a continuación ponerlo en práctica en los ejercicios propuestos.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En este punto se desarrollará un tema del temario de oposiciones establecido por la Orden de 21 de septiembre de 1993 por el BOE, en concreto, el Tema 67: “Inferencia Estadística. Test de Hipótesis.”

Para fundamentar dicho temario de oposiciones, se ha recopilado la información de los autores Casas y Santos (1999), Ruiz y Martín (2005), Vélez y García (2012), Pérez (2003) y Turner (1974).

4.1. Inferencia estadística. Muestreo aleatorio simple

La *inferencia estadística* intenta establecer propiedades de una población a partir de los resultados obtenidos en una muestra de dicha población. A la vista de los resultados obtenidos en dicha muestra trataremos de construir un modelo probabilístico válido para la población y compatible con los resultados de la muestra. En muchos casos, nos interesará una característica numérica que constituirá una variable aleatoria y a la que nos referiremos como población.

Una *población* será el conjunto de posibles medidas de una variable. También la podemos definir como el conjunto de elementos con una o más características comunes. La población puede ser real (posibles medidas de una característica de un conjunto de individuos) o ideal (resultado de las posibles tiradas de un dado).

Vamos a identificar la población con una variable aleatoria X que modeliza el experimento aleatorio consistente en observar la población para obtener una medida concreta.

Entendemos por *muestreo* el conjunto de procedimientos seguidos para obtener una muestra. Una *muestra* será por tanto un subconjunto finito de la población, es decir, un conjunto de observaciones que podríamos hacer de la población. El número de observaciones realizadas será el *tamaño de la muestra*.

Supongamos que realizamos el experimento aleatorio consistente en obtener una muestra de tamaño n de una población X . Dicho experimento aleatorio estará caracterizado por una variable aleatoria n -dimensional $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Cuando el experimento se realiza, a cada una de las variables aleatorias se le asignará un valor numérico. Es lo que llamaremos la *realización de la muestra*:

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$$

Definición 1: Se dice que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple (*m.a.s*) de una población X si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes y con la misma distribución que la variable X .

De este modo, si $F_X(x)$ es la función de distribución de la población, entonces, la función de distribución de cada una de las variables X_i será también $F_X(x_i)$ y la función de distribución conjunta del vector $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ será:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = (\text{por la independencia de las variables}) = \\ &= P(X_1 \leq x_1) \cdot P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n) = F_X(x_1) \cdot F_X(x_2) \cdots F_X(x_n) = \prod_{i=1}^n F_X(x_i) \end{aligned}$$

Veamos ahora el concepto de estadístico, entendido como un proceso para extraer la información que contiene la muestra sobre algún aspecto que nos interese de la población. Desde un punto de vista más formal, definiremos un estadístico del siguiente modo:

Definición 2: Sea X una población donde consideramos una *m.a.s.* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Un estadístico es cualquier función medible de las variables $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Un estadístico cualquiera T será representado por $T = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (es una función medible de las observaciones muestrales). Observamos que este estadístico será también una variable aleatoria, al ser una función medible de variables aleatorias. A la distribución de la variable aleatoria T se le denominará *distribución en el muestreo del estadístico*.

Determinamos los estadísticos más importantes:

Definición 3: Dada una *m.a.s.* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ se define el momento muestral de orden k como:

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

Un caso particular es el momento muestral de orden uno, que llamaremos *media muestral* y que denotaremos por $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Definición 4: Definimos el momento central muestral de orden k como:

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

En particular, el momento central muestral de orden dos se denomina *varianza muestral*

Definición 5: Definimos la varianza de una variable estadística X , y la denotamos por S^2 , como el momento central de orden 2, es decir:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

La varianza mide la dispersión respecto a la media aritmética a través del promedio de las desviaciones al cuadrado.

La raíz cuadrada de la varianza muestral la llamamos desviación típica muestral y la denotamos por S . Otro estadístico importante es la *cuasivarianza muestral*, que denotaremos por S_c^2 y que se define del modo siguiente:

$$S_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

Enunciemos por último las características y las distribuciones de los estadísticos más importantes. Comencemos viendo los valores de la esperanza y la varianza de estos estadísticos, para lo que necesitaremos previamente la definición de esperanza de una población.

Definición 6: Definimos el valor esperado o esperanza de X , que denotaremos por $E(X)$, como:

$$E(X) = \sum_{x \geq 1} x_n \cdot p_x(x_n) = \sum_{x \geq 1} x_n \cdot P(X = x_n),$$

siempre que la serie

$$\sum_{x \geq 1} x_n \cdot p_x(x_n)$$

converja absolutamente, es decir, siempre que

$$\sum_{x \geq 1} |x_n| \cdot p_x(x_n) < \infty.$$

En caso contrario se dirá que X no tiene esperanza.

La esperanza de una variable discreta representa la media ponderada de los posibles valores que puede tomar dicha variable, donde los pesos en las ponderaciones vienen dados por los valores $p_x(x_n)$, por este motivo, a la esperanza la llamamos también media.

Podemos generalizar el concepto de esperanza en el siguiente teorema:

Teorema 1: Sea X una variable aleatoria discreta con soporte $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ y cuya función de cuantía es p_x . Sea $g(X)$ una función medible de la v.a. X . Entonces, el valor esperado de $g(X)$ es

$$E(g(X)) = \sum_{x \geq 1} g(x_n) \cdot p_x(x_n) = \sum_{x \geq 1} g(x_n) \cdot P(X = x_n)$$

Siempre que la serie:

$$\sum_{x \geq 1} g(x_n) \cdot p_x(x_n)$$

converja absolutamente

Teorema 2: Sea $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una m.a.s. procedente de una población X , con media $E(X) = \mu$ y varianza $Var(X) = \sigma^2$, entonces:

$$(a) \quad E(\bar{X}) = \mu \quad y \quad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$(b) \quad E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad y \quad E(S_c^2) = \sigma^2$$

Para concluir con este apartado, vamos a estudiar el comportamiento de los estadísticos cuando la población X sigue una distribución normal:

Teorema 3: *(Distribución de la media muestral cuando la varianza poblacional es conocida). Sea $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una m.a.s. procedente de una población X con distribución $N(\mu, \sigma)$, entonces el estadístico media muestral tendrá una distribución $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$*

DEMOSTRACIÓN

La demostración de este teorema es inmediata, ya que cada variable muestral X_i sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, y recordando que toda combinación lineal de “normales independientes” también sigue una distribución normal, entonces, dado que el teorema 1 nos asegura que $E(\bar{X}) = \mu$ y $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, entonces:

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Teorema 4: *(Teorema de Fisher) Sea $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una m.a.s. procedente de una población X con distribución $N(\mu, \sigma)$, entonces:*

(a) *Los estadísticos $\bar{X}$ y S^2 son independientes*

(b) *El estadístico $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$ sigue una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad*

(c) *El estadístico $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}}$ sigue una distribución t – Student con $n - 1$ grados de libertad*

4.2 Estimación de parámetros

Supongamos que X es una población cuya distribución $F_X(x, \vartheta)$ depende de un parámetro desconocido ϑ . A través de una m.a.s. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vamos a obtener un estadístico $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ que utilizaremos para estimar este parámetro. Dicho estadístico diremos que es un *estimador del parámetro poblacional* ϑ . Una vez obtenida la muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, el valor concreto del estadístico se dirá que es una *estimación* de ϑ .

Veamos algunas propiedades básicas de los estimadores:

Para medir la calidad (bondad) de un estimador comencemos introduciendo el concepto siguiente:

Definición 7: Definimos el error cuadrático medio del estimador T del parámetro ϑ como:

$$ECM(T, \vartheta) = E[(T - \vartheta)^2]$$

donde $b(T, \vartheta) = E(T) - \vartheta$ es lo que llamamos el sesgo del estimador.

A partir del error cuadrático medio construiremos una serie de propiedades que exigiremos a un estimador para que pueda ser considerado como "bueno".

Definición 8: Diremos que el estimador T es insesgado (o centrado) para ϑ si su sesgo es cero. En caso contrario se dirá que el estimador es sesgado.

Si T es insesgado, entonces $b(T, \vartheta) = E(T) - \vartheta = 0$ y por tanto $E(T) = \vartheta$.

Un estimador insesgado es aquel cuyo valor esperado coincide con el parámetro a estimar.

Definición 9: Se dice que T es un estimador insesgado uniformemente de mínima varianza (EIUMV) para ϑ si T^* es insesgado y $Var(T^*) \leq Var(T)$ para cualquier otro estimador insesgado T .

Observemos que para obtener el EIUMV, si es que existe, tendríamos que calcular las varianzas de todo los estimadores insesgados para seleccionar el que tenga la varianza menor. Un resultado que puede ayudarnos a encontrar estimadores de esta clase es el Teorema de *Frechet-Cramer-Rao* que determina (bajo ciertas condiciones de regularidad) una cota inferior para la varianza de cualquier estimador insesgado. Esta cota inferior, llamada cota de Frechet-Cramer-Rao, viene dada por

$$\frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \log f(X, \vartheta)}{\partial \vartheta}\right)^2\right]}$$

donde $f(x, \vartheta)$ es la función de densidad o de probabilidad de la población.

Definición 10: Se dice que T es un estimador eficiente si es insesgado y su varianza coincide con la cota de Frechet-Cramer-Rao.

En general, el problema de encontrar un estimador insesgado de mínima varianza puede no resultar nada fácil. Podemos encontrarnos con diferentes estimadores insesgados sin poder probar cuál de ellos es el mejor de todos. Para resolver este problema podemos

introducir el concepto de eficiencia relativa; así, diremos que el estimador T_1 es más eficiente que T_2 , si $Var(T_1) < Var(T_2)$

Por último, vamos a dar una probabilidad asintótica, ya que nos describe el comportamiento de un estimador cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Para ello, definamos una sucesión de estimadores $\{T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}_{n \geq 1}$ dependiente del tamaño muestral n .

Definición 11: Diremos que la sucesión de estimadores T_n es consistente ϑ si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \vartheta| < \varepsilon) = 1$$

Es decir, si la sucesión de estimadores converge en probabilidad al parámetro ϑ .

Observaremos que, por la desigualdad de Chebychev, se tiene que:

$$P(|T_n - \vartheta| < \varepsilon) \geq \frac{E[(T_n - \vartheta)^2]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{ECM(T_n, \vartheta)}{\varepsilon^2}$$

Por tanto, si $\lim_{n \rightarrow \infty} ECM(T_n - \vartheta) = 0$, entonces T_n será consistente.

Métodos de obtención de estimadores

(a) Método de los momentos

Es el más simple e inmediato, aunque no tenemos garantizadas unas buenas propiedades de los estimadores obtenidos.

Supongamos que la función poblacional $F(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)$, depende de k parámetros desconocidos. Supongamos además que existen los k primeros momentos poblacionales:

$$\alpha_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k) = E(X), \alpha_2(\vartheta_1, \vartheta_1, \dots, \vartheta_k) = E(X^2), \dots, \alpha_k(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k) = E(X^k)$$

El método de los momentos consiste en igualar los primeros k momentos poblacionales los primeros k momentos muestrales:

$$\begin{cases} \alpha_1(\vartheta_1, \vartheta_1, \dots, \vartheta_k) = a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \alpha_1(\vartheta_1, \vartheta_1, \dots, \vartheta_k) = a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_k(\vartheta_1, \vartheta_1, \dots, \vartheta_k) = a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \end{cases}$$

Obtenemos un sistema de k ecuaciones con k incógnitas que nos proporcionan los estimadores $(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_k)$.

(b) Método de máxima verosimilitud

El *estimador de máxima verosimilitud del parámetro desconocido* ϑ , para una muestra de tamaño n , será aquel que maximice la función de verosimilitud asociada a dicha muestra. Dicha función de verosimilitud es la función de densidad (o la probabilidad) conjunta de la muestra. Por tanto, esta función, que denotaremos por L será:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vartheta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \vartheta)$$

y será considerada como la función de ϑ para los valores fijos de la muestra.

4.3 Intervalos de confianza

En el apartado anterior hemos visto como estimar un parámetro desconocido a partir de un estimador puntual, sin embargo, dicho estimador tomará un valor diferente para cada muestra concreta, por lo que no tendrá que coincidir con el verdadero valor del parámetro desconocido. Será por tanto necesario indicar la precisión de dicha estimación. Esta precisión la indicaremos a través de una región donde, con un cierto grado de seguridad, podemos esperar que esté el parámetro.

Definición 12: Sea $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una m.a.s. procedente de una población X con distribución $F(x, \vartheta)$. Se dice que $[T_1(X_1, X_2, \dots, X_n; \alpha), T_2(X_1, X_2, \dots, X_n; \alpha)]$ es un intervalo de confianza para el parámetro ϑ , con un nivel de confianza $1 - \alpha$, si:

$$P\{T_1(X_1, X_2, \dots, X_n; \alpha) \leq \vartheta \leq T_2(X_1, X_2, \dots, X_n; \alpha)\} = 1 - \alpha$$

Observaciones:

1. T_1 y T_2 son dos estadísticos muestrales (por tanto, variables aleatorias) que nos dan los extremos del intervalo. Entonces, el intervalo $[T_1, T_2]$ es un intervalo aleatorio.
2. En el caso de que la población fuese discreta, el intervalo $[T_1, T_2]$ será aquel que verifique que:

$$P\{T_1(X_1, X_2, \dots, X_n; \alpha) \leq \vartheta \leq T_2(X_1, X_2, \dots, X_n; \alpha)\} \geq 1 - \alpha$$

3. *La interpretación del intervalo de confianza sería la siguiente: En promedio, el 100(1 - α)% de los intervalos contendrán al verdadero valor del parámetro.*

Método para la construcción de los intervalos de confianza:

El método a utilizar es el llamado método pivotal y se basa en la existencia de un pivote $T(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta)$, función de la muestra y del parámetro ϑ y que verifica:

- a) Para cada valor fijo de ϑ es un estadístico con una distribución conocida.
- b) Para cada muestra concreta, es una función continua y monótona de ϑ .

La primera propiedad nos permite encontrar dos valores a y b (dependientes de α) tales que

$$P(a \leq T(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta) \leq b) = 1 - \alpha$$

Esta segunda propiedad nos permite despejar (pivotar sobre) ϑ para obtener el intervalo.

Ejemplo para el cálculo de un intervalo de confianza para la media de poblaciones normales.

Sea X una población de distribución $N(\mu, \sigma)$ y supongamos que σ es conocida. A partir de una m.a.s. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vamos a obtener un intervalo de confianza μ con un nivel de confianza de $1 - \alpha$. Para ello tomamos como pivote el siguiente estadístico:

$$Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1) \quad (\text{teorema 2}),$$

Y busquemos dos valores a y b tales que

$$P(a \leq Z \leq b) = P\left(a \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) = 1 - \alpha$$

Despejando (pivotando) el parámetro μ , se tiene que

$$P\left(\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

Y por tanto el intervalo de confianza será

$$\left[\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (2)$$

Ahora bien, de los infinitos pares de valores a y b que verifican la condición (1), se puede demostrar que cuando $b = -a$, se minimiza la longitud del intervalo (2), por ello, tomaremos $a = -z_{\alpha/2}$ y $b = z_{\alpha/2}$, verificando que

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Siendo por tanto el intervalo buscado:

$$I_{\mu} = \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

En caso de que el parámetro σ sea desconocido, no tenemos mas que tomar como estadístico pivote:

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \rightarrow t_{n-1} \quad (\text{teorema 3})$$

Argumentado como en el caso anterior, llegamos a que el intervalo de confianza es de la forma

$$\left[\bar{X} - b \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{X} - a \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

De nuevo, de los infinitos pares de valores de a y b , tomamos aquellos minimizan la longitud del intervalo. Para ello tomaremos $a = -t_{\alpha/2}$ y $b = t_{\alpha/2}$, verificando

$$P(-t_{\alpha/2} \leq t_{n-1} \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \Rightarrow P(t_{n-1} \leq t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

resultando entonces el intervalo:

$$I_{\mu} = \left[\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$$

Ejemplo para el cálculo de un intervalo de confianza para la proporción

Sea X una población de distribución $B(n; p)$; aproximando a una distribución Normal cuando el tamaño de la muestra es muy grande, podemos expresarlo como $X \rightarrow N(n \cdot p; \sqrt{npq})$.

Según dicha expresión, la variable aleatoria que está definida como $Y = X/n$ se distribuye como $Y \rightarrow N(p; \sqrt{pq/n})$.

Si tipificamos obtenemos la siguiente expresión:

$$Z = \frac{p - q}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0; 1)$$

Resultando, por tanto, el siguiente intervalo de confianza para la proporción:

$$\left[p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$$

4.4 Contraste de hipótesis

Una *hipótesis estadística* es una afirmación, verdadera o falsa, sobre alguna característica desconocida de una población. Un *contraste de hipótesis* consiste en plantear dos hipótesis estadísticas, aceptando una y rechazando otra mediante una regla probabilística (es un problema de *decisión*). Si las hipótesis se refieren al valor de uno o varios parámetros desconocidos de la población, diremos que se trata de un *contraste paramétrico*, si las hipótesis se refieren a la forma de la función de distribución, entonces tendremos un *contraste no paramétrico*.

Vamos a ver solamente en el desarrollo del tema los contrastes paramétricos; para ello consideremos X una población con función de distribución $F(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)$, donde $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ son k parámetros poblacionales desconocidos. Planteemos dos hipótesis sobre dichos parámetros:

H_0 : (Hipótesis nula) La función de distribución es $F(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)$

H_1 : (Hipótesis alternativa) La función de distribución es $F(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)$

La hipótesis nula H_0 es la que en principio aceptaremos y será sometida a comprobación experimental frente a la hipótesis alternativa H_1 . Un *contraste de hipótesis paramétrico* consiste en dar una regla que permita decidir cuál de las dos hipótesis es aceptada, partiendo de una muestra de la población.

En particular, un contraste para un parámetro ϑ lo plantearemos de la siguiente forma:

$$H_0: \vartheta \in \Omega_0$$

$$H_1: \vartheta \in \Omega_1$$

donde $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ es lo que vamos a llamar el *espacio paramétrico*.

Tipos de hipótesis estadísticas:

- a) **Hipótesis simple:** La hipótesis especifica totalmente el valor de los parámetros a contrastar. Por ejemplo:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu = \mu_1$$

- b) **Hipótesis compuesta:** La hipótesis no determina el valor de los parámetros a contrastar. Por ejemplo:

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_1$$

Construir un contraste de hipótesis va a ser equivalente a definir una región $R \subset \mathbb{R}^n$ de tal modo que si la muestra $X_1, X_2, \dots, X_n \in R$ tomaremos la decisión de rechazar H_0 .

Definición 13: Llamaremos *región crítica o de rechazo* al conjunto de muestras tales que se rechaza la hipótesis nula H_0 (se acepta entonces la hipótesis alternativa H_1). De la misma forma, se llama *región de aceptación* al conjunto de muestras tales que se acepta

la hipótesis nula H_0 . Denotaremos por R a la región crítica y por $\bar{R}$ a la región de la aceptación.

Al tomar una decisión existen distintas posibilidades de error.

Definición 14: Se llama error de tipo I o de primera especie, al que se comete cuando se rechaza la hipótesis nula, siendo verdadera. A la probabilidad de cometer el error de tipo I se la llama nivel de significación del contraste y la denotamos por α .

$$\alpha = P(\text{error de tipo I}) = P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ verdadera}).$$

Se llama error de tipo II o de segunda especie, al que se comete cuando se acepta la hipótesis nula, siendo falsa. A la probabilidad de cometer el error de tipo II la denotamos por β .

$$\beta = P(\text{error de tipo II}) = P(\text{aceptar } H_0 | H_0 \text{ falsa}).$$

Llamamos potencia del contraste a la probabilidad de no cometer un error de tipo II, cuando la hipótesis alternativa es cierta (la hipótesis nula es falsa). La denotamos por η .

$$\eta = 1 - P(\text{aceptar } H_0 | H_1 \text{ verdadera}) = 1 - P(\text{aceptar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = 1 - \beta$$

Podemos resumir todas las situaciones en la siguiente tabla:

Situación exacta	Decisión adoptada	
	Aceptar H_0	Rechazar H_0
H_0 cierta	Correcta	Error tipo I
H_0 falsa	Error tipo II	Correcta

Tabla2. Resumen de todas las situaciones según la situación y la decisión adoptada

Se puede comprobar que al disminuir α aumentará β , de este modo lo que haremos será construir el contraste que, para un valor fijo de α , minimice β , es decir, se maximice la potencia del contraste se dirá que es óptima). La existencia de contrastes óptimos con hipótesis simples la garantiza el *Lema de Neyman-Pearson*, que viene a decir que la región crítica óptima será el conjunto de muestras que verifican:

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{L(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta_0)}{L(X_1, X_2, \dots, X_n; \vartheta_1)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i; \vartheta_0)}{\prod_{i=1}^n f(X_i; \vartheta_1)} \leq k \quad \forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in R$$

En el caso de tener hipótesis compuestas no está garantizada la existencia de la región crítica óptima, para este tipo de hipótesis utilizaremos los llamados *contrastes de significación*:

Contrastes de significación

Supongamos el contraste siguiente
$$\begin{cases} H_0: \vartheta = \vartheta_0 \\ H_1: \vartheta \neq \vartheta_0 \end{cases}$$

A partir de una m.a.s. extraída de la población debemos decidir qué hipótesis aceptamos y cuál rechazamos.

A este tipo de contrastes se les llama contrastes de significación puesto que se actúa de la siguiente manera: Si la diferencia existente entre el valor asignado al parámetro en la hipótesis nula $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ y el que le correspondería según la información muestral es pequeña, decimos que esa diferencia se debe a las variaciones muestrales y que, por tanto, no es significativa, aceptándose H_0 . En caso contrario, rechazaríamos H_0 y se aceptaría H_1 .

En los contrastes de significación también se pueden formular H_0 y H_1 de la siguiente manera

$$H_0: \vartheta = \vartheta_0 (\text{ó } \vartheta \leq \vartheta_0); \quad H_1: \vartheta > \vartheta_0$$

o también

$$H_0: \vartheta = \vartheta_0 (\text{ó } \vartheta \leq \vartheta_0); \quad H_1: \vartheta < \vartheta_0$$

Reglas para efectuar un contraste de significación:

1. Formular hipótesis H_0 y H_1 de cualquiera de las tres formas anteriormente indicadas.
2. Obtención del estadístico de contraste: Para medir la discrepancia (diferencia) entre el valor que se asigna al parámetro ϑ en la hipótesis nula $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ y el valor de ϑ^* que le correspondería en la muestra, se construye un estadístico D llamado estadístico del contraste. Una posibilidad consiste en definir $D = |\vartheta^* - \vartheta_0|$, aunque también se puede usar como medida de la discrepancia los siguientes estadísticos:

$$D = |\vartheta^* - \vartheta_0| \quad ; \quad D = \frac{\vartheta^* - \vartheta_0}{\sqrt{\text{Var}(\vartheta^*)}} \quad ; \quad D = \frac{|\vartheta^* - \vartheta_0|}{\sqrt{\text{Var}(\vartheta^*)}}$$

Este estadístico de contraste debe contener el valor de ϑ_0 y, para el valor ϑ_0 signado a ϑ en H_0 , la distribución de dicho estadístico tiene que ser conocida e independiente de ϑ . Además, cualquier otro término que intervenga en D tiene que ser conocido o poder determinarse a partir de la m.a.s.

- Una vez fijado el nivel de significación α , hallamos la región crítica. Para ello, se determina el valor crítico d_α que verifica $P[D > d_\alpha / H_0] = \alpha$
- Obtención de una m.a.s y cálculo del valor del estadístico de contraste para dicha muestra: $D = \vartheta^* - \vartheta_0$
- Regla de decisión: Si $D_{exp} > d_\alpha$, entonces se rechaza H_0 , mientras que si $D \leq d_\alpha$, se acepta H_0 .

HIPÓTESIS		EST. CONTRASTE		RECHAZAR H_0 SI:	
H_0	H_1	σ conocida	σ desc.	σ conocida	σ desconocida
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\left \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \right $	$\frac{\sqrt{n} \bar{X} - \mu_0 }{\sigma} \geq z_{\alpha/2}$	$\frac{\sqrt{n-1} \bar{X} - \mu_0 }{S} \geq t_{n-1, \alpha/2}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\bar{X} - \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$	$\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \geq z_\alpha$	$\frac{\sqrt{n-1} (\bar{X} - \mu_0)}{S} \geq t_{n-1, \alpha}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\bar{X} - \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$	$\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha}$	$\frac{\sqrt{n-1} (\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq t_{n-1, \alpha-1}$

Tabla 3. Ejemplo: Contraste para la media en poblaciones normales

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

En este apartado vamos a analizar los errores más frecuentes en el aprendizaje de los conceptos de probabilidad e inferencia que cometen los alumnos y también analizamos algunos aspectos sobre la enseñanza de la materia.

En lo que se refiere a la enseñanza de la estadística, los contenidos de esta disciplina en el currículo de Bachillerato de Ciencias Sociales en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales han ido evolucionando a lo largo de los años. Actualmente existe un bloque completo sobre Estadística y Probabilidad, donde el alumno adquiere conocimientos sobre Cálculo de Probabilidades, Distribuciones, inferencia estadística, etc...

5.1. Análisis de los errores más comunes en estadística

Según Socas (1997), las dificultades que presenta la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas son muy diversas. Concretamente a lo que Inferencia Estadística se refiere. Una serie de conceptos como hipótesis alternativa e hipótesis nula, distribuciones muestrales, intervalos de confianza o estadísticos de contraste, acaban considerándose complejos para el alumnado, ya que no es un lenguaje con el cual estén familiarizados.

Usualmente, los alumnos, encuentran mayor dificultad en ciertas partes de cada unidad, o en unas unidades más que en otras. A continuación, se detalla una lista de los errores que cometen con más frecuencia los alumnos:

- Problemas al comprender el concepto de probabilidad

Según Fischbein (1975), Moreno y Vallecillos (2005), los alumnos de bachillerato muestran dificultades con el concepto de número racional y con el razonamiento de proporcionalidad, lo que dificulta la comprensión de la idea de probabilidad.

Esto suele suceder cuando el profesor explica dicho concepto de forma abstracta. La probabilidad es algo bastante común, ya que podemos escuchar diariamente en los informativos, periódicos, etc., hablar de probabilidades, pero existen varias interpretaciones científicas para dicho concepto. Hay una serie de interpretaciones que han sido propuestas para mostrar los problemas que existen a la hora de poder dar una explicación más fácil de comprender del concepto; las interpretaciones clásicas, subjetiva y frecuencialista.

- Complejidad al realizar tipificación de la distribución normal

Otro error muy común en los estudiantes, es la dificultad con la que se encuentran a la hora de tipificar una distribución normal. Esta dificultad puede deberse a que ellos la asocian a una expresión matemática, y no a un cambio de una distribución normal específica a la distribución normal estándar. Una de las soluciones a este problema, puede ser la representación gráfica de las distribuciones, comparando una distribución específica con la estandarizada.

- Uso erróneo de la tabla de probabilidades de la Normal

En este punto hacer especial hincapié, debido a que es un error que se comete con más frecuencia entre los alumnos y les supone para ellos una gran complejidad el llegar a entender y diferenciar cuál es el valor de un punto sobre la recta real con el área que se encuentra debajo ya que suelen mezclar el valor de un punto sobre la recta real con el área que se encuentra debajo de sí la gráfica de la distribución y que corresponde a la probabilidad. Una opción para facilitar la comprensión de este punto a los estudiantes, al igual que con la tipificación, es usar las representaciones gráficas, ya que se puede diferenciar mejor tanto las probabilidades como los puntos que dejan las mismas a su derecha.

- Error en la aproximación de la Binomial a la Normal

También resulta difícil de comprender para los estudiantes, el proceso que se realiza a la hora de aproximar una distribución a otra. Suelen confundirse con los parámetros de la distribución a la que aproximan. Esto se debe a que realizan la operación de una manera automática, en vez de encontrar la relación que existe entre la distribución y sus parámetros. Cabe destacar que también les cuesta saber diferenciar entre aproximación e igualdad de distribuciones, lo que esto genera que no perciban la diferencia de que una distribución es continua y otra discreta.

A continuación, detallamos los errores más comunes en la inferencia estadística:

- No saber establecer diferencias entre los conceptos muestra, población y descuido ante cambios del tamaño muestral.

Una de las dificultades más notorias en Inferencia Estadística es la de poder diferenciar el concepto de muestra con el de población. Ante dicho problema el profesor debe de hacer más énfasis en dejar estos conceptos claros, estudiando tanto representatividad como variabilidad de la muestra, para que, de este modo, el alumno entienda que cualquiera que sea la muestra tomada desde una población, tiene características similares a la población de origen, y ésta muestra será cuánto más representativa si refleja más características de la población.

“La experimentación con diferentes tamaños muestrales permite por un lado estudiar la representatividad de la muestra, y por otro, podría corregir los errores que cometen los alumnos en el cálculo de probabilidades, de medias y de varianzas de las distribuciones, ante cambios del tamaño muestral” (Moreno y Vallecillos, 2005)

- Problema para comprender el significado de parámetro, estimador y estimación

Este problema puede ser una consecuencia de no distinguir entre población y muestra. Por ejemplo, si hemos obtenido la estimación de la Media de una población de

naturaleza Normal, se pueden emplear diversas muestras, y por medio de la media muestral ($\bar{X}$) (el estimador) conseguir distintas estimaciones del parámetro.

- Representación y reconocimiento confuso de los contrastes unilaterales y bilaterales, e intercambio del valor empírico con el valor muestral

A la hora de formular contrastes, los alumnos suelen enfrentarse a dos problemas. Primero, la duda sobre qué contraste usar, si uno unilateral o un contraste bilateral, y segundo, la confusión al elegir el valor muestral como valor empírico. El primer problema suele ser provocado por el enunciado del ejercicio, pero el segundo problema, vuelve a surgir por uno de los errores que nos encontramos con la Inferencia estadística, no saber distinguir entre el parámetro a estimar, el estimador, la estimación y los valores del parámetro.

- Asignación incorrecta del nivel de confianza ($1 - \alpha$) y del nivel de significación α

Otro de los problemas más comunes en los alumnos cuando van a resolver un problema de Inferencia estadística es saber identificar el nivel de confianza ($1 - \alpha$), en lo que a intervalos de confianza se refiere y/o identificar correctamente el nivel de significación (α) en el caso de Contrastes de Hipótesis. Muchas veces este problema viene generado por las tablas de distribuciones, porque utilizan α para denotar la probabilidad. Por ejemplo, puede haber confusión a la hora de que en un contraste bilateral donde buscamos probabilidad de $\alpha / 2$, los alumnos despejen el valor de α , en vez del punto crítico.

- Falso análisis de los resultados en los contrastes.

Además de cometer errores en el cálculo, es un error muy común que los alumnos no realicen una buena interpretación de los resultados obtenidos. Esto se debe a que no llegan a entender de una forma clara la diferencia entre región de rechazo y de aceptación.

5.2. Observaciones sobre la enseñanza de la Estadística

Si el profesor conoce los errores más comunes en los alumnos de Bachillerato, en este caso en la Inferencia Estadística, esto le ayuda proporcionándole información sobre cómo el alumnado se enfrenta al problema y como se desenvuelven para resolverlo. El análisis de estos errores le permite al profesor abarcar dichos problemas desde otra perspectiva para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Inferencia Estadística. Para conseguir disminuir los errores a los que se enfrenta el alumnado, se proponen los siguientes cambios dentro de la enseñanza de la Inferencia Estadística en segundo de bachillerato de ciencias sociales.

- Afianzar los contenidos teóricos por medio del uso de analogías

Para que la enseñanza de la estadística de buenos resultados, hay que basar los cimientos en una buena base teórica. Se debe de asimilar una serie de conceptos que son totalmente nuevos para los estudiantes, ya que no tienen nada que ver con otras disciplinas de las matemáticas. También se debe de motivar a los alumnos a que lleven sus conocimientos teóricos a la práctica para que desarrollen su pensamiento estadístico. Para lograr dicho pensamiento se plantea el uso de analogías. Es decir, los alumnos deben de asociar situaciones familiares/cotidianas con situaciones nuevas. Para esto, se propone el uso de las analogías como nueva herramienta que permita a los estudiantes a ser más intuitivos, y a aprender a partir de la intuición.

Feinberg (1971) propuso una analogía muy conocida; la semejanza de un contraste de hipótesis con un proceso delictivo (en este caso, la inocencia del acusado se asume como la verdad de la hipótesis nula).

- Utilización de las nuevas tecnologías (TICS)

Esta segunda propuesta consiste en la integración de nuevas tecnologías al proceso de enseñanza-aprendizaje. Si incorporamos el ordenador a las clases, y enseñamos a los alumnos a manejar paquetes estadísticos y a interactuar con dichos paquetes, verán las clases más amenas y también les facilitará el aprendizaje, ya que dentro de estos paquetes estadísticos existen múltiples menús para interactuar e ir viendo resultados. Una de las posibilidades que más llama la atención dentro del alumnado, es que con estos paquetes estadísticos se pueden generar tablas y gráficas al momento y, por ejemplo, cuando visualizan resultados en una gráfica les facilita la comprensión de los contenidos teóricos, resultados de ejercicios, etc.

- Trabajo con proyectos estadísticos

En la mayoría de clases de Estadística se hace especial hincapié en conocimientos conceptuales y procedimientos, esto no ayuda a la comprensión, por ejemplo, de la variabilidad de los datos por parte de los estudiantes. Algunos investigadores priorizan el desarrollo del razonamiento estadístico (Statistical Reasoning), (DelMas y Garfields (2003)). Este razonamiento conecta un concepto con otro y combina ideas, por ejemplo, conceptos como centro y amplitud o ideas sobre datos y el azar. Esto hace que se adquieran conocimientos suficientes para poder explicar un proceso estadístico e interpretar resultados.

Por eso, si el currículo añadiera la realización de proyectos estadísticos por parte del alumnado, este sería capaz de plantear el problema, recoger, organizar y analizar datos, y obtener conclusiones.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA

6.1 Título

La presente unidad didáctica va dirigida al alumnado de 2º Bachillerato en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales, concretamente al bloque 3 de probabilidad y estadística. Se titula “INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN POBLACIONES NORMALES”. Está regulada por el Decreto 110/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía y por la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado

6.2. Justificación

Estas materias deben desempeñar un papel estratégico en tres aspectos principales: como base conceptual, como instrumento esencial para el desarrollo de la sociedad y como valor cultural inmerso en multitud de expresiones humanas. El alumnado de Bachillerato debe aprender a apreciar la utilidad de las matemáticas, especialmente por su capacidad para dar respuesta a múltiples necesidades humanas, muchas de las cuales nos obligan a tener que definir unas variables, a plantear hipótesis que nos den información sobre el comportamiento de dichas variables y sobre la relación entre ellas. Al finalizar Bachillerato, el alumno o la alumna debe haber desarrollado actitudes positivas hacia las matemáticas que le permitan identificar e interpretar los aspectos matemáticos de la realidad.

Al alumnado hay que mostrarle la importancia instrumental de las matemáticas, pero también hay que resaltarle su valor formativo en aspectos tan importantes como la búsqueda de la belleza y la armonía, el estímulo de la creatividad o el desarrollo de aquellas capacidades personales y sociales que contribuyan a formar personas autónomas, seguras de sí mismas, decididas, curiosas y emprendedoras, capaces de afrontar los retos con imaginación y abordar los problemas con garantías de éxito

Las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II, contribuyen a la adquisición de las competencias clave. Por ejemplo, a la hora de exponer un trabajo, comunicar resultados de problemas o incorporar al propio vocabulario los términos matemáticos utilizados, se favorece el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística (CCL). Con la resolución de problemas y el aprendizaje basado en la investigación de

fenómenos científicos y sociales, se contribuye a la adquisición de la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). La competencia digital (CD) se desarrolla principalmente al trabajar los contenidos del bloque de Probabilidad y Estadística, a la hora de representar e interpretar datos estadísticos y también está muy presente en los problemas de modelización matemática. El espíritu crítico, la creatividad, la observación de fenómenos sociales y su análisis, favorecen el desarrollo de la competencia de aprender a aprender (CAA). Las competencias sociales y cívicas (CSC) se trabajan en todos los bloques de contenido ya que estas materias favorecen el trabajo en grupo, donde la actitud positiva, el respeto y la solidaridad son factores clave para el buen funcionamiento del grupo.

En todo estudio estadístico o de investigación de fenómenos sociales, el rigor, la planificación de la tarea y la evaluación son elementos indispensables que favorecen el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP). Los conocimientos matemáticos que aportan estas materias, permiten analizar y comprender numerosas producciones artísticas donde se ven reflejadas las matemáticas, favoreciendo la adquisición de la competencia conciencia y expresiones culturales (CEC).

6.3. Contextualización del centro y del aula

Esta Unidad didáctica está contextualizada para el centro “Escuelas Profesionales de la Sagrada Familia”, situado en Linares, Jaén, es una población que cuenta con 57.414 habitantes aproximadamente. Este centro es un centro católico y está situado en una de las zonas más humildes de Linares, en el barrio de San José, y cuenta con estudiantes de diferentes razas y etnias.

Por su situación, es un centro que tiene bastante diversidad de alumnado en sus aulas, ya que está próximo a uno de los barrios de Linares de clase baja, pero también próximo a zonas de clase media.



Figura 1: Escuelas Profesionales de La Sagrada Familia (Linares)

Fuente: <https://linares.safa.edu/>



Figura 2: Escuelas Profesionales de la Sagrada Familia (Linares)

Fuente: elaboración propia.

La construcción del centro fue autorizada el 20 de junio de 1949 (BOE 27-7-1949), con 6 secciones y un director sin grado, pero hasta el 23 de febrero de 1950 no comienzan las clases con un total de 285 alumnos matriculados. Se habilitó también un comedor

escolar, inaugurado el 7 de marzo de 1950 que atendía a casi 100 alumnos necesitados del barrio.

A lo largo de los siguientes años el centro va evolucionando, cada vez cuenta con más servicios, y ayudas para el alumnado, impartiendo clases gratuitas para alumnos de grados superiores, clases gratuitas de verano, clases nocturnas para adultos, etc.

A día de hoy abarca una oferta educativa bastante amplia, según datos obtenidos en <https://linares.safa.edu> (2008):

- Educación Infantil. Es la primera etapa del Sistema Educativo y tiene como finalidad básica contribuir al desarrollo físico, intelectual, afectivo, social y moral del alumnado de estas edades. El centro cuenta con 2º ciclo, que va de los 3 a los 6 años, aula de educación especial, servicio de logopedia e inicio en el uso de la lengua inglesa.
- Educación Primaria. Esta etapa educativa comprende desde los 6 hasta los 12 años de edad. Su finalidad es facilitar al alumnado no sólo aprendizajes académicos, sino también nociones de cultura y los hábitos de convivencia, estudio y trabajo necesarios para garantizar su formación integral y poder cursar con éxito la siguiente etapa. El centro cuenta con 12 unidades (2 por nivel).
- Educación Secundaria Obligatoria. Esta etapa pretende preparar al alumnado para desenvolverse en la sociedad actual tras haber desarrollado las capacidades que le permitan esta incorporación de una forma responsable. Consta de cuatro cursos entre los 12 y los 16 años. El centro cuenta con tres líneas completas (12 unidades con tres aulas por nivel) y un programa de mejora del aprendizaje y el rendimiento.
- Bachillerato. Enseñanza postobligatoria y preparación para el acceso a la Universidad y Ciclos Formativos de Grado Superior. El centro cuenta con los bachilleratos de “Ciencias” y “Humanidades y Ciencias Sociales”.
- Formación Profesional Básica. Con un ciclo formativo de formación profesional básica el alumno obtiene una formación que le preparará para iniciarse en el aprendizaje de un oficio y realizar actividades profesionales. Este título también permite el acceso a ciclos de grado medio y/o lograr el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria, presentándose a las pruebas de evaluación final de la ESO. En el centro cuenta con el Ciclo de Formación Profesional Básica en Electricidad y Electrónica.
- Ciclos Formativos de Grado Medio. Proporciona una formación que permitirá desarrollar un trabajo de ejecución de forma autónoma donde utilizar

instrumentos y técnicas aprendidas. La titulación obtenida es la de Técnico o Técnico de la profesión correspondiente. El centro cuenta con los siguientes Ciclos Formativos de Grado Medio: “Técnico en Electromecánica de Vehículos Automóviles”, “Técnico en Instalaciones Frigoríficas y de Climatización”, “Técnico en Cuidados Auxiliares de Enfermería”.

- Ciclos Formativos de Grado Superior. Los módulos profesionales se desarrollan en dos cursos. El centro cuenta con los siguientes Ciclos Formativos de Grado Superior: “Técnico Superior en Automoción”, “Técnico Superior en Laboratorio y Diagnóstico Clínico”. También se pueden cursar ciclos formativos en la modalidad a distancia.
- Formación Profesional Dual. Es una nueva modalidad dentro de la formación profesional. Los proyectos de FP Dual en el sistema educativo combinan los procesos de enseñanza y aprendizaje en la empresa y en el centro de formación y se caracterizan por realizarse en régimen de alternancia entre el centro educativo y la empresa. El centro cuenta con los siguientes: “Técnico de Electromecánica de Vehículos Automóviles” y “Técnico Superior en Automoción”.

El centro también cuenta con servicios como aula matinal, comedor y servicio de guardería, centro de idiomas SAFA, intercambios educativos con otros países, etc.

El centro cuenta con un total de 85 profesores y 1150 alumnos aproximadamente repartidos entre su oferta educativa.

En cuanto a las características del alumnado, el centro cuenta con alumnos de edades comprendidas entre los 3 y los 18 años de edad, desde Educación Infantil hasta Bachillerato, y también cuenta con alumnos mayores de 18 años que cursan Ciclos Formativos en el centro.

En la etapa de Educación Secundaria Obligatoria es dónde se encuentran en el centro algunos alumnos con problemas de tipo social (problemáticas familiares, desatención familiar y escaso nivel de comunicación, , pérdida o abandono del papel educativo de la familia e índice cultural medio/bajo), de tipo psicológico (retraso madurativo general, dificultades de análisis y clasificación junto a escasa curiosidad, dificultad para operar con metas y recompensas lejanas, falta de consistencia normativa, deficiencias afectivas y problemas de conducta) o incluso de tipo pedagógico (disfunciones en el dominio de materias instrumentales, ausencia de hábitos de estudio, desfase entre la edad y el curso, falta de motivación y de interés, escasa participación en clase y abandono de tareas escolares).

En cuanto al alumnado de Bachillerato, se encuentran grandes diferencias individuales. Desde aquellos que desde un mayor nivel de desarrollo ya han sido capaces de resolver

los grandes retos planteados a esta edad, hasta los que todavía se encuentran inmersos en este proceso. Es una etapa de mayor tranquilidad que las anteriores.

En concreto, el alumnado de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, es un grupo homogéneo, cuenta con 25 alumnos, no hay ningún alumno que necesite apoyo especial, y son alumnos muy concienciados con lo que quieren conseguir, y tienen un alto nivel de implicación en su aprendizaje y objetivo que, en este caso, es superar la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU).

6.4. Objetivos

6.4.1. Objetivos de etapa

Conforme a lo dispuesto en el artículo 25 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, el Bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución Española, así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
- b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
- c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombre y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana.
- f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
- g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

- h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
- i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
- m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
- n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

6.4.2. Objetivos de área

La enseñanza de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en el Bachillerato tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

- a) Aplicar a situaciones diversas los contenidos matemáticos para analizar, interpretar y valorar fenómenos sociales, con objeto de comprender los retos que plantea la sociedad actual.
- b) Adoptar actitudes propias de la actividad matemática como la visión analítica o la necesidad de verificación. Asumir la precisión como un criterio subordinado al contexto, las apreciaciones intuitivas como un argumento a contrastar y la apertura a nuevas ideas como un reto.
- c) Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos. Expresar e interpretar datos y mensajes, argumentando con precisión y rigor, aceptando discrepancias y puntos de vista diferentes como un factor de enriquecimiento.
- d) Formular hipótesis, diseñar, utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas que permitan enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia, confianza en sí mismo y creatividad.

- e) Utilizar un discurso racional como método para abordar los problemas: justificar procedimientos, encadenar una correcta línea argumental, aportar rigor a los razonamientos y detectar inconsistencias lógicas.
- f) Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.
- g) Adquirir y manejar con fluidez un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos. Incorporar con naturalidad el lenguaje técnico y gráfico a situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente.
- h) Utilizar el conocimiento matemático para interpretar y comprender la realidad, estableciendo relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural o económico y apreciando su lugar, actual e histórico, como parte de nuestra cultura.

6.4.3. Objetivos de la unidad

(O1) Describir procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados, calculando el tamaño muestral necesario y construyendo el intervalo de confianza para la media de una población normal con desviación típica conocida y para la media y proporción poblacional cuando el tamaño muestral es suficientemente grande.

(O2) Presentar de forma ordenada información estadística utilizando vocabulario y representaciones adecuadas y analizar de forma crítica y argumentada informes estadísticos presentes en los medios de comunicación, publicidad y otros ámbitos, prestando especial atención a su ficha técnica, detectando posibles errores y manipulaciones en su presentación y conclusiones.

6.5. Competencias clave

Las competencias clave de esta unidad didáctica que tendrán que adquirir el alumnado son definidas por la Orden del ECD/65/2015, de 21 de enero, y son las siguientes:

CCL (Competencia en Comunicación Lingüística) → En matemáticas se considera necesaria esta competencia puesto que, es imprescindible poder tener la capacidad de expresar los conceptos adquiridos con un lenguaje matemático correcto.

En este caso, en la Inferencia Estadística, y en la Estadística en general, es necesario emplear un lenguaje adecuado para poder así saber interpretar bien lo que dice el ejercicio, interpretar los resultados y expresar conclusiones.

CMCT (Competencia Matemáticas y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología) →

Esta es una de las competencias más importantes, ya que abarca casi todos los contenidos de la unidad. Esta competencia ayuda a los alumnos a aplicar el razonamiento matemático en problemas, tanto de la asignatura, como en problemas de la vida diaria.

CD (Competencia Digital) → Esta competencia es la encargada de adquirir la habilidad para buscar y analizar información. En este caso, se conseguirá utilizando las TICS, en concreto paquetes estadísticos, para que los estudiantes aprendan a resolver y plantear problemas.

SIEP (Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor) → Esta competencia se desarrolla cuando el alumno potencia la confianza en su capacidad para resolver problemas. El sentido de iniciativa hay que incentivarlo haciendo que los alumnos tengan una participación activa en clase, y también a la hora de que los alumnos investiguen para resolver un problema mediante varias opciones.

Estas competencias se adquieren a través de los objetivos de la unidad citados en el apartado anterior, el objetivo uno lleva consigo el cumplimiento de las competencias clave CCL y CMCT, y el objetivo dos las competencias clave CCL, CMCT, CD y SIEP.

6.6. Contenidos

Los contenidos de esta unidad didáctica son los que van a lograr la adquisición de las competencias clave y los objetivos anteriormente nombrados.

- Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra.
- Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra.
- Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral.
- Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes.
- Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral.
- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

- Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido (varianza desconocida) y para la proporción en el caso de muestras grandes.

6.7. Metodología

La metodología que se llevará a cabo será clase magistral y realización de problemas en grupo, además, se seguirán las recomendaciones de metodología didáctica que vienen recogidas en el Decreto 110/2016 de 14 de junio que son las siguientes:

- a) El proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral y, por ello, debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento. En el proyecto educativo del centro y en las programaciones didácticas se incluirán las estrategias que desarrollará el profesorado para alcanzar los objetivos previstos, así como la adquisición por el alumnado de las competencias clave.
- b) Los métodos deben partir de la perspectiva del profesorado como orientador, promotor y facilitador del desarrollo en el alumnado, ajustándose al nivel competencial inicial de este y teniendo en cuenta la atención a la diversidad y el respeto por los distintos ritmos y estilos de aprendizaje mediante prácticas de trabajo individual y cooperativo.
- c) Los centros docentes fomentarán la creación de condiciones y entornos de aprendizaje caracterizados por la confianza, el respeto y la convivencia como condición necesaria para el buen desarrollo del trabajo del alumnado y del profesorado.
- d) Las líneas metodológicas de los centros para el Bachillerato tendrán la finalidad de favorecer la implicación del alumnado en su propio aprendizaje, estimular la superación individual, el desarrollo de todas sus potencialidades, fomentar su autoconcepto y su autoconfianza, y promover procesos de aprendizaje autónomo y hábitos de colaboración y de trabajo en equipo.
- e) Las programaciones didácticas de las distintas materias del Bachillerato incluirán actividades que estimulen el interés y el hábito de la lectura, la práctica de la expresión escrita y la capacidad de expresarse correctamente en público.
- f) Se estimulará la reflexión y el pensamiento crítico en el alumnado, así como los procesos de construcción individual y colectiva del conocimiento, y se favorecerá el descubrimiento, la investigación, el espíritu emprendedor y la iniciativa personal.
- g) Se desarrollarán actividades para profundizar en las habilidades y métodos de recopilación, sistematización y presentación de la información y para aplicar procesos de análisis, observación y experimentación adecuados a los contenidos de las distintas materias.

- h) Se adoptarán estrategias interactivas que permitan compartir y construir el conocimiento y dinamizarlo mediante el intercambio verbal y colectivo de ideas y diferentes formas de expresión.
- i) Se emplearán metodologías activas que contextualicen el proceso educativo, que presenten de manera relacionada los contenidos y que fomenten el aprendizaje por proyectos, centros de interés, o estudios de casos, favoreciendo la participación, la experimentación y la motivación de los alumnos y alumnas al dotar de funcionalidad y transferibilidad a los aprendizajes.
- j) Se fomentará el enfoque interdisciplinar del aprendizaje por competencias con la realización por parte del alumnado de trabajos de investigación y de actividades integradas que le permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.
- k) Las tecnologías de la información y de la comunicación para el aprendizaje y el conocimiento se utilizarán de manera habitual como herramienta para el desarrollo del currículo.

6.8. Actividades y recursos

A lo largo de dicha unidad didáctica se hará uso de los siguientes recursos:

- Material suministrado por el profesor a través del correo electrónico o Classroom.
- Apuntes de clase.
- Páginas web de internet y blog de profesores de Matemáticas.
- Calculadora científica y ordenador para las exposiciones de los alumnos.

Actividades:

Actividad 1

Razona cuáles de los siguientes estudios estadísticos pueden efectuarse sobre toda la población y con cuáles es preferible hacer una muestra:

- a) Preferencias deportivas de los alumnos de tu centro escolar.
- b) Preferencias cinematográficas de los españoles con edades comprendidas entre 15 y 18 años.
- c) Número de veces, en un mes, que tu familia va a comprar a supermercado.
- d) Ingresos medios de los docentes de tu comunidad autónoma.

Actividad 2

¿Cómo elegirías una muestra de 1000 personas entre los 10000 habitantes de un municipio con el fin de hacer un sondeo sobre las elecciones generales?

Actividad 3

En un hospital universitario se sabe que el 30% de los enfermos tiene entre 18 y 50 años; el 45% entre 50 y 70 años, y el resto más de 70 años. ¿Cómo extraeríamos una muestra de 200 enfermos para hacer una estadística sobre el tiempo que quedan hospitalizados?

Actividad 4

Explica por qué la muestra elegida en cada uno de los casos siguientes no es representativa:

- a) Para conocer el porcentaje de los españoles a los que les gusta la música rock, una revista musical realiza una encuesta entre sus lectores.
- b) Para saber los hábitos de sueño de los españoles, una empresa de encuestas entrevista a 100 estudiantes de bachillerato.
- c) Para conocer los gustos deportivos de los españoles, se encuesta a 200 personas a la salida de un partido de baloncesto.

Con las actividades 1,2,3, y 4 se pretende que los alumnos afiancen los conceptos de población y muestra, que sepan cuáles son los estudios estadísticos que se pueden realizar sobre una población y para cuáles es necesario utilizar una muestra, y también que sepan distinguir entre los tipos de muestreo estudiados (aleatorio simple, aleatorio sistemático y aleatorio estratificado proporcional) para saber cuál de ellos es el más adecuado de utilizar en cada caso.

Actividad 5

La masa de los aguacates de una cosecha se distribuye normalmente con una media de 105 g y desviación típica de 15g. ¿Cuál es la probabilidad de que un aguacate elegido al azar tenga una masa superior a 125 g?

Actividad 6

En una empresa se fabrican teléfonos móviles que tienen una duración media de 800 días y una desviación típica de 175 días. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de duración en una muestra de 200 teléfonos sea menor o igual a 720 días?

Actividad 7

Una máquina produce tornillos con una longitud media de 5 cm y una desviación típica de 0,5 cm.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud media de en una muestra de 25 tornillos sea superior a 5,25 cm?
- b) Si se toman 100 muestras de 20 tornillos cada una, ¿en cuántas cabe esperar que la longitud media esté comprendida entre 4,9 cm y 5,2 cm?

Actividad 8

Se hace un estudio y se determina que al 15% de los jóvenes de una ciudad le gustan los musicales. Si seleccionamos 50 muestras de 150 jóvenes cada una, ¿en cuántas cabe esperar que el porcentaje de jóvenes esté comprendido entre 10% y el 20%? ¿Y si las muestras fuesen de 1500 jóvenes?

Compara ambos resultados y extrae conclusiones.

Con las actividades 5,6,7 y 8 se pretende que los alumnos logren obtener solidez en cuanto a las distribuciones muestrales de las medias, de las proporciones y de la diferencia de medias. Que sepan cuando hay que utilizar cada una de dichas distribuciones, para qué sirve cada una de ellas y saber interpretar los resultados que se obtienen.

Actividad 9

Considera la población formada por los números 1,2,3,4.

- a) Calcula el parámetro poblacional μ .
- b) Selecciona por muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de la muestra de tamaño 3 y, a partir de ella, estima μ usando $\bar{x}$ y usando Me . Compara tus estimadores con el valor real y con las estimaciones obtenidas por tus compañeros.
- c) Considera todas las posibles muestras de tamaño 3 seleccionadas como se indica en *b*, obtén los dos estimadores antes utilizados y halla su distribución de muestreo. Comprueba que los dos estimadores son insesgados y que el primero es más eficiente que el segundo.

Con el desarrollo de la actividad 9 se quiere conseguir que los alumnos afiancen conceptos de estimación puntual, sepan diferenciar entre parámetro y estimador, y conozcan con firmeza tanto los tipos de estimadores que se estudian, como sus propiedades.

Actividad 10

Las puntuaciones obtenidas en un examen de matemáticas de bachillerato siguen una distribución $N(\mu, 3)$. Si en una muestra de 10 alumnos la media fue de 7 puntos, halla intervalos de confianza para la puntuación media con niveles de confianza del 99%, del 95% y del 90%. Fíjate en la amplitud de los intervalos obtenidos y extrae conclusiones.

Actividad 11

Para estudiar la proporción de estudiantes que leen diariamente, se estudia una muestra de tamaño 500. El resultado obtenido es que 50 lo hacen. Calcula el intervalo de confianza para la proporción p con nivel de confianza del 98%.

Actividad 12

Para conocer si un dado está trucado o no, se efectúan 1000 lanzamientos y se observa que 325 veces cae en el número 5. Halla el intervalo de confianza para la proporción de número 5 obtenidos en sucesivos lanzamientos, con un nivel de confianza del 95%. Según el resultado obtenido, razona si es de esperar o no que el dado esté trucado.

Con la realización de las actividades 10,11 y 12 lo que se quiere conseguir es que los alumnos entiendan el significado de intervalo de confianza, sepan diferenciar entre intervalo de confianza para la media y para la proporción, conociendo así para que y cuando hay que utilizar cada uno de ellos.

Actividad 13

Queremos conocer el tiempo medio en meses que necesita un olivo para producir la primera cosecha de aceitunas desde su plantación. En una muestra de 110 olivos se obtuvo una desviación típica de 50 meses. ¿Qué tamaño muestral hay que tomar para que el error máximo sea de 5 meses, con una significación del 1%?

Actividad 14

En una muestra de 280 alumnos de bachillerato de un instituto, 185 se manifestaron favorables a la apertura de una sala de estudio durante el recreo. ¿De qué tamaño deberá tomarse la muestra para que, con un nivel de confianza del 98%, la proporción muestral y poblacional no difieran en más de 0,02?

Para finalizar el tema, con el desarrollo de las actividades 13 y 14 se busca que los alumnos sepan actuar a la hora de solucionar el problema de determinar el tamaño de una muestra y que conozcan la asociación existente entre el error de estimación y el tamaño muestral.

Actividad 15

Una empresa desea averiguar el porcentaje de bombillas defectuosas de una partida. Para ello revisa 150 de las bombillas, y encuentra 10 defectuosas.

- a) Con nivel de significación del 5%, ¿qué error máximo puede cometerse generalizando el resultado obtenido a toda la partida?
- b) ¿Cuántas bombillas más se deben revisar si queremos conseguir que el error máximo cometido sea de un 3%, con ese mismo nivel de significación?

Actividad 16

En una empresa se envasan latas de atún con un peso medio de 100 g. Seleccionamos 12 bolsas al azar y observamos un peso medio de 97 g. Define los conceptos de población, muestra, parámetro y estadístico, e identifícalos en este ejemplo.

Actividad 17

El número de horas semanales que dedican a estudiar los estudiantes de Bachillerato en Andalucía se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 35, se ha obtenido una media muestral igual a 10 horas. Halla un intervalo de confianza al nivel del 95% para la media de horas de estudio obtenida.

Las actividades 15,16 y 17 son las últimas tres actividades que se realizan del tema antes de pasar a realizar ejercicios de selectividad. Con ellas se pretende que los alumnos

repasen todos los conceptos aprendidos durante el desarrollo de la unidad, y que pasen a realizar las actividades propuestas de selectividad con los conocimientos afianzados.

Tanto las actividades siguientes como el examen del tema serán ejercicios de pruebas de acceso a la universidad reales. Con estas actividades se pretende que los alumnos se enfrenten a dichos ejercicios, que tengan una primera toma de contacto con ellos y vayan familiarizándose con la estructura de los exámenes.

Actividad 19. Curso 2017-2018. Septiembre (Opción A)

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción del alumnado que lleva el teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

- Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de este alumnado que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?
- Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de estimación?
- Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

Actividad 20. Curso 2017-2018. Septiembre (Opción B)

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa, obteniéndose las siguientes edades.

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40

- Obtenga un intervalo de confianza para estimar la edad media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

- b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y a un nivel de confianza del 99%.

Actividad 21. Curso 2017-2018. Junio (Opción A)

Se dispone de cuatro tornillos de 1,2,3 y 4 gramos de peso respectivamente.

- a) Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.
- b) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

Actividad 22. Curso 2017-2018. Junio (Opción B)

En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

- a) Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social.
- b) Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número de mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%

Actividad 23. Curso 2018-2019. Septiembre (Opción A)

Las puntuaciones obtenidas por los participantes de un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

- a) Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.
- b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

Actividad 24. Curso 2018-2019. Septiembre (Opción B)

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50

expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

- a) Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.
- b) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3%.

Actividad 25. Curso 2018-2019. Junio (Opción A)

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

- a) Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad.
- b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

Actividad 26. Curso 2018-2019. Junio (Opción B)

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

- a) Determine un intervalo de confianza al 92% para la media poblacional.
- b) Con una confianza del 95.5%, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos?

Examen

Ejercicio 1. Curso 2016-2017. Junio (Opción A)

La altura de los estudiantes de 2º de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.

- a) ¿Qué distribución sigue la altura media de las muestras de tamaño 25?
- b) Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se les mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

Ejercicio 2. Curso 2015-2016. Septiembre (Opción A)

Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en su envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.

- a) Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo de defecto e interprete el resultado obtenido.
- b) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?

Ejercicio 3. Curso 2015-2016. Septiembre (Opción B)

- a) Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 46 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo hay 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer estrato.
- b) Dada la población $\{2,4,6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

6.9. Atención a la diversidad

El alumnado al que va dirigida esta unidad didáctica no presenta necesidades educativas especiales.

En caso de ser necesario se contaría con el apoyo del equipo especializado del centro y se establecerían las medidas de atención a la diversidad que aparecen en el capítulo IV orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

Podríamos encontrarnos con alumnos que presenten dificultades en el aprendizaje, con alumnos con altas capacidades, para los cuáles habría que adaptar las actividades en función de las necesidades de cada uno para evitar la desmotivación de dichos alumnos.

6.10. Temporalización

La unidad que vamos a desarrollar se imparte en el segundo trimestre del curso de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales, está dividida en 12 sesiones de 60 minutos (8 de enero a 28 de enero).

	<i>Horario</i>	<i>Sesión</i>
<i>8 de enero</i>	Miércoles (8:00-9:00)	1
<i>9 de enero</i>	Jueves (10:00-11:00)	2
<i>10 de enero</i>	Viernes (10:00-11:00)	3
<i>14 de enero</i>	Martes (8:00-9:00)	4
<i>15 de enero</i>	Miércoles (8:00-9:00)	5
<i>16 de enero</i>	Jueves (10:00-11:00)	6
<i>17 de enero</i>	Viernes (10:00-11:00)	7
<i>21 de enero</i>	Martes (8:00-9:00)	8
<i>22 de enero</i>	Miércoles (8:00-9:00)	9
<i>23 de enero</i>	Jueves (10:00-11:00)	10

24 de enero	Viernes (10:00-11:00)	11
28 de enero	Martes (8:00-9:00)	12

Tabla 4. Temporalización de sesiones

Sesión 1

En la sesión uno se hará una introducción al tema y un repaso de los conceptos que se adquirieron en primero de Bachillerato. ¡Para ello se realizará un “Kahoot!” para que los alumnos interactúen, empiecen a recordar conceptos y estén preparados para iniciar el tema.

Sesión 2

En la sesión dos, empezaremos con los contenidos del tema. Muestreo y tipos de muestro. Y se realizarán las actividades 1,2,3 y 4.

Sesión 3

En la sesión tres se explicarán los contenidos referentes a la distribución de la media muestral en una población normal, distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Se realizarán las actividades 5 y 6, y se dejarán propuestas las actividades 7 y 8 para corregirlas en la siguiente sesión.

Sesión 4

En la sesión 4 se corregirán en clase las actividades 7 y 8 que se dejaron propuestas en la sesión anterior, se hará un repaso y se resolverán dudas a los alumnos.

Sesión 5

En la sesión 5 se explicarán los contenidos referentes a estimación puntual, media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Se realizará la actividad 9 con detenimiento, ya que en esta parte del tema los alumnos empiezan a tener más dudas, se dejará como tarea la búsqueda de actividades en los recursos web proporcionados por el profesor para entregarlos en la siguiente sesión.

Sesión 6

En la sesión 6 se comenzará con los intervalos de confianza, explicando en dicha sesión Intervalo de confianza para la media μ e intervalo de confianza para la proporción p . Se realizarán las actividades 10, 11 y 12.

Sesión 7

En la sesión 7 se explicará el error de estimación y tamaño muestral. Se realizarán las actividades 13 y 14.

Sesión 8

En la sesión 8 se hará un repaso de todos los contenidos del tema. Se realizarán las actividades 15, 16 y 17.

Sesión 9

En la sesión 9 se les mostrará a los alumnos ejemplos de Inferencia estadística en los exámenes de selectividad. El profesor realizará en clase las actividades 18 y 19 y se dejarán para hacer en casa las actividades 20,21,22,23,24 y 25.

Sesión 10

En la sesión 10 los alumnos tendrán tiempo en clase para seguir realizando las actividades 20,21,22,23,24 y 25, se irán resolviendo algunos de los ejercicios para que el profesor vaya solucionando dudas que les vayan surgiendo a los alumnos.

Sesión 11

La sesión 11 será la última sesión antes de la realización del examen. Se resolverán las actividades que queden pendientes, y se explicarán todas las dudas que los alumnos puedan tener.

Sesión 12

Examen.

6.11. Evaluación

La evaluación será continua por estar inmersa en el proceso de enseñanza y aprendizaje y por tener en cuenta el progreso del alumnado, con el fin de detectar las dificultades en el momento en el que se produzcan, averiguar sus causas y, en consecuencia, de acuerdo con lo dispuesto en el Capítulo VI del Decreto 110/2016, de 14 de junio, adoptar las medidas necesarias dirigidas a garantizar la adquisición de las competencias imprescindibles que le permitan continuar adecuadamente su proceso de aprendizaje. Asimismo, en la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado se considerarán sus características propias y el contexto sociocultural del centro.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN Y RECUPERACIÓN

El profesorado llevará a cabo la evaluación de la evolución del proceso de aprendizaje de cada alumno o alumna en relación con los objetivos del Bachillerato y las competencias clave, a través de diferentes procedimientos, técnicas o instrumentos como pruebas, escalas de observación, rúbricas o portfolios, entre otros, ajustados a los criterios de evaluación de las diferentes materias y a las características específicas del alumnado.

Utilizaremos los siguientes instrumentos de evaluación:

- Pruebas escritas y examen final de trimestre: Se realizarán dos pruebas escritas por bloque. En este caso, el examen será el segundo examen del bloque tres. Además, se realizará un examen que incluirá los contenidos impartidos durante ese trimestre como recuperación.
- Ejercicios propuestos y entregados a través del Classroom de la asignatura.

Ponderación de instrumentos:

- Pruebas escritas y examen final: 80% de la nota de la evaluación. 40% cada uno de los dos exámenes.
- Entrega de ejercicios: 20% de la nota de la evaluación.

La asignatura se considerará aprobada cuando la nota de la evaluación del trimestre sea igual o superior a 4,5.

La nota final del curso será la media de los tres trimestres cuando la calificación de estos sea igual o superior a 5. Solo hay dos recuperaciones en Junio (ordinaria) y septiembre (extraordinaria). Cuando un alumno no haya superado alguno de los tres trimestres se presentará a la prueba ordinaria/extraordinaria con el trimestre que no haya superado.

La nota de las evaluaciones ordinaria y extraordinaria es la obtenida en esta prueba de recuperación. La subida de nota se realizará en la ordinaria y siguiendo el modelo de las pruebas de selectividad. No se bajará la nota.

7. CONCLUSIONES

Gracias a la realización de este trabajo se ha conseguido alcanzar los objetivos planteados en el inicio del mismo, con los que se pretendía aplicar los conocimientos adquiridos durante el Máster, e integrarlos, para así ponerlos en práctica mediante el diseño de una unidad didáctica.

Con el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster también he podido comprobar y obtener una visión más detallada en conjunto del trabajo que realiza un profesor, en este caso, de Bachillerato, aprendiendo así, la labor que tienen los profesores detrás de las clases, ya que he podido ver que hay mucho trabajo de investigación, formación y preparación para poder mejorar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En cuanto a la realización de la Fundamentación Curricular, me ha permitido analizar el currículo escolar y comparar las normativas vigentes con los libros de texto usados en los centros.

Gracias a las investigaciones para realizar la Fundamentación Didáctica he podido comprobar las dificultades que tienen los alumnos y así aprender sobre sus necesidades. Me ha permitido desarrollar una unidad del temario de oposiciones, preparándome así, en cierto modo, para afrontar dicho examen.

Finalmente, la realización de este Trabajo Fin de Máster me ha permitido ampliar la visión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, he aprendido a investigar y analizar todos los recursos disponibles, tanto en libros de texto como en artículos de internet.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Casas, J. y Santos, J. (1999). *Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas*, Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces S.A.
- Ruiz, L. y Martín, F. (2005). *Fundamentos de Inferencia Estadística*, Madrid: Paraninfo S.A.
- Vélez, R. y García, A. (2012). *Principios de Inferencia Estadística*, Madrid: UNED.
- Pérez, C. (2003). *Estadística. Problemas resueltos y Aplicaciones*, Madrid: Pearson Educación.
- Turner, J. (1974). *Matemática moderna aplicada: Probabilidades, estadística e investigación operativa*, Madrid: Alianza Universidad
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico (coordinador) La educación Matemática en Enseñanza Secundaria. 12 ICE. Universitat de Barcelona.*
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children. D.Reidle: Dordrecht.*
- Moreno, A. J. y Vallecillos, A. (2005) *La Inferencia Estadística Básica en la Enseñanza Secundaria. International Statistical Review.*
- DelMas, R. y Garfield, J. (2003). *The Web-based ARTIST: An online Resource for the Assessment of instructional Outcomes. Joint Statistical Meetings.*
- Feinberg, W. E. (1971). *Teaching the Type I and II errors: the judicial process. The American Statistician, 25, 30-32.*
- Oferta Educativa. (2008). [Internet]. <https://linares.safa.edu/index.php/nuestro-centro-mainmenu-52/oferta-educativa-mainmenu-54>