



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DIVISIBILIDAD EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Alumno/a: **Campoy Calzado, David**

Tutora: Prof.^a D.^a Carmen Ordóñez Cañada

Cotutor: Prof. D. Miguel Ángel García Muñoz

Dpto: Matemáticas

Octubre, 2019

La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en Educación Secundaria Obligatoria

REALIZADO POR:

David Campoy Calzado

TUTORA:

Profª Dª Carmen Ordóñez Cañada

COTUTOR:

Prof. D. Miguel Ángel García Muñoz

CENTRO: Centro de Estudios de Postgrado

TITULACIÓN: Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

ESPECIALIDAD: Matemáticas

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento, como no podía ser de otra forma, a mis tutores: D^a Carmen Ordóñez Cañada y D. Miguel Ángel García Muñoz, por su implicación y compromiso en la elaboración de este trabajo académico. Su asesoramiento ha sido de una calidad suprema e inigualable.

En particular, agradezco a D^a Carmen Ordóñez Cañada su disposición a ilustrarme en la fascinante disciplina científica de la Didáctica de las Matemáticas. El estudio de los constructos de este marco teórico no han hecho más que incrementar exponencialmente mi vocación por la docencia, ya que constituyen una herramienta muy valiosa que el profesorado puede emplear para garantizar el logro de uno de los objetivos más importantes de la educación: ser una máquina de redistribución de oportunidades.

Igualmente, quiero dar las gracias al profesor D. Miguel Ángel García Muñoz, por sus sugerencias y explicaciones, siempre muy didácticas, haciendo fácil todo aquello que me resultaba complicado.

Ambos han constituido en todo momento mi fuente de información más valiosa. Su ortodoxa y rigurosa metodología de trabajo, dignas de admiración, junto con el ánimo y comprensión que en todo momento me transmitieron, han sido de gran ayuda para materializar el presente trabajo.

Por otra parte, ha sido decisiva la ayuda económica del Ministerio de Educación y Formación Profesional, sin la cual nunca hubiera podido cursar este máster. Gracias por amparar y fomentar la consecución de las aspiraciones profesionales de todas las personas.

En estos momentos, no puedo evitar acordarme de aquellos seres queridos que ya no están presentes, como es el caso de mi abuelo, siempre muy preocupado por mi formación académica. Hoy, estaría orgulloso de su nieto.

Finalmente, quisiera agradecer a Cristina, mi más preciado apoyo moral, por su paciencia, comprensión y lealtad demostradas durante tantos años. Gracias por mantenerte a mi lado en los momentos más difíciles.

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo general describir y analizar la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en la Educación Secundaria Obligatoria.

El empleo de las nociones de *configuración epistémica* e *idoneidad didáctica*, proporcionadas por el *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, permiten realizar un análisis didáctico de diferentes libros de texto para Educación Secundaria Obligatoria. El significado institucional de referencia puede establecerse a partir de la fundamentación epistemológica.

Por otra parte, se ha realizado una revisión de la bibliografía relacionada con la investigación en Didáctica de las Matemáticas en esta temática, seleccionando aquellos artículos que versen sobre el surgimiento y desarrollo de conceptos intervinientes en divisibilidad.

Finalmente, se desarrolla una unidad didáctica, en torno a esta materia, que permita a los estudiantes alcanzar los objetivos propuestos y desarrollar las competencias clave recogidas en las leyes educativas.

Palabras clave: Divisibilidad, Educación Secundaria Obligatoria, Didáctica de las Matemáticas, enfoque ontosemiótico

ABSTRACT

The general aim of this work is to describe and analyse the teaching and learning of divisibility in Secondary Education.

The notions of *epistemic configuration* and *didactical suitability*, provided by the *Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction*, enable to realise a didactical analysis of different types of Secondary Education textbooks. Institutional meaning may be established from epistemological foundation.

On the other hand, a review of the literature related to research in Didactics of Mathematics in this subject has been done, selecting those articles that discuss the emergence and development of divisibility concepts.

Finally, a teaching unit, linked with this topic, is developed, which makes possible for students to fulfil the proposed objectives and to develop the key competences gathered in education laws.

Keywords: Divisibility, Secondary Education, Didactics of Mathematics, onto-semiotic approach



ÍNDICE

SECCIÓN 1. INTRODUCCIÓN.....	1
SECCIÓN 2. OBJETIVOS.....	3
SECCIÓN 3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	5
3.1. <i>Análisis de los documentos curriculares</i>	5
3.2. <i>Metodología de análisis de los libros de texto</i>	5
3.2.1. Criterios de elección de las editoriales.....	5
3.2.2. Marco teórico	6
3.3. <i>Antecedentes educativos en la Educación Primaria</i>	12
3.3.1. El estudio de divisibilidad en 5º de primaria	12
3.3.2. El estudio de la divisibilidad en 6º de primaria	12
3.3.3. Impresiones surgidas durante el análisis de antecedentes	13
3.4. Análisis de los libros de texto del curso 1º de ESO.....	14
3.4.1. Análisis de la divisibilidad en la editorial <i>Anaya</i>	15
3.4.2. Análisis de la divisibilidad en la editorial <i>Oxford</i>	19
3.4.3. Valoración de las idoneidades epistémica y cognitiva	23
SECCIÓN 4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	27
4.1. Introducción.....	27
4.2. Los números naturales.....	28
4.3. Los números enteros	28
4.4. Relación de divisibilidad.....	28
4.5. Números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo	29
4.5.1. Números primos	29
4.5.2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	31
4.6. Congruencias.....	37
4.7. Criterios de divisibilidad.....	40
SECCIÓN 5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA.....	47



5.1. Artículo 1.....	48
5.2. Artículo 2.....	51
SECCIÓN 6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA	55
6.1. Título	55
6.2. Justificación.....	55
6.3. Contextualización del centro y del aula.....	58
6.4. Objetivos	58
6.4.1. Primer nivel: objetivos generales de etapa.....	59
6.4.2. Segundo nivel: objetivos de etapa del área de matemáticas	60
6.4.3. Tercer nivel: objetivos específicos de la unidad didáctica	60
6.5. Competencias clave	61
6.6. Contenidos	63
6.7. Metodología.....	64
6.8. Actividades y recursos	65
6.9. Atención a la diversidad.....	86
6.9.1. Estrategias y actividades para alumnos que tengan un progreso menor al esperado	86
6.9.2. Estrategias y actividades para alumnos que tengan un progreso superior al esperado	88
6.10. Temporalización.....	91
6.11. Evaluación	92
SECCIÓN 7. CONCLUSIONES.....	95
 ANEXO I. COMPONENTES E INDICADORES DE LAS IDONEIDADES EPISTÉMICA Y COGNITIVA.....	101
ANEXO II. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{N}$	103
ANEXO III. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{Z}$	107
4.3.1. Construcción de $\mathbb{Z}$	107
4.3.2. El grupo abeliano aditivo de los números enteros.....	110



4.3.3. El monoide conmutativo multiplicativo de los números enteros	112
4.3.4. El anillo unitario conmutativo de los números enteros	115
4.3.5. Ideales.....	115
4.3.6. Orden en $\mathbb{Z}$	117
4.3.7. Valor absoluto en $\mathbb{Z}$	119
ANEXO IV. DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS COMPLEMENTARIAS.....	121
1. Proposición 4.2.2. Principio de inducción.....	121
2. Proposición 4.3.4	121
3. Proposición 4.3.6.	122
4. Proposición 4.3.10	124
5. Proposición 4.3.12	125
6. Proposición 4.3.15	126
7. Proposición 4.3.16	127
8. Proposición 4.5.4	127
9. Proposición 4.5.5	128
10. Lema 4.5.6.....	129
11. Teorema 4.5.7: Teorema Fundamental de la Aritmética	129
12. Proposición 4.5.8	131
13. Proposición 4.5.14	132
14. Proposición 4.5.19: Identidad de Bézout.....	132
15. Teorema 4.5.22: Teorema de Euclides	133
16. Lema 4.5.23.....	134
17. Proposición 4.7.5	135
18. Corolario 4.7.6: Criterio general de la divisibilidad	136
ANEXO V. ARTÍCULOS COMPLEMENTARIOS A LA FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	137
1. Artículo 4.....	137
2. Artículo 5.....	140
ANEXO VI. DESCRIPCIÓN SUCINTA DE LAS COMPETENCIAS CLAVE DEL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL .	143



ANEXO VII. PLAN DE CLASE DE LA ACTIVIDAD 7	145
1. Fase de inicio e introducción de la tarea (5 minutos)	145
2. Fase de exploración y desarrollo (25 minutos).....	145
3. Fase de debate y discusión (15 minutos).....	146
4. Fase de sistematización del aprendizaje matemático (5 minutos)	146
ANEXO VIII. SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 7	147
ANEXO IX. PLAN DE CLASE DE LA ACTIVIDAD 13.....	149
1. Fase de inicio e introducción de la tarea (5 minutos)	149
2. Fase de exploración y desarrollo (25 minutos).....	149
3. Fase de debate y discusión (10 minutos).....	150
4. Fase de sistematización del aprendizaje matemático (10 minutos)	150
ANEXO X. POSIBLE SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 13	153
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	155



ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 3.1. Tipología de significados personales e institucionales.</i>	8
<i>Figura 3.2. Configuración de entidades elementales.</i>	9
<i>Figura 3.3. Componentes de la idoneidad didáctica.</i>	11
<i>Figura 3.4. Introducción del algoritmo de la división.</i>	13
<i>Figura 3.5. Cálculo del mcm (1).</i>	14
<i>Figura 3.6. Cálculo del mcm (2).</i>	14
<i>Figura 3.7. Empleo de lenguaje gráfico y numérico.</i>	16
<i>Figura 3.8. Ejemplo de lenguaje gráfico.</i>	16
<i>Figura 3.9. Ejemplo de lenguaje numérico.</i>	16
<i>Figura 3.10. Ejemplo de lenguaje algorítmico.</i>	16
<i>Figura 3.11. Ejemplo de combinación de lenguajes tabular, numérico y vernáculo.</i>	20
<i>Figura 3.12. Ejemplo de combinación de lenguaje gráfico y vernáculo.</i>	20
<i>Figura 3.13. Elementos de la multiplicación y división.</i>	22
<i>Figura 3.14. Definición de división exacta y algoritmo de la división.</i>	22
<i>Figura 4.1. Restos de las divisiones entre b.</i>	41
<i>Figura 5.1. Problema propuesto a los estudiantes.</i>	49
<i>Figura 5.2. Respuesta de un estudiante en la fase de participación (1ª parte).</i>	50
<i>Figura 5.3. Respuesta de un estudiante en la fase de participación (2ª parte).</i>	51
<i>Figura 5.4. Primer bloque de preguntas.</i>	52
<i>Figura 5.5. Segundo bloque de preguntas.</i>	52
<i>Figura 5.6. Entrevista de identificación del significado de múltiplo.</i>	54
<i>Figura 6.1. Banderines.</i>	69
<i>Figura 6.2. Banderines.</i>	70
<i>Figura 6.3. Banderín.</i>	70
<i>Figura 6.4. Ejemplo de suma mágica.</i>	74
<i>Figura 6.5. Soluciones al matgram</i>	83



<i>Figura 6.6. Posibles soluciones al matgram.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 6.7. Cartel publicitario.</i>	<i>89</i>
<i>Figura 10.1. Cadena de ideales.</i>	<i>117</i>
<i>Figura 12.1 Procedimiento para determinar si 63687 es divisible por 71.</i>	<i>139</i>
<i>Figura 12.2. Resultado de la criba de Eratóstenes (Peñafiel, 1993, p. 97).</i>	<i>141</i>
<i>Figura 15.1. Primer caso de suma mágica.....</i>	<i>147</i>
<i>Figura 15.2. Segundo caso de suma mágica.....</i>	<i>147</i>
<i>Figura 15.3. Tercer caso de suma mágica.</i>	<i>147</i>
<i>Figura 17.1. Solución del matgram.....</i>	<i>153</i>
<i>Figura 17.2. Posible matgram que pueden proponer los alumnos.....</i>	<i>154</i>



ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 3.1. Lenguajes presentes para los números primos y compuestos en el libro de la editorial Anaya.....</i>	<i>16</i>
<i>Tabla 3.2. Lenguajes en el cálculo del mínimo común múltiplo presentes en el manual de Anaya.</i>	<i>16</i>
<i>Tabla 3.3. Lenguajes en el cálculo del mínimo común múltiplo presentes en el manual de Oxford.....</i>	<i>20</i>
<i>Tabla 3.4. Lenguajes en la descomposición factorial de un número presentes en el libro de Oxford.....</i>	<i>20</i>
<i>Tabla 4.1. Criba de Eratóstenes.</i>	<i>30</i>
<i>Tabla 4.2. Restos potenciales de 10 módulo n.....</i>	<i>43</i>
<i>Tabla 6.1. Metodologías empleadas en el desarrollo de la unidad didáctica.</i>	<i>65</i>
<i>Tabla 6.2. Cronograma.</i>	<i>91</i>
<i>Tabla 8.1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica.....</i>	<i>101</i>
<i>Tabla 8.2. Componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva.</i>	<i>102</i>



ÍNDICE DE ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
EOS	Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos
ESO	Educación Secundaria Obligatoria
DE	Dominio euclídeo
DFU	Dominio de factorización única
DI	Dominio de integridad
DIP	Dominio de ideales principales
DNI	Documento Nacional de Identidad
mcd	Máximo común divisor
mcm	Mínimo común múltiplo
RD	Real Decreto
SAEM	Sociedad Andaluza de Educación Matemática
s.f	sin fecha
TAD	Teoría Antropológica de lo Didáctico
TFM	Trabajo Fin de Máster



SECCIÓN 1. INTRODUCCIÓN

La concepción del presente trabajo tuvo lugar en las primeras reuniones con mis tutores, ambos del área de Álgebra. Entre todos, estuvimos barajando posibles líneas de desarrollo de dicho trabajo. Finalmente, se optó por la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en Educación Secundaria Obligatoria, dado la enorme cantidad de aplicaciones a situaciones de la vida cotidiana, como puede ser el cálculo de años bisiestos, la seguridad y el cifrado de las cuentas bancarias o de los datos que circulan por Internet, la determinación de la letra asociada al número del DNI o el estudio de los ciclos vitales de algunos seres vivos, por citar algunos ejemplos.

Según la Orden 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, el estudio de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales debe impartirse en el primer curso. El aprendizaje de dicha materia no queda reducido a este intervalo temporal, sino que se amplía tanto a niveles inferiores como superiores, modificando los dominios en los que se trabajan estos conceptos.

En el caso de la Educación Primaria, en el quinto curso, comienza a aparecer la relación de divisibilidad, aunque mencionada de forma implícita, mediante la presentación de la división exacta. El concepto *divisor* aún no se muestra como una relación entre números naturales, quedando reducido al papel que desempeña en la operación división. En cuanto al sexto curso, se introducen los conceptos de múltiplo, divisor, número primo, número compuesto y mínimo común múltiplo (mcm). Empiezan a sugerirse procedimientos muy elementales para el cálculo del mcm de dos números, esto es, la obtención de listas de múltiplos y la comparación entre ellas para obtener el mayor de los múltiplos, según el orden usual en $\mathbb{N}$.

En el tercer y cuarto curso de la ESO, se amplía la divisibilidad al anillo de los polinomios, tanto en *Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Académicas* como en *Matemáticas Orientadas a Enseñanzas Aplicadas*, aunque en esta última se hace con un nivel de profundización menor.

En las enseñanzas de Bachillerato, la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I* dedica una parte del segundo bloque al estudio esta misma temática.

Asimismo, el estudio de la divisibilidad es una parte esencial de enseñanzas universitarias de carácter técnico, como es el caso de aquellas relacionadas con la informática, donde la criptografía ocupa una posición de primacía.



Con todo lo expuesto anteriormente, el objetivo general que propone este trabajo es describir y analizar la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, que es el impartido en Secundaria, aplicando, para ello, los conocimientos adquiridos durante los estudios del máster.

Por lo que respecta a la estructura del trabajo, se articula en torno a siete secciones.

La primera de ellas es en la que el lector se encuentra actualmente, la introducción.

En la segunda sección, se establecen los objetivos que se persiguen en este Trabajo Fin de Máster.

En tercer lugar, se encuentra la fundamentación curricular, destinada, por una parte, a determinar en qué curso se ubican los contenidos sobre divisibilidad en el currículo oficial vigente y, por otra, a analizar y comparar la forma en la que dos libros de texto de diferentes editoriales presentan dichos contenidos. Dicho análisis y comparación se llevan a cabo mediante el empleo de las *entidades primarias* y la noción de *idoneidad didáctica*, desarrolladas en un marco teórico conocido como *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (en adelante, EOS).

Seguidamente, se localiza la fundamentación epistemológica, en la que se desarrolla el tema de las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria que versa sobre la divisibilidad.

A continuación, aparece la sección quinta, que contiene apostillas sobre investigaciones en Didáctica, de donde se extraen dificultades, errores o fenómenos que intervienen en los procesos de instrucción matemáticos en torno a esta temática.

En la sexta sección, se sugiere el diseño de una didáctica relativa a la divisibilidad en $\mathbb{N}$. Para su elaboración, se aplica la información emanada de las fundamentaciones anteriores. Los contenidos y objetivos que propone dicha unidad se consiguen alcanzar gracias a las actividades propuestas, implementadas con diferentes metodologías (tradicional, modelización matemática, uso de herramientas TIC, investigación/indagación y aprendizaje basado en juegos), a la vez que se favorece la adquisición de las competencias clave.

Se concluye el trabajo con una valoración general del proceso de realización del mismo. Finalmente, se adjuntan los anexos, en los que se recogen todos aquellos aspectos complementarios disponibles para que el lector interesado pueda ampliar la información que considere oportuna.



SECCIÓN 2. OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es describir y analizar la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en Educación Secundaria Obligatoria, aplicando, para ello, los conocimientos adquiridos durante los estudios del máster.

Para alcanzar este objetivo general, se proponen los siguientes objetivos parciales:

01. *Poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos en el máster y aplicarlos al estudio de la divisibilidad en Educación Secundaria Obligatoria.*

Respecto de la fundamentación curricular, se plantea:

02. *Realizar un análisis didáctico de los contenidos relacionados con la divisibilidad en dos libros de texto seleccionados, de diferentes editoriales, utilizando para ello las nociones de configuración epistémica e idoneidad didáctica proporcionadas por el marco teórico Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, estableciendo una comparativa entre ellos.*

Respecto de la fundamentación epistemológica, se acomete:

03. *Desarrollar los contenidos curriculares relacionados con el tema de divisibilidad que se cursan en Educación Secundaria, y que se encuentran en el temario de las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Secundaria.*

La investigación en Didáctica de las Matemáticas juega un papel esencial en cualquier proceso de instrucción, en particular, en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad. Por tanto, el cuarto objetivo propuesto será:

04. *Analizar algunas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre divisibilidad, en las que se pongan de manifiesto las dificultades, errores o fenómenos didácticos que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad.*

El estudio de las secciones anteriores invita a extraer distintas implicaciones en la enseñanza y, así, elaborar una propuesta personal, materializada en el siguiente objetivo:

05. *Diseñar y desarrollar actividades relacionadas con la divisibilidad en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria.*



SECCIÓN 3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

Esta sección está destinada, por una parte, a determinar en qué curso se ubican los contenidos sobre divisibilidad en el currículo oficial vigente y, por otra, a analizar y comparar la forma en la que los libros de texto presentan dichos contenidos.

3.1. *Análisis de los documentos curriculares*

La unidad didáctica a elaborar se enmarca en el estudio de la *divisibilidad*. Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los contenidos vinculados a *divisibilidad* son los siguientes:

- Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.
- Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.
- Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 411).

La normativa establece estos contenidos dentro del bloque de *Números y Álgebra* para los cursos 1º y 2º de la ESO, pero no especifica en cuál de ellos concretamente. Para dilucidar esto, se acude a las leyes educativas de la Comunidad Autónoma de Andalucía. En la Orden de 14 de Julio de 2016, se especifica que estos contenidos deben impartirse el primer curso (Consejería de Educación, 2016, p. 207).

3.2. *Metodología de análisis de los libros de texto*

En este apartado, se van a presentar dos libros de texto de diferentes editoriales, elegidos para analizarlos utilizando las herramientas de un marco teórico, el cual se introducirá y desarrollará más adelante. Asimismo, con objeto de contextualizar los contenidos de divisibilidad que se estudian en la Educación Secundaria, se completa toda esta información con una revisión de los antecedentes educativos relacionados con este tema en los dos últimos cursos de la Educación Primaria.

3.2.1. Criterios de elección de las editoriales

Las editoriales seleccionadas han sido *Anaya* y *Oxford*. El motivo de la elección de la editorial *Anaya* es la hegemonía que tiene en el centro donde he realizado las prácticas docentes, puesto que sus libros de texto son utilizados en todos los niveles de la



asignatura de matemáticas. El otro manual me fue facilitado por el profesorado del departamento de matemáticas de dicho instituto.

En el subapartado inmediatamente ulterior, se procede a la introducción y desarrollo del marco teórico que servirá de base para analizar los mencionados manuales.

3.2.2. Marco teórico

La *Didáctica de las Matemáticas* es aquella disciplina científica encargada de investigar los factores que intervienen en los procesos de transmisión y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas, con el objetivo de diseñar propuestas que aumenten la eficacia y eficiencia de dichos procesos (Godino, Batanero & Font, 2012, p. 47).

Así pues, estas características idiosincráticas de la Didáctica de las Matemáticas proporcionan una coyuntura para el surgimiento del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, 2017). Este es el marco teórico que se utilizará para el análisis didáctico de los libros de texto de Secundaria seleccionados, puesto que sus constructos han proporcionado las herramientas necesarias para estudiar los fenómenos que emergen de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en esta materia.

La estructura teórica del EOS se sustenta en las aportaciones de otras ramas de la ciencia que tienen como denominador común el estudio de la cognición humana, tales como la psicología, sociología, epistemología, semiótica y las ciencias de la educación (Godino, 2014, p. 6). Para comenzar a desarrollar, de forma sintetizada, los principios básicos del EOS que intervienen es este trabajo, se construirán en los próximos subapartados algunas definiciones necesarias.

3.2.2.1. Dimensiones de los procesos de instrucción matemáticos

Se entiende por *institución* al conjunto de personas que están implicadas en un mismo tipo de situaciones problemáticas. Estas, al ser compartidas entre los miembros integrantes, hacen de ellos generadores de prácticas sociales características, condicionadas por los preceptos de dicha institución (Godino, 2014, p. 11).

La *práctica matemática* se concibe como aquellas acciones llevadas a cabo por un sujeto con el fin de resolver problemas matemáticos, compartir con otros sujetos la solución alcanzada, cuestionarla o generalizarla a otras situaciones (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Si las prácticas son llevadas a cabo por una persona, se denominan *prácticas*



personales. En cambio, si son realizadas en el seno de una institución, reciben el nombre de *prácticas institucionales* (Godino, Batanero & Font, 2012, p. 52). En lugar de hablar de una práctica matemática en particular, resulta más interesante considerar *sistemas de prácticas*. Análogamente, se tienen *sistemas de prácticas institucionales y personales*, dependiendo de su procedencia (Godino, Batanero & Font, 2012, p. 52).

Por lo que se refiere al *proceso de instrucción matemática*, se puede entender como aquellos procesos planificados de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los que intervienen cuatro elementos: unos sistemas de prácticas matemáticas concretos; los sujetos, o estudiantes, que deben asimilar dichos sistemas de prácticas; el profesor y los recursos instruccionales (Godino, Contreras & Font, 2006, p. 2). Según Godino, Batanero y Font (2012, p.51), este proceso de instrucción tiene siete dimensiones:

- *Epistémica*: referente al conocimiento institucional.
- *Docente*: labores propias del profesor.
- *Discente*: labores propias estudiante.
- *Mediacional*: referente al empleo de recursos instruccionales.
- *Cognitiva*: origen de los significados personales.
- *Emocional*: comportamientos y emociones manifestados por los discentes a la hora de instruirse en matemáticas.
- *Ecológica*: referente a las interferencias que ejerce el contexto social y educativo sobre los procesos de instrucción matemáticos.

3.2.2.2. Significados personales e institucionales

Los significados de los objetos matemáticos son los sistemas de prácticas. Dependiendo de su autoría, se distinguen, por una parte, los *significados personales*, que son aquellos que surgen cuando los sistemas de prácticas son llevados a cabo por una persona (sistema de prácticas personales), y, por otra parte, los *significados institucionales*, que se manifiestan si estos sistemas de prácticas están normalizados entre los integrantes de una institución (sistemas de prácticas institucionales) (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

Atendiendo a los significados institucionales, se pueden establecer los siguientes tipos:

- *Referencial*: es aquel que se asigna a un objeto matemático (Gea, 2014, pp. 34-35).

- *Pretendido*: aquel que surge al realizar la planificación del proceso de instrucción (Godino, Batanero & Font, 2012, p. 53).
- *Implementado*: es el significado que emerge de los sistemas de prácticas ejercidos por el docente (Godino, Batanero & Font, 2012, p. 53).
- *Evaluado*: el que emana de los sistemas de prácticas que emplea el docente para realizar la evaluación de aprendizajes (Godino, Batanero & Font, 2012, p. 53).

Respecto a los significados personales, Godino, Batanero y Font (2012, pp. 53-54) distinguen tres tipos:

- *Global*: sistema de prácticas que el estudiante tiene capacidad de desarrollar respecto a un objeto matemático determinado.
- *Declarado*: significado emergente de los sistemas de prácticas manifestados por el estudiante en las pruebas de evaluación de aprendizajes. Se incluyen los sistemas de prácticas considerados tanto correctos como incorrectos desde la perspectiva institucional.
- *Logrado*: atañe a los sistemas de prácticas expresados por el estudiante que son afines a la institución.

Asimismo, estos autores muestran, de forma esquemática, esta clasificación a través de la *Figura 3.1*:



Figura 3.1. Tipología de significados personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2012, p. 54).

Una forma de caracterizar los significados personales de los estudiantes, será analizar las dificultades y errores en términos de *conflictos semióticos*, que se definen como «toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión

por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas» (Godino, 2002, p. 258).

3.2.2.3. Entidades primarias y configuraciones epistémicas

Para estudiar mejor los procesos de enseñanza y aprendizaje, el EOS propone una clasificación de los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas. Según Godino, Batanero y Font (2012, p. 55), tales objetos reciben el nombre de *entidades elementales o primarias*:

- *Situaciones-problemas*: Son la génesis o la razón de ser la actividad matemática. Pueden ser ejercicios o aplicaciones extra-matemáticas.
- *Conceptos*: Son aquellos objetos introducidos mediante definiciones.
- *Proposiciones*: Enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: operaciones, métodos de cálculo o algoritmos.
- *Argumentos*: enunciados elaborados para justificar o validar las proposiciones y procedimientos.
- *Lenguaje*: vocablos específicos, expresiones, notaciones, representaciones gráficas, etc. empleados en los diversos registros, tales como oral, escrito o gestual.

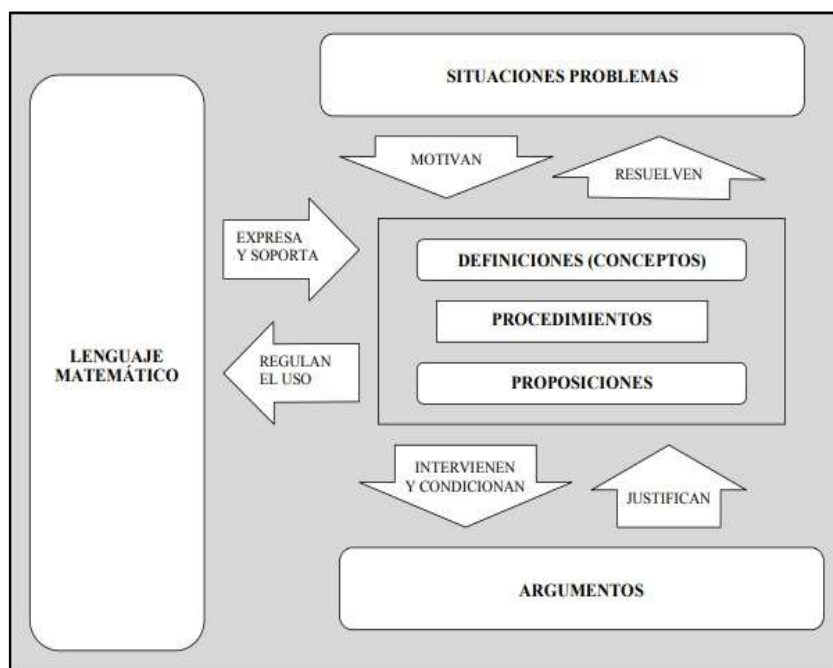


Figura 3.2. Configuración de entidades elementales (Godino, Font, Wilhelmi & de Castro, 2009, p. 65).



Dichas entidades (esquematisadas en la *Figura 3.2*), a su vez, se unen y organizan dando lugar a configuraciones ontosemióticas (Giacomone, 2017): configuraciones epistémicas (CE) referidas a significados institucionales, o cognitivas, referidas a los significados personales.

3.2.2.4. Idoneidad didáctica

La noción de *idoneidad didáctica* (Godino, Contreras & Font, 2006) es considerada el punto de partida para la creación de una teoría de diseño instruccional que tenga en cuenta las siete dimensiones de todo proceso de instrucción matemática. Se presenta como una herramienta diseñada para la intervención en el aula (Godino, 2013, p. 115). Tal y como señala Godino (2017):

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino, 2017, p. 13).

Además, esta noción puede emplearse en Didáctica de las Matemáticas a distintos niveles. Así lo expresa Godino (2013) en el siguiente fragmento:

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de los estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales (Godino, 2013, p. 118).

Consecuentemente, se podrá aplicar esta herramienta para valorar la idoneidad didáctica de los libros de texto de la ESO seleccionados. Este análisis se desarrolla en el apartado 4 de esta misma sección.

La idoneidad didáctica se determina a través de la articulación de las seis componentes (Godino, 2013, p. 115), las cuales se presentan esquematizadas en la *Figura 3.3*.

A su vez, cada componente se determina por sus respectivos indicadores, desarrollados por Godino (2013). Por cuestiones de espacio, se proceden a detallar en este trabajo solamente los indicadores de las componentes epistémica y cognitiva, que se aportan en el *Anexo I*. Godino (2013) define estas idoneidades parciales como se muestra a continuación:

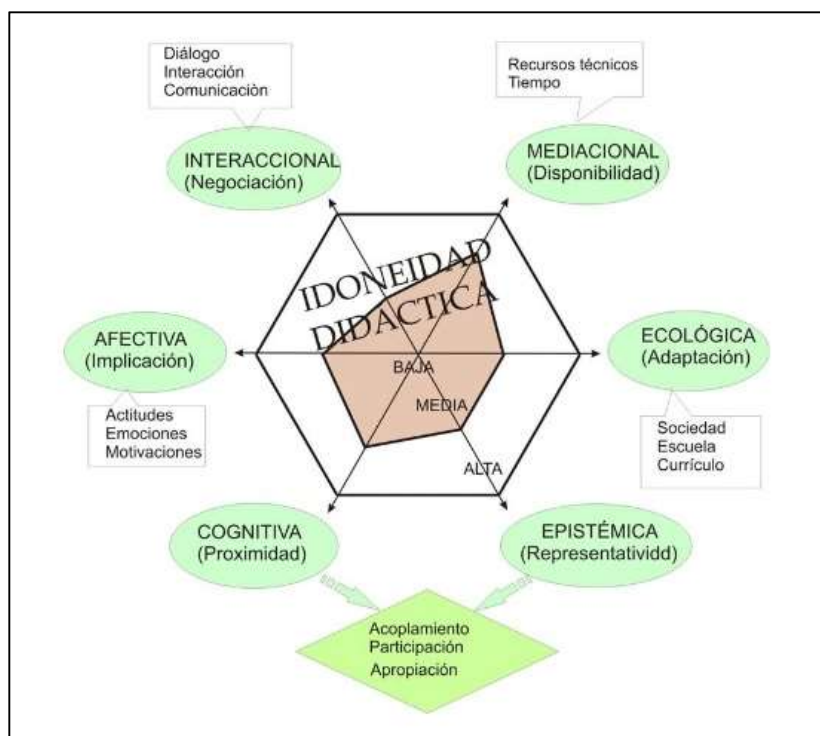


Figura 3.3. Componentes de la idoneidad didáctica (Godino, 2013, p. 116).

- *Idoneidad epistémica*: es el grado en el que los significados institucionales implementados o pretendidos representan bien a un significado de referencia, teniendo en cuenta el nivel educativo al que está dirigido el proceso de instrucción (Godino, 2013, pp. 118-119).
- *Idoneidad cognitiva*: tiene en cuenta la idea de *zona de desarrollo próximo* planteada por Vygotsky (1934). Es el grado en que los significados institucionales que se pretenden implementar pueden ser asumidos correctamente por los estudiantes (Godino, 2013, p. 121).

La valoración de la idoneidad didáctica será establecida como alta, media o baja en cada una de las componentes, según los indicadores expuestos en el mencionado anexo. En efecto:

El juicio sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio tiene un carácter ordinal, y se aplica a cada faceta. Se valora como alta, media, baja, según la presencia o ausencia de un conjunto de indicadores empíricos de idoneidad incluidos en una pauta o guía elaborada en trabajos previos (Godino, 2011), lo cual permite atribuir una cierta objetividad a la valoración. Tales indicadores reflejan “principios didáctico-matemáticos” sobre los cuales existe un cierto consenso en la comunidad de educación matemática. La valoración ordinal de la idoneidad didáctica no es relevante. Lo importante es la identificación de aspectos específicos del diseño o de la implementación que podrían ser cambiados de una manera fundamentada en próximos ciclos de estudio realizados en circunstancias similares (Godino *et al.*, 2014, p. 194).



3.3. Antecedentes educativos en la Educación Primaria

En primer lugar, con la intención de establecer un contexto inicial para analizar la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en esta materia, considero necesario definir sus antecedentes educativos en aras de acotar los conocimientos ya adquiridos y determinar la base cognitiva sobre la que seguir construyendo el saber matemático. Los libros de texto que se van a utilizar para explorar los mencionados antecedentes son las propuestas para 5º (Ferrero, Gaztelu, Martín & Alonso, 2015) y 6º (Ferrero, Martín, Gómez, Carvajal & de la Rosa, 2015) de Educación Primaria editadas por *Anaya*. Esta editorial también será analizada posteriormente para los libros de Secundaria, ya que es la utilizada en el instituto donde realicé las prácticas.

A continuación, se exponen las entidades primarias consideradas por el EOS: conceptos, proposiciones y procedimientos más destacados encontrados en los dos libros de Primaria. Por razones de espacio, y por no ser objeto de este estudio, no se presentan las entidades *situaciones-problemas*, *lenguaje* y *argumentaciones* intervinientes en Educación Primaria.

3.3.1. El estudio de divisibilidad en 5º de primaria

Dentro de la entidad *conceptos*, se trabajan las definiciones de divisor, introducido mediante el resultado del algoritmo de la división (ver *Figura 3.4*), y la relación de divisibilidad, aunque mencionada de forma implícita mediante la presentación de la división exacta.

En cuanto a la entidad *proposiciones*, se menciona la invariabilidad del cociente al multiplicar el dividendo y el divisor por un mismo número natural. Esto se interpreta como una propiedad fundamental de la división. Adicionalmente, se introduce el algoritmo de la división.

Por lo que se refiere a la entidad *procedimientos*, se presenta la división (con una, dos y tres cifras; y con ceros finales en el dividendo y divisor).

3.3.2. El estudio de la divisibilidad en 6º de primaria

Respecto a la entidad *conceptos*, los objetos matemáticos que intervienen son: múltiplo, divisor, mínimo común múltiplo, número primo y número compuesto.

Por lo que se refiere a la entidad *proposiciones*, no aparecen resultados expresados explícitamente, si bien se usa de forma implícita el algoritmo de la división.

En cuanto a la entidad *procedimientos*, están la obtención de múltiplos y divisores mediante el algoritmo de la división; cálculo del mínimo común múltiplo mediante la obtención de las listas de múltiplos y la comparación de ellas para obtener el mayor de los múltiplos, según el orden usual en $\mathbb{N}$; y los criterios de divisibilidad.

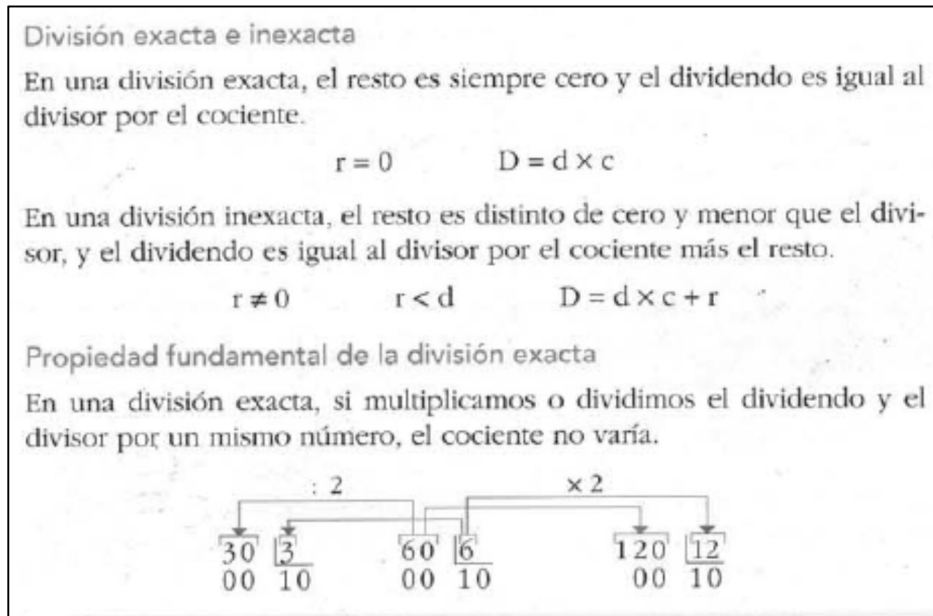


Figura 3.4. Introducción del algoritmo de la división (Ferrero, Gaztelu, Martín & Alonso, 2015, p. 46).

3.3.3. Impresiones surgidas durante el análisis de antecedentes

En el libro de 6º de Primaria, como se dijo anteriormente, se utilizan las listas de múltiplos para el cálculo del mcm, tal y como puede observarse en la *Figura 3.6*. Este método no es muy eficaz cuando los números considerados son suficientemente grandes, por lo que, en mi opinión, deberían, al menos, observar esta circunstancia y abrir así el camino hacia nuevos métodos más eficaces, correspondientes a currículos de cursos superiores.

Por otro lado, como se ve en la *Figura 3.5*, se utiliza un lenguaje gráfico para representar en una recta los múltiplos de 3 y 4, respectivamente. En mi opinión, este lenguaje gráfico puede suponer un obstáculo para el cálculo del mcm o mcd en cursos superiores, donde se trabajan otros dominios, en los que no es posible una representación de este tipo (piénsese en el anillo de polinomios, enteros de Gauss u otros dominios euclídeos).

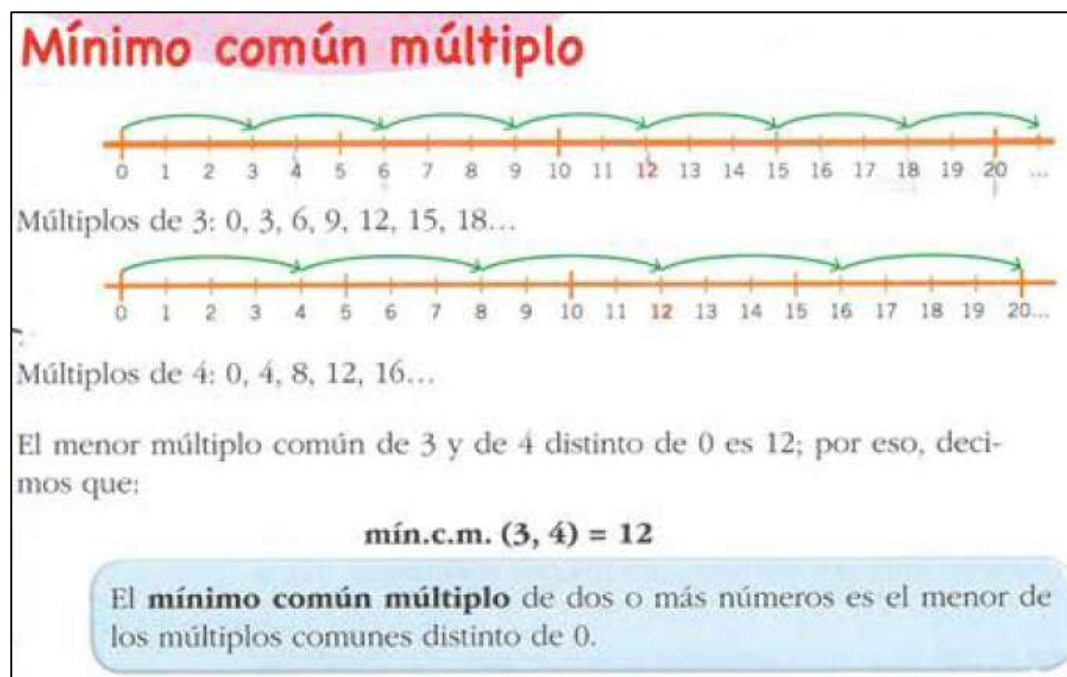


Figura 3.5. Cálculo del mcm (1) (Ferrero, Martín, Gómez, Carvajal & de la Rosa, 2015, p. 41).

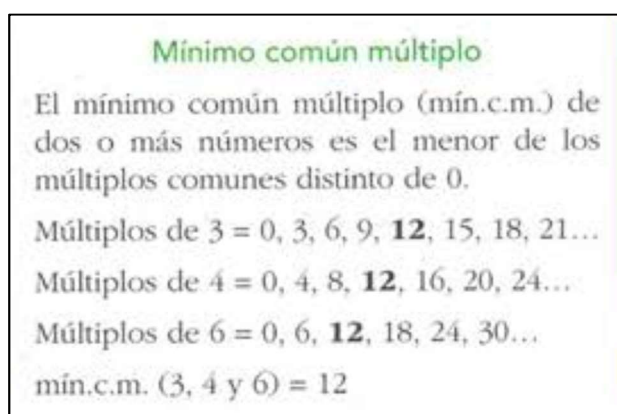


Figura 3.6. Cálculo del mcm (2) (Ferrero, Martín, Gómez, Carvajal & de la Rosa, 2015, p. 46).

3.4. Análisis de los libros de texto del curso 1º de ESO

En este apartado, se realiza el análisis didáctico de los libros de texto de las editoriales *Anaya* (Colera, Gaztelu & Colera, 2016) y *Oxford* (Contreras, Fernández, Lobo, Pérez & Uriondo, 2011). Para llevarlo a cabo, según el EOS, se determinarán las entidades primarias: *situaciones-problemas*, *lenguaje*, *conceptos*, *proposiciones*, *procedimientos* y *argumentos*, en la unidad de divisibilidad de los dos manuales. Esto se encuentra en los subapartados 3.4.1 y 3.4.2.



3.4.1. Análisis de la divisibilidad en la editorial *Anaya*

En el manual de Colera *et al.* (2016), aparecen las siguientes entidades elementales:

3.4.1.1. Situaciones-problemas

Dentro de las *situaciones-problemas*, siguiendo a Ordóñez (2018, pp. 74-75), se consideran los ítems detallados a continuación:

- *Elementos introductorios*: la unidad comienza con elementos históricos introductorios, donde se habla de la vida de Euclides y su obra *Elementos*; divisiones al estilo egipcio; construcción de todos los posibles rectángulos que tengan un área determinada (como primera toma de contacto con los conceptos *múltiplo* y *divisor*), y generación de series numéricas en la calculadora (como primera toma de contacto con el concepto de *múltiplo*).
- *Ejemplos*: se presentan un total de 43 ejemplos dispuestos antes y después de la introducción de cada concepto nuevo. Además, incluye un ejemplo, al final de la unidad, para aprender a resolver problemas.
- *Ejercicios*: 69 actividades repartidas en sus secciones correspondientes. Adicionalmente, al final de la unidad, se proponen 19 ejercicios de repaso; 7 problemas de nivel inicial y medio; 2 problemas de nivel avanzado; un taller de matemáticas con 5 problemas de ampliación y aplicación a la vida real, y 12 actividades de autoevaluación.
- *Aplicaciones*: un problema de relación entre la divisibilidad y la geometría; un problema de investigación y aplicación de los números primos a la criptografía (que se presenta bajo el epígrafe «Infórmate e investiga») y un problema numérico relacionado con el 101.

3.4.1.2. Lenguajes

Para el análisis de esta entidad, se consideran los tipos de lenguajes extraídos de investigaciones realizadas por Ordóñez (2018, pp. 54-56). Se considera en este trabajo la siguiente tipología: *natural-vernáculo*, *numérico*, *tabular*, *gráfico* y *formal*, considerando también el *lenguaje algorítmico*, caracterizado por sus instrucciones, cortas y precisas, organizadas en pasos.

Vernáculo	Gráfico y numérico
«Los números, como el 18, que se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman compuestos» (Colera <i>et al.</i> , 2016, p.49).	 Figura 3.7. Empleo de lenguaje gráfico y numérico (Colera <i>et al.</i>, 2016, p. 49).

Tabla 3.1. Lenguajes presentes para los números primos y compuestos en el libro de la editorial Anaya.

En la *Tabla 3.1*, se muestran los tipos de lenguaje empleados para introducir los números primos y compuestos. Del mismo modo, la *Tabla 3.2* contiene los lenguajes utilizados en el cálculo del mínimo común múltiplo.

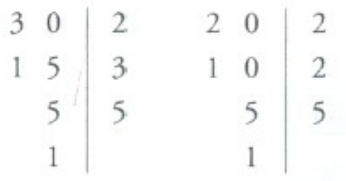
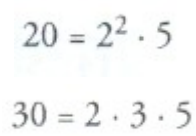
Vernáculo	Gráfico	Numérico
«Comprueba que todos los factores escogidos son imprescindibles, pues si se suprime cualquiera de ellos, deja de ser múltiplo de alguno de los números» (Colera <i>et al.</i> , 2016, p. 53).	 Figura 3.8. Ejemplo de lenguaje gráfico (Colera <i>et al.</i>, 2016, p. 53).	 Figura 3.9. Ejemplo de lenguaje numérico (Colera <i>et al.</i>, 2016, p. 53).
Algorítmico		
Para calcular el mínimo común múltiplo de varios números: 1. Se descomponen los números en factores primos. 2. Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece. 3. Se multiplican los factores elegidos. Figura 3.10. Ejemplo de lenguaje algorítmico (Colera <i>et al.</i>, 2016, p. 53).		

Tabla 3.2. Lenguajes en el cálculo del mínimo común múltiplo presentes en el manual de Anaya.

3.4.1.3. Conceptos

En cuanto a los *conceptos*, se pueden apreciar en este manual los siguientes:



- *Relación de divisibilidad*: «dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando uno contiene al otro una cantidad exacta de veces; es decir, cuando su cociente es exacto» (Colera *et al.*, 2016, p. 44).
- *Múltiplo y divisor*: «cuando dos números están emparejados por la relación de divisibilidad, decimos que el mayor es múltiplo del menor y el menor es divisor del mayor» (*ibíd.*, p.44).
- *Número compuesto*: «los números, como 18, que se pueden descomponer en factores más sencillos, se llaman números compuestos» (*ibíd.*, p. 49).
- *Número primo*: «los números, como el 13, que no se pueden descomponer en factores más sencillos, se llaman números primos. Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad» (*ibíd.*, p. 49).
- *Mínimo común múltiplo*: «el menor de los múltiplos comunes de dos o más números, a , b , c ... se llama mínimo común múltiplo, y se expresa así: mín.c.m (a , b , c ...)» (*ibíd.*, p. 52).
- *Máximo común divisor*: «el mayor de los divisores comunes a dos o más números, a , b , c ... se llama máximo común divisor, y se expresa así: máx.c.d. (a , b , c ...)» (*ibíd.*, p. 55).

3.4.1.4. Propositiones

Con respecto a las *proposiciones*, se pueden distinguir las que se mencionan a continuación:

- « a es múltiplo de b , o lo que es igual, b es divisor de a , si la división $a : b$ es exacta» (*ibíd.*, p. 44).
- «Todo número natural, a , es múltiplo de sí mismo y de la unidad» (*ibíd.*, p. 46).
- «Un número distinto de cero tiene infinitos múltiplos» (*ibíd.*, p. 46).
- «Todo número es divisor de sí mismo» (*ibíd.*, p. 46).
- «El 1 es divisor de cualquier número» (*ibíd.*, p. 46).
- *Criterio de divisibilidad por 2*: «un número es divisible por 2 (es múltiplo de 2) si termina en cifra par: 0-2-4-6-8» (*ibíd.*, p. 47).
- *Criterio de divisibilidad por 3*: «un número es divisible por 3 (es múltiplo de 3) si la suma de sus cifras es múltiplo de 3» (*ibíd.*, p. 47).



- *Criterio de divisibilidad por 5*: «Un número es divisible por 5 (es múltiplo de 5), si termina en 0 o en 5» (*ibíd.*, p. 47).
- *Criterio de divisibilidad por 9*: «un número es divisible por 9 (es múltiplo de 9) si la suma de sus cifras es múltiplo de 9» (*ibíd.*, p. 47).
- *Criterio de divisibilidad por 10*: «un número es divisible por 10 (es múltiplo de 10) si termina en 0» (*ibíd.*, p. 47).
- *Criterio de divisibilidad por 11*: «un número es divisible por 11 si la suma de las cifras de lugar par menos la suma de las cifras de lugar impar es 0 o un múltiplo de 11» (*ibíd.*, p. 47).
- «El número 1, como solo tiene un divisor, no se considera primo. Cualquier otro número, o es primo o es compuesto» (*ibíd.*, p. 49).
- *Teorema Fundamental de la Aritmética*: «un número, si no es primo, se puede descomponer en factores, y estos, a su vez, en otros factores, hasta que todos sean primos» (*ibíd.*, p. 50).
- «En la descomposición de los múltiplos de un número, aparecen todos los factores primos del número (y, generalmente, algunos más)» (*ibíd.*, p. 51).
- «En la descomposición de los divisores de un número, aparecen algunos de los factores primos del número (generalmente, no todos) y ningún factor más» (*ibíd.*, p. 51).

3.4.1.5. Procedimientos

Los *procedimientos* que aparecen son: la división egipcia; división euclídea; cálculo de los múltiplos de un número; cálculo de los divisores de un número; ejecución de los criterios de divisibilidad; criba de Eratóstenes para los 30 primeros números naturales; descomposición de un número en factores primos; cálculo de los divisores de un número mediante su descomposición en factores primos; cálculo del mcm de dos números mediante la determinación del menor de sus múltiplos comunes; cálculo del mcd y mcm de dos números mediante su descomposición en factores primos, y cálculo del mcd de dos números a partir de la obtención de todos sus divisores.

3.4.1.6. Argumentos

Finalmente, las argumentaciones que ofrece este manual son directas y básicas, en las que se deduce de forma natural a partir de los conceptos o proposiciones. No se



muestran otros tipos de demostraciones, como son las de tipo recurrente, reducción al absurdo, etc., correspondientes a niveles superiores.

3.4.2. Análisis de la divisibilidad en la editorial *Oxford*

En el libro de texto de la editorial Oxford (Contreras *et al.*, 2011), aparecen las siguientes entidades elementales:

3.4.2.1. Situaciones-problemas

Al igual que se hizo con el primer manual, dentro de las *situaciones-problemas*, se consideran los ítems detallados a continuación:

- *Elementos introductorios*: al inicio de la unidad, aparecen problemas introductorios contextualizados de aplicación a la vida real y ejercicios introductorios del algoritmo de la división, relación entre una multiplicación y una división exacta y el significado de una potencia.
- *Ejemplos*: se presentan un total de 23 ejemplos dispuestos antes y después de la introducción de cada concepto nuevo. Además, incluye un ejemplo, al final de la unidad, de estrategias para resolver problemas.
- *Ejercicios*: 94 actividades repartidas en sus secciones correspondientes. Adicionalmente, al final de la unidad, se proponen 6 problemas para practicar las estrategias de resolución; 27 ejercicios de repaso; 18 problemas, y 12 actividades de autoevaluación.
- *Aplicaciones*: no se proponen situaciones de aplicación a la realidad o investigación.

3.4.2.2. Lenguajes

Al igual que en el manual anterior, según la clasificación de Ordóñez (2018, pp.54-56), los tipos de lenguaje encontrados para introducir el cálculo del mínimo común múltiplo aparecen en la *Tabla 3.3*.

Vernáculo	Numérico
«Observa que para obtener el m.c.m, se multiplican los factores primos comunes y no comunes que aparecen en las dos descomposiciones elevados al mayor exponente» (Contreras <i>et al.</i> , 2011, p. 50).	$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ $m.c.m (12, 32) = 2^5 \cdot 3 = 96$
Algorítmico	
Para obtener el mínimo común múltiplo de dos o más números se procede de la siguiente manera:	
1. Se descomponen los números en factores primos.	
2. Se multiplican todos los factores que aparecen en las descomposiciones, elevado cada uno al mayor exponente con el que figuran en ellas (Contreras <i>et al.</i> , 2011, p. 50).	

Tabla 3.3. Lenguajes en el cálculo del mínimo común múltiplo presentes en el manual de Oxford.

En cambio, para la descomposición factorial de un número, se utilizan los tipos de lenguaje de la Tabla 3.4.

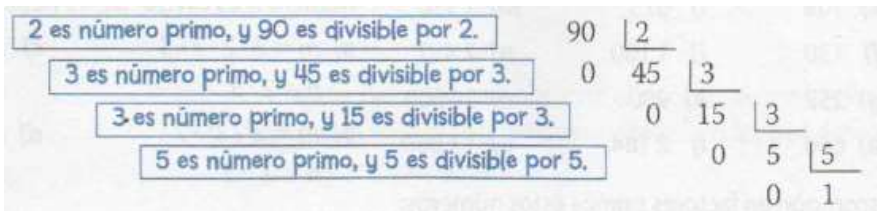
Tabular, numérico y vernáculo													
<table> <tr> <th>Múltiplos</th><th>Divisores $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$</th></tr> <tr> <td>$24 = 12 \cdot 2 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2$</td><td>$2 = 2$ (factor de $(2) \cdot 2 \cdot 3$)</td></tr> <tr> <td>$36 = 12 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3$</td><td>$3 = 3$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot (3)$)</td></tr> <tr> <td>$48 = 12 \cdot 4 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2$</td><td>$4 = 2 \cdot 2$ (factor de $(2 \cdot 2) \cdot 3$)</td></tr> <tr> <td>...</td><td>$6 = 2 \cdot 3$ (factor de $2 \cdot (2 \cdot 3)$)</td></tr> <tr> <td>Cualquier múltiplo de 12 contiene todos los factores primos de 12.</td><td>Cualquier divisor de 12 mayor que 1 contiene solo factores primos de 12.</td></tr> </table>	Múltiplos	Divisores $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$	$24 = 12 \cdot 2 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2$	$2 = 2$ (factor de $(2) \cdot 2 \cdot 3$)	$36 = 12 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3$	$3 = 3$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot (3)$)	$48 = 12 \cdot 4 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2$	$4 = 2 \cdot 2$ (factor de $(2 \cdot 2) \cdot 3$)	...	$6 = 2 \cdot 3$ (factor de $2 \cdot (2 \cdot 3)$)	Cualquier múltiplo de 12 contiene todos los factores primos de 12.	Cualquier divisor de 12 mayor que 1 contiene solo factores primos de 12.	
Múltiplos	Divisores $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$												
$24 = 12 \cdot 2 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2$	$2 = 2$ (factor de $(2) \cdot 2 \cdot 3$)												
$36 = 12 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3$	$3 = 3$ (factor de $2 \cdot 2 \cdot (3)$)												
$48 = 12 \cdot 4 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2$	$4 = 2 \cdot 2$ (factor de $(2 \cdot 2) \cdot 3$)												
...	$6 = 2 \cdot 3$ (factor de $2 \cdot (2 \cdot 3)$)												
Cualquier múltiplo de 12 contiene todos los factores primos de 12.	Cualquier divisor de 12 mayor que 1 contiene solo factores primos de 12.												
Gráfico y vernáculo													
 2 es número primo, y 90 es divisible por 2. 3 es número primo, y 45 es divisible por 3. 3 es número primo, y 15 es divisible por 3. 5 es número primo, y 5 es divisible por 5.													

Figura 3.11. Ejemplo de combinación de lenguajes tabular, numérico y vernáculo (Contreras *et al.*, 2011, p. 49).

Figura 3.12. Ejemplo de combinación de lenguaje gráfico y vernáculo (Contreras *et al.*, 2011 p. 48).

Tabla 3.4. Lenguajes en la descomposición factorial de un número presentes en el libro de Oxford.



3.4.2.3. Conceptos

Se señalan a continuación los *conceptos* intervinientes en la unidad de divisibilidad de este segundo manual:

- *Elementos de la división euclídea*: dividendo, divisor, cociente y resto (ver *Figura 3.14*);
- *Elementos de una multiplicación*: factores y producto (ver *Figura 3.13*);
- *División exacta*: «una división exacta es aquella cuyo resto es cero» (Contreras *et al.*, p.41) (ver *Figura 3.14*);
- *Relación de divisibilidad*: «Hay relación de divisibilidad entre dos números naturales, a y b , cuando el mayor, a , contiene al menor, b , una cantidad exacta de veces. Entonces, se dice que a es divisible por b » (*ibíd.*, p. 42);
- *Divisor*: «un número natural, b , es divisor de otro, a , cuando la división $a : b$ es exacta» (*ibíd.*, p. 43);
- *Múltiplo*: «un número natural, a , es múltiplo de otro, b , si al multiplicar b por un número natural, se obtiene a como resultado» (*ibíd.*, p. 43);
- *Número primo*: «un número es primo si solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo» (*ibíd.*, p. 47).
- *Número compuesto*: «un número es compuesto si tiene más de dos divisores» (*ibíd.*, p. 47);
- *Mínimo común múltiplo*: «el mínimo común múltiplo de dos o más números, a , b , $c...$, es el menor de los múltiplos que tiene en común. Se expresa como m.c.m (a , b , $c...$)» (*ibíd.*, p. 50);
- *Máximo común divisor*: «el máximo común divisor de dos o más números, a , b , $c...$, es el mayor de los divisores que tienen en común. Se expresa como M.C.D. (a , b , $c...$)» (*ibíd.*, p. 52);
- *Números primos entre sí*: «como el 1 es divisor de todos los números naturales, dos números naturales tienen al menos un divisor en común, el 1. Si el 1 es el único divisor que tienen en común, los números son primos entre sí» (*ibíd.*, p. 52).

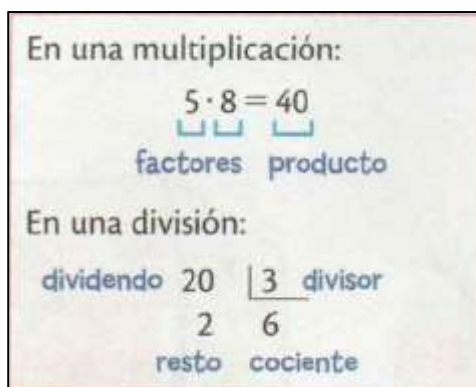


Figura 3.13. Elementos de la multiplicación y división (*ibíd.*, p. 41).

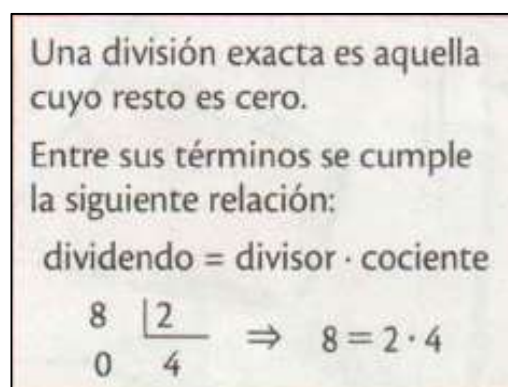


Figura 3.14. Definición de división exacta y algoritmo de la división (*ibíd.*, p. 41)

3.4.2.4. Proposiciones

Por otra parte, las *proposiciones* que emplea este segundo manual son:

- *Algoritmo de la división* (ver Figura 3.14);
- «Cualquier número natural, a , es múltiplo de sí mismo y de 1, ya que: $a \cdot 1 = a$ » (*ibíd.*, p. 44);
- «El 1 es divisor de cualquier número natural, a , porque $a : 1 = a$ » (*ibíd.*, p. 45);
- «Cualquier número natural es divisor de sí mismo y de la unidad, ya que $a : a = 1$ » (*ibíd.*, p. 45);
- *Criterio de divisibilidad por 2*: «un número es divisible por 2 si es par, es decir, si termina en 0, 2, 4, 6 u 8» (*ibíd.*, p. 46);
- *Criterio de divisibilidad por 3*: «un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3» (*ibíd.*, p. 46);
- *Criterio de divisibilidad por 5*: «un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5» (*ibíd.*, p. 46);
- *Criterio de divisibilidad por 11*: «un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares pares y la suma de las cifras que ocupan los lugares impares es 0 o múltiplo de 11» (*ibíd.*, p. 46);
- «El 1 solo tiene un divisor, él mismo, así que no se considera ni primo ni compuesto» (*ibíd.*, p. 47);
- «Hay infinitos números primos» (*ibíd.*, p. 47);



- *Teorema Fundamental de la Aritmética*: «factorizar un número es descomponerlo en producto de factores primos. Esta descomposición es única para cada número» (*ibíd.*, p. 48);
- «Un número, para ser múltiplo de otro, tiene que contener todos sus factores primos» (*ibíd.*, p. 49).
- «Un número, para ser divisor de otro, solo puede contener factores primos de este» (*ibíd.*, p. 49).

3.4.2.5. Procedimientos

Los *procedimientos* que aparecen son: la división euclídea; cálculo de los múltiplos y divisores de un número; ejecución de los criterios de divisibilidad; procedimiento para saber si un número es o no primo; descomposición de un número en factores primos; cálculo del mcm y mcd de dos y tres números por descomposición factorial, y cálculo de los divisores de un número a partir de su factorización.

3.4.2.6. Argumentos

Por último, análogamente al primer manual, los argumentos empleados vuelven a ser directos y básicos. Se deduce todo de forma natural y coherente a partir de los conceptos o proposiciones intervinientes, sin emplear otro tipo de demostraciones más complejas.

3.4.3. Valoración de las idoneidades epistémica y cognitiva

A continuación, y por cuestiones de espacio en este trabajo, se hará una primera aproximación a la valoración de la idoneidad didáctica (Godino, 2013), en el sentido en que se abordará el análisis de los indicadores de dos idoneidades parciales: epistémica y cognitiva (dichos indicadores se adjuntan en el *Anexo I*). En adelante, recuérdese que el libro de Anaya es el primero, mientras que el de Oxford es el segundo analizado.

3.4.3.1. Valoración de la idoneidad epistémica

Las situaciones-problemas que se proponen en ambos libros son representativas y variadas, aunque el primero ofrece problemas de investigación y aplicación a la vida real, deducción de propiedades aritméticas y relaciones entre divisibilidad y geometría. El segundo carece de este tipo de problemas. En ninguno de ellos se proponen situaciones de problematización o generación de problemas.

Tanto en el primero como en el segundo, aparecen lenguajes de distintos tipos, aunque el primero ofrece un lenguaje gráfico más intuitivo y ameno y, además, combinado con lenguaje numérico, de forma que el alumno puede ver las relaciones entre ambos. Un ejemplo de esto es la *Figura 3.7*. El indicador relativo a las situaciones de expresión matemática que se plantean es bajo en ambos manuales, pues estas son escasas, aunque se percibe un intento por algebrizar algunos procedimientos y proposiciones, tales como la obtención de los múltiplos de un número a , expresado como $a \cdot k$, en el primer manual, o la proposición que asegura que el 1 es divisor de cualquier número natural a , expresado como $a : a = 1$, tanto en el primero como en el segundo. Adicionalmente, el primero introduce un lenguaje más formal de la matemática, al representar el conjunto de los múltiplos de a como $\dot{a}$. En cambio, el segundo lo expresa como $M(a)$, utilizando una terminología propia que no es usual en niveles superiores.

En cuanto a los conceptos y proposiciones, ambas editoriales los presentan de forma clara y correcta, sin ambigüedades, adaptados al nivel educativo de 1º de ESO y en concordancia con los requerimientos curriculares vigentes. Sin embargo, existe una gran carencia, por ambas partes, de situaciones de generación y negociación de definiciones, proposiciones o procedimientos (número primo, número compuesto o la relación entre mcd y mcm, por ejemplo). Análogamente, no aparecen argumentos más allá de unas cuantas demostraciones básicas y naturales, aunque, quizás, esto pueda justificarse por tratarse de un nivel educativo no muy superior.

Por lo que se refiere a las relaciones entre los conceptos, se aprecia en ambos libros la ausencia de relaciones existentes el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números, que es importante, pues proporciona un procedimiento de cálculo del mcm a partir del mcd.

Consecuentemente, con todo lo expuesto anteriormente, se concluye que la idoneidad epistémica del primer manual puede valorarse como media-alta, mientras que en el segundo libro de texto, puede valorarse como media.

3.4.3.2. Valoración de la idoneidad cognitiva

El bagaje de conocimientos que ha adquirido el estudiante, con un progreso académico dentro de lo esperado en los cursos de primaria, es suficiente para desarrollar con normalidad los procesos de instrucción matemáticos inherentes al uso de los dos libros de texto seleccionados. Los contenidos que se proponen en ambos manuales son prácticamente los mismos y se sitúan dentro de la zona de desarrollo próximo, esto es, su dificultad es manejable.



Por otra parte, el segundo ofrece un total de 157 actividades, incluyendo actividades de sección, refuerzo, ampliación y autoevaluación, frente a las 114 del primero. En este sentido, el de la editorial *Oxford* tiene una mayor variedad de ejercicios. Ambos libros clasifican los problemas en tres niveles de dificultad, lo cual permite que cada estudiante los resuelva según sus capacidades. No obstante, tanto el primero como el segundo, incluyen únicamente un modelo de autoevaluación, con lo que no se tiene en cuenta la diversidad y las diferencias individuales en el aprendizaje.

En consecuencia, con lo expuesto anteriormente, se concluye que la idoneidad cognitiva del primer manual es media; y la del segundo, media-alta.



SECCIÓN 4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Epistemología es un sustantivo de origen griego, que proviene de la fusión de los vocablos *episteme* (conocimiento científico o ciencia), y *logos* (estudio). Por tanto, se podría definir como *el estudio del conocimiento científico o estudio de la ciencia*.

De modo que, si se pretende elaborar una fundamentación epistemológica acerca de la *divisibilidad de números*, una forma de proceder sería desarrollar un tema de las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, relacionado con esta temática. Hay que tener presente que no siempre existe una reciprocidad rigurosa entre los temas del currículo oficial de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el temario de las oposiciones. Estos contenidos se incluyen en *Tema 4: Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia* (Ministerio de Educación y Ciencia, 1993, p. 27414). Además, se considera la construcción axiomática de Peano para $\mathbb{N}$, y a través de ella, la construcción de $\mathbb{Z}$. Como ambas no están íntimamente relacionadas con el tema, por motivos de extensión, se han desarrollado en los anexos II y III, respectivamente.

4.1. Introducción

Contando los dos anexos mencionados anteriormente, el desarrollo del tema se extiende a lo largo de seis apartados.

El primero de ellos, correspondiente al *Anexo II*, está dedicado a la construcción del conjunto de los números naturales, con la intención de servir de base para la exposición del segundo apartado, reservado a la construcción de los números enteros.

En el segundo apartado, desarrollado en el *Anexo III*, se definen las operaciones internas suma y producto, que dotan a $\mathbb{Z}$ de la estructura de anillo unitario conmutativo; y un tipo de subanillos particulares, denominados *ideales*.

El tercero de ellos habla de la relación binaria de divisibilidad y sus propiedades.

En el cuarto, se desarrolla teoría de números primos, la definición de máximo común divisor, mínimo común múltiplo, el Teorema de Euclides y el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Finalmente, los apartados penúltimo y último están destinados a las congruencias y los criterios de divisibilidad, respectivamente.



Por cuestiones de dinamismo y espacio, solamente se han incluido en esta sección algunas demostraciones. En el caso de que se desee un tratamiento más profundo del tema, el lector podrá encontrar varias demostraciones complementarias en el *Anexo IV*.

4.2. Los números naturales

En el *Anexo II*, puede consultarse la construcción del conjunto de los números naturales.

4.3. Los números enteros

En el *Anexo III*, puede consultarse la construcción de los números enteros.

4.4. Relación de divisibilidad

No siempre es posible efectuar en $\mathbb{Z}$ divisiones exactas entre dos números. Esta situación genera el estudio de la divisibilidad (García 2010, p. 412).

Definición 4.4.1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. El elemento a es divisor de b , a divide a b o a es factor de b , y se escribe $a \mid b$, si y solo si existe otro elemento $c \in \mathbb{Z}$ tal que (García, 2010, p. 400):

$$a \cdot c = b.$$

En lenguaje matemático se puede expresar como:

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} / a \cdot c = b.$$

El conjunto de todos los divisores del elemento $a \in \mathbb{Z}$ se expresa de la siguiente forma (García, 2010, p. 413):

$$D(a) = \{b \in \mathbb{Z} / \exists c \in \mathbb{Z} \text{ satisfaciendo que } b \cdot c = a\}$$

También se puede decir que b es múltiplo de a . Se escribe $\dot{a}$ para representar el conjunto de todos los múltiplos del elemento $a \in \mathbb{Z}$ (García, 2010, pp. 412-413):

$$\dot{a} = \{x \cdot a / x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots\}$$

Proposición 4.4.2. La relación $\mid$ en $\mathbb{Z}$, que se lee «ser divisor», es reflexiva y transitiva. Constituye un *preorden* y no verifica las propiedades simétrica ni antisimétrica (García, 2010, p. 413).



Proposición 4.4.3. La relación de divisibilidad $|$ verifica seis propiedades (García, 2010, p. 413):

- 1) El elemento 0 es múltiplo de cualquier número $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
- 2) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists \pm 1$ tal que $1 | x, -1 | x$.
- 3) $x | x$ y $-x | x, \forall x \in \mathbb{Z}$
- 4) Dados $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x | y$ y $x | z$, entonces $x | (y + z)$ y $x | (y - z)$
- 5) Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x | y$, entonces $x | (y \cdot z), \forall z \in \mathbb{Z}$
- 6) Dados $x, z \in \mathbb{Z}$, si $x | z$ y $z \neq 0$, entonces $|x| \leq |z|$

4.5. Números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo

4.5.1. Números primos

Definición 4.5.1. Sea un número $p \in \mathbb{Z}$. Dicho número recibe el nombre de *primo* si solamente es divisible por $\pm p$ y ± 1 . En caso contrario, se dice que p es un *número compuesto* si posee otros divisores aparte de $\pm p$ y ± 1 . Asimismo, se puede afirmar que si p es un número primo, entonces $-p$ también lo es (García, 2010, p. 403).

Proposición 4.5.2. Sea un número compuesto $c \in \mathbb{Z}$. Existe un número primo $p \in \mathbb{Z}$ menor o igual que $\sqrt{c}$ tal que $p | c$ (García, 2010, p. 414).

Corolario 4.5.3. Un número $p \in \mathbb{Z}$ será primo si no es divisible por aquellos números primos $p' \in \mathbb{Z}$ tal que $(p')^2 < p$ (García, 2010, p.414).

Criba de Eratóstenes

La *criba de Eratóstenes* es un método, basado en la *Proposición 4.5.2*, que sirve para encontrar todos los números primos menores que un determinado $x \in \mathbb{N}$. Consiste en construir una tabla que contenga a todos los números naturales consecutivos, empezando por el 2, hasta el número que se desee, x . Una vez colocados, se tachan aquellos números compuestos que se vayan encontrando según el siguiente criterio: cuando se encuentre un número primo p no tachado, se tachan todos sus múltiplos a partir de p^2 . El proceso termina cuando $p^2 > x$. Finalmente, los números que queden en la tabla son primos menores que x (García, 2010, pp. 413-414).



Por ejemplo, si se quieren calcular los primos menores que 36, se ubican todos ellos en una tabla y se aplica lo descrito anteriormente, hasta obtener la *Tabla 4.1*.

2	3	4	5	6
7	8	9	10	11
12	13	14	15	16
17	18	19	20	21
22	23	24	25	26
27	28	29	30	31
32	33	34	35	36

Tabla 4.1. Criba de Eratóstenes.

Proposición 4.5.4. El conjunto P de los números primos es infinito (García, 2010, p. 424); (Demostración en *Anexo IV*).

Proposición 4.5.5. El menor divisor de un número compuesto es un número primo (García, 2010, p. 426); (Demostración en *Anexo IV*).

Lema 4.5.6. Sean $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ números primos $\in \mathbb{Z}^+$, de forma que (García, 2010, p. 425):

$$p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } p = p_i$$

(Demostración en *Anexo IV*).

Teorema 4.5.7: Teorema Fundamental de la Aritmética

Sea $a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. Este elemento a puede descomponerse de forma única como un producto de números primos positivos con exponentes naturales, es decir:

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}, \forall a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}, \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{N},$$

donde p_i son números primos con $p_i < p_j$ si $i < j$ (García, 2010, p.414). Esto hace de $\mathbb{Z}$ un *dominio de factorización única* (DFU); (Demostración en *Anexo IV*).

Proposición 4.5.8. Sea $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ con $a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. El elemento $b \in \mathbb{Z}$ es divisor de a si y solo si todos los factores primos de b son también factores primos de a , con los exponentes de los factores primos de b menores o iguales que los de a . Es decir (García, 2010, p. 415):

$$b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n},$$

con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ (Demostración en Anexo IV).

4.5.2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Definición 4.5.9. Sea $a, b \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. Se llama *máximo común divisor de a y b* , y se escribe $d = (a, b) = mcd\{a, b\}$, al elemento $d \in \mathbb{Z}$ tal que es el mayor de los divisores comunes de a y b . Este elemento debe cumplir las siguientes condiciones (García, 2010, p. 415):

- 1) $d \mid a$ y $d \mid b$,
- 2) Si existiera un elemento $d' \in \mathbb{Z}$ tal que $d' \mid a$ y $d' \mid b$, entonces $d' \mid d$.

Definición 4.5.10. Sea $a, b \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. Se llama *mínimo común múltiplo de a y b* , y se escribe $M = [a, b] = mcm\{a, b\}$, al elemento $M \in \mathbb{Z}$ tal que es el menor de los múltiplos comunes de a y b . Este elemento debe cumplir las siguientes condiciones (García, 2010, p. 415):

- 1) $a \mid M$ y $b \mid M$,
- 2) Si existiera un elemento $M' \in \mathbb{Z}$ tal que $a \mid M'$ y $b \mid M'$, entonces $M \mid M'$.

Análogamente, teniendo en cuenta las definiciones 4.5.9 y 4.5.10, se puede obtener el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de más de dos números:

$$mcd\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}; mcm\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}.$$

Definición 4.5.11. Sean los ideales en $\mathbb{Z}$ $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle d \rangle$. Si $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle d \rangle$, entonces el ideal $\langle d \rangle$ recibe el nombre de *ideal máximo común divisor de a y b* . La base positiva de dicho ideal se conoce como *máximo común divisor de a y b* (Centro de Estudios Académicos a Distancia, s.f, p. 39).

Definición 4.5.12. Sean los ideales en $\mathbb{Z}$ $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle M \rangle$. Si $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle M \rangle$, entonces el ideal $\langle M \rangle$ recibe el nombre de *ideal mínimo común múltiplo de a y b* . La base positiva de dicho ideal se conoce con el nombre de *mínimo común múltiplo de a y b* (Centro de Estudios Académicos a Distancia, s.f, p. 41).



Definición 4.5.13. Se dice que dos números $a, b \in \mathbb{Z}$ son primos relativos si y solo si $\text{mcd}\{a, b\} = 1$ (García, 2010, p. 416).

Proposición 4.5.14. Sea p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$, entonces p y a son primos relativos (García, 2010, p. 424); (Demostración en *Anexo IV*).

Proposición 4.5.15. El máximo común divisor de dos números $a, b \in \mathbb{Z}$ es único, salvo el signo (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 19).

Demostración. Se supone que existen dos mcd diferentes para a y b :

$$d = (a, b) = \text{mcd}\{a, b\},$$

$$d' = (a, b)' = \text{mcd}'\{a, b\}.$$

Se aplica la *Proposición 5.5.11*:

$$\langle d \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle,$$

$$\langle d' \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle,$$

$$\langle d \rangle = \langle d' \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle,$$

$$d \in \langle d' \rangle \Rightarrow d = d_1 \cdot d',$$

$$d' \in \langle d \rangle \Rightarrow d' = d_2 \cdot d.$$

Se multiplican estas dos últimas igualdades y se obtiene:

$$d \cdot d' = d_1 \cdot d' \cdot d_2 \cdot d \Rightarrow d = d_1 \cdot d_2 \cdot d \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} d_1 = d_2 = 1 \\ d_1 = d_2 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, d y d' son iguales u opuestos, es decir, iguales salvo el signo. ■

Proposición 4.5.16. El mínimo común múltiplo de $a, b \in \mathbb{Z}$ es único, salvo el signo.

Demostración. Se supone que existen dos mcm diferentes para a y b :

$$M = [a, b] = \text{mcm}\{a, b\},$$

$$M' = [a, b]' = \text{mcm}'\{a, b\}.$$

Se aplica la *Proposición 4.5.12*:

$$\langle M \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle,$$

$$\langle M' \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle,$$

$$\langle M \rangle = \langle M' \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle,$$

$$M' \in \langle M \rangle \Rightarrow M' = M_1 \cdot M,$$

$$M \in \langle M' \rangle \Rightarrow M = M_2 \cdot M'.$$

Se multiplican estas dos últimas igualdades y se obtiene:

$$M \cdot M' = M_1 \cdot M_2 \cdot M' \cdot M \Rightarrow M = M_1 \cdot M_2 \cdot M \Rightarrow M_1 \cdot M_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 = M_2 = 1 \\ M_1 = M_2 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, M y M' son iguales salvo el signo. ■

Proposición 4.5.17: Regla para el cálculo del mcd y mcm de dos números enteros

Sea $a, b \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ tales que su descomposición en factores primos es la siguiente (García, 2010, p. 416):

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

$$b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \cdot p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n},$$

con $\alpha_i, \beta_i \geq 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Entonces:

$$d = (a, b) = mcd\{a, b\} = \pm p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k} \cdot p_{k+1}^{e_{k+1}} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n},$$

donde $e_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, y:

$$M = [a, b] = mcm\{a, b\} = \pm p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \dots \cdot p_k^{f_k} \cdot p_{k+1}^{f_{k+1}} \cdot \dots \cdot p_n^{f_n},$$

con $f_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 4.5.18: Algoritmo de la división.

Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Entonces, existen $c, r \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$a = b \cdot c + r,$$

donde a se conoce como *dividendo*, b divisor, $c \in \mathbb{Z}$ cociente y $r \in \mathbb{N}$ el resto, con $0 \leq r < |b|$ (García, 2010, p. 417).

Demostración. Se distinguen 3 casos:

- 1) Si $a < b$, entonces $c = 0$ y $r = a$. En estas condiciones, se verifica el teorema.



2) Si $a = b$, entonces $c = 1$ y $r = 0$. También se verifica el teorema.

3) Si $a > b$, hay que estudiar cuando $b > 0$ y $b < 0$:

3.1. Si $b > 0$ y c es un número entero tal que:

$$b \cdot c \leq a < b \cdot (c + 1).$$

Sea $r = a - b \cdot c$, entonces:

$$b \cdot c - b \cdot c \leq a - b \cdot c < b \cdot (c + 1) - b \cdot c.$$

Luego:

$$0 \leq a - b \cdot c = r < b \cdot c + b - b \cdot c = b,$$

$$0 \leq r < b.$$

Esto prueba la existencia de r y c . Para probar la unicidad, se utiliza el método de reducción al absurdo, por el que se supone que existen dos valores diferentes para r y c :

$$\left. \begin{array}{l} a = b \cdot c_1 + r_1 \\ a = b \cdot c_2 + r_2 \end{array} \right\} r_1 \neq r_2$$

Se igualan ambas expresiones y se obtiene:

$$\begin{aligned} b \cdot c_1 + r_1 &= b \cdot c_2 + r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 = b \cdot c_2 - b \cdot c_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_1 - r_2 &= b(c_2 - c_1) \Rightarrow b \mid (r_2 - r_1). \end{aligned}$$

Esto es absurdo, puesto que:

$$0 \leq r_1, r_2 < b \Rightarrow |r_1 - r_2| < b.$$

Entonces, $r_1 = r_2$ y, en consecuencia, $c_1 = c_2$.

3.2. Si $b < 0$, se opera con $-b > 0$ y c' es un número entero tal que:

$$(-b) \cdot c' \leq a \leq (-b) \cdot (c' + 1).$$

Sea $r = a - b \cdot c'$, entonces:

$$(-b) \cdot c' + b \cdot c' \leq a + b \cdot c' < (-b) \cdot (c' + 1) - b \cdot c';$$

$$0 \leq a - b \cdot c' = r < (-b) \cdot c' - b + b \cdot c' = -b.$$



Luego:

$$0 \leq r < -b = |b|.$$

Ahora se toma $c = -c' \Rightarrow c' = -c$ y, con esto, queda probado el resultado. Si r y c son únicos, entonces también lo son r y c' (García, 2010, p. 432).

■

Proposición 4.5.19: Identidad de Bézout

Sean $a, b \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. Si $d = \text{mcd}\{a, b\}$, entonces:

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d = a \cdot \lambda + b \cdot \mu,$$

donde $d = a \cdot \lambda + b \cdot \mu$ se conoce con el nombre de *identidad de Bézout* (García, 2010, p. 417); (Demostración en *Anexo IV*).

Corolario 4.5.20. Sean $a, b \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ primos relativos. Existe $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tal que $d = \text{mcd}\{a, b\} = a \cdot \lambda + b \cdot \mu = 1$ (García, 2010, p. 417).

Proposición 4.5.21. Si $d = \text{mcd}\{a, b\}$, entonces $\text{mcd}\{a \cdot c, b \cdot c\} = d \cdot c$ (García, 2010, p. 434).

Teorema 4.5.22: Teorema de Euclides

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si a y b son primos relativos y $a \mid (b \cdot c)$, entonces $a \mid c$ (García, 2010, p. 425); (Demostración en *Anexo IV*).

Lema 4.5.23. Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y sea $r_1 \in \mathbb{N}$ el resto de dividir a entre b . Entonces (García, 2010, p. 417):

$$\text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{b, r_1\}$$

(Demostración en *Anexo IV*).

Proposición 4.5.24. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo tal que (Centro de Estudios Académicos a Distancia, s.f, p. 46):

$$p \mid (a \cdot b) \Rightarrow p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Demostración. Si $p \mid (a \cdot b)$ pueden producirse dos situaciones:

- $p \mid a$. En este caso, se finaliza porque ya se ha demostrado la proposición.

- $p \nmid a$. En este caso, la *Proposición 4.5.14*, asegura que p y a son primos relativos. Por tanto, se tiene que $\text{mcd}\{p, a\} = 1$. Como $p \mid (a \cdot b)$ y p y a son primos relativos, el teorema de Euclides asegura que $p \mid b$.

■

Teorema 4.5.25: Algoritmo de Euclides

Sean $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Se aplica el algoritmo de la división:

$$a = b \cdot c_1 + r_1; \quad 0 \leq r_1 < |b|$$

$$b = r_1 \cdot c_2 + r_2; \quad r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 \cdot c_3 + r_3; \quad r_3 < r_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot c_{n-1} + r_{n-1}; \quad r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot c_n + r_n = r_{n-1} \cdot c_n; \quad r_n = 0 < r_{n-1}.$$

siendo r_{n-1} el último resto no nulo (García, Ordóñez & Ruiz, 2006, p. 278).

De esta forma, se obtiene que $r_{n-1} = \text{mcd}\{a, b\}$. Así pues, $\mathbb{Z}$ es un *dominio euclídeo* (DE).

El *algoritmo de Euclides* (García, 2010, pp. 417-418) se basa en el *Lema 4.5.23*. Sirve para calcular el máximo común divisor de dos números enteros. Puesto que $d = \text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{|a|, |b|\}$, se supone que $a \geq b > 0$. Si se aplica el algoritmo de la división entre a y b , se obtiene:

$$a = b \cdot c_1 + r_1, \text{ con } 0 \leq r_1 < b.$$

Según el *Lema 4.5.23*, $d = \text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{b, r_1\}$. Este último es más sencillo de calcular que el primero al ser menores los números. Pueden darse dos situaciones:

- $r_1 = 0$, entonces $\text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{b, r\} = \text{mcd}\{b, 0\} = b$.
- $r_1 \neq 0$. En este caso hay que volver a efectuar el algoritmo de la división entre b y r_1 .

En este último caso obtenemos:

$$b = r_1 \cdot c_2 + r_2, \text{ con } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Aplicamos de nuevo el *Lema 4.5.23* y se obtiene que:

$$\text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{b, r_1\} = \text{mcd}\{r_1, r_2\},$$

donde puede volver a ocurrir que:

- $r_2 = 0$. Entonces $\text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{b, r_1\} = \text{mcd}\{r_1, 0\} = r_1$.
- $r_2 \neq 0$. En este caso hay que volver a efectuar el algoritmo de la división entre r_1 y r_2 :

$$r_1 = r_2 \cdot c_3 + r_3, \text{ con } 0 \leq r_3 < r_2.$$

Se procede sucesivamente de esta forma con restos cada vez más pequeños, los cuales constituyen una sucesión de números naturales decrecientes acotada inferiormente por el elemento 0. Al aplicar el algoritmo de la división un número finito de veces, se obtendrá un resto $r_n = 0$. Esto quiere decir que $r_{n-1} \mid r_{n-2}$, por lo que:

$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot c_{n-1} + r_{n-1}, \text{ con } 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2},$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot c_n + r_n = r_{n-1} \cdot c_n + 0.$$

Así, se determina que:

$$\begin{aligned} \text{mcd}\{a, b\} &= \text{mcd}\{b, r_1\} = \text{mcd}\{r_1, r_2\} = \text{mcd}\{r_2, r_3\} = \dots = \text{mcd}\{r_{n-3}, r_{n-2}\} = \\ &= \text{mcd}\{r_{n-2}, r_{n-1}\} = \text{mcd}\{r_{n-1}, 0\} = r_{n-1}. \end{aligned}$$

Proposición 4.5.26. «Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $d = \text{mcd}\{a, b\}$. Si a' y b' son dos números enteros tales que $a = d \cdot a'$ y $b = d \cdot b'$, entonces a' y b' son primos relativos» (García, 2010, p. 430).

Proposición 4.5.27. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, se cumple la igualdad (García, 2010, p. 431):

$$\text{mcd}\{a, b\} \cdot \text{mcm}\{a, b\} = a \cdot b$$

4.6. Congruencias

Definición 4.6.1. Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$, con $n > 1$. Se dice que a es congruente con b módulo n , y se escribe $a \equiv b \pmod{n}$, si y solo si $n \mid (a - b)$, es decir (García, 2010, p. 451):

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n \cdot k = a - b \Rightarrow a = b + n \cdot k.$$

Proposición 4.6.2. «La relación de $\equiv \pmod{n}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ » (García, 2010, p. 451).



Definición 4.6.3. La clase de equivalencia asociada a la relación de congruencia $\equiv \text{mod } n$ se denota por:

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv a \text{ mod } n\}.$$

Definición 4.6.4. El conjunto cociente asociado a la relación de congruencia $\equiv \text{mod } n$ se denota por:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / \equiv \text{mod } n = \{[a] / a \in \mathbb{Z}\}.$$

A este conjunto cociente se le denomina *conjunto de las clases de restos módulo n* (García, 2010, p. 451).

Proposición 4.6.5. a es congruente con b módulo n si y solo si se obtiene el mismo resto al dividir a y b entre n (García, 2010, p. 451):

$$a = n \cdot c_1 + r_1,$$

$$b = n \cdot c_2 + r_1$$

Corolario 4.6.6. Los elementos del conjunto cociente $\mathbb{Z}_n$ son los distintos restos obtenidos al dividir los números naturales entre n . Entonces, el número de elementos pertenecientes a $\mathbb{Z}_n$ es igual a n , con $n > 1$, es decir (García, 2010, p. 451):

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n - 1]\}$$

Proposición 4.6.7. Se supone que $a \equiv b \text{ mod } n$ y $c \equiv d \text{ mod } n$. Entonces (García, 2010, pp. 451-452):

$$(a + c) \equiv (b + d) \text{ mod } n,$$

$$(a \cdot c) \equiv (b \cdot d) \text{ mod } n$$

Corolario 4.6.8. En el conjunto cociente $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / \equiv \text{mod } n$, se definen las operaciones internas suma y producto, tal y como se expresa a continuación (García, 2010, p. 452):

$$[a] + [b] = [a + b],$$

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Proposición 4.6.9. La operación interna suma en $\mathbb{Z}_n$ verifica las propiedades asociativa, elemento neutro, conmutativa y elemento simétrico (García, 2010, p. 452):

- Asociativa:

$$([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c]), \forall [a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n.$$

- Elemento neutro:

$$\exists [0] \text{ tal que } [0] + [a] = [a] + [0] = [a], \forall [a] \in \mathbb{Z}_n.$$

- Conmutativa:

$$[a] + [b] = [b] + [a], \forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_n.$$

- Elemento simétrico:

$$\exists [-a] \in \mathbb{Z}_n \text{ tal que } [a] + [-a] = [0] = [-a] + [a], \forall [a] \in \mathbb{Z}_n.$$

Proposición 4.6.10. La operación interna producto en $\mathbb{Z}_n$ verifica las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y distributiva respecto de la suma (García, 2010, p. 452):

- Asociativa:

$$([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c]), \forall [a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n.$$

- Conmutativa:

$$[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a], \forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_n.$$

- Elemento neutro:

$$\exists [1]/[1] \cdot [a] = [a] \cdot [1] = [a], \forall [a] \in \mathbb{Z}_n.$$

- Distributiva:

$$[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c], \forall [a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n.$$

Definición 4.6.11. El elemento $[a] \in \mathbb{Z}_n \neq [0]$ es un divisor de cero si existe otro elemento $[b] \in \mathbb{Z}_n \neq [0]$, tal que $[a] \cdot [b] = [0]$ (García, 2010, p. 452). Si no existen divisores de cero en $\mathbb{Z}_n$, se dice que $\mathbb{Z}_n$ es un *dominio de integridad* (DI).

Proposición 4.6.12. Sea $[a] \in \mathbb{Z}_n \neq [0]$. Este elemento $[a]$ es un divisor de cero en $\mathbb{Z}_n$ si y solo si a y n no son primos relativos, es decir (García, 2010, pp. 452-453):

$$d = \text{mcd}\{a, n\} \neq 1.$$



Corolario 4.6.13. « $\mathbb{Z}_n$ es un dominio de integridad si y solo si n es un número primo» (García, 2010, p. 453).

Definición 4.6.14. Sea $[a] \in \mathbb{Z}_n$. Se dice que $[a]$ es una *unidad en $\mathbb{Z}_n$* si tiene un inverso en $\mathbb{Z}_n$, es decir (García, 2010, p. 453):

$$\exists [b] \in \mathbb{Z}_n \text{ tal que } [a] \cdot [b] = [1].$$

Proposición 4.6.15. $[a]$ es una *unidad en $\mathbb{Z}_n$* si y solo si a y n son primos relativos (García, 2010, p. 453).

Corolario 4.6.16. Si $[a] \in \mathbb{Z}_n$ tal que $d = \text{mcd}\{a, n\} = 1$, entonces el inverso de $[a]$ es $[\lambda]$, donde λ es el número que aparece en la identidad de Bézout (García, 2010, p.453):

$$d = a \cdot \lambda + n \cdot \mu = 1$$

Corolario 4.6.17. Todo elemento no nulo de $\mathbb{Z}_n$ es una unidad si y solo si n es primo. Entonces $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo si y solo si n es primo (García, 2010, p.453).

4.7. Criterios de divisibilidad

Definición 4.7.1. Sea $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ y sea $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Se conoce con el nombre de *restos potenciales a módulo n* a los restos que se obtienen al dividir las sucesivas potencias de a entre n (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 32):

$$a^0 = n \cdot c_0 + r_0,$$

$$a = n \cdot c_1 + r_1,$$

$$a^2 = n \cdot c_2 + r_2,$$

$$\vdots$$

$$a^k = n \cdot c_k + r_k,$$

donde c_k y r_k , con $k = 0, 1, 2, \dots, n$, son los cocientes y los restos resultantes de dividir a^i entre n , respectivamente.

Corolario 4.7.2. Si r_k es el resto potencial que se obtiene al dividir a^k por n , se tiene que (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 33):

$$a^k \equiv r_k \text{ mod } n$$

Definición 4.7.3. Un *sistema de numeración* queda determinado por el conjunto S que contiene un número finito de símbolos, y por aquellas reglas que rigen la representación de los números. El número de elementos contenidos en S recibe el nombre de *base*, y se denota por b (García, Ordóñez & Ruiz, 2006, p. 303).

Teorema 4.7.4: Teorema fundamental de la numeración

Sea b la base de un sistema de numeración, $\forall b \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Cualquier número $x \in \mathbb{Z}^+$ puede expresarse de forma única como:

$$x = x_0 + x_1 \cdot b + x_2 \cdot b^2 + \dots + x_k \cdot b^k$$

Se observa en la *Figura 4.1* que los elementos x_i se corresponde con los restos de las sucesivas divisiones entre b :

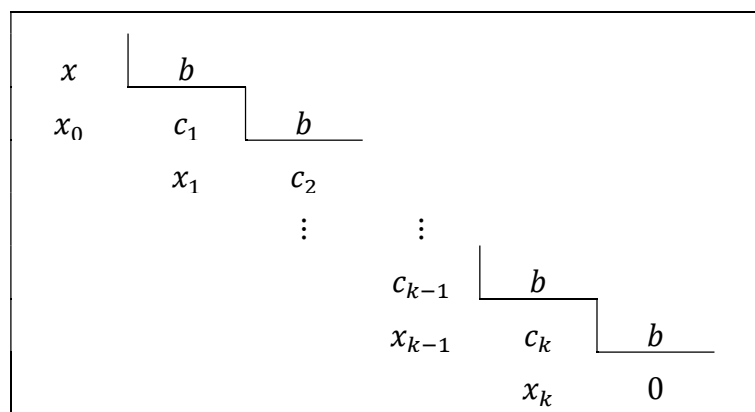


Figura 4.1. Restos de las divisiones entre b (Fuente: García, Ordóñez & Ruiz, 2006, p. 304).

y a su vez, estos restos representan las cifras del número x en la base b .

Proposición 4.7.5. Sea $x \in \mathbb{Z}$ un número escrito en base b :

$$x = x_0 + x_1 \cdot b + x_2 \cdot b^2 + \dots + x_k \cdot b^k,$$

donde los coeficientes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ son las cifras del número x expresado en la base b . Si $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ son los restos potenciales de b módulo n , entonces (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 33):

$$x \equiv x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \dots + x_k \cdot r_k \mod n.$$

(Demostración en *Anexo IV*).

Corolario 4.7.6: Criterio general de la divisibilidad

Sea $x \in \mathbb{Z}$ el número definido en la proposición anterior. Este elemento x es divisible por n si y solo si $x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \dots + x_k \cdot r_k$ es divisible por n (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 33), es decir:

$$n \mid x \Leftrightarrow n \mid (x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \dots + x_k \cdot r_k).$$

(Demostración en *Anexo IV*).

Corolario 4.7.7. El *criterio general de la divisibilidad* se puede aplicar al sistema de numeración en base 10 que se utiliza habitualmente. En primer lugar, se calculan los restos potenciales de 10 módulo n , con $n = 2, 3, 4, \dots, 11$, representados en la *Tabla 4.2*.

Un número $x \in \mathbb{Z}$ queda expresado en base 10, según la *Proposición 5.7.5*, como:

$$x = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \dots + x_k \cdot 10^k,$$

donde x_0 son las unidades, x_1 las decenas, x_2 las centenas y así sucesivamente (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 34). Con esto, se definen los siguientes criterios de divisibilidad:

- Para saber si x es divisible por 2, se aplica el *Corolario 4.7.6*:

$$2 \mid x \Leftrightarrow 2 \mid (x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \dots + x_k \cdot r_k).$$

Se sustituye el valor de $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ por los que aparecen en la *Tabla 4.2* para $n = 2$:

$$2 \mid x_0.$$

Con esto, se determina x divisible por 2 si la cifra de las unidades es múltiplo de 2, es decir, que su última cifra sea un número par.

- Para saber si x es divisible por 3, se vuelve a aplicar el *Corolario 4.7.6*:

$$3 \mid x \Leftrightarrow 3 \mid (x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \dots + x_k \cdot r_k).$$

Se sustituye el valor de $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ por los que aparecen en la *Tabla 4.2* para $n = 3$:

$$3 \mid (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k).$$

Con esto, se determina que x es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

- Para saber si x es divisible por 4, se vuelve a aplicar el *Corolario 4.7.6* y se sustituyen los valores de $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ por los que aparecen en la *Tabla 4.2* para $n = 4$:

$$4 \mid (x_0 + 2 \cdot x_1).$$

Con esto, se determina que x es divisible por 4 si la suma de la cifra de las unidades, más el doble de la cifra de las decenas es múltiplo de 4.

$n \backslash r_i$	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0
6	1	4	4	4	4	4	4
7	1	3	2	6	4	5	1
8	1	2	4	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1
10	1	0	0	0	0	0	0
11	1	10	1	10	1	10	1

Tabla 4.2. Restos potenciales de 10 módulo n (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 34)

- Para saber si x es divisible por 5, se vuelve a aplicar el *Corolario 4.7.6* y sustituyen los valores de $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ por los que aparecen en la *Tabla 4.2* para $n = 5$:

$$5 \mid x_0.$$

Con esto, se determina que x es divisible por 5 si la cifra de las unidades es múltiplo de 5, es decir, que la cifra de las unidades sea 0 o 5.



- Para saber si x es divisible por 6, simplemente, hay que observar que 6 se puede expresar como un producto de dos números primos, es decir, $6 = 2 \cdot 3$. De esta forma, cualquier número que contenga en su descomposición factorial a estos dos números primos será divisible por 6. Consecuentemente, x será divisible por 6 si lo es por 2 y 3 a la vez.
- Para determinar si x es divisible por 7, se procede como en los criterios anteriores:

$$7 \mid x_0 + 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 + x_6 \dots$$

Como $4 = 7 - 3$; $5 = 7 - 2$ y $6 = 7 - 1$, nos queda:

$$7 \mid (x_0 + 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + (7 - 1) \cdot x_3 + (7 - 3) \cdot x_4 + (7 - 2) \cdot x_5 + x_6 \dots);$$

$$7 \mid (x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_3 + 7x_4 - 3x_4 + 7x_5 - 2x_5 + x_6 \dots);$$

$$7 \mid ((x_0 + 3x_1 + 2x_2) - (x_3 + 3x_4 + 2x_5) + \dots + \dot{7});$$

Entonces, para que x sea divisible por 7, es necesario que:

$$(x_0 + 3x_1 + 2x_2) - (x_3 + 3x_4 + 2x_5) + \dots$$

sea múltiplo de 7.

- Para saber si x es divisible por 8:

$$8 \mid (x_0 + 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2).$$

Con esto, se determina que x es divisible por 8 si el número resultante de sumar la cifra de las unidades con el doble de las decenas y el cuádruple de las centenas es múltiplo de 8.

- Para saber si x es divisible por 9:

$$9 \mid (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k),$$

es decir, que la suma de sus cifras sea múltiplo de 9.

- Para saber si x es divisible por 10:

$$10 \mid x_0,$$



es decir, que la cifra de las unidades sea múltiplo de 10. Para eso dicha cifra debe ser 0.

- Para determinar si x es divisible por 11:

$$11 \mid (x_0 + 10 \cdot x_1 + x_2 + 10x_3 \dots).$$

Como $10 = 11 - 1$, nos queda:

$$11 \mid (x_0 + 10 \cdot x_1 + x_2 + 10x_3 \dots);$$

$$11 \mid (x_0 + (11 - 1) \cdot x_1 + x_2 + (11 - 1)x_3 + \dots);$$

$$11 \mid (x_0 + 11 \cdot x_1 - x_1 + x_2 + 11 \cdot x_3 - x_3 + \dots);$$

$$11 \mid (x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \dots + 11 \cdot (x_1 + x_3 + \dots));$$

$$11 \mid (x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \dots + 11).$$

De aquí se deduce que x es divisible por 11 si la suma de sus cifras impares, menos la suma de sus cifras pares, es múltiplo de 11.



SECCIÓN 5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

El objetivo **04** del trabajo plantea indagar acerca de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, de forma que se centren en las dificultades, errores o fenómenos didácticos que intervengan en los procesos de instrucción matemáticos de divisibilidad.

Para alcanzar este objetivo, se han seleccionado un total de seis artículos (Roig, Llinares & Penalva, 2010; Zazkis, 2001; Gascón, 2001; Etchegaray, 2017; Sepúlveda & Tinoco, 2000; Peñafiel, 1993) publicados en revistas prestigiosas de investigación en Didáctica de las Matemáticas (*Enseñanza de las Ciencias*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Revista Teórica e de Investigaçõ, Educação Matemática*) o ponencias en congresos internacionales (CIVEOS 2).

Para el criterio de selección, ha prevalecido que la investigación estuviera dirigida a estudiantes de Secundaria y que tratara sobre los conceptos relacionados con la divisibilidad.

Por motivos de espacio y la complejidad que supone para un estudiante de máster el estudio de los artículos de investigación, se analizarán cuatro trabajos: el primero de ellos (Roig, Llinares & Penalva, 2010), publicado en la revista *Enseñanza de las Ciencias*, trata sobre la construcción del concepto del mínimo común múltiplo en alumnos de Secundaria; el segundo (Zazkis, 2001) alude a los significados de múltiplo, divisor, factores y las relaciones establecidas entre ellos por parte de los estudiantes de magisterio. En el análisis de estos trabajos, se han ido marcando en negrita las principales partes que componen un artículo de investigación: objetivo, marco teórico, metodología de investigación y resultados. Los artículos de Sepúlveda y Tinoco (2000) y Peñafiel (1993) se encuentran en el *Anexo V*. El primero de ellos versa sobre la aplicación de un criterio de divisibilidad generalizado, mientras que el segundo propone una forma didáctica de realizar la criba de Eratóstenes.

Tal y como se ha comentado en esta memoria, no se abordarán de forma minuciosa los trabajos de Gascón (2001) y Etchegaray (2017). Gascón (2001) propone una reconstrucción de la enseñanza-aprendizaje de la divisibilidad en la Educación Secundaria Obligatoria mediante el empleo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Etchegaray (2017) plantea un análisis de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas de divisibilidad.



5.1. Artículo 1

Este primer artículo de investigación se titula *Construcción del concepto múltiplo común en el dominio de los números naturales* (Roig, Llinares & Penalva, 2010). Asume por **objetivo** describir cómo se genera el concepto *mínimo común múltiplo* de dos números naturales desde la perspectiva de las teorías piagetianas basadas en la *abstracción reflexiva*.

Piaget sugirió que cuando un estudiante asimila un nuevo concepto matemático, se produce en su mente un proceso de construcción de estructuras cognitivas a partir de otras estructuras ya creadas en el pasado. El mecanismo que impulsa este proceso es lo que él denomina *abstracción reflexiva* (Piaget, 2001). Dicho mecanismo se compone a su vez de dos subprocesos mentales llamados *proyección* y *reflexión*. La explicación de ambos puede encontrarse en el siguiente fragmento de Piaget (2001):

Primero, se traspone a un plano superior lo que se toma de un plano inferior (por ejemplo, al conceptualizar una acción). Llamamos a dicha transferencia o proyección un *réfléchissement*. Segundo, se debe por tanto reconstruir en el nuevo nivel B lo que se ha tomado del nivel previo A, o establecer una relación entre los elementos extraídos de A y aquellos todavía situados en B. Esta reorganización que es forzada por la proyección será llamada reflexión (*réflexion*) en el sentido estricto (Piaget, 2001, p. 30).

Para dilucidar esto, se propone un ejemplo aplicado al concepto de mínimo común múltiplo: se supone un alumno que tiene ya construida la estructura de *múltiplo de un número*. A partir de esto, puede pensar en dos conjuntos diferentes. Uno de ellos será aquel formado por los múltiplos de a , y otro, el formado por los múltiplos de b . Cuando este estudiante considera ambos conjuntos al mismo tiempo, advierte que hay números que cumplen las dos condiciones a la vez. Al percatarse de que un mismo número puede ser múltiplo de a y b a la vez, alcanza la idea de *múltiplo común*, y puede equipararse con el subproceso *proyección* o *transferencia a un plano superior*, puesto que empieza a ver que estos números desde una perspectiva que va más allá de la que los veía antes. En este momento, tienen lugar en su mente una serie de procesos mediante los cuales establece relaciones con otras ideas, como puede ser la identificación de un múltiplo común de a y b cuando los números están expresados como un producto de factores primos. Esto es lo que se denomina *reconstrucción* o *reflexión*.

La teoría piagetiana muestra limitaciones a la hora de explicar estos procesos que llevan a los estudiantes a desarrollar relaciones con otras ideas. Por este motivo, los autores se sirven del **marco teórico** desarrollado por Simon, Tzur, Heinz y Kinzel (2004), el cual asume las ideas de Piaget previamente mencionadas. Estos autores establecen una *fase de participación* y una *fase de anticipación*.

La fase de participación es descrita por Tzur (2007) como:

[...] el estudiante no tiene todavía la comprensión del elemento (matemático) que es pertinente usar para resolver la situación planteada. En esta fase, el estudiante puede realizar diferentes actividades cognitivas y comparar el efecto producido con lo que pretende conseguir, razonando por qué ciertos efectos siguen a su actividad (Tzur, 2007, p. 277).

Respecto a la fase de anticipación «el estudiante puede evocar y utilizar el concepto adecuadamente para resolver una situación problemática» (Tzur, 2007, p. 278).

Por otra parte, la **metodología de investigación** que emplearon los autores del artículo consistió en proponer a 71 estudiantes de 4º de ESO la resolución de un problema que implicara el uso del mcm. Esto se complementó con unas entrevistas personales realizadas *a posteriori* para que los estudiantes justificaran sus cálculos y procedimientos. Este enunciado se encuentra en la *Figura 5.1*:

«Un fabricante de baldosas ha donado a la Comisión de Fiestas cierta cantidad de baldosas de 30 cm de largo y 33 cm de ancho. La Comisión decide hacer una pista de baile cuadrada en el recinto ferial, pero necesita que les digas:
–Cuál es el lado del menor cuadrado que se puede construir con este tipo de baldosas, sin necesidad de cortarlas, y
–Qué otros tamaños podría tener la pista cuadrada para embaldosarla usando sólo baldosas enteras de este tamaño. ¿Por qué?
Resuélvelo y explica qué has hecho para responder a la Comisión».

Figura 5.1. Problema propuesto a los estudiantes (Roig et al., 2010, p. 264).

Respecto de los **resultados** obtenidos en la investigación, de los 71 estudiantes participantes, 43 no resolvieron el problema o contestaron que no era posible realizar una pista cuadrada con baldosas rectangulares. Los 28 estudiantes restantes, 15 fueron capaces de identificar y aplicar correctamente, desde un primer momento, la idea de mínimo común múltiplo. Estos alumnos alcanzaron, según el marco teórico de Simon y otros, la fase de anticipación.

Los otros 13 estudiantes no reconocieron inicialmente la idea de mcm, pero mostraron procesos de generación y coordinación de la información referente a esta idea. No obstante, esta generación de información no fue suficiente para 3 de ellos, puesto que la búsqueda desorganizada de información que llevaron a cabo no les permitió avanzar. Los 10 estudiantes restantes, si supieron generar y coordinar adecuadamente la información. Tal es el caso del estudiante que proporcionó la respuesta presentada en las figuras 5.2 y 5.3.

Se puede decir que todas las respuestas similares a la presentada en dichas figuras, corresponden a estudiantes que se encuentran en la fase de participación, puesto que observan los efectos que producen los casos particulares que generan y, a partir de ellos, llevan a cabo una búsqueda guiada de nuevos casos particulares cada vez más próximos a la respuesta requerida. En todas estas respuestas, los autores advirtieron la existencia de dos momentos cognitivos diferenciados. El primero de ellos se denomina *proyección*, y es aquel en el que los estudiantes generan casos particulares para obtener información. Se corresponde con la expresión *transposición a un plano superior* utilizada por Piaget. En segundo lugar, aparece el momento cognitivo llamado *anticipación local*, el cual se caracteriza por la búsqueda guiada, que realiza el alumno, de nuevos casos

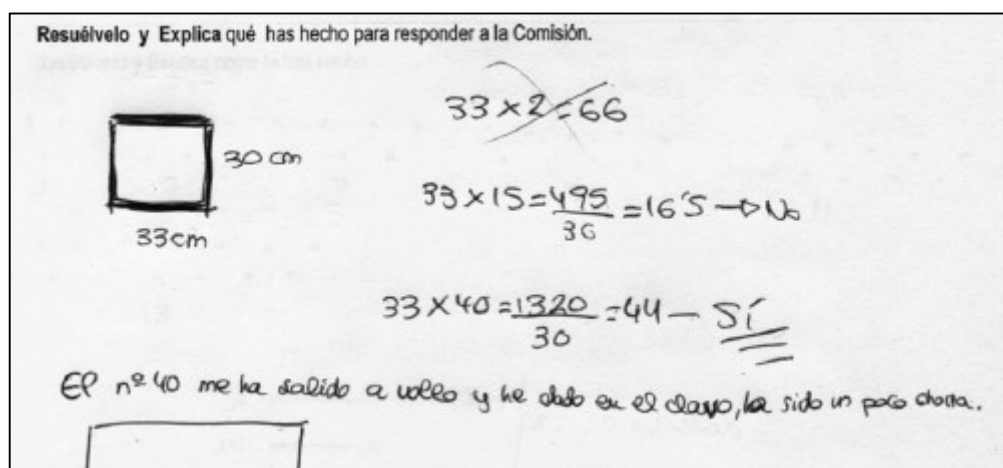


Figura 5.2. Respuesta de un estudiante en la fase de participación (1ª parte) (Roig et al., 2010, p. 267).

particulares cada vez más próximos a la solución requerida, identificando en este proceso una regularidad, que es la idea de mcm que empieza a generarse. De esta forma, queda caracterizado el proceso de abstracción reflexiva aplicado al concepto de mcm.

No obstante, para que se produzca la transición de un momento cognitivo a otro, es necesario que tenga lugar una reconstrucción de las estructuras cognitivas previas del estudiante, por medio del reconocimiento de algunas características de la estructura multiplicativa intervinientes en la situación-problema, surgiendo así el mcm como nueva estructura. Esta transición se designa con el término piagetiano *reflexión*.

En conclusión, para que tenga lugar la transición entre momentos cognitivos, y con ello el surgimiento de la idea del mcm, es indispensable que los estudiantes coordinen adecuadamente la información proporcionada por los casos particulares generados.

Por último, se desprende de esta investigación la veracidad de las evidencias detectadas por Brown (2002) y otros investigadores, los cuales sugieren que, en los niveles de la Educación Secundaria y superiores, los discentes no perciben de las relaciones *ser divisor*

de y ser múltiplo de con la misma facilidad, dependiendo si los números están representados en forma decimal o factorial (Brown, 2002; Zazkis & Liljedahl, 2004; Zazkis & Gadowsky, 2001). Esto queda reflejado en las palabras de los propios autores de este primer artículo:

[...] el hecho de que tan pocos estudiantes de 15-16 años reconocieran el mínimo común múltiplo como estructura de la situación aporta nuevas evidencias de la dicotomía identificada por Brown y otros (2002) entre el método de la descomposición factorial y la comprensión del concepto mínimo común múltiplo de dos o más números. Estos autores consideran que el algoritmo no se construye a través de una aplicación consciente de la comprensión previa de la estructura multiplicativa, sino como un procedimiento memorizado que asocian al concepto mínimo común múltiplo. No es de extrañar, por tanto, que los estudiantes no reconozcan su utilidad en nuestra situación problemática, pues asocian la idea de mínimo común múltiplo a un procedimiento y no a su significado, lo cual según Monaghan y Ozmatar (2006) sería un indicador de la no consolidación del concepto (Roig, Llinares & Penalva, 2010, p. 270).

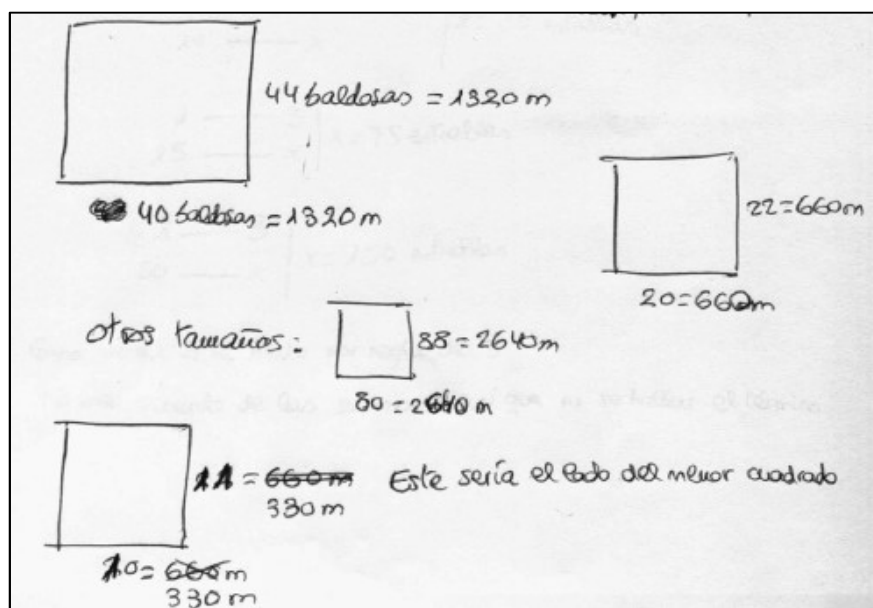


Figura 5.3. Respuesta de un estudiante en la fase de participación (2ª parte) (Roig et al., 2010, p. 267).

5.2. Artículo 2

Este segundo artículo tiene por título *Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes* (Zazkis, 2001). El **objetivo** del autor es investigar los significados que atribuyen los futuros maestros a los conceptos de múltiplo, divisor, factor, números primos, descomposición en factores, divisibilidad, así como las conexiones establecidas entre ellos.

Las ideas de Hiebert y Lefevre (1986) constituyen el **marco teórico** de la investigación. Estos autores consideran que los alumnos no construyen los conceptos matemáticos de

forma aislada, sino que crean una red de conexiones. Sugieren la existencia de una red de conocimiento, donde las piezas discretas de información, como pueden ser los conceptos o proposiciones, están vinculadas o conectadas entre sí (Hiebert & Lefevre. 1986, pp. 3-4).

La **metodología de investigación** consistió, en primer lugar, en la captación de 19 estudiantes voluntarios, a los que se les impartió algunas clases de los conceptos de divisibilidad mencionados anteriormente. En segundo lugar, se llevaron a cabo entrevistas individuales, en las que se hicieron preguntas clasificadas en dos bloques (ver figuras 5.4 y 5.5).

Conjunto de Preguntas 1

Observa los siguientes términos:

Número entero, números naturales, suma, producto, divisor, factor, número primo, número compuesto, múltiplo (se presenta una tarjeta con esta lista).

¿Te suenan familiares? ¿Qué significa cada una de esas palabras? ¿Puedes ejemplificarlas?

Figura 5.4. Primer bloque de preguntas (Zazkis, 2001, párr. 21).

Conjunto de Preguntas 2

¿Cuáles son los factores primos de 117? ¿Puedes listarlos todos?

¿Cuáles son los factores de $117=3^2 \times 13$? ¿Puedes listarlos todos?

¿Cuáles son los divisores de $117=3^2 \times 13$? ¿Puedes listarlos todos?

¿De qué número 117 es un múltiplo?

¿117 es múltiplo de 26?

¿Puedes dar un ejemplo de un múltiplo de 117?

¿Tienes alguna observación?

¿Puedes pensar en un factor que no sea divisor?

¿Puedes pensar en un divisor que no sea factor? ¿Puedes explicarlo?

¿Puedes pensar en un número que sea tanto múltiplo como divisor de 117? ¿Algún otro?

Figura 5.5. Segundo bloque de preguntas (Zazkis, 2001, párr. 22).

Desde un punto de vista epistemológico, hay dos posibles significados para el concepto *factor*. Uno de ellos es el factor como elemento de una multiplicación. Por ejemplo, en la operación $a \cdot b = c$, todos ellos números naturales, a y b se llaman *factores*, mientras que c se denomina *producto*. El otro significado se asocia una relación entre números. Se dice que b es un factor de a si y solo si existe otro número c tal que $a = b \cdot c$.

Estas entrevistas permitieron extraer varios **resultados**. Cuando se preguntó por el significado de *factor*, la mayoría de los alumnos empleó en sus argumentaciones la palabra «factores» más que «factor». Esta preferencia por el plural sugiere que los estudiantes no consideraran el significado de factor como relación entre números, sino que lo asocian a la multiplicación y a los pares de números multiplicados.



En cuanto al concepto de *divisor*, resultó ser bastante problemático. En este caso, también pueden considerarse dos significados distintos: como el papel que juega en el algoritmo de la división, o como una relación entre números naturales. Es decir, en la división $a \div b = c$, el primer elemento, a , es el dividendo; b es el divisor, y c , el cociente. En cambio, también se puede decir que b es divisor de a sí y solo si existe otro número c tal que $a = b \cdot c$. Esta definición es idéntica a la de *factor*, lo que provoca ambigüedades entre los discentes. De hecho, quince de los diecinueve relacionaron *divisor* con el papel que desempeña en el algoritmo de la división, y no como una relación entre números. Únicamente, los cuatro restantes advirtieron la equivalencia entre *factor* y *divisor*.

Por lo que se refiere al significado de *múltiplo*, resultó ser el más problemático. Solamente cuatro estudiantes respondieron correctamente cuando se les pidió que enunciaran ejemplos de múltiplos. El resto, utilizaron las palabras *múltiplo* y *factor* como sinónimos, creyendo que significan lo mismo y mencionando que *múltiplo* les evocaba a *multiplicación*.

Esta conexión errónea entre factor y producto podría explicarse por analogía con la suma. Como los sumandos son los elementos que se suman en la operación suma, los discentes asumen, erróneamente, que los múltiplos son los elementos que se multiplican en la operación multiplicación, otorgándoles así el mismo significado que a los factores y creando una falsa relación.

Con respecto a la identificación de factores, todos los alumnos reconocieron correctamente los factores primos cuando se les mostró el número $117 = 3^2 \cdot 13$. Sin embargo, cuando se les pidió que escribieran todos sus factores, no se sirvieron de la descomposición prima facilitada y comenzaron a desarrollar árboles de factores y divisiones con la calculadora. Uno de ellos afirmó que los divisores de 117 eran los mismos que los factores de 117, pero se mostraba vacilante cuando se le preguntó si sucedería lo mismo en el número 525. Esto demuestra que los alumnos identificaron correctamente lo que se les estaba pidiendo, pero no supieron utilizar la descomposición prima facilitada para generar todas las combinaciones posibles, ni fueron conscientes de su generalización a otros casos. Consecuentemente, su red de conexiones entre descomposición prima, factores y factores primos es muy débil o incompleta.

Después, se pidió a los discentes que hicieran una lista con todos los números que tuvieran como múltiplo al 117. Aquí se hizo notar la enorme dificultad que supone para ellos el concepto de *múltiplo*, tal y como se mencionó anteriormente. La entrevista

mostrada en la *Figura 5.6* es una prueba más de la propensión a equiparar *múltiplo* y *factor*.

En relación con la definición de *múltiplo*, se dice que a es múltiplo de b si y solo si b es un factor de a . Esta proposición no fue utilizada cuando se les preguntó si 117 es múltiplo de 26. Varios de estos estudiantes comenzaron a realizar multiplicaciones en la calculadora, para encontrar algún número que multiplicado por 26 diera como resultado 117, en vez de realizar una simple división, por lo que se deduce que no han desarrollado las conexiones entre múltiplo, multiplicación y división.

Entrevistador:	¿Dirías que 117 es un múltiplo de 26?
Penny:	No.
Entrevistador:	De acuerdo. Mmm, ¿y de 39?
Penny:	De acuerdo, ¿117 es un múltiplo de 39? Supongo, sí, veo, no estoy segura si comprendo el significado de múltiplo (pausa). Realmente no, no creo (pausa) no, no podría decir que 117 es un múltiplo de 39, diría que 39 es un múltiplo de 117.
Entrevistador:	Sí...
Penny:	Porque creo, esto es lo que pienso, porque los múltiplos son las partes de, como puede ser más grande que los números, como es una parte de 100, como 39 es una parte de 117. Sí, como 39 y 3 son múltiplos y los multiplicas juntos.
Entrevistador:	Así, por qué, ¿por qué piensas que los matemáticos usarían la misma palabra tanto para múltiplo como para, digamos, factor?
Penny:	Bueno, es justo el contexto que tú uses en...

Figura 5.6. Entrevista de identificación del significado de múltiplo (Zazkis, 2001, párr. 110).

Finalmente, en el turno de preguntas relacionadas con los números primos, manifestaron que el número 91 era un número primo, ya que su descomposición en factores primos, $91 = 7 \cdot 13$, no se encuentra en las tablas de multiplicar básicas estudiadas en la Educación Primaria. Cometieron el error de suponer que los números menores que 100, cuando se descomponen en dos factores, éstos tienen que ser menores que 12, que es la tabla de multiplicar más elevada que se suele estudiar.

En conclusión, se advirtió que las percepciones previamente existentes en la red de conexiones de los estudiantes son mucho más fuertes que los conocimientos y percepciones más recientes. *Ergo*, se debe prestar atención a los conocimientos previos para reducir al máximo la distancia entre lo que se debe saber y lo que se sabe realmente.



SECCIÓN 6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA

En esta sección, se aplica la información emanada de las fundamentaciones curricular, epistemológica y didáctica, con el propósito de diseñar una unidad didáctica que verse sobre la divisibilidad en $\mathbb{N}$, que es estudiada en el primer curso de ESO. Los contenidos y objetivos, que propone dicha unidad, se consiguen alcanzar gracias a las actividades propuestas, implementadas con diferentes metodologías (tradicional, modelización matemática, uso de herramientas TIC, investigación/indagación y aprendizaje basado en juegos), a la vez que se incrementa la adquisición de las competencias clave. Asimismo, se presentan actividades dirigidas a alumnos cuyo rendimiento esté por encima o por debajo del esperado o deseado. Adicionalmente, se ofrece un cronograma de los procesos de instrucción y una forma de evaluación que revele el grado de consecución de los objetivos pretendidos, así como el nivel del logro competencial.

6.1. Título

La divisibilidad en Educación Secundaria.

6.2. Justificación

La divisibilidad se estudia prácticamente en todas las etapas educativas, dado el gran número de aplicaciones en distintas ramas de la ciencia. En primer lugar, en Educación Primaria, el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, establece, en los estándares de aprendizaje evaluables del 8.6 al 8.9, ubicados en el bloque de *Números*, la identificación de los múltiplos de un número mediante las tablas de multiplicar; cálculo de los primeros múltiplos de un número determinado; cálculo de los divisores de cualquier número inferior a la centena, y cálculo del mcd y mcm (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19390).

En segundo lugar, en la Educación Secundaria, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, dispone, para los dos primeros cursos del primer ciclo, los estándares de aprendizaje comprendidos entre el 2.1 y el 2.3, ambos inclusive. Dichos estándares hacen referencia al reconocimiento, por parte de los alumnos, de los nuevos significados que pueden adquirir los números en problemas contextualizados en el ámbito de divisibilidad y paridad; conocimiento de los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos un número natural y su posterior aplicación a la resolución de problemas, y el empleo de algoritmos para determinar el



mcd y mcm de dos o más números naturales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 411).

Respecto a los cursos de 3º y 4º de ESO, el currículum se centra en la factorización de polinomios. Concretamente, en el itinerario de enseñanzas académicas, los estándares 1.5 y 3.3, para el tercer curso, y 3.2, 3.4 y 4.1, para el último, son los que desglosan los criterios de evaluación de esta temática. Dichos estándares son los que se muestran a continuación:

- «1.5. Factoriza expresiones numéricas sencillas que contengan raíces, opera con ellas simplificando los resultados» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 392).
- «3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 393).
- «3.2. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 396).
- «3.4. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 396).
- «4.1. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 396).

En cuanto a las enseñanzas aplicadas, los contenidos son más elementales, puesto que la divisibilidad aparece únicamente en el estándar 2.3 del cuarto curso, el cual hace referencia a la extracción de raíces de un polinomio y su posterior factorización mediante la regla de Ruffini.

Por lo que se refiere a las enseñanzas de Bachillerato, concretamente en la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*, puede considerarse como una continuación de los aprendizajes de divisibilidad en el anillo de los polinomios, tal y como queda reflejado en el contenido «Polinomios. Operaciones. Descomposición en factores» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 384), plasmado en el mencionado Real Decreto.

Por otra parte, desde un punto de vista interno, los procesos de instrucción matemáticos de divisibilidad encuentran su justificación en la esencialidad de los mismos para la



comprensión del Teorema Fundamental de la Aritmética y, en consecuencia, para la construcción de los significados referentes a las estructuras multiplicativa y de divisibilidad en $\mathbb{N}$.

Además, en el ámbito científico y profesional, pueden encontrarse varias aplicaciones de estos conocimientos. Por ejemplo, en la rama de la biología, se utilizan los números primos y sus múltiplos para estudiar el ciclo vital de algunos seres vivos, como es el caso de la *Magiicada septendecim* y *Magiicada tredecim*, dos especies diferentes de cigarras. Estos insectos tienen un ciclo vital de 17 y 13 años, respectivamente, siendo ambos números primos. El primer tipo de cigarra pasa los 17 primeros años de su vida viviendo bajo tierra en estado de ninfa, junto a las raíces de los árboles, de las que extrae pequeñas cantidades de savia para alimentarse. Cuando pasan esos 17 años, emerge a la superficie para realizar la metamorfosis, reproducirse y, finalmente, morir a los pocos días. Los biólogos explican este comportamiento por medio de una teoría, en la que interviene un potencial y peligroso parásito de las cigarras adultas, el cual posee un ciclo de vida de 2 años (Gracián, 2011, p. 20). Esta teoría queda perfectamente reflejada en el siguiente fragmento de Gracián (2011):

Si el ciclo vital de la cigarra fuera un múltiplo de 2, ambas especies acabarían coincidiendo cada 2, 4, 8,... años. Lo mismo sucedería con otros múltiplos cualesquiera. Pero si el ciclo vital es un número primo de años lo suficientemente alto, como es el caso de 17, el parásito y la cigarra solo pueden coincidir cada 34 años, que es el primer múltiplo de 17 (Gracián, 2011, p. 20).

Al ser 34 el primer múltiplo común de 17 y 2, el contacto entre ambos seres vivos tendría lugar cada 34 años. Esto sugiere que los insectos podrían haber adaptado o modificado su ciclo de vida para que éste tenga una duración prima, con el objeto de limitar al máximo su coincidencia con los parásitos en la superficie.

Otro ámbito de aplicación es el de la informática, concretamente en el campo de la criptografía. Los números primos son imprescindibles para generar claves secretas que protejan las cuentas y transacciones bancarias o el tráfico de datos personales por internet. Adicionalmente, una aplicación importante de los números primos y el algoritmo de la división, es la determinación de la letra que acompaña al DNI de cada persona, obteniendo así el NIF.

Por último, pero no por ello menos importante, está la vertiente cultural y estética. Considero que una correcta implementación de los sistemas de prácticas de divisibilidad puede contribuir a que el discente se apropie de esta pequeña parte del legado matemático, absolutamente transcendental, a la vez que se le ofrece la oportunidad de apreciar su belleza inherente. La pasión por la magnificencia de la matemática quedó plasmada en estas palabras del físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894):



¿Puede uno evitar sentir que esas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia propia, que son más sabias de lo que lo somos nosotros, más sabias, incluso, que sus descubridores, y que obtenemos de ellas más de lo que originalmente pusimos en ellas? (Gracián, 2011, p. 17).

6.3. Contextualización del centro y del aula

Los contenidos de la unidad didáctica, que se elabora en este trabajo, pueden llevarse a cabo en el centro educativo donde realicé las Prácticas Docentes; esto es, el IES Jándula, sito en la localidad jiennense de Andújar.

La mayoría de las aulas disponen de cañón proyector, pizarra digital y sonido integrado, aparte de un carro de tabletas portátil, que se puede utilizar mediante la correspondiente reserva en el intervalo temporal que se necesite. Este recurso podría emplearse para implantar, en ciertas sesiones, un aprendizaje complementado con el uso de herramientas TIC o software de cálculo matemático, como puede ser una hoja de cálculo.

Por otra parte, este centro docente es veterano en la organización y realización, del concurso matemático de la SAEM Thales, que tiene lugar con carácter anual. Los centros de educación primaria que estén interesados en participar seleccionan a sus mejores alumnos del 6º curso en la materia de matemáticas. Los desafíos que se proponen consisten en la realización de problemas matemáticos. Estos se dividen en dos pruebas: la primera es individual y la segunda, grupal. Con la intención de aprovechar la oportunidad que ofrece este acontecimiento, se podría planificar alguna actividad que motive a los estudiantes a diseñar problemas en el contexto de divisibilidad (problematización), susceptibles de ser incluidos en las pruebas del mencionado concurso.

Respecto al espacio donde se llevarían a cabo los aprendizajes, una buena opción sería el aula 1.15. Es una de las aulas donde más tiempo invertí en mis prácticas docentes. Se ubica en la primera planta del edificio, en el pasillo de menor longitud, que es el que da paso a las aulas impares. Tiene planta rectangular con dimensiones 9,31 metros de largo y 6,31 metros de ancho, que genera un área de 58,75 m². Estas dimensiones, aptas para grupos no demasiado numerosos, junto con la excelente luminosidad que dispone, hacen de ella una de las mejores para el fin que se propone.

6.4. Objetivos

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los objetivos son entendidos como los «referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar



cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 172). Teniendo en cuenta esta definición, se elabora el presente apartado con el propósito de dejar constancia de los objetivos que se espera que alcancen los discentes al finalizar la unidad didáctica de divisibilidad.

Estos objetivos se clasifican atendiendo a diferentes grados de concreción. En este caso, se establecerán tres niveles. El primero de ellos tiene un alcance general, y está constituido por una selección de los objetivos globales de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, los cuales aparecen en el mencionado real decreto. Después, el segundo nivel se presenta como un extracto de los objetivos del área de matemáticas, plasmados en la Orden 14 julio de 2016, de carácter autonómico. Finalmente, el tercer nivel versa sobre aquellos objetivos específicos, de la unidad didáctica de divisibilidad, que deben conseguir los discentes. Este último nivel no aparece en ningún documento curricular, por lo que su elaboración se apoya en la consulta de programaciones y guías didácticas para el profesorado, con el objeto de tener una base de referencia. A continuación, se muestra la recopilación realizada, en concordancia con las condiciones aludidas anteriormente.

6.4.1. Primer nivel: objetivos generales de etapa

1. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
2. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
3. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
4. Desarrollar el espíritu emprendedor y confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
5. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes completos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 177).



6.4.2. Segundo nivel: objetivos de etapa del área de matemáticas

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
4. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
5. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
6. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
7. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas (Consejería de Educación, 2016, p. 204).

6.4.3. Tercer nivel: objetivos específicos de la unidad didáctica

1. Conocer el algoritmo de la división y aplicarlo a dos números naturales dados;
2. Dominar la definición de *sistema de numeración* y utilizarla, junto con el algoritmo de la división, para expresar un mismo número en diferentes bases;
3. Utilizar la *relación de divisibilidad* para hallar los múltiplos y divisores de un número dado;
4. Asumir que un mismo número puede ser múltiplo o divisor de dos o más números a la vez;



5. Diferir teóricamente un número primo de un número compuesto;
6. Conocer y aplicar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9, 10 y 11;
7. Identificar los números primos comprendidos entre 1 y 100, empleando para ello la criba de Eratóstenes;
8. Enunciar y comprender el *Teorema Fundamental de la Aritmética*;
9. Utilizar los criterios de divisibilidad y los resultados arrojados por el *Teorema Fundamental de la Aritmética* para descomponer un número como producto de factores primos;
10. Comprender el concepto de *máximo común divisor* (mcd) y *mínimo común múltiplo* (mcm) de dos o más números naturales;
11. Calcular el mcd y mcm de dos o más números naturales por descomposición factorial o mediante el algoritmo de Euclides;
12. Resolver, en pequeños grupos, situaciones-problema en los que sea necesario aplicar algunos de los contenidos de la unidad didáctica de divisibilidad, y cuya solución tenga una aplicación a circunstancias reales en la vida cotidiana.

6.5. Competencias clave

En el ámbito de la educación, las competencias son entendidas como las «capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 172). Es importante tenerlas presentes, puesto que debe considerarse su grado de adquisición para la evaluación del discente. En este sentido, la Orden ECD/65/2015, de 21 de diciembre, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación Secundaria obligatoria y el bachillerato, distingue siete ámbitos competenciales diferenciados, que son: comunicación lingüística, competencia matemática, competencia digital, aprender a aprender, competencias sociales y cívicas, sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, y conciencia y expresiones culturales. Sus definiciones pueden consultarse en el *Anexo VI*.

El desarrollo de cualquier unidad didáctica debe contribuir a la adquisición de algunas de las competencias nombradas anteriormente. En este caso, la unidad didáctica de divisibilidad que se pretende implementar puede contribuir a que los discentes desarrollen y fortalezcan las siguientes:



- *Competencia lingüística:* Se propondrá a los discentes que se agrupen para la resolución de algunas situaciones-problema, en las que tendrán que consensuar un proceso de resolución. Para ello, tendrán que poner en práctica y desarrollar sus habilidades comunicativas, además de escribir y argumentar oralmente, de forma razonada, el proceso seguido para la resolución del problema.
- *Competencia matemática:* Los ejercicios individuales propuestos, para aplicar de forma directa las entidades elementales de la divisibilidad, contribuyen a que el discente asimile el significado de los nuevos objetos matemáticos y adquiera soltura en la ejecución de los procedimientos necesarios para su manejo. De esta forma, se fomenta el uso del lenguaje matemático pertinente y la plasmación ordenada y lógica de los procesos y cálculos intervinientes. Todo esto se ve reforzado con la realización de situaciones-problema grupales, que tienen una aplicación práctica en la realidad, en las que deben aplicar las entidades elementales trabajadas en la unidad didáctica.
- *Competencia digital:* Se invitará a los alumnos a programar una hoja de cálculo que determine si un año es o no bisiesto, para que aprecien el gran potencial que ofrece esta herramienta para el aprendizaje matemático y la agilización de los cálculos. Se propondrá la resolución de algunos ejercicios en los que tendrán que informarse previamente en páginas web de internet. Para ello deberán escanear un código QR. De esta forma, adquieren destrezas en el uso de herramientas informáticas, utilizan los motores de búsqueda y transforman la información recopilada en conocimiento.
- *Aprender a aprender:* el trabajo en grupo y los consejos dados por el docente contribuirán a la superación satisfactoria de las tareas programadas, con lo que se generará en el estudiante una sensación de confianza y auto-eficacia. Conjuntamente con lo anterior, la búsqueda de información para la realización de las tareas voluntarias encaminará al discente hacia un aprendizaje cada vez más eficaz y auto-dirigido.
- *Competencias sociales y cívicas:* la interacción que se llevará a cabo en las tareas grupales permitirá poner en práctica habilidades sociales como el saber expresar los puntos de vista propios, afrontar las discrepancias de manera constructiva y el fomento de la inclusión de todos los miembros del grupo, rechazando cualquier tipo de prejuicios, puesto que cada componente es una pieza clave para la resolución de la tarea.



- *Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor:* En los casos prácticos, una de las finalidades es que se genere en la mente de los discentes el llamado *insight* o idea feliz, que hace referencia a las conexiones o relaciones que el alumno es capaz de establecer por sí solo, sin ayuda del profesor, que le permiten avanzar en el proceso de resolución, y contribuyen a la materialización de sus ideas.
- *Conciencia y expresiones culturales:* la consecución de los objetivos de la unidad permitirá al estudiante apreciar la belleza y utilidad del patrimonio matemático, puesto que sin esos conocimientos no se podrían resolver las cuestiones planteadas.

6.6. Contenidos

Los contenidos se definen en el RD 1105/2014 tal y como aparece en este fragmento de su publicación el BOE:

Conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015a, p. 172).

La unidad didáctica que se está elaborando debe tener los contenidos que se muestran a continuación:

1. Algoritmo de la división en $\mathbb{N}$
2. Sistemas de numeración
3. Relación de divisibilidad
 - 3.1. Múltiplos y divisores de un número
 - 3.2. Múltiplos y divisores comunes
4. Criterios de divisibilidad
5. Números primos y compuestos. Criba de Eratóstenes
6. Teorema Fundamental de la Aritmética. Descomposición de un número en factores primos
7. Definición de máximo común divisor y mínimo común múltiplo
8. Cálculo del mcd y mcm por aplicación del Teorema Fundamental de la Aritmética
9. Algoritmo de Euclides



6.7. Metodología

Antes de desarrollar cualquier unidad didáctica en el aula, el docente debe reflexionar sobre aquellas estrategias y procedimientos que llevará a cabo para que el aprendizaje tenga lugar y los objetivos propuestos sean superados satisfactoriamente por los alumnos. Esto es su *metodología*. Resulta interesante utilizar un abanico variado de metodologías, puesto que la presencia exclusiva de una de ellas hará que los estudiantes caigan en el aburrimiento y no se interesen por la asignatura. Puede establecerse un símil de esta situación con los hábitos alimenticios: si una persona come exclusivamente un solo tipo de alimento, por ejemplo, un alimento rico en carbohidratos, con el tiempo terminará generando aversión hacia dicho alimento, aparte de sufrir carencias de proteínas, fibra, vitaminas, etc. Cuando únicamente se emplea un tipo de metodología, como puede ser la tradicional o transmisiva, se ofrece al discente una visión muy pobre de la matemática, en la que únicamente se trabajan con entes abstractos que carecen de utilidad para él y su vida, de ahí que las matemáticas se hayan convertido en una de las asignaturas más rechazadas y temidas. Con esto, no se pretende desprestigiar la metodología tradicional. Es absolutamente imprescindible para introducir los conceptos nuevos. La cuestión es combinarla con otras metodologías que desarrollen el potencial de los estudiantes y muestren la utilidad de la matemática para la resolución de situaciones cotidianas e incluso lúdicas.

En la consecución de esta unidad didáctica, intervendrán 5 tipos de metodologías diferentes. La primera de ellas es la metodología tradicional o transmisiva, empleada para introducir cada uno de los objetos matemáticos desconocidos para los alumnos, con lo que se consigue abordar parcialmente los objetivos del tercer nivel.

En segundo lugar, una metodología basada en la modelización matemática, mediante la cual se pone de manifiesto la aplicación de las matemáticas y su relevancia en la sociedad.

En tercer lugar, el aprendizaje basado en el uso de las herramientas TIC posibilitará el aprovechamiento del potencial del ordenador, tableta o teléfono móvil y aplicarlo a la enseñanza. En el caso de las hojas de cálculo, permitirán simplificar, agilizar y comprobar cálculos. Algunas actividades invitarán al estudiante a redactar, mediante el uso del procesador de textos, un informe en el que se indique el proceso seguido para obtener la solución, con lo que se contribuye a desarrollar la competencia lingüística.

Por otra parte, el aprendizaje por investigación fomentará el descubrimiento de relaciones y conexiones entre objetos matemáticos y sitúa al alumno en el centro del proceso de aprendizaje, como un sujeto activo que construye su propio conocimiento.

Finalmente, una metodología basada en juegos facilitará, de una forma divertida y amena, la sistematización de los procedimientos y algoritmos, como es el cálculo del mcd y mcm.

Metodología	Objetivos de primer nivel	Objetivos de segundo nivel	Objetivos de tercer nivel
Tradicional/transmisiva	-	-	Todos
Aprendizaje basado en la modelización matemática	1, 2, 3 y 5	1, 2, 3, 5, 6 y 7	1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11 y 12
Aprendizaje basado en el uso de herramientas TIC	1, 3 y 5	2, 3 y 4	1, 2, 5 y 7
Aprendizaje por investigación/indagación	1, 2, 4 y 5	1, 2, 6 y 7	3, 4, 6, 9, 10, 11 y 12
Aprendizaje basado en juegos	1 y 2	6 y 7	9, 11 y 12

Tabla 6.1. Metodologías empleadas en el desarrollo de la unidad didáctica.

A modo de síntesis, se presenta en la *Tabla 6.1* los objetivos que se pretenden superar con el empleo de cada una de las metodologías previamente señaladas. Los números indicados se corresponden con los objetivos de primer, segundo o tercer nivel que se esperan que la metodología en cuestión contribuya a alcanzar.

6.8. Actividades y recursos

Una enseñanza estrictamente teórica de los contenidos matemáticos no es adecuada desde un punto de vista didáctico, puesto que no deja lugar a la aplicación práctica, al descubrimiento de conexiones y relaciones entre conceptos, al desarrollo de las competencias y, por supuesto, supone un proceso monótono, y sin percepción de utilidad.

Con las actividades que se proponen a continuación, se pretende que los estudiantes sean capaces de lograr los objetivos pretendidos, al mismo tiempo que se ponen en práctica los contenidos y se desarrollan las competencias clave.



Los estándares de aprendizaje que se evalúan en las actividades son los que aparecen en el Real Decreto 1105/2014. Para designarlos, se emplea el siguiente método: por ejemplo, el estándar B1.2.4 se corresponde con el bloque 1, criterio 2, estándar de aprendizaje 4.

Actividad nº 1. Algoritmo de la división

- TIPO: ejercicio
- METODOLOGÍA EMPLEADA: tradicional
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
-	-	1

- CONTENIDOS IMPLICADOS: algoritmo de la división en $\mathbb{N}$
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.8.1 y B2.1.2

1) Aplica el algoritmo de la división en los siguientes casos:

a) $387 \div 3$

b) $25889 \div 31$

c) $175559 \div 432$

2) Recorta las etiquetas que aparecen en el Anexo 1 y ubícalas en su lugar correcto:

3) Recorta las etiquetas que aparecen en el Anexo 2 y disponlas de forma que se cumpla el algoritmo de la división:



$$\boxed{} = \left(\boxed{} \cdot \boxed{} \right) + \boxed{}$$

ANEXO 1

RESTO	DIVIDENDO	COCIENTE	DIVISOR
-------	-----------	----------	---------

ANEXO 2

RESTO	DIVIDENDO	COCIENTE	DIVISOR
-------	-----------	----------	---------

Actividad nº 2. Aplicación del algoritmo de la división en Excel. Sistemas de numeración

- TIPO: ejercicio
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje basado en el uso de herramientas TIC
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1 y 5	4	1 y 2

- CONTENIDOS IMPLICADOS: algoritmo de la división en $\mathbb{N}$; sistemas de numeración
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.8.1, B1.8.4, B1.11.1, B1.12.3 y B2.1.2

- ❖ *Excel* es una herramienta informática que permite crear hojas de cálculo programables. Cuando se introduce la función `COCIENTE(numerador; denominador)`, el programa devuelve el cociente resultante de efectuar la división entre los números insertados. El numerador se corresponde con el dividendo, y el denominador, con el divisor. Además, la función



RESIDUO(número; núm_divisor) calcula el resto resultante de efectuar la división entre los dos números introducidos.

1) Utiliza las dos funciones mencionadas para expresar el dividendo de las siguientes divisiones como el producto del divisor por el cociente más el resto, tal y como establece el algoritmo de la división.

a) $9821547825 \div 264$

b) $161543297586 \div 77456$

2) Vuelve a utilizar estas funciones para:

a) Expresar el número $237_{(10)}$ en base 3.

b) Expresar el número $4721_{(10)}$ en base 5.

Actividad nº 3. Relación de divisibilidad. Cálculo de múltiplos y divisores

- TIPO: ejercicio
- METODOLOGÍA EMPLEADA: tradicional; aprendizaje basado en el uso de herramientas TIC.
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
-	-	3 y 4

- CONTENIDOS IMPLICADOS: relación de divisibilidad; múltiplos y divisores de un número; múltiplos y divisores comunes
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.8.1, B1.8.4, B1.11.1, B1.12.3 y B2.2.1

1) Indica si existe o no relación de divisibilidad entre los siguientes números:

a) 485 y 5

b) 6988 y 3

c) 40231 y 11

2) Calcula los ocho primeros múltiplos de 3.

3) Calcula los siete primeros: múltiplos de 6.

- 4) ¿Observas alguna relación entre los múltiplos de 3 y 6? ¿Hay alguna coincidencia?
- 5) Calcula los 30 primeros múltiplos de 8 y 12 con ayuda de *Excel*. Utiliza el *formato condicional* para encontrar los múltiplos comunes a ambos números.

Actividad nº 4. Banderines ¹

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: metodología basada en la modelización matemática
- FORMA DE REALIZACIÓN: grupal
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2 y 5	1, 2, 5, 6, 7	1, 3 y 12

- CONTENIDOS IMPLICADOS: algoritmo de la división en $\mathbb{N}$; relación de divisibilidad
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.2.1, B1.2.2, B1.2.3, B1.2.4, B1.6.1, B1.6.2, B1.6.3, B1.6.4, B1.7.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.8.4, B1.9.1, B2.1.2, B2.1.3 y B2.2.1

- ❖ Kim tiene una empresa que fabrica banderines colgantes para fiestas como los que aparecen en la imagen. Un día, recibe un pedido de un cliente que desea adornar su jardín para una celebración. Para ello, dicho cliente quiere colocar banderines a lo largo de todo el perímetro del jardín, el cual tiene forma rectangular con dimensiones 24 m por 18 m.



Figura 6.1. Banderines (Thompson *et al.*, 2007, en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/bunting_v3_1.pdf).

¹ Actividad tomada y adaptada de Thompson, Q., Cann, T., Onion, A., Hoyle, C., Brown, M., Walters, L., Powell, I. y D. Walsh (2007), consultado en: https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/bunting_v3_1.pdf

Kim quiere saber cuánta tela necesita comprar para fabricar los banderines necesarios. El procedimiento que ella sigue es el siguiente:

- 1) Primero, calculo cuantos banderines triangulares tengo que hacer.
 - Calculo la longitud total que se quiere adornar.
 - Después, añado 1 metro de cuerda adicional para que los banderines cuelguen de manera apropiada.
 - Pongo cuatro banderines por metro de cuerda.

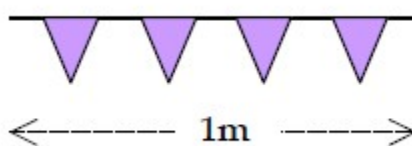


Figura 6.2. Banderines (Thompson et al., 2007, en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/bunting_v3_1.pdf).

- 2) Después, calculo la cantidad de tela que necesito comprar

- Los banderines tienen forma de triángulo isósceles, con las dimensiones que aparecen en la imagen de la derecha.
- La tela es un material caro, por lo que procuro colocar los triángulos de forma que puede aprovecharla al máximo.
- La tela se vende en rollos de 120 cm de ancho.
- Después, calculo la longitud de tela que necesito comprar.

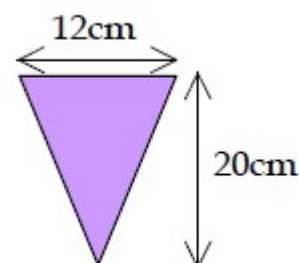


Figura 6.3. Banderín (Thompson et al., 2007, en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/bunting_v3_1.pdf).

Utiliza el procedimiento que sigue Kim para calcular los metros de tela que necesita comprar, y así poder entregar el pedido a su cliente.

Actividad nº 5. Criterios de divisibilidad. Aplicación al calendario gregoriano

- TIPO: ejercicio y situación-problema



- **METODOLOGÍA EMPLEADA:** tradicional; aprendizaje basado en la modelización matemática; aprendizaje basado en el uso de herramientas TIC
- **FORMA DE REALIZACIÓN:** individual
- **OBJETIVOS CUBIERTOS:**

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 3 y 5	1, 2, 3, 4, 5 y 7	1, 3, 4, 6

- **CONTENIDOS IMPLICADOS:** algoritmo de la división en $\mathbb{N}$; relación de divisibilidad; criterios de divisibilidad
- **ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES:** B1.2.1, B1.2.2, B1.2.3, B1.5.1, B1.6.2, B1.6.3, B1.6.4, B1.7.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.9.1, B1.10.1, B1.11.1, B1.12.1, B1.12.3, B2.1.2, B2.1.3, B2.2.1 y B2.2.2

- 1) Marca con una X las casillas en las que exista una relación de divisibilidad entre los números de las filas y los de las columnas. Utiliza para ello los criterios de divisibilidad estudiados.

	2	3	4	5	9	10	11
2670							
389							
8905							
49566							

- 2) El calendario gregoriano es el más utilizado en el mundo. En él, cada año tiene una duración de 365 días, excepto algunos que tienen 366. Este día adicional se añade en el mes de febrero, que pasa a tener 29 días, y se es llamado *año*

bisiesto. Descubre por qué existen estos años bisiestos escaneando el código QR que aparece a continuación².

Con la información que obtengas, utiliza el programa *Excel* para determinar si los años 1903, 1989, 2020, y 2088 son bisiestos o no. Genera un código QR con los resultados y envíase al profesor por correo electrónico.



- 3) Redacta un documento, haciendo uso del procesador de textos, en el que expliques el procedimiento que has seguido para la obtención de los resultados.

Actividad nº 6. Tabla de divisibilidad³

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje por investigación/indagación
- FORMA DE REALIZACIÓN: grupal
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2, 4 y 5	1, 2, 6 y 7	3, 4, 6 y 12
- CONTENIDOS IMPLICADOS: relación de divisibilidad; criterios de divisibilidad
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.2.1, B1.2.2, B1.2.3, B1.2.4, B1.5.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.9.1, B1.10.1, B2.2.1 y B2.2.2

² Este código QR dirige a Pierce, R. (2011), consultado en disfrutalasmaticas.com/medida/anos-bisiestos.html

³ Actividad tomada de Andonegui, 2006, p. 24.



- ❖ Recorta los cuadrados con números que aparecen en el *Anexo 1* y pégalos en la siguiente tabla, de manera que se cumplan estas condiciones:
- a) El número formado por las cifras de las dos primeras casillas sea divisible por 2.
 - b) El número formado por las cifras de las casillas segunda y tercera sea divisible por 3.
 - c) El número formado por las cifras de las casillas tercera y cuarta sea divisible por 4.
 - d) El número formado por las cifras de las casillas cuarta y quinta sea divisible por 5.
 - e) El número formado por las cifras de las casillas quinta y sexta sea divisible por 6.
 - f) El número formado por las cifras de las casillas sexta y séptima sea divisible por 7.
 - g) El número formado por las cifras de las casillas séptima y octava sea divisible por 8.
 - h) El número formado por las cifras de las casillas octava y novena sea divisible por 9.
- ❖ Redacta un informe en el que expliques el procedimiento seguido.

--	--	--	--	--	--	--	--	--

ANEXO 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Actividad nº 7. Suma mágica ⁴

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje por investigación/indagación
- FORMA DE REALIZACIÓN: grupal
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2, 4 y 5	1, 2, 6 y 7	3, 6 y 12

- CONTENIDOS IMPLICADOS: relación de divisibilidad; criterios de divisibilidad
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.1.1, B1.2.1, B1.2.2, B1.2.3, B1.2.4, B1.4.1, B1.4.2, B1.5.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.8.4, B1.9.1, B1.10.1, B2.2.1 y B2.2.2

A continuación, se presenta un rompecabezas conocido como *suma mágica*. Para completarlo, hay que situar en cada cuadrado un número del 1 al 7, de forma que la suma de los números de cada una de las líneas dé el mismo resultado. Dicho resultado es el que llamamos *suma mágica*. Para que lo entiendas mejor, puedes mirar el siguiente ejemplo:

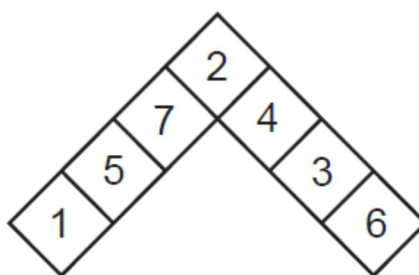


Figura 6.4. Ejemplo de suma mágica (Thompson *et al.*, 2007, en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/magic_sum_puzzle_v3_1.pdf).

En este caso concreto, la suma mágica vale 15 puesto que:

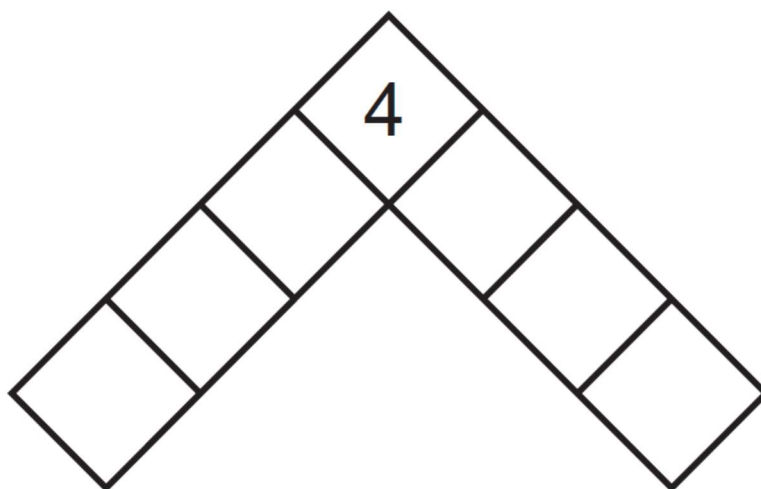
⁴ Actividad tomada y adaptada de Thompson *et al.* (2007), en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/magic_sum_puzzle_v3_1.pdf

$$1 + 5 + 7 + 2 = 15$$

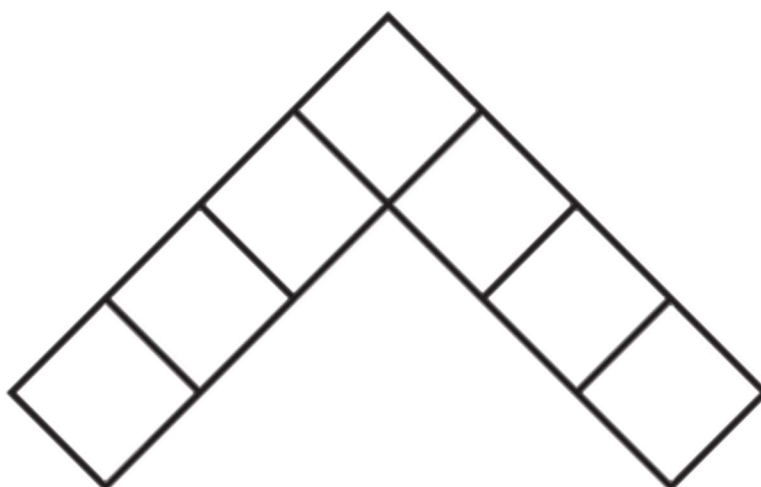
$$6 + 3 + 4 + 2 = 15$$

Ahora es tu turno. Responde las siguientes cuestiones:

- a) Completa este rompecabezas de la forma que se ha descrito anteriormente. Para ello, recorta los cuadrados numerados del 1 al 7 que aparecen en el *Anexo 1* y pégalos según correspondan. ¿Cuál es el valor de la *suma mágica* en este caso?



- b) Intenta completar el rompecabezas de forma que la *suma mágica* valga 17. Para ello vuelve a recortar los cuadrados numerados que aparecen en el Anexo 1 y pégalos donde correspondan.





- c) ¿Es posible crear otras *sumas mágicas* usando los números del 1 al 7? Experimenta y explica por qué. Puedes recortar y usar los números disponibles para este apartado en el Anexo 1.
- d) Elabora un póster con todos los resultados que has obtenido en los apartados anteriores y su explicación. Recorta los rompecabezas que has resuelto, pegarlos en dicho póster y explica cómo los has resuelto.

Material

- Tijeras
- Pegamento
- Hojas de papel tamaño A4 para resolver la actividad.
- Hojas de papel tamaño A3 y rotuladores para el póster.

En los anexos VII y VIII, pueden consultarse un plan de clase y la solución de esta actividad, respectivamente.

ANEXO 1

- Recortar para el apartado a)

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

- Recortar para el apartado b)

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

- Recortar para el apartado c)

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

**Actividad nº 8. Criba de Eratóstenes ⁵**

- TIPO: ejercicio
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje basado en el uso de herramientas TIC
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2, 4 y 5	1, 2, 6 y 7	3 y 6

- CONTENIDOS IMPLICADOS: relación de divisibilidad; criterios de divisibilidad
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.1.1, B1.2.1, B1.2.2, B1.2.3, B1.2.4, B1.4.1, B1.4.2, B1.5.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.8.4, B1.9.1, B1.10.1, B2.2.1 y B2.2.2

❖ La *criba de Eratóstenes* es un algoritmo que permite calcular todos los primos menores que un número determinado. El nombre se debe a su inventor, el matemático griego Eratóstenes (276 a. C.-194 a.C). Utiliza el programa *Excel* para realizar los pasos necesarios para ejecutar el algoritmo, los cuales se indican a continuación:

- a) Distribuye los números del 2 al 100, ambos incluidos, en 6 columnas. Hazlo de forma que el primer elemento de la primera columna sea el 2, el primer elemento de la segunda el 3, y así sucesivamente.
- b) Marca el número 2 y tacha todos sus múltiplos, excepto él mismo, con tres líneas verticales.
- c) Marca el número 3 y tacha todos sus múltiplos, excepto él mismo, con una línea vertical. Algunos de sus múltiplos ya han sido tachados.
- d) Marca el número 5 y tacha todos sus múltiplos, excepto él mismo, con cuatro líneas diagonales. Algunos de sus múltiplos ya han sido tachados.
- e) Marca el número 7 y tacha todos sus múltiplos, excepto él mismo, con tres líneas diagonales. Algunos de sus múltiplos ya han sido tachados.

⁵ Actividad tomada y adaptada de Flores, 1993, pp.96-97.



- f) Finalmente, marca todos los números que no han sido tachados. Estos son todos los números primos menores que 100.

Cuando hayas terminado, envía el archivo de *Excel* por correo electrónico al profesor.

Actividad nº 9. Factorización

- TIPO: ejercicio
- METODOLOGÍA EMPLEADA: tradicional
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
-	-	5, 6, 8 y 9

- CONTENIDOS IMPLICADOS: criterios de divisibilidad; números primos y compuestos; Teorema Fundamental de la Aritmética; descomposición de un número en factores primos
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B2.2.2

- ❖ Expresa cada uno de los siguientes números como un producto de factores primos:

a) 40	b) 52	c) 209
d) 441	e) 675	f) 1147
g) 124	h) 207	i) 210

Actividad nº 10. Cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo

- TIPO: ejercicio
- METODOLOGÍA EMPLEADA: tradicional
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual



■ OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
-	-	6, 8, 9 y 11

- CONTENIDOS IMPLICADOS: criterios de divisibilidad; números primos y compuestos; Teorema Fundamental de la Aritmética; descomposición de un número en factores primos; cálculo del mcd y mcm por aplicación del Teorema Fundamental de la Aritmética; algoritmo de Euclides
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B2.2.2, B2.2.3 y B2.2.4

1) Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

- a) mcm {9, 27} b) mcm {90, 108} c) mcm {405, 320}

2) Calcula el máximo común divisor de los siguientes pares de números

- a) mcd {10, 25} b) mcd {24, 32} c) mcd {78, 135, 252}

3) Calcula el máximo común divisor mediante el algoritmo de Euclides:

- a) mcd {245, 294} b) mcd {598, 715} c) mcd {1870, 499}

4) Calcula con el programa *Excel*:

- a) mcm {201, 509, 677} b) mcm {55, 108, 589, 1025}
d) mcd {342, 702, 1023} e) mcd {5521, 8452, 29548, 55059}

Actividad nº 11. División incompleta⁶

- TIPO: situación-problema

⁶ Actividad tomada de Andonegui, 2006, p. 24.



- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje por investigación/indagación
- FORMA DE REALIZACIÓN: grupal
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2, 4 y 5	1, 6 y 7	9, 10, 11 y 12

- CONTENIDOS IMPLICADOS: algoritmo de la división; Teorema Fundamental de la Aritmética; descomposición de un número en factores primos; definición de máximo común divisor; cálculo del mcd por aplicación del Teorema Fundamental de la Aritmética
 - ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.2.1, B1.2.2, B1.5.1, B1.7.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.9.1, B1.10.1, B1.11.1, B2.2.1, B2.2.2, B2.2.3 y B2.2.4
- ❖ Imagina que estás en clase de matemáticas y borras parcialmente, por error, una división que te hace falta para tus cálculos. Solamente se conservan los sucesivos sustraendos de la división, que son, de arriba hacia abajo, 690, 2415 y 3105. También se ha conservado el resto, que vale 1. ¿Hay alguna forma de calcular el valor del dividendo, divisor y cociente, sin efectuar de nuevo la división? En caso afirmativo, indica cuál es el valor de cada uno de ellos y el procedimiento que has seguido para llegar a la solución.

Nota: Los sustraendos de una división son las cantidades que se van restando sucesivamente. Por ejemplo, en la división:

$$\begin{array}{r}
 527 \quad | \quad 12 \\
 - 48 \quad \quad 43 \\
 \hline
 047 \\
 - 36 \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

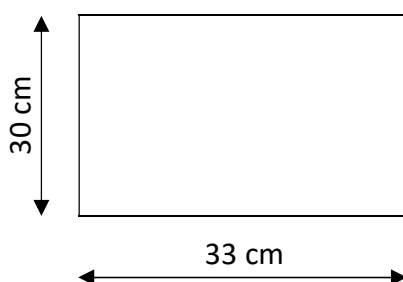
los sustraendos son 48 y 36. Cada uno de ellos se obtiene multiplicando la cifra que se acaba de poner en el cociente por el divisor.

Actividad nº 12. Baldosas ⁷

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje basado en la modelización matemática
- FORMA DE REALIZACIÓN: grupal
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2 y 5	1, 2, 5, 6 y 7	4, 9, 10, 11 y 12

- CONTENIDOS IMPLICADOS: descomposición de un número en factores primos; definición de mínimo común múltiplo; cálculo del mcm por aplicación del Teorema Fundamental de la Aritmética
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.2.1, B1.2.2, B1.5.1, B1.6.1, B1.6.2, B1.6.3, B1.6.4, B1.7.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.8.4, B1.9.1, B1.10.1, B2.2.1, B2.2.2, B2.2.3 y B2.2.4
- ❖ Una empresa constructora recibe pedido de un cliente que desea cubrir con baldosas una parte de su jardín. El cliente pide a la empresa que utilicen unas baldosas que tiene en su casa, sobrantes de una obra anterior, con la intención de ahorrarse el coste de los materiales. Las dimensiones de estas baldosas son:



Este cliente quiere embaldosar una superficie con forma cuadrada. Sabiendo esto, responde a las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cuánto mide el lado del menor cuadrado que se puede construir con estas baldosas, sin tener que contarlas ni cortarlas? Justifica tu respuesta.

⁷ Actividad tomada y adaptada de Roig, Llinares & Penalva, 2010, p. 264.



- 2) ¿Qué otros tamaños pueden construirse usando solamente este tipo de baldosas, sin tener que cortarlas? Justifica tu respuesta.

Actividad nº 13. Matgram⁸

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje basado en juegos
- FORMA DE REALIZACIÓN: grupal
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1 y 2	6 y 7	9, 11 y 12

- CONTENIDOS IMPLICADOS: criterios de divisibilidad; descomposición de un número en factores primos; cálculo del mcd y mcm por aplicación del Teorema Fundamental de la Aritmética
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.8.1, B1.8.2, B2.2.2, B2.2.3, B2.2.4

El *tangram* es un rompecabezas de origen chino. Se obtiene al dividir un cuadrado en siete piezas de forma específica: un cuadrado, un romboide y cinco triángulos. Uniendo estas piezas de distintas maneras podemos obtener una gran variedad de figuras.

Nosotros vamos a usar una variante matemática, conocida como *tangram matemático* o *matgram*, en la que cada pieza tiene una serie de inscripciones. Para ello, debes realizar las siguientes cuestiones:

Pega el *matgram* que aparece en el *Anexo 1* sobre cartulina, recorta las piezas y une los lados de forma que coincida la operación con el resultado. Entre las siguientes figuras se encuentra la solución. ¿Cuál es?

⁸ Actividad tomada y adaptada de Vázquez & Alba (2006) en <https://www.matesymas.es/wp-content/uploads/2019/08/matgram-divisores.pdf>

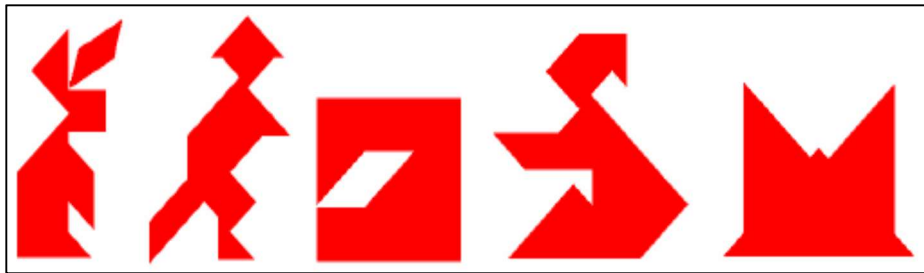


Figura 6.5. Soluciones al matgram (Vázquez & de Alba, 2006, en https://www.matesymas.es/wp-content/uploads/2019/08/matgram_divisores.pdf).

- a) Existen multitud de figuras adicionales que se pueden obtener con el tangram. Aquí aparecen algunos ejemplos:

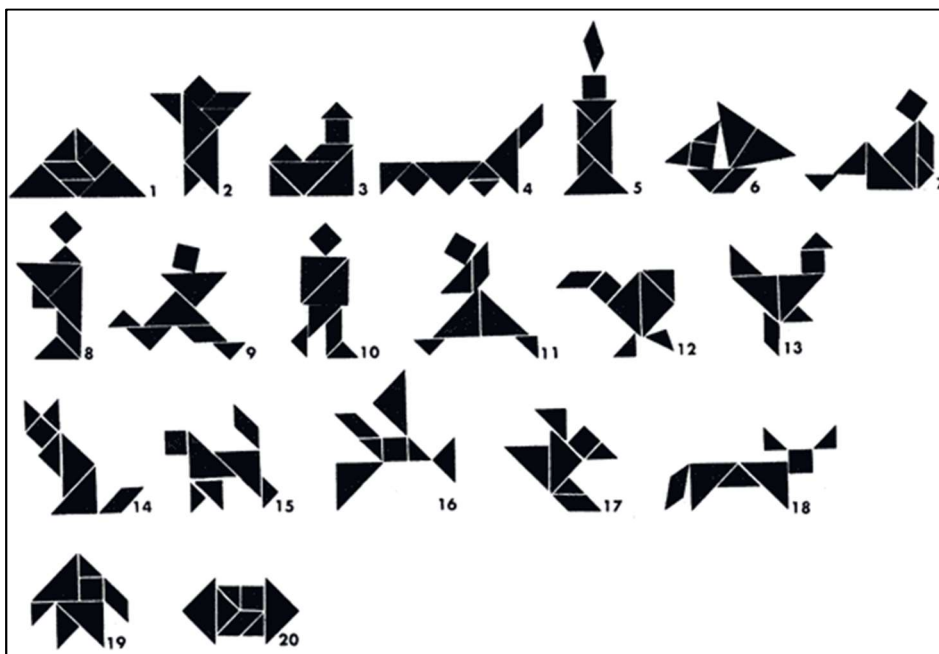


Figura 6.6. Posibles soluciones al matgram (Consortio Parque de las Ciencias, s.f, en http://www.parquedelasciencias.com/educacion-formacion/recursos/hazlo_tu/gimnaisa-mental.html)

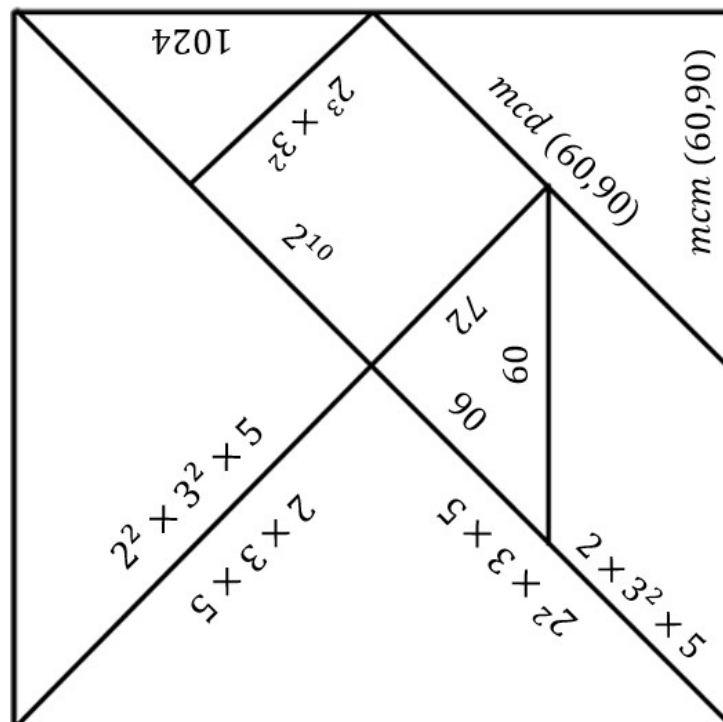
Elabora un *matgram* utilizando como modelo alguna de las figuras anteriores. Escribe en los lados de sus piezas las operaciones y resultados necesarios para resolverlo. Introduce los *matgrams* que habéis creado en un sobre, intercambiadlos entre los distintos grupos y resolved el rompecabezas propuesto por vuestros compañeros. Utiliza el *matgram* en blanco disponible en Anexo 2.

- a) Elabora un póster con las instrucciones del juego, el *matgram* resuelto en el apartado a) y el que has recibido de tus compañeros en el apartado b). Refleja todas las operaciones realizadas.

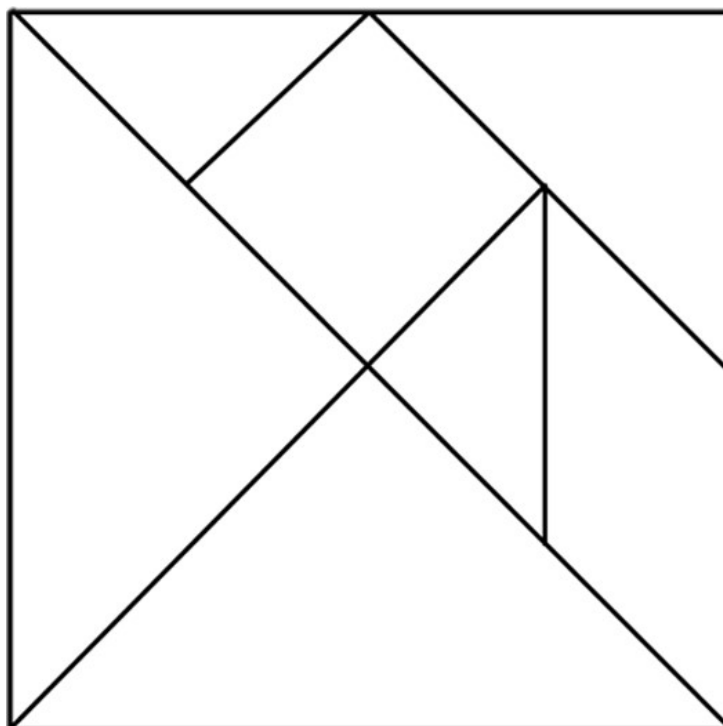


- Tijeras y pegamento
- Cartulinas para realizar las platillas del *tangram*.
- Hojas de papel tamaño A4 para los cálculos
- Hojas de papel tamaño A3 y rotuladores para los pósteres
- Sobres para meter los *matgrams* intercambiables

ANEXO 1



ANEXO 2



Actividad 14. Propuesta de problemas para el concurso matemático de la SAEM Thales

- TIPO: situación-problema; proyecto de modelización
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje basado en la modelización matemática (situación de problematización)
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1 y 3	1, 2, 5, 6 y 7	Depende del problema propuesto

- CONTENIDOS IMPLICADOS: Cualquiera, libre elección
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.4.2, B1.6.1, B1.6.2, B1.6.3, B1.6.4, B1.7.1, B1.8.4 y B1.10.1. La selección de estándares de aprendizaje del bloque 2 dependerá de los contenidos intervinientes en el problema propuesto.
- ❖ Diseña un problema que pueda proponerse para el concurso matemático de la SAEM Thales, celebrado cada año en nuestro centro. El problema debe estar



contextualizado en el ámbito de la divisibilidad, para lo que tendrán que emplearse algunos de los contenidos estudiados en la unidad para su resolución, además de otros que consideres necesarios.

Nota: esta actividad debe entregarse el día que se realice la prueba de evaluación escrita.

6.9. Atención a la diversidad

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, las Administraciones educativas tienen la obligación de realizar los procedimientos oportunos para garantizar la equidad e inclusión de aquellas personas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria, bien sea por presentar dificultades específicas de aprendizaje, trastornos, incorporación tardía al sistema educativo, características personales, sobredotación intelectual o algún tipo de discapacidad. Estos procedimientos tendrán como último fin que el alumno desarrolle lo máximo posible sus capacidades y alcance los objetivos generales de etapa, comunes para todos los alumnos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 175).

Consecuentemente, en este apartado, se ofrecen algunas estrategias y tipos de actividades para alumnos que muestren un progreso por debajo del esperado, así como aquellos que se encuentren por encima de él.

6.9.1. Estrategias y actividades para alumnos que tengan un progreso menor al esperado

Cuando un alumno presente dificultades de aprendizaje en un área determinada, que no sean consecuencia de problemas sensoriales ni discapacidades intelectuales graves, y estos impliquen un retraso curricular de hasta dos cursos, el profesor podrá llevar a cabo una Adaptación Curricular No Significativa (ACNS) (Departamento de Orientación del IES Politécnico Cartagena, 2011, p. 9; Departamento de Orientación del Colegio Antonio Gala, 2018, p. 34).

Por otra parte, es muy importante, en todo momento, evitar el llamado *efecto Pigmalión* (Rosenthal & Jacobson, 1968), por el que las expectativas que tienen los docentes sobre sus alumnos influyen en el rendimiento de los mismos.

Además, si no se llevan a cabo las actuaciones oportunas para atender estas necesidades educativas, los continuos fracasos del discente pueden provocarle una *indefensión aprendida*, esto es, el alumno pasa de evitar el fracaso a terminar asumiéndolo como algo normal en su vida, circunstancia que influye negativamente en el desarrollo psicológico y en la sensación de autorrealización.



Otras estrategias que pueden aplicarse en estos casos, a la hora de realizar las actividades propuestas en apartado 6.8, son el *aprendizaje cooperativo* o la *tutoría de iguales*. En la primera de ellas, los alumnos son conscientes de que pueden conseguir sus metas si los compañeros también alcanzan las suyas; por ejemplo, en la técnica del *jigsaw classroom*, se divide la actividad en tantas partes como miembros formen el grupo, de forma que a cada uno de ellos se le asigna una parte acorde a su nivel de progreso. En la segunda de ellas, puede designarse a un estudiante con un nivel avanzado de progreso como tutor de los demás, de forma que deba ayudar al resto de compañeros, con un nivel inferior, a realizar las tareas, para poder así resolver la actividad en su conjunto.

Por último, se debería emplear un esfuerzo adicional para que, en la medida de lo posible, estos alumnos sustituyeran el aprendizaje basado en un método de procesamiento superficial por aquel fundamentado en un método de procesamiento profundo, es decir, centrarse en *entender* y no en *memorizar*.

Seguidamente, se muestran algunos ejemplos de actividades de refuerzo apropiadas para alumnos con las características previamente mencionadas.

Actividad 1. División exacta e inexacta

El algoritmo de la división establece que, en una división, el dividendo puede obtenerse como el producto del divisor por el cociente, más el resto. Esto es:

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}.$$

Si el **resto es 0**, se dice que la división es **exacta**. En cambio, si el **resto es un número distinto de 0**, la división es **inexacta**.

En base a lo explicado anteriormente, realiza los siguientes apartados:

1) Determina si estas divisiones son exactas o inexactas.

a) $452 \div 2$

b) $3507 \div 5$

c) $120.704 \div 23$

2) En cada una de las divisiones anteriores, emplea el algoritmo de la división para comprobar que es posible obtener el dividendo como el producto del divisor por el cociente, más el resto.

**Actividad 2. Relación de divisibilidad**

Se dice que **dos números**, a y b , están **relacionados mediante la relación de divisibilidad** cuando el **resto** resultante de dividir el mayor de ellos entre el menor es **cero**. En este caso, se puede decir que a **divide** a b ; o a **es divisor** de b ; o a **es factor** de b .

Si te das cuenta, la **palabra divisor** puede emplearse con **dos significados** diferentes: el primero de ellos es el que se vio en la *Actividad 1*, donde se empleaba este término para designar un **elemento de la operación división**; el otro significado (ser divisor de) es el que se emplea para decir que dos elementos están relacionados mediante la **relación de divisibilidad**, tal y como se ha explicado anteriormente.

Del mismo modo, un **factor** puede referirse a los **números que se multiplican** en la operación producto, pero también adquiere el significado de **divisor** cuando se habla en términos de la relación de divisibilidad.

Teniendo en cuenta esto, responde a estas cuestiones:

- 1) Determina si están relacionados por la relación de divisibilidad estos números:

a) 5.604 y 4b) 23.980 y 6c) 32.923 y 41
- 2) Considerando un divisor o factor como un elemento que expresa que dos números están relacionados por la relación de divisibilidad, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 4 es divisor/factor de 5.604.

b) 6 es divisor/factor de 23.980.

c) 41 es divisor/factor de 32.923.

6.9.2. Estrategias y actividades para alumnos que tengan un progreso superior al esperado

Este tipo de alumnado posee una gran capacidad de razonamiento, asimilan con rapidez y poco esfuerzo los contenidos y advierten relaciones poco usuales o demasiado avanzadas para su edad cronológica. La presencia en el aula de estudiantes con altas capacidades puede ser útil para aplicar las estrategias de aprendizaje colaborativo o tutoría entre iguales, donde ellos adquieran el papel de mentores y ayuden a sus compañeros a superar sus dificultades.

Por otra parte, es necesario atender las necesidades educativas de estos alumnos, para lo cual pueden proponerse actividades de ampliación o incluso la flexibilización del período de escolarización.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de tipos de actividades que podrían ser útiles para estudiantes de estas características.

Actividad de ampliación 1. Gatos y gatitos⁹

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: metodología basada en la modelización matemática
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS:

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1, 2 y 5	1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7	3

- CONTENIDOS IMPLICADOS: múltiplos de un número
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.2.1, B1.2.2, B1.2.4, B1.5.1, B1.5.2, B1.6.2, B1.6.3, B1.6.4, B1.7.1, B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.8.4, B1.9.1, B1.10.1, B1.11.1, B1.12.1 y B2.2.1

A continuación, se muestra un cartel publicitario creado por una organización que cuida de gatos callejeros.



Figura 6.7. Cartel publicitario (Thompson *et al.*, 2007, en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/cats_and_kittens_v3_1.pdf).

⁹ Actividad tomada y adaptada de Thompson *et al.* (2007), en https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/assessment/tasks/pdf/cats_and_kittens_v3_1.pdf



¿Consideras que la información proporcionada por este cartel puede ser verdadera?
¿Puede una gata dar a luz a tantos gatitos, tal y como se menciona? Realiza los cálculos necesarios para demostrarlo y elabora un informe en el que indiques el proceso de resolución. Para responder a esta pregunta, necesitarás algunos de los siguientes datos sobre la vida de los gatos:

- Duración del embarazo: 2 meses;
- Número medio de partos que tiene una gata al año: 3;
- Número de gatos que nacen en cada parto: entre 4 y 6;
- Edad a la que una gata puede quedarse embarazada por primera vez: 4 meses;
- Edad a partir de la cual una gata no puede tener más partos: 10 años.

Actividad de ampliación 2. Valor oculto¹⁰

- TIPO: situación-problema
- METODOLOGÍA EMPLEADA: aprendizaje por investigación/indagación
- FORMA DE REALIZACIÓN: individual
- OBJETIVOS CUBIERTOS

Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel
1 y 5	1, 6, 7	6

- CONTENIDOS IMPLICADOS: propiedades de las potencias; múltiplos de un número; criterios de divisibilidad
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: B1.8.1, B1.8.2, B1.8.3, B1.8.4, B1.8.9, B1.10.1, B2.1.2, B2.2.2, B2.2.4

Observa con atención la siguiente suma:

$$[3 \cdot (230 + A)]^2 = 492.80A$$

¿Cuál es el valor de la cifra A ? Explica cómo lo has averiguado.

¹⁰ Actividad tomada de University of Cambridge (1997), en <https://nrich.maths.org/619>



6.10. Temporalización

SEMANA 1	Sesión 1	Algoritmo de la división en $\mathbb{N}$; actividad 1
	Sesión 2	Sistemas de numeración; actividad 2
	Sesión 3	Relación de divisibilidad: múltiplos y divisores de un número, múltiplos y divisores comunes; actividad 3
	Sesión 4	Actividad 4
SEMANA 2	Sesión 5	Criterios de divisibilidad; actividad 5
	Sesión 6	Repaso de contenidos anteriores; actividad 6
	Sesión 7	Actividad 7
	Sesión 8	Números primos y compuestos; criba de Eratóstenes; actividad 8
SEMANA 3	Sesión 9	Teorema Fundamental de la Aritmética; descomposición de un número en factores primos, actividad 9
	Sesión 10	Definición de mcd y mcm; cálculo del mcd y mcm por descomposición factorial; algoritmo de Euclides
	Sesión 11	Actividad 10
	Sesión 12	Actividad 11; actividad 12
SEMANA 4	Sesión 13	Actividad 13
	Sesión 14	Entrega de la actividad 14; prueba de evaluación

Tabla 6.2. Cronograma.

La Orden 14 de Julio de 2016 fija el número de horas lectivas semanales de la asignatura de Matemáticas, para el primer curso de la ESO, en 4 (Consejería de Educación, 2016, p. 351). Las sesiones que se estiman necesarias para el desarrollo de la unidad didáctica y el logro de los objetivos ascienden a 14. En la *Tabla 6.2*, se presenta el cronograma diseñado para tal fin.



6.11. Evaluación

Según establece el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, la evaluación del alumno debe realizarse de acuerdo con los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, los cuales determinan el grado de adquisición de las competencias y objetivos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p. 183). *Ergo*, para realizar la evaluación de esta unidad didáctica, se evaluarán los estándares de aprendizaje que aparecen en cada una de las actividades propuestas en el apartado 6.8. La media aritmética de las calificaciones de los estándares correspondientes a un mismo criterio determinará la calificación del propio criterio. Además, en la Orden de 14 de julio de 2016 figuran las competencias clave involucradas en la evaluación de cada criterio, con lo que, al calificar un criterio, se transfiere su calificación a todas y cada una de las competencias que este implica. De esta forma, se crea un perfil competencial del alumno, al que se le pueden asignar niveles de logro. Estos pueden ser *iniciado*, *medio* y *avanzado*.

Para completar la evaluación, se realizará una prueba escrita. Las calificaciones de los estándares evaluados en las actividades se ponderarán al 40%, mientras que los que aparezcan en la prueba de progreso lo harán al 60%.

Aquellas actividades rutinarias, o en las que se emplee una metodología tradicional de realización-corrección, que no sea posible finalizar en las sesiones previstas, serán la tarea que deberán realizar los estudiantes en casa, y tendrán que entregarla al profesor en la sesión inmediatamente posterior.

Por último, se facilita una posible prueba escrita en la siguiente página, diseñada para su realización en la última de las sesiones programadas en el apartado 6.10.

**PRUEBA DE PROGRESO DE DIVISIBILIDAD**

Nombre:	
Apellidos:	

Normas para la realización de la prueba: Dispone de 50 minutos para realizar los ejercicios que se proponen. Está permitido el uso de calculadora científica no programable. No se permite el uso de teléfono móvil o cualquier otro dispositivo electrónico.

Ejercicio 1. Determina el valor de a para que el número $236a$ sea divisible por 5 y 11 a la vez. (Estándares de aprendizaje evaluables: B2.2.1, B2.2.2).

Ejercicio 2. Determina si el año 3.568 será o no bisiesto. (Estándares de aprendizaje evaluables: B2.2.1 y B2.2.2).

Ejercicio 3. Un paciente acude al centro de salud a causa de una determinada dolencia. El médico le receta tres fármacos diferentes. El primero de ellos debe tomarlo cada 6 horas, el segundo, cada 10 y el tercero, cada 12. Suponiendo que inició el tratamiento tomando todos los medicamentos a la vez, ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el paciente tenga que ingerir de nuevo los tres medicamentos a la vez? (Estándares de aprendizaje evaluables: B2.2.2, B2.2.3 y B2.2.4).

Ejercicio 4. Realiza lo que se indica en los siguientes apartados:

- Expresa los números 28 y 35 como producto de factores primos.
- Calcula el mcd {28, 35}.
- Calcula el mcm {28, 35}.
- Multiplica el mcd {28, 35} por el mcm {28, 35}.
- Multiplica 28 por 35.
- ¿Qué conclusión se puede obtener a partir de las operaciones realizadas en los apartados anteriores?

(Estándares de aprendizaje evaluables: B1.7.1, B2.2.1, B2.2.2, B2.2.3 y B2.2.4)



SECCIÓN 7. CONCLUSIONES

En este trabajo, se realiza una aproximación a la situación actual de la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en la Educación Secundaria Obligatoria, en particular, en el conjunto de los números naturales, estudiada en el primer curso.

En la *Sección 2*, se especificaron y detallaron los objetivos que se pretendían alcanzar con la elaboración de esta memoria. En este sentido, se concluyó que el objetivo principal sería *describir y analizar la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, aplicando, para ello, los conocimientos adquiridos durante los estudios del máster*. Este objetivo general se desglosó en cinco objetivos parciales, de forma que la consecución de todos ellos implica el logro del objetivo general. Por tanto, en esta sección, se va a comentar qué es lo que se ha realizado para alcanzar los mencionados objetivos, así como reflexiones finales del proceso de elaboración de esta memoria y posibles líneas de trabajo e indagación futuras que la complementen.

El primero de los objetivos parciales que se propusieron fue **01**. *Poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos en el máster y aplicarlos al estudio de la divisibilidad en Educación Secundaria Obligatoria*. En este sentido, la asignatura del máster *Procesos y Contextos Educativos* proporcionó una visión de la estructura del Sistema Educativo Español, necesaria para contextualizar globalmente el trabajo; en relación con la psicología, la asignatura *Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad* ha permitido proponer algunas estrategias para tratar con aquellos alumnos que tiene un progreso inferior o superior al esperado; la materia *Complementos de Formación Disciplinar en Matemáticas* permitió ampliar los conocimientos matemáticos, muy necesarios para elaborar la fundamentación epistemológica; la planificación, desarrollo e implementación de actividades en el aula fueron instruidas en *Aprendizaje y Enseñanza de la materia de Matemáticas I y II*, junto con algunas ideas sobre marcos teóricos en Didáctica de las Matemáticas, como es el caso del EOS. Dichos contenidos han servido de base para seguir estudiando y ampliando este marco teórico y, así, aplicarlo en el análisis didáctico de los manuales, llevado a cabo en la fundamentación curricular; por último, la primera toma de contacto con la realidad ha sido posible gracias a las *Prácticas Docentes en Centros de Secundaria*, donde he podido constatar que es necesario un avance que permita actualizar los modelos tradicionales de enseñanza y que contribuya a una mayor motivación del estudiante. Por este motivo, se hace indispensable una

apertura hacia otras metodologías, además de la necesidad de la formación continua del profesorado en Didáctica de las Matemáticas.

El siguiente objetivo propuesto fue **02**. *Realizar un análisis didáctico de los contenidos relacionados con la divisibilidad en dos libros de texto seleccionados, de diferentes editoriales, utilizando para ello las nociones de configuración epistémica e idoneidad didáctica proporcionadas por el marco teórico Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, estableciendo una comparativa entre ellos*. Los resultados arrojados por la valoración de las idoneidades cognitiva y epistémica permiten hacer una valoración científica de los manuales seleccionados, según los indicadores y componentes aportados por el EOS.

En primer lugar, tal y como se dijo en la valoración de las idoneidades, existe una omisión de la relación entre el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales ($mcd\{a, b\} \cdot mcm\{a, b\} = a \cdot b$). Asimismo, sería necesario un mayor énfasis en el significado de los objetos mcd y mcm, así como argumentar por qué se toman los exponentes de mayor o menor grado en cada caso. Esto contribuye a que los discentes terminen asociando el concepto de mcd o mcm a un mero procedimiento de cálculo, y no a su verdadero significado matemático, tal y como se defiende en el artículo de Roig, Llinares y Penalva (2010), analizado en la *Sección 4*, dedicada a la fundamentación didáctica. Igualmente, ninguno de los libros propone un método didáctico para calcular todos los números primos menores a uno dado. Únicamente, el primero muestra la criba de Eratóstenes, sin hacer referencia directa a este nombre, pero su ejecución puede resultar poco atractiva. En el artículo de Flores (1993), comentado en el *Anexo V*, se plantea un método basado en una conjetura y demostración que me resultaron muy interesantes.

Por otra parte, para números suficientemente grandes, el procedimiento de cálculo del mcd por descomposición factorial se hace muy engorroso. Ninguno de los libros motiva la necesidad de métodos más eficientes, como el algoritmo de Euclides, el cual facilita los cálculos. Adicionalmente, ninguno de ellos sugiere aplicaciones prácticas de la materia, como puede ser la expresión de números en diferentes sistemas de numeración, basados en el algoritmo de la división. En este sentido, se ha tomado nota para incluir estos conceptos y algoritmos en el diseño de la unidad didáctica, plasmada en la *Sección 6*.

Para terminar, se aprecia la ausencia de actividades de modelización matemática o basadas en juegos; un resumen con las ideas más importantes de la unidad, y diferentes

niveles en las actividades de autoevaluación, de forma que se promueva el acceso al logro en función de las capacidades de cada estudiante.

Respecto a **03**. *Desarrollar los contenidos curriculares relacionados con el tema de divisibilidad que se cursan en Educación Secundaria, y que se encuentran en el temario de las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Secundaria*, ha sido importante, en orden a establecer el significado institucional de referencia en las cuestiones de divisibilidad, recurrir a manuales de matemática superior, tales como el de García-Muñoz (2010). Esto pone de manifiesto que el estudio de las oposiciones constituye una excelente oportunidad para completar la formación teórica del profesorado, siendo un aditamento muy importante y valioso para aquellas personas que no sean matemáticos de carrera.

El objetivo **04** propone *analizar algunas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre divisibilidad, en las que se pongan de manifiesto las dificultades, errores o fenómenos didácticos que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad*. En virtud de esto, el artículo de Roig, Llinares y Penalva (2010, p. 270), concluye que la mayoría de los estudiantes no aplica el algoritmo del cálculo del mcm en base a su verdadero significado matemático y a la comprensión de la estructura multiplicativa de los números naturales, sino que, simplemente, memorizan un procedimiento que asocian al concepto. En una tónica similar, Zazkis (2001, párr. 1), determina que las conexiones existentes en la mente entre los conceptos *múltiplo*, *divisor* o *factor* son mayoritariamente erróneas o muy débiles. Además, alude que las conexiones establecidas en el pasado son mucho más acérrimas que las recientes, por lo que propone atender al conocimiento previo de los estudiantes, de forma que se reduzca al máximo la distancia entre lo que se debe saber y lo que se sabe realmente (Zazkis, 2001, párr. 138). En efecto:

[...] las percepciones existentes en los estudiantes son mucho más fuertes que los conocimientos y prácticas recientes. Un intento por que los estudiantes construyan nuevas conexiones entre conceptos matemáticos puede tener más éxito si dichos conceptos están relacionados con su conocimiento previo (Zazkis, 2001, párr. 136).

La investigación de Zazkis (2001) se realiza con estudiantes del primer curso de magisterio, lo cual sugiere que las conexiones erróneas entre conceptos, así como sus significados, no son subsanados en los sucesivos cursos de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Esto evidencia, una vez más, la necesidad de del docente de recurrir a la Didáctica de las Matemáticas, de forma que conozca los potenciales conflictos semióticos de sus estudiantes y actúe en consecuencia.

Por supuesto, dentro de la fundamentación didáctica realizada, queda una línea abierta hacia una revisión más profunda de la bibliografía de investigación en este campo. En mis prácticas docentes, pude advertir que el profesorado tiende a omitir el empleo de las argumentaciones y demostraciones en sus clases. Las argumentaciones, generalmente, son débiles y se establece una predominancia por los procedimientos. En relación con esto, Godino y Recio (2001) afirman:

Para los currículos, textos y profesores de matemáticas de los niveles de enseñanza primaria, secundaria y universitaria, en general, los teoremas matemáticos son necesariamente verdaderos. Pero las argumentaciones que establecen esa verdad son, en el mejor de los casos, argumentaciones deductivas informales y con frecuencia argumentaciones no deductivas o incluso argumentaciones basadas en criterios externos de autoridad (Godino & Recio. 2001, p. 410).

Schoenfeld (1994) refuerza este punto de vista:

La demostración no es una cosa separable de las matemáticas, tal y como aparece en los currículos; es un componente esencial del hacer, comunicar, y registrar las matemáticas. Y pienso que puede ser incorporada en nuestros currículos, en todos los niveles (Schoenfeld, 1994, p. 76).

Adicionalmente, tuve la impresión de que los docentes prefieren no emplear o realizar demostraciones si éstas no son formales. Según Godino y Recio (2001, p. 410), el razonamiento informal es muy utilizado en todas las ramas del conocimiento, incluso en las matemáticas. Asimismo, estos autores sostienen:

Si, como afirman Garuti, Boero y Lemut (1998, p.345), hay continuidad cognitiva entre la fase de producción de conjeturas y la construcción de demostraciones, puede considerarse que estas formas argumentativas constituyen, en matemáticas, los primeros estadios de la demostración (Godino & Recio, 2001, p. 410).

Con relación al objetivo **05. Diseñar y desarrollar actividades relacionadas con la divisibilidad en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria**, las actividades propuestas han sido proyectadas atendiendo a diferentes metodologías (tradicional, modelización matemática, uso de herramientas TIC, investigación/indagación y aprendizaje basado en juegos). Tal y como mencioné anteriormente, en el desarrollo de mis prácticas docentes, puede comprobar en primera persona cómo es necesario evolucionar de los modelos de enseñanza tradicionales, basados exclusivamente en clases magistrales en las que el alumno es un sujeto pasivo, cuyo único papel queda relegado a un mero receptor y procesador de información. Desde mi humilde punto de vista, considero que he conseguido salvar este obstáculo y que los alumnos podrán alcanzar los objetivos propuestos, a la vez que disfrutan en el proceso de aprendizaje. No obstante, esta parte del trabajo queda abierta y puede ser completada con más actividades específicas para aquellos conflictos semióticos potenciales emanados de la



fundamentación didáctica; o actividades mejor adaptadas y personalizadas a tipos concretos de trastornos en la adolescencia. Pero, cuestiones de espacio y tiempo han sido las causantes de que no se hayan podido desarrollar.

Para finalizar, si tuviera que resumir el proceso de elaboración de este trabajo, lo haría con una sola palabra, «pasión». El docente debe rebosar *pasión* para poder transmitirla a sus alumnos y hacer que estos vean a la matemática como una parte esencial de la ciencia, apreciando la belleza de sus resultados y cómo han perdurado a través del tiempo. En el caso de la divisibilidad, los resultados más básicos fueron establecidos por Euclides alrededor de 300 años antes de Cristo y, 24 siglos después, siguen enseñándose en Educación Primaria, Secundaria y universitaria.



ANEXO I. COMPONENTES E INDICADORES DE LAS IDONEIDADES EPISTÉMICA Y COGNITIVA

1. Idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. - Nivel de lenguaje adecuado a los niños a los que se dirige. - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (definiciones, proposiciones, argumentos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas.

Tabla 8.1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (Godino, 2013, p. 119).



COMPONENTES E INDICADORES DE LAS IDONEIDADES EPISTÉMICA Y COGNITIVA

2. *Idoneidad cognitiva*

Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	▪ Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). ▪ Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	▪ Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. ▪ Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	▪ Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia). ▪ Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. ▪ La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. ▪ Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Tabla 8.2. Componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva (Godino, 2013, p. 121).



ANEXO II. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{N}$

Definición 4.2.1. Sea $\mathbb{N}$ «el conjunto formado por un número infinito de objetos indefinidos llamados *números naturales*» (García, 2010, p. 387):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

A continuación, se construye el conjunto de los números naturales a partir de los llamados *Axiomas o Postulados de Peano* (García, 2010, p. 387):

- *Axioma 1:* $\mathbb{N}$ es un conjunto no vacío. El elemento 0 está incluido en él.
- *Axioma 2:* Si $x \in \mathbb{N}$, entonces $x + 1 \in \mathbb{N}$. Este último se conoce con el nombre de *sucesor de x* .
- *Axioma 3:* El número 0 no es sucesor de ningún $x \in \mathbb{N}$.
- *Axioma 4:* El sucesor de cada $x \in \mathbb{N}$ es único:

$$\text{Si } x, y \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \neq y \Rightarrow x + 1 \neq y + 1.$$

- *Axioma 5:* Sea el subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$, con $A \neq \emptyset$. Si $0 \in A$ y si siempre que $x \in A$, se tiene que $x + 1 \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$.

A partir del *Axioma 5*, se enuncia y demuestra el *principio de inducción*, el cual aparece en la *Proposición 4.2.2*.

Proposición 4.2.2: Principio de inducción

Si $0 \in \mathbb{N}$ cumple una determinada propiedad P , y además se tiene que siempre que $x \in \mathbb{N}$ cumple dicha propiedad P también lo hace el elemento $x + 1 \in \mathbb{N}$, entonces se puede afirmar que todo número natural cumple la propiedad P (García, 2010, p. 388). (Demostración en *Anexo IV*).

Definición 4.2.3. Se define la *operación interna suma* en $\mathbb{N}$ como la aplicación (García, 2010, p. 388):

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

tal que a cada par de números naturales, x e y , le asocia un único número natural, $z = x + y$. Además, esta operación cumple las siguientes reglas:



1) $x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{N}.$

2) $x + (y + 1) = (x + y) + 1, \forall x, y \in \mathbb{N}.$

Proposición 4.2.4. La operación interna suma en $\mathbb{N}$ satisface las propiedades (García, 2010, p. 388):

- Asociativa:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{N}$$

- Conmutativa:

$$x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

- Elemento neutro:

$$\exists 0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x + 0 = x = 0 + x.$$

- Cancelativa:

$$\text{Sean } x, y, z \in \mathbb{N}. \text{ Si } x + y = x + z, \text{ entonces } y = z.$$

Definición 4.2.5. Se define la *operación interna producto* en $\mathbb{N}$ como la aplicación (García, 2010, p. 388):

$$\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N},$$

tal que a cada par de números naturales x e y le asocia un único número natural $z = x \cdot y$. Además, esta operación se rige por las siguientes reglas:

1) $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{N}.$

2) $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x, \forall x, y \in \mathbb{N}.$

Proposición 4.2.6. La operación interna producto en $\mathbb{N}$ satisface las propiedades (García, 2010, p. 389):

- Asociativa:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

- Conmutativa:

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{N}.$$



- Elemento neutro:

$$\exists 1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } 1 \cdot x = x = x \cdot 1, \forall x \in \mathbb{N}.$$

- Elemento cero:

$$\exists 0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0, \forall x \in \mathbb{N}.$$

- Cancelativa:

Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$. Si $x \cdot y = x \cdot z$ y $x \neq 0$, entonces $y = z$.

Proposición 4.2.7. La operación interna suma en $\mathbb{N}$ satisface la propiedad distributiva respecto del producto, esto es (García, 2010, p. 389):

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Definición 4.2.8. Sea $x \in \mathbb{N}$. Se define la *potencia de x* de forma inductiva como (García, 2010, p. 389):

$$x^0 = 1,$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x, \forall x, n \in \mathbb{N}$$

Proposición 4.2.9. La potencia de un número natural x cumple las propiedades:

1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \forall x, n, m \in \mathbb{N}.$

2) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n, \forall x, y, n \in \mathbb{N}.$

3) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}, \forall x, n, m \in \mathbb{N}.$



ANEXO III. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros surge para dar respuesta a problemas que no se pueden resolver en el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, ecuaciones del tipo $x + a = 0$, con $a \in \mathbb{N} - \{0\}$, no podrían ser resueltas mediante el uso de números naturales (García, 2010, p. 399).

En este nuevo conjunto de los números enteros, designado por $\mathbb{Z}$, debe existir una operación interna (+) que sea una extensión de la misma operación interna en $\mathbb{N}$ y que todo elemento tenga un simétrico, denotado por $-a$, $\forall a \in \mathbb{N}$ (García, 2010, p. 399).

4.3.1. Construcción de $\mathbb{Z}$

Un par ordenado es un objeto compuesto por dos elementos en un determinado orden, y se escribe (a, b) . El elemento a recibe el nombre de *primera componente del par* y el elemento b , *segunda componente del par*. Se dice que dos pares ordenados son iguales si ambas componentes son iguales (García, 2010, p. 163).

Definición 4.3.1. Sean dos conjuntos A y B . Se conoce con el nombre de *producto cartesiano de A y B* al conjunto formado por todos los pares ordenados que pueden formarse combinando un elemento de A con otro de B , de forma que la primera componente de cada uno de los pares obtenidos sea un elemento de A y la segunda, un elemento de B (García, 2010, p. 163):

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\},$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m), \dots, (a_n, b_1), (a_n, b_2), \dots, (a_n, b_m)\}.$$

O dicho de otra forma más simple:

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$$

Definición 4.3.2. Sea un conjunto A y el producto cartesiano $A \times A$. Se conoce con el nombre de *relación binaria sobre A* a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times A$, esto es, que $R \subseteq A \times A$. Si $(a_1, a_2) \in R$, entonces se dice que a_1 *está relacionado con a_2 según R* (García, 2010, p. 194).



Definición 4.3.3. Sea el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el resultante de realizar el producto cartesiano de $\mathbb{N}$ consigo mismo:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) / n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Sobre dicho conjunto se define una relación binaria R tal que:

$$(n, m) R (n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'$$

Proposición 4.3.4. La relación binaria R definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una *relación de equivalencia* (García, 2010, p. 400); (Demostración en *Anexo IV*).

Definición 4.3.5. Sea el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y R la relación de equivalencia definida anteriormente. Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se llama *clase de equivalencia del elemento (n, m)* o *clase asociada a (n, m) respecto de la relación R* , y se escribe $[(n, m)]$, al conjunto de todos los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relacionados con (n, m) (Anzola et al., 1976, p.14). Es decir:

$$[(n, m)] = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (x, y) R (n, m)\}.$$

Proposición 4.3.6. Las clases de equivalencia cumplen cuatro propiedades, las cuales se enuncian a continuación:

- a) Ninguna clase de equivalencia es vacía (Anzola et al., 1976, p.14).
- b) $(p, q) R (n, m) \Leftrightarrow [(p, q)] = [(n, m)]$.
- c) «La intersección de dos clases de equivalencia distintas es vacía» (Anzola et al., 1976, p. 14).
- d) Si R es una relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la unión de todas las clases de equivalencia respecto de la relación R es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Anzola et al., 1976, p. 14). (Demostración en *Anexo IV*).

Definición 4.3.7. Sea el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y R , una relación de equivalencia definida sobre dicho conjunto. Se denomina *conjunto cociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para la relación R* , y se escribe $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$, al conjunto que contiene todas las clases de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ determinadas por R (Anzola et al., 1976, p. 15; García, 2010, p. 195).

Definición 4.3.8. Se conoce con el nombre de *número entero* a cada una de las clases de equivalencia obtenidas al definir la relación de equivalencia R sobre el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



Asimismo, se denomina *conjunto de los números enteros*, y se designa por $\mathbb{Z}$, al conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$ (García, 2010, p. 400). Es decir:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R = \{[(n, m)] / (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\},$$

donde:

$$[(n, m)] = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (x, y) R (n, m)\} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + m = y + n\}.$$

Proposición 4.3.9. Cualquier elemento $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ determina un número entero x tal que $x = a - b$ (Centro de Estudios Académicos a Distancia, s.f, p. 7)

Proposición 4.3.10. Sean dos pares ordenados (a, b) y $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $(a, b) R (c, d)$. Si se impone que $a = c + e$, $\forall e \in \mathbb{N}$, implica que $b = d + e$. Análogamente, si $c = a + e$, entonces $d = b + e$ (Demostración en Anexo IV).

Definición 4.3.11. Si se consideran como representantes de cada una de las clases de equivalencia obtenidas, al aplicar la relación R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a aquellos elementos que tienen alguna o ambas componentes nulas, se pueden distinguir tres tipos de clases diferentes (García, 2010, p. 400):

$$\begin{aligned} 1) \quad [(0, 0)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (x, y) R (0, 0)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + 0 = y + 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x = y\}. \end{aligned}$$

Si se toma $x = y = k$:

$$[(0, 0)] = \{(k, k) / k \in \mathbb{N}\}.$$

Esta clase de equivalencia es un número entero denotado por 0 (García, 2010, p. 400).

$$\begin{aligned} 2) \quad [(a, 0)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (x, y) R (a, 0)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + 0 = y + a\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x = y + a\}. \end{aligned}$$

Si se toma $y = k$:

$$[(a, 0)] = \{(k + a, k) / k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Esta clase de equivalencia es lo que se denomina un número *entero positivo*, y se denota por a , $\forall a \in \mathbb{N} - \{0\}$. Entonces, el conjunto:



$$\mathbb{Z}^+ = \{[(a, 0)] / a \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

será el que contenga a todos los enteros positivos (García, 2010, p. 400).

$$\begin{aligned} 3) [(0, a)] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (x, y) R (0, a)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + a = y + 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + a = y\}. \end{aligned}$$

Si $x = k$:

$$[(0, a)] = \{(k, k + a) / k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Esta clase de equivalencia es lo que se denomina un número *entero negativo*, denotado por $-a$, $\forall a \in \mathbb{N} - \{0\}$. Entonces, el conjunto:

$$\mathbb{Z}^- = \{[(0, a)] / a \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

será el que contenga a todos los enteros negativos (García, 2010, p. 400).

Proposición 4.3.12.: La definición anterior puede generalizarse para cualquier clase de equivalencia $[(a, b)]$, de modo que:

$$[(a, b)] = \begin{cases} [(a - b, 0)], & \text{si } a \geq b, \\ [(0, b - a)], & \text{si } a < b. \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

(Demostración en *Anexo IV*).

Definición 4.3.13. Con todo lo visto hasta ahora, se define el conjunto de los números enteros como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

4.3.2. El grupo abeliano aditivo de los números enteros

Definición 4.3.14. Se define en $\mathbb{Z}$ la *operación interna suma* como la aplicación (García, 2010, p. 401):

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z},$$

tal que a un par de números enteros a, b le asocia un único número entero $c = a + b$. Si estos números se expresan como representantes de clase, la operación interna suma se define como:



$$(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$$

Se distinguen tres casos en la suma de números enteros:

1) Suma de dos números enteros positivos.

$$a + b = [(a, 0)] + [(b, 0)] = [(a + b, 0)]$$

Se aplica la *Proposición 4.3.9*:

$$[(a + b, 0)] = a + b - 0 = a + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

2) Suma de dos números enteros negativos.

$$(-a) + (-b) = [(0, a)] + [(0, b)] = [(0, a + b)] = 0 - (a + b) = -a - b, \\ \forall a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$$

3) Suma de un número positivo con otro entero negativo.

$$a + (-b) = [(a, 0)] + [(0, b)] = [(a, b)]$$

Se aplica la *Proposición 4.3.12*:

$$[(a, b)] = \begin{cases} [(a - b, 0)], & \text{si } a \geq b, \\ [(0, b - a)], & \text{si } a < b. \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Proposición 4.3.15. La operación interna suma en $\mathbb{Z}$ no depende de los representantes de clase elegidos (García, 2010, p. 407); (Demostración en *Anexo IV*).

Proposición 4.3.16. La operación interna suma cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento simétrico y cancelativa (García, 2010, p. 401):

▪ Asociativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

▪ Conmutativa:

$$a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

▪ Elemento neutro:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a + 0 = a = 0 + a.$$



- Elemento simétrico:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a + (-a) = 0.$$

- Cancelativa:

$$\text{Sean } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Si } a + c = b + c, \text{ entonces } a = b.$$

(Demostración en *Anexo IV*).

Proposición 4.3.17. El simétrico de un elemento cualquiera en el conjunto $\mathbb{Z}$ es único (García, 2010, p. 401).

Proposición 4.3.18. Sea un conjunto A y una operación interna $*$ definida sobre A . Se dice que el par $(A, *)$ es una estructura algebraica de tipo *grupo conmutativo* o *abeliano* si la operación interna $*$ verifica las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento simétrico (García, 2010, p. 407).

Proposición 4.3.19. El par $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Demostración. La operación interna suma $(+)$ sobre $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento simétrico, lo que hace del par $(\mathbb{Z}, +)$ un grupo conmutativo o abeliano.

Definición 4.3.20. Existe una operación interna en $\mathbb{Z}$, llamada *resta*, definida por la aplicación $-: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ de forma que a un par de números enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ le asocia otro número $c \in \mathbb{Z}$ dado por la suma del primero y el simétrico del segundo, es decir:

$$c = a + (-b).$$

Proposición 4.3.21. La *operación interna resta* no cumple la propiedad conmutativa ni asociativa.

4.3.3. El monoide conmutativo multiplicativo de los números enteros

Definición 4.3.22. Se define en $\mathbb{Z}$ la *operación interna producto* como la aplicación (García, 2010, pp. 401-402):

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z},$$



tal que a un par de números enteros a, b le asocia un único número entero $c = a \cdot b$. Si estos números se expresan como representantes de clase, (n, m) y (p, q) , el producto de ambos es otro número entero de la forma:

$$(n, m) \cdot (p, q) = (n \cdot p + m \cdot q, n \cdot q + m \cdot p)$$

Se distinguen tres casos en la multiplicación de números enteros:

a) Producto de dos números enteros positivos:

$$a \cdot b = [(a, 0)] \cdot [(b, 0)] = [(a \cdot b, 0)] = (a \cdot b) - 0 = a \cdot b, \forall a, b \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

b) Producto de dos números enteros negativos:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= [(0, a)] \cdot [(0, b)] = [(a \cdot b, 0)] = (a \cdot b) - 0 = \\ &= (a \cdot b), \forall a, b \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{aligned}$$

c) Producto de un número entero positivo y otro entero negativo (o viceversa):

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= [(a, 0)] \cdot [(0, b)] = [(0, a \cdot b)] = 0 - (a \cdot b) = \\ &= -(a \cdot b), \forall a, b \in \mathbb{N} - \{0\}. \\ (-a) \cdot b &= [(0, a)] \cdot [(b, 0)] = [(0, a \cdot b)] = 0 - (a \cdot b) \\ &= -(a \cdot b), \forall a, b \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{aligned}$$

Proposición 4.3.23. La operación interna producto en $\mathbb{Z}$ no depende de los representantes de clase elegidos.

Proposición 4.3.24. La operación interna producto en $\mathbb{Z}$ cumple las siguientes propiedades (García, 2010, p. 402):

▪ Asociativa:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

▪ Conmutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$



- Elemento neutro:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists e \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a \cdot e = a = e \cdot a.$$

- Elemento cero:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 0 \cdot x = 0 = x \cdot 0.$$

- Cancelativa:

$$\text{Sean } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Si } a \cdot c = b \cdot c \text{ y } c \neq 0, \text{ entonces } a = b.$$

- Dominio de integridad:

$$\text{Si } a \cdot b = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

- Regla de signos:

- $a \cdot (-b) = -(a \cdot b),$

- $(-a) \cdot b = -(a \cdot b),$

- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Proposición 4.3.25. La operación interna suma en $\mathbb{Z}$ verifica la propiedad distributiva respecto del producto, es decir (García, 2010, p. 402):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Definición 4.3.26. Sea A un conjunto y la operación binaria interna $*$ definida sobre dicho conjunto. Se dice que el par $(A, *)$ es un monoide conmutativo si la operación interna $*$ satisface las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro.

Proposición 4.3.27. El par $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es una estructura algebraica de tipo monoide conmutativo.

Demostración. Según la *Proposición 4.3.24*, la operación interna $\cdot$ definida sobre $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro, lo que hace de $(\mathbb{Z}, \cdot)$ un monoide conmutativo.



4.3.4. El anillo unitario conmutativo de los números enteros

Definición 4.3.28. Sea un conjunto A y dos operaciones binarias internas, $+$ y $\cdot$, definidas sobre dicho conjunto. Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo unitario conmutativo si se verifican las siguientes tres condiciones a la vez (García, 2010, pp. 556-557):

- El par $(A, +)$ constituye un grupo abeliano, es decir, la operación interna $+$ cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento simétrico.
- El par $(A, \cdot)$ constituye un monoide conmutativo, es decir, la operación interna $\cdot$ verifica las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro.
- La operación interna $+$ definida sobre A satisface la propiedad distributiva respecto de la operación interna $\cdot$.

Proposición 4.3.29. La terna $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es una estructura algebraica de tipo anillo unitario conmutativo.

Demostración. Se demostró en la *Proposición 4.3.19* que el par $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano y, según la *Proposición 4.3.27*, el par $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es un monoide conmutativo. Adicionalmente, la *Proposición 4.3.25* establece que la suma de números enteros cumple la propiedad distributiva respecto del producto. En consecuencia, la terna $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo unitario conmutativo.

4.3.5. Ideales

Definición 4.3.30. Sea A el anillo $(A, +, \cdot)$. Se dice que $S \subseteq A$ es un *subanillo de A* si el par $(S, +)$ es un subgrupo de $(A, +)$ y si la operación interna $\cdot$ restringida a S es cerrada (Dorronsoro & Hernández, 1999, p. 197).

Definición 4.3.31. Sea A un anillo conmutativo y sea I un subanillo de A . Se dice que I es un *ideal de A* si $\forall i \in I$ y $\forall a \in A$ se cumple que $a \cdot i \in I$ (Ordóñez, 2018, p. 62).

Definición 4.3.32. Sea A el anillo conmutativo $(A, +, \cdot)$. Aquellos ideales que son generados por un único elemento $a \in A$ se denominan *ideales principales* (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 12).

Definición 4.3.33. Se conoce con el nombre de *dominio de ideales principales* (DIP) a todo anillo conmutativo que únicamente posee ideales principales (Ordóñez, 2018, p. 62).



Definición 4.3.34. Sea el anillo unitario conmutativo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y sea I un subconjunto de $\mathbb{Z}$, $I \subseteq \mathbb{Z}$. Se dice que I es un ideal de $\mathbb{Z}$ si cumple estas dos condiciones (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 11; Dorronsoro & Hernández, 1999, p. 197):

- 1) Si x e y pertenecen a I , entonces $x - y \in I$,
- 2) $a \cdot i \in I, \forall a \in \mathbb{Z}, \forall i \in I$.

Proposición 4.3.35. Todos los ideales, en el anillo unitario conmutativo de $\mathbb{Z}$, son de la forma:

$$I = \langle a \rangle = \{x \in \mathbb{Z} / a \mid x\},$$

donde $a \mid x$ significa que el elemento a divide a x . Este elemento a recibe el nombre de *base positiva del ideal I* y se corresponde con el menor número natural distinto de cero que es generador de dicho ideal. Por aplicación de la *Definición 4.3.33*, se puede afirmar que $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales (DIP).

Definición 4.3.36. Los ideales $\langle 0 \rangle$ y $\langle 1 \rangle$ reciben el nombre de *ideales impropios*. El resto son denominados *ideales propios* (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 12).

Definición 4.3.37. Se definen dos operaciones con ideales en $\mathbb{Z}$:

$$I = \langle a \rangle = \{x \in \mathbb{Z} / a \mid x\},$$

$$I' = \langle b \rangle = \{y \in \mathbb{Z} / b \mid y\},$$

$$\langle a \rangle + \langle b \rangle = \{x + y \in \mathbb{Z} / x \in \langle a \rangle, y \in \langle b \rangle\},$$

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{w \in \mathbb{Z} / w \in \langle a \rangle \text{ y } w \in \langle b \rangle\}.$$

Los ideales:

$$\langle 3 \rangle = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \dots\},$$

$$\langle 4 \rangle = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, \dots\}$$

contienen al ideal $\langle 12 \rangle = \{12, 24, 36, 48, \dots\}$, es decir, $\langle 12 \rangle \subseteq \langle 3 \rangle$ y $\langle 12 \rangle \subseteq \langle 4 \rangle$. Esto permite formar cadenas de ideales, tal y como se muestra en el *diagrama de Hasse* de la *Figura 10.1*:

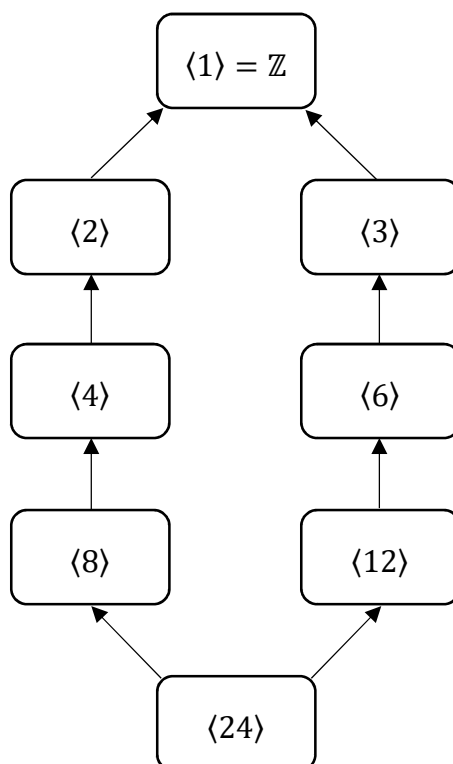


Figura 10.1. Cadena de ideales.

Entonces, los DIP establecen un orden por medio de las cadenas de ideales, donde los primos quedan determinados por los maximales (Ordóñez, 2018, p. 63).

4.3.6. Orden en $\mathbb{Z}$

Definición 4.3.38. Sea G una relación binaria definida sobre un conjunto A . Se dice que G es una *relación de orden* si cumple a la vez las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Esta relación de orden, se denota por $\leq$. Por ejemplo, al escribir $x \leq y$, se está indicando que x es menor o igual que y , cuando el par $(x, y) \in G$ (García, 2010, p. 196).

Definición 4.3.39. Sea G una relación de orden definida sobre un conjunto A . Se dice que A es un *conjunto ordenado* si sobre él se define una relación de orden (García, 2010, p. 196).

Definición 4.3.40. Se define en $\mathbb{Z}$ la relación de orden (García, 2010, p. 402):

$$G = \{(a, b) / b - a \in \mathbb{N}\}.$$



Al aplicar la *Definición 4.3.38*, se puede escribir que $a \leq b$, esto es, a es menor o igual que b .

Proposición 4.3.41. $\mathbb{Z}$ es un conjunto ordenado.

Demostración. La definición anterior establece una relación de orden en $\mathbb{Z}$. Por aplicación de la *Definición 4.3.39*, se puede afirmar que $\mathbb{Z}$ es un conjunto ordenado.

Definición 4.3.42. Sea un conjunto A , dos elementos $x, y \in A$ y una relación de orden G definida sobre dicho conjunto. Se dice que x e y son *comparables por la relación de orden G* cuando al menos uno de los pares (x, y) o (y, x) pertenecen a G .

Definición 4.3.43. Sea A un conjunto y G una relación de orden definida sobre A . Si $\forall x, y \in A$, x e y son comparables, entonces G es un orden total. Si esto se cumple, se dice que A es un *conjunto totalmente ordenado*. En caso contrario, G es un *orden parcial* y se dice que A es un *conjunto parcialmente ordenado* (García, 2010, p. 196).

Definición 4.3.44. Sea A un conjunto ordenado, G una relación de orden sobre A y B un subconjunto de A , $B \subseteq A$. Se dice que B está *acotado superiormente* si:

$$\exists a \in A \text{ tal que } b \leq a, \forall b \in B.$$

El elemento a se conoce con el nombre de *cota superior de B* . Por otra parte, se dice que B está *acotado inferiormente* si:

$$\exists c \in A \text{ tal que } c \leq b, \forall b \in B.$$

El elemento c se conoce con el nombre de *cota inferior de B* . Si el subconjunto B posee cota superior e inferior, se dice que B está acotado o es un *conjunto acotado* (García, 2010, p. 197).

Definición 4.3.45. Sea A un conjunto ordenado y sea B un subconjunto de A . El elemento $b \in B$ se denomina *máximo de B* si es cota superior de B . En otras palabras, el elemento b es máximo del subconjunto $B \subseteq A$ si $b \in B$ y, adicionalmente, b es cota superior del subconjunto B . Análogamente, el elemento $c \in B$ es el *mínimo de B* si c es cota inferior de B (García, 2010, p. 197).

Definición 4.3.46. Sea un conjunto A . Se dice que A está *bien ordenado* si cualquier subconjunto no vacío de A posee un mínimo (García, 2010, p. 197).



Proposición 4.3.47. El conjunto $\mathbb{Z}$, con la relación de orden establecida en la *Definición 4.3.40*, es un conjunto totalmente ordenado, pero no está bien ordenado (García, 2010, pp. 402-403).

Proposición 4.3.48. El orden anterior definido en $\mathbb{Z}$ es (García, 2010, p. 403):

- 1) Compatible con la suma de números enteros;

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Z}.$$

- 2) Compatible con el producto de enteros positivos y se invierte si se multiplica por un entero negativo;

$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c, & \forall c \in \mathbb{N} - \{0\}, \\ a \cdot c \geq b \cdot c, & \forall c \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

4.3.7. Valor absoluto en $\mathbb{Z}$

Definición 4.3.49. La aplicación

$$|-|: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}, |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -x, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

se conoce con el nombre de *valor absoluto* de un número entero (García, 2010, p. 403).

Proposición 4.3.50. La aplicación *valor absoluto* verifica estas seis propiedades (García, 2010, p. 403):

- 1) Si $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$, entonces $x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$
- 2) $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{Z}$
- 3) $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{Z}$
- 4) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$, con $x, y \in \mathbb{Z}$
- 5) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}$
- 6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}$



ANEXO IV. DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS COMPLEMENTARIAS

1. *Proposición 4.2.2. Principio de inducción*

Si $0 \in \mathbb{N}$ cumple una determinada propiedad P , y además se tiene que siempre que $x \in \mathbb{N}$ cumple dicha propiedad P también lo hace el elemento $x + 1 \in \mathbb{N}$, entonces se puede afirmar que todo número natural cumple la propiedad P . (García, 2010, p. 388).

Demostración. Sea el subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

$$A = \{a \in \mathbb{N} / a \text{ cumple la propiedad } P\}$$

Aplicamos a este subconjunto el *Axioma 5* de Peano, también conocido con *Axioma de inducción*. Como 0 cumple la propiedad P , entonces $0 \in A$. Puesto que si $a \in A$, entonces su sucesor $a + 1 \in A$, al cumplirse estas condiciones, el *Axioma 5* asegura que $A = \mathbb{N}$ y, consecuentemente, todos los números naturales cumplirán la propiedad P (García, 2010, p. 390).

■

2. *Proposición 4.3.4*

La relación binaria R definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una relación de equivalencia (García, 2010, p. 400).

Demostración. Una relación binaria R es de equivalencia cuando cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

a) Reflexividad: R será reflexiva si $\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se tiene que $(n, m) R (n, m)$. Si aplicamos la *Definición 4.3.3* obtenemos que:

$$(n, m) R (n, m) \Leftrightarrow n + m = m + n.$$

Aplicamos la propiedad conmutativa de los números naturales al segundo miembro, obteniendo que $m + n = n + m$. Así pues, R es reflexiva.

b) Simetría: Para que R sea simétrica, tiene que cumplirse que si un elemento (n, m) está relacionado con otro (n', m') , este último también está relacionado con el primero (Anzola et al., 1976, p. 13).

$$(n, m) R (n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'.$$



Si se aplica la propiedad conmutativa de los números naturales a ambos miembros se tiene que $n' + m = m' + n$. Podemos comprobar que esta expresión es la relación binaria $(n', m') R (n, m)$. Por tanto, R es simétrica.

c) Transitividad: R será transitiva si $\forall (n, m), (p, q), (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que:

$$\left. \begin{array}{l} (n, m) R (p, q) \\ (p, q) R (r, s) \end{array} \right\} \Rightarrow (n, m) R (r, s)$$

$$\left. \begin{array}{l} (n, m) R (p, q) \Leftrightarrow n + q = m + p \\ (p, q) R (r, s) \Leftrightarrow p + s = q + r \end{array} \right\}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$n + p + q + s = m + q + p + r$$

Aplicamos la propiedad cancelativa de $\mathbb{N}$:

$$n + s = m + r$$

Y esto último se corresponde con la relación binaria $(n, m) R (r, s)$. Por tanto, R es transitiva.

Puesto que R cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, podemos afirmar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

■

3. Proposición 4.3.6.

Las clases de equivalencia cumplen cuatro propiedades, las cuales se enuncian a continuación:

a) Ninguna clase de equivalencia es vacía (Anzola *et al.*, 1976, p. 14).

Demostración. A $[(n, m)]$ pertenece al menos el elemento (n, m) , ya que por satisfacer R la propiedad reflexiva, se cumple que (Anzola *et al.*, 1976, p. 14):

$$(n, m) R (n, m), \forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

■

b) $(p, q) R (n, m) \Leftrightarrow [(p, q)] = [(n, m)]$.



Demostración. Sea $(x, y) \in [(p, q)]$. Por la propiedad a), se demuestra que $(x, y) R (p, q)$. Como $(p, q) R (n, m)$ y R cumple la propiedad transitiva, entonces $(x, y) R (n, m)$ y, en consecuencia, $(x, y) \in [(n, m)]$. Por tanto, $[(p, q)] \subset [(n, m)]$.

Análogamente, sea $(x, y) \in [(n, m)]$. Por la propiedad a), se demuestra que $(x, y) R (m, n)$. Como $(n, m) R (p, q)$ por ser R simétrica y, además, R es transitiva, se tiene que $(x, y) R (p, q)$. Luego $(x, y) \in [(p, q)]$ y, por tanto, $[(n, m)] \subset [(p, q)]$.

Si $[(p, q)] \subset [(n, m)]$ y $[(n, m)] \subset [(p, q)]$, entonces $[(p, q)] = [(n, m)]$. Recíprocamente, si $[(n, m)] = [(p, q)]$, como $(n, m) \in [(n, m)]$, entonces $(n, m) \in [(p, q)]$. Luego $(n, m) R (p, q)$ y $(p, q) R (n, m)$ (Anzola *et al.*, 1976, p. 15).

■

c) «La intersección de dos clases de equivalencia distintas es vacía» (Anzola *et al.*, 1976, p. 14).

Demostración. Utilizamos el método de reducción al absurdo, por el que negamos algo que queremos demostrar que es cierto, para llegar después a una contradicción. Sean $[(n, m)]$ y $[(p, q)]$ dos clases de equivalencia distintas. Si negamos que la intersección entre ambas clases de equivalencia sea el conjunto vacío, es decir, $[(n, m)] \cap [(p, q)] \neq \emptyset$, existe al menos un $(x, y) \in [(n, m)] \cap [(p, q)]$. Entonces, $(x, y) \in [(p, q)]$ y $(x, y) \in [(n, m)]$. Por ende, $(x, y) R (p, q)$ y $(x, y) R (n, m)$. Como R es simétrica, entonces $(p, q) R (x, y)$. Además, R es transitiva, por lo que $(p, q) R (n, m)$. Si aplicamos la propiedad b) demostrada anteriormente, obtenemos que $(p, q) R (n, m) \Leftrightarrow [(p, q)] = [(n, m)]$. Esto último es una contradicción porque, al principio de la demostración, hemos considerado que las dos clases de equivalencia son distintas. Como resultado, hemos confirmado lo contrario de aquello que se negó, es decir, que $[(n, m)] \cap [(p, q)] = \emptyset$ (Anzola *et al.*, 1976, p. 15).

d) Si R es una relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la unión de todas las clases de equivalencia módulo R es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Anzola *et al.*, 1976, p. 14)



Demostración. Todo elemento $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ está una de las clases de equivalencia, puesto que $(x, y) \in [(x, y)]$ según la propiedad a) (Anzola *et al.*, 1976, p. 15). Al efectuar la unión de todas las clases de equivalencia de los elementos, obtenemos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\bigcup [(x, y)] = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

■

4. Proposición 4.3.10

Sean dos pares ordenados (a, b) y $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $(a, b) R (c, d)$. Si se impone que $a = c + e$, $\forall e \in \mathbb{N}$, implica que $b = d + e$. Análogamente, si $c = a + e$, entonces $d = b + e$.

Demostración.

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Si $a = c + e$, entonces:

$$a + d = b + c;$$

$$(c + e) + d = b + c.$$

Por la propiedad asociativa de $\mathbb{N}$:

$$c + e + d = b + c.$$

Por la propiedad cancelativa de $\mathbb{N}$:

$$e + d = b.$$

Por la propiedad conmutativa de $\mathbb{N}$:

$$b = d + e.$$

De forma análoga, si $c = a + e$, entonces:

$$a + d = b + c;$$

$$a + d = (a + e) + c.$$

Por la propiedad asociativa de $\mathbb{N}$:

$$a + d = a + e + c.$$

Por la propiedad cancelativa de $\mathbb{N}$:



$$d = b + e.$$

Finalmente, por la propiedad conmutativa de $\mathbb{N}$:

$$d = b + e$$

■

5. Proposición 4.3.12

La definición anterior puede generalizarse para cualquier clase de equivalencia $[(a, b)]$, de modo que:

$$[(a, b)] = \begin{cases} [(a - b, 0)], & \text{si } a \geq b, \\ [(0, b - a)], & \text{si } a < b. \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea (a, b) el representante de la clase $[(a, b)]$. Podemos encontrarnos con $a > b$, $a < b$ o $a = b$.

Si $a > b$, por ser R reflexiva y por la *Proposición 4.3.10*, sabemos que:

$$(a, b) R (a - b, b - b);$$

$$(a - b, b - b) = (\underbrace{a - b}_x, 0) = (x, 0).$$

Aplicando la *Proposición 4.3.9*:

$(x, 0) = x - 0 = x$. Esto es lo que hemos definido anteriormente como *número entero positivo*.

Si $a < b$, por ser R reflexiva y por la *Proposición 4.3.10*, sabemos que:

$$(a, b) R (a - a, b - a);$$

$$(a - a, b - a) = (0, \underbrace{b - a}_x) = (0, x).$$

Aplicando la *Proposición 4.3.9*:

$(0, x) = 0 - x = -x$. Eso es lo que hemos definido anteriormente como *número entero negativo*.



Si $a = b$, y aplicando la *Proposición 4.3.9*:

$(a, b) = (a, a) = a - a = 0$. Esto es lo que hemos definido anteriormente con *número cero*.

Entonces, podemos generalizar que:

$$[(a, b)] = \begin{cases} [(a - b, 0)], & \text{si } a \geq b, \\ [(0, b - a)], & \text{si } a < b. \end{cases}$$

■

6. *Proposición 4.3.15*

La operación interna suma en $\mathbb{Z}$ no depende de los representantes de clase elegidos (García, 2010, p. 407).

Demostración. Sean $(n, m) R (n', m')$ y $(p, q) R (p', q')$. Si aplicamos el apartado b) de la *Proposición 4.3.6* tenemos que:

$$\begin{aligned} (n, m) R (n', m') &\Leftrightarrow [(n, m)] = [(n', m')] \\ (p, q) R (p', q') &\Leftrightarrow [(p, q)] = [(p', q')]. \end{aligned}$$

Sumamos ambas igualdades:

$$[(n, m) + (p, q)] = [(n', m') + (p', q')].$$

Para ver que esto último es cierto, hay que probar que:

$$((n, m) + (p, q)) R ((n', m') + (p', q'))$$

Aplicamos la definición de *relación binaria*:

$$\begin{aligned} (n, m) R (p, q) &\Leftrightarrow n + m' = m + n' \\ (p, q) R (p', q') &\Leftrightarrow p + q' = q + p'. \end{aligned}$$

Si sumamos ambas igualdades tenemos:

$$n + p + m' + q' = m + q + n' + p'.$$

Esta última igualdad se corresponde con:

$$(n + p, m + q) R (n' + p', m' + q') \Rightarrow ((n, m) + (p, q)) R ((n', m') + (p', q'))$$

■



7. Proposición 4.3.16

La operación interna suma cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento simétrico y cancelativa (García, 2010, p. 401).

Demostración.

1) Asociativa:

$$[(a, b)] + [(c, d)] + [(e, f)] = [(a + c, b + d)] + [(e, f)].$$

Si tenemos en cuenta la propiedad asociativa en $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} [((a + c) + e, (b + d) + f)] &= [(a + (c + e), b + (d + f))] = \\ &= [(a, b)] + [(c + e, d + f)] = [(a, b)] + [(c, d)] + [(e, f)] \end{aligned}$$

2) Conmutativa:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)].$$

Aplicamos la propiedad conmutativa en $\mathbb{N}$:

$$[(a + c, b + d)] = [(c + a, d + b)] = [(c, d)] + [(a, b)]$$

3) Elemento neutro:

$$[(a, b)] + [(0, 0)] = [(a + 0, b + 0)] = [(a, b)]$$

$$[(0, 0)] + [(a, b)] = [(0 + a, 0 + b)] = [(a, b)]$$

4) Elemento simétrico:

$$[(a, b)] + [(b, a)] = [(a + b, b + a)] = [(0, 0)]$$

El elemento $(a + b, b + a)$ representa el número entero $a + b - b - a$, que es igual a 0. Por tanto, el simétrico de $[(a, b)]$ es $[(b, a)]$.

■

8. Proposición 4.5.4

El conjunto P de los números primos es infinito (García, 2010, p. 424).



Demostración. Lo demostramos mediante el método de reducción al absurdo. Suponemos que el conjunto de los números primos es finito, y se puede expresar como:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}.$$

Ahora consideramos el número $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$, que es compuesto. Sin embargo, el número $n - 1 = m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n - 1$ es primo. De nuevo, por reducción al absurdo, suponemos que m no es primo, esto es, que m es divisible por $p_i \in \mathbb{Z}/p_i \cdot c = m$:

$$p_i \mid m \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } p_i \cdot c = m$$

$$\begin{aligned} c = \frac{m}{p_i} &= \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n - 1}{p_i} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n}{p_i} - \frac{1}{p_i} = \\ &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \dots \cdot p_n - \frac{1}{p_i} \end{aligned}$$

$\frac{1}{p_i}$ tendría que ser un número entero para que c también lo fuera, lo cual es absurdo. Así pues, m es un número primo, lo cual no es posible ya que $m \notin P$. Por consiguiente, podemos afirmar que el conjunto P de los números primos es infinito (García, 2010, p. 424).

■

9. Proposición 4.5.5

«El menor divisor de un número compuesto es un número primo» (García, 2010, p. 426).

Demostración. Sea $c \in \mathbb{Z}$ un número compuesto y $p \in \mathbb{Z}$ el menor divisor de c . Utilizamos el método de reducción al absurdo, suponiendo lo contrario de lo que queremos demostrar. Suponemos que p no es primo. Por tanto, p es divisible por otro número $q \in \mathbb{Z}$. Entonces $q < p$, $q \mid p$ y $p \mid c$. Como la relación $\mid$ verifica la propiedad transitiva, podemos decir que $q \mid c$. Esto es una contradicción porque, al ser $q < p$, no es posible que p sea el menor divisor de c . Consecuentemente, p es primo.

■



10. Lema 4.5.6

Sean $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ números primos $\in \mathbb{Z}^+$, de forma que (García, 2010, p. 425):

$$p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } p = p_i.$$

Demostración. Vamos a demostrar el lema usando el principio de inducción:

- Probamos si es cierto para $n = 1$:

$$p \mid p_1 \Rightarrow p = p_1.$$

Es cierto.

- Suponemos que es cierto para $n = r$:

$$p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r) \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, r\} \text{ tal que } p = p_i \quad (1)$$

- Probamos si es cierto para $n = r + 1$:

$$p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot p_{r+1}).$$

Llamamos $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$:

$$p \mid (a \cdot p_{r+1}).$$

Si $\text{mcd}\{p, a\} = 1$, entonces $p \mid p_{r+1}$ (por la *Proposición 4.5.24*). Como ambos números son primos, se tiene que $p = p_{r+1}$. Entonces, $p \mid (a \cdot p)$, lo cual es cierto.

Si $\text{mcd}\{p, a\} = r \neq 1$, se tiene que $r \mid p$ y $r \mid a$. Puesto que p es primo y $r \neq 1$, se tiene que:

$$r = p \Rightarrow p \mid a \Rightarrow p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r).$$

Podemos ver que esto último es cierto, ya que hemos tomado como cierto la expresión (1). Consecuentemente, la proposición es cierta.

11. Teorema 4.5.7: Teorema Fundamental de la Aritmética

Sea $a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. Este elemento a puede descomponerse de forma única como un producto de números primos positivos con exponentes naturales, es decir:



$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}, \forall a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}, \forall \alpha_i \in \mathbb{N},$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ y p_i son números primos con $p_i < p_j$ si $i < j$ (García, 2010, p. 414). Esto hace de $\mathbb{Z}$ un *dominio de factorización única* (DFU).

Demostración. Sea $a \in \mathbb{Z}$ un número compuesto. Suponemos que $a > 0$. Si no lo fuera, bastaría con utilizar su opuesto, $-a$. En ese caso, $-a = b$, con $b > 0$.

Si p_1 es el menor divisor de a , según la *Proposición 4.5.5*, p_1 es primo. Entonces:

$$p_1 \mid a \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } p_1 \cdot x_1 = a, \text{ con } x_1 \in \mathbb{Z}.$$

En este punto, tenemos dos situaciones posibles:

- x_1 es primo. En este caso quedaría demostrado el teorema.
- x_1 es compuesto. Si esto sucede, existe un número primo p_2 tal que es el menor divisor de x_1 :

$$p_2 \mid x_1 \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } p_2 \cdot x_2 = x_1,$$

$$\text{con } x_2 < x_1. \text{ Entonces, } a = p_1 \cdot x_1 = p_2 \cdot x_2.$$

Si se repite el proceso un número finito de veces obtenemos:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \cdot x_n,$$

con x_n primo o igual a 1, ya que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ constituye una sucesión de números enteros decrecientes con cota inferior igual a 1. Esto demuestra que existe una descomposición en factores primos para cualquier número entero distinto de 0 y ± 1 (García, 2010, pp. 426-427).

Para demostrar que dicha descomposición es única, recurrimos al método de reducción al absurdo. Suponemos que existen dos descomposiciones diferentes para un mismo número $a \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} = \pm q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}.$$

Pueden darse dos situaciones:

- Que algún factor de la primera descomposición sea diferente a cualquier otro de la segunda, es decir, $p_j \neq q_i$, con $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Como $q_i \mid a$, es necesario que algún factor de la descomposición de a coincida con q_i ,

esto es, $p_j = q_i$. Esto es una contradicción, ya que al principio hemos supuesto que $p_j \neq q_i$.

- Que el número de factores primos en la primera descomposición coincida con el de la segunda (subíndices r y s iguales), que las bases coincidan numéricamente y que sus exponentes sean distintos, esto es, que $p_i = q_i$ y $a_i \neq b_i$. Suponemos que $\alpha_i < \beta_i$ y tomamos el número entero c :

$$c = \frac{a}{p_i^{\alpha_i}} = \pm \frac{q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}}{p_i^{\alpha_i}}.$$

Este número c es divisible por p_i , es decir, $p_i \mid c$, ya que $p_i = q_i$ y $\beta_i > \alpha_i$. También podemos expresar c como:

$$c = \frac{a}{p_i^{\alpha_i}} = \pm \frac{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}}{p_i^{\alpha_i}}.$$

Puesto que estamos dividiendo $\pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ por $p_i^{\alpha_i}$, el factor p_i ya no se encuentra en la descomposición de c . Entonces, ya no se cumple que $p_i \mid c$, por lo que hemos llegado a una contradicción. Consecuentemente, queda demostrada la unicidad (García, 2010, pp. 427-428).

12. Proposición 4.5.8

Sea $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ con $a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. El elemento $b \in \mathbb{Z}$ es divisor de a si y solo si todos los factores primos de b son también factores primos de a , con los exponentes de los factores primos de b menores o iguales que los de a . Es decir (García, 2010, p. 415):

$$b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n},$$

con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \forall i = 1, 2, 3, \dots, r$

Demostración.

$$b \mid a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b \cdot c = a.$$

«La descomposición en factores primos de a tiene todos los factores primos de la descomposición de b con exponentes mayores o iguales» (García, 2010: 428).



Si:

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

$$b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

entonces $b \mid a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot c = a$, con $c = \pm p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 - \beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n - \beta_n}$.

■

13. Proposición 4.5.14

Sea p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$, entonces p y a son primos relativos (García, 2010, p. 424).

Demostración. Puesto que p es un número primo, únicamente posee los divisores ± 1 y $\pm p$. Si $p \nmid a$, entonces $-p \nmid a$. Por consiguiente, los únicos divisores que tienen en común a y p son ± 1 , y tendríamos que $\text{mcd}\{p, a\} = 1$.

■

14. Proposición 4.5.19: Identidad de Bézout

Sean $a, b \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$. Si $d = \text{mcd}\{a, b\}$, entonces:

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d = a \cdot \lambda + b \cdot \mu,$$

donde $d = a \cdot \lambda + b \cdot \mu$ se conoce con el nombre de *identidad de Bézout* (García, 2010, p. 417).

Demostración. Sea el conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{N} \text{ tal que } z = a \cdot x + b \cdot y, \text{ con } x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

El conjunto A es un subconjunto de $\mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$, y no es vacío ya que:

$$|b| = 0 \cdot a + (\pm 1) \cdot b \in A.$$

Como $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado, entonces A tiene un mínimo, que denotamos por d . Puesto que $d \in A$, podemos afirmar que:

$$\exists x = \lambda, y = \mu \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d = a \cdot \lambda + b \cdot \mu.$$



Una vez dicho esto, vamos a demostrar que d es el máximo común divisor de a y b . Para ello, hay que probar que $d \mid a$ y $d \mid b$. Utilizamos el método de reducción al absurdo, por el que suponemos que $d \nmid a$. De este modo, el *Teorema 4.5.20* asegura que $\exists c, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = d \cdot c + r$, con $0 \leq r < d$.

Con todo lo anterior, se determina que:

$$\begin{aligned} r &= a - d \cdot c = a - (a \cdot \lambda + b \cdot \mu) \cdot c = a - a \cdot \lambda \cdot c - b \cdot \mu \cdot c = \\ &= a \cdot (1 - \lambda \cdot c) + b \cdot (-\mu \cdot c) > 0, \end{aligned}$$

por lo que $r \in A$ y $r < d$. Esto último es absurdo, ya que si d es el mínimo del conjunto A , no es posible que $r < d$ y $r \in A$. Consecuentemente, podemos asegurar que $d \mid a$. Análogamente, se prueba que $d \mid b$.

Seguidamente, demostramos que d es el mayor de los divisores comunes de a y b . Suponemos que existe $d' \neq d$ tal que $d' \mid a$ y $d' \mid b$. Entonces:

$$a = d' \cdot k_1 \quad (1)$$

$$b = d' \cdot k_2. \quad (2)$$

Sabemos que $d = a \cdot \lambda + b \cdot \mu$. Sustituimos el valor de a y b determinado en las expresiones (1) y (2):

$$d = (d' \cdot k_1) \cdot \lambda + (d' \cdot k_2) \cdot \mu = d' \cdot (k_1 \cdot \lambda + k_2 \cdot \mu) \Rightarrow d' \mid d.$$

Si $d' \mid d$, entonces $d' < d$, por lo que d es el mayor divisor común de a y b , es decir, $d = \text{mcd}\{a, b\}$ (García, 2010, pp. 433-434).

■

15. Teorema 4.5.22: Teorema de Euclides

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si a y b son primos relativos y $a \mid (b \cdot c)$, entonces $a \mid c$ (García, 2010, p. 425).

Demostración. Si $a \mid (b \cdot c)$ es porque existe un número $d \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$



Si a y b son primos relativos, la identidad de Bézout garantiza la existencia de $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tales que $a \cdot \lambda + b \cdot \mu = 1$. Multiplicamos esta igualdad por c en ambos miembros:

$$c(a \cdot \lambda + b \cdot \mu) = c \Rightarrow c = a \cdot c \cdot \lambda + b \cdot c \cdot \mu. \quad (1)$$

Anteriormente hemos determinado que $a \cdot d = b \cdot c$. Sustituimos en la ecuación (1) el valor de $b \cdot c$ por $a \cdot d$:

$$c = a \cdot c \cdot \lambda + a \cdot d \cdot \mu = a \cdot (c \cdot \lambda + d \cdot \mu) \Rightarrow a \mid c$$

■

16. Lema 4.5.23

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y sea $r_1 \in \mathbb{N}$ el resto de dividir a entre b . Entonces (García, 2010, p. 417):

$$\text{mcd}\{a, b\} = \text{mcd}\{b, r_1\}$$

Demostración. Según el algoritmo de la división, existen dos números enteros c y r_1 , con $0 \leq r_1 \leq |b|$, tales que $a = b \cdot c + r_1$. Puesto que el máximo común divisor de a y b es d , podemos decir que $d \mid a$ y $d \mid b$ (García, 2010, p. 436):

$$d \mid a \Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d \cdot a' = a, \quad (1)$$

$$d \mid b \Leftrightarrow \exists b' \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d \cdot b' = b. \quad (2)$$

Despejamos r_1 de la ecuación del algoritmo de la división y sustituimos el valor de a y b obtenido en las igualdades (1) y (2), respectivamente:

$$r_1 = a - b \cdot c = (d \cdot a') - (d \cdot b') \cdot c = d \cdot (a' - b' \cdot c) \Rightarrow d \mid r_1.$$

Determinamos que d divide a r_1 y, por tanto, que d es un divisor común de b y r_1 .

Si consideramos otro divisor común a b y r_1 distinto de d , y lo denotamos d' , podemos decir que $d' \mid b$ y $d' \mid r_1$:

$$d' \mid b \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d' \cdot c_1 = b, \quad (3)$$

$$d' \mid r_1 \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } d' \cdot c_2 = r_1. \quad (4)$$



Sustituimos el valor de b y r_1 obtenido en las igualdades (3) y (4) en la ecuación del algoritmo de la división:

$$a = b \cdot c + r_1 = (d' \cdot c_1) \cdot c + (d' \cdot c_2) = d' \cdot (c_1 \cdot c + c_2) \Rightarrow d' \mid a.$$

Se puede observar que d' es también un divisor común de a y b , con $d' < d$. Puesto que $d = \text{mcd}\{a, b\}$, entonces $d' \mid d$, por lo que se demuestra que:

$$d = (b, r_1) = \text{mcd}\{b, r_1\}.$$

■

17. Proposición 4.7.5

Sea $x \in \mathbb{Z}$ un número escrito en base b :

$$x = x_0 \cdot b^0 + x_1 \cdot b + x_2 \cdot b^2 + \cdots + x_k \cdot b^k,$$

donde los coeficientes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ son las cifras del número x expresado en la base b . Si $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$ son los restos potenciales de b módulo n , entonces:

$$x \equiv x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \cdots + x_k \cdot r_k.$$

Demostración. Aplicamos el Corolario 4.7.2:

$$\left. \begin{array}{l} b^0 \equiv r_0 \mod n \\ b^1 \equiv r_1 \mod n \\ b^2 \equiv r_2 \mod n \\ \vdots \\ b^k \equiv r_k \mod n \end{array} \right\}$$

Según la Proposición 4.6.2, la relación $\equiv \mod n$ es una relación de equivalencia y, en consecuencia, verifica la propiedad reflexiva:

$$\begin{array}{l} x_0 \equiv x_0 \mod n, \\ x_1 \equiv x_1 \mod n, \\ x_2 \equiv x_2 \mod n, \\ \vdots \\ x_k \equiv x_k \mod n. \end{array}$$

Si aplicamos la Proposición 4.6.7, obtenemos:



$$\left. \begin{array}{l} x_0 \cdot b^0 \equiv x_0 \cdot r_0 \pmod{n} \\ x_1 \cdot b^1 \equiv x_1 \cdot r_1 \pmod{n} \\ x_2 \cdot b^2 \equiv x_2 \cdot r_2 \pmod{n} \\ \vdots \\ x_k \cdot b^k \equiv x_k \cdot r_k \pmod{n} \end{array} \right\}$$

Volvemos a aplicar la *Proposición 4.6.7*:

$$x_0 \cdot b^0 + x_1 \cdot b^1 + \cdots + x_k \cdot b^k = x \equiv x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \cdots + x_k \cdot r_k \pmod{n}.$$

■

18. Corolario 4.7.6: Criterio general de la divisibilidad

Sea $x \in \mathbb{Z}$ el número definido en la proposición anterior. Este elemento x es divisible por n si y solo si $x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \cdots + x_k \cdot r_k$ es divisible por n (Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia, s.f, p. 33), es decir:

$$n \mid x \Leftrightarrow n \mid (x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \cdots + x_k \cdot r_k).$$

Demostración.

Si x es divisible por n y aplicamos la *Definición 4.6.1* tenemos:

$$n \mid x \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{n}. \quad (1)$$

De acuerdo con la *Proposición 4.7.5*:

$$x \equiv x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \cdots + x_k \cdot r_k \pmod{n}.$$

Al ser $\equiv \pmod{n}$ una relación de equivalencia, se verifica la propiedad simétrica:

$$x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \cdots + x_k \cdot r_k \equiv x \pmod{n}. \quad (2)$$

Si tenemos en cuenta las expresiones (1) y (2) y aplicamos la propiedad transitiva, por ser $\equiv \pmod{n}$ una relación de equivalencia, se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \cdots + x_k \cdot r_k \equiv x \pmod{n} \\ x \equiv 0 \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \cdots + x_k \cdot r_k \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \mid (x_0 \cdot r_0 + x_1 \cdot r_1 + \cdots + x_k \cdot r_k).$$



ANEXO V. ARTÍCULOS COMPLEMENTARIOS A LA FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

En este anexo, se apostillan los artículos considerados como complementarios a la *Sección 5. Fundamentación didáctica*. El contenido de estos artículos no es de carácter puramente investigativo, sino divulgador de sugerencias didácticas útiles para automatizar y agilizar los sistemas de prácticas llevados a cabo por los estudiantes en torno a algunas nociones de divisibilidad. Podría decirse que se tratan de procedimientos algorítmicos que únicamente tienen sentido aplicarse cuando el alumno ha conseguido alcanzar la fase de anticipación descrita por Tzur (2007), y en total ausencia de conflictos semióticos. En caso contrario, se corre el riesgo de que estas prácticas generen la asunción de inautenticidades epistemológicas, así como la asociación de conceptos a procedimientos algorítmicos, en lugar de al verdadero significado referencial o pretendido.

1. Artículo 5

Cuando el docente pretende desarrollar en el aula aquellos procesos de instrucción relacionados con la divisibilidad en $\mathbb{Z}$, se encuentra con un obstáculo, y es que los estudiantes no poseen las estructuras cognitivas previas necesarias para asimilar el concepto de *congruencia*, indispensables para construir el criterio general de la divisibilidad. Ante esta situación, la práctica más habitual es implantar procesos memorísticos de los resultados de dicho criterio. En la medida de lo posible, sería recomendable evitar esta praxis tan poco ortodoxa desde el punto de vista epistemológico y buscar otras vías alternativas que hagan honor a la naturaleza científica de la matemática. Pero también hay que tener en cuenta, como se dijo anteriormente, las limitaciones de los sujetos que pretenden apropiarse de los significados institucionales, por lo que se debe mantener un equilibrio entre ambas posiciones.

El artículo que se va a comentar (Sepúlveda & Tinoco, 2000), propone una manera de solucionar esto, mediante la aplicación de un sencillo criterio para averiguar si un número entero determinado es divisible por cualquier primo distinto de 2 y 5.

Los criterios de divisibilidad de estos dos últimos números son fáciles de recordar por los discentes. También lo es el criterio de divisibilidad del 3. Pero cuando el alumno pregunta si un número N es divisible por 7 u 11, la respuesta no es tan sucinta ni



mnemotécnica. Por este motivo, el autor plantea un criterio general sencillo basado en el siguiente teorema:

Sea N un entero positivo cuya representación es

$$N = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_0, \text{ con } a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}; i = 0, 1, \dots, n;$$

y p un primo diferente de 2 y 5. Sea q positivo tal que

$$10 \mid (p \cdot q - 1) \quad (1)$$

y

$$k = \frac{p \cdot q - 1}{10} \quad (2)$$

Sean ahora

$$M_1 = \frac{N - a_0}{10} \quad (3)$$

y

$$N_1 = M_1 - k a_0. \quad (4)$$

Entonces, $p \mid N$ si y solo si $p \mid N_1$ (Sepúlveda, 2000, p. 87).

Para demostrarlo, se parte de la expresión (1), en la que hay que encontrar un número $q \in \mathbb{Z}$ tal que $p \cdot q$ tenga por cifra de las unidades el 1. Entonces, según (2), se tiene que $p \cdot q = 10 \cdot k + 1$. Si se sustituye la igualdad (3) en (4), se obtiene:

$$\begin{aligned} N_1 &= M_1 - k \cdot a_0 = \frac{N - a_0}{10} - k \cdot a_0 = \frac{N - a_0 - 10 \cdot k \cdot a_0}{10} = \frac{N - (10 \cdot k + 1) \cdot a_0}{10} = \\ &= \frac{N - p \cdot q \cdot a_0}{10}. \end{aligned}$$

Si se multiplica por 10 ambos miembros:

$$10 \cdot N_1 = N - p \cdot q \cdot a_0. \quad (5)$$

En este punto, se hace la suposición $p \mid N$. Si esto sucede:

$$p \mid (p \cdot q \cdot a_0) \text{ y } p \mid (N - p \cdot q \cdot a_0).$$

Para que la igualdad (5) se cumpla, p debe dividir al otro miembro, es decir:



$$p \mid (10 \cdot N_1).$$

Como p es un número primo distinto de 2 y 5, no puede dividir a 10, por lo que $p \mid N_1$.

A continuación se reescribe la expresión (5) como:

$$N = 10 \cdot N_1 + p \cdot q \cdot a_0. \quad (6)$$

Análogamente, si se supone que $p \mid N_1$, entonces $p \mid N$.

En consecuencia, se prueba que $p \mid N \Leftrightarrow p \mid N_1$, con lo que el teorema queda demostrado.

Por otra parte, se puede recopilar la esencia de este teorema mediante la redacción de un algoritmo de cálculo que resulte atractivo y asequible para los alumnos. Esta es la propuesta que hace Sepúlveda (2000) en su artículo:

1. Multiplíquese p por el dígito q , escogido de tal manera que la cifra de las unidades de pq sea 1. Sea k el número obtenido al omitir de pq esta última cifra.
2. Multiplíquese k por la última cifra de N y réstese esto del número que resulta de N , al ignorar la última cifra. Llámese N_1 al resultado de la resta.
3. Si N_1 es lo suficientemente pequeño para poder determinar, directamente por división, si es divisible entre p , el proceso termina. N será divisible entre p si y solo si N lo es. En caso de que aún no sea fácil deducir sobre la divisibilidad de N_1 , repítase el paso 2, pero ahora con N_1 en lugar de N , lo que producirá N_2 . Continúese el proceso hasta que alguno de los N_i sea lo suficientemente simple para decidir directamente su divisibilidad entre p (Sepúlveda, 2000, p. 90).

$$\begin{array}{r}
 6 \ 3 \ 6 \ 8 \ \underline{7} \\
 - \qquad \qquad 4 \ 9 \\
 \hline
 6 \ 3 \ 1 \ \underline{9} \\
 - \qquad \qquad 6 \ 3 \\
 \hline
 5 \ 6 \ \underline{8} \\
 - \ 5 \ 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Figura 12.1 Procedimiento para determinar si 63687 es divisible por 71.



Por ejemplo, para el número $N = 63687$, se quiere averiguar si es divisible por el número primo $p = 71$. Primero, hay que encontrar un número q tal que $p \cdot q$ termine en 1. Si $q = 1$, entonces $p \cdot q = 71 \cdot 1 = 71$. Por tanto, un valor posible para q es 1. El número k se obtiene eliminando la última cifra de $p \cdot q$. Así pues, $k = 7$. El procedimiento puede seguirse como se muestra en la *Figura 12.1*, multiplicando la última cifra de N_i por k , y restando ese valor al número resultante de suprimir la última cifra de N_i . Al final, se obtiene 0. Como $0 \mid 71$, puede afirmarse que $71 \mid 63684$.

Cabe decir, por último, que la presentación de este teorema y su demostración tendrían que efectuarse con posterioridad a los procesos de instrucción de lenguaje algebraico y ecuaciones de primer grado, con el objetivo de que los alumnos tengan ya construidas estas estructuras cognitivas. Además, aunque la demostración del teorema que sustenta el algoritmo no requiere el uso de conocimientos avanzados, puede resultar complicada su comprensión para aquellas clases o alumnos con un nivel epistémico menor, por lo que el autor de este TFM recomienda, en estos grupos, mencionar solamente el algoritmo y el teorema, sin entrar en la demostración.

2. Artículo 6

En este último artículo (Peñafiel, 1993), se plantea la insigne criba de Eratóstenes desde otra perspectiva más didáctica, la cual permite encontrar los números primos mediante un singular patrón geométrico. Esta estrategia se sustenta en una conjetura y su posterior demostración. Al igual que en el artículo anterior, se recomienda que el docente preste especial atención para que los estudiantes no asocien el concepto de *número primo* a la ejecución de un mero procedimiento algorítmico, sino que lo hagan a su verdadero significado epistemológico. Asimismo, tanto en la conjetura como en la demostración, se utiliza el lenguaje algebraico, por lo que se sugiere proceder como se describió en el último párrafo del apartado anterior.

El autor de este artículo propone, para encontrar los primos menores que 100, distribuirlos en seis columnas, tal y como se muestra en la *Figura 12.2*. Se comienza señalando el número 2 como el primer primo. Como puede observarse, todos los números situados en la misma columna que el 2, son múltiplos de este, por lo que pueden descartarse como primos. Además, todos los que se encuentren en la misma columna que el 4, son múltiplos de 2. Consecuentemente, se eliminan. A continuación, se marca el número 3 como primo. Al igual que sucedió en el caso anterior, todos los números situados en la misma columna que el 3, son múltiplos de 3, por lo que se descartan.

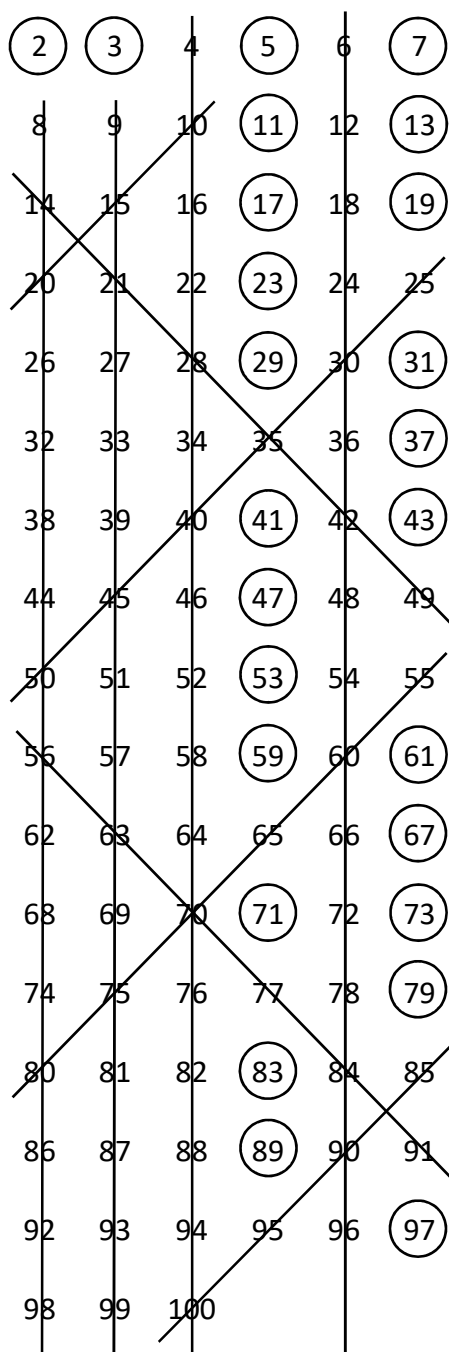


Figura 12.2. Resultado de la criba de Eratóstenes (Peñañiel, 1993, p. 97).

También pueden suprimirse todos aquellos números situados bajo el 6, incluido él mismo, ya que también son múltiplos de 3. Después, se toma el 5 como el siguiente número primo y se prescinde de sus múltiplos (10, 15, 20,...), los cuales se encuentran en diagonales paralelas unas a otras. Por último, se selecciona el número 7 como primo y, como en los anteriores casos, se excluyen sus múltiplos (14, 21, 28,...), que vuelven a estar ubicados en diagonales paralelas, intersectando a aquellas que contienen los



múltiplos de 5. Finalmente, los números que han quedado sin excluir, son los primos menores que 100. El resultado de la criba es el que aparece en la *Figura 12.2*.

Si se observa el resultado de la criba, puede advertirse que todos los números primos mayores que 3, $p > 3$, se encuentran en la antepenúltima y última columnas. Además, todos los primos situados en estas columnas difieren en una unidad a la columna que contiene los múltiplos de 6. De este modo, cualquier $p > 3$ puede expresarse como:

$$p = 6 \cdot n + 1, \text{ o bien } p = 6 \cdot n - 1.$$

Con estos resultados se puede establecer la siguiente conjetura:

Cualquier número que no esté situado en la última o antepenúltima columnas, no es primo.

Por otra parte, la demostración de esta conjetura puede ejecutarse de una forma bastante sencilla. Cualquier $x \geq 5$, perteneciente al conjunto de los números enteros, puede expresarse mediante alguna de estas expresiones

$$6 \cdot n - 1, 6 \cdot n, 6 \cdot n + 1, 6 \cdot n + 2, 6 \cdot n + 3, 6 \cdot n + 4 \quad \forall n \geq 1.$$

Así pues, se tiene que:

- $6 \cdot n$ no es primo, puesto que $6 \mid 6 \cdot n$
- $6 \cdot n + 2$ no es primo, puesto que $2 \mid (6 \cdot n + 2)$
- $6 \cdot n + 3$ no es primo, puesto que $3 \mid (6 \cdot n + 3)$
- $6 \cdot n + 4$ no es primo, puesto que $2 \mid (6 \cdot n + 4)$

Consecuentemente, si un número primo p es mayor que 3, solamente puede expresarse como $6 \cdot n - 1$ o $6 \cdot n + 1$.



ANEXO VI. DESCRIPCIÓN SUCINTA DE LAS COMPETENCIAS CLAVE DEL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL

- *Comunicación lingüística:* emerge de las acciones comunicativas y de las prácticas sociales que el individuo lleva a cabo. El discente no solo es considerado un sujeto pasivo, receptor de información, sino que tiene la capacidad de producir mensajes orales y textos escritos, empleando para ello la codificación y decodificación de dichos mensajes en la lengua española o en otra lengua extranjera. Esta competencia es fundamental para que se produzca la socialización, donde el diálogo es la piedra angular de la convivencia y la resolución de conflictos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, pp. 6991-6992).
- *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología:* el discente adquiere la competencia matemática cuando es capaz de utilizar el razonamiento y rigor matemáticos, así como las herramientas que ésta ofrece, para aplicarlos a la resolución de problemas y situaciones que puedan tener lugar a lo largo de su vida. Deben lograrse reproducir actitudes de respeto hacia la veracidad de los datos y los resultados obtenidos. En cuanto a las competencias básicas en ciencia y tecnología, proporcionan la capacidad de identificar, plantear y resolver problemas o situaciones susceptibles de materializarse en la vida diaria, empleando para ello el conocimiento que proporcionan las diversas ramas de la ciencia, como pueden ser la física, la química, la biología, la geología, las matemáticas y la tecnología. De esta forma, se busca que florezca en el interior del alumnado el interés por la investigación científica, así como la aplicación de sus descubrimientos para el incremento del bienestar de la sociedad en la que viven (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, p. 6993).
- *Competencia digital:* Dada la creciente e imparable evolución tecnológica y digitalización, el alumno debe alfabetizarse en el uso responsable, crítico y seguro de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación, para poder alcanzar sus objetivos, entre ellos el aprendizaje. Implica tener el conocimiento y habilidad de uso de las principales aplicaciones informáticas y emplearla para acceder a la información, procesarla, y utilizarla para generar un conocimiento que le permita resolver problemas o cuestiones que aparezcan en su vida (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, p. 6996).



- *Aprender a aprender*: Es la habilidad del estudiante incoar, estructurar y dirigir su proceso de aprendizaje. La consecución de las metas establecidas contribuye a generar un sentimiento de auto-eficacia y confianza en sí mismo, lo que provoca una estimulación para elevar paulatinamente sus objetivos. Esta competencia culmina con un asentamiento de procesos de aprendizaje cada vez más eficaces y auto-dirigidos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, p. 6997).
- *Competencias sociales y cívicas*: La adquisición de estas competencias conlleva saber vivir en sociedad, relacionarse en condiciones de igualdad, no discriminación y tolerancia con la personas que la componen, interpretar los problemas o conflictos que puedan surgir en ella y resolverlos. Además, es vital inculcar actitudes favorables al respeto de las opiniones ajenas que sean contrarias a la propia, de forma que se propicie el debate constructivo (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, p. 6998).
- *Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor*: Es la capacidad de utilizar los conocimientos, facultades y pericia propios para alcanzar los objetivos planteados o materializar las ideas, tanto de forma individual como en entornos grupales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, p. 6998).
- *Conciencia y expresiones culturales*: implica tener en estimar, respetar y apreciar la belleza de las manifestaciones culturales y artísticas, valorar su legado, así como conocer la evolución del pensamiento humano (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015b, p. 7001).



ANEXO VII. PLAN DE CLASE DE LA ACTIVIDAD 7

1. Fase de inicio e introducción de la tarea (5 minutos)

Al llegar a clase, explica a los alumnos que la sesión de hoy es práctica, en la que les tocará a ellos trabajar lo aprendido:

«En la clase de hoy no vamos a seguir avanzando con el libro de texto. Me gustaría que esta vez seáis vosotros los que trabajéis y pongáis en práctica la teoría que vimos el último día. Para ello, os he preparado una tarea en la que tenéis que experimentar con números y encontrar las matemáticas que se esconden en su resolución.

Quisiera comentaros que mi objetivo no es que la entreguéis hecha a la perfección. No pasa nada si os equivocáis. Para eso estamos aquí, para aprender. No os desaniméis si al principio no sabéis como empezar o no podéis terminarla entera. Yo estaré aquí con vosotros para ayudaros, pero primero debéis intentarlo por vuestra cuenta, puesto que así aprenderéis mucho más que si os digo la respuesta directamente. Tened paciencia y sed constantes.»

Entrega una copia de la tarea a cada alumno y pídeles que lo lean tranquilamente de manera individual. Pasado un minuto, lee el enunciado en voz alta y pregúntales si tienen alguna duda respecto a lo que se está pidiendo que contesten en la actividad o algún dato que no entiendan. Asegúrate de que todos entienden el enunciado. Es muy importante no revelar ninguna pista que pueda condicionar su trabajo.

2. Fase de exploración y desarrollo (25 minutos)

Pide a los alumnos que formen grupos de 3 componentes y que realicen los apartados de la tarea aportando ideas entre todos. Repárteles tijeras, pegamento y folios para que realicen sus cálculos e indagaciones. Aconséjales que experimenten primero con los números antes de pegarlos de forma definitiva. Deja unos minutos para que hablen entre ellos y empiecen a indagar. Pasado este tiempo, circula por los distintos grupos, quedándote, de momento, al margen y escuchando sus conversaciones y razonamientos. Si ves que algún grupo se encuentra atascado, dirígete hacia ellos y diles que te expliquen cómo están intentando realizar la tarea. Después, hazles preguntas o comentarios de tal forma que ellos mismos puedan responderse a sus dudas.

El apartado a) no debería suponerles ningún problema llegar a la solución. En cambio, en los siguientes, pueden empezar a tener dudas. Algunas de ellas pueden ser:



- No se han percatado de la importancia de conocer el valor de la suma de los números del 1 al 7. Posibles soluciones: ¿observáis alguna propiedad de los números empleados que se repita siempre?
- No se han percatado de que el número de la casilla superior debe ser siempre par. Posibles soluciones: ¿Se cumple siempre esta suma mágica para cualquier número que sitúa en la casilla superior? ¿En qué casos se cumple y en cuáles no?

Cuando lleguen al apartado de la elaboración del póster, entréguales folios tamaño A3 y pídeles que peguen sus rompecabezas en él y expliquen cómo han llegado a la solución.

3. Fase de debate y discusión (15 minutos)

Una vez que han finalizado el póster, pide a los grupos que se levanten por turnos para que expliquen al resto de sus compañeros cómo han realizado la actividad. Mientras tanto, anota en la pizarra todas las conjeturas que hayan utilizado. Cuando hayan hablado 3 - 4 grupos pregunta al resto si han utilizado las mismas conjeturas u otras distintas. Si son distintas, anímalos a que expliquen cuáles son.

4. Fase de sistematización del aprendizaje matemático (5 minutos)

Emplea esta fase para reorganizar todos los conceptos relevantes implicados en la resolución de la tarea. Debes destacar los siguientes:

- Divisibilidad por 2.
- Resultado de sumar a un número par otro par.
- Resultado de sumar a un número impar otro par y viceversa.

Explica el procedimiento correcto a seguir y mientras vas haciendo referencia directa a los trabajos de los alumnos. Menciona y explica los errores que se han cometido, dirigiéndote al grupo en particular para que los entiendan.

ANEXO VIII. SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 7

Esta actividad consiste en completar el rompecabezas con los números del 1 al 7 de forma que el resultado de sumar cada línea sea el mismo. Si se suman todos estos números, se obtiene 28. La casilla de arriba es común a las dos líneas. Se asigna a dicha casilla un valor a cualquiera del 1 al 7. La suma de los restantes números será $28 - a$. Puesto que el valor de la suma de los números situados en cada línea tiene que ser el mismo, se tiene que la suma de los dígitos que ocupan las tres casillas restantes en cada línea vale $\frac{28-a}{2}$. Este dato muestra que solamente puede situarse un número par en la casilla superior, porque al dividir entre dos, para que la división sea exacta, el numerador debe ser par. Para que el numerador sea par, el valor de a solo puede ser par ya que al restar un número impar a 28 (que es par), se obtiene un número impar y no se podría efectuar la división exacta. Consecuentemente solo se puede situar en la casilla superior los números 2, 4 y 6, por lo que las soluciones a este problema son finitas.

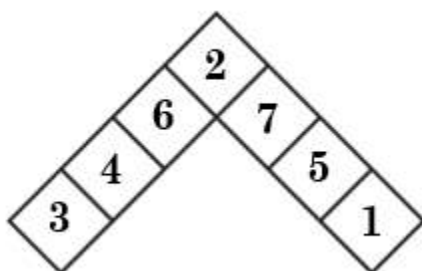


Figura 15.1. Primer caso de suma mágica.

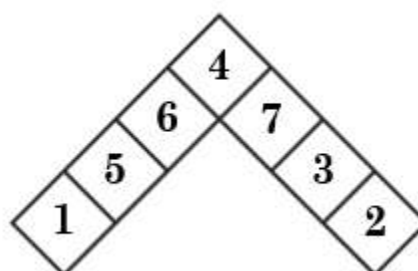


Figura 15.2. Segundo caso de suma mágica.

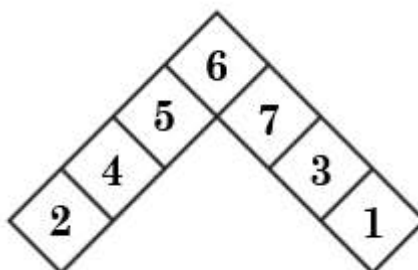


Figura 15.3. Tercer caso de suma mágica.

Los valores de las sumas mágicas son 15, 16 y 17 para las figuras 15.1, 15.2 y 15.3, respectivamente. Al no haber más casos posibles tampoco podemos obtener otros valores de sumas mágicas distintos a los anteriores.



ANEXO IX. PLAN DE CLASE DE LA ACTIVIDAD 13

1. Fase de inicio e introducción de la tarea (5 minutos)

Al llegar a clase, explica a los alumnos que la sesión de hoy es práctica, en la que les tocará a ellos trabajar lo aprendido:

«En la clase de hoy no vamos a dar temario del libro de texto. Me gustaría que esta vez seáis vosotros los que trabajéis y pongáis en práctica la teoría que vimos el último día. Para ello, os he preparado una tarea en la que tenéis que experimentar con números y figuras.

Quisiera comentaros que mi objetivo no es que la entreguéis hecha a la perfección. No pasa nada si os equivocáis. Para eso estamos aquí, para aprender. No os desaniméis si al principio no sabéis como empezar o no podéis terminarla entera. Yo estaré aquí con vosotros para ayudaros, pero primero debéis intentarlo por vuestra cuenta, puesto que así aprenderéis mucho más que si os digo la respuesta directamente. Tened paciencia y sed constantes.»

Entrega una copia de la tarea a cada alumno y pídeles que lo lean tranquilamente de manera individual. Pasado un minuto, lee el enunciado en voz alta y pregúntales si tienen alguna duda respecto a lo que se está pidiendo que contesten en la actividad o algún dato que no entiendan. Asegúrate de que todos entienden el enunciado. Es muy importante no revelar ninguna pista que pueda condicionar su trabajo.

2. Fase de exploración y desarrollo (25 minutos)

Pide a los alumnos que formen grupos de 3 componentes y que realicen los apartados de la tarea aportando ideas entre todos. Repárteles tijeras, pegamento, cartulinas para que recorten el tangram y folios para que realicen sus cálculos e indagaciones. Aconséjales que experimenten primero con las formas antes de pegarlas de forma definitiva. Deja unos minutos para que hablen entre ellos y empiecen a indagar. Pasado este tiempo, circula por los distintos grupos, quedándote, de momento, al margen y escuchando sus conversaciones y razonamientos. Si ves que algún grupo se encuentra atascado, dirígete hacia ellos y diles que te expliquen cómo están intentando realizar la tarea. Después, hazles preguntas o comentarios de tal forma que ellos mismos puedan responderse a sus dudas.



En esta tarea, los estudiantes pueden no llegar a encontrar la figura buscada porque han cometido errores en el proceso de cálculo del máximo común divisor, mínimo común múltiplo o descomposición de un número en factores primos. Suelen equivocarse ya que tienden a coger el factor común de mayor exponente al calcular el mcd por inercia de la palabra «mayor». Sucede lo mismo pero a la inversa con el mcm. Podrías decirle lo siguiente: «*Recordad que, tal y como dijimos en clase, las palabras máximo común divisor y mínimo común múltiplo son engañosas*». Si siguen sin encontrar el error, puedes remitirlos a su cuaderno, que busquen un ejemplo hecho en clase y verifiquen el procedimiento.

En el apartado b), cuando tengan elaborado el *matgram*, entrégales sobres de papel para que lo inserten dentro. Este sobre debe intercambiarse con otro grupo aleatorio y resolverlo.

Cuando lleguen al apartado de la elaboración del póster, entrégales folios tamaño A3 y pídeles que peguen el *matgram* de la actividad, el que han intercambiado con sus compañeros y el procedimiento realizado para resolverlos.

3. Fase de debate y discusión (10 minutos)

Una vez que han finalizado el póster, puesto que esta tarea es bastante sistemática, pide a un grupo voluntario que explique el procedimiento que ha llevado a cabo para resolver el *matgram*. Pregunta al resto de grupos si han tenido algún problema para resolver su rompecabezas o el de sus compañeros. En caso afirmativo, que expliquen dónde creen que ha estado el error.

4. Fase de sistematización del aprendizaje matemático (10 minutos)

Emplea esta fase para reorganizar todos los conceptos relevantes implicados en la resolución de la tarea. Debes destacar los siguientes:

- Criterios de divisibilidad de números naturales;
- Descomposición de un número en factores primos;
- Cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.

Menciona cuál es la figura resultante. Revisa los pósteres y explica los errores que se han cometido, dirigiéndote al grupo en particular para que los entiendan. Anímalos a que se compren un tangram, que realicen si quieren su adaptación al *matgram* y



jueguen entre ellos o con su familia, puesto que es un juego que desarrolla mucho la visión espacial y la competencia matemática.



ANEXO X. POSIBLE SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 13

Hay que obtener el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de 60 y 90. Para ello se descompone cada número en sus factores primos:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

También, se debe descomponer en factores primos los números 72 y 1.024:

$$72 = 2^3 \times 3$$

$$1.024 = 2^{10}$$

Con estos datos se pueden unir todas las piezas y se obtiene la *Figura: 17.1*

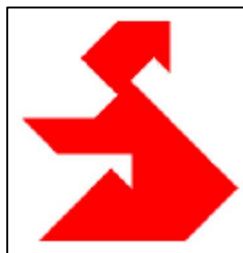


Figura 17.1. Solución del matgram (Vázquez & Alba, 2006, en https://www.matesymas.es/wp-content/uploads/2019/08/matgram_divisores.pdf).

Un ejemplo de *matgram* que pueden proponer los alumnos es el de la *Figura 17.2*, con forma de gato:

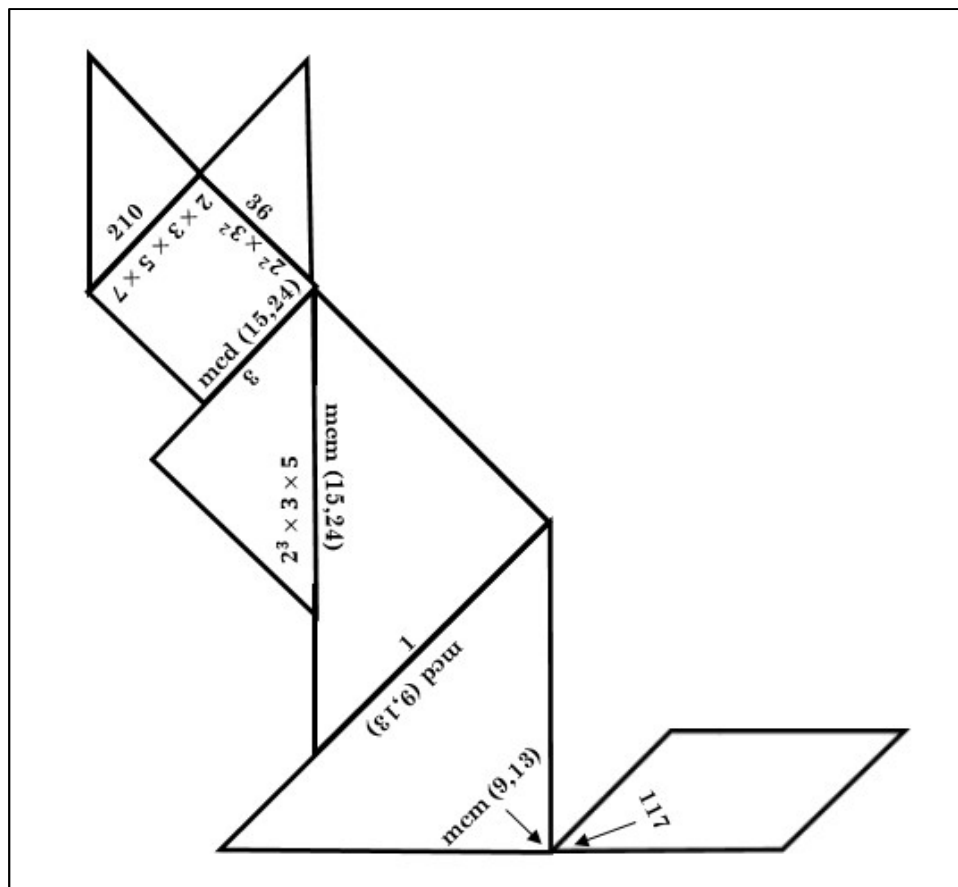


Figura 17.2. Posible matgram que pueden proponer los alumnos.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anzola, M., Caruncho, J. y M. Guitiérrez (1976). *Matemática 2º Bachillerato*. Pinto: Santillana.

Andonegui Zabala, M. (2006). *Divisibilidad*. Federación internacional Fe y Alegría. Recuperado el 27/05/2019 de <http://scioteca.caf.com/bitstream/handle/123456789/536/60.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En Campbell, S. y R. Zazkis (eds.), *Learning and Teaching Number Theory*, 131-137. Westport: Ablex Publishing.

Centro de Estudios Académicos a Distancia (s.f). Divisibilidad. Números primos. Congruencia. En *Matemáticas*, vol. 1, 1-68.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Alberio, I. y R. Colera Cañas (2016). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Anaya.

Consejería de Educación (2016). Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, nº 144: 108-396. Recuperado el 27/05/2019 de https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/BOJA16-144-00289-13500-01_00095875.pdf

Consortio Parque de las Ciencias (s.f). *Parque de las Ciencias Andalucía-Granada* [página web]. Consultado el 27/05/2019 en <http://www.parqueciencias.com/parqueciencias/index.html>



- Contretras Caballero, I., Fernández Palicio, I., Lobo García B., Pérez Sanz, J. L. y J. L. Uriondo González (2011). *Matemáticas 1º ESO*. San Fernando de Henares: Oxford University Press España.
- Departamento de Orientación del Colegio Antonio Gala (2018). *Plan de Atención a la Diversidad*. Dos Hermanas. Recuperado el 27/05/2018 de http://www.galacolegio.com/files/plan_centro/19/plan_centro.pdf
- Departamento de Orientación del IES Politécnico Cartagena (2011). *Guía de Atención a la Diversidad*. Cartagena. Recuperado el 27/05/2018 de http://www.politecnicocartagena.es/wp-content/uploads/2012/11/guia_adap.pdf
- Dorronsoro, J. y E. Hernández (1999). *Números, grupos y anillos*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A y Universidad Autónoma de Madrid.
- Etchegaray, S. C. (2017). *Análisis de significados personales e institucionales sobre prácticas de divisibilidad en el marco del enfoque ontosemiótico*. Recuperado el 27/05/2019 de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/etchegaray.pdf>
- Ferrero de Pablo, L., Gaztelu Alberio, I., Martín Martín, P. y G. Alonso Garzón (2015). *Matemáticas 5º Primaria*. Andalucía: Anaya.
- Ferrero de Pablo, L., Martín Martín, P., Gómez Quesada, J. M., Carvajal Sánchez, A. I. y L. I. de la Rosa Gómez (2015). *Matemáticas 6º Primaria*. Andalucía: Anaya.
- Flores Peñafiel, A. (1993). La Criba de Eratóstenes-Una conjetura y una prueba. *Educación Matemática*, 1: 5, 96-98.
- García-Muñoz, M. A. (2010). *Matemática discreta para la computación. Nociones teóricas y problemas resueltos*. Jaén: Universidad de Jaén.



- García-Muñoz, M. A., Ordóñez, C. y J. F Ruiz (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Universidad de Jaén.
- Garuti, R., Boero, P. y E. Lemut (1998). Cognitive units of theorems and difficulty of proof. En A. Olivier y K. Newstead (eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 345-352. Stellenbosch (Sudáfrica): University of Stellenbosch.
- Gascón, J. (2001). Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigaçao*, 2: 10, 33-66.
- Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores* [Tesis doctoral]. Granada (España): Universidad de Granada. Recuperado el 27/05/2019 de http://www.ugr.es/~batanero/documentos/Tesis_GEA.pdf
- Giacomone, B. (2017). Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos/giacomone.pdf>
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2/3: 22, 237-284.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11: 8, 111-132.
- Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de



- Granada. Recuperado el 27/05/2019 de [http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis EOS 2abril2016.pdf](http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf)
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 27/05/2019 de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- Godino, J. D. y C. Batanero (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3: 14, 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y V. Font (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 1-2: 39, 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática. En D. Inés Calderón (comp.), *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 47-78. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado el 27/05/2019 de [http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte i un enfoque ontosemiotico del conocimiento y instruccion matematica.pdf](http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf)
- Godino, J. D., Contreras, A. y V. Font (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1: 26, 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y C. de Castro (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 1: 24, 59-76.



- Godino, J. D. y A. M. Recio (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 3: 19, 405-414.
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y M. R. Wilhelmi, (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2/3: 34, 167-200.
- Gracián, E. (2011). *Los números primos. Un largo camino al infinito*. Villatuerta: RBA Coleccionables S.A.
- Hiebert, J. y P. Lefevre (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1-27. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- IES Jándula (2018). *Guía del profesorado. Curso 2018/2019*. Andújar.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1993). Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993 de 4 de junio. *Boletín Oficial del Estado*, nº 226: 27400-27438. Recuperado el 27/05/2019 de <https://www.boe.es/boe/dias/1993/09/21/pdfs/A27400-27438.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 52, pp.19349-19420. Recuperado el 27/05/2019 de <https://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015a). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria



- Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, nº 3, pp.169-546. Recuperado el 27/05/2019 de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015b). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, nº 25, pp.6986-7003. Recuperado el 27/05/2019 de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>
- Monaghan, J. y F. Ozmantar (2006). Abstraction and consolidation. *Educational Studies in Mathematics*, 3: 62, 233-258.
- Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia (s.f). Recuperado el 27/05/2019 de <http://mural.uv.es/juanmur/OPOS/tema04.pdf>
- Ordóñez Cañada, C. (2018). *La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en álgebra superior medida por un entorno informático* [Tesis doctoral]. Jaén: Universidad de Jaén. Recuperado el 27/05/2019 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_COrdones.pdf
- Piaget, J. (2001) *Studies in reflecting abstraction*. Sussex: Psychology Press (Editado en 1977 por Presses Universitaires de France).
- Pierce, R. (2011). *Disfruta Las Matemáticas* [página web]. Consultado el 27/05/2019 en <http://www.disfrutalasmatematicas.com/index.html>
- Roig, A. I., Llinares, S. y M. C. Penalva (2010). Construcción del concepto múltiplo común en el dominio de los números naturales. *Enseñanza de las Ciencias*, 2: 28, 261-274.
- Rosenthal, R. y L. Jacobson (1968). *Efecto Pigmalión en el aula*. Madrid: Marova.



- Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal for Mathematical Behaviour*, 1: 13, 55-80.
- Sepúlveda López, A. y J. G. Tinoco Ruíz (2000). Criterio de divisibilidad en los enteros. *Educación Matemática*, 3: 12, 82-93.
- Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., y M. Kinzel (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning. Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5: 35, 305-329.
- Thompson, Q., Cann, T., Onion, A., Hoyles, C., Brown, M., Walters, L., Powell, I. y D. Walsh (2007). *Bowland Maths* [página web]. Consultado el 27/05/2019 en <https://www.bowlandmaths.org.uk/index.html>
- Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical concept. *Educational Studies in Mathematics*, 3: 66, 273-291.
- University of Cambridge (2007). *Nrich* [página web]. Consultado en 27/05/2019 en <https://nrich.maths.org/>
- Vázquez de la Torre, J. M. y R. Alba (2006). *Mates y +* [página web]. Consultado el 27/05/2019 en <https://www.matesymas.es/>
- Vygotsky, L. S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica-Grijalbo.
- Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1: 4, 63-92.
- Zazkis, R. y K. Gadowsky (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. En A. Couco (ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The Roles of Representation in School Mathematics*, 41-52. Reston, VA: NCTM.



Zazkis, R. y P. Liljedahl (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3: 35, 164-186.