



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

**EXTREMOS RELATIVOS
LIBRES. ELABORACIÓN
DE UN TUTORIAL PARA
SU CÁLCULO
UTILIZANDO EL
PROGRAMA
MATHEMATICA**

Alumno: Luis Viedma González

JUNIO, 2015

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	2
1.1. SUMMARY.....	2
2. CAPÍTULO 1: EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN.	3
2.1. DEFINICIÓN.	3
2.2. TIPOLOGÍA Y DESARROLLO ANALÍTICO.....	3
3. CAPÍTULO 2: EXTREMOS RELATIVOS LIBRES.	5
3.1. DEFINICIÓN Y DESARROLLO ANALÍTICO	5
3.2. CÁLCULO DE EXTREMOS RELATIVOS LIBRES. EJEMPLOS.....	6
4. CAPÍTULO 3: EXTREMOS RELATIVOS CONDICIONADOS.....	10
4.1. DEFINICIÓN Y DESARROLLO ANALÍTICO.	10
4.2. CÁLCULO DE EXTREMOS RELATIVOS CONDICIONADOS. EJEMPLOS. ...	12
5. CAPÍTULO 4: SOFTWARE MATHEMATICA V.10.	16
6. CAPÍTULO 5: APLICACIÓN A LA ECONOMÍA.....	24
6.1. INTRODUCCIÓN.....	24
6.2. EJEMPLO FÁBRICA.	24
6.3. EJEMPLO BENEFICIO	27
6.4. EJEMPLO RESTRICCIÓN DE COSTES.	29
7. CAPÍTULO 6: TUTORIAL.....	31
8. CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.....	34
9. BIBLIOGRAFÍA.	35
10. ANEXOS.	36

1. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo tiene como propósito realizar un tutorial con fines docentes sobre la resolución del cálculo de extremos relativos, tanto su variedad de extremos relativos libres como extremos relativos condicionados y los extremos absolutos mediante el software *Wolfram Mathematica* versión 10.0 en español utilizando el sistema operativo *Windows 10*.

Al margen de guiar al lector mediante el texto aquí plasmado, se facilitará a su vez una guía multimedia elaborada con el software *Adobe Captivate* versión 77.0.0.118 que servirá de soporte docente para la comprensión paso a paso de la estructura del *Mathematica*.

En este tutorial se presentan ejercicios resueltos que ayudarán a comprender mejor la explicación.

Una vez finalizado el proceso de aprendizaje, el interesado será capaz de afrontar el cálculo de extremos en funciones de varias variables y a su vez dar respuesta a la necesidad de optimización en cualquier tipo de ámbito consiguiendo de este modo averiguar máximos y mínimos que se consideren oportunos.

El ensayo ha sido desarrollado en 6 capítulos. En los capítulos del 1 al 3 se definirán los aspectos cruciales para el cálculo de extremos seguido de sus correspondientes desarrollos. En el capítulo 4 hablaremos acerca del programa *Mathematica*, sus mecánicas y ejemplos prácticos. Seguiremos con la aplicación económica de estos recursos en el capítulo 5 y el último capítulo será el de conclusiones y recomendaciones, donde se hará una breve apreciación de las sensaciones a la hora de desarrollar el temario, consideraciones personales y recomendaciones. Los dos últimos apartados del trabajo quedan reservados para la bibliografía utilizada y el adjunto de anexos.

1.1.SUMMARY

This essay will explain to the reader the method to use the software *Mathematica v.10* in order to calculate relative extrema, not only free relative extremes but also absolute and conditional extrema. The further the lector goes throw the essay, the bigger will be his knowledge about this topic. It will go along, using captures of the platform and multimedia support, step by step to get used to the way to practice and solve problems related with optimization. Notice that this essay is written in Spanish.

2. CAPÍTULO 1: EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN.

2.1.DEFINICIÓN.

Los extremos de una función se conocen como los valores más grandes o más pequeños que obtiene una función en una región determinada.

Si estos extremos son los más grandes o pequeños, según se esté analizando, en la totalidad del dominio de la función, y por consiguiente no existe, para ningún valor de la función, un punto cuya imagen sea superior en caso de hablar de máximos, o inferior en caso de hablar de mínimos, entonces estaremos hablando de extremos absolutos.

Si por el contrario, el extremo es analizado dentro de un conjunto particular sin atender a la totalidad del dominio, estaremos hablando de extremos relativos o extremos locales, puesto que si agrandásemos el conjunto existirían valores de la función cuya imagen serían mayores o menores que la de estos extremos relativos.

2.2.TIPOLOGÍA Y DESARROLLO ANALÍTICO.

La expresión analítica de los extremos de una función es la siguiente:

Extremos relativos o locales.

Planteamiento; Sea $f(x): A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$ y sea $P = (x_0, f(x_0))$

En el caso de analizar un máximo en un entorno $E'(x_0)$,

Se dice que el punto P es un máximo relativo de f si existe un entorno $\exists E'(x_0) \forall x \text{ de } E'(x_0) \text{ y } f(x_0) \geq f(x)$

En el caso de analizar un mínimo;

Se dice que el punto P es un mínimo relativo de f si $\exists E'(x_0) \forall x \text{ de } E'(x_0) \text{ y } f(x_0) \leq f(x)$

Extremos absolutos.

Planteamiento; Sea $f(x): A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$ y sea $P = (x_0, f(x_0))$

En el caso de analizar un máximo

Se dice que el punto P es un máximo absoluto de f si $\forall x \neq x_0 \in A \rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

En el caso de analizar un mínimo

Se dice que el punto P es un mínimo absoluto de f si $\forall x \neq x_0 \in A \rightarrow f(x_0) \leq f(x)$

Para poder abarcar mayor terreno a la hora de analizar los extremos continuaremos exponiendo la teoría en función de varias variables.

Extremos relativos de varias variables.

Sea $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ una función a optimizar en función de las siguientes restricciones o condiciones:

$$g_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$g_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$g_3 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

...

$$g_m = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Siendo $m < n$.

Siendo $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ la función objetivo y $g_m = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_m$ con $i = 1, 2, 3, \dots, m$ las restricciones del problema.

Si $m = 0$ y por consiguiente no hay restricciones, entonces los extremos resultantes serán relativos libres.

Si $m > 0$ y por consiguiente hay restricciones, entonces los extremos resultantes serán relativos condicionados y la función objetivo estará sujeta a ciertas condiciones.

3. CAPÍTULO 2: EXTREMOS RELATIVOS LIBRES.

3.1.DEFINICIÓN Y DESARROLLO ANALÍTICO

Definición.

Sea D abierto, x_0 perteneciente a D y $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida f como $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ y $g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$, con $i = 1, 2, 3, \dots, m$

1. $f(x)$ presenta un mínimo en $x_0 \in D$ si $f(x_0) < f(x), \forall x \in B(x_0, r)$.
2. $f(x)$ presenta un máximo en $x_0 \in D$ si $f(x_0) > f(x), \forall x \in B(x_0, r)$.
3. $f(x)$ presenta un punto de silla relativo en $x_0 \in D$ si Existe $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ tal que:

$$f(x_0) > f(x_1)$$

$$f(x_0) < f(x_2)$$

Siendo $B(x_0, r)$ un entorno cerrado de centro x_0 y radio r .

Condición necesaria.

Sea D abierto, $x_0 \in D$ $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Si f tiene un extremo relativo en x_0 y $f \in C^1(x_0) \rightarrow \nabla f(x) = 0$

Matriz Hessiana.

Sea D abierto, $x_0 \in D$, $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(x_0)$, se llama matriz Hessiana a la matriz cuadrada y simétrica siguiente:

$$H_f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Condición suficiente.

Sea D abierto, $x_0 \in D$, $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(x_0)$,

1. Si $H_f(x_0)$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 .
2. Si $H_f(x_0)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en x_0 .
3. Si $H_f(x_0)$ es indefinida, entonces f tiene un punto de silla relativo en x_0 .

3.2.CÁLCULO DE EXTREMOS RELATIVOS LIBRES. EJEMPLOS.

En el siguiente apartado veremos algunos ejemplos del cálculo de extremos relativos libres de varias variables e intentaremos generar una idea de cómo resolverlos.

EJEMPLO 1.

Optimice la siguiente función:

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Calculamos las dos derivadas parciales primeras de la función:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y\end{aligned}$$

Igualamos las dos derivadas parciales a 0 para obtener así los puntos que anulan la derivada, es decir, en los que se produce la irregularidad.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -2x = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y = 0\end{aligned}$$

Una vez obtenidos los puntos, en este caso $(x,y) = (0,0)$, desarrollamos la matriz Hessiana asociada a la función con el objetivo de ver si es positiva o negativa, para ello resolvemos las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los menores para poder clasificar los resultados,

$$H_1 = -2 < 0$$

$$H_2 = \text{Det}(H_f) = 4 > 0$$

La función es definida negativa, por lo que el punto singular $(0,0)$ resulta ser un máximo relativo de la función $f(x,y)$.

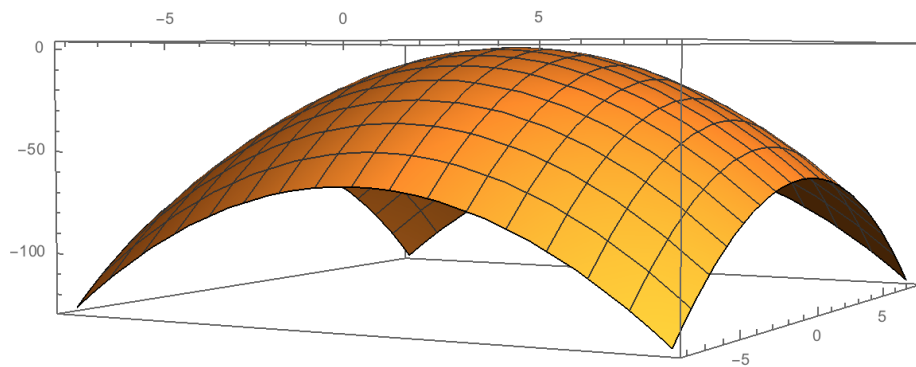


Figura 1.

Como podemos observar en la figura 1, la función describe un máximo en el recinto acotado, que gracias a los cálculos desarrollados podemos confirmar que es un máximo relativo en el punto $(0,0)$.

EJEMPLO 2.

Maximice la función $f(x, y)$ siguiendo los pasos naturales en su cálculo, siendo $x \neq 0, y \neq 0$

$$f(x, y) = x^2(x^2 - 2) + y^2(y^2 - 2) + 4xy$$

Calculamos las dos derivadas parciales de primer orden de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x$$

Igualamos las dos derivadas parciales a 0 para obtener así los puntos que anulan la derivada, es decir, en los que se produce la irregularidad.

$$x^3 - x + y = 0$$

$$y^3 + x - y = 0$$

Realizando los cálculos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones llegamos al resultado siguiente

$$A(0,0), \quad B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Una vez obtenidos los puntos, en este caso al obtener varios resultados conseguimos una combinación de sus puntos; desarrollamos la matriz Hessiana asociada a la función con el objetivo de ver si es definida positiva, negativa o indefinida en todos los puntos, para ello resolvemos las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Al haber 3 puntos, se ha de analizar qué sucede en cada uno de los puntos a excepción del punto A.

- Para $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

$$H_{1f}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 4 = 20 > 0$$

$$\det [H_{f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}] = \begin{vmatrix} 12(\sqrt{2})^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12(-\sqrt{2})^2 - 4 \end{vmatrix} = -576 < 0$$

En este caso, la función es indefinida por lo que en el punto $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ hay un punto de silla.

- Para $C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$H_{1f}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 - 4 = -28 < 0$$

$$\det [H_{f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})}] = \begin{vmatrix} 12(-\sqrt{2})^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12(\sqrt{2})^2 - 4 \end{vmatrix} = -576 < 0$$

En este caso, la función es indefinida por lo que en el punto $C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hay un punto de silla.

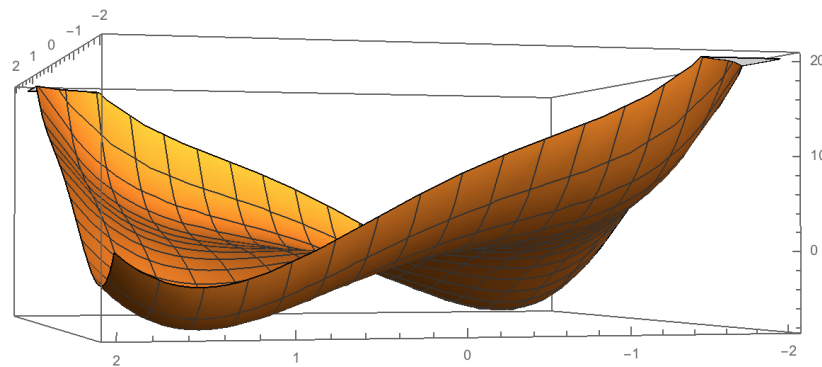


Figura 2.

La figura 2 corresponde a la gráfica de la función objetivo y podemos ver claramente el cambio de tendencia que experimenta generando el punto de silla que hemos obtenido en el cálculo.

4. CAPÍTULO 3: EXTREMOS RELATIVOS CONDICIONADOS.

4.1.DEFINICIÓN Y DESARROLLO ANALÍTICO.

Definición.

Sea D abierto, x_0 perteneciente a D y $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida f como

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Sujeta a unas restricciones tales como

$$g_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$g_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$g_3 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

...

$$g_m = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Siendo $0 < m < n$

Se define la función Lagrangiana como:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) \\ = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda_1[g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - b_1] \\ + \lambda_2[g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - b_2] + \lambda_3[g_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - b_3] + \dots \\ + \lambda_m[g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - b_m] \end{aligned}$$

Siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ variables auxiliares llamadas multiplicadores de Lagrange destinadas a resolver el problema en cuestión.

Condición necesaria.

Sea D abierto, x_0 perteneciente a D y $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida f como

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Sujeta a unas restricciones tales como

$$g_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$g_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$g_3 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

...

$$g_m = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Siendo $0 < m < n$

Tal que $f \in C^1(D)$ y $g = (g_1, g_2, g_3, \dots, g_m) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \in C^1(D)$. Si $x_0 \in D$ es un extremo (máximo o mínimo) del problema general de optimización, entonces, existe $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$ tal que (x_0, λ_0) es un punto crítico de la función lagrangiana.

Condición suficiente.

Siendo $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$ y $g = (g_1, g_2, g_3, \dots, g_m) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \in C^1(D)$.

Sea $L(x, \lambda)$ la función lagrangiana y (x_0, λ_0) un punto crítico de dicha función.

Sea,

$$H_X L(X_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 L(X_0, \lambda_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Y restringida por $J_g(x_0).dx = 0$.

Si la matriz es definida positiva, entonces x_0 es un mínimo relativo de f condicionado por $g(x) = b$.

Si la matriz es definida negativa, entonces x_0 es un máximo relativo de f condicionado por $g(x) = b$.

4.2.CÁLCULO DE EXTREMOS RELATIVOS CONDICIONADOS. EJEMPLOS.

En el siguiente apartado veremos algunos ejemplos del cálculo de extremos relativos libres de varias variables e intentaremos generar una idea de cómo resolverlos.

EJEMPLO 3.

Dada la siguiente función $f(x, y)$ trate de optimizarla, sabiendo que está sujeta a la restricción $x + y = 12$

$$f(x, y) = xy$$

s.a.

$$x + y = 12$$

Desarrollamos la función lagrangiana, aportando tantas variables auxiliares/lagrangianas como restricciones tenga el problema.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(12 - x - y)$$

Calculamos las derivadas parciales de la función lagrangiana y las igualamos a cero con el fin de obtener los puntos críticos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = y \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = x \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 12 - x - y = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen las siguientes coordenadas,

$$x = 6 \quad y = 6 \quad \lambda = 6$$

Hacemos la matriz Hessiana con sus correspondientes derivadas de segundo orden y calculamos los menores asociados.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) &= 1 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los menores asociados.

$$\begin{aligned} H_{1f} &= 0 \\ H_{2f} &= -1 < 0 \end{aligned}$$

El menor de orden 1 es 0, por lo que nos encontramos ante un caso dudoso y habrá que realizar un análisis más profundo.

$$\begin{aligned} Q &= 2dx dy \\ g(x, y) &= x + y - 12 \\ J_g &= (1, 1) \\ J_g dX &= 0 \\ dx + dy &= 0; dx = -dy \\ Q_R &= 2(-dy)dy \end{aligned}$$

$$Q_R = -2dy^2$$

$$Q_R = (-2)$$

$$Q_{1R} = -2 < 0$$

La función es definida negativa por lo que en el punto $(x, y) = (6, 6)$ hay un máximo relativo condicionado.

EJEMPLO 4.

Calcular los puntos óptimos de la función de tres variables $f(x, y, z)$ sabiendo que en este caso se encuentra sujeta a 2 restricciones:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

s.a.

$$g_1(x, y, z) = x + y + z = 14$$

$$g_2(x, y, z) = 5x + 10y + 15z = 150$$

Desarrollamos la función lagrangiana, aportando tantas variables auxiliares/lagrangianas como restricciones tenga el problema.

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + \lambda_1(x + y + z - 14) + \lambda_2(5x + 10y + 15z - 150)$$

Calculamos las derivadas parciales de la función lagrangiana y las igualamos a cero con el fin de obtener los puntos críticos,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 4x + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2y + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 6z + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z - 14 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 5x + 10y + 15z - 150 = 0$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen las siguientes coordenadas,

$$x = 2 \quad y = 8 \quad z = 4 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{8}{5}$$

Hacemos la matriz Hessiana con sus correspondientes derivadas de segundo orden.

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos los menores asociados a la matriz.

$$H_{1f} = 4 > 0$$

$$\det [H_{2f}] = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\det [H_f] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0$$

La función es definida positiva por lo que existe un mínimo relativo condicionado en el punto

$$(x, y, z) = (2, 8, 4)$$

5. CAPÍTULO 4: SOFTWARE MATHEMATICA V.10.



A continuación explicaremos paso a paso cómo utilizar el software Mathematica 10 para el cálculo de extremos de cualquier tipo.

En este tutorial daremos por supuesto que se conoce la mecánica básica del software, así pues, solo se explicará con detalle el cálculo y algunos apartados puntuales. Acompañando este compendio se adjuntará también una explicación multimedia con el fin de facilitar la experiencia al interesado.

A la hora de calcular cualquier extremo, ya sea relativo o absoluto, lo primero que deberemos hacer es establecer la función objeto de estudio y sus variables asociadas. Hay que hacer hincapié a la hora de la sintaxis, puesto que el software es muy escrupuloso a la hora de leer lo que el usuario haya transcrito, dándose con frecuencia errores o malentendidos debido a una mala redacción.

Para que sea más fácil el seguimiento de este tutorial utilizaremos como ejemplos, los ya expuestos con anterioridad en los primeros apartados.

Cálculo de extremos relativos libres.

Vamos a resolver con el programa *Mathematica* los problemas anteriores

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

```
In[1]:= f[x_, y_] = 1 - x^2 - y^2
```

```
Out[1]= 1 - x^2 - y^2
```



Para establecer la función habrá que escribir la letra con la que vayamos a definir la función, es este caso es *f* seguido de corchetes donde irán las variables asignadas separadas por comas y con un guion bajo después de la variable; acto seguido escribiremos un signo igual y la función, teniendo en cuenta que no hay ninguna separación entre los caracteres. Al finalizar la fórmula teclearemos SHIFT+INTRO, lo que hayamos redactado se clasificará con el prefijo *in*(#):=, siendo # el número correspondiente a la entrada. Nótese que aparecerá automáticamente una segunda línea con la transcripción de lo que el software haya entendido, y al ser una respuesta, el prefijo será *out*(#)= siendo # el número correspondiente a la salida.

En esta nueva versión de Mathematica, el programa ofrecerá unas opciones debajo del párrafo inscrito como por ejemplo el de crear una gráfica, simplificar la expresión, derivar o integrar, entre otros.

Continuando con el cálculo, procederemos a la resolución de las derivadas parciales primeras igualando éstas a cero. En este caso, para realizar un cálculo, usaremos el comando “Solve” y para introducir una derivada, podremos utilizar la letra *D* mayúscula, que el programa asimila automáticamente a la función derivar, o bien, podremos usar el botón correspondiente en cualquiera de las paletas.

Calculamos las dos derivadas parciales primeras de la función. Igualamos las dos derivadas parciales a 0 para obtener así los puntos que anulan la derivada, es decir, en los que se produce la irregularidad.

Todos estos pasos se abrevian en el software del siguiente modo,

```
In[2]:= Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}, {x, y}]  
Out[2]:= {{x -> 0, y -> 0}}
```

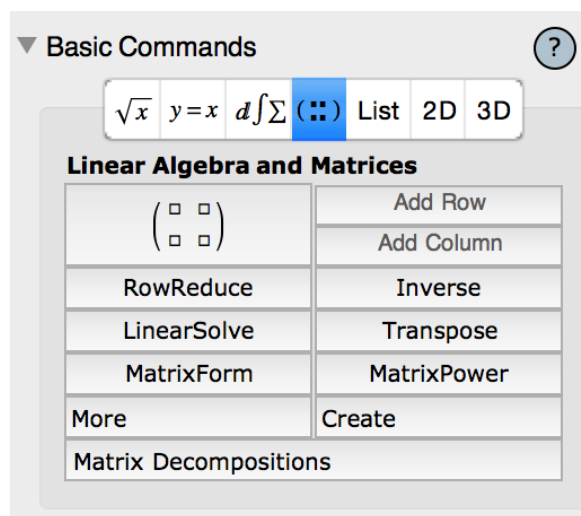


El esquema a seguir en este caso para la función Solve es:

Solve[{D[función],variable diferencial]==0, repetir mismo esquema en función del número de variables separadas por comas},{esquema de variables separadas por comas}]

Una vez obtenidos los puntos, en este caso $(x, y) = (0, 0)$, desarrollamos la matriz Hessiana asociada a la función con el objetivo de ver si es positiva o negativa, para ello resolvemos las derivadas parciales segundas.

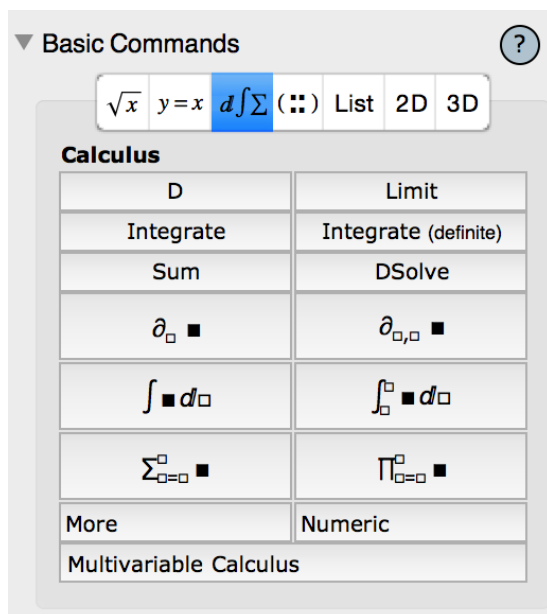
En el programa *Mathematica* definiremos primero el nombre de la matriz Hessiana; en este caso la llamaremos 'Hessianaf' seguido de un igual y pincharemos en el icono de la matriz en la paleta.



Acto seguido nos aparecerá el esquema que hay que seguir para completar los campos de la matriz que hemos seleccionado.

$$\mathbf{Hessianaf} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Cada cuadrado corresponde a una localización de la matriz. En este caso, para introducir las derivadas parciales segundas seleccionaremos el botón correspondiente en la paleta.



Y rellenaremos los campos de la forma en la que se indica, escribiendo la referencia de la fórmula principal y las variables correspondientes a la matriz Hessiana.

$$\mathbf{Hessianaf} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial var_1} \left(\frac{\partial}{\partial var_1} \right) & \frac{\partial}{\partial var_1} \left(\frac{\partial}{\partial var_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial var_2} \left(\frac{\partial}{\partial var_1} \right) & \frac{\partial}{\partial var_2} \left(\frac{\partial}{\partial var_2} \right) \end{pmatrix}$$

Una vez completados los campos y escritas las variables el programa automáticamente nos dará el resultado de la matriz en forma lineal.

$$\text{In[3]:= } \mathbf{Hessianaf} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out[3]= } \{ \{-2, 0\}, \{0, -2\} \}$$

Si quisiéramos ver la matriz en su estado natural utilizaremos el comando **MatrixForm**[Nombre asignado a la matriz].

```
In[4]:= MatrixForm[Hessianaf]
```

Out[4]//**MatrixForm**=

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso es fácil adivinar que el determinante de la matriz es positivo, pero si quisiéramos averiguarlo mediante el programa, el código a usar es **Det[Nombre de la matriz]**.

```
In[5]:= Det[Hessianaf]
```

Out[5]= 4

Como vemos, el resultado es 4 y es mayor que 0, por lo que el punto singular (0,0) resulta ser un mínimo relativo de la función $f(x, y)$.

Para realizar este problema con *Mathematica* hemos seguido el mismo proceso y los mismos pasos que si se hubiera hecho sobre el papel. No obstante, el programa dispone de dos comandos, “Maximize” y “Minimize” que calculan los puntos donde la función alcanza sus extremos, ya sean libres o condicionados, facilitándonos no sólo el punto donde optimiza sino que también nos proporciona el valor del máximo o del mínimo.

La sintaxis de este comando es **Maximize[f[x,y], {x,y}]** o bien **Minimize[f[x,y], {x,y}]**

```
In[6]:= Maximize[f[x, y], {x, y}]
```

Out[6]= {1, {x → 0, y → 0}}

```
In[7]:= Minimize[f[x, y], {x, y}]
```

Out[7]= $\left\{ -\infty, \left\{ x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \frac{33}{10} \right\} \right\}$

Puesto que en el problema no sabíamos, a priori, si íbamos a obtener un máximo o un mínimo, decidimos aplicar ambos comandos.

Viendo el resultado podemos afirmar que existe un máximo en $(x, y) = (0,0)$ cuyo valor es 1.

Cálculo de extremos relativos condicionados.

Continuamos resolviendo el siguiente ejemplo de extremos relativos condicionados:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

s.a.

$$g_1(x, y, z) = x + y + z = 14$$

$$g_2(x, y, z) = 5x + 10y + 15z = 150$$

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + \lambda_1(x + y + z - 14) + \lambda_2(5x + 10y + 15z - 150)$$

In[1]:= **f**[**x_**, **y_**, **z_**] = **2 x^2 + y^2 + 3 z^2**

Out[1]= **2 x^2 + y^2 + 3 z^2**

In[2]:= **g1**[**x_**, **y_**, **z_**] = **x + y + z == 14**

Out[2]= **x + y + z == 14**

In[3]:= **g2**[**x_**, **y_**, **z_**] = **5 x + 10 y + 15 z == 150**

Out[3]= **5 x + 10 y + 15 z == 150**

In[4]:= **L**[**x_**, **y_**, **z_**, **u_**, **v_**] =
2 x^2 + y^2 + 3 z^2 + u (x + y + z - 14) + v (5 x + 10 y + 15 z - 150)

Out[4]= **2 x^2 + y^2 + 3 z^2 + u (-14 + x + y + z) + v (-150 + 5 x + 10 y + 15 z)**

Iguualamos a 0 y resolvemos el sistema de ecuaciones.

In[5]:= **Solve**[{**D**[**L**[**x**, **y**, **z**, **u**, **v**], **x**] == **0**, **D**[**L**[**x**, **y**, **z**, **u**, **v**], **y**] == **0**,
D[**L**[**x**, **y**, **z**, **u**, **v**], **z**] == **0**, **D**[**L**[**x**, **y**, **z**, **u**, **v**], **u**] == **0**,
D[**L**[**x**, **y**, **z**, **u**, **v**], **v**] == **0**}, {**x**, **y**, **z**, **u**, **v**}]

Out[5]= **{{x -> 2, y -> 8, z -> 4, u -> 0, v -> -8/5}}**

Hacemos la matriz Hessiana

```
In[6]:= Hessianaf =

$$\begin{pmatrix} \partial_{x,x} L[x, y, z, u, v] & \partial_{x,y} L[x, y, z, u, v] & \partial_{x,z} L[x, y, z, u, v] \\ \partial_{y,x} L[x, y, z, u, v] & \partial_{y,y} L[x, y, z, u, v] & \partial_{y,z} L[x, y, z, u, v] \\ \partial_{z,x} L[x, y, z, u, v] & \partial_{z,y} L[x, y, z, u, v] & \partial_{z,z} L[x, y, z, u, v] \end{pmatrix}$$

Out[6]= {{4, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 6}}
```

```
In[7]:= MatrixForm[Hessianaf]
Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

```

Clasificaremos la forma cuadrática dada por la matriz Hessiana mediante valores propios usando el comando **Eigenvalues**[Nombre de la Matriz].

```
In[8]:= Eigenvalues[Hessianaf]
Out[8]= {6, 4, 2}
```

Al ser todos los valores propios mayores que 0, la matriz es definida positiva, por lo que hay un mínimo relativo condicionado en el punto $(x, y, z) = (2, 8, 4)$.

Aquí, en el caso de los extremos relativos condicionados, también se puede usar los comandos “Maximize” y “Minimize” anteriormente expuestos. La sintaxis cuando introducimos restricciones es **Maximize/Minimize**[{función, restricción 1, restricción 2,..., restricción n},{variables}].

```
In[9]:= Maximize[{f[x, y, z], g1[x, y, z], g2[x, y, z]}, {x, y, z}]
Out[9]= {∞, {x → Indeterminate, y → Indeterminate, z → Indeterminate}}

In[10]:= Minimize[{f[x, y, z], g1[x, y, z], g2[x, y, z]}, {x, y, z}]
Out[10]= {120, {x → 2, y → 8, z → 4}}
```

Es interesante destacar que aunque nuestra finalidad sea maximizar o minimizar, siempre resulta enriquecedor y pedagógico mostrar el proceso paso a paso, ya que así obtendremos resultados intermedios que quizás sean importantes y necesitamos tenerlos en cuenta para algún otro resultado o para poner de manifiesto alguna característica de las funciones o restricciones.

6. CAPÍTULO 5: APLICACIÓN A LA ECONOMÍA.

6.1.INTRODUCCIÓN.

El fin en el cálculo de los extremos de una función aplicado al campo de la economía es la optimización de problemas para maximizar o minimizar una función. El objetivo es encontrar, dentro del abanico de posibilidades, la conjunción de factores que sea más eficiente, aprovechando al máximo o al mínimo las variables sujetas al problema. Por ello, es fundamental la determinación de las variables, así como encontrar la función o funciones que se deriven del problema, tanto la principal a optimizar, como aquellas que restrinjan las posibilidades.

A continuación procederemos a la demostración del cálculo de extremos aplicados a situaciones de índole económica, debido a la gran variedad de aplicaciones que de este cálculo se pueden derivar, nos conformaremos con algunos ejemplos básicos que puedan entenderse y llegar a extrapolar comprendiendo su amplia aplicación.

6.2. EJEMPLO FÁBRICA.

Una fábrica que elabora un producto tiene una capacidad de producción de 3.000 unidades al mes. La función de utilidad por producir y vender q unidades mensuales está dada por

$$U(q) = -100.000 + 60.000 q + 985 q^2 - \frac{1}{3} q^3$$

Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad mensual.

Iremos desarrollando la solución con el programa *Mathematica*.

Tenemos que conseguir dónde se alcanza el máximo absoluto de la función U en el intervalo $[0, 3000]$.

```
In[1]:= U[q_] = -100 000 + 60 000 q + 985 q^2 -  $\frac{1}{3}$  q^3
```

```
Out[1]= -100 000 + 60 000 q + 985 q^2 -  $\frac{q^3}{3}$ 
```

Como U es una función continua por ser un polinomio y queremos conseguir el máximo en un intervalo cerrado podemos aplicar el algoritmo de búsqueda dado en esta sección.

Primero se calculan los valores críticos. Como la función tiene derivada en todas partes solo planteamos $U'(q) = 0$ para encontrar los valores críticos.

```
In[2]:= D[U[q], q]
```

```
Out[2]= 60 000 + 1970 q - q^2
```

```
In[3]:= Solve[D[U[q], q] == 0]
```

```
Out[3]= {{q -> -30}, {q -> 2000}}
```

Realizamos la segunda derivada con el fin de certificar si en ese punto crítico existe un máximo o un mínimo

Existe un máximo en $q = 2000$

```
In[4]:= D[D[U[q], q], q]
```

```
Out[4]= 1970 - 2 q
```

```
In[5]:= 1970 - 2 * 2000
```

```
Out[5]= -2030
```

Sustituimos $q = 2000$ en la función objetivo

In[6]:= **U[2000]**

Out[6]:= $\frac{4\,179\,700\,000}{3}$



En conclusión el nivel de producción en que la utilidad es máxima es 2.000 unidades.

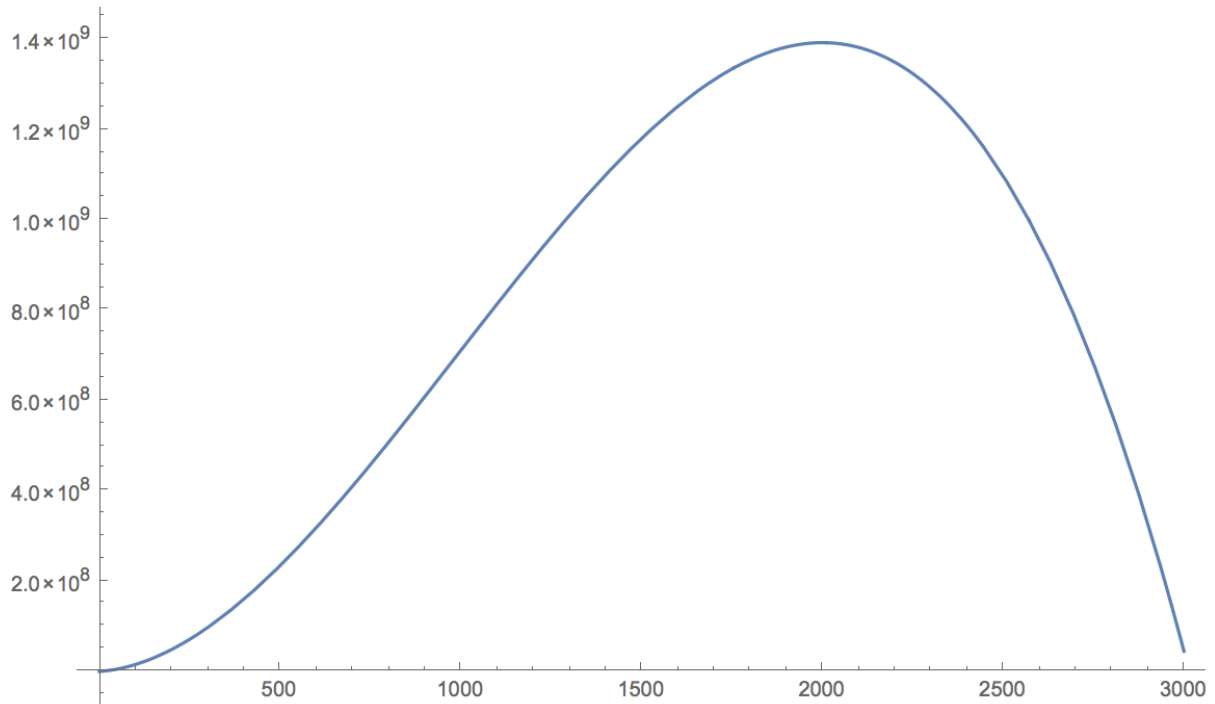


Figura 5.

Como podemos comprobar en la figura 5, la función acotada en $[0, 3000]$ obtiene un máximo en $q = 2000$ donde el resultado es 1.393.233.333.

6.3.EJEMPLO BENEFICIO

Una empresa produce dos tipos de bien, el producto A y el producto B. El coste diario de producción viene determinado por la función

$$C(a, b) = 0,04 a^2 + 0,01 ab + 0,01 b^2 + 4 a + 2 b + 500$$

Supongamos que el producto A es vendido a 15 u.m. y el B a 9 u.m. ¿Cuántas unidades hay que vender de A y B para conseguir el máximo beneficio posible?

La función beneficio viene determinada por ingresos menos costes; pudiendo formularla de la siguiente manera:

$$B(a, b) = I(a, b) - C(a, b)$$

$$B(a, b) = 15 a + 9 b - (0,04 a^2 + 0,01 ab + 0,01 b^2 + 4 a + 2 b + 500)$$

```
In[1]:= F[a_, b_] = 15 a + 9 b - (0.04 a^2 + 0.01 * a * b + 0.01 b^2 + 4 a + 2 b + 500)
```

```
Out[1]= -500 + 11 a - 0.04 a^2 + 7 b - 0.01 a b - 0.01 b^2
```

Calculamos las derivadas parciales con respecto a cada producto y las anulamos para conseguir los puntos críticos.

```
In[2]:= Solve[{D[F[a, b], a] == 0, D[F[a, b], b] == 0}, {a, b}]
```

```
Out[2]= {{a -> 100., b -> 300.}}
```

Obtenemos el punto $(a, b) = (100, 300)$ cuya imagen asciende a 1100

```
In[3]:= F[100, 300]
```

```
Out[3]= 1100.
```

Calculamos la matriz Hessiana con sus correspondientes derivadas de segundo orden para proceder al estudio de sus menores

```
In[4]:= Hessianaf =  $\begin{pmatrix} \partial_{a,a} F[a, b] & \partial_{a,b} F[a, b] \\ \partial_{b,a} F[a, b] & \partial_{b,b} F[a, b] \end{pmatrix}$ 
```

```
Out[4]= {{-0.08, -0.01}, {-0.01, -0.02}}
```

```
In[5]:= MatrixForm[Hessianaf]
```

```
Out[5]/MatrixForm=
```

```
 $\begin{pmatrix} -0.08 & -0.01 \\ -0.01 & -0.02 \end{pmatrix}$ 
```

Clasificamos la forma cuadrática por valores propios

```
In[6]:= Eigenvalues[Hessianaf]
```

```
Out[6]= {-0.0816228, -0.0183772}
```

Los valores propios son menores que cero, por lo que la matriz es definida negativa, lo que se resuelve en un máximo relativo en el punto $(a, b) = (100, 300)$

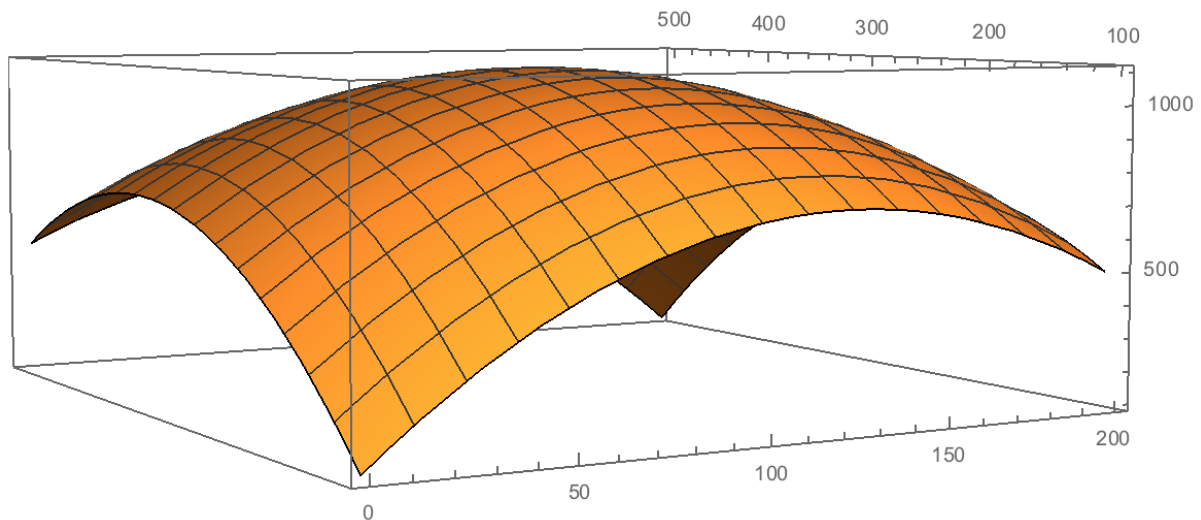


Figura 6.

Como podemos intuir en la figura 6, la curva de la función describe un máximo en el punto $(100, 300)$, es decir, la empresa maximizaría beneficios si produjese 100 unidades del producto A y 300 unidades del producto B.

6.4.EJEMPLO RESTRICCIÓN DE COSTES.

Dada una empresa cuyo plan de costes está dado por la función

$$C(x, y) = 3 + 2x + 2y$$

Y la función ingreso por

$$I(x, y) = 12x - x^2 + 20x - 3y^2$$

Siendo x e y variables referentes a las cantidades demandadas de dos artículos. Debemos maximizar la función beneficio sujeta a la restricción de coste de 27 unidades. Es decir, nuestro problema se traduce de la siguiente forma:

$$B(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$$

$$B(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 10x + 18y - 3$$

s.a.

$$3 + 2x + 2y = 27$$

```
In[1]:= L[x_, y_, u_] = -x^2 - 3 y^2 + 10 x + 18 y - 3 + u (3 + 2 x + 2 y - 27)
```

```
Out[1]= -3 + 10 x - x^2 + 18 y - 3 y^2 + u (-24 + 2 x + 2 y)
```

Calculamos las derivadas parciales primeras y las igualamos a 0 para obtener los puntos críticos

```
In[2]:= Solve[{D[L[x, y, u], x] == 0, D[L[x, y, u], y] == 0,
              D[L[x, y, u], u] == 0}, {x, y, u}]
```

```
Out[2]= {{x -> 8, y -> 4, u -> 3}}
```

Calculamos la matriz hessiana con sus correspondientes derivadas de segundo orden

```
In[3]:= Hessianaf =  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 
```

```
Out[3]= {{-2, 0}, {0, -6}}
```

```
In[4]:= Eigenvalues[Hessianaf]
```

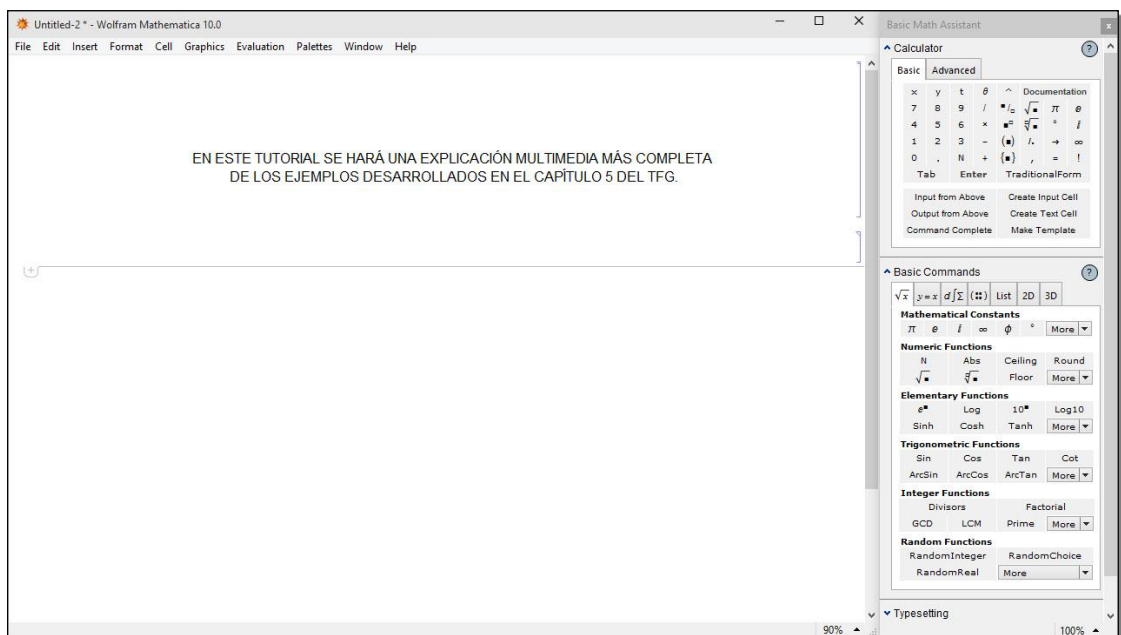
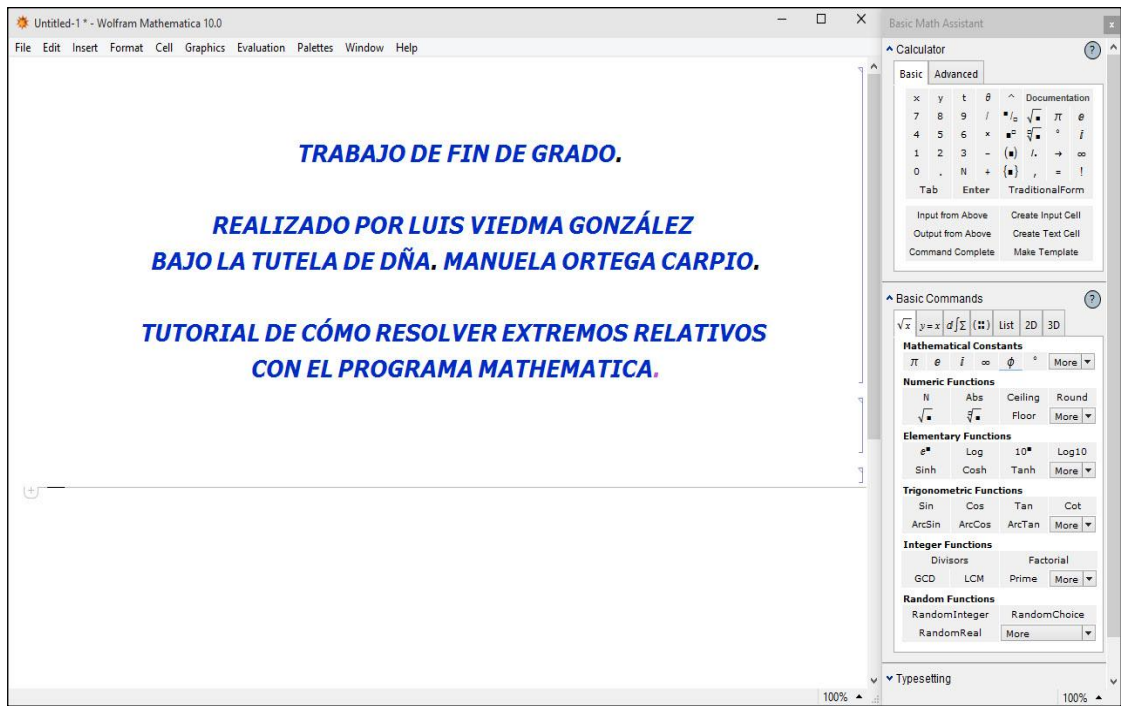
```
Out[4]= {-6, -2}
```

Los valores propios son negativos por lo que la matriz es definida negativa, y por tanto lo que hay es un máximo relativo condicionado.

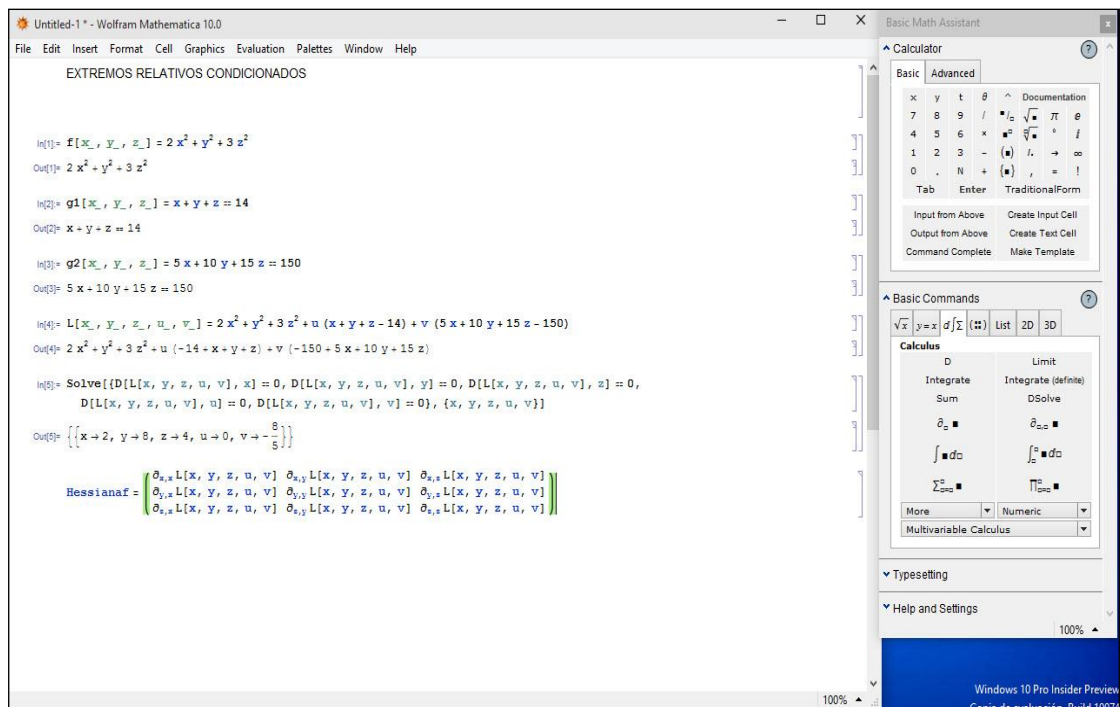
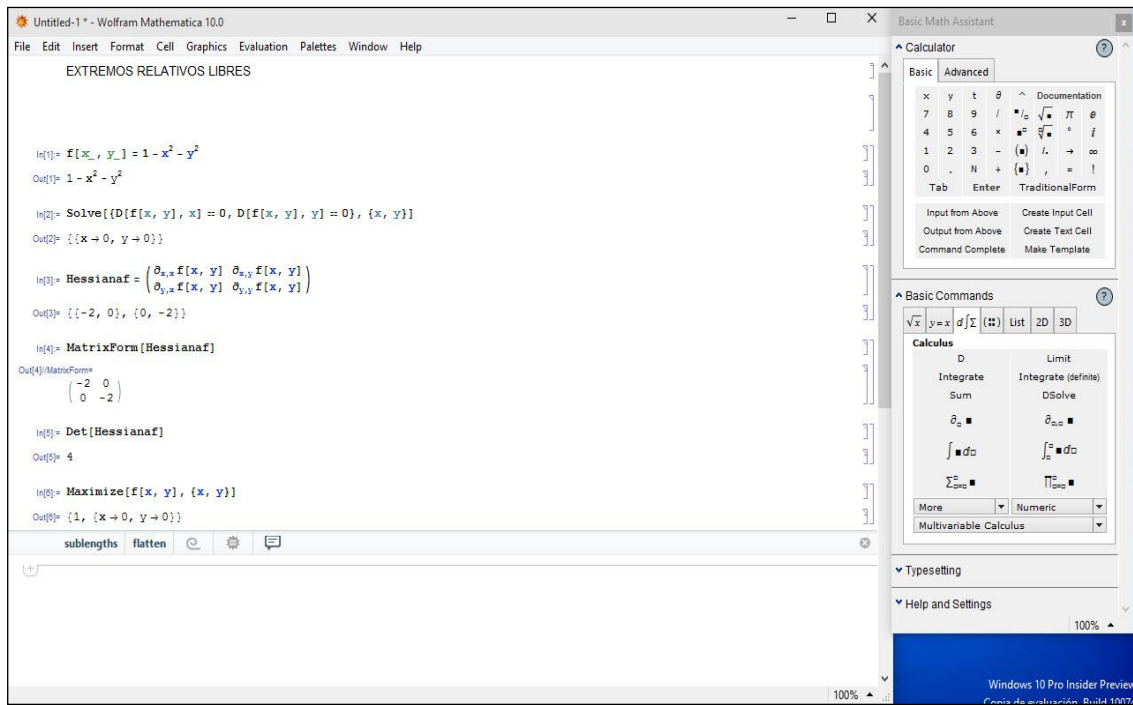
En el punto $(x, y) = (8, 4)$ la función tiene un máximo relativo condicionado que cumple con la restricción y que genera 37 u.m. de beneficio para la empresa.

7. CAPÍTULO 6: TUTORIAL.

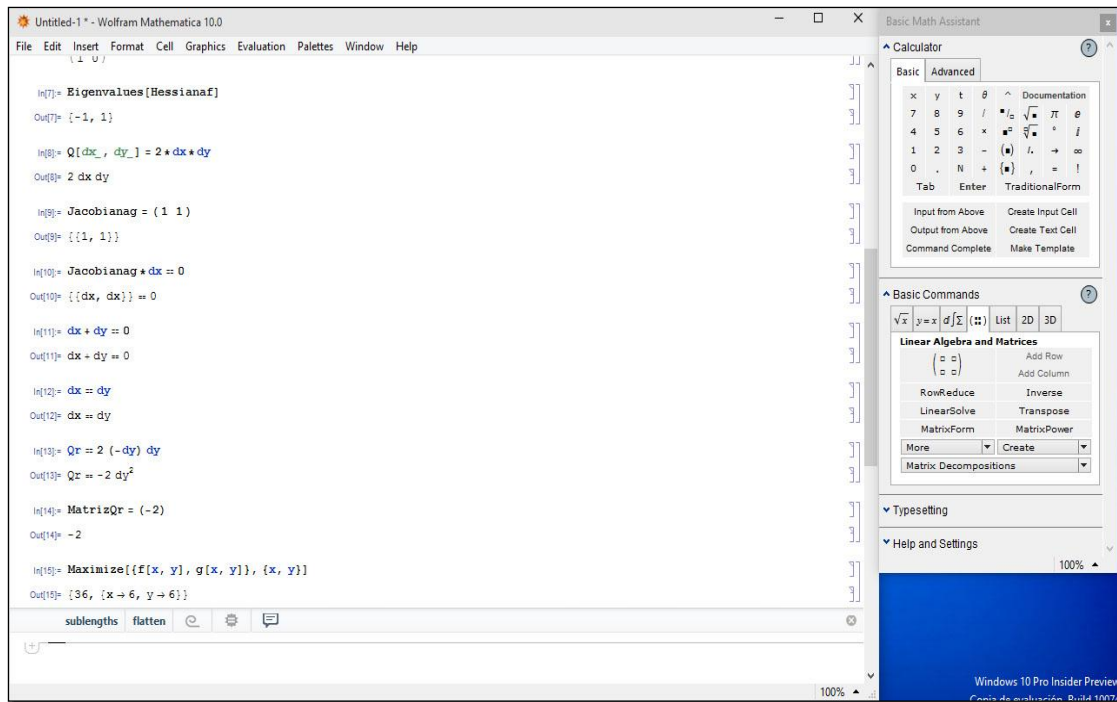
En este capítulo se presentarán a modo de diapositivas algunas partes del complemento multimedia que acompaña a este trabajo para información del lector.



Extremos relativos libres. Elaboración de un tutorial para su cálculo utilizando el programa *Mathematica*.



Extremos relativos libres. Elaboración de un tutorial para su cálculo utilizando el programa *Mathematica*.



8. CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Este es el apartado donde he de exponer mis recomendaciones y conclusiones fruto de la elaboración de este proyecto.

He de admitir que, habiendo cursado varias asignaturas relacionadas con el campo de las matemáticas y fuertemente ligadas al desarrollo económico en la optimización, el software *Mathematica*, en su versión 10, ofrece una experiencia mucho más eficiente a la hora del cálculo de extremos relativos. La plataforma, aun teniendo el hándicap de la sintaxis, el cual en algunos momentos puede resultar tedioso, ofrece al usuario una experiencia que facilita el desarrollo de la actividad si se sabe sacar partido a la misma.

El software ofrece infinidad de posibilidades, llegando al cálculo inmediato de combinaciones complejas y la exposición de gráficas. Obviamente, en este tutorial sólo se ha navegado por la superficie del programa sin llegar a profundizar en su completo potencial.

Es mi deber como estudiante avanzado, instar a quien lea este ensayo a utilizar las técnicas informáticas que derivan del uso del *Mathematica*.

Con el paso de los años la tecnología avanza acaparando los diversos campos de las ciencias, en este caso sociales, y el ser humano ha de aprovechar las oportunidades que se les brinda con el desarrollo de la misma.

En la docencia, sin duda es un plus en la calidad de la enseñanza, debiéndose implantar en cualquier asignatura cuya materia esté ligada al cálculo numérico. Si bien es necesario allanar el programa previamente con el fin de acostumbrar al estudiante a la plataforma.

Si abordamos el campo de la economía, donde pretende implantarse en su gran mayoría el cálculo que aquí se describe, no podemos más que aplaudir la idea de facilitar y fusionar la teoría económica con las matemáticas.

A modo de final he de comentar que el desarrollo de este caso ha sido sorprendentemente agradable, lo cual no hace más que demostrar al lector que el campo de las matemáticas, si se sabe abordar de una manera eficiente, puede resultar una óptima solución a los problemas de una manera entretenida.

9. BIBLIOGRAFÍA.

* Barbolla, R. (2011). *Optimización: programación matemática y aplicaciones a la economía*. Madrid, Ibergarceta, cop. Pp.120, 121, 152 a 161, 192 a 195, 220 a 241.

*Bradley, G.L. (1999). *Cálculo de varias variables. Volumen 2*. Madrid: Prentice Hall. Pp. 975 a 983.

* Cámara Sánchez, A. (2003). *Problemas resueltos de matemáticas para economía y empresa*. Madrid: Thomson, cop.

* Herrero de Egaña Espinosa de los Monteros, A. Muñoz Alaminos, A. Muñoz Cabanes, A. Muñoz Martínez, A. (2011). *Cálculo para empresarios y economistas: Matemáticas II: Grado de ADE*. Madrid. Ediciones Académicas. “Optimización de funciones variables”. Pp. 416 a 439.

* Rodríguez Ruiz, J. (2009) *Matemáticas para la economía y empresa: cálculo diferencial (Teoría)*. [Madrid] Ediciones Académicas D.L.

* Uña Juárez, I. (2007), *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*. Paraninfo, pp.

* Uña Juárez, I. (2010), *Cálculo en varias variables*. Madrid, Garceta, D.L., pp. 134, 135.

* Sciformosa, ink. Disponible Online:

http://www.sciformosa.com.tw/data/editor_upload/image/mathematica10logo.jpg

*Capítulo 3: Aplicaciones de la derivada. Disponible Online:

http://www.ciencias.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/graficacion_optimizacion2011.pdf

*Funciones de varias variables. Disponible Online:

<http://diarium.usal.es/guillermo/files/2013/04/FuncionesVariasVariable.pdf>

10. ANEXOS.

A modo de complemento de este tutorial, se adjuntará una presentación multimedia donde la explicación del capítulo 6 se hará mucho más demostrativa y fácil de seguir para el lector. En el formato online se adjuntarán los archivos correspondientes y en el formato físico se adjuntará un CD con el contenido general.

