



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

TRIGONOMETRÍA

Alumno/a: Calles Valero, Antonio Francisco

Tutor/a: Prof. D. Manuel García Armenteros

Dpto: Didáctica de las Matemáticas

Junio, 2022

Índice

RESUMEN.....	1
ABSTRACT.....	1
1. INTRODUCCIÓN	2
2. OBJETIVOS	5
3. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	7
3.1. Introducción	8
3.2. Funciones goniométricas de un ángulo agudo	8
3.3. Relaciones entre las funciones goniométricas de un mismo ángulo agudo.....	9
3.4. Funciones de ángulos complementarios. Valores particulares notables	10
3.4.1. Ángulos complementarios	10
3.4.2. Valores particulares notables	11
3.5. Funciones de ángulos suplementarios y ángulo opuesto	12
3.6. Otras relaciones entre razones trigonométricas	13
3.6.1. Relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos y las de su suma y diferencia	13
3.6.2. Razones trigonométricas del ángulo duplo	14
3.6.3. Razones trigonométricas del ángulo mitad	15
3.6.4. Transformación de sumas de razones trigonométricas en productos.....	15
3.7. Resolución de triángulos rectángulos	16
3.8. Resolución de triángulos oblicuángulos.....	17
3.8.1. Teoremas del seno y del coseno.....	18

Índice

3.8.2.	Analogías de Mollweide y de Neper. Teorema de las tangentes.	22
3.8.3.	Aplicación a la resolución de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido	23
3.8.4.	Fórmulas de Herón y de Briggs	24
3.8.5.	Aplicación a la resolución de un triángulo, dados los tres lados.....	26
3.9.	Aplicaciones.....	26
3.9.1.	Aplicaciones a la topografía	26
3.9.2.	Resolución de polígonos regulares	29
3.9.3.	Sector y segmento circulares.....	29
3.10.	Bibliografía.....	29
4.	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	31
4.1.	Disposición curricular	31
4.1.1.	Real Decreto 1105/2014	33
4.1.2.	Competencias clave	38
4.1.3.	Orden de 15 de enero de 2021 de la Comunidad Autónoma de Andalucía 42	
4.2.	Análisis de libros de texto	44
4.2.1.	Libro de texto de la editorial Anaya.....	45
4.2.2.	Libro de texto de la editorial SM	52
4.2.3.	Comparativas entre libros de texto	55
5.	FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	59
5.1.	Fuentes de error en el aprendizaje de la trigonometría.....	59
5.2.	Recursos didácticos para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría	64

Índice

5.3. Conclusiones	65
6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA.....	67
6.1. Título	67
6.2. Justificación	67
6.3. Contextualización del centro y del aula	68
6.4. Objetivos	70
6.4.1. Objetivos específicos de la unidad didáctica	70
6.5. Competencias clave	71
6.6. Contenidos	73
6.7. Metodología	74
6.8. Actividades y recursos.....	75
6.8.1. Actividades.....	75
6.8.2. Recursos.....	77
6.9. Atención a la diversidad	77
6.10. Temporalización	78
6.11. Evaluación.....	89
7. CONCLUSIONES	90
8. REFERENCIAS	92
9. MARCO NORMATIVO	95
ANEXO I. OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA Y DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS	97
Objetivos generales de etapa	97
Objetivos específicos del área de matemáticas	98

Índice

ANEXO II. ACTIVIDADES DE LAS SESIONES DE LA UD.....	100
Sesión 1. Introducción	100
Sesión 2. Medida de ángulos y razones trigonométricas de un ángulo agudo. Definición geométrica	102
Sesión 3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo (continuación). Introducción de definición analítica	102
Sesión 4. Empleo de la calculadora en trigonometría y definición analítica de razón trigonométrica (continuación).....	103
Sesión 5. Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° . Relaciones entre las razones de ciertos ángulos	104
Sesión 6. Relaciones trigonométricas fundamentales.....	105
Sesión 7. Resolución de triángulos rectángulos	106
Sesión 8. Resolución de triángulos oblicuángulos	107
Sesión 9. Actividad en el exterior del aula. Aplicaciones de la trigonometría en el mundo real.....	109
Sesiones 10 y 11. <i>WebQuest</i> . Aplicaciones de la trigonometría en el mundo real.....	113
Sesión 12. Repaso	113
Sesión 13. Examen	114
ANEXO III. RÚBRICAS.....	116
ANEXO IV. ÍNDICE DE TABLAS	120
ANEXO V. ÍNDICE DE FIGURAS	122
ANEXO VI. CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE PARA LA EVALUACIÓN DE LA UD.....	126

RESUMEN

El actual Trabajo Fin de Máster se presenta como la actividad de culminación del “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”. Su fin es la puesta en práctica de todos los conocimientos y aprendizajes adquiridos durante la realización del máster. Así, se diseña una unidad didáctica de trigonometría para la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de 4º de ESO, de acuerdo a las disposiciones curriculares, nacional y autonómica, vigentes. Previamente, se ha realizado el desarrollo de tres fundamentaciones: epistemológica, curricular y didáctica. De esta forma, partiendo de un “saber sabio” se alcanza, finalmente, el “saber enseñado” en el aula. Esta labor previa permite la confección de una unidad didáctica eficaz que permita al docente organizar su práctica educativa en el aula, asegurando el desarrollo en los estudiantes de competencias y aprendizajes requeridos en este ámbito.

PALABRAS CLAVE: Trigonometría, Matemáticas, Educación Secundaria, Unidad Didáctica, Trabajo Fin de Máster.

ABSTRACT

The current Master's Thesis is presented as the culmination activity of the "Master's Degree in Teachers of Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching". Its goal is to put into practice all the knowledge and learning acquired during the master's degree. Thus, a didactic unit of trigonometry is designed for the subject "Mathematics oriented to academic teachings" of 4th year of ESO, according to the current, national and regional, curricular provisions. Previously, the development of three foundations is carried out: epistemological, curricular and didactic. In this way, starting from a "wise knowledge" the "knowledge taught" is finally reached in the classroom. This previous work allows the preparation of an effective didactic unit that allows the teacher to organize his/her educational practice in the classroom, ensuring the development in students of skills and learning required in this area.

KEY WORDS: Trigonometry, Mathematics, Secondary Education, Didactic Unit, Master's Thesis.

1. INTRODUCCIÓN

La realización del presente Trabajo de Fin de Máster (TFM), llevado a cabo como culminación del “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”, tiene como finalidad la aplicación e integración de todas las enseñanzas y aprendizajes a lo largo del curso, tanto pedagógicos como didácticos y epistemológicos. Así, se trata de exponer el grado de conocimiento adquirido y el nivel de desarrollo de las competencias asociadas al título.

Este TFM pertenece a la especialidad de Matemáticas, para cuya realización se ha tomado como base la asignatura de “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” (MAC), poniendo el foco del trabajo en un curso de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), concretamente. De esta forma, el tema sobre el que se desarrollará la totalidad del presente trabajo será el de “Trigonometría”. Este será analizado desde el punto de vista curricular y desde las dimensiones epistemológica y didáctica, culminando con el desarrollo de una unidad didáctica.

La estructura que se va a seguir para la elaboración del TFM es la siguiente:

- **Objetivos:** capacidades y habilidades a adquirir por el futuro docente a través de la realización del TFM y del “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”.
- **Fundamentación epistemológica:** este apartado recoge el primero de los tres grandes bloques en los que se va a sustentar la elaboración de la unidad didáctica del tema de Trigonometría. Se establece como la primera etapa dentro del proceso de transformación que sufre un saber matemático hasta que es impartido en una institución didáctica. De este modo, la fundamentación epistemológica recoge el “saber sabio” matemático, generado por las instituciones productoras del saber, y que, posteriormente, debe ser transformado y adaptado a través del proceso de “transposición didáctica” (ver Figura 1). Según Yves Chevallard, quien desarrolla el concepto de “saber sabio” en 1997, la transposición didáctica puede ser entendida como “el camino que conduce del saber sabio al saber enseñado, refiriéndose al proceso de llevar el saber científico al aula de tal forma que se permita a los estudiantes conocer un saber supremo”. En otras palabras, busca el establecimiento de un puente entre ambos saberes (Chevallard, 1998). Resumiendo, la transposición didáctica (que es una dimensión esencial de la didáctica de las matemáticas), Para la elaboración de este apartado se desarrollará un tema de los recogidos en el temario oficial de oposiciones de secundaria, de la

especialidad de matemáticas. Concretamente se desarrollará el tema 38 “Trigonometría. Resolución de triángulos. Aplicaciones”.

- **Fundamentación curricular:** se trata del segundo bloque como base para la realización de la unidad didáctica y de la segunda etapa dentro del proceso de transposición didáctica, el “saber a enseñar”. Como se muestra en la Figura 1, el “saber sabio” es transformado al “saber a enseñar”, el cual se encuentra ligado a los programas de estudio, es decir, se encuentra ligado al currículum, donde se establecen los objetivos del proceso enseñanza-aprendizaje. Es en esta fase de la transformación del “saber sabio” al “saber enseñado” donde surge la creación de un modelo teórico orientado hacia la labor del docente. Derivándose así, de esta teoría didáctica, recursos de apoyo pedagógico (De Faria, 2006). De esta forma, para pasar al “saber a enseñar” y, finalmente, alcanzar el “saber enseñado”, se lleva a cabo un proceso de reacomodación de los conocimientos matemáticos científicos a través de un ejercicio de selección, reducción, simplificación y reformulación (Ramírez, 2005). Este proceso es realizado por diferentes representantes como los encargados del diseño de planes de estudio, los matemáticos o investigadores generadores del conocimiento matemático y los profesionales del sistema educativo, acorde a condiciones de naturaleza institucional e histórica. Además, este trabajo requiere un ejercicio de revisión continuada desde la fase de toma de decisiones con respecto al currículum hasta las actividades matemáticas desarrolladas en el aula (Bosch *et al.*, 2006) (Jurado, 2019). Por todo ello, la elaboración de este apartado se compondrá de un análisis de las disposiciones curriculares vigentes, tanto a nivel nacional como autonómico, y de un estudio de dos libros de texto.
- **Fundamentación didáctica:** es la última de las fundamentaciones y, por tanto, el último bloque previo a la programación didáctica. En este apartado se realizará una revisión de la literatura existente sobre investigación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, concretamente sobre la temática de trigonometría. De esta forma, se analizarán los errores, y las posibles fuentes de ellos, que surgen durante el proceso de aprendizaje de la rama de trigonometría en el alumnado y los métodos didácticos a seguir para mejorar este proceso de enseñanza-aprendizaje.
- **Proyección didáctica:** con este apartado finaliza el proceso de transposición didáctica. Por tanto, se corresponde con el “saber enseñado”, al cual se llega a partir de la transformación del “saber a enseñar” por parte de instituciones educativas y profesionales de la enseñanza (Ramírez, 2005). Finalmente, se alcanza el “saber aprendido” por los discentes. En este epígrafe se elaborará una unidad didáctica tomando como base para su diseño las tres fundamentaciones anteriormente descritas.

- Conclusiones: se expondrán los conocimientos y aprendizajes adquiridos tras la realización del TFM y del “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”.
- Referencias: apartado donde se recoge toda la bibliografía en la que se ha apoyado el presente TFM. Se diferencia entre “Referencias”, donde se recogen diversos artículos científicos, trabajos universitarios, apuntes de asignaturas del máster y libros, y “Marco normativo”, donde se encuentra toda la normativa consultada.

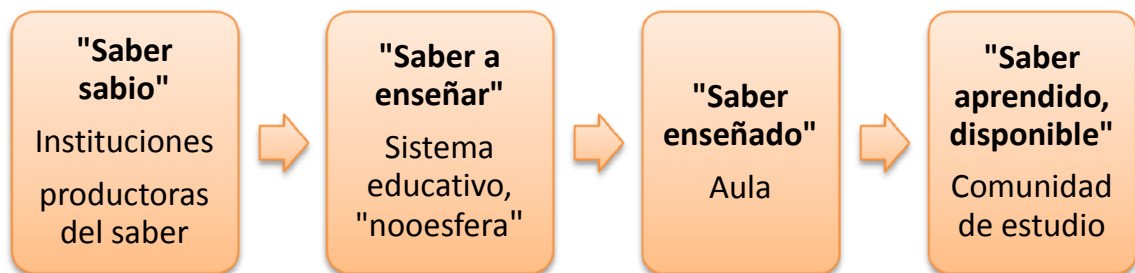


Figura 1. Proceso de transposición didáctica (Bosch *et al.*, 2006) (elaboración propia).

2. OBJETIVOS

La realización del presente Trabajo Fin de Máster tiene como principal objetivo la aplicación e integración de todos los conocimientos y aprendizajes adquiridos durante la realización del “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas” para la elaboración de una unidad didáctica. Para ello, se requiere alcanzar una serie de objetivos específicos:

- Conocer el proceso de transposición didáctica a fin de conectar las distintas fases por las que transcurre el saber matemático y analizarlas en detalle en los distintos apartados del TFM (esto es, fundamentación epistemológica, fundamentación curricular y proyección didáctica).
- Indagar sobre el saber matemático en la rama de la trigonometría. Esto es, abordar el “saber sabio” a través de la elaboración de un tema de oposiciones.
- Conocer la legislación vigente, tanto a nivel estatal como autonómico, así como su correcta interpretación y aplicación. Consecuentemente, se deben conocer las disposiciones curriculares vigentes a nivel nacional y autonómico, así como las competencias clave que se trabajan a lo largo del currículum escolar. De este modo, se aborda, en una primera instancia, el “saber a enseñar”.
- Analizar y comparar dos libros de texto de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO a fin de completar el análisis del “saber a enseñar” y, así, obtener una primera aproximación al “saber enseñado” en el aula.
- Saber transformar los contenidos recogidos en el currículum en un plan de trabajo idóneo para cada estudiante con el apoyo de distintas metodologías, tanto tradicionales como innovadoras. De esta forma se proyecta el saber matemático en el aula, pasando del “saber a enseñar” al “saber enseñado”.
- Realizar una revisión de la literatura existente acerca de investigaciones didácticas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría. El fin es conocer con mayor profundidad los problemas de los discentes en el aprendizaje de esta materia y qué medidas adoptar para poder mitigarlos.

Todos estos objetivos específicos son de esencial importancia para la elaboración de una unidad didáctica coherente, con respecto a las fundamentaciones previamente desarrolladas, y que permita al docente una eficaz actuación en el aula.

Aparte de estos objetivos, en la Guía Docente de la asignatura “Trabajo Fin de Máster” en la página web del máster de la Universidad de Jaén, se enuncian algunos

generales que deben alcanzar los estudiantes del máster como futuros docentes. Estos son, entre muchos otros:

- Promover el espíritu crítico, reflexivo y emprendedor.
- Conocer las características psicopedagógicas de los alumnos para su evaluación y emisión de los informes requeridos.
- Adquirir la capacidad de establecer procesos de comunicación con adolescentes y de acercamiento a su propia realidad, así como de proporcionarles valores para orientarles en su desarrollo.
- Conocer los procesos de interacción y comunicación tanto en el aula como en el centro, así como abordar y resolver posibles problemas. Asimismo, se requiere dominar destrezas y habilidades sociales para fomentar un adecuado clima de aprendizaje y convivencia en el aula.
- Detectar y analizar situaciones y dificultades que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y ritmos de aprendizaje e intervenir adecuadamente.
- Conocer las medidas de atención a la diversidad a adoptar para poder realizar el asesoramiento necesario en cada caso y promover la integración completa de cualquier alumno.
- “Comprender el desarrollo de la personalidad que sufren los estudiantes en la adolescencia y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje”.
- Adquirir el conocimiento, las destrezas y actitudes necesarias para el uso y aprovechamiento de las TICs en la función docente así como para el ejercicio de la función tutorial del profesorado en la ESO.
- Adquirir criterios de selección y la capacidad para elaborar materiales educativos.

3. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En el presente epígrafe se desarrollará el tema 38 “Trigonometría. Resolución de triángulos. Aplicaciones” de las Oposiciones de Profesorado de Secundaria de la especialidad de Matemáticas, según el BOE de 21 de septiembre de 1993, el Anexo III de la Orden de 9 de septiembre de 1993, regulado por el RD 850/1993, de 4 de junio. Para la elaboración de este apartado, se ha empleado como base el material de las academias Deimos (2003) y Claustro (2006).

Se seguirá la estructura general de un tema de oposiciones, presentada a continuación:

1. Introducción.
2. Funciones goniométricas de un ángulo agudo.
3. Relaciones entre las funciones goniométricas de un mismo ángulo agudo.
4. Funciones de ángulos complementarios. Valores particulares notables
 - 4.1. Ángulos complementarios.
 - 4.2. Valores particulares notables.
5. Funciones de ángulos suplementarios y ángulo opuesto.
6. Otras relaciones entre razones trigonométricas.
 - 6.1. Relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos y las de su suma y diferencia.
 - 6.2. Razones trigonométricas del ángulo duplo.
 - 6.3. Razones trigonométricas del ángulo mitad.
 - 6.4. Transformación de sumas de razones trigonométricas en productos.
7. Resolución de triángulos rectángulos.
8. Resolución de triángulos oblicuángulos.
 - 8.1. Teoremas del seno y del coseno.
 - 8.2. Analogías de Mollweide y de Neper. Teorema de las tangentes.
 - 8.3. Aplicación a la resolución de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.
 - 8.4. Fórmulas de Herón y de Briggs.
 - 8.5. Aplicación a la resolución de un triángulo, dados los tres lados.

9. Aplicaciones.

9.1. Aplicaciones a la topografía.

9.2. Resolución de polígonos regulares

9.3. Sector y segmento circulares.

3.1. Introducción

Tratamos de obtener fórmulas que relacionen longitudes de segmentos con amplitudes de ángulos de una misma figura geométrica y que nos posibiliten el cálculo de unos mediante los otros. Un problema gráfico tan sencillo como el de hallar los catetos de un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y uno de sus ángulos agudos no puede resolverse mediante cálculo directo más que para ciertos valores muy concretos del ángulo agudo.

La razón profunda de este hecho radica en que las relaciones entre segmentos y ángulos son de naturaleza trascendente (esto es, no algebraica) y, por tanto, no son expresables mediante operaciones aritméticas. Los astrónomos griegos ya se cercioraron de ello y a fin de superar esta barrera tabularon determinadas funciones: así, por ejemplo, Ptolomeo comienza su famoso tratado de Astronomía (traducido por los árabes con el nombre de “almagesto”) tabulando las medidas de las cuerdas correspondientes a ángulos variables de medio en medio grado. Fueron los árabes quienes, posteriormente, perfeccionaron los métodos de cálculo de los astrónomos griegos, extendiéndolos al cálculo de los triángulos planos que presenta la Topografía. A ellos se debe la sustitución de la primitiva función trascendente cuerda por la función seno y la introducción del resto de funciones trigonométricas.

De esta forma, queda señalado que el origen y objeto de la Trigonometría es, como bien su nombre indica, el cálculo de triángulos (tanto rectilíneos como esféricos) dados por algunos de sus elementos. No se puede separar de la Trigonometría el estudio de las propiedades de las funciones trascendentes que utiliza las funciones trigonométricas.

La goniometría es la ciencia y la técnica de la medida de los ángulos. Este término designó también un acercamiento algebraico de la Trigonometría (Bouvier, diccionario de Matemáticas).

3.2. Funciones goniométricas de un ángulo agudo

Sabemos que dos triángulos rectángulos ABC , $A'BC'$ con un mismo ángulo agudo x en el vértice B (ver Figura 2) son semejantes y, por tanto, las razones entre los lados de uno cualquiera de ellos son las mismas que existen entre los lados homólogos

en el otro. En cambio, dichas razones cambian al variar el ángulo. Podemos establecer, pues, que las referidas razones son funciones del ángulo x , recibiendo los siguientes nombres y notaciones:

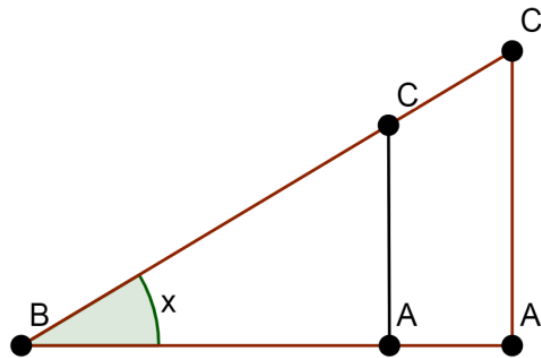


Figura 2. Triángulos rectángulos semejantes (elaboración propia).

$$\frac{CA}{BC} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } x, \quad \frac{BA}{BC} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } x$$

$$\frac{CA}{BA} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \text{tg } x$$

También se pueden definir las funciones inversas:

$$\frac{BC}{CA} = \frac{1}{\text{sen } x} = \text{cosec } x, \quad \frac{BC}{BA} = \frac{1}{\text{cos } x} = \text{sec } x$$

$$\frac{BA}{CA} = \frac{1}{\text{tg } x} = \text{cotg } x$$

, que se leen cosecante, secante y cotangente, respectivamente.

3.3. Relaciones entre las funciones goniométricas de un mismo ángulo agudo

Del teorema de Pitágoras, aplicado a la figura anterior, se desprende:

$$\left(\frac{CA}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BA}{BC}\right)^2 = \frac{CA^2 + BA^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

Esto es: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

Dividiendo las razones que definen el seno y el coseno, se tiene:

$$\frac{CA/BC}{BA/BC} = \frac{CA}{BA}$$

Es decir,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Estas dos relaciones entre las funciones seno, coseno y tangente, de un mismo ángulo, permiten calcular dos de ellas conocida la tercera. Así, si se conoce $\operatorname{sen} x$, se tendrá:

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$$

Si se conoce el $\cos x$ se tendrá análogamente:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$

Si se conoce $\operatorname{tg} x$, resultará:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

Análogamente, podemos obtener:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

3.4. Funciones de ángulos complementarios. Valores particulares notables

3.4.1. Ángulos complementarios

Aplicando las razones trigonométricas al otro ángulo agudo del triángulo rectángulo antes considerado (ver Figura 2), obtenemos:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - 90^\circ - x) = \frac{BA}{BC} = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \frac{CA}{BC} = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{BA}{CA} = \operatorname{cotg} x$$

El seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo son, pues, iguales al coseno, seno y cotangente del ángulo complementario, respectivamente. Se puede apreciar de forma más clara en la Figura 3 (circunferencia de radio 1).

De igual modo, si al ángulo agudo le sumamos 90° , las relaciones entre las razones trigonométricas siguen coincidiendo con las mostradas anteriormente (las del ángulo complementario). Esto es:

$$\operatorname{sen}(90^\circ + x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ + x) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + x) = \operatorname{cotg} x$$

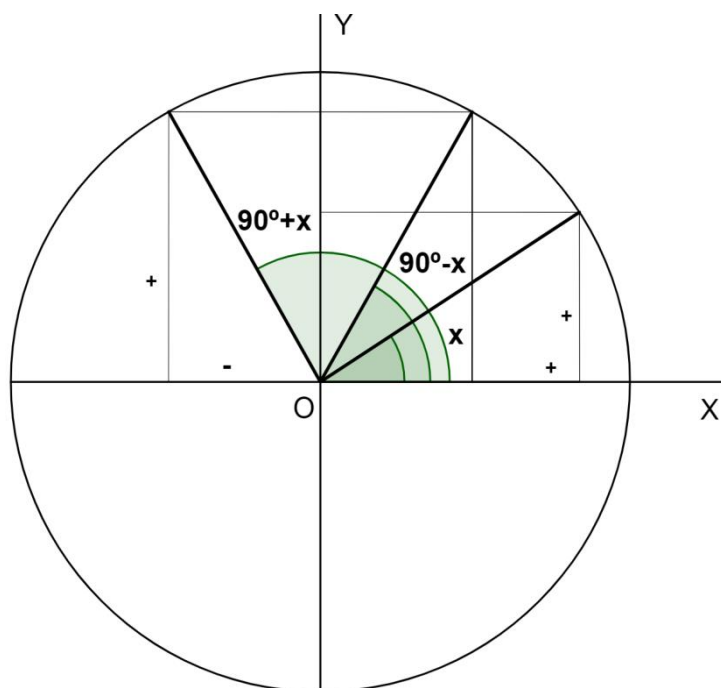


Figura 3. Ángulos complementarios y $+90^\circ$ (elaboración propia).

3.4.2. Valores particulares notables

- En un triángulo equilátero de lado a , tracemos la altura h ; su longitud es:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y, por consiguiente:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Análogamente:

$$\cos 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}; \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

, dividiendo miembro a miembro, resulta:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- En un cuadrado de lado a , si trazamos una diagonal d , la longitud de esta es:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Por tanto, tendremos:

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$

3.5. Funciones de ángulos suplementarios y ángulo opuesto

En la Figura 4 (circunferencia de radio 1) se han dibujado dos ángulos suplementarios a partir del origen OX . Además, se ha representado el ángulo una vez trasladado $180^{\circ} + x$ y el opuesto ($360^{\circ} - x = -x$). Del análisis de dicha figura se desprende que:

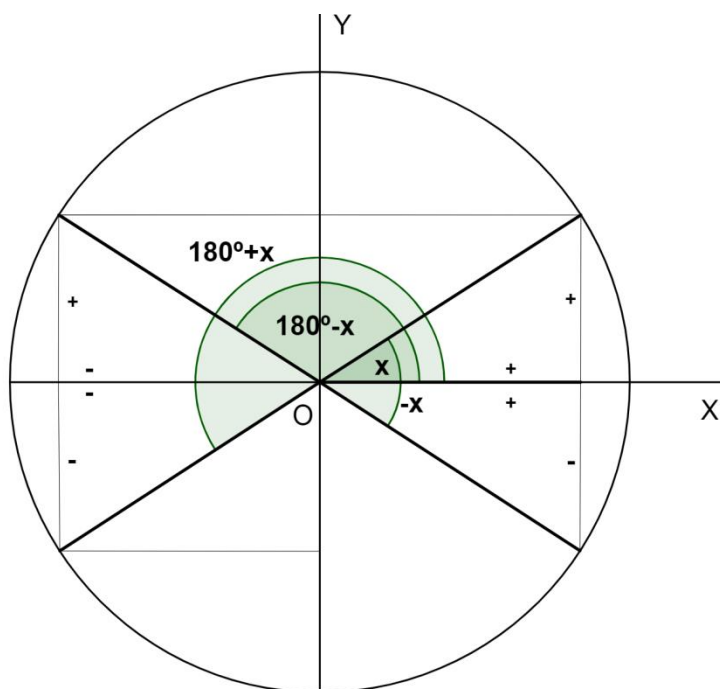


Figura 4. Esquema de ángulos suplementarios, ángulo $+180^{\circ}$ y ángulo opuesto (elaboración propia).

Los senos de dos ángulos suplementarios son iguales. Los cosenos son opuestos, es decir, iguales en valor absoluto, pero de distinto signo. Las tangentes, por su parte, también son opuestas:

$$\operatorname{sen}(180^{\circ} - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(180^{\circ} - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(180^{\circ} - x) = -\operatorname{tg} x$$

Por otro lado, si sumamos al ángulo x 180° , trasladamos el mismo al tercer cuadrante, siendo las relaciones entre las funciones trigonométricas de x y $x + 180^{\circ}$ las siguientes:

$$\operatorname{sen}(180^{\circ} + x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(180^\circ + x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + x) = \operatorname{tg} x$$

En lo que respecta a las relaciones entre las razones trigonométricas de x y su opuesto, tenemos lo siguiente:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

3.6. Otras relaciones entre razones trigonométricas

3.6.1. Relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos y las de su suma y diferencia

Supongamos colocado un triángulo OAB , materializado en la Figura 5 mediante una escuadra, tal y como se indica en dicha imagen. Esto es, con el vértice de uno de los ángulos, b , en el origen de O de un sistema cartesiano rectangular, y de tal modo que el cateto OA forme con el eje OX , por ejemplo, un ángulo agudo, α , sumándose el ángulo b con el α .

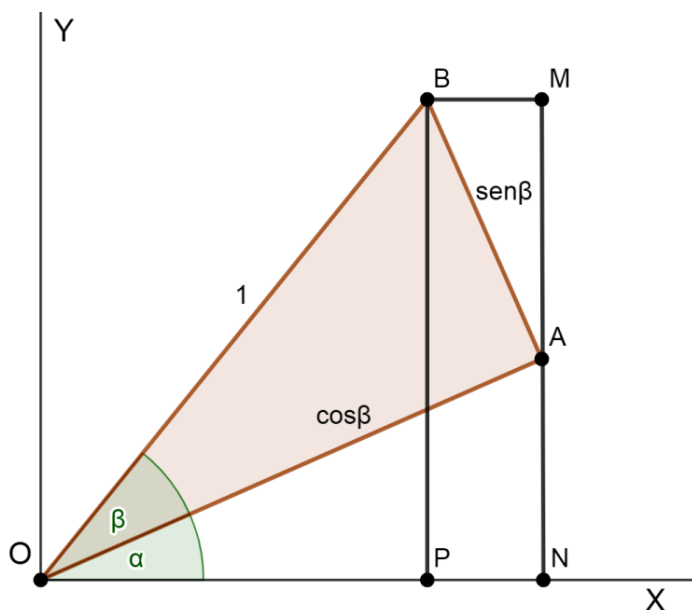


Figura 5. Esquema empleado para el desarrollo de relaciones trigonométricas (elaboración propia).

Supuestos conocidos los ángulos α y β y tomando como valor de la hipotenusa OB la unidad, podemos calcular de dos modos las coordenadas del punto B .

Por una parte, se tiene:

$$PB = \operatorname{sen}(\alpha + \beta); \quad OP = \cos(\alpha + \beta)$$

Y por otra parte:

$$PB = NA + AM = OA \operatorname{sen} \alpha + AB \cos \alpha = \cos \beta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$OP = ON - BM = \cos \beta \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha$$

Igualando los dos pares de valores obtenidos, resultan las dos fórmulas siguientes:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Dividendo ambas expresiones y volviendo a dividir, posteriormente, por $\cos \alpha \cos \beta$ numerador y denominador, se obtiene la tangente de la suma de los ángulos α y β :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Si sustituimos β por $-\beta$ llegamos a:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

, ya que $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$ y $\cos(-\beta) = \cos \beta$, lo cual se puede apreciar de forma sencilla apoyándonos en la Figura 4 previamente mostrada. Supongamos, finalmente, que los ángulos α , β y $\alpha \pm \beta$ pertenecen a cualquier cuadrante. La pregunta que se desea saber es si las fórmulas obtenidas anteriormente siguen siendo válidas. La respuesta es afirmativa. La misma demostración es aplicable en el caso más general, con ángulos de cualquier cuadrante; pero debe tenerse en cuenta el signo de los segmentos que intervienen.

3.6.2. Razones trigonométricas del ángulo duplo

Si en las fórmulas anteriores suponemos $\alpha = \beta$, quedarán convertidas en:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

(la última fórmula solo tiene sentido si $\alpha \notin \{90^\circ + k \cdot 180^\circ, 45^\circ + k \cdot 90^\circ : k \in \mathbb{Z}\}$).

La fórmula de $\cos 2\alpha$ puede expresarse en dos formas igualmente útiles. Sustituyendo $\cos^2 \alpha$ por $1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$, o $\operatorname{sen}^2 \alpha$ por $1 - \cos^2 \alpha$, se llega a:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Y dividiendo,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

3.6.3. Razones trigonométricas del ángulo mitad

Si hacemos un cambio de variable y sustituimos en las fórmulas anteriores $\gamma = 2\alpha$, tendremos:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{2}; \quad \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$$

(la última igualdad solo es válida si $\alpha \neq (2k + 1) \cdot 180^\circ$, $\forall k \in \mathbb{Z}$).

3.6.4. Transformación de sumas de razones trigonométricas en productos

Se aprecia de forma trivial que se cumple:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si se nos da, pues, una suma o diferencia de senos:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B$$

Haciendo $A = \alpha + \beta$ y $B = \alpha - \beta$, de donde $\alpha = (A + B)/2$ y $\beta = (A - B)/2$, y sustituyendo, obtenemos:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

Análogamente, podemos obtener:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

3.7. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo cualquiera consiste en determinar sus tres lados y sus tres ángulos conocidos algunos de estos seis elementos. Así, el número mínimo de elementos del que debe disponerse para que un triángulo quede definido unívocamente es tres, de los cuales uno debe ser siempre un lado, pues, si solo se conocen tres ángulos positivos que sumen 180° , existen infinitas posibilidades de triángulos (todos ellos semejantes).

Dicho esto, se comienza presentando varios casos que pueden darse en la resolución de triángulos rectángulos, pasando posteriormente al estudio de triángulos oblicuángulos (los cuales se distinguen entre acutángulos, todos los ángulos son agudos, y obtusángulos, con un ángulo obtuso y dos agudos).

1. Si se dan un lado y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, conoceremos, por la tabla de valores, las razones entre el lado conocido y cada uno de los otros dos, lo que permitirá hallar estos. Así, podemos distinguir dos casos:

- 1.1. Dada la hipotenusa a y un ángulo agudo $\hat{B}$

Se aprecia de forma clara que:

$$b = a \sin \hat{B}$$

$$c = a \cos \hat{B}$$

Esto es, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo contiguo.

- 1.2. Dado un cateto b y un ángulo agudo $\hat{B}$

El otro ángulo será complemento del dado, $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$. Calculando: $\sin \hat{B} (= b/a)$ y $\operatorname{tg} \hat{C} (= c/b)$ se tendrá:

$$a = b/\sin \hat{B}$$

$$c = b \operatorname{tg} \hat{C}$$

Un cateto es igual al producto del otro por la tangente del ángulo opuesto al primero, o por la cotangente del ángulo opuesto al segundo.

2. Si se dan dos lados del triángulo rectángulo se conocerá la razón entre ellos y, por medio de las tablas, el ángulo que corresponde a dicha razón. El otro ángulo será el complementario de este, y el tercer lado podrá calcularse como

en los casos anteriores, o bien, aplicando, directamente, el teorema de Pitágoras. Así, resulta:

2.1. Dada la hipotenusa a y un cateto b

Por definición de $\hat{B}$ tenemos:

$$\text{sen } \hat{B} = b/a$$

Se leerá en la tabla el valor de $\hat{B}$ dado por su seno, y luego $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$.

Finalmente, calcularemos c por medio de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

2.2. Dados los dos catetos b y c

Se tiene $\text{tg } \hat{B} = b/c$. Se calcula el ángulo cuya tangente tenga este valor. Se tiene luego $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$.

Finalmente, calcularemos la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

, o bien, mediante la relación trigonométrica $a = b/\text{sen } \hat{B}$.

Resumiendo, para resolver triángulos rectángulos basta recordar las definiciones de las razones trigonométricas y disponer de unas tablas donde se recojan los valores de estas razones.

Definición 1. *En todo camino rectilíneo inclinado la razón entre el desnivel y la distancia horizontal entre dos puntos se denomina pendiente del camino, y es, por tanto, igual a la tangente del ángulo de inclinación.*

Los autores ingleses suelen llamar pendiente a la razón entre el desnivel y la distancia inclinada, es decir, tomada sobre el propio camino, lo que equivale a considerar el seno del ángulo de inclinación en lugar de la tangente. Para inclinaciones muy pequeñas, como son, por ejemplo, las de las carreteras o vías férreas, ambos valores se confunden prácticamente. No ocurre lo mismo para pendientes mayores.

3.8. Resolución de triángulos oblicuángulos

Trazada la altura de un triángulo isósceles, queda este dividido en dos triángulos rectángulos iguales. Resuelto uno cualesquiera de ellos queda resuelto el triángulo isósceles. Así pues, conocidos dos datos (entre ellos una longitud) de un triángulo isósceles, podemos calcular los restantes.

3.8.1. Teoremas del seno y del coseno

Teorema 1 (Teorema del seno). *Los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos y la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Es decir, en cualquier triángulo ABC:*

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

Demostración:

Comencemos con un $\triangle ABC$ (notado de la forma habitual) y circunscribamos alrededor de él una circunferencia con centro O y un radio igual a R unidades, como se muestra en la Figura 6. Dibujamos el diámetro CJ y la cuerda BJ .

En esta situación $\angle CBJ (= \hat{B})$ es un ángulo recto, por estar inscrito en una semicircunferencia. Por tanto:

$$\sin \hat{J} = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}$$

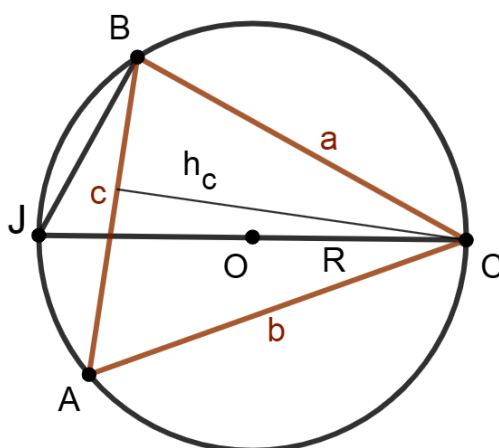


Figura 6. Esquema utilizado para demostración del Teorema del seno (elaboración propia).

En la Figura 6 $\hat{J} = \hat{A}$ porque ambos están inscritos en el mismo arco de la circunferencia, otra posibilidad sería $\hat{J} = 180^\circ - \hat{A}$, porque los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios. Recordando que $\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta)$, se sigue que $\sin \hat{J} = \sin \hat{A}$. Por tanto:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$$

El mismo procedimiento, aplicado a los otros ángulos de $\triangle ABC$:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R; \quad \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

El teorema del seno nos permite resolver fácilmente los casos en los que se conoce un lado a y el ángulo opuesto $\hat{A}$, pues con ello se tiene el valor común de las tres razones, y basta dar un nuevo antecedente o consecuente para deducir los demás. Aplicaremos, pues, el teorema de los senos en los dos casos de resolución siguientes:

1. Dados dos ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y un lado a

Al proporcionar dos ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ ya se tiene información suficiente para conocer el tercero, puesto que es el suplementario de los otros dos $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$. Conocemos, pues, los tres consecuentes del teorema del seno, y un antecedente a , con lo que se deducen fácilmente b y c .

$$b = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}}$$

$$c = \frac{a \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$$

2. Dados los lados a y b y el ángulo $\hat{A}$ opuesto a uno de ellos

De la proporción:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

, se deduce:

$$\sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a}$$

, y, por tanto, obtenemos el ángulo $\hat{B}$, con lo que estamos en el caso anterior.

Ahora bien, la determinación de $\hat{B}$ por su seno precisa alguna aclaración. Ante todo, por ser el seno de todo ángulo menor o igual a la unidad, para que el problema tenga solución deberá ser:

$$\frac{b \sin \hat{A}}{a} \leq 1$$

, que se traduce geométricamente en la condición evidente $h_c \leq a$, siendo h_c la altura asociada al lado c del $\triangle ABC$, mostrada en la Figura 6.

Si $b \sin \hat{A} = a$ entonces $\sin \hat{B} = 1 \implies \hat{B} = 90^\circ$, el triángulo es rectángulo. Si $b \sin \hat{A} < a$, entonces existe solución, pero puede haber dos

ángulos que tengan el mismo seno, uno agudo y otro obtuso. Veamos si valen las dos:

Recordando, para ello, la construcción geométrica del triángulo, se aprecia fácilmente que:

- a) Si $\hat{A}$ es agudo, el problema puede admitir dos soluciones o una sola, según si a sea menor que b o no lo sea. (Si $a < b$ hay dos soluciones).
- b) Si $\hat{A}$ es obtuso, no hay más que una solución cuando $a > b$.

A este resultado se llega aplicando el criterio de que al mayor lado debe oponerse el mayor ángulo. En efecto:

- a) Si $\hat{A}$ es agudo y $a < b$, los dos valores agudo y obtuso de $\hat{B}$ cumplen la condición $\hat{A} < \hat{B}$, existiendo así dos soluciones del ángulo $\hat{B}$. Esto se traduce en la existencia de dos triángulos que cumplen la condición anterior.
- b) Si $\hat{A}$ es agudo y $b < a$, sólo cumple la condición $\hat{B} < \hat{A}$ el ángulo agudo, pues aunque $\sin \hat{B} = \sin (180^\circ - \hat{B})$, la solución $180^\circ - \hat{B}$ no es válida, ya que sería $\hat{A} + (180^\circ - \hat{B}) < 180^\circ$ y, por consiguiente, $\hat{A} < \hat{B}$, lo cual resulta imposible. Por tanto, existe una única solución, esto es, un único triángulo.
- c) Si $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ tiene que ser agudo y, por tanto, también $a > b$, cumplido lo cual tampoco hay ambigüedad. De igual forma que en el caso anterior, existe una única solución posible.

Teorema 2 (Teorema del coseno). *El cuadrado de un lado opuesto a un ángulo de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos (o más) el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

El teorema del coseno, cuya demostración se presentará a continuación, consiste en la aplicación generalizada del teorema de Pitágoras a un triángulo cualquiera.

Demostración:

Si $\hat{C}$ es un ángulo recto, $\cos \hat{C} = 0$ y, por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Si $\hat{C}$ es agudo, en los triángulos AHB y BHC (mostrados en la Figura 7) es $c^2 = AH^2 + h^2$ y $a^2 = CH^2 + h^2$. Restando ambas expresiones queda $c^2 - a^2 =$

$AH^2 - CH^2$ (1). Ahora bien, como $\cos \hat{C} = CH/a$, entonces $CH = a \cos \hat{C}$ y $AH = b - a \cos \hat{C}$. Sustituyendo en (1), resulta:

$$c^2 - a^2 = (b - a \cos \hat{C})^2 - (a \cos \hat{C})^2 = b^2 - 2ab \cos \hat{C} + a^2 \cos^2 \hat{C} - a^2 \cos^2 \hat{C} = b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

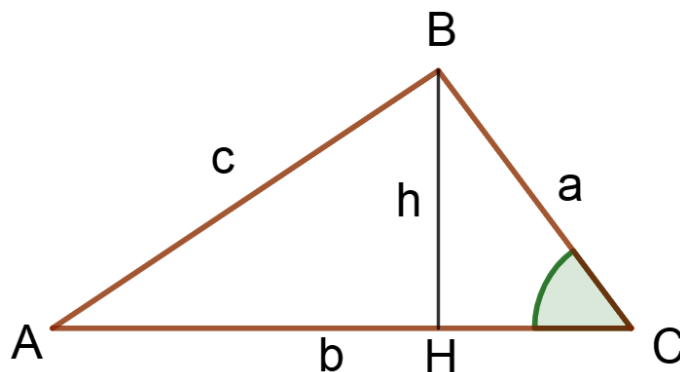


Figura 7. Triángulo ABC para demostración del teorema del coseno (elaboración propia).

Para el caso en el que $\hat{C}$ es obtuso, el razonamiento es idéntico sustituyendo $\hat{C}$ por $180^\circ - \hat{C}$, recordando que dos ángulos suplementarios tienen cosenos opuestos.

Dado que el teorema del coseno relaciona tres lados y un ángulo, podrá aplicarse en los siguientes casos:

1. Dados los lados a , b y el ángulo comprendido $\hat{C}$

Aplicando el teorema del coseno al lado c , podemos averiguar este:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

El cálculo de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ podemos hacerlo como en el segundo caso del teorema del seno, o aplicando el teorema del coseno a los otros lados (evitando así la ambigüedad que conlleva la aplicación del teorema del seno).

2. Dados los tres lados a , b y c

Aplicando el teorema del coseno a cada uno de los lados obtenemos:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

, y de estos cosenos se deducirán, sin ambigüedad, los ángulos.

Tradicionalmente, a la resolución de triángulos se ha ido aplicando el cálculo logarítmico debido a su mayor facilidad de manejo. A algunos problemas no era posible aplicarles el cálculo logarítmico, por lo cual se desarrollaron otros métodos. Aunque hoy en día esto no es necesario, trataremos estos métodos debido a su amplia difusión.

3.8.2. Analogías de Mollweide y de Neper. Teorema de las tangentes.

En el triángulo ABC (ver Figura 8) supongamos que $a > b$ y llevemos b sobre a y sobre su prolongación a partir de C ; obtenemos así los puntos N y M , y el triángulo rectángulo ANM cuyos ángulos vamos a calcular.

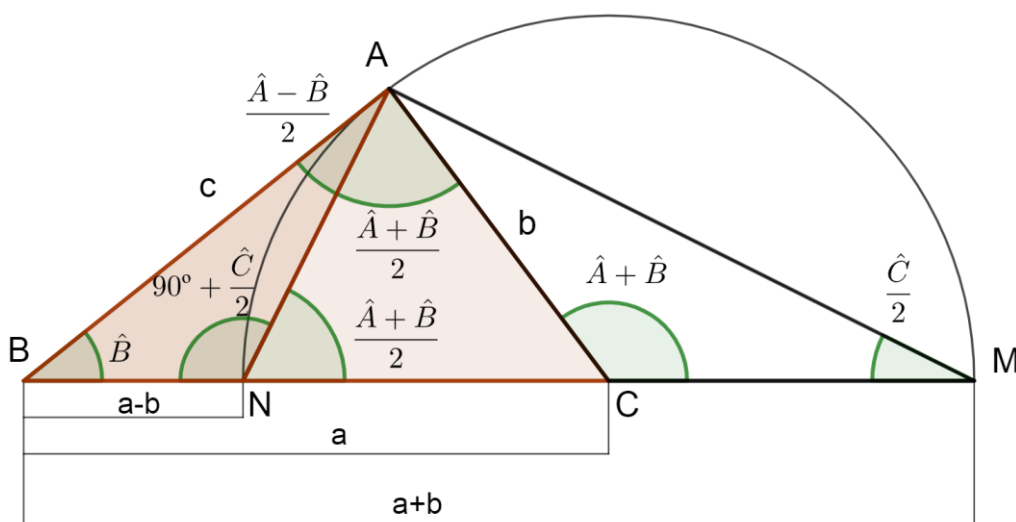


Figura 8. Esquema empleado para el desarrollo del Teorema de las tangentes (elaboración propia).

Se tiene $\angle ACM = \hat{A} + \hat{B}$ (exterior de ΔABC); $\angle ANM = (\hat{A} + \hat{B})/2$ (inscrito mitad del central $\angle ACM$); $\angle AMC = \hat{C}/2$ (por análoga razón); $\angle BAN = \angle BAC - \angle NAC = \hat{A} - (\hat{A} + \hat{B})/2 = (\hat{A} - \hat{B})/2$.

Finalmente, $\angle ANB = 90^\circ + \hat{C}/2$ (exterior de ΔANM). Aplicando el teorema del seno a los triángulos ABM y ABN resulta:

$$\frac{a+b}{\operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)} = \frac{c}{\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}}; \quad \frac{a-b}{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)} = \frac{c}{\operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}\right)}$$

, luego:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\left[90^\circ + \frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})\right]}{\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}} = \frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})\right]}{\operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{C}}{2}}$$

Obteniendo, así, las denominadas analogías de Mollweide. Dividiendo ambas expresiones, resulta:

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg} \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2}$$

, y por ser $\hat{C}/2 = 90^\circ - (\hat{A} + \hat{B})/2$, se puede escribir en forma más simétrica y fácil de recordar, sustituyendo $\cotg (\hat{A} + \hat{B})/2$ por $1/\operatorname{tg} (\hat{A} + \hat{B})/2$. De este modo se obtiene la analogía de Neper:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{(\hat{A}-\hat{B})}{2}}{\operatorname{tg} \frac{(\hat{A}+\hat{B})}{2}}$$

, fórmula que puede enunciarse de la siguiente manera:

Teorema 3 (Teorema de las Tangentes). *La diferencia de los lados es a su suma como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos es a la tangente de la semisuma.*

3.8.3. Aplicación a la resolución de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido

Dados a, b y $\hat{C}$, se conocen tres valores de los cinco ligados por la fórmula:

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg} \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2}$$

, de ella se desprende:

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{\hat{C}}{2}$$

Por tanto, determinaremos $\hat{A} - \hat{B}$ sin ambigüedad, y como, además, al conocer $\hat{C}$ se conoce $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$, tendremos la suma y diferencia de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$, con lo que calcularemos estos fácilmente.

Calculados los ángulos, se obtendrá fácilmente el tercer lado por el teorema de los senos. Ahora bien; si solo se desea obtener c sin calcular $\hat{A}$ y $\hat{B}$, se podría aplicar cualquiera de las analogías de Mollweide, desarrolladas anteriormente, una vez obtenido el ángulos $(\hat{A} - \hat{B})/2$. En efecto, de la primera de las analogías, por ejemplo, se desprende:

$$c = \frac{(a+b) \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2}}{\cos \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$$

Este procedimiento tiene las siguientes ventajas respecto al anterior:

1. Se puede aplicar logaritmos a las fórmulas usadas (aunque hoy día esto no supone una ventaja).
2. La tangente determina los ángulos sin ambigüedad.
3. La tangente determina los ángulos con mayor exactitud que el seno o el coseno.

3.8.4. Fórmulas de Herón y de Briggs

Un caso práctico que suscita gran interés es la medición de superficies sin el requerimiento de emplear un teodolito, solo con el apoyo de una cinta métrica. De esta manera, si se realiza una triangulación de la superficie, el problema se reduce a calcular el área de un triángulo a partir de sus lados. Esta dificultad fue resultado por Arquímedes. No obstante, fue Herón de Alejandría quien otorgó el nombre a la fórmula, presentada y demostrada a continuación.

Teorema 4 (Fórmula de Herón). *El área de un triángulo ABC (véase Figura 9) viene dado por $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$, siendo p el semiperímetro del triángulo y a, b, c , los lados del mismo.*

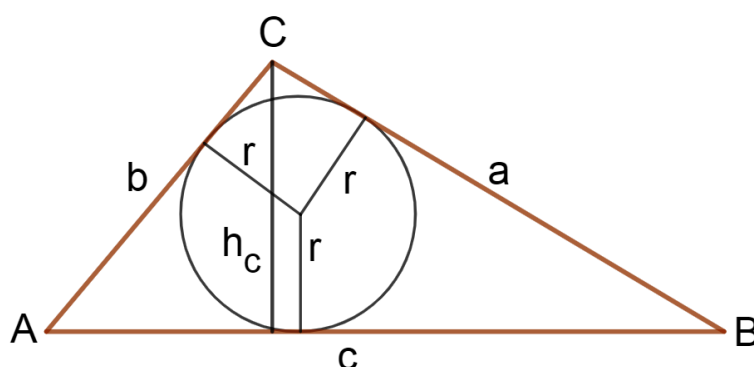


Figura 9. Esquema para demostración de la Fórmula de Herón (elaboración propia).

Demostración:

Sea h_c la altura relativa al vértice C (ver Figura 9), $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin \hat{B}$.

Por otra parte, $\sin \hat{B} = \sin 2\frac{\hat{B}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2}$, luego:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot 2 \sin \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} = a \cdot c \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \quad (*)$$

, teniendo en cuenta que $1 + \cos \hat{A} = 2 \cos^2 \hat{A}/2$ y $1 - \cos \hat{A} = 2 \sin^2 \hat{A}/2$, por el teorema del coseno:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

, sustituyendo:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2} &= 1 + \cos \hat{A} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \\ &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \end{aligned}$$

, siendo $2p$ el perímetro del triángulo, se tiene:

$$2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2} = \frac{2(p-a) \cdot 2p}{2bc} \Rightarrow \cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

, operando de la misma forma, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\cos \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}; \quad \sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Sustituyendo en (*):

$$S = a \cdot c \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} = \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}$$

Teorema 5. La expresión del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo, en función de los lados a , b y c y del semiperímetro (p) es:

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \text{área (AOB)} + \text{área (AOC)} + \text{área (BOC)} = \\ &= \frac{1}{2} \rho(a+b+c) = p \cdot \rho. \end{aligned}$$

Recordando ahora las expresiones de los segmentos $p-a$, $p-b$, $p-c$, comprendidos entre los vértices A , B , C y los puntos de contacto de dicha circunferencia con los lados (ver Figura 10), se obtienen las siguientes expresiones de las tangentes de los semiángulos.

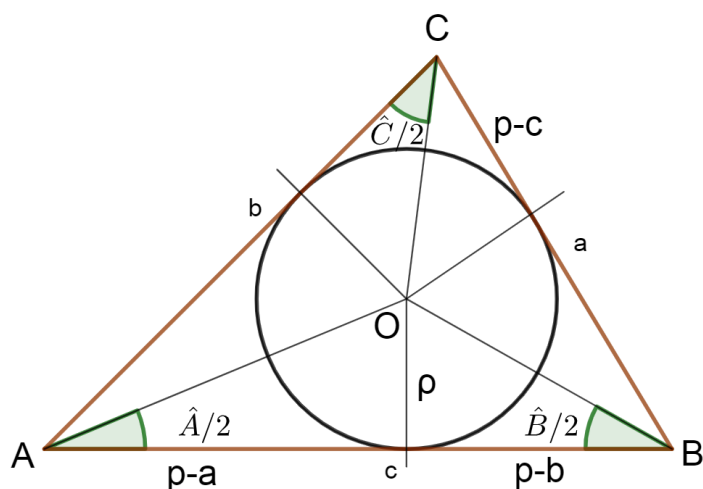


Figura 10. Esquema para demostración de las fórmulas de Briggs (elaboración propia).

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\rho}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\rho}{p-b} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\rho}{p-c} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Estas expresiones son conocidas como las fórmulas de Briggs.

3.8.5. Aplicación a la resolución de un triángulo, dados los tres lados

Dados, pues, los tres lados a, b, c de un triángulo y calculados $p, p-a, p-b, p-c$, las fórmulas de Briggs anteriores permiten obtener, sin ambigüedad, las mitades de los ángulos mediante sus tangentes y, por tanto, con mayor exactitud que en los casos anteriores. Además, a estas fórmulas se les puede aplicar el cálculo logarítmico.

3.9. Aplicaciones

3.9.1. Aplicaciones a la topografía

Los problemas de Trigonometría tienen especial e importante aplicación en campos como la Agrimensura o la Topografía, es decir, todo lo que afecta a mediciones sobre el terreno. La medición de grandes distancias es, en efecto, una operación que presenta mucha más dificultad que la medida de ángulos. Es por ello que se comprende la conveniencia de medir indirectamente distancias a partir de la resolución de triángulos.

Supongamos, por ejemplo, que nos interesa conocer la distancia de A a P , dos puntos entre los cuales hay un obstáculo que dificulta la medida directa, como por ejemplo un río. Elegiremos otro punto B de modo que la distancia AB sea cómoda de medir con exactitud, y hechas estaciones en A y B , mediremos con aparatos adecuados (teodolitos) los ángulos α y β , formados por la recta AB y las visuales a P , con estos elementos podemos calcular las distancias AP y BP , resolviendo el triángulo ABP .

Otro caso de medida indirecta muy común es el cálculo de alturas cuyo pie es inaccesible. Así, para calcular la altura h de, por ejemplo, una colina (ver Figura 11), se comienza midiendo el ángulo α que forma la horizontal con la visual de su cumbre. A continuación, retrocedemos una distancia d y medimos de nuevo el ángulo, siendo $\beta < \alpha$. Si llamamos x a la distancia desde el primer punto de observación de la cumbre de la colina, dado que los ángulos del segundo triángulo formado son β , $180^\circ - \alpha$ y $180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$, aplicando el teorema del seno en dicho triángulo resulta:

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin (\alpha - \beta)}$$

, luego

$$x = \frac{d \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$

De esta forma, la altura de la colina se deduce, finalmente, del triángulo rectángulo obtenido en primera instancia, siendo:

$$h = x \sin \alpha = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$

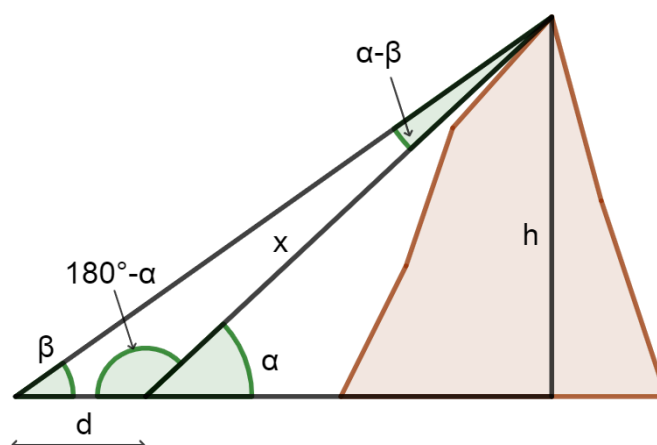


Figura 11. Esquema de medición de la altura de una colina (elaboración propia).

Además de las situaciones expuestas anteriormente, se puede calcular también la distancia d entre dos puntos inaccesibles P y Q . (pero visibles desde otros dos puntos A y B), como se muestra en la Figura 12. De este modo, para la resolución del problema, se parte de A y B y de la distancia existente entre ellos (d_1). En cuanto a los ángulos α_1 , α_2 , β_1 y β_2 , se pueden medir con la ayuda del teodolito.

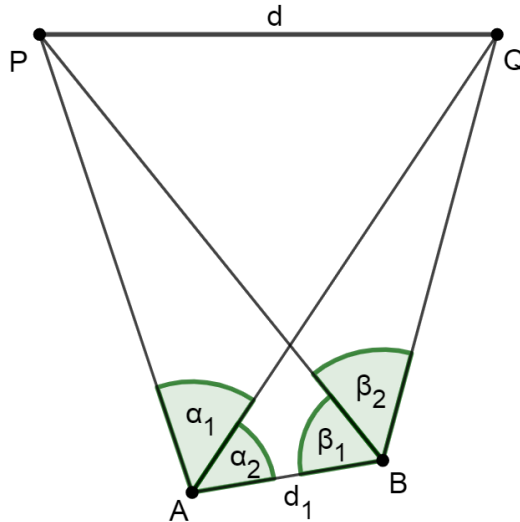


Figura 12. Medida de distancia de dos puntos inaccesibles (elaboración propia).

Aplicando el teorema del seno en los triángulos PAB y QAB , respectivamente, se tiene:

$$\frac{PB}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{d_1}{\sin[180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)]}$$

$$\frac{QB}{\sin \alpha_2} = \frac{d}{\sin[180^\circ - (\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)]}$$

Dado que los ángulos suplementarios tienen el mismo seno, las expresiones anteriores pueden reescribirse como:

$$PB = \frac{d_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)}$$

$$QB = \frac{d_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}$$

, y, finalmente, mediante la aplicación del teorema del coseno al triángulo PQB , se tiene que:

$$d^2 = PB^2 + QB^2 - 2 \cdot PB \cdot QB \cdot \cos \beta_2$$

Este es el llamado problema de Snellius.

Se comprende que, repitiendo el proceso, haciendo estación en los nuevos vértices obtenidos, si fuera preciso, se alcanzaría a cubrir la comarca en una red de triángulos cuyos elementos, calculados escalonadamente y reproducidos a escala en el dibujo, servirían de esqueleto para la formación de un mapa de la zona.

3.9.2. Resolución de polígonos regulares

Como los radios de r y las apotemas h dividen el polígono regular en triángulos rectángulos iguales, una vez conocidos todos los elementos de este se tienen los lados del polígono. No obstante, no se pueden dar arbitrariamente dos elementos, pues cualquier triángulo rectángulo no sirve para formar polígonos regulares; se precisa que el ángulo en el centro sea una parte alícuota de 180° . Por esta razón, no es posible proporcionar el radio y la apotema, o radio y lado, o lado y apotema.

3.9.3. Sector y segmento circulares

Dado el ángulo central de un segmento circular, es necesario calcular la cuerda para poder determinar el área como diferencia o suma del sector circular y del triángulo isósceles, que tiene por radios extremos OA y OB , como se observa en la Figura 13.

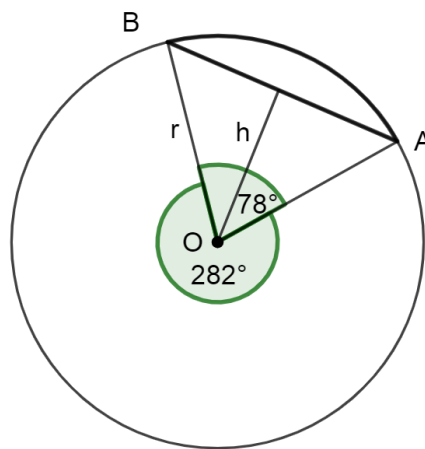


Figura 13. Esquema de segmento y sector circulares (elaboración propia).

Como la cuerda es el duplo del seno del ángulo mitad por el radio, la tabla de senos determina la longitud de ella, y con este dato se resuelve el problema.

3.10. Bibliografía

Bouvier, A. Diccionario de Matemáticas.
Coxeter. Fundamentos de Geometría.
Eves. Estudio de las geometrías.

Moyse. Elementos de Geometría Superior.

Pérez Beato. Geometría.

Puig Adam. Geometría métrica. Tomo II.

Queysanne. Geometría

Rouché-Comberousse. Géometrie.

4. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

La incertidumbre de qué enseñar y cómo enseñar persiste como un problema intrínseco en la educación y, consecuentemente, en la educación matemática. Dicho problema afecta a los encargados del diseño del currículum, a los docentes matemáticos y a los preparadores de docentes (Jurado, 2019). Así, dados los continuos cambios del marco legal y, consecuentemente, del currículum, se va a realizar, en este epígrafe, un análisis de las disposiciones curriculares a nivel estatal y autonómico. Ambos estudios van a tener su foco en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, del curso de 4º de ESO. Particularmente se analizará el tema de trigonometría, el cual es introducido por primera vez en el itinerario académico de los discentes.

Por otro lado, dada la importancia del libro de texto en el proceso de enseñanza, se procederá a analizar dos libros de 4º de ESO de diferentes editoriales. Este estudio será de especial relevancia, pues el libro de texto se constituye como uno de los principales agentes directos que participan en el proceso de transposición didáctica. Se establece como puente entre el “saber sabio” (saber teórico o de referencia) y el “saber enseñado” (a los alumnos en el aula) (Ramírez, 2005). Esto es, el libro de texto es un material de apoyo pedagógico para el docente que surge en el nivel del “saber a enseñar”, pues es este tipo de saber el que se encuentra ligado con una vía didáctica que sirve para presentar el conocimiento científico al discente (De Faria, 2006). Aparte de la estructura que sigue el tema o los temas de trigonometría en cada uno de los libros, se analizarán también las siguientes cuestiones:

- El grado de ajuste entre los contenidos de cada libro y el de las disposiciones curriculares en vigor.
- El enfoque (geométrico o analítico) empleado por cada uno de los autores para presentarle al discente el concepto de razón trigonométrica.
- Qué nivel de contextualización ofrece cada libro para presentar la trigonometría integrada en el mundo real.
- El tipo de ejercicios/actividades propuestos, diferenciando los contextualizados en la vida real y también clasificándolos según el nivel de dificultad.
- Qué recursos TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) ofrecen como apoyo pedagógico para la instrucción de la trigonometría.

4.1. Disposición curricular

La Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), la LOMLOE, entró en vigor el día

19 de enero de 2021, 20 días después de su publicación en el Boletín Oficial del Estado. En este, se concreta que “la finalidad de esta Ley no es otra que establecer un renovado ordenamiento legal que aumente las oportunidades educativas y formativas de toda la población, que contribuya a la mejora de los resultados educativos del alumnado, y satisfaga la demanda generalizada en la sociedad española de una educación de calidad para todos”.

Aunque la LOMLOE haya entrado ya en vigor, todas las modificaciones que presenta no se han implantado de manera inmediata. Se llevará a cabo una implantación de la Ley de manera gradual. Así, el Ministerio de Educación y Formación Profesional presenta el siguiente calendario de implantación de la LOMLOE, extendido a lo largo de cuatro cursos escolares:

- Enero 2021. Al mismo tiempo que entra en vigor la LOMLOE, lo hacen también las modificaciones relativas a:
 - La participación y competencias del Consejo Escolar, Claustro y director o directora.
 - La autonomía de los centros docentes.
 - La selección del director o directora en los centros públicos.
 - La admisión de alumnos.
- Curso 2021-2022. Al inicio del presente curso se hacen vigentes las modificaciones introducidas en:
 - La evaluación y condiciones de promoción de las diferentes etapas educativas.
 - Las condiciones de titulación de educación secundaria obligatoria, ciclos formativos de grado básico y bachillerato.
 - La titulación de las enseñanzas profesionales de música y danza.
 - Las condiciones de acceso a las diferentes enseñanzas.
- Curso 2022-2023. En el inicio de curso se modificarán el currículum, organización y objetivos de los cursos 1º, 3º y 5º de Primaria, 1º y 3º de ESO, 1º de Bachillerato y 1º de Ciclos Formativos de Grado Básico.
- Finalmente, al inicio del curso 2023-2024, se modificarán el currículum, organización y objetivos de los cursos 2º, 4º y 6º de Educación Primaria, 2º y 4º de ESO, 2º de Bachillerato y 2º de Ciclos Formativos de Grado Básico. Además, se implantarán también modificaciones relativas al acceso y admisión a la

universidad, así como evaluaciones de diagnóstico de 4º de Primaria y 2º de ESO.

Dado que en el presente curso 2021-2022 todavía no se han implantado las modificaciones relativas al diseño curricular, estructura organizativa y objetivos de las enseñanzas, la fundamentación curricular de este trabajo tendrá su base en la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Con respecto a la comunidad autónoma de Andalucía, la ley que rige la estructura organizativa de la educación es la Ley 17, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (LEA), en línea con la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) (Hernández, 2021).

4.1.1. Real Decreto 1105/2014

En primera instancia, se analiza la disposición curricular vigente a nivel estatal. Esta se recoge en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículum básico de la Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato. En el anexo I del Real Decreto se encuentran los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de cada una de las materias del bloque de asignaturas troncales de ESO y Bachillerato.

La asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas se distribuye en los cursos de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en cinco grandes bloques, no independientes entre sí: (1) Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, (2) Números y álgebra, (3) Geometría, (4) Funciones y, por último, (5) Estadística y probabilidad.

El tema de trigonometría queda enmarcado dentro del bloque 3 de Geometría, por lo que serán objeto de estudio los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables pertenecientes a este bloque. Asimismo, se tratará también en el presente trabajo el bloque 1, pues se trata de un bloque transversal y, por tanto, sometido a una continua evaluación a lo largo del curso académico. A continuación, se presentan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables los bloques 1 y 3, en la Tabla 1 y Tabla 2, respectivamente.

Tabla 1. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas (RD 1105/2014).

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
- Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. - Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. - Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. - Práctica de los procesos de	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos,	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. - Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos	geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación en el	6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa
---	---	--

llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.	sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
--	---	--

Tabla 2. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO. Bloque 3: Geometría (RD 1105/2014).

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. - Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. - Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. - Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. - Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. - Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

4.1.2. Competencias clave

Adicionalmente, y como paso previo al análisis de los dos libros de texto, se presentan en un apartado las denominadas competencias clave.

Tanto en el artículo 6 de la LOMCE como en el 2.1 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se hace referencia a las competencias como uno de los elementos que deben integrar el currículum. Según la LOMCE, las competencias se describen como “capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”.

Otra definición podría ser la que se expone en el resumen ejecutivo de DeSeCo (OCDE, 2003) *La definición y Selección de Competencias Clave*, donde el término de competencia se define como “la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada”. La competencia “supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz” (García, 2022). Asimismo, según los Ministerios de Educación de la OCDE, “el desarrollo sostenible y la cohesión social dependen críticamente de las competencias de toda nuestra población, con competencias que se entiende cubren el conocimiento, las destrezas, las actitudes y los valores”

En consecuencia, el conocimiento de competencias se constituye por un conocimiento de base conceptual: conceptos, principios, teorías, datos y hechos (conocimiento declarativo-saber decir); un conocimiento relativo a las destrezas, referidas tanto a la acción física observable como a la acción mental (conocimiento procedimental-saber hacer); y un tercer elemento que supone una gran influencia social y cultural, y que implica un conjunto de actitudes y valores (saber ser) (García, 2022).

Así, se culmina con la identificación de un grupo de competencias denominadas “competencias clave”, las cuales, según el Parlamento Europeo y el Consejo de la Unión Europea (2006), y en línea con el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, quedan definidas como “una combinación de conocimientos, capacidades y actitudes adecuadas al contexto. Las competencias clave son aquéllas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personales, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo. Por tanto, son pertinentes para todos los sectores de la educación y la formación (centros escolares, educación y formación profesional, educación superior, aprendizaje de adultos) y del aprendizaje no formal e

informal”. De este modo, cada una de las competencias clave presenta la posibilidad de contribuir al éxito en la en la sociedad actual del conocimiento y de la información.

En el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y en el artículo de la Orden ECD/65/2015 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte), de 21 enero, se establecen que las competencias clave del currículum son las siguientes (recogidas y plasmadas en la Figura 14):

- Competencia de comunicación lingüística (CCL).
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- Competencia digital (CD).
- Competencia de aprender a aprender (CAA).
- Competencias sociales y cívicas (CSC).
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
- Competencia conciencia y expresiones culturales (CEC).



Figura 14. Competencias clave en la LOMCE, consideradas por la Unión Europea (Ministerio de Educación y Formación Profesional).

En el Anexo I de la Orden ECD/65/2015, de 29 de enero, se lleva a cabo una descripción de las competencias clave del Sistema Educativo Español (García, 2022). A continuación, se presentará la definición de la CMCT, concretamente la de la competencia matemática, dada la especialidad en Matemáticas del presente máster de educación:

“La competencia matemática es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña —en distintos grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas).”(Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea, 2006).

Para un adecuado desarrollo de esta competencia se precisa abordar cuatro campos distintos, relativos a los números y el álgebra, la geometría, las funciones y la estadística, interrelacionados de diversas formas (García, 2022):

- La cantidad: esta noción incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo, interpretando distintas representaciones de todas ellas y juzgando interpretaciones y argumentos. Participar en la cuantificación del mundo supone comprender las mediciones, los cálculos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo y las tendencias y patrones numéricos.
- El espacio y la forma: incluyen una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones, direcciones y representaciones de ellos; descodificación y codificación de información visual, así como navegación e interacción dinámica con formas reales, o con representaciones. La competencia matemática en este sentido incluye una serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas
- El cambio y las relaciones: el mundo despliega multitud de relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las circunstancias, donde los cambios se producen dentro de sistemas de objetos interrelacionados. Tener más conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprender los tipos fundamentales de cambio y cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlos y predecirlos.

- La incertidumbre y los datos: son un fenómeno central del análisis matemático presente en distintos momentos del proceso de resolución de problemas en el que resulta clave la presentación e interpretación de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y los datos son fundamentales.

Por otro lado, en la Tabla 3 se recogen los descriptores más importantes para el desarrollo de la competencia matemática.

Tabla 3. Descriptores más relevantes en el desarrollo de la competencia matemática.

Descriptores
Conocer y utilizar los elementos matemáticos básicos: operaciones, magnitudes, porcentajes, proporciones, formas geométricas, criterios de medición y codificación numérica
Expresarse con propiedad en el lenguaje matemático
Resolver problemas seleccionando los datos y las estrategias apropiadas
Reconocer la importancia de la ciencia en nuestra vida cotidiana
Organizar la información utilizando procedimientos matemáticos
Manejar los conocimientos sobre ciencia y tecnología para solucionar problemas, comprender lo que ocurre a nuestro alrededor y responder a preguntas
Comprender e interpretar la información presentada en formato gráfico
Aplicar métodos de análisis rigurosos para mejorar la comprensión de la realidad circundante en distintos ámbitos (biológico, geológico, físico, químico, tecnológico, geográfico...)
Conocer las características de los ángulos como herramienta para resolver problemas geométricos.
Saber aplicar el concepto de simetría para la resolución de problemas
Reconocer distintos tipos de ángulos en la naturaleza.
Conocer y distinguir los distintos tipos de figuras planas y espaciales.
Reconocer las distintas figuras geométricas en el plano o en el espacio en elementos del mundo natural
Saber describir correctamente una figura plana o espacial
Dominar los métodos para calcular áreas y perímetros de figuras planas como medio para resolver problemas geométricos
Utilizar los conocimientos sobre áreas y perímetros para describir distintos fenómenos de la naturaleza

Saber resumir conjuntos de datos en tablas y gráficas, y poder interpretarlos
Conocer los conceptos estadísticos para poder resolver problemas
Utilizar la información proporcionada por tablas y gráficas, o por datos estadísticos, para describir elementos de la realidad

4.1.3. Orden de 15 de enero de 2021 de la Comunidad Autónoma de Andalucía

Por último, para concluir este apartado de análisis de las disposiciones curriculares vigentes, se hará referencia a la Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas. De igual modo, se presentan las relaciones entre los contenidos y criterios de evaluación con las competencias clave presentadas anteriormente. Para ello se presentan la Tabla 4 y la Tabla 5, donde se analizarán los bloques 1 y 3, respectivamente, como se procedió en el análisis del RD 1105/2014.

Tabla 4. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del bloque 1, de MAC, 4º de ESO.

Contenidos	Criterios de evaluación
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
- Planificación del proceso de resolución de problemas. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. - Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. - Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. CCL, CMCT. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. CMCT, CAA. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. CCL, CMCT, CAA. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. CMCT, CAA. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. CCL, CMCT, CAA, SIEP.

probabilísticos. - Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. - Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. CMCT, CAA, CSC, SIEP. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana. CMCT, CAA. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. CMCT. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. CMCT, CAA, SIEP. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. CMCT, CAA, SIEP. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos. CMCT, CD, CAA. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos. CCL, CMCT, CD, CAA.
---	---

Tabla 5. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del bloque 3 de MAC, 4º de ESO.

Contenidos	Criterios de evaluación
Bloque 3. Geometría	
- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. - Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. - Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. - Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. - Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. - Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. CMCT, CAA. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. CMCT, CEC, CAA. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas. CCL, CMCT, CD, CEC, CAA.

4.2. Análisis de libros de texto

En este epígrafe se recoge la segunda parte del apartado de fundamentación curricular. Se analizarán dos libros de texto de diferentes ediciones, cuya elección se ha basado en la revisión, hecha por Moreno (2020), de los libros de texto más empleados en centros públicos y concertados en la provincia de Jaén durante el curso 2019-2020. De este estudio se desprende que los libros empleados con mayor frecuencia son los pertenecientes a las editoriales Anaya y SM (ver Figura 15). Por tanto, serán estos los que se analicen en el presente TFM.

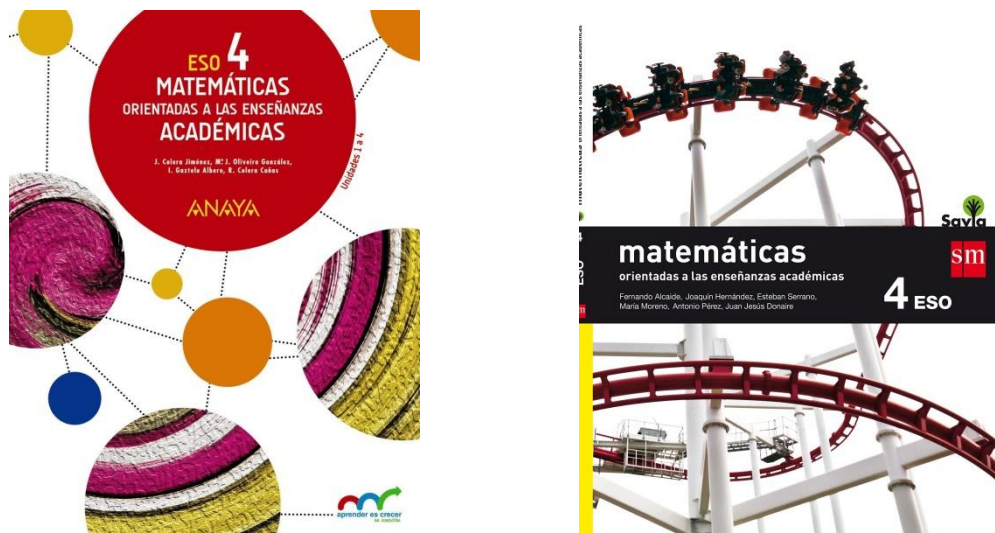


Figura 15. Portada de los libros de texto de las editoriales Anaya y SM (Colera *et al.*, 2016; Alcaide *et al.*, 2017)

4.2.1. Libro de texto de la editorial Anaya

El libro de Anaya (ISBN 978-84-698-1068-2) recoge todo el contenido referido a la trigonometría en un solo tema o unidad, concretamente el tema 7, justamente el tema posterior a la unidad 6 de “Semejanza. Aplicaciones”. El nombre de este tema es “Trigonometría” y la estructura que presenta es la siguiente:

- Primero. Se introduce el tema en las dos primeras páginas a través de una breve contextualización histórica de la trigonometría, donde se presenta su origen y su evolución *a posteriori*. Seguidamente, se expone que el fundamento de la trigonometría lo constituye la semejanza de triángulos rectángulos, enlazando así el presente tema con la unidad anterior de semejanza y posibilitando a los discentes observar la permeabilidad de conocimientos entre unos temas y otros. Así pues, se finaliza esta primera parte introductoria mostrando un ejemplo de aplicación de semejanza de triángulos rectángulos en el mundo real, resolviéndolo mediante proporcionalidad e introduciendo, así, el concepto de tangente, por primera vez, como la relación entre los lados catetos del triángulo.
- Segundo. Se comienza con la exposición de los contenidos mencionados anteriormente, los cuales se analizarán *a posteriori*. El método que sigue la editorial Anaya consiste en presentar los contenidos teóricos de forma general seguidos de uno o varios ejercicios resueltos más otra serie de ejercicios para practicar lo aprendido. Esto propicia que la clase siga un enfoque tradicional, donde el docente es un mero emisor de la información y los alumnos receptores. También es muy importante añadir el empleo de recursos web y de *GeoGebra*, muy útiles para reforzar el aprendizaje y profundizar en algunos

contenidos. Además de aportar un nuevo punto de vista a la hora de impartir los mismos contenidos, resultando estos más atractivos y aumentando así la motivación del alumnado (Hernández, 2021).

- Tercero. Al final del tema se presenta una página de “Ejercicios y problemas resueltos”, cuatro páginas de “Ejercicios y problemas” (que se dividen en “Practica”, “Aplica lo aprendido”, “Resuelve problemas”, “Problemas +” y “Reflexiona sobre la teoría”), una página de “Taller de matemáticas” e información extra sobre la trigonometría en eclipses y geometrías varias, y, finalmente, una sección de “Autoevaluación” con la resolución de los ejercicios en la web.

A continuación, en la Figura 16 se muestran dos páginas de contenidos de la unidad 7 de trigonometría, del libro de texto de Anaya, con ejercicios para practicar, y en la Figura 17 aparecen algunos de los problemas propuestos al final de la unidad.

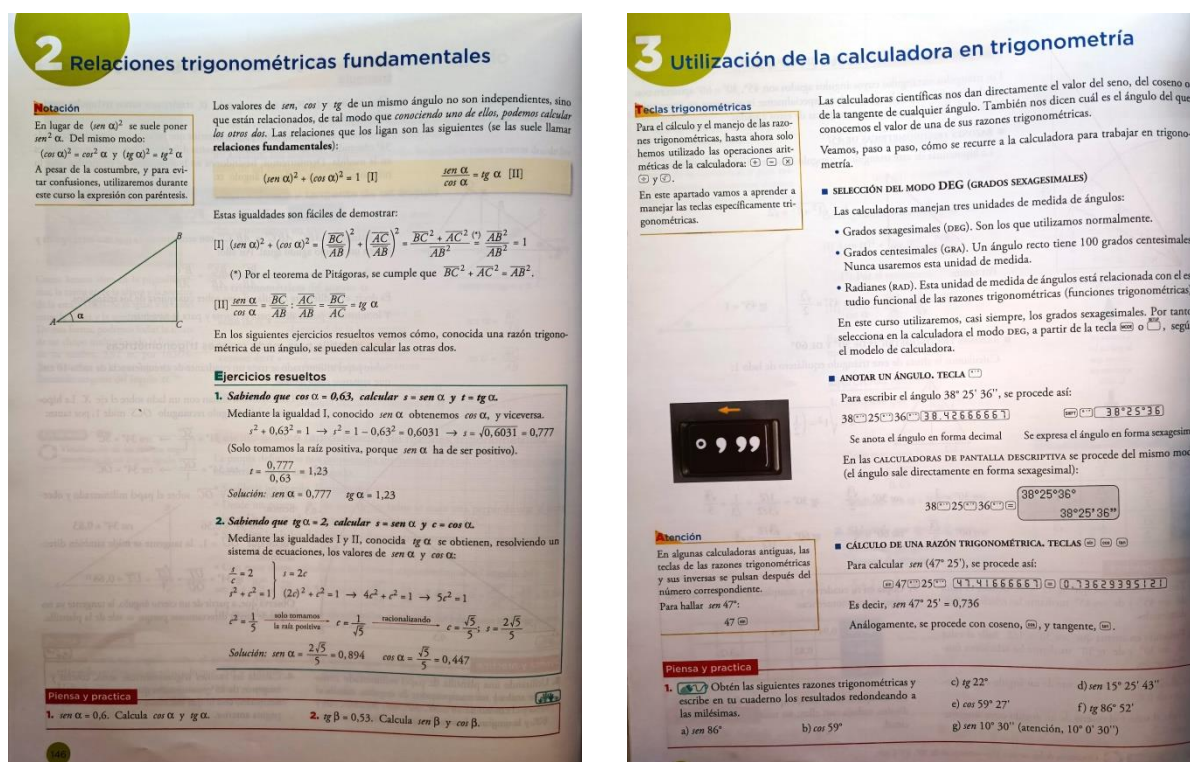
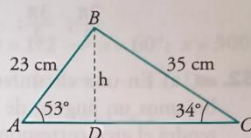


Figura 16. Ejemplo de página de contenidos y ejercicios tipo “Piensa y practica” de la unidad 7 del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).

Aplica lo aprendido

23. Halla:

- La longitud $\overline{AC}$.
- El área del triángulo ABC .

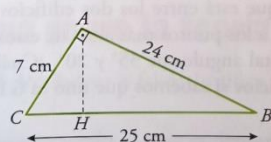


24. El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38° . ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

25. Halla el área de un paralelogramo cuyos lados miden 16 cm y 24 cm y forman un ángulo de 40° .

26. En una carretera de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1065 m. Halla la pendiente media de la carretera y el ángulo que forma con la horizontal.

27. a) En el triángulo ABC , rectángulo en A , calcula $\overline{BH}$ y $\overline{AH}$.



- Halla las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ en el triángulo ABC y en el triángulo ABH y comprueba que coinciden.

Resuelve problemas

33. Desde el punto donde estoy, la visual al punto más alto del edificio que tengo en frente forma un ángulo de 28° con la horizontal. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la altura del edificio?

34. Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20° . ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?

35. Un avión P vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\overline{PAB} = 20^\circ$ y $\overline{PBA} = 30^\circ$. ¿A qué altura está el avión?

36. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.

37. Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q , cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.

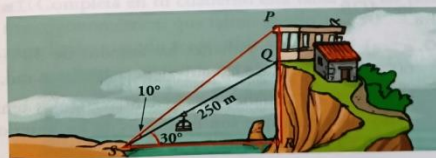


Figura 17. Ejercicios tipo “Aplica lo aprendido” y “Resuelve problemas” propuestos al final de la unidad del libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).

Dado que en el curso de 4º de ESO de MAC es la primera vez que se introduce la trigonometría, la forma de presentar el concepto de razón trigonométrica al alumnado juega un papel fundamental. Este concepto se podría exponer de forma analítica y/o de forma geométrica. En el caso del libro de texto de la editorial Anaya, el concepto de razón trigonométrica se introduce en la primera página de la unidad desde una perspectiva geométrica, como razón entre dos lados de un triángulo rectángulo. Como se puede apreciar en la Figura 18, el libro comienza exponiendo que “la trigonometría se basa en la semejanza de triángulos rectángulos” (ya comentado en las páginas introductorias del tema), para, a continuación, enunciar: “la razón entre dos lados de un triángulo rectángulo es igual a la razón entre los lados correspondientes de cualquier otro triángulo semejante a él”. Así, con el apoyo del esquema de un triángulo rectángulo, presenta las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo α . Sin embargo, un punto negativo a resaltar es el hecho de no comenzar la unidad introduciendo la medición de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes (se hace alusión a ello en el apartado 8), tal y como establece el RD 1105/2014 y la Orden del 15 de enero de 2021.

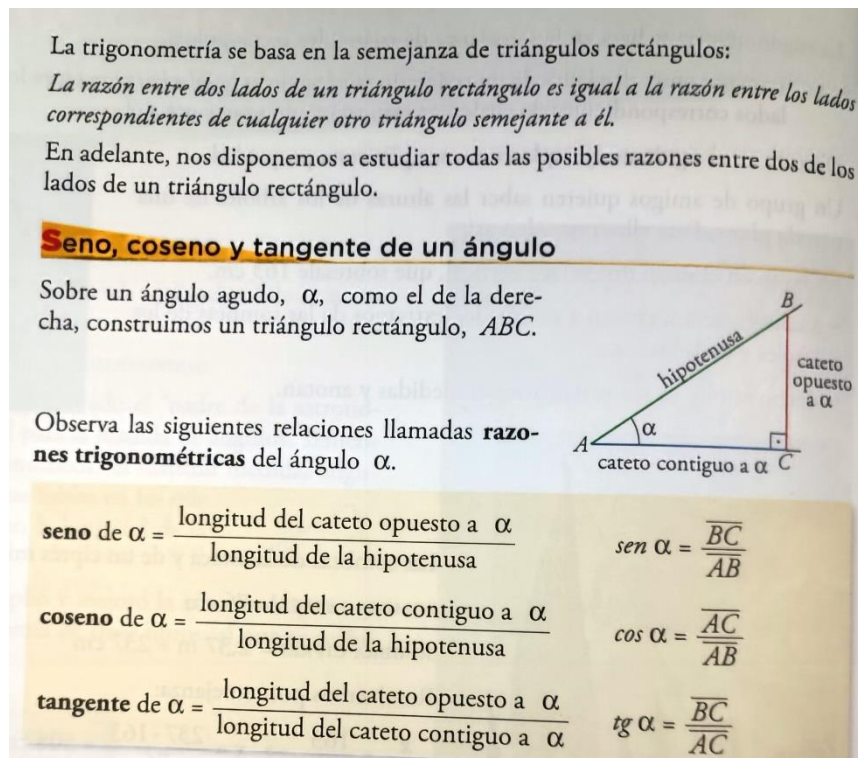


Figura 18. Definición de razones trigonométricas según el libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).

Es en la siguiente página donde se adopta una visión más analítica del concepto de razón trigonométrica. Se parte de una circunferencia unidad (la denominada “circunferencia goniométrica” de radio 1, no introducida en el tema hasta el apartado 6) para situar un ángulo, con vértice en el centro, y varios puntos en ella, haciendo la hipotenusa igual a la unidad y proporcionando, así, una forma sencilla de definir y visualizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (ver Figura 19). Importante resaltar también es el hecho de puntualizar y demostrar que “las razones trigonométricas dependen del ángulo, no del triángulo”.

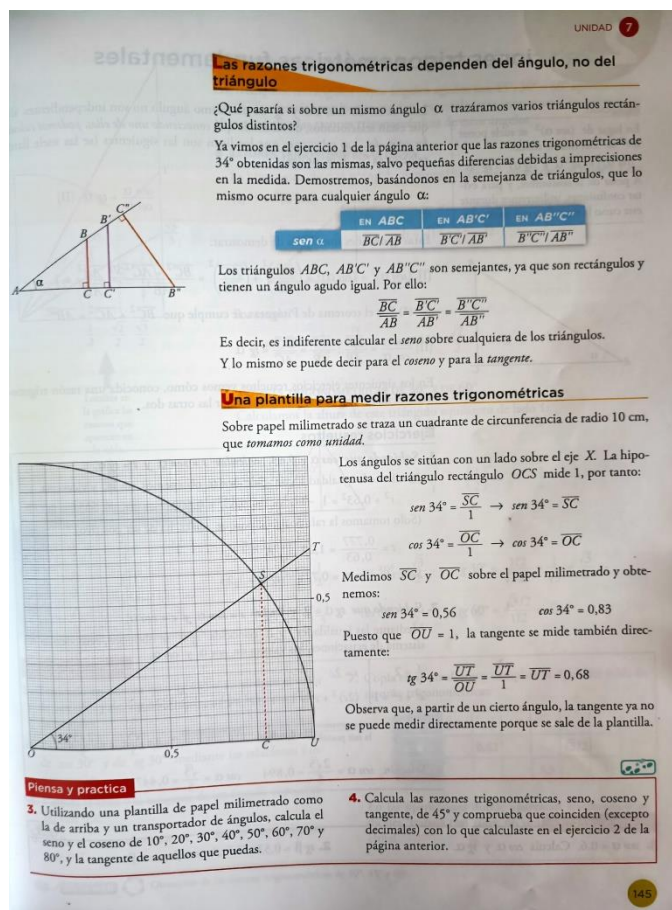


Figura 19. Definición de razón trigonométrica a partir de la circunferencia goniométrica según el libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).

Como se ha comentado previamente, el concepto de circunferencia goniométrica no se introduce hasta el apartado 6, presentado un esquema de una circunferencia para las razones del seno y del coseno (para un ángulo cualquiera entre 0° y 360°) y otra para la tangente. Asimismo, a modo de nota informativa, el libro de Anaya añade otros tres dibujos de la circunferencia representando los cuadrantes y los signos de cada una de las razones según dónde se encuentre el ángulo de estudio (ver Figura 20).

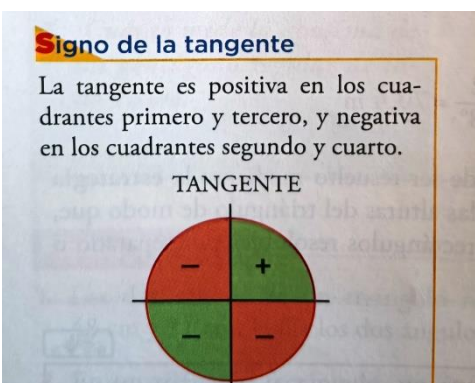
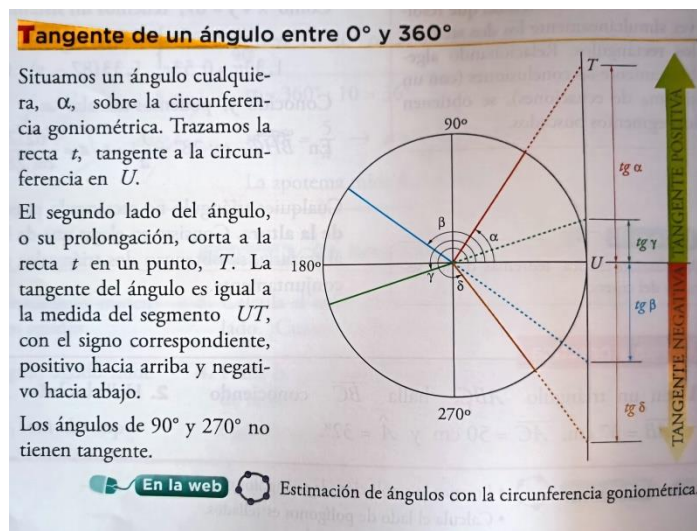
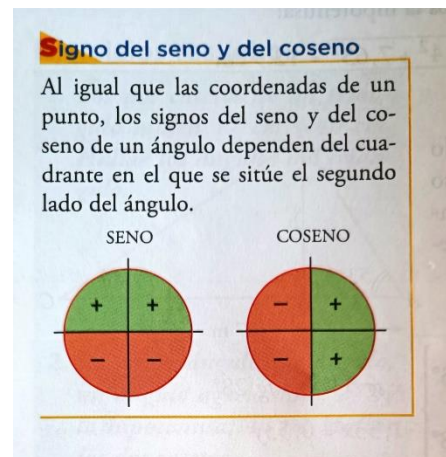
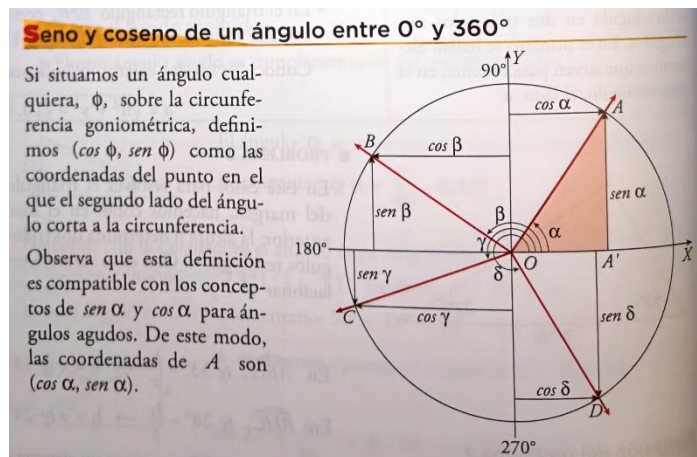


Figura 20. Circunferencia goniométrica para las razones seno y coseno y signos según el cuadrante (arriba); circunferencia la tangente y signos según el cuadrante (abajo). Libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).

En el epígrafe de “Fundamentación didáctica” del actual trabajo se analizarán con más detalle estos dos puntos de vista a través de los cuales introducir el concepto de razón trigonométrica. Asimismo, se estudiará cómo la posibilidad de definir a través de dos caminos distintos el concepto de razón trigonométrica, puede constituirse como una fuente de concepciones erróneas por parte de los discentes (Martínez, 2021).

Una vez analizado el concepto de razón trigonométrica, es interesante revisar la contextualización que ofrece el libro de Anaya acerca de la trigonometría. A lo largo de la unidad, el libro contiene numerosos ejemplos y problemas situados en la vida real que pueden solucionarse con la ayuda esta rama de las matemáticas. El más común y visual es el del cálculo de medidas inaccesibles, como puede ser el problema de querer conocer el ancho de un río, la altura de un árbol o la altura de cualquier edificio, entre otros muchos ejemplos (ver Figura 21).

3. Altura del árbol y anchura del río

Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo. Ahora son 23° .



Hacemos una representación.

Llamamos x al ancho del río e y a la altura del árbol.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 41^\circ = y/x \\ \operatorname{tg} 23^\circ = y/(x + 25) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x \cdot 0,87 \\ y = (x + 25) \cdot 0,42 \end{array} \right\} \rightarrow 0,87x = 0,42x + 25 \cdot 0,42 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,45x = 10,5 \rightarrow x = 23,3; y = 23,3 \cdot 0,87 = 20,3$$

Solución: El ancho del río es 23,3 m, y la altura del árbol, 20,3 m.

Hazlo tú. Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50° ; camina 10 m; 2.ª medición, 25° .

37. Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q , cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.

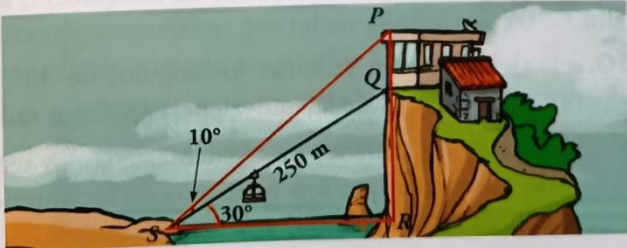


Figura 21. Ejemplos de problemas de trigonometría contextualizados en la vida real según el libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016).

En lo que respecta a los ejercicios y problemas propuestos para los estudiantes, el libro de Anaya presenta una gran variedad y siempre manteniendo una adecuada coherencia y cohesión entre estos y los contenidos que se imparten en la unidad. Presenta colecciones de ejercicios y problemas de nivel de dificultad variado partiendo desde nivel 1, básico (representado por un sector rojo al lado del número del ejercicio), donde se practica lo aprendido en clase, pasando a un nivel 2 donde se aplican los contenidos aprendidos a situaciones problemáticas (dos sectores rojos) y culminando con un nivel 3, de máxima dificultad, donde, además de utilizar lo aprendido en esta unidad, deberás razonar y emplear conocimientos matemáticos adquiridos anteriormente. Estos ejercicios se analizarán con mayor profundidad posteriormente, realizando, a su vez, una comparativa con el libro de la editorial SM.

También ofrece multitud de recursos informáticos (TIC), como actividades de profundización en su página web o ejercicios programados en *GeoGebra* (ver Figura 22).

No obstante, es cierto que los ejercicios que ofrece el libro de Anaya son todos de carácter individual, no fomentando así el trabajo cooperativo y propiciando, por tanto, una clase de enfoque tradicional, esto es, transmisiva (Martínez, 2021).

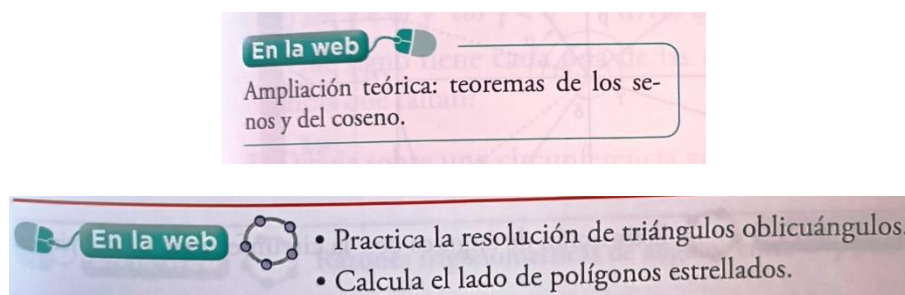


Figura 22. Recursos TIC (web y *GeoGebra*) para profundizar y ampliar conocimientos. Libro de texto de Anaya (Colera *et al.*, 2016).

4.2.2. Libro de texto de la editorial SM

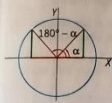
El libro de texto de SM distribuye el tema de la trigonometría en dos unidades, concretamente la unidad 5 de “Semejanza y trigonometría” y la unidad 6 de “Aplicaciones de la trigonometría”. Al margen de este detalle, la estructura genérica que sigue el desarrollo de los temas es la siguiente:

- Primero. Se realiza una breve introducción del tema en cuestión. A diferencia de Anaya, donde se expone un breve contexto histórico y la evolución de la trigonometría, en el libro de texto de SM se realizan algunas preguntas de reflexión y anécdotas sobre trigonometría. Estos recursos son muy útiles a modo de evaluación inicial y como puente para dar inicio al tema.
- Segundo. Se comienza con el desarrollo de los contenidos, siguiendo la misma fórmula que el libro de texto de Anaya, en línea con un enfoque deductivo tradicional (Martínez, 2021). Se presentan desde lo más general a lo específico, y siempre apoyándolos con ejemplos y actividades para practicar lo aprendido recientemente (ver Figura 23). De igual forma que la editorial Anaya, SM ofrece recursos TIC para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto de *GeoGebra* como otras actividades en su página web (smSaviadigital.com).
- Tercero. Las unidades finalizan el desarrollo de los contenidos con una sección llamada “Organiza tus ideas”, realmente útil y fundamental para poder tener una mejor visión de la estructura que ha seguido el tema y de los conceptos esenciales con los que hay que quedarse. A continuación, se sigue con la sección de “Actividades clave”, la cual recoge una serie de ejercicios resueltos donde se aplican todos los contenidos impartidos. A esto le siguen cuatro páginas con “Ejercicios para practicar”, “Problemas para resolver” y “Actividades para pensar más” (ver Figura 24). Por último, se finaliza con la

sección “Ponte a prueba”, con problemas de mayor complejidad, uno resuelto y varios propuestos, y con una autoevaluación.

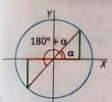
Relaciones entre las razones de ciertos ángulos

• **Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$**



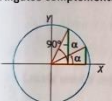
$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

• **Ángulos que se diferencian en 180° : α y $180^\circ + \alpha$**



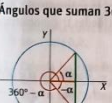
$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

• **Ángulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$**



$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha\end{aligned}$$

• **Ángulos que suman 360° : α y $360^\circ - \alpha$**



$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Con calculadora

Para calcular:

- el seno de un ángulo: $\sin 32.28 = 0.5299$
- el coseno de un ángulo: $\cos 5.01 = 0.6428$
- la tangente de un ángulo: $\tan 2.44 = 0.4452$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

Ten en cuenta

Recuerda que un ángulo mayor de 360° se expresa como un ángulo menor de 360° más un número de vueltas completas:

$$4000^\circ = 11 \cdot 360^\circ + 40^\circ = 40^\circ + 11 \text{ vueltas}$$

smSaviadigital.com

PRACTICA Relaciona las razones de ángulos diferentes.

ACTIVIDADES

22. Define en radianes los cuatro cuadrantes del plano.

23. En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si $\sin \alpha > 0$ d) β si $\operatorname{cosec} \beta > 0$
b) γ si $\cos \gamma < 0$ e) δ si $\sec \delta < 0$
c) φ si $\operatorname{tg} \varphi < 0$ f) λ si $\operatorname{cotg} \lambda < 0$

24. Calcula la secante, cosecante y cotangente de los ángulos 30° y 60° .

25. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un número de vueltas completas más un ángulo menor de 360° .

a) 400° c) 2350° e) 4315°
b) 540° d) 2880° f) 6000°

ACTIVIDAD RESUELTA

26. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) $\sin 225^\circ$ b) $\cos 780^\circ$ c) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$

a) $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\cos 780^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
c) $\operatorname{tg}(-210^\circ) = -\operatorname{tg} 210^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

27. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) $\sin 300^\circ$ b) $\cos(-330^\circ)$ c) $\operatorname{tg}(-480^\circ)$

Figura 23. Ejemplo de página de contenidos y actividades para repasarlos del libro de texto de SM (Alcaide *et al.*, 2017).

La estructura que presentan tanto las unidades del libro de Anaya como las de SM es muy similar, siendo la diferencia más significativa la introducción por parte de SM de la sección “Organiza tus ideas”, mencionada anteriormente.

69. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si $\cos \alpha > 0$ c) β si $\sin \beta > 0$
b) γ si $\operatorname{tg} \gamma < 0$ d) δ si $\operatorname{cosec} \delta < 0$

70. Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\cos 123^\circ$ d) $\operatorname{cosec} 256^\circ$ g) $\operatorname{tg} 320^\circ$
b) $\sin 750^\circ$ e) $\cotg 568^\circ$ h) $\cos 130^\circ$
c) $\operatorname{tg} 2000^\circ$ f) $\sec 580^\circ$ i) $\sin 1221^\circ$

71. Expresa las razones trigonométricas de 70° , 160° , 200° y 340° en función de las de 20° .

72. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\sin 120^\circ$ e) $\cos 225^\circ$ i) $\operatorname{tg} 330^\circ$
b) $\sin(-60^\circ)$ f) $\cos(-150^\circ)$ j) $\operatorname{tg} 150^\circ$
c) $\sin 510^\circ$ g) $\cos 450^\circ$ k) $\operatorname{tg} 420^\circ$
d) $\sin(-660^\circ)$ h) $\cos(-390^\circ)$ l) $\operatorname{tg}(-405^\circ)$

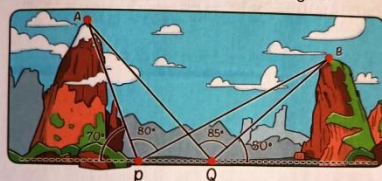
73. Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $90^\circ + \alpha$.



PROBLEMAS PARA RESOLVER

48. Desde un lugar situado cerca de una montaña se observa su cumbre con un ángulo de elevación de 45° . Si se retroceden 1061 m, el ángulo es de 30° . Calcula la altura de la montaña.

49. Se quiere calcular la distancia que separa las cimas de dos montañas. Para ello, se fijan dos puntos P y Q distantes entre sí 50 m y los ángulos que aparecen en la figura.



¿Cuál es la distancia entre las dos cimas?

50. Calcula la distancia PQ sabiendo que:

$\overline{AB} = 16\text{ m}$ $\alpha_1 = 84^\circ 30'$ $\alpha_2 = 36^\circ$ $\alpha_3 = 40^\circ 30'$ $\alpha_4 = 76^\circ$

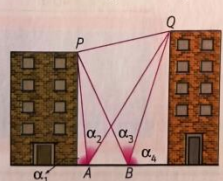


Figura 24. “Ejercicios para practicar” y “Problemas para resolver” al final de la unidad del libro de texto de SM (Alcaide *et al.*, 2017).

Al igual que en el libro de Anaya, se distinguen, mediante sectores, tres niveles de dificultad en las actividades propuestas. La variedad de ejercicios y problemas también es amplia, incluso más que la de la editorial Anaya, especialmente en lo que respecta a la “Aplicaciones de la Trigonometría”, pues SM dedica una unidad completa a ello. Además, se incorpora una actividad para trabajar la metodología cooperativa, la cual consiste en trabajar con un compañero para encontrar una fórmula del área de un polígono regular en función del número de lados y de la medida del lado.

Con respecto al comienzo del desarrollo de los contenidos, el libro de SM se ajusta mejor a lo establecido en el RD 1105/2014, pues inicia con un apartado donde se explica la medición de ángulos en sistema sexagesimal y radián, para, a continuación, introducir la definición de razones trigonométricas de un ángulo agudo. Al igual que Anaya, el libro de SM ofrece una definición geométrica de las razones trigonométricas, pero, además, presenta la inversa de cada razón y su correspondiente nombre (cosecante, secante y cotangente) (ver Figura 25).

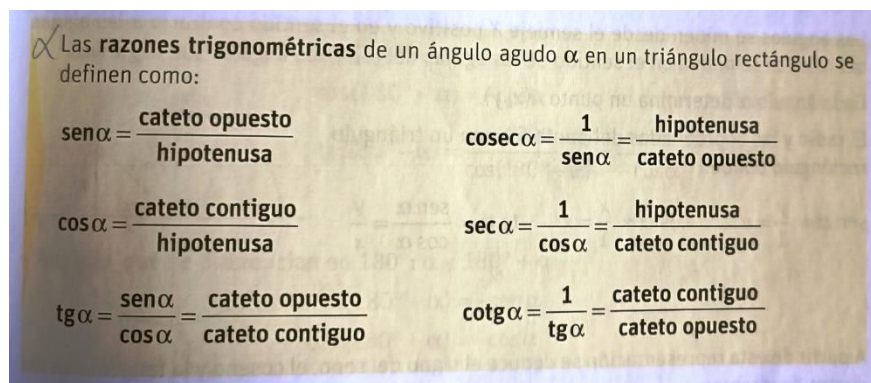


Figura 25. Definición geométrica de las razones trigonométricas y sus inversas según la editorial SM (Alcaide *et al.*, 2017).

Asimismo, en el siguiente apartado se ofrece la definición analítica de las razones trigonométricas, introduciendo, así, por primera vez, la circunferencia goniométrica, como se muestra en la Figura 26.

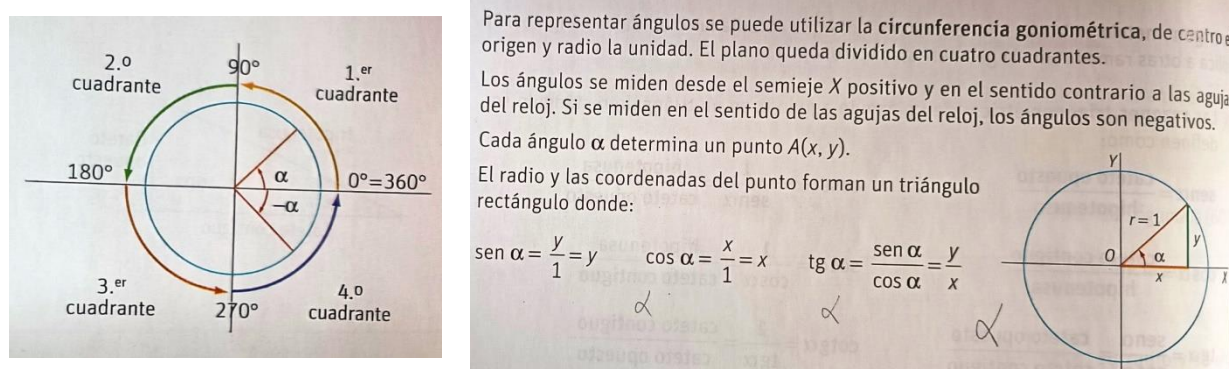


Figura 26. Definición analítica de las razones trigonométricas según SM (Alcaide *et al.*, 2017).

En cuanto a los recursos TIC, SM ofrece la misma variedad que Anaya, facilitando actividades de profundización en su página web mediante GeoGebra. Se muestran algunos ejemplos en la Figura 27.



Figura 27. Recursos TIC para profundizar y ampliar conocimientos. Libro de texto SM (Alcaide *et al.*, 2017).

4.2.3. Comparativas entre libros de texto

En cuanto a las actividades recogidas en ambos libros, se tabulan en la Tabla 6 y Tabla 7, según su variedad y dificultad, tomando como base la idea de Jurado (2019) en su TFM.

Tabla 6. Clasificación de actividades del libro de texto de Anaya (Jurado, 2019) (elaboración propia).

Actividades	Nivel de dificultad		
	Bajo	Medio	Alto
Ejercicios para practicar	38	19	1
Ejercicios resueltos/ejemplos	6	2	0
Problemas contextualizados	1	5	0
Problemas contextualizados con dibujos	1	2	3
Problemas resueltos	0	1	2
Razonamiento/demostraciones	4	3	2
Recursos TIC	8	2	2
Autoevaluación	2	2	2
Total	60	36	12
Porcentaje (%) (sobre las 108 actividades totales)	55,56	33,33	11,11

Tabla 7. Clasificación de actividades del libro de texto de SM (Jurado, 2019) (elaboración propia).

Actividades	Nivel de dificultad		
	Bajo	Medio	Alto
Ejercicios para practicar	48	45	7
Ejercicios resueltos/ejemplos	11	14	4
Problemas contextualizados	2	3	1
Problemas contextualizados con dibujos	2	4	0
Problemas resueltos	1	1	3
Razonamiento/demostraciones	0	2	8
Recursos TIC	7	4	1
Autoevaluación	6	3	2
Total	77	76	26
Porcentaje (%) (sobre las 179 actividades totales)	43,01	42,46	14,53

Cabe mencionar varios puntos sobre las tablas anteriores:

- “Problemas contextualizados” se refiere a problemas escenificados en la vida real.
- Para clasificar las distintas actividades en cuanto a su nivel de dificultad, se ha seguido el criterio establecido por cada libro, entendiendo las representadas

por un sector como nivel bajo, las de dos sectores como nivel medio y las de tres como nivel alto. Asimismo, algunas de ellas se han vuelto a clasificar según el criterio personal y desde la experiencia vivida en las prácticas docentes.

- Del análisis de las tablas se desprenden varias observaciones:
 - El libro SM presenta bastantes más actividades que el libro de Anaya (179 vs. 108). Esto se debe principalmente a que SM extiende la rama de trigonometría a dos unidades del libro, dedicando una de ellas completamente a “Aplicaciones de la trigonometría”, lo que permite ofrecer un mayor grado de profundidad.
 - SM ofrece un total de 29 ejercicios/ejemplos resueltos frente a los 8 que ofrece Anaya.
 - El libro de texto de SM realiza una distribución mejor equilibrada en cuanto a las actividades de nivel bajo y medio, además de ofrecer un porcentaje ligeramente superior de actividades de nivel alto con respecto a Anaya.
 - Ambas editoriales ofrecen la misma cantidad de recursos TIC.
 - Finalmente, en cuanto a actividades de tipo dialógico, basadas en investigación o de modelización matemática, no se ha observado propuesta alguna por ninguna parte. Solamente la editorial SM ofrece una actividad, calificada como “emprende” (mencionada en el epígrafe anterior), para trabajar la metodología cooperativa.

Con motivo de finalizar el análisis de los libros de texto, se realizará una comparativa entre ellos y el grado de adecuación de los contenidos que presentan con respecto a los establecidos por el RD 1105/2014 (ver Tabla 8). La idea está basada en el TFM de Martínez (2021). De este modo, también se podrán diferenciar los distintos apartados que presenta cada unidad.

Como se observa en la Tabla 8, los contenidos que presenta la editorial SM se ajustan en un mayor grado al diseño curricular vigente, salvo por la introducción de los teoremas del seno y del coseno, contenido propio del currículum de 1º de bachillerato. Por el contrario, la editorial Anaya no presenta el sistema de medida sexagesimal ni, más grave aún, el contenido referente a “Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes”. Además, introduce las funciones trigonométricas, contenido que es propio del currículum de bachillerato y no de 4º de ESO.

Tabla 8. Comparativa entre los contenidos de los libros de texto y los establecidos según el RD 1105/2014 para el currículum (Martínez, 2021) (elaboración propia).

RD 1105/2014	Ed. Anaya	Ed. SM	
Contenidos de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO. Bloque 3: Geometría	Unidad 7. Trigonometría	Unidad 5. Semejanza y trigonometría	Unidad 6. Aplicaciones de la trigonometría
- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.	8. Funciones trigonométricas. El radián. Falta la definición de grado sexagesimal.	3. Medida de ángulos: Aplicación de la semejanza.	-
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. 2. Relaciones trigonométricas fundamentales. 4. Resolución de triángulos rectángulos. 5. Resolución de triángulos oblicuángulos. 6. Razones trigonométricas de 0° a 360° . 7. Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas.	4. Razones trigonométricas de un ángulo agudo. 5. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. 6. Identidades trigonométricas. 7. Ecuaciones trigonométricas.	1. Resolución de triángulos: Triángulos rectángulos 2. Teoremas del seno y del coseno. 3. Resolución de triángulos cualesquiera.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.	No se presenta este contenido.	-	4. Aplicaciones de la trigonometría: Longitudes, áreas y volúmenes.
- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	Recursos informáticos como <i>GeoGebra</i> distribuidos a lo largo de la unidad.	Recursos informáticos como <i>GeoGebra</i> distribuidos a lo largo de la unidad.	Recursos informáticos como <i>GeoGebra</i> distribuidos a lo largo de la unidad.

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

Según Godino (2000), se distinguen dos esferas en lo que al término de “Educación Matemática” se refiere (García, 2022):

- “La educación matemática es el conjunto de prácticas llevadas a cabo en distintos escenarios que tiene que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas” (García, 2022).
- “La educación matemática hace mención al estudio científico de los fenómenos de la práctica de la educación matemática” (García, 2022).

Como consecuencia, se distingue un campo de práctica educativa y otro campo de investigación. Este es el motivo por el que, en muchos casos, se utilicen las expresiones “Didáctica de las Matemáticas” (DM) y “Educación Matemática” (EM) como sinónimos. No obstante, la DM es considerada como “la disciplina científica interesada en la investigación”, mientras que la EM recogería “la teoría, el desarrollo y la práctica” (García, 2022).

Así pues, en el presente trabajo se abordará el campo de la “Didáctica de las Matemáticas”. El objetivo es el de posibilitar el diseño más óptimo de una unidad didáctica a fin de plantear eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la rama de la trigonometría. De esta forma, se procederá al análisis de la literatura existente sobre posibles fuentes de error, concretamente sobre conceptos fundamentales como las razones trigonométricas, así como fenómenos didácticos relevantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este ámbito.

5.1. Fuentes de error en el aprendizaje de la trigonometría

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría resulta ser un ámbito poco analizado por los investigadores en didáctica de las matemáticas. Según Maldonado (2005), la trigonometría es un campo de las matemáticas de difícil comprensión por parte de los discentes a causa de diversos agentes como son su complejidad, el nexo con múltiples fenómenos y las interconexiones con diferentes disciplinas (Brown, 2005). Así, las distintas vías para la comprensión, representación y relación de conceptos elementales, como las razones trigonométricas, se constituyen como uno de los principales inconvenientes en el aprendizaje de esta rama de las matemáticas. El motivo reside en la gran desconexión existente entre las distintas interpretaciones de las razones trigonométricas: como cociente entre lados de un triángulo rectángulo, como puntos situados en una circunferencia de radio 1 en un sistema de coordenadas cartesianas, como distancias métricas o como funciones (Fiallo, 2010). Por ejemplo, el hecho de aproximarse al concepto de razón

trigonometría desde un punto de vista geométrico (con la ayuda de un triángulo rectángulo) o desde un punto de vista analítico (con la ayuda de la circunferencia goniométrica) induce en numerosas ocasiones a conflictos en su interpretación, pues los estudiantes se ven en la obligación de cambiar de definición según el enfoque propuesto y el contexto en el que se encuentren (Martínez-Fernández, 2013; Fiallo, 2010). De esta forma, los alumnos que abordan el tema desde una perspectiva geométrica consiguen un mayor éxito en el aprendizaje de la materia que aquellos que optan por una definición analítica, apoyándose en la circunferencia goniométrica (Fiallo, 2010). Según Brown (2006), esto se debe a factores como: dificultad en la comprensión del cambio del concepto de ángulo como “región comprendida entre dos lados de un triángulo rectángulo” a un concepto como “giro o rotación”, pasando de ángulos agudos y rectos a ángulos comprendidos entre 0° y 360° ; escasa, o inexistente, comprensión del papel de la unidad en la circunferencia goniométrica o aplicación inconsistente de la unidad; dificultad en la interpretación de los gráficos en sistemas de coordenadas como información geométrica y numérica, lo que impide apreciar las coordenadas de un punto como distancias o longitudes horizontales y verticales del punto a los ejes; dificultad en la comprensión del seno y el coseno como coordenadas, lo cual conlleva a la carencia de asignar los signos (positivo o negativo) de las coordenadas (x, y) del punto a los signos de las funciones seno y coseno de ángulos obtusos; problema a la hora de asociar los números racionales con números y con cocientes (Fiallo, 2010).

Por otro lado, Freudenthal (2001) expone la complejidad inherente al concepto de “razón” y, como consecuencia, al de “razones trigonométricas”. Sostiene la razón como concepto y como “objeto mental” requiere de un desarrollo notablemente alto por parte del alumno. Debido a que el concepto de razón en el ámbito de la semejanza se desarrolla en los estudiantes con notoria rapidez a través de la percepción óptica, por tratarse de un rasgo característico del sistema nervioso central, su recreación como objeto mental se dificulta considerablemente. “Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales, la visualización estricta por semejanza ha de ser debilitada” (Freudenthal, 2001; Fiallo, 2010).

Según Van Hiele (1957), otro de los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría es el exceso del empleo de fórmulas. Esta problemática es el producto de un proceso de enseñanza de la trigonometría donde el enfoque adoptado es puramente algebraico, el cual se caracteriza por la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades de carácter abstracto. Esto dificulta considerablemente la comprensión de conceptos y, como consecuencia, el establecimiento de relaciones y conexiones entre estos y sus representaciones gráficas (Fiallo, 2010).

En el estudio de Martín-Fernández *et al.* (2014), realizado a 74 alumnos de 1º de bachillerato científico-tecnológico, sobre las razones trigonométricas seno y coseno, se observaron múltiples definiciones de estos conceptos. La mayoría de los alumnos describían los conceptos de razones trigonométricas seno y coseno como cociente. No obstante, más de la mitad de estas definiciones asociaban el cociente con una mera división entre números y no con una razón entre lados de un triángulo rectángulo, no presentando, por tanto, una conexión entre trigonometría y semejanza, problema que exponía Freudenthal (2001) (ver Figura 28). Asimismo, varios alumnos ofrecían directamente el valor del ángulo preguntado a partir de la circunferencia goniométrica o del triángulo rectángulo (ver Figura 29). También cabe destacar la definición de razón trigonométrica partiendo de los lados de un triángulo rectángulo. No obstante, la mayoría de estudiantes mezclan el enfoque geométrico con el analítico, pues emplean la circunferencia goniométrica para, después, dibujar un triángulo rectángulo y hablar de “alturas” para el seno y de “bases” para el coseno (ver Figura 30). Este último error corrobora lo establecido según Fiallo (2010) y Brown (2006) previamente, pues hay un conflicto en cuanto a la interpretación del concepto de “razón trigonométrica” y, además, se desprende una gran dificultad a la hora de analizar gráficos coordenados, pues los alumnos no son capaces de asociar el seno y el coseno a las distancias vertical y horizontal del punto a los ejes sin recurrir a un triángulo rectángulo auxiliar. Finalmente, a todo esto añadir la escasa o inexistente percepción de los estudiantes de la conexión de la trigonometría con el mundo real. Este problema puede deberse a la falta de contextualización en el proceso de enseñanza.

2. Explica verbalmente qué entiendes por $\cos(45^\circ)$ radio de
 Coseno de 45° es la proyección sobre el eje horizontal del un
 ángulo de 45° en una circunferencia de radio: 1. Si el radio
 fuera distinto de 1, habría que dividir dicha proyección entre el
 radio, o lo que es lo mismo el cateto contiguo entre la hipotenusa,
 ya que forma un triángulo rectángulo.
 El seno de 45° es la división entre el cateto opuesto
 entre la hipotenusa, en un triángulo rectángulo.
 Es la razón trigonométrica que resulta en un triángulo
 rectángulo resulta de dividir el cateto contiguo entre la
 hipotenusa.
 Cuando nos enfrentamos a un triángulo, el seno de 45° es el
 lado opuesto al $\sin(45^\circ)$ dividido entre la hipotenusa.
 El $\sin(45^\circ)$ es la razón proporción que hay entre el cateto opuesto
 al ángulo de 45° y la hipotenusa, ~~es~~ un triángulo rectángulo.

Figura 28. Interpretación de razón trigonométrica como cociente (entendido como división) de los lados de un triángulo rectángulo (Martínez-Fernández et al., 2014).

En una circunferencia de radio 1, el $\sin 45^\circ$ será $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 En un triángulo rectángulo, el coseno de 45° es un número que sale
 como resultado de dividir la hipotenusa de un cateto del triángulo por el
 cateto contiguo al ángulo. Ese número siempre es el mismo, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y es solo
 en el caso de 45° el coseno coincide con el seno, ya que los dos catetos
 son iguales.

Figura 29. Respuestas con el valor del ángulo (Martínez-Fernández et al., 2014).

Es la altura del triángulo rectángulo que se forma en la
 circunferencia trigonométrica con el ángulo 45° o 135° .
 El $\sin 45^\circ$ es el lado opuesto que forma un ángulo
 de 45° .
 El $\cos 45^\circ$ ~~es~~ situándonos en un triángulo
 de el cual este ángulo se encuentra en
 el vértice inferior izquierdo ~~sería la~~
 el coseno sería la ~~línea~~ línea que
 está situada en la parte inferior del
 ángulo o también llamada base.

Figura 30. Conflicto de interpretaciones geométricas y analíticas del concepto de razón trigonométrica (Martínez-Fernández et al., 2014).

Otro estudio sobre el concepto de razón trigonométrica es el de Fernández-Plaza *et al.* (2016). Así, se solicitó a un grupo de alumnos, también de 1º de bachillerato de la modalidad científico-tecnológica, que realizasen un esquema para representar el seno de un ángulo de 30°, el coseno de 30° y un diseño donde se diferenciase ambas razones trigonométricas. Entre las nociones elementales que componen dicho concepto de razón trigonométrica, destacaron el ángulo interior de un triángulo rectángulo (ver Figura 31), el triángulo rectángulo (ver Figura 32) y la circunferencia goniométrica (ver Figura 33), observando de este modo, al igual que en el estudio de Martínez-Fernández *et al.* (2014), multitud de interpretaciones de dicho concepto.

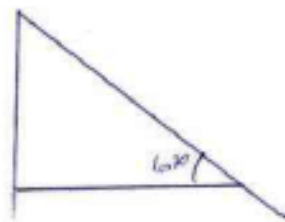


Figura 31. Representación del coseno identificándolo directamente con el ángulo interior del triángulo rectángulo (Fernández-Plaza *et al.*, 2016).

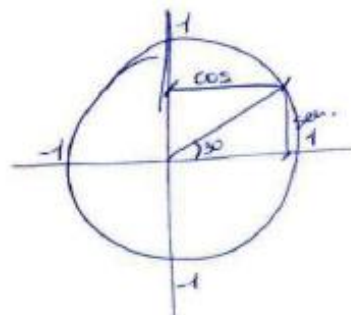


Figura 32. Representación del seno y coseno como distancias de las coordenadas de un punto en la circunferencia goniométrica a sus respectivos ejes (Fernández-Plaza *et al.*, 2016).

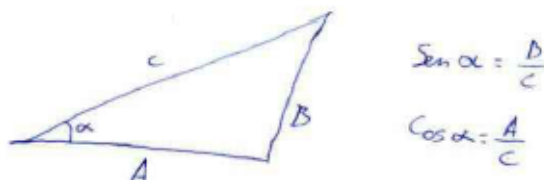


Figura 33. Representación del seno y coseno como cociente de los lados de un triángulo rectángulo (Fernández-Plaza *et al.*, 2016).

5.2. Recursos didácticos para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría

En su estudio, Fiallo (2010), recurre al empleo de Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) como elemento integrador y unificador de todas las definiciones de un concepto matemático, como es el de razón trigonométrica. El empleo de herramientas TIC, como *GeoGebra* o *Cabri*, ofrecen una mayor posibilidad de visualizar, explorar y suscitar conjeturas sobre propiedades de las razones trigonométricas, así como de manipular y observar sus distintas representaciones, favoreciendo considerablemente la interconexión entre las múltiples definiciones y relaciones. De este modo, empleando SGD, se puede contribuir notablemente al proceso de creación del concepto de razón trigonométrica como objeto mental (Freudenthal, 2001), permitiendo una mejor visualización geométrica y analítica de las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y los ángulos complementarios. Existe la posibilidad de observar cómo perdura la razón a través de la manipulación gráfica de triángulos rectángulos semejantes, variando sus ángulos o lados. Además, se favorece una mejor comprensión de la definición analítica de razón trigonométrica a través del uso de vectores en el plano cartesiano, obteniendo también una concepción de la razón como distancia o longitud (aparte de como relación de lados de un triángulo rectángulo y cociente).

Por otra parte, Fiallo (2010) establece como uno de los objetivos de su unidad didáctica “el aprendizaje de la demostración”. Según este, “el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos”. No obstante, señala que estas demostraciones no deben ser de carácter deductivo sobre propiedades cuya veracidad es de sobra conocida, o muy evidente tras una simple manipulación gráfica. La clave de la cuestión es reconocer a los alumnos que la propiedad es verdadera pero pedirles que justifiquen esa veracidad, que se planteen preguntas sobre este hecho. Así pues, Fiallo (2010) incorpora herramientas TIC en la elaboración de su unidad didáctica, como *Cabri*, para facilitar a los discentes una herramienta con la que encontrar respuestas a sus preguntas. De esta forma, los discentes ven mejoradas sus habilidades de demostración y, gracias al aprendizaje constructivista, consiguen una mayor profundidad en el aprendizaje de conceptos. En definitiva, adquieren un rol más activo en su propio proceso de aprendizaje.

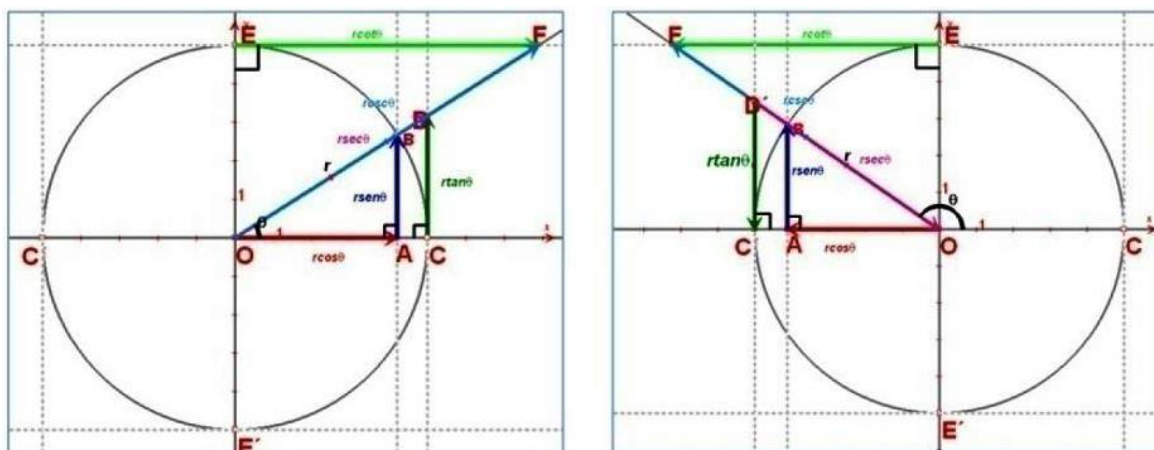


Figura 34. Construcción analítica del concepto de razón trigonométrica a través de la circunferencia goniométrica (Cabré) (Fiallo, 2010).

De igual modo que Fiallo (2010), existen otras investigaciones como las de Gómez (2021), Jiménez *et al.* (2017) y Fera (2018) que concluyen que el empleo de herramientas TIC como *GeoGebra* permite establecer una mayor conexión entre contenidos algebraicos y contenidos geométricos, facilitando, así, la adquisición de conceptos trigonométricos y el establecimiento de relaciones entre ellos. Asimismo, Gutiérrez (2016) respalda los resultados de los estudios anteriores. El empleo de *software* educativos ofrecen la posibilidad de establecer un diálogo bidireccional entre teoría y práctica. De esta manera, *GeoGebra* se constituye como una herramienta de gran eficacia para solventar algunos problemas identificados en alumnos de 4º de ESO con respecto al aprendizaje de la trigonometría como: falta de visualización de contenidos más abstractos, conceptos débiles (sin llegar a establecer las suficientes conexiones/relaciones) y escasa justificación.

5.3. Conclusiones

Para finalizar el epígrafe de “Fundamentación Didáctica” se procederá a presentar las principales conclusiones que se desprenden del análisis bibliográfico realizado previamente y las cuales servirán de guía fundamental para la elaboración de la posterior unidad didáctica. De este modo, se puede concluir lo siguiente:

- A pesar de la importancia de la rama de la trigonometría en la educación matemática, existe un escaso número de investigaciones didácticas sobre las fuentes de error que surgen durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia.
- El principal inconveniente, y el cual aumenta considerablemente la complejidad de la trigonometría para aprendizaje de los alumnos, es la diversidad de definiciones e interpretaciones para un mismo concepto, como el de razón trigonométrica. Los estudiantes no son capaces de establecer conexiones entre

las distintas definiciones de razón trigonométrica, lo cual no les permite afianzar eficazmente este concepto.

- También se ha puesto de manifiesto la escasa relación que perciben los estudiantes de la trigonometría con el mundo real. Se requiere de una mayor contextualización a la hora de presentar los contenidos para favorecer la permeabilidad de conocimientos entre la escuela y la vida cotidiana.
- El uso de SGD como *Cabri* o *GeoGebra* permiten una mejor visualización de los contenidos más abstractos y la interconexión de estos a través de dar respuesta a las conjeturas planteadas. En definitiva, se constituyen como una herramienta fundamental para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de la trigonometría.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA: ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

Con la realización de este apartado se finalizará el proceso de transposición didáctica del saber matemático, alcanzando el “saber enseñado” en el aula. Para ello, se confeccionará una unidad didáctica sustentada en las fundamentaciones elaboradas previamente.

6.1. Título

El título de la unidad didáctica a elaborar será el de “Trigonometría”, perteneciente al currículum de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO.

6.2. Justificación

La trigonometría es una parte inseparable de las matemáticas en la educación secundaria, iniciándose su estudio en 4º de ESO y teniendo su continuación en 1º de Bachillerato de Matemáticas I, según establece el RD 1105/2014. Se trata de un producto de técnicas algebraicas, realidades geométricas y relaciones trigonométricas (Orhun, 2004).

Según Maor (1998), han sido tres las principales transformaciones que ha sufrido la trigonometría a lo largo de su historia: “la tabla de cuerdas de Ptolomeo, la cual transforma la trigonometría en una ciencia práctica; el teorema del Moivre y la fórmula de Euler, que combinan la trigonometría con el álgebra y el análisis; y los teoremas de Fourier, que indicaban que cualquier función arbitraria de una variable real $y = f(x)$ puede ser representada por una serie trigonométrica” (Martínez-Fernández *et al.*, 2014).

Esta rama de las matemáticas es muy abundante en conceptos y establece conexiones no solo con otras nociones y estructuras matemáticas, sino también con otros campos de estudio. De este modo, la trigonometría cuenta con una amplia aplicación en todo lo respecta a la topografía y a la navegación, y también a los sistemas de navegación GPS en los automóviles (Stewart, 2008). Asimismo, la presencia de la trigonometría destaca, especialmente, en fenómenos de medida (también en el ámbito de la astronomía), en fenómenos físicos (por ejemplo, para representar la ecuación de una onda armónica se emplean las funciones trigonométricas seno y/o coseno), en fenómenos arquitectónicos y en otros fenómenos correspondientes a la propia matemática (Martínez-Fernández *et al.*, 2014).

Así pues, dada la relevancia histórica y sus numerosas aplicaciones, la trigonometría ha perdurado en el currículum de matemáticas en la educación secundaria desde hace más de cincuenta años (Martínez-Fernández *et al.*, 2014). Por ello, la *Mathematics Association of England* (1950) sostenía que “la trigonometría proveía a los estudiantes con el conocimiento necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes y les suministraba una coherente visión de las matemáticas, necesaria para la resolución de multitud de problemas relacionados con las áreas científica y técnica” (Martínez-Fernández *et al.*, 2014).

6.3. Contextualización del centro y del aula

La presente unidad didáctica será impartida en el centro IES. Llano de la Viña, único centro del municipio, con dirección: Calle Donantes de Sangre S/N. 23630, Villatorres, Jaén. Así, para el desarrollo de este apartado se ha extraído toda la información del Proyecto Educativo de Centro (2021).

El municipio de Villatorres aparece como consecuencia de la fusión llevada a cabo por Decreto 1076/75, de 24 de Abril, entre los municipios de Villargordo y Torrequebradilla, al que también se unió el núcleo urbano de Vados de Torralba. La población de Villatorres es aproximadamente de unos cuatro mil quinientos habitantes, entre los cuales se encuentran los alumnos que asisten al IES Llano de la Viña, situándose el número de matriculados en el centro en torno a doscientos estudiantes.

La vida económica y social gira alrededor de la agricultura, y dentro de ella entorno al cultivo del olivar, que ocupa la mayor parte del terreno cultivable, existiendo cooperativas agrícolas, ambas situadas en Villargordo, de tratamiento, envasado y comercialización. El resto del terreno cultivable se dedica principalmente a los cereales (cebada y trigo) aunque también se cultiva el algodón y los espárragos.

El sector servicios es, tras la agricultura, el sector con mayor actividad económica, siendo uno de los motores en la generación de empleo. Destacan, así, el comercio, actividades inmobiliarias y de alquiler y la hostelería.

En lo que respecta a la oferta académica del centro, se imparte la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en dos líneas, conformadas por dos grupos en cada curso y, adicionalmente, dos grupos de PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento) en 2º y 3º. Además, existen otras dos líneas bilingües de inglés (la segunda implantada en el curso 2019-2020). Asimismo, se desarrollan los siguientes Planes y Programas: (i) plan de lectura y bibliotecas; (ii) plan de transformación digital educativa; (iii) plan de igualdad entre hombres y mujeres; (iv) “Forma Joven”; (v) “Escuela, espacio de Paz”; (vi) PROA (Programa de Refuerzo, Orientación y Apoyo); (vii)

plan de autoprotección; (viii) plan de salud laboral y prevención de riesgos; (ix) plan medioambiental; y (x) programa bilingüe

Por otro lado, el alumnado adscrito proviene de dos centros de Educación Primaria: CEIP Francisco Badillo, de Villargordo, y el Colegio Público Rural La Paz, de Torrequebradilla, de donde proceden alumnos de ese núcleo y de Vados de Torralba. Generalmente, el alumnado vive con sus padres (cuyo nivel general de estudios suele coincidir con los primarios) y, en numerosos casos, además con sus abuelos, en casa propia y con disponibilidad, normalmente, de sitio particular para estudiar.

El discente dedica poco tiempo al estudio, lo que contrasta con la gran cantidad de tiempo que emplea en otras actividades como las redes sociales. Así, la motivación por los aspectos académicos no es muy alta. No obstante, se distinguen varios tipos de alumnos/as: algunos destacan por su capacidad de aprendizaje; otros, con trabajo y esfuerzo, van superando los objetivos marcados; y, finalmente, un pequeño grupo que no tiene interés alguno. Así, cabe resaltar que respecto al alumnado con evaluación positiva en todas las materias, según afirma el centro, las tasas son superiores a las de centros de ISC (Índice Socioeconómico y Cultural) similar y a la media de la comunidad y de la zona.

En cuanto al profesorado, la plantilla de docentes oscila entre los 21 y 24 profesores/as, con disminución del grado de estabilidad en los últimos años como consecuencia del denominado concursillo. Actualmente, la plantilla del centro se encuentra formada por 24 profesores/as. Salvo las situaciones planteadas por el mencionado concursillo, la estabilidad de la plantilla es notable. Incluso en la ocupación de plazas de funcionamiento, donde el profesorado suele repetir este destino al realizar su solicitud en los procesos de adjudicación. Este deseo de repetir el destino es síntoma del buen clima general de trabajo y relaciones personales en el centro.

El centro está conformado por un edificio principal de dos plantas en el que se encuentran: aulas generales (8), aula de música, aula de plástica, aula de tecnología, aula de idiomas, laboratorio, aula de informática y cafetería (actualmente cerrada). Además, cuenta con patios exteriores donde se sitúan el gimnasio, la biblioteca y la pista polideportiva.

Salvo algunas clases como las de Educación Física, los grupos de cada curso se encuentran ubicados durante todo el curso en el aula asignada a principios del mismo, como medida extraordinaria adoptada a mediados de mayo de 2020 con motivo de la pandemia mundial. Así es, por tanto, para el grupo de 4º de ESO al que irá dirigida la unidad didáctica del presente trabajo. Concretamente, se trata del grupo A, de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, el cual cuenta con un total de

20 alumnos. El aula perteneciente a este grupo tiene una pizarra de tiza convencional y un equipo informático integrado por un ordenador, una pizarra digital y un proyector. Además, el centro cuenta con otros recursos informáticos como los ordenadores de sobremesa que se encuentran en el aula de informática y un conjunto de ordenadores portátiles. Todo ello se tendrá presente a la hora de diseñar las actividades y seleccionar las metodologías a adoptar en la unidad didáctica.

6.4. Objetivos

En este epígrafe se tratarán los objetivos generales de etapa, los objetivos del área de matemáticas y los objetivos específicos de la unidad didáctica. Tanto los objetivos de etapa como los de área se expondrán en el ANEXO I. A continuación, se desarrollarán los objetivos específicos que persigue la elaboración de la unidad didáctica.

6.4.1. Objetivos específicos de la unidad didáctica

En concordancia con los contenidos, los criterios de evaluación (CE) y los estándares de aprendizaje evaluables expuestos en el RD 1105/2014 y en la Orden de 15 de enero de 2021 de la Comunidad Autónoma de Andalucía se establecen los siguientes objetivos de la unidad didáctica de trigonometría a alcanzar por el alumnado:

1. Conocer los orígenes de la trigonometría y sus importantes aplicaciones tanto en matemáticas como en otros campos de estudio.
2. Conocer las distintas medidas angulares, tanto en el sistema sexagesimal como internacional (en radianes), así como la relación existente entre ellas.
3. Conocer los conceptos de razones trigonométricas fundamentales (seno, coseno y tangente) desde un punto de vista geométrico y saber aplicarlos al cálculo de longitudes directas o indirectas en situaciones de la vida cotidiana.
4. Conocer las razones trigonométricas fundamentales desde un punto de vista analítico, a través de la circunferencia goniométrica, así como establecer una conexión entre las definiciones geométrica y analítica, y saber aplicar las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.
5. Conocer las relaciones trigonométricas fundamentales.
6. Resolver diferentes tipos de triángulos (no rectángulos) a través de las razones trigonométricas fundamentales, así como la resolución de otros polígonos mediante la descomposición de estos en triángulos rectángulos.

7. Saber utilizar la calculadora científica para la obtención de ángulos y razones trigonométricas, así como otras herramientas TIC (*GeoGebra*) para una mejor comprensión de la trigonometría (y de la geometría en general).
8. Valorar la importancia de la trigonometría en el mundo real, identificando problemas trigonométricos en la vida cotidiana y contando con las herramientas necesarias para resolverlos.
9. Fomentar la participación y el trabajo cooperativo del alumnado.

6.5. Competencias clave

Previamente, en el epígrafe FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR se elaboró un primer apartado introductorio de las competencias y, concretamente, de las competencias clave según las indicaciones de la Unión Europea (UE). Así, en este apartado se profundizará con más detalle en las distintas competencias clave, las cuales se trabajarán y fortalecerán a través de la unidad didáctica.

Según la Orden de 15 de enero de 2021 de la Comunidad Autónoma de Andalucía, la materia de Matemáticas contribuye especialmente al desarrollo de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). Esta es reconocida y considerada clave por la UE ya que constituye un instrumento imprescindible en el desarrollo del pensamiento de los individuos y un componente esencial de comprensión, modelización y transformación de los fenómenos de la realidad, que les permitirá desenvolverse mejor tanto en el ámbito personal como social. Adicionalmente, los alumnos, a través de la labor realizada durante las sesiones de impartición de la unidad didáctica, potenciarán las siguientes competencias clave (definidas en el Anexo I de la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero de 2015 y en la Orden de 15 de enero de 2021):

- Competencia de comunicación lingüística (CCL): es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en múltiples modalidades, formatos y soportes. Es de esencial importancia en el área de Matemáticas al ser necesaria la lectura comprensiva de los enunciados y la comunicación, verbal y por escrito, de los resultados, así como el establecimiento de diálogos y debates en tareas colaborativas.
- Competencia digital (CD): es aquella que implica el uso creativo, crítico y seguro de las TIC para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. Por ende, esta competencia se trabaja en la materia de Matemáticas a través de la aplicación de las TIC en la resolución de

problemas, comprobación de las soluciones y autocorrección. Así, a través del empleo de herramientas como *GeoGebra* y *WebQuest*, los alumnos pueden construir modelos de tratamiento de la información (analizándola, sintetizándola y transformándola a su antojo) y el razonamiento. Además, las *WebQuest* potencian el desarrollo del aprendizaje cooperativo. Como ya se analizó en el apartado FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA, la introducción de estas herramientas en la unidad didáctica se vuelve clave para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría.

- Competencia de aprender a aprender (CAA): esta competencia es fundamental para el aprendizaje permanente que se produce a lo largo de la vida y que tiene lugar en distintos contextos formales, no formales e informales. El empleo de recursos TIC promueve importantes valores como la autonomía, la perseverancia y la reflexión crítica, contribuyendo, así, al desarrollo de esta competencia. Asimismo, la CAA se trabajará en cada actividad realizada a lo largo de la unidad didáctica. Los alumnos irán descubriendo autónomamente las relaciones entre las distintas propiedades y conceptos trigonométricos, las múltiples aplicaciones de la trigonometría en el mundo real y su conexión con otros campos de estudio, y cómo se constituye en un herramienta relevante para el desarrollo de otros conocimientos matemáticos.
- Competencias sociales y cívicas (CSC): implican la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, entendida desde las diferentes perspectivas, en su concepción dinámica, cambiante y compleja, para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados; para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas. Las CSC se desarrollan en el área de Matemáticas, y a largo de la unidad de trigonometría, a través del trabajo colaborativo de los estudiantes para la resolución de problemas. Esto implica actitudes de colaboración y respeto en los procesos de reflexión y toma de decisiones, fomentando simultáneamente una mentalidad abierta ante distintas soluciones.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP): implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto. Así, esta competencia se trabajará a lo largo de la unidad didáctica a través de actividades para cuya resolución los alumnos

deban plantear estrategias y establecer un proceso iterativo de revisión y mejora.

- Competencia conciencia y expresiones culturales (CEC): implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos. De esta forma, el desarrollo de la CEC se ve incrementado en el área de Matemáticas y, especialmente, en el ámbito de la Geometría. Por tanto, los conocimientos matemáticos se constituyen como herramientas que permiten a los alumnos apreciar, analizar y comprender multitud de producciones artísticas donde se ven reflejadas las matemáticas, así como numerosos elementos en la naturaleza. Con el objetivo de potenciar esta capacidad, se expondrán diversos problemas y actividades contextualizadas en la vida real.

6.6. Contenidos

A continuación, se muestran, en la Tabla 9 y en la Tabla, los contenidos a trabajar a lo largo de la unidad didáctica, tanto los pertenecientes al Bloque 1 como los del Bloque 3, de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, de 4º de ESO.

Tabla 9. Contenidos del bloque 1 de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, según el RD1105/2014 (elaboración propia).

Contenidos	
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
1.1.	Planificación del proceso de resolución de problemas.
1.2.	Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
1.3.	Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
1.4.	Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
1.5.	Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
1.6.	Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
1.7.	Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.

- c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.
- d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.
- e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.
- f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Tabla 10. Contenidos del bloque 3 de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, según el RD1105/2014 (elaboración propia).

Contenidos
Bloque 3: Geometría
3.1. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
3.2. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
3.3. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
3.6. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

6.7. Metodología

En la Orden de 15 de enero de 2021 de la Comunidad Autónoma de Andalucía se exponen una serie de propuestas de estrategias metodológicas a seguir en cada materia para alcanzar los objetivos previstos por el profesorado y potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial del alumnado. Así, para la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se establecen metodologías concretas para cada bloque. De esta forma, se muestran a continuación algunas propuestas para los bloques 1 y 3, a trabajar en la unidad didáctica:

- Con respecto al bloque 1:
 - Se aconseja el apoyo en la gamificación y materiales manipulativos para que el alumnado aprenda haciendo, construyendo y “tocando las matemáticas”.
 - Estudio de situaciones simples relacionadas con otras materias troncales como Biología y Geología, Física y Química y Geografía e Historia como requisito indispensable para que el discente descubra la función instrumental de las matemáticas.
 - Empleo habitual de recursos TIC como calculadoras y *software* específicos, así como la introducción de elementos novedosos como aplicaciones multimedia para enriquecer el proceso de evaluación del alumnado y propiciar una educación sin barreras.

- Con respecto al bloque 3:
 - Es de especial importancia reiterar el uso de materiales manipulativo, así como obtener el máximo provecho de las posibilidades que ofrecen los recursos digitales interactivos para construir, investigar y deducir propiedades.
 - Se deben establecer relaciones de la Geometría con la naturaleza, el arte o la arquitectura, destacando su importancia en la cultura e historia andaluzas.
 - Resulta de gran interés la organización de excursiones por la ciudad y enseñar al alumnado a observar su entorno “con mirada matemática”, realizando, por ejemplo, un concurso de fotografía con temática geométrica.

Por otra parte, según la Orden ECD/65/2015, se deben tener en cuenta algunos aspectos metodológicos (Luque, 2022):

- Los métodos deben enfocarse a la realización de tareas o situaciones-problema y deben tener en cuenta la atención a la diversidad y el respeto por los distintos ritmos y estilos de aprendizaje mediante prácticas de trabajo individual y cooperativo.
- Debe existir un ajustarse al nivel competencial inicial del alumnado, de tal modo que se parta de aprendizajes más simples para avanzar gradualmente hacia otros más complejos.
- Las metodologías que contextualizan el aprendizaje y permiten el Aprendizaje Basado en Investigación (ABI) o el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) favorecen la participación activa del discente y, como consecuencia, el desarrollo de competencias clave.

Todas estas propuestas metodológicas, además de la metodología directiva (basada en la instrucción directa por parte del profesor, donde solo existe una comunicación unidireccional) (Luque, 2022), serán empleadas en la confección de la unidad didáctica de trigonometría.

6.8. Actividades y recursos

6.8.1. Actividades

En el desarrollo de la unidad didáctica se expondrán actividades de diversa índole para el alumnado. Estas actividades propias del proceso enseñanza-aprendizaje deben cumplir los siguientes requisitos: (i) ser claras y concisas; (ii) posibilitar un papel

activo del alumno; (iii) atender a las necesidades individuales de los alumnos; (iv) ser de carácter lúdico y motivador; (v) estar en consonancia con los intereses del alumnado (proporcionando situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los alumnos a fin de captar su interés); (vi) estar graduadas de menor a mayor nivel de dificultad; (vii) posibilitar todas las formas posibles de agrupaciones de alumnos; y (viii) fomentar la autonomía personal (Luque, 2022). Así pues, las actividades que cumplan estos requisitos facilitarán su óptima realización por parte del alumnado, contribuyendo, consecuentemente, a una mejor comprensión de los contenidos de la unidad y al desarrollo competencial.

A continuación, se presentan los distintos tipos de actividades que se desarrollarán en el transcurso de la unidad didáctica (Luque, 2022) (Jurado, 2019):

- Act. de diagnóstico (DIAG): realizan un cómputo general del nivel del discente.
- Act. de introducción (INT): adaptación al posterior ritmo de trabajo.
- Act. de motivación (MOT): buscan el compromiso y la motivación del alumno.
- Act. de aprendizaje (AP): adquirir habilidades procedimentales y conceptuales.
- Act. de desarrollo (DES): desarrollar y consolidar los contenidos impartidos.
- Act. de consolidación (CON): fortalecer los aprendizajes.
- Act. creativas (CRE): desarrollar la creatividad partiendo de una simple idea
- Act. de evaluación (EV): determinar el nivel de logro de los objetivos.
- Act. de recuperación (RECU): individualizar el proceso de enseñanza para aquellos que no han alcanzado los objetivos preestablecidos.
- Act. de ampliación (AMP): personalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Act. de refuerzo (REF): personalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación, se concretan con mayor precisión las actividades que conforman la unidad:

- Cuestionario tras la proyección de un vídeo introductorio.
- Ejercicios (no contextualizados) para reforzar conceptos y “automatizar” conocimientos. También se prepararán problemas (contextualizados) ubicados en diferentes contextos para aplicar esos conocimientos, ya trabajados y adquiridos previamente, en diferentes situaciones.
- Actividades realizadas en el exterior del aula.
- Actividades para incorporar el debate científico.

- Herramientas TIC como *GeoGebra* para propiciar una mayor profundización de los conceptos y que el alumnado haga más suyos los contenidos.
- *WebQuest*, la cual se trata de un recurso web con un enfoque constructivista y apoyado en el aprendizaje cooperativo (Díaz, 2011). Según Moreira (2004), la WebQuest “es la aplicación de una estrategia de aprendizaje por descubrimiento guiado a un proceso de trabajo desarrollado por los alumnos utilizando los recursos de la WWW. Por lo que WebQuest significa indagación, investigación a través de la Web”. Así, este recurso se vuelve de gran utilidad para la vida cotidiana de los alumnos en la actual sociedad de la información. Puede contribuir considerablemente a la mejora de la selección de la información, aumentando la reflexión crítica y aprendiendo a diferenciar fuentes científicas fiables y consistentes de fuentes sin rigor ninguno.

6.8.2. Recursos

Los recursos empleados a lo largo de la unidad didáctica son los siguientes:

- Recursos materiales: pizarra, lápiz, papel, bolígrafo, reglas, compás y cinta métrica.
- Recursos impresos: libro de texto “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4 ESO de la editorial Anaya”, fichas de trabajo y cuestionarios.
- Recursos tecnológicos: calculadora, ordenadores de sobremesa y portátiles, y móviles.
- Recursos audiovisuales: proyector y pizarra digital.
- Recursos web: vídeos, plataforma *Google Classroom*, *GeoGebra* y *WebQuest*.
- Recursos ambientales: aula y patio exterior del centro.

6.9. Atención a la diversidad

El aula se encuentra conformada por una gran diversidad estudiantil. No todos los alumnos y alumnas son capaces de afrontar de la misma manera y con el mismo bagaje los aprendizajes esenciales que establece el currículum para su desarrollo personal y social. Cada alumno y alumna posee capacidades, intereses, ritmos de desarrollo de funciones cognitivas, contextos familiares y socioculturales, experiencias y motivaciones diferentes, que determinan completamente su proceso de aprendizaje. Así, cada alumno y alumna tiene una necesidad educativa específica e individual. Por tanto, se debe optar por una educación inclusiva que permita personalizar el proceso de aprendizaje de cada estudiante a fin de alcanzar las capacidades y habilidades sociales que la educación escolar busca (Guijarro, 1990).

Así pues, en aula se pueden encontrar distintos tipos de alumnos como aquellos con Necesidades Educativas Especiales (NEE), alumnos con Dificultades de Aprendizaje (DA) o alumnos con altas capacidades, entre otros. Por este motivo, para poder llevar a cabo una educación inclusiva, previamente se debe conocer el historial de los alumnos del grupo y realizar alguna actividad de diagnóstico (DIAG) para conocer el nivel inicial de estos en la materia en cuestión. Con este fin se realiza en la primera sesión de la unidad didáctica una breve evaluación inicial, sondeando los conocimientos previos que del alumnado (importantes para el tema de trigonometría) y estableciendo un punto de partida.

En cada sesión el docente debe observar atentamente el comportamiento de cada alumno e interactuar con ellos para tener un *feedback*. Tras detectar a los alumnos que presentan mayores dificultades y/o menores, y su evolución a lo largo de las sesiones didácticas, el docente tendrá diseñada una relación de ejercicios y problemas, de menor a mayor dificultad, y clasificados en función del contenido y la competencia que se desea trabajar. Asimismo, esta ficha de trabajo estará diseñada tanto para alumnos con mayores dificultades como para aquellos que presentan una evolución más rápida. De esta forma, servirá tanto de refuerzo como de ampliación de contenidos, pudiendo seguir cada estudiante su propio ritmo de aprendizaje.

Además de la ficha de trabajo, en las sesiones de la unidad se proponen diversas actividades, normalmente ordenadas de menor a mayor dificultad, para que cada alumno las resuelva a su ritmo. De igual modo, se organizan múltiples tareas en grupos para fomentar el trabajo cooperativo y colaborativo, diseñando el docente los grupos de forma heterogénea y distinta en cada sesión. De esta forma, los alumnos con mayores dificultades se pueden beneficiar de los alumnos más avanzados.

6.10. Temporalización

La asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en 4º de ESO en Andalucía cuenta con cuatro sesiones semanales de 1 h de duración cada una (aunque para el diseño de las sesiones se supondrá una duración de 50 min a fin de realizar un mejor ajuste a la realidad). Conocido este dato, las sesiones correspondientes a cada unidad didáctica de la asignatura se distribuirán acorde a la Tabla 11, cuya elaboración se ha basado en el trabajo de Martínez (2021) y en el Plan de Centro del IES Llano de la Viña (2021).

Tabla 11. Temporalización de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 4º de ESO (elaboración propia).

TRIMESTRE	BLOQUE	UNIDAD DIDÁCTICA (UD)	Nº DE SESIONES (122)
1º	Números y álgebra	UD 1. Números reales. Raíces y logaritmos	8
		UD 2. Expresiones algebraicas	10
		UD 3. Ecuaciones y sistemas	9
		UD 4. Inecuaciones y sistemas	9
	Funciones	UD 5. Funciones. Características	10
UD 6. Funciones elementales		12	
2º	Geometría	UD 7. Semejanza. Aplicaciones	12
		UD 8. Trigonometría	13
		UD 9. Geometría analítica	10
3º	Estadística y probabilidad	UD 10. Estadística descriptiva (uni y bidimensional)	12
		UD 11. Combinatoria	10
		UD 12. Probabilidad	8

En azul se resalta la unidad didáctica “Trigonometría” que se desarrollará en este TFM. Cabe destacar que, durante la explicación de contenidos, el docente se apoyará siempre, de modo transversal, en la herramienta de *GeoGebra*, especialmente para la enseñanza de conceptos esenciales como las razones trigonométricas.

A continuación, se mostrará el diseño de cada una de las 13 sesiones recogiendo en cada una de ellas: contenidos de la UD, objetivos de la UD, criterios de evaluación, competencias clave trabajadas, la forma de organización del alumnado y el tipo de actividad.

Nota: todas las actividades desarrolladas en cada una de las sesiones se recogerán en el ANEXO II.

Tabla 12. Desarrollo de la sesión 1 (elaboración propia).

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN	
Desarrollo: En esta sesión se introduce al alumnado, por primera vez en su trayectoria académica, en la rama de la trigonometría. Así pues, para despertar el interés de los estudiantes y realizar una introducción motivadora y contextualizada, se comenzará con la visualización de un vídeo sobre los orígenes y las aplicaciones de la trigonometría: https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4 (15 min). Previamente, se les proporcionará una hoja con una serie de preguntas cuyas respuestas las irán encontrando gradualmente en el vídeo, fomentando aún más la implicación del alumnado en la visualización de este. Tras la proyección del vídeo, se realizará un breve debate grupal con los alumnos para poner en común las respuestas de las preguntas anteriores y conocer sus primeras impresiones sobre esta materia, finalizando con alguna reflexión sobre las múltiples aplicaciones de la trigonometría (10 min). Se prosigue con la realización de una ficha de trabajo sobre conceptos básicos de triángulos, ángulos y semejanza a modo de evaluación inicial para conocer el punto de partida de la clase (20 min). Se finaliza la clase realizando un breve resumen en la pizarra que recoja las ideas principales de lo visto en esta primera sesión (5 min).	
Contenidos: 1.2, 1.6, 1.7	Criterios de evaluación: CE.1.2, CE.1.7, CE.1.12
Objetivos de la UD: 1	Competencias clave: CMCT, CD, CEC
Organización del alumnado: individual	Tipo de actividad: INT, MOT, DIAG

Tabla 13. Desarrollo de la sesión 2 (elaboración propia).

SESIÓN 2: MEDIDA DE ÁNGULOS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA	
Desarrollo: Tras un rápido repaso de lo visto en la sesión anterior (el origen de la trigonometría y sus aplicaciones en la vida real), se corrigen los errores cometidos en el cuestionario de evaluación inicial y se refrescan estos conceptos (10 min). A continuación, se presenta la definición de las unidades de medida angulares “grado sexagesimal” (1°) y “radián” (1 rad), explicando también la conversión entre ellas y realizando un ejemplo en la pizarra (10 min). La introducción de las definiciones estará sustentada con los siguientes recursos de <i>GeoGebra</i> https://www.geogebra.org/m/b7XGeNpz#material/T5aMtKcB; https://www.geogebra.org/m/dr4GmQMz. Así, se finaliza este contenido con la realización y corrección en clase del Ejercicio 2.1, por parejas (10 min). Se prosigue con la definición formal de “Trigonometría” por parte del profesor y con la definición de las razones trigonométricas fundamentales de un ángulo agudo (seno, coseno y tangente) desde un punto de vista geométrico, apoyándose en el siguiente recurso de <i>GeoGebra</i>: https://www.geogebra.org/m/pESFWx3M. Asimismo, se le presenta al alumnado las inversas de estas razones y sus respectivos nombres (cosecante, secante y cotangente). Finalmente, para concluir la clase, se expone como ejemplo la resolución de un triángulo rectángulo, calculando cada una de las razones trigonométricas (20 min). Justo antes de finalizar la sesión, se les informa a los alumnos que deberán traer reglas para dibujar triángulos y medir sus lados para la próxima sesión.	
Contenidos: 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 3.1, 3.2, 3.6	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.3.1
Objetivos de la UD: 2, 3	Competencias clave: CMCT, CCL, CD, CAA
Organización del alumnado: Individual y por parejas	Tipo de actividad: AP

Tabla 14. Desarrollo de la sesión 3 (elaboración propia).

SESIÓN 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (CONTINUACIÓN). INTRODUCCIÓN DE DEFINICIÓN ANALÍTICA	
Desarrollo: Se comienza recordando las razones trigonométricas fundamentales y se procede a la realización del Ejercicio 3.1. Esta actividad consiste en obtener mediciones de los lados de varios recortes de triángulos rectángulos semejantes (ángulo agudo de 30°) y calcular así las razones trigonométricas (idea basada en el trabajo de Jurado, 2019) (20 min). Para ello se organizará al alumnado por parejas y se les proporcionará el material necesario. El objetivo de este ejercicio es profundizar sobre el concepto de “razón”, de tal modo que los alumnos sean capaces de comprender que los valores de las razones trigonométricas no dependen de los lados del triángulo rectángulo, sino solamente del ángulo agudo. Además, el hecho de ser una tarea manipulativa, construyendo sus propios triángulos rectángulos y midiendo los lados, contribuye considerablemente al desarrollo competencial. La actividad se finalizará con un breve debate intergrupar profesor-alumnos donde el docente señalará de forma clara que si el ángulo de un triángulo rectángulo no varía, las razones trigonométricas tampoco lo harán (5 min). Se continúa con la resolución individual en clase de los Ejercicios 3.2 y 3.3, para practicar la resolución de triángulos rectángulos y afianzar los conceptos vistos hasta ahora (10 min). Asimismo, se propondrá en la plataforma <i>Classroom</i> el Ejercicio 3.4, de complejidad ligeramente superior, para su realización en casa. Se introduce la definición analítica de razón trigonométrica, empleando la circunferencia goniométrica (de radio 1) (10 min). Para una mejor visualización de esta definición y, especialmente, para establecer una conexión con la definición geométrica, el docente se apoyará en el siguiente recurso <i>GeoGebra</i>: https://www.geogebra.org/m/yapXUAGm.	
Contenidos: 1.2., 1.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.3.1, C.E.3.2
Objetivos de la UD: 3, 4, 6	Competencias clave: CMCT, CCL, SIEP, CAA, CSC
Organización del alumnado: Individual y por parejas	Tipo de actividad: MOT, AP, CON, CREAT

Tabla 15. Desarrollo de la sesión 4 (elaboración propia).

SESIÓN 4: EMPLEO DE LA CALCULADORA EN TRIGONOMETRÍA Y DEFINICIÓN ANALÍTICA DE RAZÓN TRIGONOMÉTRICA (CONTINUACIÓN)	
Desarrollo: Se comienza la clase corrigiendo el Ejercicio 3.5. que se mandó para casa y se resuelven las dudas que hayan surgido. Asimismo, se aprovecha el apartado c) para introducirles a los alumnos el empleo de la calculadora en trigonometría (15 min). Se continúa con un repaso breve de la definición analítica de razón trigonométrica y se comienza con la resolución individual del Ejercicio 4.1 (20 min). De esta forma, se consolida aún más la conexión entre las definiciones geométrica y analítica, pasando de la circunferencia goniométrica al círculo trigonométrico. Así, se prosigue con la realización de otras dos actividades, Ejercicio 4.2 y Ejercicio 4.3, a fin de familiarizarse con cada uno de los cuatro cuadrantes de la circunferencia goniométrica. Para la realización de estas, los alumnos se dispondrán en grupos de cuatro y se les entregará un ordenador portátil con el recurso de <i>GeoGebra</i> ya preparado: https://www.geogebra.org/m/yapXUAGm (15 min). De esta forma, el debate intragrupal será más enriquecedor y el empleo de este recurso TIC ayudará a mejorar la visualización de las razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes, fomentando la profundización sobre este concepto.	
Contenidos: 1.2., 1.7, 3.2, 3.6	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.1.11, C.E.3.1
Objetivos de la UD: 6, 7, 9	Competencias clave: CMCT, CCL, SIEP, CD, CAA, CSC
Organización del alumnado: Individual y grupos de cuatro	Tipo de actividad: AP, CON, MOT

Tabla 16 Desarrollo de la sesión 5 (elaboración propia)

SESIÓN 5: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES DE CIERTOS ÁNGULOS	
Desarrollo: Se comienza con la deducción de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, apoyándose el docente en la siguiente presentación manipulativa realizada en <i>GeoGebra</i>: https://www.geogebra.org/m/QXUgkgbK (10 min). A continuación, se realiza el Ejercicio 5.1, para cuya realización el docente repasará rápidamente los conceptos de ángulos complementarios, suplementarios y organizará la clase en grupos de cuatro, proporcionándoles un portátil con los recursos de <i>GeoGebra</i> necesarios preparados (ver ANEXO II). El objetivo principal es que averigüen las relaciones entre las razones de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, al mismo tiempo que siguen familiarizándose con la circunferencia goniométrica y las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes, así como con la herramienta <i>GeoGebra</i>. La actividad finalizará con un representante de cada grupo escribiendo en la pizarra las relaciones obtenidas y explicando al resto de la clase cómo ha llegado a esa conclusión, pudiéndose apoyar en la pizarra digital (40 min).	
Contenidos: 1.2., 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 3.2, 3.6	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.1.11, C.E.3.1
Objetivos de la UD: 4, 7, 9	Competencias clave: CMCT, CCL, CD, CAA,
Organización del alumnado: Grupos de cuatro	Tipo de actividad: MOT ,AP, DES, CON, CREAT

Tabla 17. Desarrollo de la sesión 6 (elaboración propia).

SESIÓN 6: RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES	
Desarrollo: Se inicia la sesión realizando un resumen de los principales contenidos vistos hasta el momento (5 min). A continuación, se introducen las relaciones trigonométricas fundamentales $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ y $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$, para cuya demostración el docente se apoyará en el recurso <i>GeoGebra</i>: https://www.geogebra.org/m/meadu4hg. Tras esto, el profesor realiza en la pizarra el Ejercicio 6.1 como ejemplo de aplicación de las relaciones trigonométricas fundamentales y vuelve recordar el uso de la calculadora (25 min). Se prosigue con la realización por parte de los alumnos de los Ejercicios 6.2, 6.3 y 6.4, los cuales se corregirán en la pizarra por alumnos voluntarios (20 min).	
Contenidos: 1.2., 1.6, 1.7, 3.2, 3.6	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.1.8, C.E.1.9, C.E.3.1, C.E.3.2
Objetivos de la UD: 5, 7	Competencias clave: CMCT, CCL, CD, CAA
Organización del alumnado: Individual	Tipo de actividad: AP, CON

Tabla 18. Desarrollo de la sesión 7 (elaboración propia).

SESIÓN 7: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	
Desarrollo: Se explicará el procedimiento de resolución de triángulos rectángulos conocidos dos lados y conocidos un ángulo y un lado (10 min). A continuación, una vez ya poseen los alumnos las herramientas necesarias para resolver problemas trigonométricos, se comienza con la presentación de problemas de trigonometría contextualizados en el mundo real. Para ello, se propone la realización y corrección (por parte de voluntarios que salgan a la pizarra) en clase de los Problemas 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 (40 min), mandando el 7.5 para casa. El objetivo es motivar a los alumnos en el aprendizaje de esta rama de las matemáticas y que continúen apreciando la presencia de la trigonometría el día a día.	
Contenidos: 1.2., 1.5, 1.6, 3.2, 3.3	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.1.6, C.E.1.7, C.E.1.8 C.E.3.1, C.E.3.2
Objetivos de la UD: 3, 6, 7, 8	Competencias clave: CMCT, CCL, CAA
Organización del alumnado: Individual	Tipo de actividad: AP, DES, MOT

Tabla 19. Desarrollo de la sesión 8 (elaboración propia).

SESIÓN 8: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS	
Desarrollo: Se comienza con la corrección del Problema 7.5 de la sesión anterior (5 min). Después se expone la resolución de triángulos oblicuángulos y otros polígonos mediante su descomposición en triángulos rectángulos mostrando algunos ejemplos resueltos (10 min). A continuación, se proponen, para realizar en clase, los Ejercicios 8.1, 8.2 y 8.3 para practicar lo explicado, y los Problemas 8.3 y 8.4 para contextualizar este contenido en el mundo real (35 min). Como en las sesiones anteriores, las actividades se corrigen en la pizarra por alumnos voluntarios (siempre bajo la supervisión del profesor). Los ejercicios que no se hayan realizado al final de la clase se terminarán en casa, subiendo el docente a <i>Classroom</i> una hoja con las soluciones de estos para que los alumnos puedan verificar si están bien resueltos.	
Contenidos: 1.2., 1.5, 1.6, 3.2, 3.3	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.1.6, C.E.1.7, C.E.1.8 C.E.3.1, C.E.3.2
Objetivos de la UD: 3, 6, 7, 8	Competencias clave: CMCT, CCL, CAA
Organización del alumnado: Individual	Tipo de actividad: AP, CON, MOT

Tabla 20. Desarrollo de la sesión 9 (elaboración propia).

SESIÓN 9: ACTIVIDAD EN EL EXTERIOR DEL AULA. APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL MUNDO REAL	
Desarrollo: Una vez se han impartido todos los contenidos de la unidad didáctica, los alumnos contarán con las suficientes herramientas para poder enfrentarse y abordar cualquier problema de trigonometría. De este modo, para la sesión 9 se propone llevar a cabo una actividad colaborativa y práctica en el patio exterior del centro (ver enunciado en el Anexo II). Para ello, el docente organizará cuatro grupos de cinco alumnos (20 alumnos en total en la clase) y les proporcionará el material necesario: cinta métrica y ficha de trabajo. Asimismo, como para todas las sesiones anteriores, los alumnos deberán llevar su propia calculadora, necesitando también algún teléfono móvil (así podrán apreciar el potencial tecnológico que tienen entre las manos y cómo se puede aplicar para resolver un problema trigonométrico). Se entregará una ficha por grupo al final de la actividad. El docente introducirá la actividad expresando claramente a los alumnos qué es lo que se pretende conseguir como producto final. Asimismo, el profesor proporcionará un adecuado andamiaje durante el desarrollo de toda la actividad, evitando cualquier punto de bloqueo que pueda propiciar el fracaso de esta.	
Contenidos: 1.2, 1.5, 1.6, 1.7, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6	Criterios de evaluación: C.E.1.2, C.E.1.6, C.E.1.7, C.E.1.11, C.E.3.1, C.E.3.2
Objetivos de la UD: 3, 7, 8, 9	Competencias clave: CMCT, CCL, SIEP, CD, CAA
Organización del alumnado: Grupos de cinco	Tipo de actividad: AP, DES, CON, MOT, CREAT

Tabla 21. Desarrollo de la sesión 10 (elaboración propia).

SESIÓN 10: <i>WEBQUEST</i> .APLICACIONES DE LA TRIOGNOMETRÍA EN EL MUNDO REAL	
Desarrollo: Durante esta sesión y la siguiente, los alumnos basarán su trabajo en un <i>WebQuest</i> (Martínez, 2021) sobre aplicaciones de la trigonometría en el mundo real, destacando el ámbito de la astronomía: https://mjmg0024.wixsite.com/website. Estas dos sesiones se llevarán a cabo en el aula de informática. Los alumnos se dividirán en grupos de tres a fin de poder asignar a cada uno una tarea del <i>WebQuest</i>. Dado que el número total de alumnos es de 20 se organizarán dos grupos de 7 y otro de 6 (con alumnos más avanzados).	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 3.2, 3.3	Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE1.12, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos de la UD: 3, 4, 5	Competencias clave: CMCT, CCL, SIEP, CD, CAA, CSC
Organización del alumnado: Grupos de siete y seis	Tipo de actividad: AP, CON, , MOT, CREAT

Tabla 22. Desarrollo de la sesión 11 (elaboración propia).

SESIÓN 11: <i>WEBQUEST</i> .APLICACIONES DE LA TRIOGNOMETRÍA EN EL MUNDO REAL (CONTINUACIÓN)	
Desarrollo: La segunda sesión consistirá en la exposición oral de cada grupo al resto de clase sobre la tarea que han realizado: breve descripción del matemático, y su contribución, que les ha servido de ayuda para la resolución del problema, qué diseño han empleado para la representación gráfica de este y el procedimiento llevado a cabo para su resolución	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 3.2, 3.3	Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE1.12, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos de la UD: 3, 4, 5	Competencias clave: CMCT, CCL, SIEP, CD, CAA, CSC
Organización del alumnado: Grupos de siete y seis	Tipo de actividad: AP, CON, , MOT, CREAT

Tabla 23. Desarrollo de la sesión 12 (elaboración propia).

SESIÓN 12:REPASO	
Desarrollo: Esta sesión está destinada a realizar un repaso general de todos los contenidos vistos en la unidad didáctica, además de resolver todas las dudas que hayan surgido hasta el momento (25 min). Del mismo modo, se propondrá para realizar en clase el Ejercicio 12.1 y los Problemas 12.2 y 12.3, que serán “tipo examen”	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6	Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos de la UD: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,	Competencias clave: CMCT, CCL, CAA
Organización del alumnado: Individual	Tipo de actividad: CON

Tabla 24. Desarrollo de la sesión 13 (elaboración propia).

SESIÓN 13:EXAMEN	
Desarrollo: El desarrollo de la unidad didáctica se finalizará con una prueba escrita compuesta por ejercicios y problemas de gran similitud a los trabajados en clase a lo largo de todas las sesiones.	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6	Criterios de evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.9, CE.1.10, CE.3.1, CE.3.2
Objetivos de la UD: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP
Organización del alumnado: Individual	Tipo de actividad: EV

6.11. Evaluación

Para una completa evaluación del alumnado, se establecerán distintos criterios de calificación (ver Tabla 25) con una ponderación determinada en la nota final. De esta manera, los alumnos serán evaluados en distintos escenarios así como en múltiples capacidades, conocimientos y habilidades.

Tabla 25. Criterios de calificación, con su respectiva ponderación, de la unidad didáctica (elaboración propia).

Criterio de calificación	Ponderación
Prueba escrita, evaluando con un mayor peso las estrategias y procedimientos de resolución que el resultado	50%
Cuaderno de clase con los apuntes, ejercicios y problemas realizados a lo largo de la unidad didáctica	10%
Actitud del alumno: participación e implicación en su propio proceso de aprendizaje, así como el trabajo en grupo	10%
Actividad en el exterior del aula	15%
Evaluación del trabajo de investigación del <i>WebQuest</i>	15%

En el ANEXO III se recogen las rúbricas de evaluación de la prueba escrita, cuaderno de clase, actitud del alumno, actividad fuera del aula y *WebQuest*.

Por otro lado, en el Artículo 2 del RD 1105/2014 se encuentran las definiciones de “criterios de evaluación” y “estándares de aprendizaje evaluables”:

- Criterios de evaluación (CE): son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.
- Estándares de aprendizaje evaluables (EA): especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado

Los criterios de evaluación, con las competencias clave asociadas, y los estándares de aprendizaje evaluables de cada bloque que se han empleado para la evaluación de cada una de las sesiones de la unidad didáctica se pueden encontrar en el ANEXO VI.

7. CONCLUSIONES

La realización de este TFM ha contribuido al logro de los objetivos planteados en primera instancia al inicio del trabajo. Ha permitido desarrollar e implementar todos los aprendizajes y enseñanzas adquiridas durante la realización del “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”, plasmando estos a lo largo de todo el trabajo y culminando con el diseño de una unidad didáctica con el nombre de “Trigonometría”, de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO. Así, se concluye lo siguiente:

- Se ha estudiado el proceso de transposición didáctica y los distintos tipos de saberes matemáticos existentes.
- Se ha realizado una fundamentación epistemológica a través del desarrollo de un tema de oposiciones. Esto ha contribuido considerablemente, en lo personal, a conocer la estructura y aprender a diseñar un tema de oposiciones.
- Se ha realizado una fundamentación curricular con bastante profundidad. Así, se ha examinado, en primer lugar, la ley educativa derogada, LOMCE, y la implantación de la LOMLOE. A continuación, se han analizado disposiciones curriculares vigentes, tanto a nivel nacional como autonómico, así como las competencias clave establecidas por la UE. Este trabajo de búsqueda en el marco normativo ha permitido adquirir gran agilidad a la hora de consultar cualquier cuestión referente al diseño curricular y encontrar la información deseada.
- El análisis y comparación de dos libros de texto ha dado por concluido el epígrafe de la fundamentación curricular. De este análisis se ha desprendido que, aunque ambos libros confeccionan el tema de trigonometría con una gran diversidad y cantidad de ejercicios y problemas, predomina la metodología tradicional transmisiva. No hay prácticamente ninguna actividad para realizar en grupos, fomentando el trabajo cooperativo y/o colaborativo, ni tampoco existen actividades basadas en la indagación y experimentación por parte de los propios estudiantes. Por este motivo, se ha incluido una actividad en la sesión 5 con la herramienta *GeoGebra* organizada en grupos, con el objetivo de que los alumnos hallasen las relaciones entre las razones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes de la circunferencia goniométrica. Además, se han dedicado dos sesiones íntegramente a la investigación sobre aplicaciones de la trigonometría en el mundo real a través de un *WebQuest*, realizando también un actividad por grupos en el exterior del aula. Este tipo de actividades de investigación y el trabajo en grupo contribuyen de manera esencial al

desarrollo de diversas competencias clave, mejorando notablemente el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Para la realización de la fundamentación didáctica se realizó una revisión de la literatura existente sobre varias investigaciones didácticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría. Tras una extensa búsqueda se ha apreciado que el número de investigaciones sobre esta rama de las matemáticas es escaso.
- El principal inconveniente en el aprendizaje de la trigonometría que se reportaba en los estudios analizados era la diversidad de definiciones e interpretaciones para un mismo concepto, como el de razón trigonométrica. Los alumnos eran incapaces de establecer conexiones entre las definiciones geométrica y analítica del concepto de razón trigonométrica. Por ello mismo se ha hecho especial hincapié en este punto durante las primeras sesiones. Asimismo, también se denotó, por parte de los alumnos, la escasa concepción que tenían de la trigonometría en el mundo real, en la vida cotidiana. Para solventar estos problemas, tomando como base las investigaciones analizadas, se ha utilizado un SGD como es *GeoGebra*, en el cual el docente apoya todas sus explicaciones, proporcionando un potente recurso para visualizar los contenidos de geometría en general y que no se conciban como algo tan abstracto. Además, a lo largo de la unidad didáctica se exponen numerosos problemas contextualizados en escenarios del mundo real, así como la actividad en el patio y la actividad sobre el *WebQuest*.
- Una vez finalizadas las fundamentaciones epistemológica, curricular y didáctica, se finaliza con el diseño de la unidad didáctica “Trigonometría” para un grupo de 20 alumnos de 4º de ESO. La unidad didáctica se compone, en general, de diversos ejercicios de refuerzo y consolidación de conocimientos, así como problemas siempre contextualizados en la vida cotidiana. Se pretende motivar a los alumnos mediante el empleo de recursos TIC como *GeoGebra* y el *WebQuest*, potenciando notablemente el desarrollo de competencias clave. Además, se organizan bastantes actividades en grupo, propiciando así una educación más inclusiva.
- En definitiva, el diseño de esta unidad didáctica busca la motivación e implicación de los alumnos en su propio proceso de enseñanza-aprendizaje en la trigonometría, evitando que conciban las matemáticas como monótonas, abstractas y sin aplicación en el mundo real, y posibilitando el máximo desarrollo competencial. Así, se pretende captar el interés, por la asignatura de Matemáticas y, en general, por las asignaturas de ciencias.

8. REFERENCIAS

- Academia Claustro. (2006). *Oposiciones de secundaria de Matemáticas*. Sevilla: Claustro Ediciones.
- Academia Deimos. (2003). *Temario para oposiciones profesorado secundaria*. Madrid: Editorial Deimos.
- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A. y Donaire, J.J. (2017). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Savia. Madrid: Santa María-Ediciones (SM).
- Bosch, M. y Gascón, J. (2006). *25 años de Transposición Didáctica*. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Brown, S.A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Tesis doctoral. Illinois State University, Illinois.
- Brown, S.A. (2006). *Cognitive Obstacles in Understanding Sine and Cosine on the Coordinate Plane*. Tesis doctoral. Illionis State University, Illinois.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. AIQUE Grupo Editor. 3ª edición.
- Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016a). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Vol. 1. Madrid: Grupo Anaya, S.A.
- De Faria, E. (2006). *Transposición didáctica: definición, epistemología, objeto de estudio*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, núm. 2 (pp. 1-11). Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas. Universidad de Costa Rica. Asociación de Matemática Educativa.
- Díaz, M. J. S. (2011). *La WebQuest: Ventajas e inconvenientes como recurso educativo*. Universidad Pontifica de Salamanca, 1 (1), 13.
- Docentes Educación Navarra. Recuperado de: <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm>. Fecha de último acceso: 10/06/2022
- El Baúl de las Mates. Recuperado de: http://melchordemacanaz.es/elbauldelasmates/asignaturas_4eso_academicas.html. Fecha de último acceso: 11/06/2022.

- Feria, E. (2018). *Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría mediante el uso de herramientas tecnológicas*. Tesis de pregrado. Recuperado de <https://repository.ucc.edu.co/handle/20.500.12494/14027>
- Fernández-Plaza, J.A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Vílchez-Marín, M. (2016). *Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares*. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 237-246). Málaga: SEIEM.
- Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa, IA.
- Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*. Valencia.
- Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (L. Puig, Trans.), E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (Textos seleccionados) (2ª edición)*. México D.F.: Departamento de Matemática Educativa.
- García, M. (2022). *Aprendizaje y Enseñanza de la materia de Matemáticas*. Asignatura del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Jaén.
- Godino, J. D. (2000). *La consolidación de la educación matemática como disciplina científica*. *Números*, 40, 347-350.
- Gómez, G. (2021). *Estrategia didáctica apoyada en las TIC para la enseñanza de las Razones Trigonómicas a los estudiantes del grado Décimo de la Institución Educativa*. Facultad de Ciencias Sociales y Educación, Maestría en Recursos Digitales. Aplicados a la Educación, Universidad de Cartagena. Medellín-Antioquia, Colombia.
- Google Play. Recuperado de: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.stfactory.clinometer&hl=es&gl=US>. Fecha de último acceso: 12/06/2022
- Guijarro, R.B. (1990). *La atención a la diversidad en el aula y las adaptaciones del currículo*. *Desarrollo psicológico y educación*, 411-438.

- Gutiérrez, D. (2016). *Sistemas de Geometría Dinámica como herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de trigonometría en la Educación Secundaria*. Trabajo Fin de Máster. Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. Facultad de Educación, Universidad de Cantabria, Cantabria. UCREA.
- Hernández, A. (2021). *Procesos y contextos educativos*. Asignatura del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Jaén.
- IES Llano de la Viña (Noviembre de 2021). *Proyecto Educativo de Centro*. Recuperado el 04/06/2022 <https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/iesllano/plan-centro/>.
- Jiménez, J.G. y Jiménez, S. (2017). *GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas*. Revista Electrónica Sobre Tecnología, Educación Y Sociedad, 4(7). Recuperado a partir de <https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>.
- Jurado, A. (2019). *Trigonometría*. Trabajo de Fin de Máster. Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Jaén. TAUJA.
- Liveworksheets. Recuperado de: <https://es.liveworksheets.com> . Fecha de último acceso: 08/06/2022.
- Luque, L. (2022). *Aprendizaje y Enseñanza de la materia de Matemáticas*. Asignatura del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Jaén.
- Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.
- Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Martín Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F. y Rico, L., (2016). *Significado escolar de las razones trigonométricas elementales*. Enseñanza de las Ciencias, 34.3, pp. 51-71.
- Martínez, M.J. (2021). *Trigonometría*. Trabajo de Fin de Máster. Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Jaén. TAUJA.
- Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

- Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Rico, L. (2014). *Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato*. Salamanca: SEIEM.
- Mathematics Association of England (1950). *The teaching of trigonometry in schools: A report prepared for the Mathematical Association*. London: G. Bell y Sons, Ltd.
- Moreira, M.A. (2004). *WebQuest. Una Estrategia de Aprendizaje Por Descubrimiento Basada en el Uso DE Internet*. Laboratorio de Educación y Nuevas Tecnologías. Universidad de la Laguna. webpages.ull.es/user/manareal/webquest
- Moreno, M. (2020). *Funciones*. Trabajo Fin de Máster. Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Jaén. TAUJA.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2003). *La definición y Selección de Competencias Clave*. Resumen ejecutivo.
- Orhun, N. (2004). *Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry*. Journal of Curriculum Studies, 32(6), 797-820.
- Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea (2006). *Competencias clave para el aprendizaje permanente - Un marco europeo*. Anexo de una Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente publicada en el Diario Oficial de la Unión Europea L 394 de 30 de diciembre de 2006.
- Ramírez, R. (2005). *Aproximación al concepto de transposición didáctica*. Revista Folios, núm. 21 (pp. 33-45). Universidad Pedagógica Nacional Bogotá, Colombia.
- Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. Traducido por García, J. Barcelona: Editorial Crítica.
- Thatquiz. Recuperado de <https://www.thatquiz.org/es>. Fecha de último acceso: 08/06/2022.
- Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, Utrecht (traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez et al., 1991).

9. MARCO NORMATIVO

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre de 2013, para la mejora de calidad educativa. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295.

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículum básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, sec. I, pp. 169-546.
- Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículum correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas. Boletín Oficial del Estado. 18 de enero de 2021, núm. 7, pp. 656-1024.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero de 2015, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986-7003.

ANEXO I. OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA Y DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Objetivos generales de etapa

Según el artículo 11 del RD 1105/2014, la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá al desarrollo en los alumnos y alumnas de capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreiciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Objetivos específicos del área de matemáticas

Según la Orden de 15 de enero de 2021 de la Comunidad Autónoma de Andalucía, la enseñanza de la materia Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria contribuirá al desarrollo en el alumnado de capacidades que le permitan:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor; utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet,

publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole inversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que se puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, la salud, el consumo, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de nuestra sociedad y al conocimiento matemático acumulado por la humanidad, la aportación al crecimiento económico desde los principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social o la convivencia pacífica.

ANEXO II. ACTIVIDADES DE LAS SESIONES DE LA UD

Sesión 1. Introducción

Cuestionario sobre el vídeo “Trigonometría: orígenes y aplicaciones”

- ¿Qué es la trigonometría?
- ¿Dónde aplicaban los egipcios y los babilónicos la trigonometría, aparte de en la agricultura y en la arquitectura?
- ¿Cómo calculó Aristarco de Samos la distancia entre el Sol y la Tierra?
- ¿Qué otras aplicaciones tiene la trigonometría en el mundo real? Nombra algunas.

Cuestionario sobre conceptos previos a la unidad de trigonometría

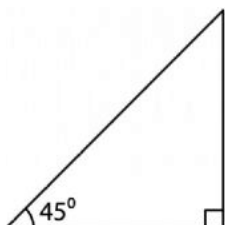
1. Clasifica los siguientes triángulos marcando con una X en la casilla correspondiente:

	EQUILÁTERO	ISÓSCELES	ESCALENO	RECTÁNGULO	ACUTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
1						
2						
3						
4						

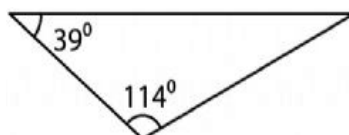
Figura 35. Clasificación de triángulos (Liveworksheets).

2. Obtén el valor del ángulo que falta:

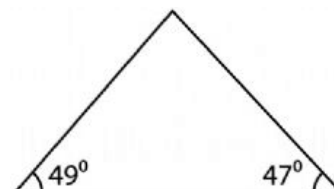
a)



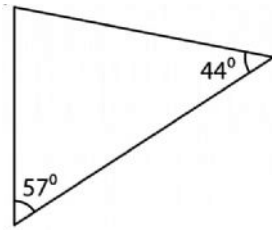
b)



c)



d)



e)

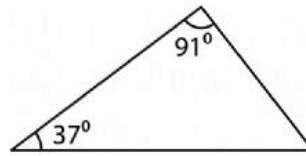
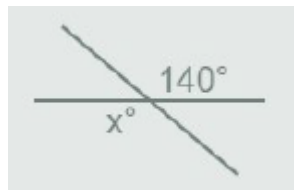


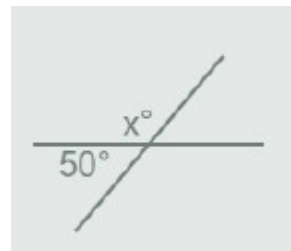
Figura 36. Cálculo del ángulo restante en un triángulo (Liveworksheets).

3. Indica el valor del ángulo que falta:

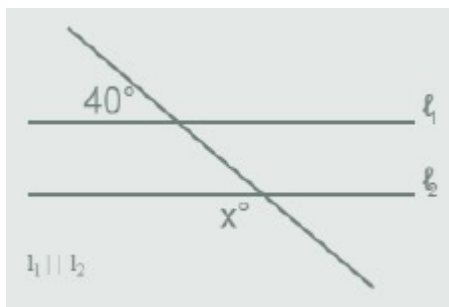
a)



b)



c)



d)

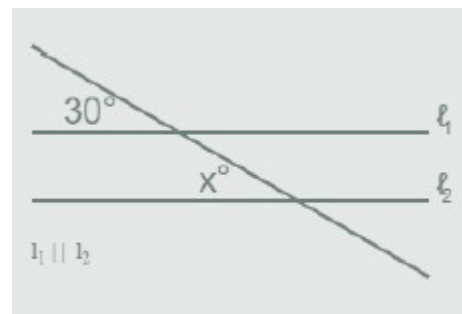


Figura 37. Indica el valor del ángulo restante (Thatquiz).

4. Indica el valor del lado x y la razón de semejanza de los siguientes triángulos semejantes:

a)



b)



Figura 38. Triángulos semejantes (Thatquiz).

Sesión 2. Medida de ángulos y razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Definición geométrica

Ejercicio 2.1 (Alcaide *et al.*, 2017). Convierte a radianes los ángulos expresados en grados sexagesimales y pasa a grados sexagesimales los ángulos expresados en radianes.

- a) 60° b) 120° c) 210° d) $\pi/4$ e) $2\pi/3$ f) 4π

Sesión 3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo (continuación).

Introducción de definición analítica

Ejercicio 3.1 (Jurado, 2019). Dibuja y recorta tres triángulos semejantes de ángulo 30° con la cartulina proporcionada. Mide sus lados y calcula las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de ellos, completando la Tabla 26, Tabla 27 y Tabla 28.

Tabla 26. Ejercicio 3.1. Razón trigonométrica seno (elaboración propia).

	Cateto opuesto	Hipotenusa	Seno
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			

Tabla 27. Ejercicio 3.1. Razón trigonométrica coseno (elaboración propia).

	Cateto contiguo	Hipotenusa	Coseno
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			

Tabla 28. Ejercicio 3.1. Razón trigonométrica tangente (elaboración propia).

	Cateto opuesto	Cateto contiguo	Tangente
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			

Ejercicio 3.2 (Colera *et al.*, 2016). Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los siguientes triángulos:

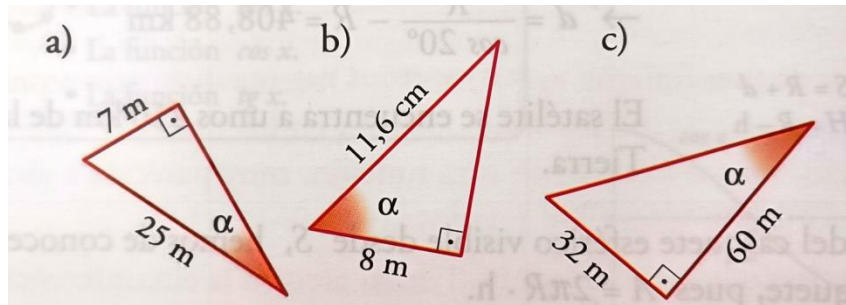


Figura 39. Esquema del Ejercicio 3.2 (Colera *et al.*, 2016).

Ejercicio 3.3 (Alcaide *et al.*, 2017). Resuelve los triángulos sabiendo que $\hat{B}$ es un ángulo recto.

- a) $\hat{C} = 65^\circ$, $a = 22$ cm
- b) $c = 15$ cm, $b = 18$ cm
- c) $a = 20$ cm, $b = 20$ cm

Ejercicio 3.4 (Alcaide *et al.*, 2017). El triángulo de la Figura 40 es rectángulo en A. Se pide hallar:

- a) Medidas de los lados desconocidos, así como la altura h .
- b) Razones trigonométricas del ángulo α .
- c) Amplitudes de los ángulos α y β .

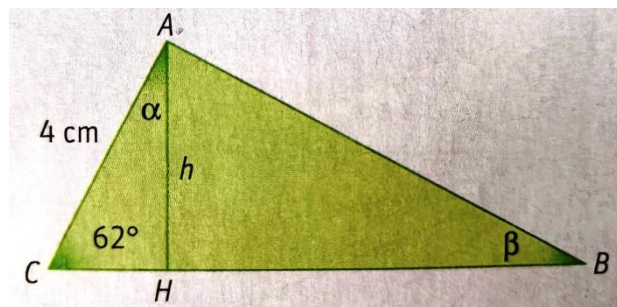


Figura 40. Esquema del triángulo a resolver del Ejercicio 3.4 (Alcaide *et al.*, 2017).

Sesión 4. Empleo de la calculadora en trigonometría y definición analítica de razón trigonométrica (continuación)

Ejercicio 4.1. Dibuja, utilizando reglas y un transportador de ángulos, los triángulos rectángulos de ángulos 15° , 30° , 45° , 60° . Obtén, mediante mediciones en el papel

milimetrado, las razones trigonométricas de estos ángulos. ¿Qué ocurre con los ángulos de 0° y 90° ?

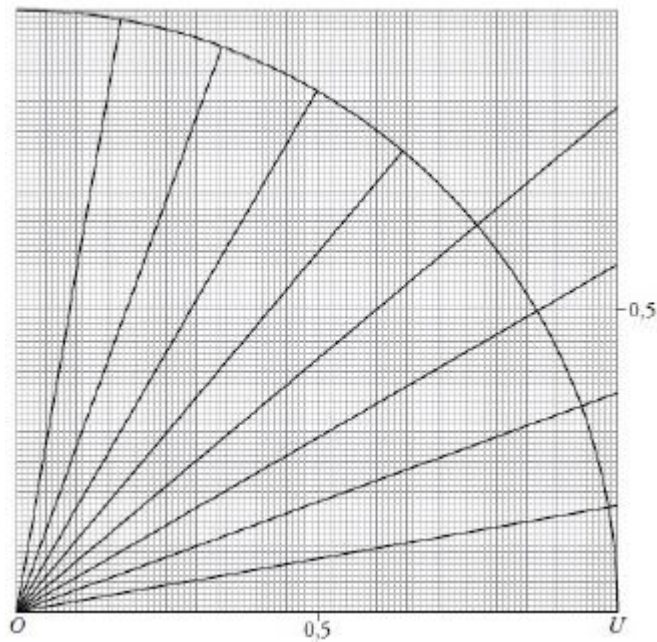


Figura 41. Plantilla del Ejercicio 4.1 (Jurado, 2019; Colera *et al.*, 2016).

Ejercicio 4.2 (Colera *et al.*, 2016). Indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos α, β, γ y θ :

- | | |
|---|---|
| a) $\sin \alpha < 0$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0$ | b) $\cos \beta > 0$ y $\operatorname{tg} \beta < 0$ |
| c) $\sin \gamma < 0$ y $\cos \gamma < 0$ | d) $\cos \theta > 0$ y $\sin \theta < 0$ |

¿Qué signo tiene cada una de las razones trigonométricas?

Ejercicio 4.3 (Colera *et al.*, 2016). Justifica en qué cuadrante se encuentra el ángulo α , en cada caso, y calcula las razones trigonométricas restantes:

- | | |
|--|--|
| a) $\sin \alpha = 4/5$; $\alpha < 90^\circ$ | b) $\cos \alpha = 2/3$; $\alpha > 270^\circ$ |
| c) $\operatorname{tg} \alpha = 3 < 0$; $\alpha > 180^\circ$ | d) $\cos \alpha = -3/4$; $\alpha < 180^\circ$ |

Sesión 5. Razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° . Relaciones entre las razones de ciertos ángulos

Ejercicio 5.1. Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos.

- a) Visualiza sobre la circunferencia goniométrica los ángulos -30° , -45° y -60° .
 ¿Cuál es el valor de sus razones trigonométricas?
 ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos?
 Halla el valor de $\sin 290^\circ$, $\cos 315^\circ$ y $\operatorname{tg} 350^\circ$.
 (Docentes Educación Navarra)

GeoGebra:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/t3_ang_opuestos.htm

- b) ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas 30° y 60° ? ¿Y entre las de 15° y 75° ?
¿Qué se cumple, por tanto, entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios?
Halla el valor de $\sin 170^\circ$, $\cos 115^\circ$ y $\tan 135^\circ$.
(Docentes Educación Navarra)

GeoGebra:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/t10_ang_compls.htm

- c) Visualiza en la circunferencia goniométrica los ángulos 120° , 135° , 150° y 180° .
¿Cuál es el valor de sus razones trigonométricas? ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios?

GeoGebra:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/t4_ang_suplos.htm

Sesión 6. Relaciones trigonométricas fundamentales

Ejercicio 6.1 (Colera et al., 2016). Sabiendo que $\cos \alpha = 0,63$, calcular $s = \sin \alpha$ y $t = \tan \alpha$.

Ejercicio 6.2 (Colera et al., 2016). Teniendo en cuenta que $\sin 30^\circ = 1/2$, halla el valor de $\cos 30^\circ$ y $\tan 30^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.

Ejercicio 6.3 (Colera et al., 2016). Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

Ejercicio 6.4 (Alcaide et al., 2017). Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

b) $\frac{\tan^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = 1 + 2\cos^2 \alpha$

Sesión 7. Resolución de triángulos rectángulos

Problema 7.1. Se coloca una cámara a 87 m de la Torre Eiffel, estableciendo una visual al punto más alto de la torre con un ángulo de 75° (ver Figura 42). ¿Cuál es la altura de la torre?

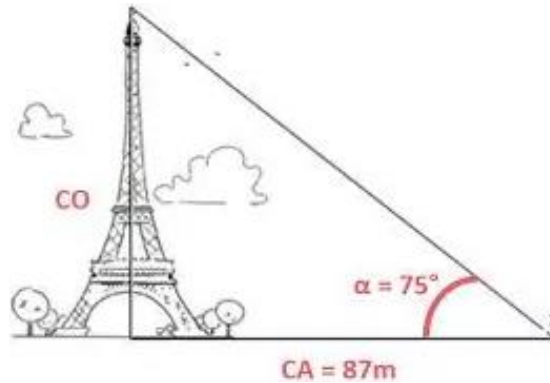


Figura 42. Esquema del Problema 7.1 (Thatquiz).

Problema 7.2 (Alcaide et al., 2017). Un niño está volando una cometa en la playa. La longitud de la cuerda desde la mano del niño a la cometa es de 25 m, además, esta mide 1,5 m. Sabiendo que el ángulo de elevación formado con el suelo es de 70° , ¿qué altura alcanza la cometa?

Problema 7.3 (Alcaide et al., 2017). Se ha colocado un proyector sobre un trípode de 1,2 m y a una distancia horizontal de 5 m de la pantalla. La imagen proyectada está a 3 m del suelo. ¿Qué inclinación sobre la horizontal tiene el foco del proyector de la Figura 43?

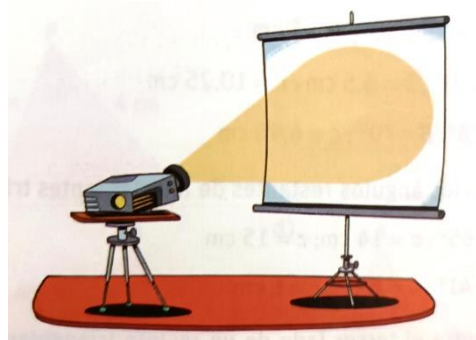


Figura 43. Esquema del Problema 7.3 (Alcaide et al., 2017).

Problema 7.4 (Alcaide et al., 2017). Desde la orilla de un río se ve un árbol situado en la otra orilla bajo un ángulo de 40° , y si se retrocede 4 m, se ve bajo un ángulo de 28° . Calcula la altura del árbol y la anchura del río, mostrados en la Figura 44.

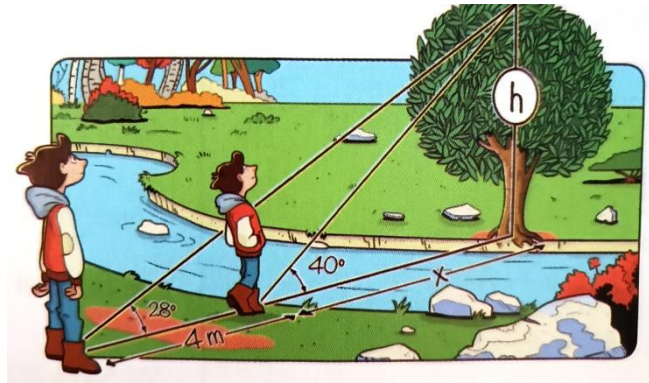


Figura 44. Esquema del Problema 7.4 (Alcaide *et al.*, 2017).

Problema 7.5 (Alcaide *et al.*, 2017). Una escalera de 6 m de longitud está apoyada sobre la ventana de un edificio situada a 4,5 m del suelo (ver Figura 45). Si bascula sobre su base, se apoya en una farola de 3,2 m situada en la misma acera.

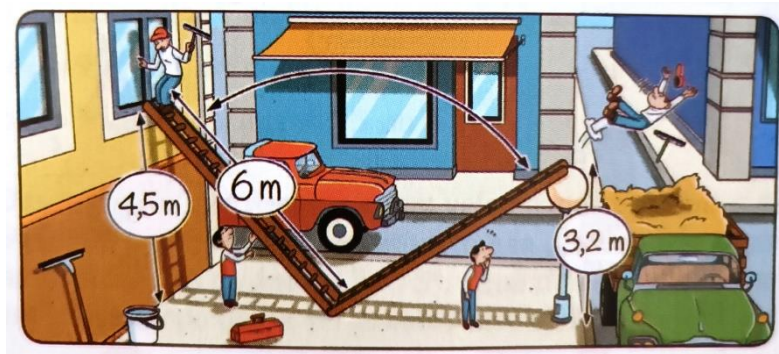


Figura 45. Esquema del Problema 7.5 (Alcaide *et al.*, 2017).

- ¿Con qué ángulo de inclinación está apoyada la escalera sobre la ventana? ¿Y si se apoya sobre la farola?
- Calcula la distancia entre la fachada del edificio y la farola.

Sesión 8. Resolución de triángulos oblicuángulos

Ejercicio 8.1 (Colera *et al.*, 2016). Calcula la altura h y el área de los siguientes triángulos rectángulos (ver Figura 46):

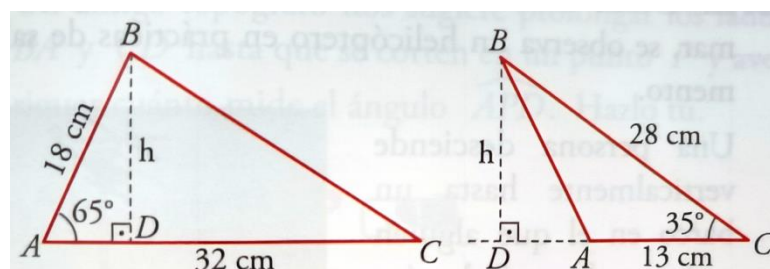


Figura 46. Triángulos oblicuángulos del Ejercicio 8.1 (Colera *et al.*, 2016).

Recuerda: el área de un triángulo se calcula como $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

Ejercicio 8.2 (Alcaide *et al.*, 2017). Halla la medida de los lados desconocidos del trapecio rectángulo de la Figura 47. Calcula el área del trapecio.

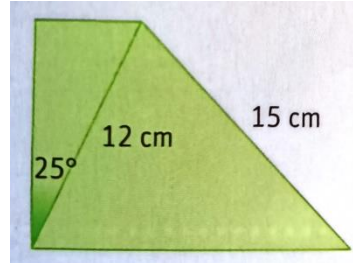


Figura 47. Trapecio del Ejercicio 8.2 (Alcaide *et al.*, 2017).

Ejercicio 8.3 (Alcaide *et al.*, 2017). Calcula el área y el volumen del cuerpo geométrico de la Figura 48.

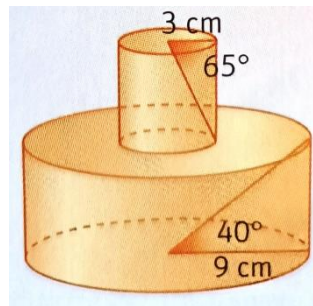


Figura 48. Cuerpo geométrico del Ejercicio 8.3 (Alcaide *et al.*, 2017).

Recuerda: el volumen de un cilindro se calcula como $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Problema 8.4 (Alcaide *et al.*, 2017). Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60°, respectivamente (ver Figura 49). Halla la altura de la antena.

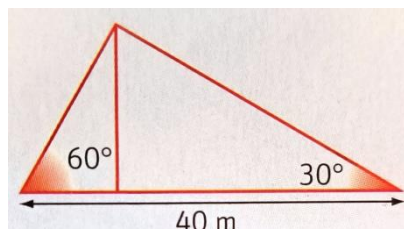


Figura 49. Esquema del montaje de la antena del Problema 8.4 (Alcaide *et al.*, 2017).

Problema 8.5 (Colera *et al.*, 2016). Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento (ver Figura 50). Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75° para el helicóptero y 38° para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco?

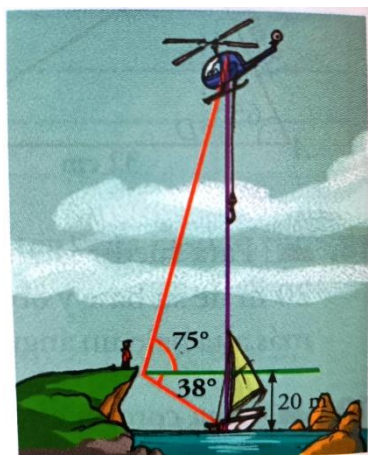


Figura 50. Esquema del Problema 8.5 (Colera *et al.*, 2016).

Sesión 9. Actividad en el exterior del aula. Aplicaciones de la trigonometría en el mundo real

Nº de grupo:

Miembros del grupo:

Práctica de trigonometría

Es hora de aplicar lo aprendido durante las sesiones anteriores. Se está realizando una tarea integrada con el profesor de Historia sobre la arquitectura de Jaén y nos ha pedido que le demos el dato de la altura de la catedral de Jaén, pues lleva toda la mañana sin acceso a Internet. No obstante, el profesor de Matemáticas sí que sabe la altura, aunque nos dice que no recuerda muy bien el dato pero se puede hallar sumando las alturas de 8 elementos del centro. De esta forma, la actividad consistirá en realizar una serie de mediciones en el patio del centro que nos ayudarán a obtener la altura de la catedral de Jaén

Para poder cumplir el objetivo de la actividad, se organizarán grupos de 5 personas, cada uno de los cuales tendrá asignadas dos alturas. Para realizar la actividad solo vais a necesitar esta ficha de trabajo, bolígrafo, cinta métrica, calculadora y móvil (con un solo miembro del grupo vale).

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Como primera medida, debéis calcular el ángulo que forma vuestra sombra con vosotros mismos (esto es, el ángulo de proyección del sol). Para ello, se colocarán dos miembros del grupo mirando al sol, uno al lado del otro, mientras que los otros tres toman medidas de la altura de cada uno de ellos y de la proyección de su sombra, anotándolas en la siguiente tabla:

Alumno	Altura (m)	Sombra (m)	Ángulo del sol (°)
Cálculos:			

Nota: tanto en las mediciones como en los cálculos se deben dar dos cifras decimales.

¿Qué ocurre con el ángulo del sol?

(Intervención del docente: tras obtener cada grupo los ángulos de proyección del sol, los pondrán en común y se preguntará qué es lo que observan. Tras esto el docente explicará que los rayos de sol inciden de forma paralela a la Tierra y que en cada momento del día, los triángulos rectángulos formados por cualquier elemento y su sombra son semejantes, lo que se traduce en que el ángulo de proyección del sol siempre es el mismo).

2. Tras obtener el ángulo del sol, cada grupo deberá realizar la medida una primera altura:
 - Grupo 1. Obtener la altura de la farola situada justo a la entrada del centro.
 - Grupo 2. Obtener la altura del árbol que hay al lado de la biblioteca.
 - Grupo 3. Obtener la altura de la canasta de baloncesto.
 - Grupo 4. Obtener la altura del árbol que hay al lado del gimnasio.

Grupo	Sombra (m)	Altura (m)
Cálculos:		

Nota: tanto en las mediciones como en los cálculos se deben dar dos cifras decimales.

- Ahora se deberá realizar el cálculo de la segunda altura asignada a cada grupo. Sin embargo, ahora no se pueden utilizar las sombras para hallar estas medidas, puesto que caen sobre otros edificios colindantes y/u otras zonas no accesibles y no se pueden medir. Como alternativa, vamos a descargar (al menos un miembro del grupo) la app “Clinómetro” de Smart Tool Factory en Play Store (Google Play). Esta app ofrece la posibilidad de medir ángulos en tiempo real mediante un transportador de ángulos superpuesto en la cámara (ver Figura 51). Otra opción sería realizar una foto y dibujar sobre ella el ángulo que queremos obtener (ver Figura 52).

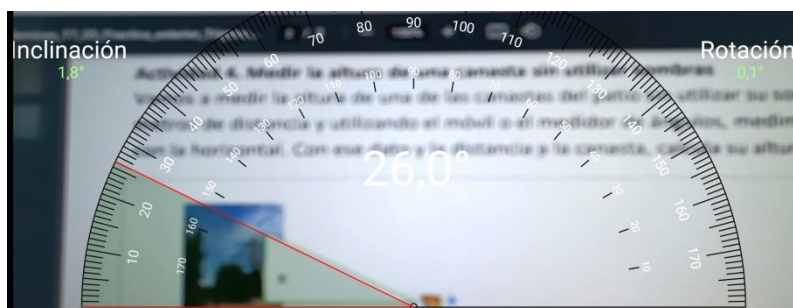


Figura 51. Transportador de ángulos con la app “Clinómetro” (El Baúl de las Mates).

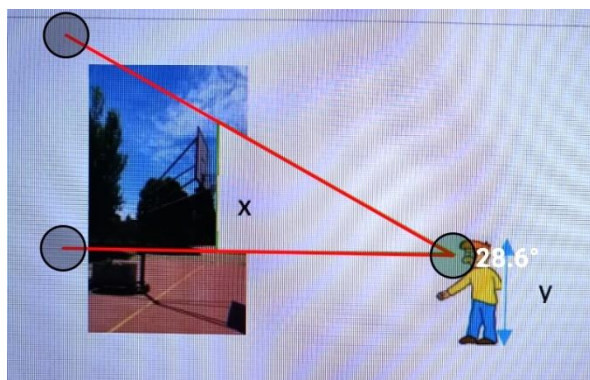


Figura 52. Dibujo del ángulo con la app “Clinómetro” (El Baúl de las Mates).

Se recomienda seguir el procedimiento de la Figura 52. De esta forma, uno de los miembros del grupo se colocará a una distancia de 5 m del elemento a medir y los demás miembros deberán utilizar el móvil con la app abierta para poder medir el ángulo que forma la horizontal entre sus ojos y el punto más alto del elemento. Se medirá también la altura pies-ojos del miembro del grupo.

- Grupo 1. Obtener la altura del edificio principal del centro.
- Grupo 2. Obtener la altura de la biblioteca.
- Grupo 3. Obtener la altura del gimnasio.
- Grupo 4. Obtener la altura del porche de la entrada principal del centro.

Grupo	Alumno	Altura ojos-pies (m)	Ángulo ojos-punto más alto del elemento (°)	Altura triángulo rectángulo (m)	Altura del edificio = altura ojos-pies + altura triángulo rectángulo (m)
Cálculos:					

4. Finalmente, recopilar los resultados de los otros grupos y obtener la altura de la catedral.

Grupo	Altura 1 (m)	Altura 2 (m)
1		
2		
3		
4		

Altura catedral = Suma de todas las alturas 1 + alturas 2

Sesiones 10 y 11. WebQuest. Aplicaciones de la trigonometría en el mundo real

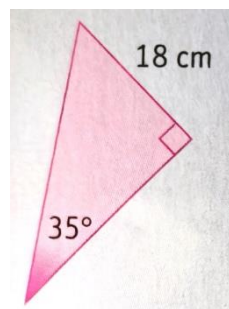
Los problemas 10.1, 10.2 y 10.3 se pueden consultar a través del siguiente enlace (Martínez, 2021):

<https://mjmg0024.wixsite.com/website>

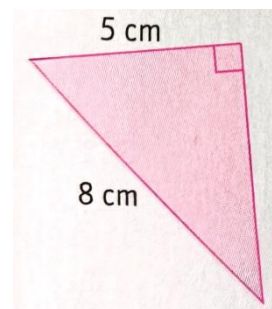
Sesión 12. Repaso

Ejercicio 12.1 (Alcaide *et al.*, 2017). Resuelve los siguientes triángulos de la Figura 53:

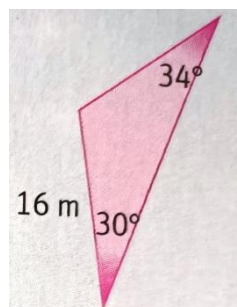
a)



b)



c)



d)

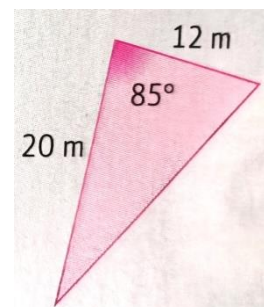


Figura 53. Triángulos del Ejercicio 12.1 (Alcaide *et al.*, 2017).

Problema 12.2 (Colera *et al.*, 2016). En un trapecio isósceles de bases AB y DC , conocemos los lados $\overline{AB} = 5 \text{ m}$ y $\overline{DC} = 3\sqrt{2} \text{ m}$, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45° . Halla su área.

Problema 12.3 (Colera *et al.*, 2016). Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la Figura 54. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q , cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.

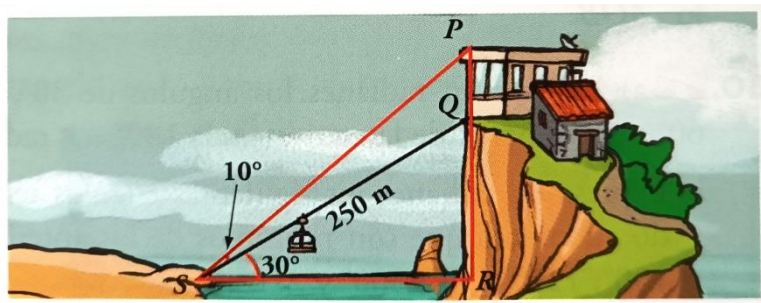


Figura 54. Esquema del Problema 12.3 (Colera et al., 2016).

Sesión 13. Examen

UNIDAD 8. TRIGONOMETRÍA
NOMBRE Y APELLIDOS:
Atención: Debe aparecer el procedimiento realizado en los ejercicios y problemas.

Ejercicio 1 (Colera et al., 2016). Justifica en qué cuadrante está el ángulo α en cada caso y represéntalo en la circunferencia goniométrica:

- a) $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha < 0$
- b) $\operatorname{tg} \alpha = -2$; $\cos \alpha > 0$
- c) $\cos \alpha = -3/4$; $\alpha < 180^\circ$
- d) $\sin \alpha = 4/5$; $\alpha < \pi/2$ rad

Ejercicio 2 (Colera et al., 2016). Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$ (ver Figura).

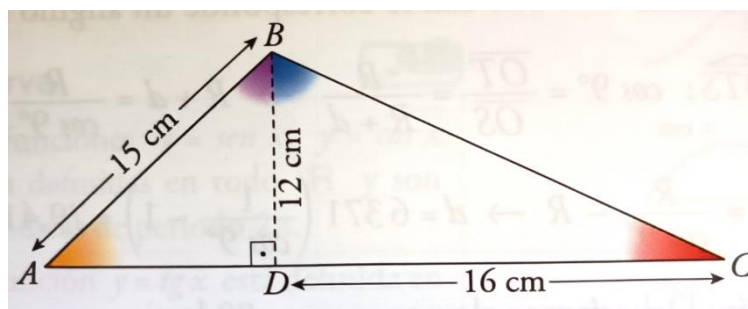


Figura 55. Esquema del Ejercicio 2 de examen (Colera et al., 2016).

Ejercicio 3 (Colera et al., 2016). Demuestra las siguientes igualdades empleando las relaciones trigonométricas fundamentales:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 / \cos^2 \alpha$

Problema 4 (elaboración propia). Un faro de 42 m de altura se encuentra a 12 m de altura sobre el nivel del mar. Si ve un barco con un ángulo de 40° . ¿A qué distancia, medida en horizontal, se encuentra el barco del faro?

Problema 5 (Alcaide et al., 2017). Halla la medida de los lados desconocidos del trapecio rectángulo de la Figura 56. Calcula el área del trapecio.

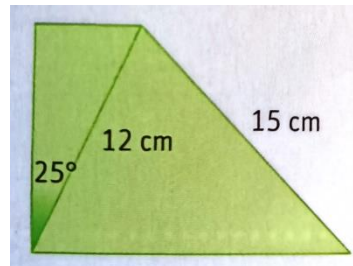


Figura 56. Dibujo del Problema 5 de examen (Alcaide et al., 2017).

Problema 6 (Colera et al., 2016). Para medir la anchura de un río se han tomado las medidas indicadas en la Figura. Hállala.

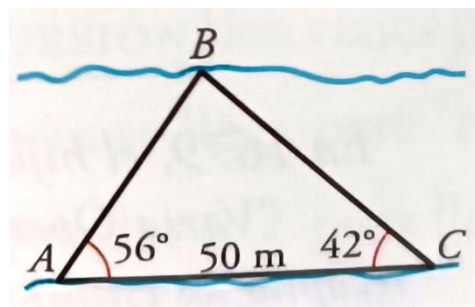


Figura 57. Dibujo del Problema 6 de examen (Colera et al., 2016).

ANEXO III. RÚBRICAS

Tabla 29. Rúbrica para la evaluación del cuaderno de clase (IES Llano de la Viña, 2021; elaboración propia).

RÚBRICA CUADERNO DE CLASE					
Criterios (ponderación)	Excelente (10)	Bien (7-9)	Mejorable (5-6)	Insatisfactorio (1-4)	NOTA
Presentación (20%)	El aspecto tanto exterior como interior de la libreta tiene un grado de limpieza positivo. Respeto el orden de la libreta y respeta los márgenes.	El aspecto exterior de la libreta no es el adecuado o no respeta en algún momento el orden o márgenes de esta.	El aspecto exterior de la libreta no es el adecuado y/o la libreta presenta tachones, dibujos y/o palabras que no son de la materia o no respeta el orden de la libreta ni los márgenes.	El aspecto exterior de la libreta no es el adecuado y/o la libreta presenta tachones, dibujos y/o palabras que no son de la materia y no respeta el orden de la libreta ni los márgenes.	
Comprensión/ Expresión escrita (15%)	El alumno/a no tiene faltas de ortografía, copia los enunciados, la teoría y está escrito con una letra legible.	El alumno/a tiene faltas de ortografía o no copia los enunciados o la teoría o no está escrito con una letra legible.	El alumno/a no cumple dos de los siguientes criterios: no tiene faltas de ortografía, copia los enunciados, a teoría y está escrito con una letra legible.	El alumno/a sólo cumple uno de los siguientes criterios: no tiene faltas de ortografía, copia los enunciados, a teoría y está escrito con una letra legible.	
Actividades corregidas (25%)	El alumno/a tiene todas las actividades corregidas, lo realiza con un bolígrafo de otro color y cuando las tiene bien realiza una marca con este bolígrafo para indicarlo.	El alumno/a corrige las actividades pero no lo indica en la libreta con un bolígrafo de otro color o tiene la mayoría de las actividades corregidas, pero no todas.	El alumno/a corrige las actividades pero no lo indica en la libreta con un bolígrafo de otro color y tiene la mayoría de las actividades corregidas, pero no todas.	El alumno/a no tiene la mayoría de las actividades corregidas.	
Libreta completa (40%)	El alumno/a tiene todas las actividades hechas.	El alumno o alumna tiene todas las actividades copiadas y la mayoría hechas.	Al alumno/a le falta alguna actividad por copiar y hacer o aunque tiene copiadas todas las actividades no tiene hechas la mayoría.	El alumno/a no tiene ni copiadas ni hechas la mayoría de las actividades.	
NOTA FINAL					

Tabla 30. Rúbrica para la evaluación de la prueba escrita (IES Llano de la Viña, 2021; elaboración propia).

RÚBRICA PRUEBA ESCRITA					
Criterios (ponderación)	Excelente (10)	Bien (7-9)	Mejorable (5-6)	Insatisfactorio (0-4)	NOTA
Orden y organización (15%)	El examen/trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada siendo fácil de leer	El examen/trabajo es presentado de una manera ordenada y organizada, siendo en general fácil de leer	El examen/trabajo es presentado de una manera organizada pero puede ser difícil de leer	El examen se presenta de forma descuidada y desorganizada, siendo difícil saber qué información presenta	
Estrategia – Procedimiento (25%)s	Por lo general usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas	Por lo general usa una estrategia efectiva para resolver problemas	Algunas veces usa estrategias efectivas para resolver problemas, pero no es consistente	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas	
Razonamiento matemático (30%)	Usa razonamiento matemático complejo refinado	Usa razonamiento matemático efectivo.	Presenta evidencias de usar razonamiento matemático	No hay evidencias de razonamiento matemático	
Explicación (15%)	La explicación es detallada y clara	La explicación es clara	La explicación es algo difícil de entender, pero tiene componentes críticos.	La explicación es muy difícil de entender y no tiene componentes críticos, o directamente no existe explicación	
Conclusión (10%)	Todos los problemas/ejercicios del examen fueron resueltos	Todos, menos 1, de los problemas/ ejercicios de examen fueron resueltos	Todos, menos 2 - 3, de los problemas/ ejercicios de examen fueron resueltos	Todos menos 4 problemas - ejercicios no fueron resueltos	
NOTA FINAL					

Tabla 31. Rúbrica para la evaluación de la actitud del alumno/a (IES Llano de la Viña, 2021; elaboración propia).

RÚBRICA ACTITUD DEL ALUMNO/A					
Criterios (ponderación)	Excelente (10)	Bien (7-9)	Mejorable (5-6)	Insatisfactorio (1-4)	NOTA
Tareas/trabajos (20%)	Entrega las tareas con alta calidad en tiempo y forma.	Las tareas cumplen con lo requerido en tiempo y forma.	Entrega tareas de baja calidad, aunque a su debido tiempo.	O bien no entrega las tareas, o bien las entrega con muy mala calidad y fuera de tiempo.	
Trabajo en grupo (20%)	Siempre escucha, comparte y apoya el trabajo con los demás. Colabora activamente para que el grupo funcione bien.	Usualmente escucha, comparte y apoya el trabajo con los demás. No causa problemas en el grupo.	A veces escucha, comparte y apoya el trabajo con los demás. En ocasiones causa problemas en el grupo.	Apenas escucha, comparte ni apoya el trabajo con los demás. En muchas ocasiones causa problemas en el grupo.	
Participación en clase (25%)	Proporciona ideas útiles, discute razonadamente y contribuye al buen desarrollo de la clase.	En general proporciona ideas útiles, discute razonadamente y contribuye al buen desarrollo de la clase.	A veces proporciona ideas útiles, discute razonadamente y contribuye al buen desarrollo de la clase.	Casi nunca proporciona ideas útiles, discute razonadamente y no contribuye al buen desarrollo de la clase.	
Asistencia y puntualidad (15%)	Asiste puntualmente a todas las clases (salvo causa justificada).	Casi siempre asiste puntualmente a las clases (salvo causa justificada).	A veces, 1 vez por semana, es impuntual o no asiste a clase (salvo causa justificada).	Llega tarde o no asiste muchas veces, más de 1 vez por semana (salvo causa justificada).	
Comportamiento (20%)	Siempre tiene una actitud positiva hacia el trabajo, respetando a sus compañeros y al profesor.	En general tiene una actitud positiva hacia el trabajo, respetando a sus compañeros y al profesor.	A veces tiene una actitud positiva hacia el trabajo, respetando a sus compañeros y al profesor.	Suele tener una actitud negativa hacia el trabajo. En ocasiones falta al respeto a compañeros y/o al profesor.	
NOTA FINAL					

Tabla 32. Rúbrica para la evaluación del trabajo realizado con el *WebQuest* (Martínez, 2021).

RÚBRICA WEBQUEST						
Criterios	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	NOTA
Esquema	El esquema es muy preciso y reproduce fielmente la situación planteada por el problema	El esquema es preciso y da una idea clara de lo que plantea el problema	El esquema ofrece una idea más o menos clara de lo que se plantea pero es poco preciso	El esquema es erróneo y no puede ser de ayuda en la resolución del problema	25%	
Proceso de resolución y solución final	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, de forma ordenada para llegar a la solución correcta y a su interpretación	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, y llega a la solución correcta y a su interpretación, pero no lo hace de forma ordenada	Aplica los cálculos de forma correcta sin cometer errores aritméticos ni algebraicos ayudándose, si es necesario, de fórmulas vistas en clase, pero no interpreta el resultado obtenido relacionándolo con la solución correcta	No aplica los cálculos de forma correcta ya que comete algún error aritmético o algebraico o la fórmula o fórmulas que utiliza no es correcta	25%	
Búsqueda de la información y exposición oral	Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado de manera clara, rigurosa y coherente respecto a los datos obtenidos	Realiza valoraciones y emite juicios sobre la información obtenida.	Realiza alguna interpretación sobre la información obtenida.	No es capaz de realizar ninguna interpretación o realiza alguna con ayuda del docente u otro compañero/a	25%	
Trabajo en equipo y participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo	No forma parte o forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente	25%	
NOTA FINAL						

Tabla 33. Rúbrica para la evaluación de la actividad fuera del aula (elaboración propia).

RÚBRICA ACTIVIDAD FUERA DEL AULA					
Criterios (ponderación)	Excelente (10)	Bien (7-9)	Mejorable (5-6)	Insatisfactorio (1-4)	NOTA
Trabajo en equipo y participación (60%)	Toma un papel activo en el grupo en los procesos de toma de decisiones y propuestas de estrategias de resolución	Forma parte de las dinámicas de grupo, realizando propuestas y participando en la toma de algunas decisiones	Participa en las dinámicas de grupo realizando algunas propuestas	No forma parte de las dinámicas de grupo o lo hace por insistencia del docente	
Estrategias de resolución y producto final (40%)	Interpreta las matemáticas que son necesarias para la resolución de la actividad, establece una estrategia de resolución de forma ordenada y la ejecuta realizando los cálculos necesarios de forma correcta, interpretando los resultados obtenidos	Establece una o varias estrategias de resolución para comprobar cuál es la más adecuada y la ejecuta realizando los cálculos necesarios de forma correcta y ordenada, interpretando los resultados obtenidos	Establece estrategias de resolución de la actividad sin mucha precisión, realizando cálculos correctos pero de forma desordenada y sin una interpretación completa de resultados	El docente le indica al alumno los pasos a seguir y este solo se limita a hacer cálculos, sin haber tomado la iniciativa de establecer una estrategia de resolución y sin existir interpretación alguna de los resultados	
NOTA FINAL					

ANEXO IV. ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas (RD 1105/2014). 34

Tabla 2. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO. Bloque 3: Geometría (RD 1105/2014). 37

Tabla 3. Descriptores más relevantes en el desarrollo de la competencia matemática..... 41

Tabla 4. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del bloque 1, de MAC, 4º de ESO.	42
Tabla 5. Competencias clave asignadas a los criterios de evaluación del bloque 3 de MAC, 4º de ESO.	44
Tabla 6. Clasificación de actividades del libro de texto de Anaya (Jurado, 2019) (elaboración propia).....	56
Tabla 7. Clasificación de actividades del libro de texto de SM (Jurado, 2019) (elaboración propia).....	56
Tabla 8. Comparativa entre los contenidos de los libros de texto y los establecidos según el RD 1105/2014 para el currículum (Martínez, 2021) (elaboración propia).....	58
Tabla 9. Contenidos del bloque 1 de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, según el RD1105/2014 (elaboración propia).	73
Tabla 10. Contenidos del bloque 3 de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, según el RD1105/2014 (elaboración propia).	74
Tabla 11. Temporalización de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 4º de ESO (elaboración propia).....	79
Tabla 12. Desarrollo de la sesión 1 (elaboración propia).....	80
Tabla 13. Desarrollo de la sesión 2 (elaboración propia).....	81
Tabla 14. Desarrollo de la sesión 3 (elaboración propia).....	82
Tabla 15. Desarrollo de la sesión 4 (elaboración propia).....	83
Tabla 16 Desarrollo de la sesión 5 (elaboración propia).....	84
Tabla 17. Desarrollo de la sesión 6 (elaboración propia).....	84
Tabla 18. Desarrollo de la sesión 7 (elaboración propia).....	85
Tabla 19. Desarrollo de la sesión 8 (elaboración propia).....	85
Tabla 20. Desarrollo de la sesión 9 (elaboración propia).....	86
Tabla 21. Desarrollo de la sesión 10 (elaboración propia).....	87
Tabla 22. Desarrollo de la sesión 11 (elaboración propia).....	87

Tabla 23. Desarrollo de la sesión 12 (elaboración propia).....	88
Tabla 24. Desarrollo de la sesión 13 (elaboración propia).....	88
Tabla 25. Criterios de calificación, con su respectiva ponderación, de la unidad didáctica (elaboración propia).....	89
Tabla 26. Ejercicio 3.1. Razón trigonométrica seno (elaboración propia).	102
Tabla 27. Ejercicio 3.1. Razón trigonométrica coseno (elaboración propia).	102
Tabla 28. Ejercicio 3.1. Razón trigonométrica tangente (elaboración propia).	102
Tabla 29. Rúbrica para la evaluación del cuaderno de clase (IES Llano de la Viña, 2021; elaboración propia).....	116
Tabla 30. Rúbrica para la evaluación de la prueba escrita (IES Llano de la Viña, 2021; elaboración propia).....	117
Tabla 31. Rúbrica para la evaluación de la actitud del alumno/a (IES Llano de la Viña, 2021; elaboración propia).....	118
Tabla 32. Rúbrica para la evaluación del trabajo realizado con el <i>WebQuest</i> (Martínez, 2021).	119
Tabla 33. Rúbrica para la evaluación de la actividad fuera del aula (elaboración propia).	120
Tabla 34. Criterios de evaluación, con sus correspondientes estándares de aprendizaje y competencias clave asociadas, para la evaluación del bloque 1 en la unidad didáctica (idea basada en Martínez, 2021) (elaboración propia).....	126
Tabla 35. Criterios de evaluación, con sus correspondientes estándares de aprendizaje y competencias clave asociadas, para la evaluación del bloque 3 en la unidad didáctica (idea basada en Martínez, 2021) (elaboración propia).....	129

ANEXO V. ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Proceso de transposición didáctica (Bosch <i>et al.</i> , 2006) (elaboración propia).....	4
Figura 2. Triángulos rectángulos semejantes (elaboración propia).....	9
Figura 3. Ángulos complementarios y $+90^\circ$ (elaboración propia).....	11

Figura 4. Esquema de ángulos suplementarios, ángulo $+180^\circ$ y ángulo opuesto (elaboración propia).....	12
Figura 5. Esquema empleado para el desarrollo de relaciones trigonométricas (elaboración propia).....	13
Figura 6. Esquema utilizado para demostración del Teorema del seno (elaboración propia). ...	18
Figura 7. Triángulo ABC para demostración del teorema del coseno (elaboración propia).....	21
Figura 8. Esquema empleado para el desarrollo del Teorema de las tangentes (elaboración propia).....	22
Figura 9. Esquema para demostración de la Fórmula de Herón (elaboración propia).....	24
Figura 10. Esquema para demostración de las fórmulas de Briggs (elaboración propia).	26
Figura 11. Esquema de medición de la altura de una colina (elaboración propia).....	27
Figura 12. Medida de distancia de dos puntos inaccesibles (elaboración propia).	28
Figura 13. Esquema de segmento y sector circulares (elaboración propia).	29
Figura 14. Competencias clave en la LOMCE, consideradas por la Unión Europea (Ministerio de Educación y Formación Profesional).....	39
Figura 15. Portada de los libros de texto de las editoriales Anaya y SM (Colera <i>et al.</i> , 2016; Alcaide <i>et al.</i> , 2017).....	45
Figura 16. Ejemplo de página de contenidos y ejercicios tipo “Piensa y practica” de la unidad 7 del libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	46
Figura 17. Ejercicios tipo “Aplica lo aprendido” y “Resuelve problemas” propuestos al final de la unidad del libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	47
Figura 18. Definición de razones trigonométricas según el libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	48
Figura 19. Definición de razón trigonométrica a partir de la circunferencia goniométrica según el libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	49
Figura 20. Circunferencia goniométrica para las razones seno y coseno y signos según el cuadrante (arriba); circunferencia la tangente y signos según el cuadrante (abajo). Libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	50

Figura 21. Ejemplos de problemas de trigonometría contextualizados en la vida real según el libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	51
Figura 22. Recursos TIC (web y <i>GeoGebra</i>) para profundizar y ampliar conocimientos. Libro de texto de Anaya (Colera <i>et al.</i> , 2016).	52
Figura 23. Ejemplo de página de contenidos y actividades para repasarlos del libro de texto de SM (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	53
Figura 24. “Ejercicios para practicar” y “Problemas para resolver” al final de la unidad del libro de texto de SM (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	54
Figura 25. Definición geométrica de las razones trigonométricas y sus inversas según la editorial SM (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	55
Figura 26. Definición analítica de las razones trigonométricas según SM (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	55
Figura 27. Recursos TIC para profundizar y ampliar conocimientos. Libro de texto SM (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	55
Figura 28. Interpretación de razón trigonométrica como cociente (entendido como división) de los lados de un triángulo rectángulo (Martínez-Fernández <i>et al.</i> , 2014).	62
Figura 29. Respuestas con el valor del ángulo (Martínez-Fernández <i>et al.</i> , 2014).	62
Figura 30. Conflicto de interpretaciones geométricas y analíticas del concepto de razón trigonométrica (Martínez-Fernández <i>et al.</i> , 2014).	62
Figura 31. Representación del coseno identificándolo directamente con el ángulo interior del triángulo rectángulo (Fernández-Plaza <i>et al.</i> , 2016).	63
Figura 32. Representación del seno y coseno como distancias de las coordenadas de un punto en la circunferencia goniométrica a sus respectivos ejes (Fernández-Plaza <i>et al.</i> , 2016).	63
Figura 33. Representación del seno y coseno como cociente de los lados de un triángulo rectángulo (Fernández-Plaza <i>et al.</i> , 2016).	63
Figura 34. Construcción analítica del concepto de razón trigonométrica a través de la circunferencia goniométrica (<i>Cabri</i>) (Fiallo, 2010).	65
Figura 35. Clasificación de triángulos (Liveworksheets).	100
Figura 36. Cálculo del ángulo restante en un triángulo (Liveworksheets).	101
Figura 37. Indica el valor del ángulo restante (Thatquiz).	101

Figura 38. Triángulos semejantes (Thatquiz).	102
Figura 39. Esquema del Ejercicio 3.2 (Colera <i>et al.</i> , 2016).	103
Figura 40. Esquema del triángulo a resolver del Ejercicio 3.4 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	103
Figura 41. Plantilla del Ejercicio 4.1 (Jurado, 2019; Colera <i>et al.</i> , 2016).	104
Figura 42. Esquema del Problema 7.1 (Thatquiz).	106
Figura 43. Esquema del Problema 7.3 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	106
Figura 44. Esquema del Problema 7.4 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	107
Figura 45. Esquema del Problema 7.5 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	107
Figura 46. Triángulos oblicuángulos del Ejercicio 8.1 (Colera <i>et al.</i> , 2016).	107
Figura 47. Trapecio del Ejercicio 8.2 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	108
Figura 48. Cuerpo geométrico del Ejercicio 8.3 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	108
Figura 49. Esquema del montaje de la antena del Problema 8.4 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	108
Figura 50. Esquema del Problema 8.5 (Colera <i>et al.</i> , 2016).	109
Figura 51. Transportador de ángulos con la app “Clinómetro” (El Baúl de las Mates).	111
Figura 52. Dibujo del ángulo con la app “Clinómetro” (El Baúl de las Mates).	111
Figura 53. Triángulos del Ejercicio 12.1 (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	113
Figura 54. Esquema del Problema 12.3 (Colera <i>et al.</i> , 2016).	114
Figura 55. Esquema del Ejercicio 2 de examen (Colera <i>et al.</i> , 2016).	114
Figura 56. Dibujo del Problema 5 de examen (Alcaide <i>et al.</i> , 2017).	115
Figura 57. Dibujo del Problema 6 de examen (Colera <i>et al.</i> , 2016).	115

ANEXO VI. CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE PARA LA EVALUACIÓN DE LA UD

Tabla 34. Criterios de evaluación, con sus correspondientes estándares de aprendizaje y competencias clave asociadas, para la evaluación del bloque 1 en la unidad didáctica (idea basada en Martínez, 2021) (elaboración propia).

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
C.E.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. CCL, CMCT.	E.A.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
C.E.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. CMCT, CAA.	E.A.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
C.E.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. CCL, CMCT, CAA.	E.A.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
C.E.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. CMCT, CAA.	E.A.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
C.E.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. CCL, CMCT, CAA, SIEP.	E.A.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.
C.E.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. CMCT, CAA, CSC, SIEP.	E.A.1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
C.E.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana. CMCT,	E.A.1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
	E.A.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas

CAA. C.E.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. CMCT. C.E.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. CMCT, CAA, SIEP. C.E.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. CMCT, CAA, SIEP. C.E.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos. CMCT, CD, CAA. C.E.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos. CCL, CMCT, CD, CAA.	utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. E.A.1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. E.A.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. E.A.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. E.A.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. E.A.1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. E.A.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. E.A.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. E.A.1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. E.A.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. E.A.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. E.A.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. E.A.1.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras
---	---

	similares. E.A.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. E.A.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. E.A.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. E.A.1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. E.A.1.12.1. Elabora documentos digitales propios como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. E.A.1.12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. E.A.1.12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
--	---

Tabla 35. Criterios de evaluación, con sus correspondientes estándares de aprendizaje y competencias clave asociadas, para la evaluación del bloque 3 en la unidad didáctica (idea basada en Martínez, 2021) (elaboración propia).

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría	
C.E.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. CMCT, CAA. C.E.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. CMCT, CEC, CAA.	E.A.3.1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. E.A.3.2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. E.A.3.2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. E.A.3.2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. E.A.3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. E.A.3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. E.A.3.3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. E.A.3.3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. E.A.3.3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. E.A.3.3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.