



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

UNIDAD DIDÁCTICA: VECTORES Y RECTAS

Alumno/a: Martínez Martínez, Sebastián

Tutor: Prof. D. Antonio Moreno Verdejo
Dpto.: Didáctica de las Matemáticas (Universidad
de Granada)

Junio, 2020



Resumen:

El presente Trabajo Fin de Máster trata del diseño de la unidad didáctica Vectores y Rectas, encuadrada en el curso de cuarto de ESO. De manera previa al diseño de la unidad, se ha realizado un estudio teórico sobre la fundamentación del contenido matemático seleccionado, basado en el análisis didáctico propuesto por Rico y Moreno (2016). Este análisis didáctico se desarrolla en cinco apartados: Marco curricular, Fundamentación epistemológica, Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo, Análisis Instructivo y Análisis Evaluativo. Con esta base, se proponen una serie de objetivos y contenidos a alcanzar, y que servirán de referencia para la organización de las sesiones previstas. Cada sesión dispondrá de un plan de clase en el que se muestra su desarrollo y las tareas a realizar.

Palabras clave:

Geometría analítica, Vectores, Rectas, Didáctica

Abstract:

The present Master's Final Project deals with the design of the teaching unit Vectors and Lines, framed in the fourth year of ESO. Before that the design of the unit, a theoretical study was carried out on the foundation of the selected mathematical content, based on the didactic analysis proposed by Rico and Moreno (2016). This didactic analysis is developed in five sections: Curricular framework, Epistemological foundation, Content Analysis, Cognitive Analysis, Instructional Analysis and Evaluative Analysis. On this basis, a series of objectives and contents to be achieved are proposed, which will serve as a reference for the organization of the planned sessions. Each session will have a class plan that shows its development and the tasks to be carried out.

Keywords:

Analytical geometry, Vectors, Lines, Didactic



A mi profesor, Pablo Fernando
Gutiérrez Hernández, por transmitirme
el amor a la profesión docente y brindarme
su amistad. Descansa en Paz, amigo.



ÍNDICE DE CONTENIDOS:

1. INTRODUCCIÓN	4
2. FUNDAMENTACIÓN	5
2.1. Marco curricular	5
2.2. Análisis de contenido	7
2.2.1. Desarrollo histórico.....	7
2.2.2. Fundamentación epistemológica.....	10
2.2.2.1 El espacio afín	10
2.2.2.2 Sistemas de referencia afín	11
2.2.2.3 Ecuaciones de la recta en el plano y en el espacio	12
2.2.2.4. Relaciones afines	15
2.2.3. Contenido matemático escolar	18
2.2.3.1. Aspectos formales y estructurales	18
2.2.3.2. Sistemas de representación	21
2.2.3.3. Sentidos y modos de uso	24
2.3. Análisis cognitivo	25
2.3.1. Objetivos	26
2.3.2. Competencias	27
2.3.3. Relación Objetivos-Competencias matemáticas	28
2.3.4. Limitaciones de aprendizaje	29
2.4. Análisis de Instrucción	31
2.4.1. Tareas	31
2.4.2. Materiales y recursos	32
2.4.3. Organización del aula	32
2.5. Análisis evaluativo	32
2.5.1 Evaluación de los aprendizajes	32
2.5.2 Fases de evaluación de la unidad didáctica	33
3. UNIDAD DIDÁCTICA	35
3.1. Distribución de sesiones	37
3.2. Organización de las sesiones	39
3.3. Desarrollo de tareas	45
3.4. Análisis de tareas	65
3.5. Cuadro evaluación unidad didáctica	72
4. CONCLUSIONES	73
5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
6. ANEXOS	77



1. INTRODUCCIÓN.

La importancia de las matemáticas en la sociedad actual viene desarrollando un aumento considerable dadas sus múltiples aplicaciones. Vivimos en un mundo en el que el análisis de datos, la información representada en tablas o gráficas, y las estadísticas de todo tipo son una constante diaria. Somos una sociedad numérica por necesidad y que, sin embargo, adolece de lo que el famoso matemático Paulos (1998) denomina anumerismo o incapacidad de manejar cómodamente conceptos matemáticos fundamentales.

El presente trabajo se encuadra dentro del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de matemáticas. Un máster impartido por la Universidad de Jaén que pretende dotar al futuro profesorado de conocimientos psicopedagógicos y didácticos para afrontar la práctica docente.

El objetivo del trabajo es la elaboración de una unidad didáctica sobre la enseñanza de ciertos conocimientos matemáticos, en concreto, aquellos relacionados con Vectores y Rectas. Se planificará su implementación en el aula dentro del marco de una programación para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º ESO. Para ello, y de manera previa, se realizará un estudio sobre la fundamentación del tema elegido.

El estudio teórico previo sobre la fundamentación del contenido matemático seleccionado, se realizará en base al análisis didáctico propuesto por Rico y Moreno (2016). Se desarrollará en cinco apartados: Marco curricular, Fundamentación epistemológica, Análisis de contenido, Análisis cognitivo, Análisis Instructivo y Análisis Evaluativo.

Con este punto de partida teórico, se podrá avanzar en el desarrollo de la unidad didáctica propuesta. Partiendo de los conocimientos previos, se pretende que el alumnado adquiera una base sólida en lo que a geometría analítica se refiere, que les será útil tanto en los cursos posteriores de bachillerato como en la educación no obligatoria.



2. FUNDAMENTACIÓN.

2.1. Marco curricular.

A fin de encuadrar legalmente la Unidad Didáctica que se desarrollará en apartados posteriores, es necesario realizar un recorrido por la legislación vigente, en la que se recogen los contenidos que en este trabajo se tratan: Vectores y Rectas.

Antes de entrar en los contenidos concretos, debemos centrarnos en el currículo, que queda definido en la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, en adelante LOMCE, y concretamente en el Artículo 6 del Capítulo III: Currículo y distribución de competencias, como: “la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas”. Además, esta ley determina que el currículo está integrado por los siguientes elementos: Los objetivos, las competencias o capacidades, los contenidos o conjuntos de conocimientos, la metodología didáctica, los estándares y resultados de aprendizaje y los criterios de evaluación. Estos elementos vienen definidos en el artículo 2 del Capítulo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Debido a la extensión, estas definiciones se han incluido en el Anexo I: Partes que componen el currículo. Podemos decir que el currículo será nuestro soporte para conocer qué debemos enseñar (contenidos), cómo debemos enseñar (competencias y metodología), cuándo debemos enseñar (clasificación por etapas/cursos), qué se espera que el alumnado alcance (objetivos), qué se espera que los estudiantes sean capaces de hacer (estándares de aprendizaje) y qué debemos valorar (criterios de evaluación).

Aunque la unidad didáctica que se va a desarrollar estará encuadrada en el curso 4º de Educación Secundaria Obligatoria, en la materia Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, no podemos desmarcarnos del contexto curricular en que nuestra unidad estará inscrita. Por ello, haremos un análisis del currículo académico que desarrolla el Real Decreto 1105/2014, desde el primer curso de la ESO hasta Segundo de Bachillerato, detectando y señalando los bloques en los que se trabaja sobre nuestro tema, a fin de detectar los conocimientos previos que el alumnado debe haber desarrollado antes de enfrentarse a nuestra unidad didáctica, así como para determinar momentos posteriores en los que los conocimientos adquiridos en nuestra unidad didáctica le serán aplicables. En el curso objeto de nuestra unidad de didáctica, incluiremos los estándares de aprendizaje.

- Matemáticas. 1º y 2º de ESO:

Bloque 3 – Geometría:

Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.

Bloque 4 – Funciones:



Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.

- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º de ESO:

Bloque 3 – Geometría:

Geometría del plano. Expresiones de la ecuación de la recta.

- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de ESO:

Bloque 3 - Geometría:

Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Expresiones de la ecuación de la recta.

Estándares de aprendizaje: 3.1. Establece correspondencias analíticas entre coordenadas de puntos y vectores., 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector., 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla., y 3.4. Calcula la ecuación de la recta de varias formas, en función de los datos conocidos.

- Matemáticas I. 1º Bachillerato:

Bloque 3 – Análisis:

Funciones reales de variable real. Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.

Bloque 4 – Geometría:

Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas. Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores. Bases ortogonales y ortonormales. Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. Lugares geométricos del plano.

- Matemáticas II. 2º Bachillerato:

Bloque 4 – Geometría:

Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, escalar y mixto. Significado geométrico. Ecuación de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia,



paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

Además de los bloques específicos citados, es importante señalar la presencia sistemática que deberá tener el Bloque 1 – Procesos, métodos y actitudes en matemáticas en cada uno de los cursos, debiendo estar aparecer de manera transversal al resto de bloques, por lo que será necesario tenerlo en cuenta para el desarrollo de nuestra unidad didáctica. Tal y como establece el RD 1105/2014, en este bloque “se articulan procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático” (págs. 390 y 408).

2.2. Análisis de contenido.

Se va a abordar el análisis de contenido del tema propuesto desde tres apartados que considero de suma importancia como son, en primer lugar, realizar un recorrido histórico sobre el devenir del saber matemático que vamos a explorar. En segundo lugar, la fundamentación formal en que sustentan los conocimientos que queremos enseñar al alumnado y por último el contenido matemático escolar. Esta última dimensión, como nos señala Flores (2016), se concretará en tres puntos, a saber: Aspectos formales y estructurales, aspectos representacionales y, por último, sentidos y modos de uso.

2.2.1. Desarrollo histórico.

La Geometría Analítica es la parte de las matemáticas en la cual los símbolos y métodos algebraicos son utilizados para representar y resolver problemas en geometría, mediante el uso de sistemas de coordenadas. Se deben, por tanto, buscar sus orígenes en las raíces históricas de la Geometría y del Álgebra (González, 2004).

Aunque es considerado que la Geometría Analítica surge tal y como la conocemos en siglo XVII gracias al desarrollo que realizaron los matemáticos René Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 – 1665), es preciso considerar algunos antecedentes dignos de mención.

Se puede concluir que el inicio del estudio de la geometría analítica con un carácter científico se encuadra en los trabajos de los matemáticos de la antigua Grecia, concretamente en la escuela Pitagórica, donde se estudió la naturaleza y razón de ser de la Geometría que venían empleando egipcios y del Álgebra desarrollada por las civilizaciones de la antigua Mesopotamia. A los primeros únicamente les interesaba la aplicación de los principios, así como la resolución de problemas de la vida diaria. Por su parte en Mesopotamia encontraron limitaciones al carecer de cantidades negativas, lo que impidió hacer generalizaciones, por lo que no podría considerarse a su matemática como una Ciencia (Dutari y Batista, 1995) (Colombo, Carolina, y Rita, 2016).



Los griegos, concretamente a través del *Libro II de Los Elementos* de Euclides, transformaron el Álgebra oriental que habían heredado, en un Álgebra Geométrica, denominación que fue acuñada por el historiador H.G. Zeuthen hacia 1886. Ésta trata de geometrizar conceptos algebraicos de manera que se sustituyen los números por segmentos de recta y se opera con ellos realizando construcciones geométricas, por ejemplo:

- La suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo.
- La diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo.

Con este Álgebra Geométrica se pueden interpretar ciertas identidades de una forma gráfica e intuitiva: el cuadrado de la suma (González, 2004).

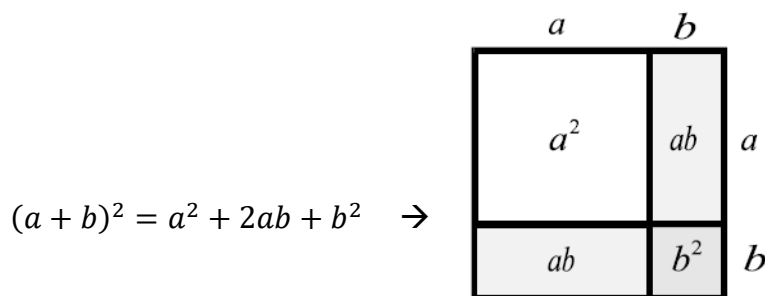


Imagen 1: modelo geométrico del cuadrado de la suma. Fuente: Dutari y Batista (1995, p. 11)

Otra figura que cabría reseñar es Apolonio de Pergamo (247-205 a.C.), quién a través de su obra *Cónicas* complementó el citado anteriormente *Los Elementos* de Euclides. Tal y como nos señala Nápoles (2009), el aporte principal de Apolonio fue la utilización del Álgebra Geométrica, realizando un estudio profundo y complejo del tema. No utiliza ecuaciones ni fórmulas y únicamente empleando equivalentes geométricos saca adelante su proyecto con un método que se aproximaría a la Geometría Analítica. Emplea un incipiente sistema de coordenadas que depende de cada curva y con el que refleja puntos privilegiados

La primera representación gráfica se atribuye a Nicolás de Oresme (1323-1382), quien en el s. XIV representa la variación de cualidades en dos ejes perpendiculares que denominó longitud y latitud, pues se basaba en la terminología de los mapas marinos. La cualidad que representó se trata de la variación de la velocidad de un movimiento uniformemente acelerado, siendo los ejes ortogonales el tiempo y la velocidad. Oresme introduce, al menos de manera implícita cuatro ideas innovadoras: Medida de variables físicas por medio de segmentos, relación funcional entre variables, aproximación al uso de coordenadas mediante representación gráfica y una especie de integración para calcular la distancia como área bajo el gráfico velocidad-tiempo (Gavilán y Barroso (1995), González (2004)).

En el Remamamiento se pretende recuperar el legado griego clásico, se acomete la restauración de la tradición matemática basada en el Método de Análisis, raíz de lo que será



la incipiente Álgebra simbólica. Se puede determinar como referente inmediato de la geometría analítica a Vieta (1540-1603) quien publica *Introducción al arte analítico* en 1591. En ella utiliza el álgebra para dar una visión de la geometría clásica, no se centra en casos particulares y específicos, sino que intenta aportar generalizaciones introduciendo parámetros variables (Ayerbe (2017), González (2004)).

René Descartes (1596 - 1650), en su *Discurso del método* incluyó un apéndice llamado *La Geometría*. Dos de los objetivos de Descartes fueron, por un lado, liberar a la Geometría en medida de lo posible del uso de figuras, a través de los métodos algebraicos y, por otro lado, dotar de un significado a las operaciones del álgebra a través de su interpretación geométrica. (Dutari y Batista, 1995).

“Hasta ese momento, la geometría dominante era la euclidiana, que usaba la regla y el compás para resolver esos problemas. Y ese método de Descartes funcionó y resultó más práctico gracias que la geometría analítica representa el conjunto de soluciones de una ecuación de dos variables, x e y , mediante una línea en el plano. Por ejemplo, una ecuación del tipo $ax + by = c$ —como por ejemplo $2x + 3y = 0$ —, que es una ecuación polinómica de grado 1, tiene como conjunto de soluciones una línea recta, que surge de unir todos los puntos con coordenadas x e y cuyos valores satisfacen esa igualdad.” (García y Arias, 2018)

Pierre de Fermat (1601-1665), bajo la influencia de Vieta, y de manera complementaria a Descartes estudió las obras de Apolonio, desarrollando las ideas que hoy en día forman parte de la Geometría Analítica. Estos trabajos fueron incluidos en *Introducción a los lugares planos y sólidos* que en 1679 publicó su hijo. Esa publicación a diferencia de *La Geometría* de Descartes “contenía una introducción a la geometría analítica y sus aplicaciones mucho más pedagógica y sencilla de seguir” (Ayerbe, 2017, p. 104).

Como síntesis de estos dos autores cabe realizar algunas comparaciones: Mientras que Descartes da prioridad al Álgebra, Fermat prioriza el uso de la Geometría. El primero realiza una obra más extensa, dificultosa y compleja, mientras el segundo es mucho más conciso, didáctico y sistemático. Descartes estudiaba las ecuaciones mediante curvas, mientras que Fermat lo hacía a la inversa estudiando curvas a través de sus ecuaciones (González, 2004).

Los trabajos de Descartes y Fermat supusieron un gran avance en la Geometría Analítica, y sirvieron de base para otros matemáticos posteriores como Van Schooten, que realizó el primer texto con Geometría Analítica en tres dimensiones, o Euler, que desarrolló la Ecuación de la recta, estudió los tres planos de coordenadas y de los ocho octantes. Sin embargo, no fue hasta que Monge y sus discípulos dieron un nuevo enfoque cuando esta disciplina dejó ver su eficacia, adoptando una forma similar a como hoy la entendemos. Entre



otros avances, Monge desarrolló sistemáticamente la Geometría Analítica tridimensional, las posiciones relativas de rectas y planos, distancias entre elementos, etc. (González, 2004).

2.2.2. Fundamentación epistemológica.

De cara a fundamentar epistemológicamente el tema de vectores y rectas que se desarrollará en nuestra unidad didáctica, es importante fijar algunas fundamentaciones teóricas sobre la geometría en el espacio. Para ello definiremos qué es un espacio afín, qué son y qué nos permiten realizar los sistemas de referencia afines, cuáles son las distintas ecuaciones mediante las que se pueden expresar una recta y un plano, y qué relaciones afines existen entre elementos: recta-recta, recta-plano y plano-plano.

2.2.2.1 El espacio afín.

- Definición: Diremos que un espacio afín es un par formado por un conjunto cualquiera E cuyos elementos llamaremos puntos y un espacio vectorial V de direcciones, relacionados mediante una aplicación φ de tal forma que cada par de puntos p, q de E determinan un único vector $\vec{v}$ de V .

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\rightarrow V \\ (p, q) &\mapsto \varphi(p, q) = \vec{v},\end{aligned}$$

Se deben verificar las siguientes propiedades:

- $\varphi(p, q) + \varphi(q, r) = \varphi(p, r), \forall p, q, r \in E$
- Dado cualquier punto $p \in E$ y cualquier vector $\vec{v} \in V$ existe un único punto $q \in E$ tal que $\varphi(p, q) = \vec{v}$, por lo que es la aplicación es biyectiva.

Se define la dimensión del espacio afín E como la dimensión del espacio vectorial V , o lo que es lo mismo:

$$\dim(E) = \dim V$$

A priori, el espacio vectorial V puede ser cualquiera. Sin embargo, es usual considerar $V = \mathbb{R}^n$. En ese caso, habremos de considerar que el espacio afín E es de dimensión n y lo denotaremos por $\mathbb{E}^n$,

$$\dim(\mathbb{E}^n) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Aunque en lo sucesivo nos centraremos en el espacio afín $\mathbb{E}^3$, todo lo desarrollado serviría para un espacio afín E cualquiera sobre un espacio V arbitrario.

2.2.2.2 Sistemas de referencia afín.

Se puede entender el concepto de sistema de referencia como la extensión a $\mathbb{E}^3$ del concepto de base en el espacio vectorial V^3



- Definición: Llamaremos sistema de referencia afín en el espacio a cualquier subconjunto $S = \{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, donde O es un punto fijo del espacio y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de V^3 .

Al punto O se le llama origen del sistema de referencia y a las rectas que pasan por ese origen y que contienen a los representantes de los vectores de la base, ejes del sistema de referencia o ejes de coordenadas.

Coordenadas respecto de un sistema de referencia.

La importancia de establecer un sistema de referencia, S , radica en que dado un punto $P \in E^3$ se puede identificar con el vector $\overrightarrow{OP} \in V^3$, que podrá expresarse en la forma

$$\overrightarrow{OP} = p_1 \vec{v}_1 + p_2 \vec{v}_2 + p_3 \vec{v}_3$$

A la terna de números reales (p_1, p_2, p_3) , la llamaremos coordenadas del punto P con respecto del sistema de referencia S .

Cuando sea necesario conocer las coordenadas de un vector libre $\overrightarrow{PQ}$ respecto a la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, dados los puntos P y Q con coordenadas (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3) respectivamente, bastará con observar que

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ},$$

Con lo que podremos concluir que las coordenadas de $\overrightarrow{PQ}$ serán

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

En otros casos necesitaremos hallar el punto medio M de un segmento $\overrightarrow{PQ}$

Como $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$, llamando (m_1, m_2, m_3) a las coordenadas del punto M , tendremos:

$(m_1 - p_1, m_2 - p_2, m_3 - p_3) = (q_1 - m_1, q_2 - m_2, q_3 - m_3)$, de donde:

$$m_1 = \frac{p_1 + q_1}{2}, m_2 = \frac{p_2 + q_2}{2}, m_3 = \frac{p_3 + q_3}{2}$$

Cambio de sistema de referencia.

Como es lógico, dependiendo del sistema de referencia utilizado las coordenadas de un punto P variarán. Por ello, necesitamos conocer la relación entre las coordenadas de un punto en dos sistemas distintos.

Consideraremos dos sistemas de referencia $S = \{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y $S' = \{O', \vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3\}$ en los que las coordenadas de un mismo punto P son respectivamente (p_1, p_2, p_3) y (p'_1, p'_2, p'_3) .

Suponemos las coordenadas del punto O' en S serán (a_1, a_2, a_3) y las relaciones entre los vectores de una y otra base:



$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = a_{11}\vec{v}_1, a_{12}\vec{v}_2, a_{13}\vec{v}_3 \\ \vec{v}'_2 = a_{21}\vec{v}_1, a_{22}\vec{v}_2, a_{23}\vec{v}_3 \\ \vec{v}'_3 = a_{31}\vec{v}_1, a_{32}\vec{v}_2, a_{33}\vec{v}_3 \end{cases}$$

Como se verifica que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'P}$ tendremos:

$$p_1\vec{v}_1 + p_2\vec{v}_2 + p_3\vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + p'_1\vec{v}'_1 + p'_2\vec{v}'_2 + p'_3\vec{v}'_3$$

De donde sustituyendo los $\vec{v}'_i$ en función de los $\vec{v}_i$, obtendremos las Ecuaciones del cambio de coordenadas, que relacionarán las coordenadas del punto P en ambos sistemas:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 + a_{11}p'_1 + a_{21}p'_2 + a_{31}p'_3 \\ p_2 &= a_2 + a_{12}p'_1 + a_{22}p'_2 + a_{32}p'_3 \\ p_3 &= a_3 + a_{13}p'_1 + a_{23}p'_2 + a_{33}p'_3 \end{aligned}$$

Podemos expresar las ecuaciones de forma matricial, y, de hecho, utilizarlas mediante esta expresión nos ayudará en los siguientes apartados:

$$P = P'A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p'_1 & p'_2 & p'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.2.2.3 Ecuaciones de la recta en el plano y en el espacio.

Antes de abordar las ecuaciones de recta y plano, es preciso definir el concepto de vector dirección de una recta.

- **Definición:** Llamaremos vector dirección de r al vector libre $\overrightarrow{PQ}$, formado a partir de los puntos P y Q pertenecientes a la recta r . Dicho de otra forma, podemos llamar vector dirección de una recta r a cualquier vector libre no nulo, $\vec{v}$, del que exista una representante contenido en ella.

En consecuencia, podemos afirmar que: Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores dirección de una misma recta $r \Leftrightarrow \exists \lambda, \lambda \in \mathbb{R} : \vec{w} = \lambda\vec{v}$

Ecuación de una recta.

- **Definición:** llamaremos ecuación de una recta a una ecuación que se satisfaga por todos los puntos que la forman, y sólo por ellos.

Partimos de una recta r , cuya ecuación queremos obtener, que pasa por el punto P , conocido, y que tiene a $\vec{v}$, también conocido, como vector de dirección.

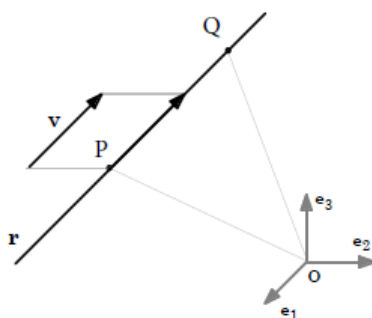


Imagen 2: representación espacial de recta r . Fuente: Corcobado y Marijuán (1990, p. 83)

Un punto Q pertenecerá a la recta r si y sólo si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección, o lo que es lo mismo:

$$Q \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{v}, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}$$

Cualquier punto de la recta será de la forma: $Q = P + \lambda \vec{v}$, por lo que si llamamos $\vec{q}$ al vector de posición de Q y $\vec{p}$ al de P , se obtiene la **ecuación vectorial de la recta**:

$$\vec{q} = \vec{p} + \lambda \vec{v}$$

Para la obtención de la siguiente ecuación se fija un sistema de referencia $S = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. P es un punto dado, con coordenadas (p_1, p_2, p_3) , con respecto de S , y $\vec{v}$, es el vector de dirección cuyas coordenadas serán (v_1, v_2, v_3) con respecto a la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Si tomamos las coordenadas de un punto arbitrario Q de la recta con coordenadas (x, y, z) , la ecuación anterior se transforma en:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3 + \lambda(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3)$$

De donde resultan las **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$x = p_1 + \lambda v_1$$

$$y = p_2 + \lambda v_2$$

$$z = p_3 + \lambda v_3$$

Si despejamos λ en cada una de ellas, e igualando, y siempre y cuando todas las coordenadas v_i sean distintas de cero, obtendremos la **ecuación continua**:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

De la ecuación anterior consideramos dos igualdades

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Y operamos

$$v_2(x - p_1) = v_1(y - p_2)$$

$$v_3(x - p_1) = v_1(z - p_3)$$



$$v_2x - v_1y - v_2p_1 + v_1p_2 = 0$$

$$v_3z - v_1z - v_3p_1 + v_1p_3 = 0$$

Si llamamos por un lado: $A = v_2; B = -v_1; C = 0; D = -v_2p_1 + v_1p_2$

Y por otro: $A = 0; B = -v_1; C = v_3; D = -v_3p_1 + v_1p_3$

Nos resultan dos ecuaciones que dan lugar a las **ecuaciones cartesianas o implícitas**:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

En el caso concreto de estar en el plano, la ecuación implícita será $Ax + By + C = 0$, despejando y tendremos:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Si llamamos $m = -\frac{A}{B}$, y $n = -\frac{C}{B}$:

$$y = mx - n$$

A esta representación de la recta en el plano la llamamos **ecuación explícita**, m es la pendiente y n la ordenada en el origen. Luego la pendiente de una línea recta es el coeficiente de x en la ecuación explícita.

Ecuación del plano.

Suponemos que un plano π definido por un punto P y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, de distinta dirección, contenidos en π .

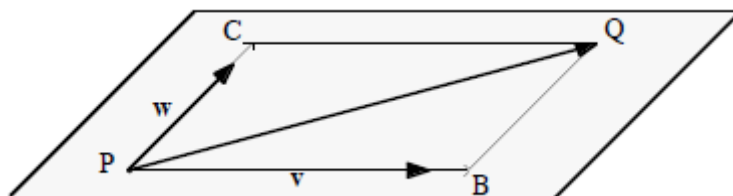


Imagen 3: representación espacial del plano π . Fuente: Corcobado y Marijuán (1990, p. 78)

Sea el plano de la figura anterior, al que llamaremos π , definido por el punto P y los vectores libres y de distinta dirección $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Un punto Q pertenecerá al plano π , si y sólo si el vector $\overrightarrow{PQ}$ puede expresarse como composición de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$Q \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \text{ para algún } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Tomando cualquier punto Q del plano π y fijando un punto de origen O de E^3 , podemos deducir que se cumple $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$, por lo que si llamamos $\vec{q}$ al vector $\overrightarrow{OQ}$ y $\vec{p}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, se obtiene la **ecuación vectorial del plano**:

$$\vec{q} = \vec{p} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$$



Si sustituimos cada vector de la ecuación anterior por sus coordenadas, $\vec{q}(x, y, z)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, y $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$, y separando cada componente obtendremos las **ecuaciones paramétricas del plano**:

$$\pi : \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores podemos también escribirlas como:

$$\begin{cases} x - p_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y - p_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z - p_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

El punto $Q(x, y, z)$ pertenecerá al plano si y solo si existen valores de λ y μ que cumplan estas igualdades. Es decir, si el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas λ y μ es compatible. Como el rango de la matriz de los coeficientes es 2, sólo será compatible si el rango de la matriz ampliada es también 2, que se cumple únicamente si su determinante es nulo:

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si desarrollamos el determinante y llamando A, B, C a los coeficientes de x, y, z respectivamente, y D al término independiente, se obtiene la **ecuación cartesiana, general o implícita**:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

2.2.2.4. Relaciones afines.

Incidencia.

Hablamos de que un punto es incidente con la recta r o el plano π cuando pertenece a la recta o al plano, respectivamente. En el caso de una recta, ésta será incidente a un plano cuando pertenezca a este.

Punto-recta: La única condición necesaria y suficiente para que un punto sea incidente con una recta es que las coordenadas de dicho punto satisfagan la ecuación de la recta en cuestión. En el espacio tres puntos $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$, $T(t_1, t_2, t_3)$, estarán alineados si se cumple:

$$\frac{t_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{t_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{t_3 - p_3}{q_3 - p_3}$$

Punto-plano: La única condición necesaria y suficiente para que un punto sea incidente con una recta es que las coordenadas de dicho punto satisfagan la ecuación del plano en cuestión.



Tres puntos cualesquiera definen un plano, por lo que para que un cuarto sea incidente bastará con comprobar que sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano en forma de determinante. Para que cuatro puntos $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$, $T(t_1, t_2, t_3)$, $S(s_1, s_2, s_3)$ sean coplanarios bastará que se cumpla:

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ t_1 - p_1 & t_2 - p_2 & t_3 - p_3 \\ s_1 - p_1 & s_2 - p_2 & s_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Recta-plano: una recta será incidente a un plano cuando todos los puntos de la recta satisfagan la ecuación del plano. Sin embargo, bastará realizar la comprobación con dos de los puntos de la recta (utilizando el determinante anterior) para confirmar la incidencia.

Posición relativa de dos rectas en el espacio.

Partimos de dos rectas r y s . La recta r queda determinada por el punto P y el vector $\vec{v}$, mientras que la recta s la determinarán Q y el vector $\vec{w}$.

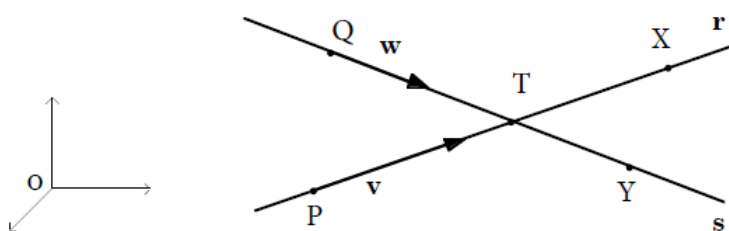


Imagen 4: representación espacial de las rectas r y s . Fuente: Corcobado y Marijuán (1990, p. 85)

Así pues, las ecuaciones vectoriales de r y s serán, respectivamente:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}, \quad \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OQ} + \mu \vec{w}$$

Si tenemos las dos rectas r y s en el espacio existirán únicamente 4 posiciones relativas que pueden presentarse, y dependerá de cuántos puntos en común comparten: Si tienen todos sus puntos en común, serán rectas coincidentes. Si únicamente tienen un punto en común diremos que se cortan. Si no tienen ningún punto en común podrán ser paralelas o no serlo, diremos que se cruzan.

En términos de ecuaciones, habrá algún punto en común cuando existan valores para λ y μ tales que:

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} = \overrightarrow{OQ} + \mu \vec{w}$$

Es decir, cuando el sistema de tres ecuaciones lineales en las incógnitas λ y μ tenga solución:



$$\begin{cases} \lambda v_1 - \mu w_1 = q_1 - p_1 \\ \lambda v_2 - \mu w_2 = q_2 - p_2 \\ \lambda v_3 - \mu w_3 = q_3 - p_3 \end{cases}$$

Aplicando al sistema anterior el teorema de Rouché, y considerando la matriz de los coeficientes y la ampliada con los términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 & q_1 - p_1 \\ v_2 - w_2 & q_2 - p_2 \\ v_3 - w_3 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Tenemos los siguientes casos:

- Rango de $A^* = 3$

- Rango de $A = 1$: No es posible ya que si rango de $A = 1$, las dos primeras columnas de A^* serían proporcionales y su rango no podría ser 3.

- Rango de $A = 2$: El sistema es incompatible, por lo que las rectas nos tienen ningún punto en común. Además, como tenemos que el rango de $A = 2$, sabemos que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son independientes lo que conlleva que tengan distinta dirección. Por tanto, **las rectas se cruzan**.

- Rango de $A^* = 2$

- Rango de $A = 1$: El sistema es incompatible, por lo que las rectas nos tienen ningún punto en común. Además, como tenemos que el rango de $A = 1$, sabemos que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes, lo que acarrea que tengan la misma dirección. Por tanto, son **rectas paralelas**.

- Rango de $A = 2$: El sistema es compatible determinado, con única solución. **Las rectas se cortan en un punto** cuyas coordenadas podremos obtener resolviendo el sistema de ecuaciones.

- Rango de $A^* = 1$

- Rango de $A = 1$: El sistema es compatible indeterminado, existen infinitas soluciones, por lo que las rectas tienen infinitos puntos en común, de lo que se deduce que ambas son **rectas coincidentes**.

Posición relativa de dos planos en el espacio.

Si tenemos los planos π y π' , cuyas ecuaciones generales son $Ax + By + Cz + D = 0$ y $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, sus posiciones relativas dependerán de que ambos posean o no puntos en común, y en caso de que tengan puntos en común, cuántos tienen.

Necesitaremos estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$



Aplicando al sistema anterior el teorema de Rouché, y considerando la matriz de los coeficientes y la ampliada con los términos independientes tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Tenemos los siguientes casos:

- Rango de $A^* = 2$

- Rango de $A = 1$: El sistema es incompatible, no tienen ningún punto en común y por tanto son **planos paralelos**.

- Rango de $A = 2$: El sistema es compatible indeterminado, con infinitos puntos comunes siendo planos distintos. Por lo que **los planos se cortan en una recta**.

- Rango de $A^* = 1$

- Rango de $A = 1$: El sistema es compatible indeterminado, con infinitos puntos comunes. Además, las ecuaciones son equivalentes. Por lo que **los planos son coincidentes**.

Posición relativa de recta y plano.

Sea una recta r con ecuaciones implícitas $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ y un plano π cuya ecuación implícita es: $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$, sus posiciones relativas las estudiaremos a partir del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Aplicando al sistema anterior el teorema de Rouché, y considerando la matriz de los coeficientes y la ampliada con los términos independientes tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Tenemos los siguientes casos:

- Rango de $A^* = 3$

- Rango de $A = 2$: Es un sistema incompatible por tanto la recta y el plano no tienen ningún punto en común. Por tanto, **la recta y el plano son paralelos**.

- Rango de $A = 3$: El sistema es compatible determinado, por lo que podemos decir que **la recta corta al plano en un punto**. Podemos hallar sus coordenadas resolviendo el sistema.

- Rango de $A^* = 2$



- Rango de $A = 2$: Es un sistema compatible determinado, por lo que recta y plano tienen infinitos puntos en común. Diremos que **la recta está contenida en el plano**.

(Corcobado y Marijuán (1990), Latorre (2008), Ortega y Ritoré, (2016)).

2.2.3. Contenido matemático escolar.

Podemos entender el contenido matemático escolar como “un conjunto de procedimientos, estructuras y actitudes procedentes de la tradición académica” (Fernández Plaza, 2016, p. 104). Este conjunto será seleccionado por los responsables de la elaboración del currículo para que el profesorado lo comunique y enseñe al alumnado que, a su vez, deberá aprenderlo y utilizarlo (Fernández, 2016a).

2.2.3.1. Aspectos formales y estructurales.

Ámbito Conceptual.

En el ámbito conceptual, y siguiendo los parámetros de Fernández Plaza, podemos encontrar tres niveles interrelacionados. Los hechos se relacionan y organizan para formar conceptos, y de la organización y relación entre estos, surgen las estructuras conceptuales (2016a).

Hechos			
Términos	Notaciones	Convenios	Resultados
- Punto - Vector - Coordenadas - Módulo - Dirección - Sentido	P $\overrightarrow{PQ}$ $\vec{v}$ (x, z) $\overrightarrow{PQ}$	- Llamar a P origen y a Q extremo en $\overrightarrow{PQ}$ - Expresar al vector $\overrightarrow{PQ}$ de coordenadas (x, z) como $\overrightarrow{PQ} = (x, z)$, o $\overrightarrow{PQ}(x, z)$	- Suma y resta de vectores - Producto escalar

Conceptos	
Conceptos	Relaciones
C1. Vector cero C2. Vector opuesto C3. Vectores proporcionales C4. Punto medio del segmento C5. Puntos alineados C6. Recta	C7. Combinación lineal de vectores C8. Vector perpendicular a otro C9. Ecuación vectorial de la recta C10. Ecuación paramétrica de la recta C11. Ecuación continua de la recta C12. Ecuación explícita de la recta



Estructuras conceptuales
• C13. Relación entre las distintas ecuaciones de la recta • C14. Paralelismo entre rectas y ejes de coordenadas • C15. Posiciones relativas Punto-Recta • C16. Perpendicularidad entre rectas • C17. Paralelismo entre rectas • C18. Incidencia entre rectas

Ámbito Procedimental.

En el ámbito procedimental, y de nuevo bajo la clasificación de Fernández (2016), encontramos también tres niveles interrelacionados. Hablaremos de Destrezas con las que procesar los hechos, de razonamientos para el procesado de conceptos y de estrategias para gestionar las estructuras.

Destrezas
• C19. Identificar los elementos de un vector • C20. Ejecutar operaciones básicas con vectores • C21. Calcular módulo de un vector

Razonamientos
• C22. Deductivo: deducir la ecuación vectorial de la recta • C23. Analógico: buscar correspondencias entre las operaciones con vectores y las practicadas con números reales. • C24. Analógico: obtener el resto de ecuaciones de la recta partiendo de la ecuación vectorial. • C25. Inductivo: calcular el punto medio de un segmento. • C26. Figurativo: relacionar los cálculos analíticos con su representación gráfica. • C27. Figurativo: hallar coordenadas en base a las representaciones

Estrategias
• C28. Identificar y transformar las distintas ecuaciones de la recta según las necesidades • C29. Estudio de la posición relativa de elementos



Ámbito actitudinal.

El ámbito actitudinal hace referencia al modo en que el alumnado afronta el aprendizaje del saber matemático. Se trata de las herramientas en cuanto a comportamiento y modo de actuar que será preciso por parte de los estudiantes para que el contenido escolar propuesto llegue. Una actitud receptiva por parte del alumnado conllevará un mejor y más productivo aprendizaje.

Actitudes
• C30. Tener una positiva hacia las nociones matemáticas como punto de partida para la resolución de problemas • C31. Mostrar interés por las aplicaciones prácticas que puedan derivarse de los contenidos • C32. Habituarse a trabajar siguiendo las pautas formales y lógicas propias de la actividad matemática • C33. Interesarse en campos de trabajo o situaciones reales donde los conocimientos adquiridos sean utilizados • C34. Esforzarse en analizar las soluciones y/o enfocar los razonamientos de un modo distinto para hallar distintos resultados

2.2.3.2. Sistemas de representación.

Para poder lidiar con el estudio de los conceptos abstractos matemáticos y llevarlos hasta su aplicación, es preciso dotarlos de unas representaciones que nos permitan trabajar con ellos. Estas representaciones podrán ser gráficas, o simbólicas y, gracias a ellas y al establecimiento de unas reglas para proceder se alcanza un alto nivel de formalidad.

“Las representaciones matemáticas las entendemos en el sentido amplio, como aquellas herramientas –signos o gráficos- mediante las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados a las estructuras matemáticas. Las representaciones son parte esencial del proceso de aprendizaje de las matemáticas y conectan los objetos mentales con los objetos matemáticos.” (Rico, Castro y Romero, 2000)

La importancia del papel que juegan los sistemas de representación queda patente en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, donde se determina que dos de los aspectos que engloba la competencia matemática son, por un lado, representar entidades matemáticas y, por otro lado, utilizar los símbolos matemáticos.



Dentro de las formas convencionales de representación, podemos distinguir dos grandes grupos, a saber: formas gráficas y formas simbólicas. En el primer caso, se trata de representaciones de carácter figurativo, para los cuales se establecen unas reglas y unos criterios de interpretación. En el segundo grupo. Las formas simbólicas, también disponen de unas reglas y criterios para interpretarlos, pero en este caso se trata de utilizar símbolos alfanuméricos (Lupiáñez, 2016a).

Desde este punto de vista, podemos analizar los sistemas de representación del contenido matemático que venimos desarrollando. Concretamente nos centraremos en los sistemas de representación más comunes para los términos Punto, Vector y Recta.

Punto.

Partiendo de la idea de que un Punto es un lugar geométrico del espacio definido por su distancia a los distintos ejes de coordenadas del sistema de referencia en el que esté inscrito, podemos expresarlo:

Punto	
Representación simbólica	Representación Gráfica
• P • (x, y, z) • $P = (x, y, z)$	

Vector.

Partiendo de la idea de que un Vector es una flecha que queda definida por ir de un punto a otro en el espacio, a los que se les llama origen y extremo, respectivamente, podemos expresarlo:

Vector	
Representación simbólica	Representación Gráfica
• $\overrightarrow{OP}$, siendo O el punto de origen y P el extremo. • $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P) - (x_O, y_O, z_O)$ • $\vec{p}$ • $\mathbf{p}$	



• OP	
---	--

Recta.

Partimos de la idea de que una Recta es una línea que se extiende en una misma dirección y contiene un número infinito de puntos. Queda definida a partir de un punto que pertenezca a ella y un vector que tenga su misma dirección, y podemos expresarla:

Recta	
Representación simbólica	Representación Gráfica
• $r = \vec{p} + \lambda \vec{v}$ • $\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ • $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$ • $y = mx + n$ • $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$	
Representación verbal	Representación tecnológica
• Recta que pasa por los puntos (0,0) y (2,1). • Recta perpendicular al eje OY que pasa por el punto (0,3)	• Geogebra, calculadora gráfica, software...

Disponer de distintas herramientas de representación para un mismo concepto dota de enormes posibilidades de trabajo. Las reglas son manipulables y permiten la conversión de un sistema a otro en función de las necesidades del problema planteado.



Si por ejemplo tratamos de obtener las coordenadas del punto medio de un segmento. Aunque el resultado final se nos solicite en forma de coordenadas, y sea posible obtenerlas sin realizar ninguna representación gráfica, el razonamiento visual nos ayudará a comprender el significado de lo que se pregunta, y podremos, no sólo hallar una respuesta correcta, sino encontrar una respuesta correcta y además de una forma razonada.

Las actuaciones que podemos realizar sobre las distintas representaciones se podrán distinguir, según la clasificación de Lupiáñez (2016a) en procesamientos, si nos movemos dentro del mismo campo de representación (por ejemplo, al pasar de una ecuación de la recta a otra), o conversiones si toman partido distintos campos de representación (por ejemplo, al representar gráficamente un vector dadas sus coordenadas).

2.2.3.3. Sentidos y modos de uso.

Aunque Ruiz (2016a) nos señala que “la estructura conceptual y los sistemas de representación proporcionan, por sí solos, un significado instrumental a la matemática escolar” (p. 139), no podemos perder de vista la importancia de dotar de un enfoque funcional que aporte un propósito a los conceptos y procedimientos manejados. Por ello, en este apartado se presentarán distintos contextos y situaciones en los que la utilidad de los vectores queda patente.

Situaciones personales.

- Desplazamientos: seguir una ruta determinada ya sea caminando, en bicicleta o cualquier otro medio, motor o no, puede descomponerse como la trayectoria determinada por distintos vectores, dotados de dirección y velocidad.
- Videojuegos: Son muchos los videojuegos en los que el posicionamiento de los jugadores en un mapa y la distancia entre ellos es muy importante. Podemos entender los jugadores como puntos en una posición determinada (coordenadas) y la distancia entre ellos como el vector que los une.

Situaciones laborales.

- Velocidad y posición de los aviones: gracias al uso de coordenadas y vectores, es posible representar esas magnitudes mediante las cuales se configura el espacio aéreo con el que se controla la gran cantidad de conexiones aéreas entre ciudades.
- Estudio de accidentes de tráfico: cuando se produce un choque de vehículos, es preciso determinar las circunstancias previas al hecho. Para ello el uso de vectores representando las fuerzas de impacto, velocidades y trayectorias de los vehículos son imprescindibles.
- Cálculo estructural en construcción: Mediante el uso de vectores es posible determinar si la estructura de un edificio será capaz de soportar el peso de la construcción. Así mismo el uso de vectores será necesario para el cálculo de la resistencia de los edificios frente a la acción



del viento o los sismos. También se utilizan vectores para el cálculo cables en la construcción de puentes o elementos colgantes.

- Construcción civil: El posicionamiento mediante puntos y rectas determina en gran medida la viabilidad del trazado de carreteras y viales públicos.

Situaciones sociales/públicas.

- Servicios de emergencias: Uso de GPS para la localización de personas perdidas y/o accidentadas.

- Transporte: Podemos modelizar el recorrido de distintos medios de transporte como vectores y puntos en el espacio. Por ejemplo, en el caso del tren podemos entender como puntos de origen y extremos de los vectores las estaciones de tren. Las vías del tren estarán dotadas de una dirección, mientras los trenes, entendidos como vector, estarán dotados de un sentido y una velocidad

- Deporte: la práctica de algunos deportes y juegos, puede modelizarse como vectores, por ejemplo, en el billar será preciso dotar al taco de una dirección, sentido y fuerza suficiente para que alcance a la bola blanca que a su vez seguirá una trayectoria hasta golpear una bola de color. En ese punto la bola blanca cambiará la trayectoria y velocidad de desplazamiento y será importante para el emplazamiento de cara a la siguiente tirada. Por su parte, la bola de color seguirá otra trayectoria buscando la tronera.

- Meteorología: recibimos la información sobre las predicciones del viento y las mareas mediante representaciones vectoriales.

Situaciones científicas.

- Cinemática: estudio del movimiento de cuerpos. En este campo serán de vital importancia las nociones de Punto, Sistema de referencia, vectores, etc.

- Estudio de fenómenos naturales: huracanes, terremotos, tsunamis... son algunos de los fenómenos naturales estudiados mediante modelizaciones con vectores.

- Física: Representación de magnitudes como la velocidad o la fuerza.

2.3. Análisis cognitivo.

El análisis cognitivo trata de responder a la pregunta de para qué aprenden los estudiantes un determinado contenido matemático. Este análisis proporcionará a los docentes criterios y procesos para analizar y comprender las expectativas de aprendizaje. Este punto también se tratarán los asuntos relacionados con las dificultades que el alumnado pueda encontrarse en el proceso de aprendizaje. Por tanto, en el análisis cognitivo nos detendremos en tres apartados fundamentales: los objetivos, las competencias y los errores y dificultades (Lupiañez, 2016b).



2.3.1. Objetivos.

El artículo 2 del Capítulo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, define los objetivos como: “referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin”.

La legislación española, en concreto en el Real Decreto 1105/2014, nos marca los objetivos para la etapa curricular en que nos encontramos que en el caso que nos atañe, es la Educación Secundaria Obligatoria. Estos objetivos son comunes a todas las materias, no exclusivamente a las matemáticas. Por su parte, la legislación autonómica, en nuestro caso la andaluza, a través de la Orden de 14 de julio de 2016, establece los objetivos generales de la materia en cuestión, que en nuestro caso se trata de las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. El desarrollo de estos objetivos, nacionales y autonómicos andaluces aparecen en el Anexo I: Objetivos de etapa y materia.

Los objetivos didácticos habrán de tener en cuenta tanto los objetivos de etapa y materia que comentaba anteriormente, como los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje correspondientes a nuestro contenido, que vienen recogidos en el Anexo II: Currículo matemáticas académicas. 4º ESO.

Para la unidad didáctica que se voy a desarrollar he considerado los siguientes **objetivos didácticos**:

OD01. Mostrar una actitud positiva hacia la adquisición de nociones matemáticas y sus aplicaciones, con un sentido crítico.

OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones.

OD03. Identificar y conocer conceptos básicos: punto, vector, módulo, origen, extremo.

OD04. Aplicar y relacionar entre ellas las distintas formas de representación de conceptos básicos: punto, vector.

OD05. Ejecutar operaciones con vectores: sumas, restas, producto de un número por un vector, calcular módulo, obtener punto medio de un segmento, analizar la combinación lineal entre vectores.

OD06. Reconocer y distinguir las distintas expresiones de la ecuación de la recta.

OD07. Habitarse a hallar el resto de ecuaciones de la recta a partir de cualquier otra.

OD08. Conocer las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas.



OD09. Conocer y aplicar el concepto de pendiente de una recta junto con las ecuaciones de la recta para comprobar y/o determinar la posición relativa entre rectas.

2.3.2. Competencias.

El artículo 2 del Capítulo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, define las competencias como: “capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”.

En el artículo 2 del Capítulo I de la Orden ECD/65/2015 se señala que las competencias clave en el Sistema Educativo Español son 7: Comunicación lingüística (CCL), Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), Competencia digital (CD), Aprender a aprender (CAA), Competencias sociales y cívicas (CSC), Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP) y Conciencia y expresiones culturales (CEC). Estas competencias vienen desarrolladas en el Anexo I de la cita Orden ECD/65/2015, he incluido las definiciones de las mismas en el Anexo II: Competencias.

En este apartado nos centraremos especialmente en la competencia matemática. Para ello me basaré en el Marco de Evaluación y de Análisis de PISA desarrollado por la OCDE en el que se recogen las competencias dentro de la competencia matemática que describo sucintamente a continuación, pero que pueden encontrarse en su desarrollo completo en el Anexo II: Competencias.

- Comunicación (C): Tiene que ver con leer, descodificar e interpretar los enunciados, preguntas, tareas, de manera que forma que se consiga formar una idea de la situación planteada. Incluye también expresar, resumir, justificar y presentar tanto el proceso que se está siguiendo como los resultados obtenidos.

- Matematización (M): se manifiesta en la utilización de las matemáticas para describir, analizar, resolver y transformar situaciones del mundo real. También para interpretar la realidad de los resultados matemáticos obtenidos.

- Representación (R): Implica la selección, interpretación, conversión y uso variado de los distintos sistemas de representación que puede presentar un contenido matemático.

- Razonamiento y argumentación (RA): Hace hincapié en los procesos de pensamiento que exploran y conectan los elementos de un problema para inferir a partir de ellos, de forma que puedan justificarse enunciados y soluciones de dicho problema.

- Diseño de estrategias para resolver problemas (RP): Hace hincapié en el uso de procesos por el que el alumnado reconoce, formula y resuelve problemas de manera eficaz.

- Utilización de operaciones y de un lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico (LS): Implica ser capaz de manejar las operaciones aritméticas y expresiones simbólicas



propias de la actividad matemática. También implica conocimiento sobre las construcciones y sistemas formales.

- Utilización de herramientas matemáticas (HM): Se centra en la capacidad del alumnado para el uso de instrumentos y aparatos, más o menos tecnológicos con los que ayudarse en la actividad matemática. Tanto en el proceso como en la comunicación de resultados.

La adquisición en mayor o menor medida de estas competencias por parte del alumnado deriva en 7 niveles de competencia. La descripción completa que hace la OCDE de dichos niveles puede encontrarse en el Anexo III: Competencias.

2.3.3. Relación Objetivos-Competencias matemáticas.

Como hemos visto en los apartados anteriores, objetivos y competencias van de la mano en el proceso de aprendizaje. El desarrollo de las competencias matemáticas va a hacer que los objetivos sean alcanzables, y a su vez, el esfuerzo por llegar a los objetivos propuestos, hará que se potencien las capacidades. En la siguiente tabla señalo la vinculación existente entre los objetivos didácticos propuestos y las competencias matemáticas.

OBJETIVO	COMPETENCIA MATEMÁTICA						
	C	M	R	RA	RP	LS	HM
OD01. Mostrar una actitud positiva hacia la adquisición de nociones matemáticas y sus aplicaciones, con un sentido crítico.	X			X		X	
OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones.	X	X	X	X		X	X
OD03. Identificar y conocer conceptos básicos: punto, vector, módulo, origen, extremo.		X	X	X			
OD04. Aplicar y relacionar entre ellas las distintas formas de representación de conceptos básicos: punto, vector.		X	X			X	
OD05. Ejecutar operaciones con vectores: sumas, restas, producto de un número por un vector, calcular módulo, obtener punto medio de un segmento, analizar la combinación lineal entre vectores.		X		X	X	X	X



OD06. Reconocer y distinguir las distintas expresiones de la ecuación de la recta.			X			X	
OD07. Habituar a hallar el resto de ecuaciones de la recta a partir de cualquier otra.			X	X	X	X	X
OD08. Conocer las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas.		X		X		X	
OD09. Conocer y aplicar el concepto de pendiente de una recta junto con las ecuaciones de la recta para comprobar y/o determinar la posición relativa entre rectas.		X		X	X		X

2.3.4. Limitaciones de aprendizaje.

En el proceso de aprendizaje matemático, es muy común que existan casos de equivocaciones, imprecisiones, confusiones, aplicaciones inapropiadas, etc. Estos sucesos se presentan debido a, por un lado, carencias que pueda presentar el alumnado y, por otro lado, la interpretación o interacción del docente con el contenido matemático. Así pues, cabe diferenciar entre dificultades, que serán aquellos factores o causas que dificultan el aprendizaje, y errores que serán el reflejo de los conflictos, las carencias o las inconexiones que puede tener el discente con el contenido matemático (Fernández, 2016b).

Dificultades.

Las dificultades quedan definidas como “las causas o situaciones que dan origen a los errores” (Fernández, 2016b, p. 196). Son múltiples las causas que valora clasificándolas en cuatro apartados distintos:

- Dificultades debidas a la relación entre el alumnado y el contenido: esta primera dificultad está relacionada con la complejidad de los objetos matemáticos y puede deberse a varios motivos. Por la complejidad de las estructuras formales utilizadas. Por los sistemas de representación utilizados o la falta de correlación directa entre ellos. O por los sentidos o modos de uso empleados, ya que la poca o nada contextualización del contenido matemático puede generar una barrera considerable.

- Dificultades debidas a la presentación por el docente del contenido: el proceso de aprendizaje juega un papel importante y puede suponer ciertas dificultades debidas a deficiencias en la selección o el diseño de tareas. También las ejemplificaciones del profesorado pueden generar dudas o confusiones en cuanto a la recepción de conceptos.

- Dificultades debidas a las condiciones cognitivas del alumnado: tienen su origen en la falta de conocimientos previos total o parcialmente sobre el tema a tratar.



- Dificultades debidas a las condiciones afectivas del alumnado: la premura por concluir una tarea, las dudas, el miedo a equivocarse, pueden influir en el aprendizaje matemático.

Errores.

Partiendo de las dificultades a las que los estudiantes se enfrentarán durante el proceso de aprendizaje podemos aventurar algunos errores que previsiblemente surgirán en el alumnado. Desde un punto de vista constructivista, los errores en el aprendizaje de las matemáticas deben considerarse como un instrumento fundamental para la construcción del conocimiento, debe invitar, como señala (Fernández, 2016b, p. 196), “a la autorreflexión, reorganización, enriquecimiento y ajuste del conocimiento en situaciones conflictivas”.

E01. Confundir abscisa y ordenada en la representación de coordenadas.

E02. Confundir sentido y dirección de un vector.

E03. Uso inapropiado del teorema de Pitágoras para cálculo del módulo.

E04. Sumar vectores como escalares (Flores et al., 2008).

E05. Uso inapropiado del teorema de Pitágoras para suma de vectores (Flores et al., 2008).

E06. Suma de vectores cerrando el ciclo (Flores et al., 2008).

E07. Confundir los nombres de las distintas ecuaciones de la recta

E08. Tomar el vector director de una recta considerando su origen el origen del eje de coordenadas.

E09. Errores vinculados a falta de conocimientos sobre procedimientos para pasar de una expresión de la ecuación de la recta a otra.

E10. Errores de cálculo (Bravo y Patiño, 2016).

E11. Errores vinculados a incoherencias o mezcla de conceptos sin sentido (Bravo y Patiño, 2016).

E12. Errores vinculados a ejercicios incompletos, desarrollados a la mitad o hasta cierto instante (Bravo y Patiño, 2016).

E13. Confundir, o no conocer los valores que debe adoptar la pendiente para que dos rectas sean paralelas o perpendiculares.

Gracias al análisis de los errores comunes que presenta el alumnado podremos adelantarnos, y prestar mayor atención en los aspectos afectados para paliar tanto los errores previstos como las dificultades a las que se enfrentarán.



2.4. Análisis de Instrucción.

El análisis de instrucción dota de herramientas al profesorado para tomar decisiones con respecto a la selección, diseño, y propuesta de tareas matemáticas escolares que guíen al alumnado en el proceso de obtener el logro de las expectativas de aprendizaje, establecidas previamente en el análisis cognitivo. Siguiendo el patrón establecido por Moreno y Ramírez (2016), en este análisis nos centraremos en tres apartados: Las tareas, los materiales y recursos, y la organización y gestión de aula.

2.4.1. Tareas.

Una tarea matemática puede definirse como una propuesta planificada con determinada intención de aprendizaje o como instrumento para evaluar el aprendizaje del alumnado, del cual se requiere una actividad relacionada con las matemáticas (Moreno y Ramírez, 2016). Algunas de las cualidades que deben cumplir las tareas propuestas son: deben ser significativas, es decir, deben ayudar a los estudiantes a que expresen o mejoren sus concepciones sobre determinados contenidos y deben enmarcarse en una situación auténtica, han de encuadrarse en una situación lo más parecida a la realidad posible.

Es posible calificar las tareas de múltiples modos, uno de ellos es la complejidad que presenten. Sin embargo, no debemos quedarnos en un fácil o difícil ya que partiríamos de una base totalmente subjetiva. El otro aspecto que utilizaremos para clasificar las tareas será el de la función o papel que la tarea va a desempeñar en el aprendizaje (Moreno y Ramírez, 2016).

Complejidad.

- Tareas de reproducción: en este grupo se incluirán tareas que resulten familiares al alumnado, con muy poca exigencia y básicamente centrado en la repetición de conocimientos practicados.

- Tareas de conexión: Supone una mayor exigencia para el alumnado, requieren que se establezcan relaciones entre distintas formas de representar un mismo problema. También incluye aquellos ejercicios en los que se deba recurrir a distintos caminos para alcanzar una solución.

- Tareas de reflexión: Es el nivel más alto de complejidad y requerirá por parte del alumno una serie de competencias más avanzadas. Existe mayor cantidad de variables a tener en cuenta, se deberán realizar generalizaciones y explicaciones justificando resultados y procesos.

Función.

- Tareas iniciales: Su objetivo será dar a conocer al profesorado los conocimientos previos del alumno. Deberán ser las primeras en aportar motivación a los estudiantes, a la vez que relacionan los contenidos con la realidad.



- Tareas de desarrollo: En estas tareas se deben fomentar las preguntas y cuestiones sobre el contenido, serán las que ayuden a elaborar y construir significados, y servirán para ejercitar los procesos.

- Tareas de cierre: Este grupo de tareas debe cumplir la función de descontextualizar, aplicar y sintetizar los conocimientos.

2.4.2. Materiales y recursos.

Los materiales y recursos son todos aquellos elementos o herramientas que utilizaremos durante el proceso de aprendizaje de la unidad didáctica planteada y que nos servirán para que la comunicación de contenidos sea fluida con el alumnado.

En cuanto los materiales, el profesor aportará sus apuntes mediante la página web del centro para que estén a disposición de los estudiantes. Estos apuntes serán complementados por el libro de texto de los alumnos, concretamente el libro de la editorial ANAYA: Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. Los estudiantes deberán disponer de un cuaderno personal para la toma de anotaciones correspondientes a las sesiones y para la resolución de ejercicios propuestos. En algunas sesiones el profesor aportará fichas con recortables y/o tablas para completar información, para estos casos, se utilizarán tijeras y pegamento.

Relativo a los recursos, se utilizará la pizarra tradicional y proyector con ordenador enlazado como medios de apoyo al profesorado.

2.4.3. Organización del aula.

El aula se dispondrá en forma de “U” para favorecer la discusión entre los estudiantes. Cuando las tareas sean por parejas los alumnos se desplazarán al lugar indicado ya que será el docente quien determine dichas parejas y, por tanto, la ubicación de los alumnos. En caso de realizar alguna actividad que requiera la formación de grupos, la clase se dispondrá en “islas” donde los grupos puedan intercambiar ideas (García, 2020).

2.5. Análisis evaluativo.

El análisis evaluativo consistirá en valorar los resultados de cara a comprobar si la programación realizada cumple con los requisitos previstos, de forma que nos ayude a detectar y replantear aquellos puntos débiles que encontremos. De esta manera se reforzará y mejorará la planificación de la unidad didáctica propuesta (Ruiz, 2016b). El objeto de análisis se centrará en el estudio de los aprendizajes logrados por los estudiantes y en las decisiones resultantes de la valoración de estos aprendizajes (Segovia, 2016).

2.5.1 Evaluación de los aprendizajes.

La evaluación de los aprendizajes tiene por objetivo comprobar y analizar la evolución del alumnado en cuanto a los conocimientos y actitudes adquiridos durante el proceso



establecido. Para poder analizar esta evolución tendremos en cuenta, por un lado, distintas etapas en el proceso y, por otro lado, los criterios de evaluación establecidos por la normativa vigente.

Etapas de evaluación.

Para poder analizar la evolución de los estudiantes necesitamos recoger información que nos ayude a hacernos una idea de qué conocimientos y actitudes has sido adquiridos y cuáles no. La recogida de esta información puede realizarse de forma puntual o a lo largo del proceso. Establecemos tres etapas siguiendo las directrices de Ruiz (2016b):

- Evaluación inicial: El objetivo es ser conscientes del punto desde el que parte el alumnado. Se realizará antes de comenzar en una fase temprana de la unidad didáctica.

- Evaluación de seguimiento: Se lleva a cabo durante todo el transcurso de la unidad. Permite conocer el nivel de los estudiantes en cada momento. Gracias a esta evaluación se detectarán errores, lo que permitirá la adaptación de tareas y actividades en caso de ser necesario.

- Evaluación a término: Mediante esta evaluación se valorará de una forma global si se han alcanzado los objetivos propuestos, así como las competencias asociadas, además de comprobar en qué nivel se han alcanzado.

Criterios de evaluación.

El artículo 2 del Capítulo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre define los Criterios de evaluación como “el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.” Los criterios de evaluación concretos para nuestra unidad didáctica vienen reflejados en el Anexo II: Currículo matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO.

Es importante hacer hincapié en la estrecha relación que debe existir entre los objetivos propuestos para la unidad didáctica y los criterios de evaluación, así como con los estándares de aprendizaje que cada criterio lleva asociados.

2.5.2 Fases de evaluación de la unidad didáctica.

Si adoptamos un punto de vista organizativo, y tomando en consideración la clasificación propuesta por Segovia (2016), podríamos distinguir tres fases en el proceso evaluativo de una unidad didáctica: recogida de información; Interpretación, valoración y enjuiciamiento; y toma de decisiones.

- Recogida de información: Existen distintos mecanismos para llevarla a cabo, entre ellos la observación del trabajo del alumnado, cuestiones orales, pruebas escritas,



exposiciones, resolución de problemas en grupo o de forma individual, etc. Algunos de aspectos a tener en cuenta para elaborar tareas de recogida de información son, por ejemplo, relevancia práctica, coherencia, rango de respuestas posibles, extensión y valor de la tarea y modos de trabajar la tarea.

- Interpretación, valoración y enjuiciamiento: Los docentes debes ser capaces de analizar las tareas realizadas por los estudiantes. Esta fase está ligada al análisis cognitivo ya que entran en juego las dificultades y errores. La identificación de esos aspectos es esencial para mejorar la enseñanza

- Toma de decisiones: Deben ir encauzadas a la mejora del sistema planteado. Estas decisiones deben orientar a qué métodos usar, a la identificación de necesidades por parte de los estudiantes y a la valoración de la calidad del sistema.



3. UNIDAD DIDÁCTICA.

La unidad para la que se plantea esta temporalización se encuadra dentro de la materia Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º ESO. La elección de esta unidad didáctica viene de la importancia que tiene asentar correctamente las bases de un nuevo contenido matemático. Éste es el caso de la introducción a la Geometría Analítica que resultará muy necesaria en etapas educativas posteriores como son Bachillerato y enseñanzas universitarias técnicas. La programación por unidades del curso que propongo, así como su distribución a lo largo del año lectivo para poder encuadrar la unidad es la siguiente:

Evaluación	Unidad Didáctica	Horas
1ª Evaluación 15 Semanas 60 Sesiones	1. Números reales.	16
	2. Potencias y radicales. Logaritmos.	12
	3. Polinomios y expresiones algebraicas.	16
	4. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	16
2ª Evaluación 14 Semanas 56 Sesiones	5. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones.	10
	6. Funciones. Características de las funciones.	6
	7. Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa.	10
	8. Funciones logarítmicas y exponenciales.	6
	9. Semejanza.	12
	10. Trigonometría.	12
3ª Evaluación 7 Semanas 28 Sesiones	11. Vectores y Rectas.	10
	12. Combinatoria.	6
	13. Probabilidad.	6
	14. Estadística.	6

Contextualización

El centro escolar para el que se plantea el trabajo se trata de un colegio concertado, ubicado en el municipio de Los Villares (Jaén). El centro está situado en un entorno rural, en el que el nivel socioeconómico de la población es medio. El centro cuenta con aproximadamente 330 estudiantes, repartidos entre las enseñanzas de educación infantil, educación primaria y educación secundaria. Entre otras instalaciones cuenta con: gimnasio, aula de informática, taller de tecnología, laboratorio de física y química, aula de música, biblioteca, patio cubierto y al aire libre, etc.

Metodología.

Desde el punto de vista metodológico, se fomentará la integración de los estudiantes en la dinámica del aula de una manera activa. Debemos dotar de herramientas al alumnado para que reflexionen de forma crítica sobre su propio aprendizaje, sus logros, sus errores y sus procedimientos (Luque, 2020).



Otro aspecto que cuidaremos especialmente será el de la interacción entre los estudiantes. Sentirse partícipe del grupo les animará a participar en las tareas planteadas. Esta relación entre el alumnado será útil no sólo cuando se produzca un aprendizaje vertical, sino que generará un aprendizaje horizontal muy valioso entre los discentes. En aras de mejorar la dinámica del grupo, una propuesta interesante a aplicar es la creación de una *cultura de la mejora*. Esta metodología se basa en numerosos estudios de investigación que coinciden en que un factor determinante en el alto rendimiento escolar es la fijación de altas expectativas de los profesores con respecto al potencial del alumnado. Algunas técnicas como *Contestar es obligatorio*, *Sube el listón* o, *El formato importa*, pueden ayudar de un modo significativo a desarrollar todo el potencial del alumnado. Y no solo eso, sino que, al ser técnicas flexibles, permiten su adaptación a cada estudiante de forma individualizada (Lemov (2017), Luque (2020)).

En el desarrollo de la unidad didáctica se utilizarán diversas metodologías dependiendo de la situación, conceptos y contenidos a tratar, etc. Principalmente se realizarán explicaciones participativas en las que los estudiantes deberán ser parte esencial. Aportando conocimientos previos y construyendo su propio aprendizaje a partir del andamiaje o guía que el docente vaya aportando en cada situación. Se introducirán elementos TICs, por ejemplo, para tareas de gamificación, o para realizar representaciones de los contenidos que ayuden a complementar el trabajo realizado. En algunas tareas se empleará un Descubrimiento guiado, en las que el papel activo del estudiante será esencial para alcanzar los objetivos (Luque, 2020).

En el discurrir de las sesiones es muy importante crear lo que se denomina una cultura del error. Desde el momento en que un estudiante entra en clase, el docente debe mostrarle la percepción de que la aparición de respuestas incorrectas es algo básico, ya que en muchos casos será un paso primordial hacia la respuesta correcta. Construir el aprendizaje a partir de errores genera un valor mayor cuando el alumnado se siente cómodo cometiéndolo (Lemov, 2017).

Atención a la diversidad.

La enorme diversidad que presenta el estudiantado actual hace que sea necesario poner el foco en su atención. La individualización de la enseñanza junto con las diferentes formas de aprehender los conocimientos supone un esfuerzo que como docentes debemos asumir y del que debemos responsabilizarnos. Es necesario disponer de distintas vías que nos ayuden a canalizar el aprendizaje, adaptándonos a cada situación educativa y personal que podamos encontrarnos en un aula.

En la unidad didáctica planteada se propone mucho trabajo individualizado en clase, que permite que cada alumno avance acorde a su propio ritmo, y dotando al docente la



posibilidad de individualizar correcciones apoyando y suministrando distintas herramientas para distintos problemas. Por otro lado, en las sesiones más prácticas que se plantean, el agrupamiento por parejas no es al azar, sino que gracias a un estudio previo compondremos las parejas de forma que se complementen y exista un trasvase de información fluido, generando un aprendizaje horizontal.

Al tratarse de una unidad didáctica para un grupo genérico, se han propuesto tareas individualizadas y por parejas que ayuden a adecuarse a los distintos ritmos. En casos específicos, será de vital importancia la coordinación con el departamento de orientación con el que podremos profundizar y atender casos más específicos o particulares.

3.1. Distribución de sesiones.

Se plantea el desarrollo de la unidad didáctica a lo largo de 10 sesiones:

Sesión 1: Presentación de la unidad.

Sesión 2: Vectores en el plano. Características.

Sesión 3: Operaciones con vectores I.

Sesión 4: Operaciones con vectores II.

Sesión 5: Ecuaciones de la recta I.

Sesión 6: Ecuaciones de la recta II.

Sesión 7: Operaciones con ecuaciones de la recta.

Sesión 8: Pendiente e incidencia de rectas.

Sesión 9: Examen.

Sesión 10: Corrección examen

Las sesiones se distribuirán de tal forma que engloben todos los objetivos didácticos y contenidos propuestos en puntos anteriores. El esquema de esta distribución sería el siguiente:

Sesión	Objetivos	Contenidos
S.1 Presentación de la unidad.	OD01. Mostrar una actitud positiva hacia la adquisición de nociones matemáticas y sus aplicaciones, con un sentido crítico.	Evaluación de conocimientos previos. Introducción al tema. Definiciones y terminología básica.
S.2 Vectores en el plano. Características.	OD03. Identificar y conocer conceptos básicos: punto, vector, módulo, origen, extremo. OD04. Aplicar y relacionar entre ellas las distintas formas de representación de conceptos básicos: punto, vector.	C19. Identificar los elementos de un vector C1. Vector cero C2. Vector opuesto C3. Vectores proporcionales C21. Calcular módulo de un vector C27. Figurativo: hallar coordenadas en base a las representaciones
S.3 Operaciones con vectores I.	OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de	C7. Combinación lineal de vectores



	forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones. OD05. Ejecutar operaciones con vectores: sumas, restas, producto de un número por un vector, calcular módulo, obtener punto medio de un segmento, analizar la combinación lineal entre vectores.	C20. Ejecutar operaciones básicas con vectores C26. Figurativo: relacionar los cálculos analíticos con su representación gráfica
S.4 Operaciones con vectores II.	OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones. OD05. Ejecutar operaciones con vectores: sumas, restas, producto de un número por un vector, calcular módulo, obtener punto medio de un segmento, analizar la combinación lineal entre vectores.	C4. Punto medio del segmento C5. Puntos alineados C8. Vector perpendicular a otro C25. Inductivo: calcular el punto medio de un segmento. C26. Figurativo: relacionar los cálculos analíticos con su representación gráfica
S.5 Ecuaciones de la recta I.	OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones. OD06. Reconocer y distinguir las distintas expresiones de la ecuación de la recta.	C6. Recta C9. Ecuación vectorial de la recta C10. Ecuación paramétrica de la recta C13. Relación entre las distintas ecuaciones de la recta
S.6 Ecuaciones de la recta II.	OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones. OD06. Reconocer y distinguir las distintas expresiones de la ecuación de la recta.	C6. Recta C11. Ecuación continua de la recta C12. Ecuación explícita de la recta C13. Relación entre las distintas ecuaciones de la recta
S.7 Operaciones con ecuaciones de la recta.	OD02. Comprender, analizar y expresar adecuadamente, de forma escrita y oral los problemas propuestos, contenidos y soluciones. OD07. Habitarse a hallar el resto de ecuaciones de la recta a partir de cualquier otra.	C9. Ecuación vectorial de la recta C10. Ecuación paramétrica de la recta C11. Ecuación continua de la recta C12. Ecuación explícita de la recta C13. Relación entre las distintas ecuaciones de la recta



S.8 Pendiente e incidencia de rectas.	OD08. Conocer las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas. OD09. Conocer y aplicar el concepto de pendiente de una recta junto con las ecuaciones de la recta para comprobar y/o determinar la posición relativa entre rectas.	C14. Paralelismo entre rectas y ejes de coordenadas C15. Posiciones relativas Punto-Recta C16. Perpendicularidad entre rectas C17. Paralelismo entre rectas C18. Incidencia entre rectas
S.9 Examen.		Prueba escrita
S.10 Corrección examen – Valoración unidad		Corrección de la prueba escrita

Los contenidos actitudinales no aparecen explícitamente en las unidades, ya que son contenidos que se trabajan en todas ellas.

3.2. Organización de las sesiones.

Planificar las sesiones es un proceso fundamental a la hora de afrontar las clases. Fijar, partiendo de los objetivos pretendidos, cómo aprovechar el tiempo del que se dispone, aleja al docente de la improvisación y nos permite anticiparnos a problemas, o dificultades que puedan surgir durante el desarrollo de las clases. Sin embargo, no podemos considerar la planificación de sesiones como un elemento inamovible, más al contrario, será un elemento cambiante que habrá de adaptarse al ritmo del alumnado y adecuarse a sus necesidades.

Para cada sesión se ha elaborado un plan de clase en el que se plasma el desarrollo esperado y en el que se incluyen la tarea o tareas que se realizarán. Estas tareas y sus análisis, junto a la evaluación inicial y la prueba escrita, vienen desarrolladas en los apartados siguientes.

Sesión 1: Presentación de la unidad.

Esta sesión será la toma de contacto del alumnado con el contenido. Se realizará una evaluación inicial y, tras su análisis introduciremos el tema: definiciones y terminología básicas.

Plan de clase:

- Evaluación inicial - 25':

Pediremos a los estudiantes que rellenen la Evaluación inicial. Indicaremos que no se trata de un examen, restándoles presión. Resaltar la importancia de conocer el punto de inicio para avanzar correctamente. Metáfora de correr-andar: Necesitamos saber si saben andar para explicar directamente cómo correr. O si ya saben trotar no aburrirles explicando cómo se anda.



- Autocorrección de la evaluación - 20':

Daremos sendas evaluaciones a los estudiantes, de manera que nadie tenga su propia evaluación. Iremos comentando cada pregunta con ayuda de la pizarra para anotar o resaltar aquellos aspectos importantes o que nos puedan ser útiles para la introducción del tema. El estudiante "corrector" también tendrá que poner su nombre. Con esto conseguiremos que el alumnado participe, sea consciente de los conocimientos de sus compañeros y suyos propios y anote, con un bolígrafo de distinto color sus observaciones.

Esta recogida de información inicial es interesante en dos vertientes: por un lado, obtendremos los conocimientos iniciales del alumnado que nos servirán para determinar y adaptar el punto de arranque de la unidad y, por otro lado, nos permitirán comprobar mediante el rol de "correctores" cómo asimilan la información grupal que se va aportando, lo que nos ayudará a establecer cómo enfocar las explicaciones.

- Visionado de video - 15':

Se reproducirá un video introductorio sobre los vectores. Cuando aparezcan términos clave pausaremos para anotarlos en la pizarra: vector, módulo, dirección, sentido, iniciación a la suma y a la resta de vectores.

Enlace vídeo propuesto: https://www.youtube.com/watch?v=wI4l6c_5vv4&pbjreload=10

Sesión 2: Vectores en el plano. Características.

En esta sesión trabajaremos los elementos principales de los vectores en el plano. La metodología empleada será por un lado lección magistral participativa y, por otro lado, la resolución de actividades en clase sobre los temas tratados ya sea en cuaderno o mediante recursos TIC.

Plan de clase:

- Metodología expositiva - 10':

Comenzaremos repasando los términos clave que anotamos en la pizarra en la sesión anterior: vector, módulo, dirección, sentido. Explicaremos otros términos importantes como: extremo, origen...

- Trabajo individual – Tarea 1 - 10':

Esta tarea consistirá en resolver un cuestionario mediante la app *Kahoot!* Con ello conseguiremos repasar los conceptos vistos hasta ese momento. Además, al ser un cuestionario creado *ex profeso* podremos incidir en aquellas cuestiones en las que se prevé que existan más dudas o dificultades. Tras cada pregunta del cuestionario, y antes de pasar a la siguiente se hará una pausa para hacer hincapié en el concepto, ampliar información o volver a explicarlo en caso de que se hayan producido muchos errores.

- Metodología expositiva - 20':

Explicación del vector cero, vector opuesto, vectores proporcionales, producto de un vector por un número, cálculo de módulo. Realización de ejemplos en pizarra.



- Trabajo individual – Tarea 2 - 15':

Aunque se considere trabajo individual debemos fomentar que los estudiantes puedan ayudarse entre ellos, resolviéndose mutuamente pequeñas dudas. Así mismo, debemos hacerles ver los recursos de apoyo a su alcance: libro de texto y el propio profesor.

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Puesta en común - 5':

Antes de finalizar la sesión pondremos en común la resolución de la Tarea 3.

Sesión 3: Operaciones con vectores I.

En esta sesión comenzaremos a realizar operaciones con vectores. La metodología empleada será por un lado lección magistral participativa y, por otro lado, la resolución de actividades en clase sobre los temas tratados.

Plan de clase:

- Metodología expositiva - 10':

Explicación de la suma y resta de vectores. Realización de ejemplos en pizarra.

- Trabajo individual – Tarea 3 - 15':

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Metodología expositiva - 15':

Explicación de la combinación lineal entre vectores y análisis de dirección. Realización de ejemplos en pizarra.

- Trabajo individual – Tarea 4 - 15':

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Puesta en común - 5':

Antes de finalizar la sesión pondremos en común la resolución de las Tareas 3 y 4.

Sesión 4: Operaciones con vectores II.



En esta sesión continuaremos realizando operaciones con vectores. La metodología empleada será por un lado lección magistral participativa y, por otro lado, la resolución de actividades en clase sobre los temas tratados.

Plan de clase:

- Metodología expositiva - 10':

Explicación de la obtención del punto medio de un segmento y de los puntos alineados. Realización de ejemplos en pizarra.

- Trabajo individual – Tarea 5 - 20':

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Metodología expositiva - 10':

Explicación del vector perpendicular a otro. Realización de ejemplos en pizarra.

- Trabajo individual – Tarea 6 - 15':

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Puesta en común - 5':

Antes de finalizar la sesión pondremos en común la resolución de las Tareas 5 y 6.

Sesión 5: Ecuación de la recta I.

En esta sesión comenzaremos a trabajar con rectas y sus distintas ecuaciones. La metodología empleada será por un lado lección magistral participativa y, por otro lado, la resolución de actividades en clase sobre los temas tratados.

Plan de clase:

- Metodología expositiva - 25':

Explicación del concepto de recta, ecuación vectorial de la recta y ecuaciones paramétricas de la recta. Realización de ejemplos en pizarra.

- Trabajo individual – Tarea 7 - 25':

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.



- Puesta en común - 10':

Antes de finalizar la sesión pondremos en común la resolución de la Tarea 7.

Sesión 6: Ecuación de la recta II.

En esta sesión continuaremos trabajando con rectas y sus distintas ecuaciones. La metodología empleada será por un lado lección magistral participativa y, por otro lado, la resolución de actividades en clase sobre los temas tratados.

Plan de clase:

- Metodología expositiva - 25':

Explicación del concepto de recta, ecuación continua y explícita de la recta. Realización de ejemplos en pizarra.

- Trabajo individual – Tarea 8 - 25':

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Puesta en común - 10':

Antes de finalizar la sesión pondremos en común la resolución de la Tarea 8.

Sesión 7: Operaciones con ecuaciones de la recta.

En esta sesión, que enfocaremos de una manera práctica, nos centraremos en el trabajo con las ecuaciones de la recta. La metodología empleada se centrará en la resolución de una actividad por parte de los alumnos con una posterior puesta en común.

Plan de clase:

- Trabajo en parejas – Tarea 9 - 40':

Entregamos a cada pareja de estudiantes una plantilla para respuestas. Deberán completar el cuadro de ecuaciones a partir de los datos dados.

La confección de las parejas de trabajo no será al azar, sino que se realizará un estudio previo de manera que ambos componentes de la pareja se complementen y puedan ayudarse mutuamente.

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo. En caso de que alguna duda sea generalizada, pausaremos la actividad y se realizará una nueva explicación en la pizarra.

- Puesta en común - 20':

Puesta en común de la resolución de la Tarea 9.



Sesión 8: Pendiente e incidencia de rectas.

Esta sesión estará dedicada a la pendiente de las rectas y a la determinación de la incidencia entre rectas. Se realizará la sesión mediante la metodología de *Standarts Units*.

Plan de clase:

- Inicio de la sesión - 5':

Para introducir la sesión preguntaremos a los estudiantes sobre las nociones que tienen acerca de la pendiente de una recta: concepto, cómo calcularla a partir de dos puntos, etc. El profesor recogerá estas ideas en la pizarra.

- Desarrollo de la lección en parejas - 10':

Se pretende que los estudiantes desarrollen su propio conocimiento. Se pide a los estudiantes que dibujen en el papel cuadriculado proporcionado una recta con pendiente 2. Después pedir que dibujen una recta perpendicular y otra paralela a la interior. Posibilidad de utilizar transportador de ángulos. Pedir que busquen la relación entre la pendiente de una recta las otras, utilizar distintas rectas con otras posiciones iniciales.

- Discusión grupal - 10':

Recopilar en la pizarra las conclusiones a las que hayan llegado. Anotar en la pizarra respuestas a cuestiones que vayamos realizando:

- Dadme un ejemplo de recta que tenga pendiente 4.
- Dame un ejemplo de una recta que sea perpendicular a $y = 3x - 2$
- Decidme dos ecuaciones de rectas que sean perpendiculares.

- Trabajo en parejas – Tarea 10 - 25':

Entregamos a cada pareja de estudiantes una plantilla para respuestas y un paquete de ecuaciones recortables, ambos recogidos en el punto 3.3. Desarrollo de tareas. Tendrán que agrupar cada recta según la característica que cumplan.

Para determinar las características de las rectas tendrán que transformar las ecuaciones dadas en ecuaciones que les permitan comparar o ecuaciones que les ayuden a obtener los datos necesarios.

Habrán dos rectas que no encajarán en ninguna de las características dadas, y serán los estudiantes quienes tendrán que determinar qué característica es común a ambas.

Mientras los estudiantes están trabajando se recorrerá las mesas preguntando por los procedimientos, razonamientos o soluciones que vayan adoptando. Así mismo se irán subsanando las dudas que vayan surgiendo.

Tarea de ampliación: Si alguna pareja termina demasiado pronto, podemos proponerles que aporten una nueva recta, distinta a las dadas, que cumpla la característica de cada grupo.

- Discusión grupal 10':



El objetivo de esta parte es comprobar las respuestas del alumnado. Centrándonos, no sólo en si han ubicado correctamente las ecuaciones en su cuadro correspondiente, sino especialmente en el proceso y criterios que han ido utilizando para llegar a las conclusiones. El profesor utilizará *Geogebra* para representar las rectas sobre las que se vaya hablando en cada momento para una visualización gráfica de sus propiedades.

Algunas de las preguntas que se pueden ir realizando para guiar esta parte de la clase:

- ¿Qué criterio habéis utilizado para determinar que estas dos rectas son paralelas?
- Teniendo la misma pendiente puede ser que sean la misma recta. ¿Habéis comprobado que no son la misma recta? Si no lo habéis hecho, ¿Cómo podríamos comprobarlo?
- ¿Cómo sabemos que dos rectas son perpendiculares?
- Dos ecuaciones cuyo término independiente es el mismo, ¿pueden cortar el eje OY en lugares distintos? (importancia de ver el término de y)

Tarea de ampliación: las ecuaciones recortables pueden ser dadas en otras representaciones (paramétrica, vectorial...) de manera que los estudiantes tengan que hacer un trabajo previo de homogenización de las ecuaciones. Para esta tarea no se ha realizado así porque el objetivo es el estudio de las incidencias y no tanto trabajar las ecuaciones y sus conversiones, que ya se ha trabajado en sesiones anteriores.

Sesión 9: Examen.

Esta sesión se dedicará a una prueba escrita que servirá para evaluar los conocimientos alcanzados por el alumnado.

Sesión 10: Corrección de examen – Valoración unidad.

En esta sesión realizaremos la corrección de la prueba escrita en la sesión anterior. Nos centraremos en las dificultades que hayamos detectado de una forma mayoritaria.

Una vez revisado y comentado el examen, haremos una valoración con los alumnos del discurrir de la unidad didáctica. Preguntas como ¿Qué ha sido lo que más le ha gustado de la unidad? o, ¿Cuáles han sido las mayores dificultades que se han encontrado? Pueden ayudarnos a tomar consciencia del punto de vista del estudiante y nos facilitarán la labor tanto en unidades posteriores como en cursos venideros.

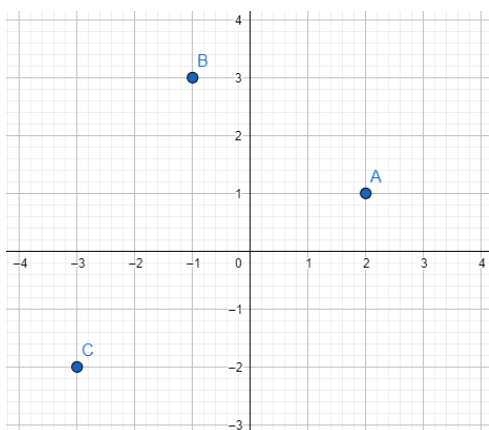
3.3. Desarrollo de tareas.

- **Evaluación inicial.**

Actividades:

1) Observa los siguientes ejes de coordenadas y:

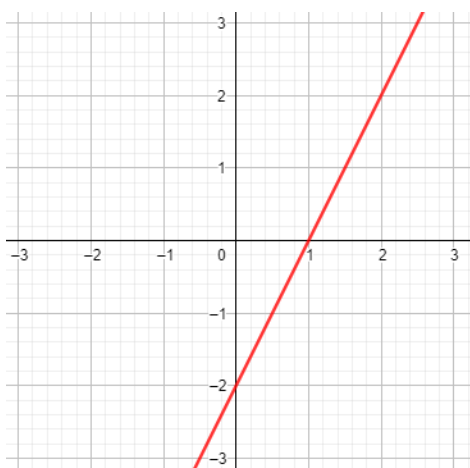
- a) Determina las coordenadas de los puntos A, B, C.
- b) Representa sobre los ejes los puntos D (-3,2), E (-1,-2) y F (2,-1)



2) En una traslación, el vector guía es $\vec{v} = (2,3)$. Hallas, analítica y gráficamente, los vértices del triángulo homólogo a ABC, donde: A (2,0), B (-1,3) y C (4,3).

3) Observa la gráfica y responde:

- a) ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- b) ¿Cuál es la ordenada en el origen?
- c) Escribe la ecuación de la recta representada.



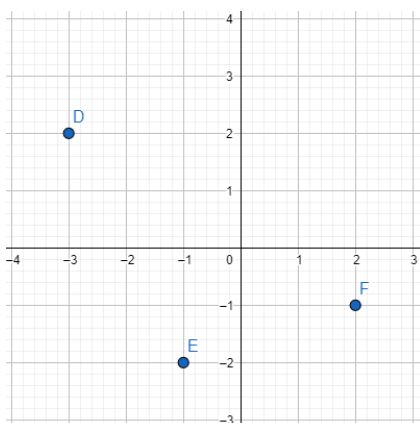
Solución de la tarea:

1)

- a) A (2,1), B (-1,3), C(-3,-2)



b)



2)

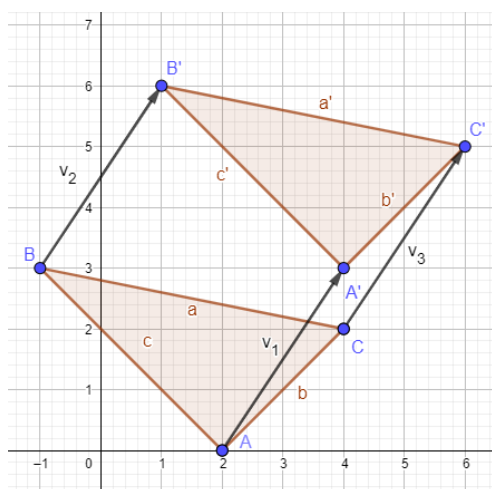
Analítica:

$$A' = A(2,0) + \vec{v}(2,3) = A'(4,3)$$

$$B' = B(-1,3) + \vec{v}(2,3) = B'(1,6)$$

$$C' = C(4,3) + \vec{v}(2,3) = C'(6,6)$$

Gráfica:



3) Observa la gráfica y responde:

a) $m = 2$

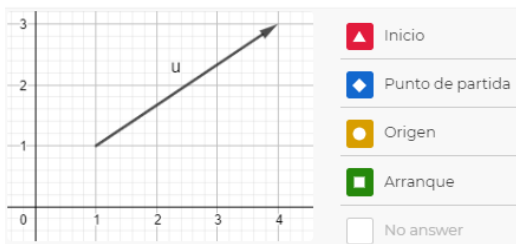
b) -2

c) $y = 2x - 2$

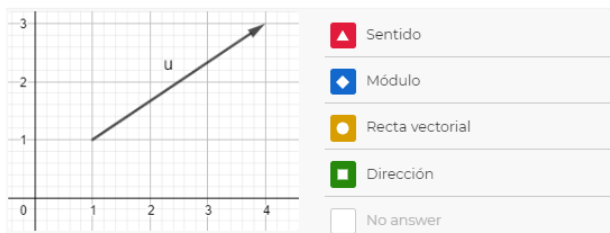
• Tarea 1.



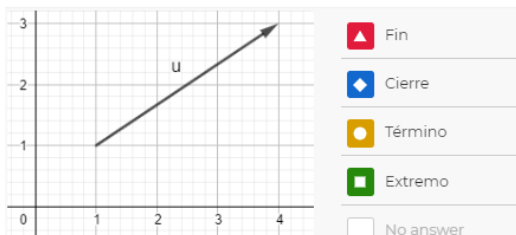
1 El punto de inicio de un vector se conoce como...



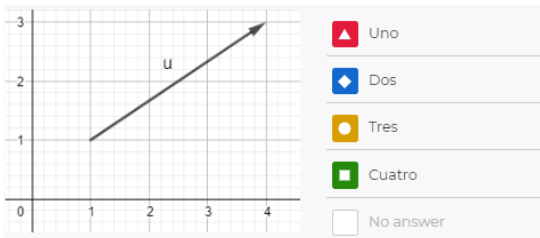
4 La recta en que se encuentra un vector y todas sus paralelas se denomina...



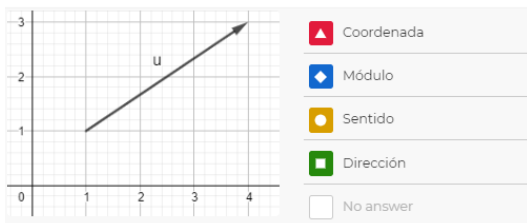
2 El punto final de un vector se conoce como...



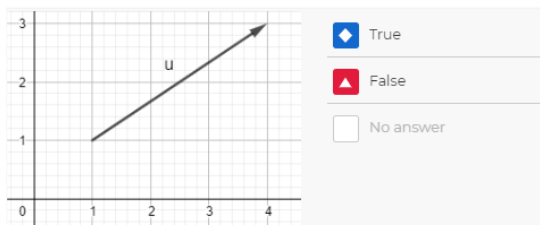
5 ¿Cuántos sentidos admite cada dirección?



3 En un vector, la distancia entre el origen y el extremo se denomina...



6 Dos vectores pueden tener misma dirección pero distinto sentido

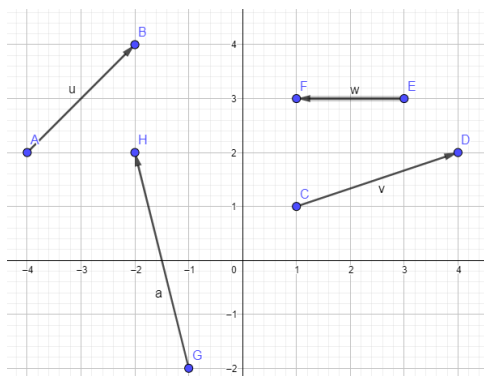


• Tarea 2.

Actividades:

1) Observa los siguientes vectores y:

- Determina las coordenadas del vector $\vec{u}$
- ¿Cuál es el origen del vector $\overrightarrow{CD}$, ¿y el extremo del vector $\vec{a}$?
- Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{EF}$ y calcula su módulo.





- 2) ¿Un vector y su opuesto son proporcionales? Justifica por qué sí o por qué no.
- 3) ¿Por qué el vector cero no tiene dirección ni sentido?
- 4) Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1,1)$, $B(-2,7)$, $C(6,0)$, $D(3,6)$, y observa que son iguales.
- 5) Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

Solución de la tarea:

1)

- a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(x, y) = B - A = (-2, 7) - (1, 1) = (-3, 6)$
- b) El origen del vector $\overrightarrow{CD}$ es el punto $C, (1, 1)$; $C = (1, 1)$; El extremo del vector $\vec{a}$ es el punto $H, (-2, 2)$; $H = (-2, 2)$
- c) $\overrightarrow{EF}(x, y) = F - E = (3, 3) - (1, 3) = (2, 0)$
 $|\overrightarrow{GH}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

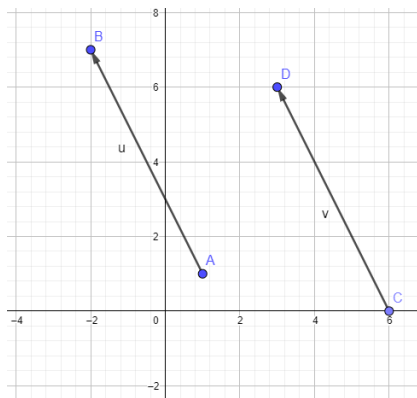
2)

Sí, son proporcionales. Por definición sabemos que dos vectores son proporcionales si tienen la misma dirección independientemente de su sentido. En el caso de dos vectores opuestos varían en su sentido, pero tienen la misma dirección y, por tanto, son proporcionales.

3)

El vector cero, es un vector cuyo origen y extremo se encuentran en el mismo punto de ahí que carezca de dirección y, por tanto, de sentido.

4)



5)



$$\overrightarrow{AB}(x,y) = B - A = (-2,7) - (1,1) = (-3,6)$$

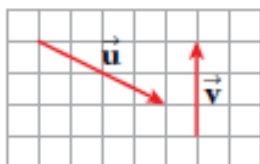
$$\overrightarrow{CD}(x,y) = D - C = (3,6) - (6,0) = (-3,6)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

• **Tarea 3.**

Actividades:

1) Observa los siguientes vectores y:



a) Determina las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} + \vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$, y di cuáles son sus coordenadas.

c) Halla el módulo de $\vec{u}$; $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$,

2) Dados los vectores $\vec{u}(1,3)$, $\vec{v}(-2,5)$, $\vec{w}(-1,-3)$, efectúa estas operaciones:

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

c) $-2\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$

b) $-3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

e) $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w}$

f) $-\frac{1}{5}\vec{v} - \vec{w} + \vec{u}$

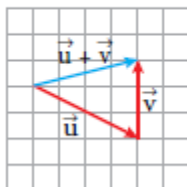
Solución de la tarea:

1)

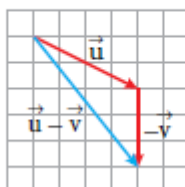
a) $\vec{u}(4,-2), \vec{v}(0,3)$

b)

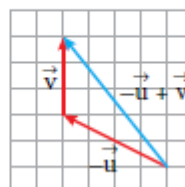
$\vec{u} + \vec{v}$



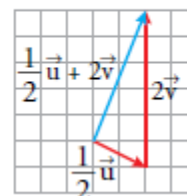
$\vec{u} - \vec{v}$



$-\vec{u} + \vec{v}$



$\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$



$$\vec{u} + \vec{v} = (4,-2) + (0,3) = (4,1)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (4,-2) - (0,3) = (4,-5)$$

$$-\vec{u} + \vec{v} = (-4,2) + (0,3) = (-4,5)$$



$$\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v} = (2, -1) + (0, 6) = (2, 5)$$

c)

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

• **Tarea 4.**

Actividades:

- 1) Comprueba si cada uno de los siguientes pares de vectores tienen o no la misma dirección:

a) $\vec{u}(3,1), \vec{v}(-3,1)$

b) $\vec{u}(2,4), \vec{v}(1,2)$

c) $\vec{u}(-2,0), \vec{v}(4,0)$

d) $\vec{u}(5,2), \vec{v}(2,5)$

e) $\vec{u}(-2,6), \vec{v}(-3,1)$

f) $\vec{u}(0,-1), \vec{v}(-2,0)$

- 2) Dados los siguientes vectores:

$$\vec{u}(-5,8), \vec{v}(-41,-10), \vec{w}(3,6)$$

a) Halla las coordenadas de $3\vec{u} - 2\vec{v} + 10\vec{w}$

b) Averigua el valor de x e y para que se cumpla: $x\vec{u} + y\vec{w} = \vec{v}$

Solución de la tarea:

1)

a) $\frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección

b) $\frac{2}{1} \neq \frac{-4}{2} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección

c) $\vec{v} = -2\vec{u} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección

d) $\frac{5}{2,5} = \frac{2}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección

e) $\frac{-2}{-3} \neq \frac{6}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección

f) No existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k\vec{u} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección

2)

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 10\vec{w} = 3(-5,8) - 2(-41,-10) + 10(3,6) =$

$$(-15,24) - 2(-82,-20) + (30,60) = (97,104)$$

b) $x\vec{u} + y\vec{w} = \vec{v}$

$$x(-5,8) + y(3,6) = (-41,-10) \rightarrow (-5x,8x) + (3y,6y) = (-41,-10)$$



$$\begin{cases} -5x + 3y = -41 \\ 8x + 6y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x - 6y = 82 \\ 8x + 6y = -10 \\ 18x = 72 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 \cdot 4 + 6y = -10 \\ 6y = -42 \\ y = -7 \end{cases}$$

c) Por tanto, $4\vec{u} - 7\vec{w} = \vec{v}$

• **Tarea 5.**

Actividades:

- 1) Halla las coordenadas del punto medio de cada segmento:
 - a) $A(-2,5), B(4,1)$
 - b) $C(7, -3), D(-5,1)$
- 2) Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:
 - a) $A(4, -1), P(-7,2)$
 - b) $A(2,4), P(5, -1)$
- 3) Comprueba analíticamente si los puntos $R(2,7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados
- 4) Averigua el valor de a para que los puntos $R(2,7)$, $S(5, -1)$ y $T(a, -25)$ estén alineados.
- 5) Averigua qué relación deben cumplir x e y para que $A(0,1), B(2,5)$ y $P(x, y)$ estén alineados.

Solución de la tarea:

1)

- a) $M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \rightarrow M(1,3)$
- b) $M\left(\frac{7+(-5)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \rightarrow M(1, -1)$

2)

- a) Llamamos $A'(x, y)$ al punto simétrico de A respecto de P . El Punto P será el punto medio del segmento de extremos A y A' .

$$\left. \begin{aligned} -7 &= \frac{4+x}{2} \rightarrow -14 = 4+x \rightarrow x = -18 \\ 2 &= \frac{-1+y}{2} \rightarrow 4 = -1+y \rightarrow y = 5 \end{aligned} \right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (-18, 5).$$

- b) $A'(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} 5 &= \frac{2+x}{2} \rightarrow 10 = 2+x \rightarrow x = 8 \\ -1 &= \frac{4+y}{2} \rightarrow -2 = 4+y \rightarrow y = -6 \end{aligned} \right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (8, -6).$$

3)



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} = (5 - 2, -1 - 7) = (3, -8) \\ \overrightarrow{ST} = (15 - 5, -25 + 1) = (10, -24) \end{array} \right\} \frac{3}{10} \neq \frac{8}{24} \rightarrow \overrightarrow{RS} \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{RT}$$

Los tres puntos R, S y T no están alineados.

4)

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} = (3, -8) \\ \overrightarrow{SQ} = (a - 5, -24) \end{array} \right\}$$

Para que R, S y Q estén alineados, se ha de cumplir que:

$$\frac{3}{a-5} = \frac{-8}{-24} \rightarrow \frac{3}{a-5} = \frac{1}{3} \rightarrow a - 5 = 9 \rightarrow \text{Luego, } a = 14$$

5)

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2 - 0, 5 - 1) = (2, 4) \\ \overrightarrow{AP} = (x - 0, y - 1) = (x, y - 1) \end{array} \right\}$$

Para que P esté alineado con A y B , se ha de cumplir que:

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{y-1} \rightarrow 2(y - 1) = 4x \rightarrow y - 1 = 2x \rightarrow y = 2x + 1$$

La relación buscada entre x e y es $y = 2x + 1$

- **Tarea 6.**

Actividades:

- 1) Calcular un vector perpendicular a los siguientes vectores. Representa gráficamente los vectores dados y los perpendiculares obtenidos.

a) $\vec{u} = (-2, 1)$

b) $\vec{v} = (3, -1)$

Solución de la tarea:

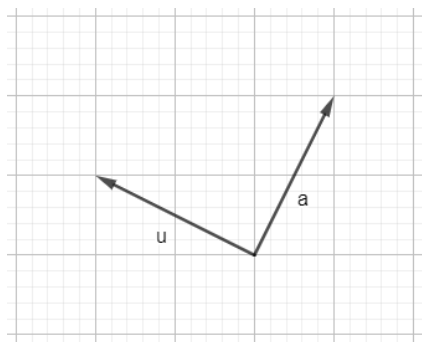
1)

- a) Para obtener un vector $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{u}$ se tiene que cumplir que el producto escalar de $\vec{a} \cdot \vec{u} = 0$

$$\vec{a}(x, y) \cdot \vec{u}(-2, 1) = 0 \rightarrow -2x + 1y = 0$$

Cogemos cualquier valor para x , por ejemplo: $x = 1 \rightarrow -2 \cdot 1 + 1y = 0 \rightarrow y = 2$

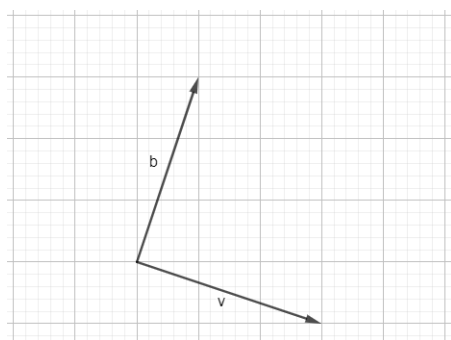
El vector $\vec{a} = (1, 2)$ es perpendicular a $\vec{u} = (-2, 1)$



- b) Para obtener un vector $\vec{b}$ perpendicular a $\vec{v}$ se tiene que cumplir que el producto escalar de $\vec{b} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{b}(x, y) \cdot \vec{v}(3, -1) = 0 \rightarrow 3x - 1y = 0$$

Cogemos cualquier valor para x , por ejemplo: $x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 - 1y = 0 \rightarrow y = 3$ El vector $\vec{b} = (1, 3)$ es perpendicular a $\vec{v} = (3, -1)$



• Tarea 7.

Actividades:

- 1) Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que pasan por:

a) $M(-2, 1), N(4, 5)$

b) $P(0, 0), Q(3, -2)$

c) $R(2, 5), S(8, 5)$

d) $T(-2, 1), U(-2, -2)$

Solución de la tarea:

1)

a)

$$\left. \begin{matrix} M(-2, 1) \\ N(4, 5) \end{matrix} \right\} \rightarrow \overrightarrow{RS}(6, 4) \rightarrow \vec{v}(3, 2) \text{ es un vector dirección.}$$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\vec{v}$$

$$(x, y) = (-2, 1) + t(3, 2)$$

Ecuaciones paramétricas:



$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

b)

$$\left. \begin{matrix} P(0,0) \\ Q(3,-2) \end{matrix} \right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(3,-2) \rightarrow \vec{v}(3,-2) \text{ es un vector dirección.}$$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\vec{v}$$

$$(x,y) = (0,0) + t(3,-2)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \end{cases}$$

c)

$$\left. \begin{matrix} R(2,5) \\ S(8,5) \end{matrix} \right\} \rightarrow \overrightarrow{RS}(6,0) \rightarrow \vec{v}(1,0) \text{ es un vector dirección.}$$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\vec{v}$$

$$(x,y) = (2,5) + t(1,0)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = 5 + 0t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 \end{cases}$$

d)

$$\left. \begin{matrix} T(-2,1) \\ U(-2,-2) \end{matrix} \right\} \rightarrow \overrightarrow{TU}(0,-3) \rightarrow \vec{v}(0,1) \text{ es un vector dirección.}$$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\vec{v}$$

$$(x,y) = (-2,1) + t(0,1)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + 0t \\ y = 1 + 1t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \end{cases}$$

• Tarea 8.

Actividades:

1) Escribe las ecuaciones continua y explícita de las rectas que pasan por:

b) $M(-2,1), N(4,5)$

b) $P(0,0), Q(3,-2)$

d) $R(2,5), S(8,5)$

d) $T(-2,1), U(-2,-2)$



Solución de la tarea:

1)

a)

Ecuación continua:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}$$

Ecuación explícita: Despejando y en la ecuación anterior:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

b)

Ecuación continua:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{-2}$$

Ecuación explícita: Despejando y en la ecuación anterior:

$$y = -\frac{2}{3}x$$

c)

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{0}$$

Ecuación explícita: Despejando y en la ecuación anterior:

$$y = 5$$

d)

Ecuación continua:

$$\frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1}$$

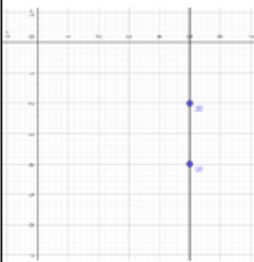
Ecuación explícita: Despejando y en la ecuación anterior:

$$x = -2$$

- Tarea 9.



Plantilla para respuestas:

Pendiente	Puntos que pertenecen a la recta	Vector dirección	Ecuación Vectorial	Ecuación Paramétrica	Ecuación Continua	Ecuación Explícita	Gráfica
2/3			$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \lambda \vec{v}$ $(x, y) = (-2, 1) + \lambda(3, 2)$		$\frac{x - 0}{3} = \frac{y - 0}{-2}$		
	P(0, 0), Q(3, -2)			$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 \end{cases}$			
		$\overrightarrow{TU} = (-2, 5) - (-2, -2)$ $\overrightarrow{TU}(0, -3) \rightarrow \vec{v}(0, 1)$				$x = -2$	



Solución de la tarea:

Pendiente	Puntos que pertenecen a la recta	Vector dirección	Ecuación Vectorial	Ecuación Paramétrica	Ecuación Continua	Ecuación Explícita	Gráfica
$\frac{2}{3}$	$M(-2, 1), N(4, 5)$	$\overrightarrow{MN} = (4, 5) - (-2, 1)$ $\overrightarrow{MN}(6, 4) \rightarrow \vec{v}(3, 2)$	$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \lambda \vec{v}$ $(x, y) = (-2, 1) + \lambda(3, 2)$	$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$	$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}$	$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$	
$-\frac{2}{3}$	$P(0, 0), Q(3, -2)$	$\overrightarrow{PQ} = (3, -2) - (0, 0)$ $\overrightarrow{PQ}(3, -2) \rightarrow \vec{v}(3, -2)$	$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}$ $(x, y) = (0, 0) + \lambda(3, -2)$	$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$	$\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{-2}$	$y = -\frac{2}{3}x$	
0	$R(2, 5), S(4, 5)$	$\overrightarrow{RS} = (4, 5) - (2, 5)$ $\overrightarrow{RS}(2, 0) \rightarrow \vec{v}(1, 0)$	$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OR} + \lambda \vec{v}$ $(x, y) = (2, 5) + \lambda(1, 0)$	$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 \end{cases}$	$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{0}$	$y = 5$	
1	$T(-2, 1), U(-2, -2)$	$\overrightarrow{TU} = (-2, 5) - (-2, -2)$ $\overrightarrow{TU}(0, -3) \rightarrow \vec{v}(0, 1)$	$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OT} + \lambda \vec{v}$ $(x, y) = (-2, 1) + \lambda(0, 1)$	$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$	$\frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1}$	$x = -2$	



• **Tarea 10.**

Plantilla para respuestas:

Estas rectas son paralelas	Estas rectas son perpendiculares
Estas rectas cortan el eje OY en el mismo punto	Estas rectas cortan el eje OX en el mismo punto
Estas rectas pasan por el punto (1, 5)	Estas rectas...

Ecuaciones recortables:

$y = 4x + 4$	$4y = x + 3$	$y + x + 8 = 0$
$y = 8x - 3$	$y + 4x + 6 = 0$	$y = 6x - 4$
$3y = 2x - 8$	$y + 6x = 11$	$2y = 8x + 3$
$y + 8x = 6$	$2y + 8 = 3x$	$2y + x = 4$

Solución de la tarea:

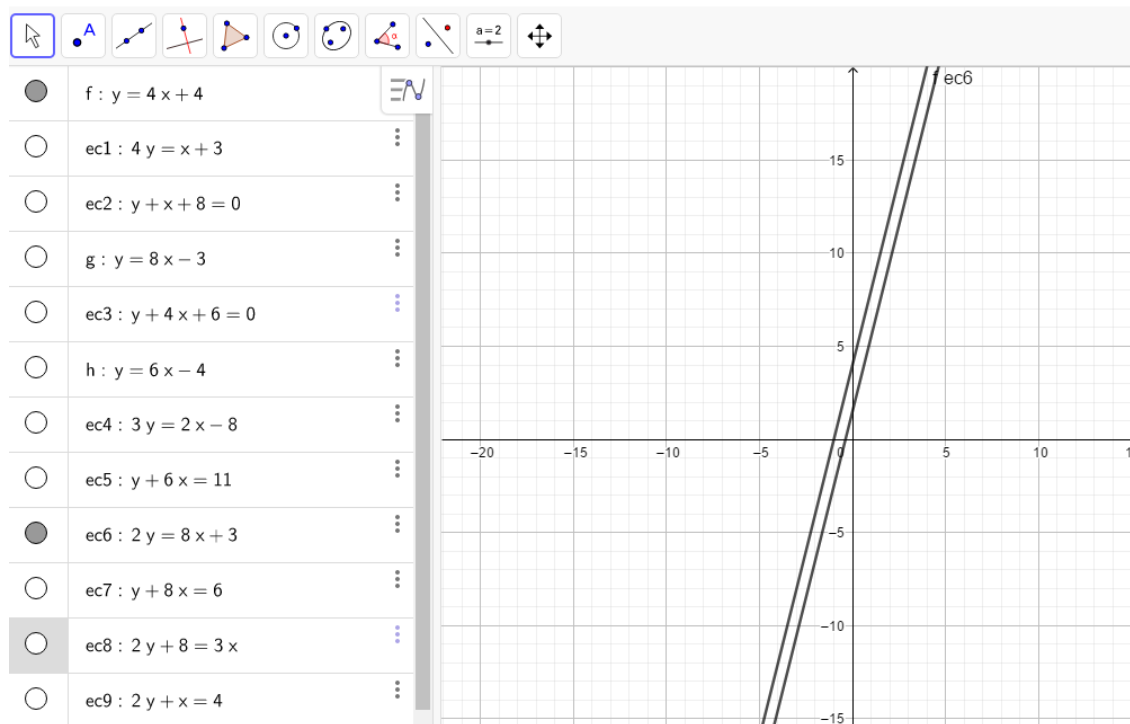
Estas rectas son paralelas	Estas rectas son perpendiculares
$y = 4x + 4$	$4y = x + 3$



$2y = 8x + 3$	$y + 4x + 6 = 0$
Estas rectas cortan el eje OY en el mismo punto	Estas rectas cortan el eje OX en el mismo punto
$y = 6x - 4$	$3y = 2x - 8$
$2y + 8 = 3x$	$2y + x = 4$
Estas rectas pasan por el punto (1, 5)	Estas rectas... (pasan por el punto (2, -10))
$y = 8x - 3$	$y + x + 8 = 0$
$y + 6x = 11$	$y + 8x = 6$

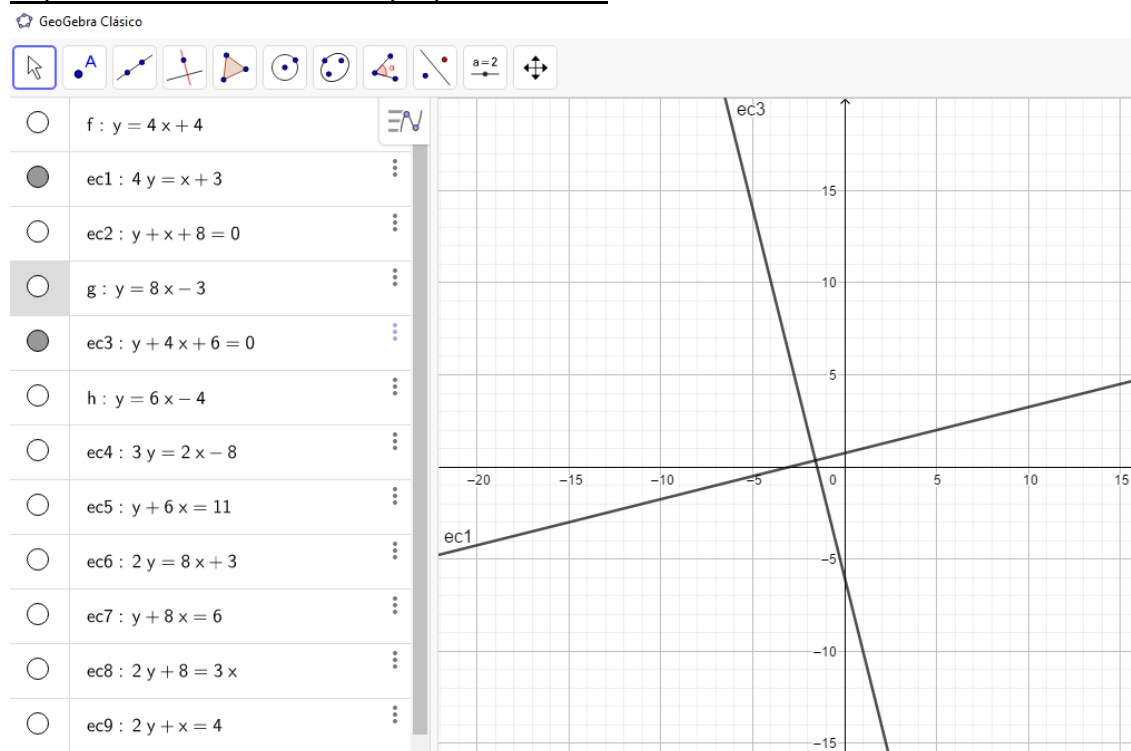
Representación de las rectas paralelas:

GeoGebra Clásico

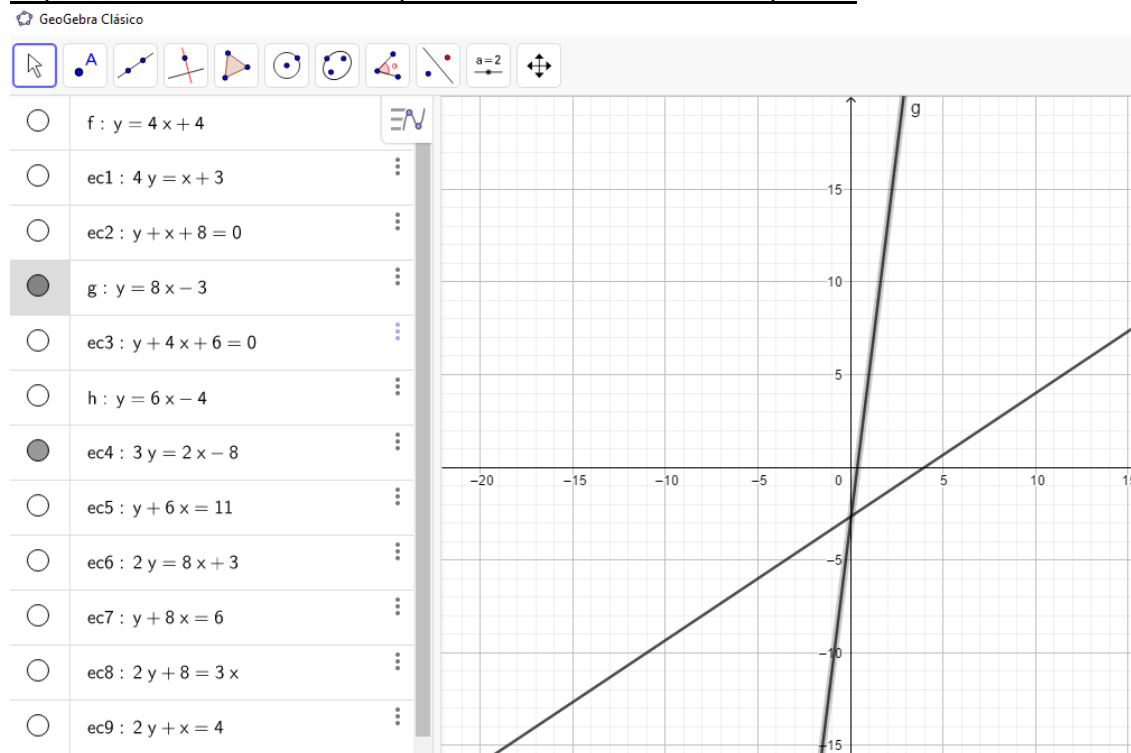




Representación de las rectas perpendiculares:

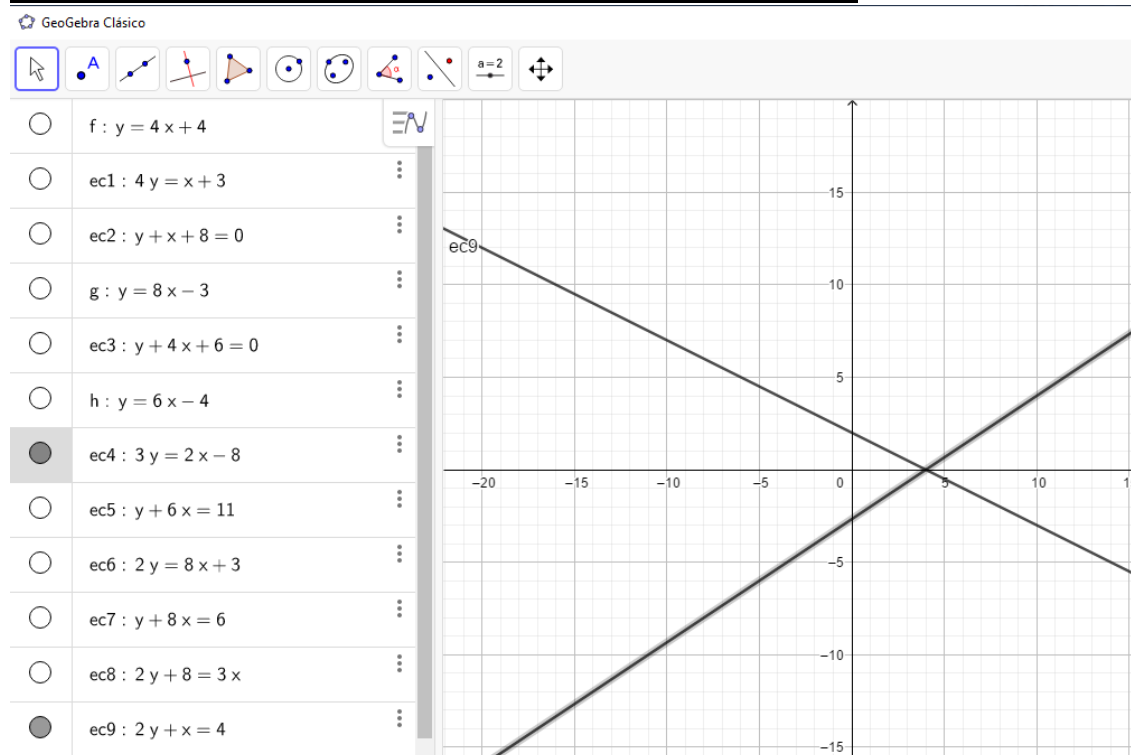


Representación de las rectas que cortan a OY en el mismo punto:

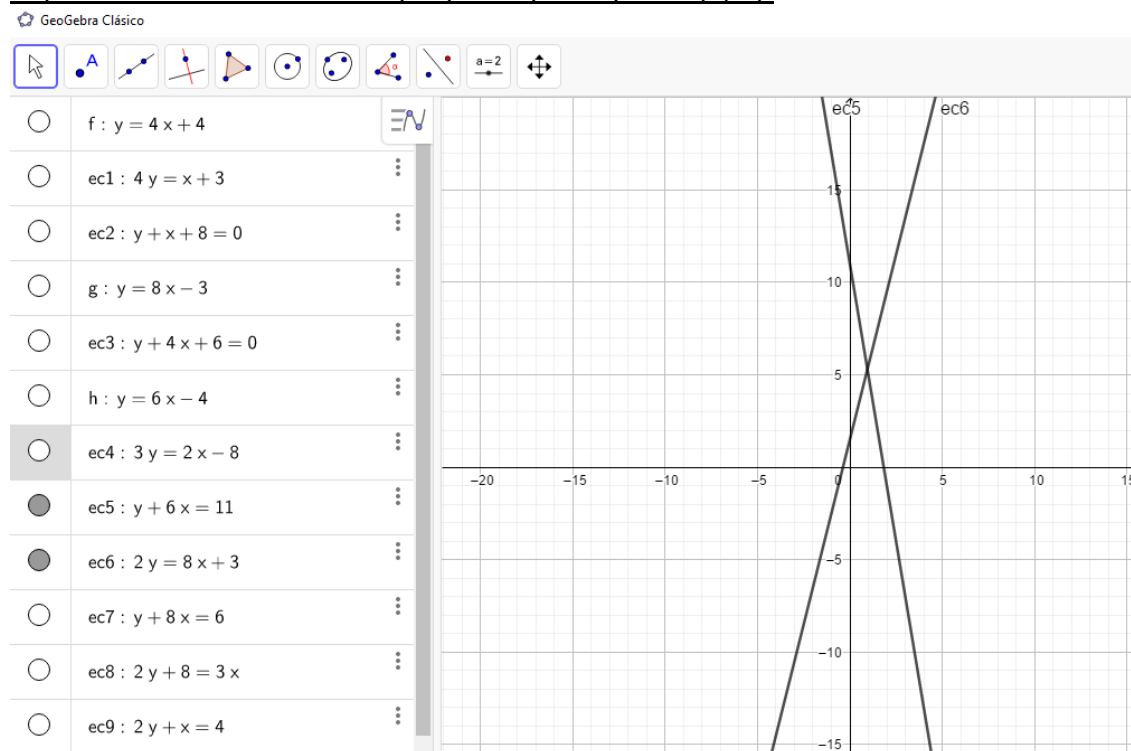




Representación de las rectas que cortan a OX en el mismo punto:

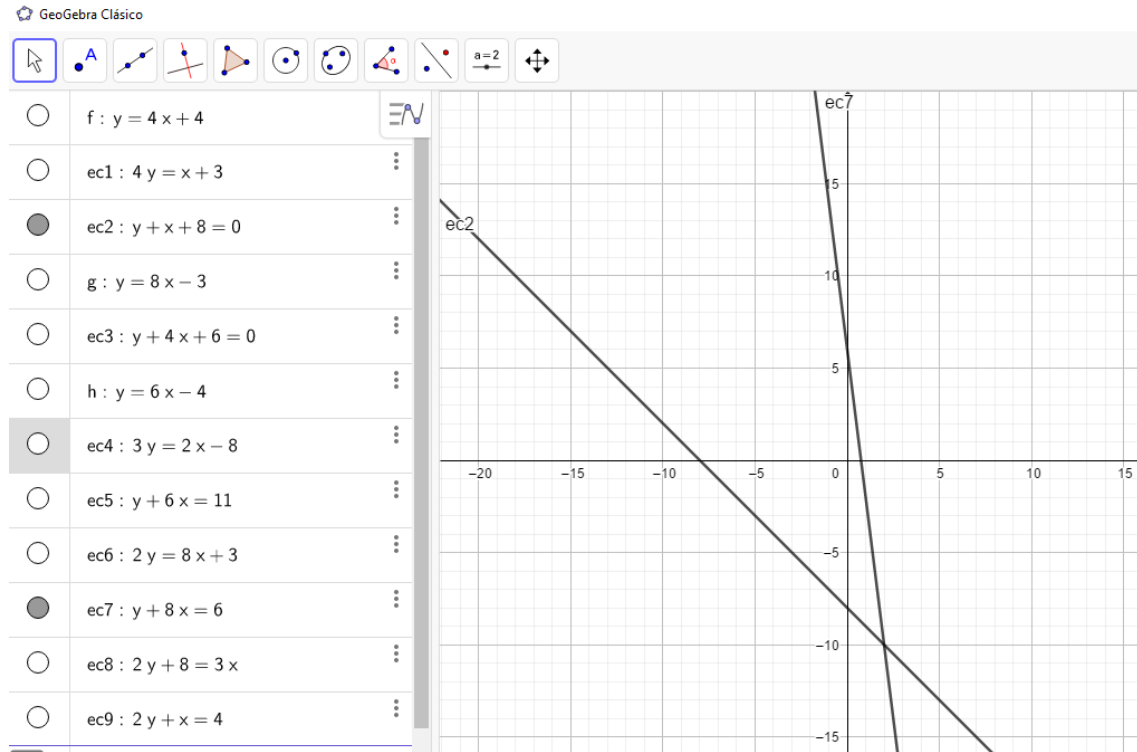


Representación de las rectas que pasan por el punto (1, 5):





Representación de las rectas que pasan por el punto $(2, -10)$:



• Examen.

Actividades:

- 1) Indica si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido, donde las coordenadas de cada punto son $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(5,3)$ y $D(4,1)$. ¿Son equipolentes? Obtén las coordenadas de cada uno de ellos.
- 2) Dibuja en un plano coordenado los vectores $\vec{u} = (5, -3)$ y $\vec{v} = (1,2)$. Obtén $\vec{u} + \vec{v}$ y $-\vec{2v}$ tanto gráfica como analíticamente.
- 3) Halla las coordenadas del punto medio de cada uno de los lados del triángulo ABC , siendo $A(1,3)$, $B(1, -1)$, y $C(-3,1)$.
- 4) Obtén la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la continua y la explícita de la recta que pasa por $(-1,1)$ y es paralela al vector $(2, -1)$.
- 5) Halla un punto y un vector director de la recta $2x + y - 1 = 0$. Utiliza el punto y el vector obtenidos para hallar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la continua y la explícita de dicha recta.



- 6) Indica la posición relativa de las rectas $x + y - 2 = 0$ y $2x + y - 2 = 0$. En el caso de ser secantes, halla el punto de corte.
- 7) Averigua si los puntos $R(-5,6)$, $S(-3,2)$ y $T(-2,0)$ están alineados, es decir, si están los tres sobre una misma recta. En caso afirmativo, calcula dicha recta, y en caso negativo, calcula la longitud de los lados del triángulo que se forma.

Solución de la tarea:

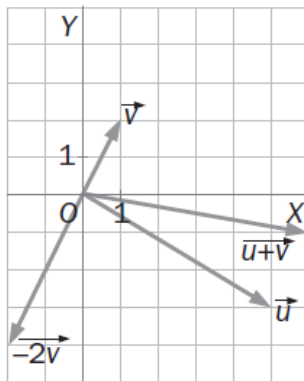
1)

Tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos opuestos, por lo que no son equipolentes.

$$\overrightarrow{AB} = (1,2) \text{ y } \overrightarrow{CD} = (-1,-2)$$

2)

$$\vec{u} + \vec{v} = (6, -1) \quad -2\vec{v} = (-2, -4)$$



3)

$$M_{AB}(1,1); M_{AC}(-1,2); M_{BC}(-1,0)$$

4)

$$\text{Vectorial: } (x, y) = (-1, 1) + t(2, -1)$$

$$\text{Paramétricas: } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{Continua: } \frac{x+y}{2} = \frac{y-1}{-1}$$

$$\text{Explícita: } y = \frac{-x+1}{2}$$

5)

$$\text{Por ejemplo, } A(0,1) \text{ y } B(1,-1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, -2)$$

$$\text{Vectorial: } (x, y) = (0, 1) + t(1, -2)$$

$$\text{Paramétricas: } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$



Continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2}$

Explícita: $y = -2x + 1$

6)

Las rectas son secantes. Punto de corte: (0,2)

7)

$\overrightarrow{RS} = (2,4) \rightarrow r: (x,y) = (-5,6) + t(2,-4)$

Como $T \in r$, entonces R, S y T están alineados, y la recta pedida es r

3.4. Análisis de tareas.

Evaluación inicial		
Elementos de la tarea	Meta	Conocer el punto de partida del alumnado
	Recursos/operaciones	Hoja con la evaluación inicial, bolígrafo
	Contenido	Contenidos que se presuponen de niveles anteriores
	Situación aprendizaje	-
	Complejidad	-
Condiciones	Presentación	Se expone la tarea a realizar
	Comunicación: Cómo, cuándo.	El docente tratará de restar presión a los estudiantes, haciéndoles partícipes de la importancia de conocer el punto de partida y animándoles a intentar responder a todo lo que sean capaces sin miedo a equivocarse. Una respuesta, incluso errónea nos ayudará siempre más que un espacio en blanco
	Agrupamiento alumnos	Individual
Observaciones	-	
Fuente	Elaboración propia y (Anzola, Vizmanos y Hervás, 2008)	

Tarea 1		
Elementos de la tarea	Meta	Repasar y afianzar los conceptos y elementos de un vector
	Recursos/operaciones	Cuestionario Kahoot! online, proyector, teléfonos móviles para la resolución



	Contenido	C19
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción.
Condiciones	Presentación	Se expone la tarea a realizar mediante TIC.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	El docente irá avanzando en el cuestionario a medida que los estudiantes vayan respondiendo las preguntas.
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Al quitar el peso de la tarea a tener que escribir los términos, centramos el interés en conocer los elementos y diferenciarlos entre ellos.	
Fuente	Elaboración propia	

Tarea 2		
Elementos de la tarea	Meta	Relacionar conceptos básicos y aplicarlos.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz
	Contenido	C1, C2, C3, C4, C21, C27
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción y Conexión / Desarrollo.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	
Fuente	Elaboración propia y (Colera et al., 2017)	



Tarea 3		
Elementos de la tarea	Meta	Manejar con soltura sumas, restas y cálculo del módulo de vectores.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz
	Contenido	C20, C26
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción y Conexión / Desarrollo.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	
Fuente	(Colera et al., 2017)	

Tarea 4		
Elementos de la tarea	Meta	Manejar con soltura la combinación lineal de vectores. Continuar trabajando sumas y rectas.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz
	Contenido	C7, C20
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción y Conexión / Desarrollo.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	



Fuente	(Colera et al., 2017)
---------------	-----------------------

Tarea 5		
Elementos de la tarea	Meta	Calcular el punto medio de un segmento y conocer si 3 puntos están alineados.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz
	Contenido	C4, C5, C25
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción y Conexión / Desarrollo.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	
Fuente	(Colera et al., 2017)	

Tarea 6		
Elementos de la tarea	Meta	Calcular vectores perpendiculares a otros.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz
	Contenido	C8, C26
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.



Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.
Fuente	Elaboración propia.

Tarea 7		
Elementos de la tarea	Meta	Reconocimiento y manejo de ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz.
	Contenido	C6, C9, C10, C13
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	
Fuente	(Colera et al., 2017)	

Tarea 8		
Elementos de la tarea	Meta	Reconocimiento y manejo de ecuaciones continua y explícita de la recta.
	Recursos/operaciones	Cuaderno de trabajo, lápiz.
	Contenido	C6, C11, C12, C13
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción.
Condiciones	Presentación	Se exponen mediante lección magistral previa, los conceptos a trabajar.



	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal. Correcciones y anotaciones durante la resolución
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	
Fuente	(Colera et al., 2017)	

Tarea 9		
Elementos de la tarea	Meta	Manejar con soltura las distintas ecuaciones de la recta
	Recursos/operaciones	Plantilla de respuestas, cuaderno de trabajo, lápiz.
	Contenido	C6, C9, C10, C11, C12, C13
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Desarrollo y Cierre.
Condiciones	Presentación	Se expone la tarea a realizar en base a las dos sesiones anteriores.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	Se plantea la tarea de forma verbal, posibilidad de proyectar el cuadro de respuestas en pizarra digital. El docente irá pasando por las distintas parejas realizando preguntas sobre los criterios utilizados y las distintas circunstancias que pueden presentarse
	Agrupamiento alumnos	Parejas.
Observaciones	Es importante el seguimiento y la observación mientras los estudiantes realizan la tarea para detectar posibles dificultades generalizadas.	
Fuente	Elaboración propia	

Tarea 10		
Elementos de la tarea	Meta	Repasar la pendiente de la recta y aplicarla para comprobar las incidencias entre rectas.



	Recursos/operaciones	Papel cuadriculado, transportador de ángulos, tijeras y pegamento, Ecuaciones recortables y plantilla para pegar ecuaciones.
	Contenido	C14, C15, C16, C17, C18
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Desarrollo y Cierre.
Condiciones	Presentación	Se expone la tarea a realizar en base a las conclusiones obtenidas en la tarea anterior.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	El docente irá pasando por las distintas parejas realizando preguntas sobre los criterios utilizados y las distintas circunstancias que pueden presentarse
	Agrupamiento alumnos	Parejas.
Observaciones	Fácilmente ampliable para aquellos estudiantes que obtengan las soluciones antes del resto.	
Fuente	Elaboración propia y (García, 2020)	

Examen		
Elementos de la tarea	Meta	Evaluar el aprendizaje adquirido
	Recursos/operaciones	Hoja de examen y bolígrafo.
	Contenido	Los recogidos en la Unidad Didáctica.
	Situación aprendizaje	Contexto educativo.
	Complejidad	Reproducción y Conexión / Desarrollo.
Condiciones	Presentación	Se expone la tarea a realizar de forma verbal una vez repartidas las hojas de examen.
	Comunicación: Cómo, cuándo.	El docente se limitará a la resolución de cuestiones relativas al formato o falta de comprensión de alguna parte del examen.
	Agrupamiento alumnos	Individual.
Observaciones	-	
Fuente	Elaboración propia y (Anzola, Vizmanos y Hervás, 2008)	



3.4. Cuadro evaluación unidad didáctica.

	Tareas	Porcentaje	Valoración 0-10	Evaluación 0-10
Prueba inicial	Evaluación inicial	0%		
Tareas individuales	Tarea 1	2%		
	Tarea 2	4%		
	Tarea 3	4%		
	Tarea 4	4%		
	Tarea 5	5%		
	Tarea 6	3%		
	Tarea 7	4%		
	Tarea 8	4%		
Tareas por parejas	Tarea 9	10%		
	Tareas 10	10%		
Prueba escrita	Examen	50%		



4. CONCLUSIONES

En el trabajo realizado se ha elaborado una unidad didáctica sobre vectores y rectas. Para ello se ha partido del análisis didáctico de los contenidos a tratar intentando establecer unos objetivos adecuados y realistas para su implementación en el aula en las distintas sesiones planteadas.

La elaboración de una unidad didáctica debe partir un estudio en profundidad previo de los contenidos a tratar, que nos permitirá alejarnos de la improvisación, que a la postre derivaría en dejar elementos sin atender o atendidos sin la importancia que requieren.

Ser capaces de adelantarnos a los problemas y dificultades que puedan surgir, tener un plan al que ceñirse, tener una previsión temporal y un material elaborado, nos ayudará a que la enseñanza se produzca de una forma real. Sin conformarnos, como indica Lemov (2017) en el “lo he enseñado”, sino que debemos avanzar y cerciorarnos de que “lo han aprendido”.

Teniendo en cuenta que trabajamos con personas en una edad en la que todo es cambiante, y añadiendo además lo diverso de sus personalidades, debemos alejarnos del estatismo. Por tanto, dentro de la planificación de una unidad didáctica debemos prever posible modificaciones, variaciones y adaptaciones que puedan ser necesarias.

Estoy seguro de que el aprendizaje adquirido durante el desarrollo del máster, así como el ejercicio de elaboración del presente Trabajo Fin de Máster, me ayudará en un futuro cercano en el ejercicio de la actividad docente.



5. REFERENCIAS.

5.1. Bibliografía.

- Anzola, M., Vizmanos, J.R., Hervás, J.C. (2008). *Matemáticas Esfera, opción A. 4. ESO*. Vitoria: Grupo SM Educación.
- Ayerbe, J.M. (2017). El nacimiento de la Geometría Analítica. *Lecturas Matemáticas*, 38, pp. 93-124.
- Bravo, V.L., y Patiño, J.C. (2016). Análisis de los errores de los alumnos en el concepto de recta y plano en álgebra y geometría analítica. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo*. Recuperado de <http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/11/recta.html>
- Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I., Colera, R. (2017). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4. ESO*. Salamanca: Anaya.
- Colombo, E., Carolina, V., y Rita, M. (2016). La génesis de la Geometría Analítica y la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 93, pp. 93-110.
- Corcobado, J.L., y Marijuán, J. (1990). *Matemáticas I, COU*. Salamanca: Europa Artes Gráficas.
- Dutari, R.E., y Batista, O.E. (1995). *El desarrollo histórico de la geometría analítica: Principales exponentes y aportes*. Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Escuela de Matemáticas.
- Fernández, J.A. (2016a). Análisis del contenido. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-117). Madrid: Pirámide.
- Fernández, J.A. (2016b). Errores y dificultades. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-117). Madrid: Pirámide.
- Flores, S., González, M.D., Alfaro, L.L., Hernández, A.A., Barrón, J.V., y Chávez, J.E. (2008). Uso de vectores en su propio contexto. Parte I. *Cultura Científica y Tecnológica, Año 5, Núm. 26*, pp. 17-25.
- Flores, P. (2016). Textos para el currículo de Matemáticas. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 69-83). Madrid: Pirámide.
- García, F.J. (2020). Tareas para un aprendizaje colaborativo y dialógico. Aprendizaje de las matemáticas II, Universidad de Jaén, Jaén.



- García, B., y Arias, D. (2018). Descartes y el renacimiento de la geometría. *Ventana al conocimiento*. Recuperado de <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/descartes-y-el-renacimiento-de-la-geometria/>
- Gavilán, J.M., y Barroso, R. (1995). El nacimiento de la Geometría Analítica: “Descartes y Fermat”. *Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, 25, pp. 179-186.
- González, P.M. (2004). *Los orígenes de la geometría analítica*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.
- Lemov, D. (2017). *Los Mejores Profesores: Teach like a Champion 2.0*. Madrid: Magister.
- Latorre, J.M. (2008). Tema 5: Geometría Afín y Euclídea. Matemáticas I, Universidad de Jaén, Jaén.
- Lupiáñez, J.L. (2016a). Sistemas de representación. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-136). Madrid: Pirámide.
- Lupiáñez, J.L. (2016b). La planificación del aprendizaje escolar. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 225-240). Madrid: Pirámide.
- Luque, L. (2020). Elementos de una unidad didáctica. Aprendizaje de las matemáticas II, Universidad de Jaén, Jaén.
- Moreno, A., y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 225-240). Madrid: Pirámide.
- Nápoles, E. (2009). *Elementos para una historia de las matemáticas griegas*. Corrientes: Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional.
- OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. Versión preliminar. París: OECD Publishing.
- Ortega, M., y Ritoré, M.M. (2016). Espacios afines. Geometría III, Universidad de Granada, Granada.
- Paulos, J.A. (1988). *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences*. Hill and Wang.
- Rico, L., y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid: Pirámide.
- Rico, L., Castro, E., y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En J.A. Beltrán, V. Bermejo, L. Pérez, M.D. Prieto, D. Vence y R.



González. *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 153-182). Madrid: Pirámide.

Ruiz, J.F. (2016a). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Madrid: Pirámide.

Ruiz, J.F. (2016b). Indicadores de calidad y estudios comparativos. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 349-363). Madrid: Pirámide.

Sáenz, F. (2013, Marzo, 5). Dibujo de líneas rectas. Recuperado de <http://saenz-marin-gr.blogspot.com/2013/03/lineas-rectas.html>

Segovia, I. (2016). Evaluación en matemáticas. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 309-328). Madrid: Pirámide.

5.2. Legislación.

España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado. 10 de diciembre de 2013. núm. 295. pp. 1 a 64.

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado. 26 de diciembre de 2014. núm. 3. pp. 169 a 546.

España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. 21 de enero de 2015. núm. 25. pp. 6986 a 7003.

Andalucía. Orden de 14 de Julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de julio de 2016. núm. 144, pp. 108-396.



6. ANEXOS.

6.1. Anexo I: Objetivos de etapa y materia.

Objetivos de la etapa. España. Real Decreto 1105/2014.

La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.



k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Aprender a apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Objetivos de la materia. Andalucía. Orden 14 julio 2016.

La enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.



8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.2. Anexo II: Currículo matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO.

Contenidos

- Bloque I (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas):

Planificación del proceso de resolución de problemas.

Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a) la recogida ordenada y la organización de datos.

b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.

c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.



d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.

e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.

f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

- Bloque II (Números y Álgebra):

Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción.

Números irracionales.

Representación de números en la recta real. Intervalos.

Potencias de exponente entero o fraccionario y radicales sencillos.

Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. Potencias de exponente racional.

Operaciones y propiedades.

Jerarquía de operaciones.

Cálculo con porcentajes. Interés simple y compuesto.

Logaritmos. Definición y propiedades.

Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables.

Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización.

Ecuaciones de grado superior a dos.

Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones.

Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas

- Bloque III (Geometría):

Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.

Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores.

Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.

Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

- Bloque IV (Funciones):



Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

- Bloque V (Estadística y probabilidad):

Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.

Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes.

Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.

Probabilidad condicionada.

Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística.

Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.

Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.

Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.

Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.

Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.

Criterios de evaluación

- Bloque I (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas):

1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.



7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

- Bloque II (Números y Álgebra):

1. Conocer los distintos tipos de números e interpretar el significado de algunas de sus propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc.
2. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.
3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.
4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales. Propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc.

- Bloque III (Geometría):

1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.
2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.
3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.



- Bloque IV (Funciones):

1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.

- Bloque V (Estadística y probabilidad):

1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.
2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.
3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.
4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.

Estándares de aprendizaje

- Bloque I (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas):

- 1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
- 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
- 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
- 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.



- 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
- 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
- 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
- 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
- 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
- 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
- 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
- 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
- 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuado al nivel educativo y a la dificultad de la situación.
- 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.
- 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
- 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
- 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.
- 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.
- 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.



11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

- Bloque II (Números y Álgebra):

1.1. Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales y reales), indicando el criterio seguido, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.

1.2. Aplica propiedades características de los números al utilizarlos en contextos de resolución de problemas.

2.1. Opera con eficacia empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, y utilizando la notación más adecuada.

2.2. Realiza estimaciones correctamente y juzga si los resultados obtenidos son razonables.

2.3. Establece las relaciones entre radicales y potencias, opera aplicando las propiedades necesarias y resuelve problemas contextualizados.

2.4. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.

2.5. Calcula logaritmos sencillos a partir de su definición o mediante la aplicación de sus propiedades y resuelve problemas sencillos.

2.6. Compara, ordena, clasifica y representa distintos tipos de números sobre la recta numérica utilizando diferentes escalas.

2.7. Resuelve problemas que requieran conceptos y propiedades específicas de los números.

3.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.

3.2. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado.

3.3. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas.



3.4. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.

4.1. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.

4.2. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.

- Bloque III (Geometría):

1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.

2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.

2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.

2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.

3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.

3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.

3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.

3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.

3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

- Bloque IV (Funciones):

1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.

1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.

1.3. Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.

1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.

2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.

2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.



2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.

2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

- Bloque V (Estadística y probabilidad):

1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.

1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.

1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.

1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.

2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.

2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.

2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.

2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.

3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.

4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos.

4.2. Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.

4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).

4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.

4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.

6.3. Anexo III: Competencias.

Competencias clave sistema educativo español.



- a) Comunicación lingüística (CCT): Se trata de la habilidad para la utilización del lenguaje como medio para expresar ideas e interactuar de manera oral o escrita con otras personas.
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT): La primera hacer referencia a la capacidad de aplicar el razonamiento matemático en la resolución de problemas cotidianos. La competencia en ciencia y tecnología hace hincapié en la habilidad para la utilización de conocimientos y procesos científicos para explicar el mundo que nos rodea. La competencia tecnológica implica la aplicación de esos conocimientos para dar respuestas a las necesidades humanas.
- c) Competencia digital (CD): Se centra en el uso de forma segura y crítica de las TIC en la obtención, análisis, producción e intercambio de información.
- d) Aprender a aprender (CAA): Es una de las competencias más reseñables e importantes, ya que incide en que el alumnado desarrolle su capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él. Que sea capaz de organizar su tiempo y tareas, trabajando de una forma individual o grupal en búsqueda de un objetivo.
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC): Consiste en la capacidad de relacionarse con el resto de personas y participar de un modo activo, participativo y democrático en la vida social y cívica.
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP): Se centra en aquellas habilidades que impulsan a la conversión de ideas en actos, tales como la creatividad, o las capacidades para asumir riesgos y en la planificación y gestión de proyectos.
- g) Conciencia y expresiones culturales CEC: Se centra en la capacidad de apreciar la importancia de las expresiones humanas mediante la música, las artes plásticas y escénicas o la literatura.

Competencias matemáticas según OCDE.

Las siete capacidades matemáticas fundamentales empleadas en los marcos de PISA 2015 y PISA-D son las siguientes:

- Comunicación (C): La competencia matemática implica comunicación. El sujeto percibe la existencia de algún desafío y está estimulado para reconocer y comprender una situación problemática. La lectura, decodificación e interpretación de enunciados, preguntas, tareas u objetos le permite formar un modelo mental de la situación, que es un paso importante para la comprensión, clarificación y formulación de un problema. Durante el proceso de resolución, puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios. Posteriormente, una vez que se ha encontrado una solución, el individuo que resuelve el problema puede tener que presentarla a otros y exponer una explicación o justificación.



- **Matematización (M):** La competencia matemática puede suponer transformar un problema definido en el mundo real en una forma estrictamente matemática (esto puede suponer la estructuración, conceptualización, elaboración de suposiciones y/o formulación de un modelo) o la interpretación o valoración de un resultado o modelo matemático con relación al problema original. El término "matematización" se utiliza para describir las actividades matemáticas fundamentales implicadas.

- **Representación (R):** La competencia matemática suele venir acompañada de representaciones de objetos y situaciones matemáticas. Esto puede implicar la selección, interpretación, traducción y la utilización de una variedad de representaciones para plasmar una situación, interactuar con un problema o para presentar un trabajo propio. Las representaciones mencionadas incluyen gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos.

- **Razonamiento y argumentación (RA):** La capacidad matemática requerida en las distintas fases y actividades ligadas a la competencia matemática se denomina "razonamiento y argumentación". Esta capacidad implica procesos de pensamiento arraigados de forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada, o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas.

- **Diseño de estrategias para resolver problemas (RP):** La competencia matemática suele requerir el diseño de estrategias para resolver problemas matemáticos. Esto implica un conjunto de procesos de control fundamentales que guían a un individuo para que reconozca, formule y resuelva problemas eficazmente. Esta destreza se caracteriza por la selección o diseño de un plan o estrategia para utilizar las matemáticas para resolver los problemas derivados de una tarea o contexto, además de guiar su implementación. Esta capacidad matemática puede ser requerida en cualquier etapa del proceso de resolución de problemas.

- **Utilización de operaciones y de un lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico (LS):** La competencia matemática implica servirse de unas operaciones y un lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico. Esto implica la comprensión, interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas en un contexto matemático (incluidas las expresiones y operaciones aritméticas) regido por convenciones y reglas matemáticas. También supone la comprensión y utilización de constructos formales basados en definiciones, reglas y sistemas formales, así como el uso de algoritmos con estas entidades. Los símbolos, las reglas y los sistemas empleados varían en función de los conocimientos concretos de contenido matemático que se requieren en un ejercicio específico para formular, resolver o interpretar las matemáticas.



- Utilización de herramientas matemáticas (HM): La capacidad matemática definitiva que sustenta la competencia matemática en la práctica es el uso de herramientas matemáticas. Las herramientas matemáticas incluyen herramientas físicas, como los instrumentos de medición, además de calculadoras y herramientas informáticas que cada vez son más accesibles. Esta capacidad supone conocer y saber utilizar las distintas herramientas que pueden ser de ayuda en la actividad matemática y ser conscientes de sus limitaciones. Asimismo, las herramientas matemáticas pueden desempeñar un papel crucial en la comunicación de los resultados.

Niveles de competencia matemática según OCDE.

Nivel 1:

- Contestar a las preguntas que implican contextos familiares donde está presente toda la información relevante y las preguntas están bien definidas.
- Identificar la información y realizar procedimientos rutinarios según instrucciones directas en situaciones explícitas.

Nivel 2:

- Interpretar y reconocer situaciones en los contextos que requieren inferencia directa.
- Extraer la información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo modo de representación.
- Emplear algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas; razonar de manera directa y hacer interpretaciones literales de los resultados.

Nivel 3:

- Realizar procedimientos claramente descritos, que incluyen los que requieran decisiones secuenciales.
- Seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas simples.
- Interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas.
- Desarrollar comunicaciones cortas cuando informan sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

Nivel 4:

- Trabajar con eficacia con modelos explícitos para situaciones concretas complejas que pueden implicar limitaciones o exhortan a hacer suposiciones.
- Seleccionar e integrar diversas representaciones simbólicas, relacionándolas directamente a los aspectos de situaciones del mundo real.



- Utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente, con una cierta comprensión en estos contextos.

- Construir y comunicar tanto las explicaciones como los argumentos basados en sus interpretaciones, discusiones y acciones

Nivel 5:

- Desarrollar y trabajar con modelos para las situaciones complejas, identificando limitaciones y especificando suposiciones.

- Seleccionar, comparar y evaluar las estrategias de solución de problemas adecuadas para tratar problemas complejos relacionados con estos modelos.

- Trabajar estratégicamente usando el pensamiento amplio, bien desarrollado y habilidades para razonar; representaciones relacionadas apropiadas, caracterizaciones simbólicas y formales, y el conocimiento pertinente a estas situaciones.

- Reflexionar sobre sus acciones, formular y comunicar tanto sus interpretaciones como su razonamiento.

Nivel 6:

- Conceptualizar, generalizar y utilizar la información basados en sus investigaciones y modelar situaciones complejas del problema.

- Relacionar diferentes fuentes de información y representaciones, así como traducir flexiblemente entre ellas.

- Pensamiento y razonamiento matemáticos avanzados.

- Aplicar su conocimiento y entendimiento junto con una comprensión de operaciones matemáticas simbólicas y formales, así como relaciones para desarrollar nuevos enfoques y estrategias para enfrentar situaciones nuevas.

- Formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones con respecto a sus resultados, interpretaciones, discusiones y a la conveniencia de estos a las situaciones originales.