



Universidad de Jaén

Facultad de Ciencias Sociales
y Jurídicas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**Matemáticas en los
planes de estudio del
grado en
Administración y
Dirección de Empresas**

Rubio Ruiz, Joaquín

TITULO DEL TRABAJO FIN DE GRADO	Diagonalización de Matrices en el ámbito economico
AUTOR/A	Joaquín Rubio Ruiz
GRADO	administración De Empresas
TUTOR/A	Joaquín Jódar Reyes
DEPARTAMENTO	MATEMATICA APLICADA
Resumen en castellano (máximo 150 palabras)	En este Trabajo Fin de Grado se ha llevado a cabo un estudio teórico-práctico sobre el tema de la diagonalización de matrices, en el cual abordaremos conceptos clave tales como diagonalizar una matriz, valores y vectores propios, el polinomio característico y el método de las potencias, todo ello a partir de su base teorica y de su posterior ilustración práctica a partir de un ejercicio. Posteriormente estudiaremos este proceso de diagonalización de matrices en el ámbito económico a través del Modelo de Leslie y el estudio de las Cadenas de Markov. De tal manera que todo esto en su conjunto resuma y explique una parte importante de lo que he estudiado en la carrera de Administración de Empresas.
Resumen en inglés (máximo 150 palabras)	In this Final Degree Project, a theoretical-practical study has been carried out on the subject of the diagonalization of matrices, in which we will address key concepts such as diagonalizing a matrix, eigenvalues and vectors, the characteristic polynomial and the method of potencies, all from its theoretical basis and its subsequent practical illustration from an exercise. Later we will study this process of diagonalization of matrices in the economic field through the Leslie Model and the study of the Markov Chains. In such a way that all this as a whole summarizes and explains an important part of what I have studied in the career of Business Administration.

Código UNESCO	Descriptor castellano	Descriptor inglés
12	Matemáticas	Math
1201	Algebra	Algebra
120111	Teoría de Matrices	Matrix Theory

Nomenclatura Internacional de UNESCO para Ciencia y Tecnología:

<http://skos.um.es/unesco6/>

Jaén, 10 de Julio de 2020.

Índice general

1. Introducción
2. Objetivos
3. Desarrollo de la memoria
 - 3.1 Diagonalización de Matrices
 - 3.1.1 Método para diagonalizar una matriz
 - 3.2 Aplicación a la economía
 - 3.2.1 El Modelo de Leslie
 - 3.2.2 La Cadena de Markov
4. Conclusiones
5. Bibliografía

1.Introducción

La teoría de la diagonalización es importante a nivel económico como en el ámbito de la gestión de empresa, ya que gracias a sus dos conceptos estrellas, autovalor y autovector, también conocidos como valores y vectores propios, en conjunto con el polinomio característico y el método de las potencias, que más adelante estudiaremos, aporta múltiples aplicaciones dentro de la ciencia económica y empresarial y además en campos de ciencias aplicadas (física, ingeniería, arquitectura...). Todo ello con diversas aplicaciones como serían el modelo de Leslie y las cadenas de Markov que nos ayudaran a entender este tema de diagonalización de matrices en el ámbito económico-empresarial.

En el apartado de 3.1 de Diagonalización de Matrices expondré la base teórica de todos los conceptos que vamos a mencionar en este TFG junto con la realización de un ejercicio, de tal manera que los diversos conceptos utilizados se entiendan de la mejor manera posible. Además en el apartado 3.2 de Aplicación a la economía lo relacionaremos con el tema económico a través del Modelo de Leslie y de Las Cadenas de Markov, tanto a nivel teórico como práctico.

2.Objetivos

El objetivo general de este Trabajo de Fin de Grado es explorar la diagonalización de matrices y su aplicación a la economía. El trabajo se centrará en dos partes la cual la primera se centrará en la base de teórica del proceso de diagonalización de matrices, ya la segunda parte del trabajo se centrará en su respectiva aplicación a la economía.

Al mismo tiempo construiremos ejemplos y finalmente expondremos una relación de algunos problemas y presentaremos ejemplos que los motiven.

3.Desarrollo de la memoria

3.1 Diagonalización de matrices.

Supongamos que tres grupos de inversión que denominaremos A, B y C gestionan ellos mismos la mayor parte de su capital pero diversifican su inversión destinando un porcentaje a alguno de los otros dos grupos.

De un año a otro mantienen fijos los porcentajes de inversión de acuerdo a lo siguiente:

- El grupo A gestiona él mismo un 70% de sus fondos e invierte un 40% en B (si sumamos los porcentajes vemos que la inversión total del grupo A es de un $(70+40)\%=110\%$ y, por tanto, cada año, el grupo A recibe un 10% de beneficios que destina nuevamente a la inversión).
- El grupo B gestiona él mismo un 40% de sus fondos e invierte un 40% en A y un 30% en C.
- El grupo C gestiona él mismo un 70% de sus fondos e invierte un 40% en A.

Supongamos que, inicialmente, el capital, en millones de euros, en los grupos A, B y C es 351, 176 y 173, respectivamente.

1. Plantea un modelo matricial que permita calcular el capital en cada grupo en años sucesivos.
2. Calcula el capital en cada grupo pasados 5 años y pasados 10 años.
3. Estudia la tendencia de futuro de este problema, determinando si la cuantía de los capitales será estable, tenderá a crecer o a anularse, y calculando los porcentajes en que se distribuirán los capitales en cada grupo cuando pase un número suficientemente grande de años.

Con estos datos vamos a plantear un modelo matricial, vamos a empezar suponiendo que el año de comienzo es $k = 0$, llamaremos:

- A_k a la inversión del grupo A al cabo de k años.
- B_k a la inversión del grupo B al cabo de k años.
- C_k a la inversión del grupo C al cabo de k años.

Vamos a recoger esta información en una matriz columna que llamaremos P_k y que vendrá dada por:

$$P_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix},$$

Denotaremos la información inicial en una matriz de una columna que denominaremos

$$P_0 = \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix}$$

Si aplicamos la matriz de transición, será más fácil calcular los clientes que habrá en cada empresa:

- $A_{k+1} = 70\% \text{ de } A_k + 40\% \text{ de } B_k + 40\% \text{ de } C_k = 0,7 A_k + 0,4 B_k + 0,4 C_k$
- $B_{k+1} = 40\% \text{ de } A_k + 40\% \text{ de } B_k = 0,4 A_k + 0,4 B_k$
- $C_{k+1} = 30\% \text{ de } B_k + 70\% \text{ de } C_k = 0,3 B_k + 0,7 C_k$

Si con esta información empleamos la definición del producto de matrices y escribimos todo en columna, llegamos a la conclusión de que P_{k+1} sería:

$$\begin{pmatrix} 0,7A_k & +0,4B_k & +0,4C_k \\ 0,4A_k & +0,4B_k & +0C_k \\ 0A_k & +0,3B_k & +0,7C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * P_k.$$

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$, con esto hemos probado que $P_{k+1} = AP_k$

Por lo tanto, tenemos:

$$P_1 = AP_0$$

$$P_2 = AP_1$$

$$P_3 = AP_2$$

$$P_4 = AP_3$$

Entonces, por ejemplo, si queremos hallar P_5 y P_{10} , como solo conocemos los datos iniciales, P_0 , debemos hallar primero tanto P_1 , P_2 y P_3 para así llegar a la solución de P_5 . Hallare únicamente P_5 a modo de ejemplo ya que el proceso es similar a P_{10} , solo que este último es más laborioso.

$$P_2 = AP_1 = A(AP_0) = (AA)P_0 = A^2P_0.$$

$$P_3 = AP_2 = A(A^2P_0) = (AA^2)P_0 = A^3P_0$$

$$P_4 = AP_3 = A(A^3P_0) = (AA^3)P_0 = A^4P_0$$

$$P_5 = AP_4 = A(A^4P_0) = (AA^4)P_0 = A^5P_0$$

Como vemos podemos calcular P_5 utilizando potencias de matrices, entonces con este método vamos a calcular la distribución de los años sucesivos.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,56 & 0,56 \\ 0,44 & 0,32 & 0,16 \\ 0,12 & 0,33 & 0,49 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,65 & 0,56 & 0,56 \\ 0,44 & 0,32 & 0,16 \\ 0,12 & 0,33 & 0,49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,679 & 0,652 & 0,652 \\ 0,436 & 0,352 & 0,288 \\ 0,216 & 0,327 & 0,391 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,679 & 0,652 & 0,652 \\ 0,436 & 0,352 & 0,288 \\ 0,216 & 0,327 & 0,391 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,736 & 0,728 & 0,728 \\ 0,446 & 0,402 & 0,376 \\ 0,282 & 0,335 & 0,360 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = AA^4 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,736 & 0,728 & 0,728 \\ 0,446 & 0,402 & 0,376 \\ 0,282 & 0,335 & 0,360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,806 & 0,804 & 0,804 \\ 0,473 & 0,452 & 0,442 \\ 0,331 & 0,355 & 0,365 \end{pmatrix}$$

Una vez con estos datos, procedemos a usar la ecuación que hemos hallado $P_k = A^k P_0$.

$$P_1 = AP_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385 \\ 211 \\ 174 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = A^2 P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,56 & 0,56 \\ 0,44 & 0,32 & 0,16 \\ 0,12 & 0,33 & 0,49 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 424 \\ 238 \\ 185 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = A^3 P_0 = \begin{pmatrix} 0,679 & 0,652 & 0,652 \\ 0,436 & 0,352 & 0,288 \\ 0,216 & 0,327 & 0,391 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 466 \\ 265 \\ 201 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = A^4 P_0 = \begin{pmatrix} 0,736 & 0,728 & 0,728 \\ 0,446 & 0,402 & 0,376 \\ 0,282 & 0,335 & 0,360 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 \\ 292 \\ 220 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = A^5 P_0 = \begin{pmatrix} 0,806 & 0,804 & 0,804 \\ 0,473 & 0,452 & 0,442 \\ 0,331 & 0,355 & 0,365 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 564 \\ 322 \\ 242 \end{pmatrix}$$

Tras estos cálculos habría que decir que sería muy laborioso calcular la distribución cuando pase un número grande de años, es decir, cuando k sea grande, pues es bastante laborioso multiplicar una matriz cuadrada general por sí misma muchas veces.

Por esto va a resultar muy útil el proceso de diagonalización, en el que, caso posible, relacionaremos la matriz cuadrada A con una matriz diagonal de la misma dimensión, cuyas buenas propiedades a la hora de elevarla a cualquier potencia podremos traspasarlas a la potencia que necesitemos hacer para la matriz A .

Vamos a profundizar ahora en el concepto de diagonalización, dada una matriz cuadrada A $n \times n$ decimos que es diagonalizable si existe una matriz cuadrada C $n \times n$ regular (es decir, debe tener inversa), tal que al hacer $C^{-1} A C$ el resultado es una matriz diagonal D $n \times n$,

$$D = C^{-1} * A * C$$

Si se da el caso de ser A diagonalizable, se cumple la propiedad:

$$A = C * D * C^{-1}$$

con lo que, en ese caso, las potencias de A se pueden calcular a través de las potencias de la matriz diagonal D , cuyo cálculo es directo, como veremos más abajo

Hemos de ver ahora que esta definición efectivamente nos permite realizar operaciones sobre la diagonalización D que luego podremos aprovechar para la matriz A . En primer lugar, para el determinante tenemos que:

$$|D| = |C^{-1} \cdot A \cdot C| = |C^{-1}| \cdot |A| \cdot |C| = |C^{-1}| |A| \cdot |C| = |A|$$

Y por tanto el determinante de D y A coinciden. Además:

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$

Y entonces

$$A^2 = (C \cdot D \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) = C \cdot D^2 \cdot C^{-1},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (C \cdot D^2 \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) = C \cdot D^3 \cdot C^{-1},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (C \cdot D^3 \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) = C \cdot D^4 \cdot C^{-1},$$

Este proceso se puede repetir indefinidamente, entonces en general lo que tendremos es que deducimos que para cualquier número natural k

$$A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}.$$

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para diagonalizarla hemos de encontrar la matriz de paso C y la diagonalización D. Para ello vamos a realizar las siguientes consideraciones:

- Vamos a suponer que los vectores columnas de la matriz de paso C son $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, es decir, $C = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$, y que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- La matriz C debe tener inversa y por tanto

$$\det(C) \neq 0 \Leftrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ es base de } \mathbb{R}^n.$$

- Sabemos que

$$A \cdot C = A \cdot (v_1 | v_2 | \dots | v_n) = (Av_1 | Av_2 | \dots | Av_n)$$

Y también que

$$C \cdot D = (\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \dots | \lambda_n v_n).$$

- Si la matriz C diagonaliza a A siendo D la correspondiente matriz diagonal entonces, teniendo en cuenta el punto anterior,

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Leftrightarrow A \cdot C = C \cdot D$$

$$\Leftrightarrow (Av_1 | Av_2 | \dots | Av_n) = (\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \dots | \lambda_n v_n) \Leftrightarrow$$

- $Av_1 = \lambda_1 v_1$
- $Av_2 = \lambda_2 v_2$
- $Av_n = \lambda_n v_n$

Por tanto si encontramos una base de vector de $\mathbb{R}^n \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tales que

- $Av_1 = \lambda_1 v_1$
- $Av_2 = \lambda_2 v_2$
- $Av_n = \lambda_n v_n$

entonces la matriz A es diagonalizable siendo $C = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ y

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ahora profundizaremos en dos nuevos conceptos muy importantes, que ya hemos mencionado anteriormente, para entender mejor este tema de diagonalización, que son los **valores y los vectores propios**, también llamados autovalores y autovectores. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman vectores y los de $\mathbb{R}$ escalares. La tripleta formada por $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores y el producto por escalares se llama espacio vectorial.

Sea A una matriz cuadrada de orden n ; el número real λ es un valor propio (o autovalor) de A si existe un vector (u) no nulo tal que $Au = \lambda u$. Al vector u anterior se le conoce con el nombre de vector propio (o autovector) de A asociado al valor propio λ .

Si queremos averiguar los vectores y valores propios de una matriz A $n \times n$ el primer paso, utilizaremos la expresión $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad de orden n . Posteriormente hallamos sus respectivas raíces reales. Como hemos dicho anteriormente para cada valor propio hallado tenemos que averiguar los vectores propios asociados a λ , todo esto se hace resolviendo en las expresiones y ecuaciones que estamos realizando.

Mediante la resolución del polinomio característico obtenemos los valores y vectores propios que son imprescindibles para el proceso de diagonalización de matrices cuadradas. Vamos a exponer un ejemplo para ver de una forma más clara de hallar el polinomio característico

Considerando el ejemplo de ilustración con el que empezamos el tema vamos a calcular los valores y vectores propios de esta matriz.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Lo primero que vamos a hacer es hallar su polinomio característico.

$$|A - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0,7 - \lambda & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 - \lambda \end{pmatrix} \right|$$

Nos quedaría su ecuación característica de la matriz A :

$$-\lambda^3 + 1,8\lambda^2 - 0,89\lambda + 0,132 = 0.$$

Al resolver esta ecuación característica, nos sale las 3 soluciones que serían los valores propios de la matriz A .

$$\begin{cases} \lambda = 1,1 \\ \lambda = 0,4 \\ \lambda = 0,3 \end{cases}$$

Y ahora procedemos a calcular sus correspondientes vectores propios, ilustrare como se hace uno, y luego después escribiré ya directamente una base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores propios asociados a estos valores propios.

$$V_{0,3} : (A - 0,3I_3) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow V_{0,3} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema son los puntos de la forma:

$$(x,y,z)=a*(1/4,-1,3/4),$$

para a cualquier número real. En concreto, para 1,1, una base estaría dada por el vector $v_1=(7,4,3)$, y para 0,4, por el vector $v_2=(0,-1,1)$ y para el vector $v_3=(1,-4,3)$, como base del subespacio vectorial de vectores propios asociados al valor propio 0,3.. Uniendo esos vectores, obtendríamos $B=\{v_1,v_2,v_3\}$, conjunto formado por vectores propios de A y que tendríamos que comprobar si son base de $\mathbb{R}^3$.

$$B= \{(7,4,3),(0,-1,1),(1,-4,3)\}$$

Para comprobar que los vectores de B son linealmente independientes, calculamos el determinante de la matriz C, nuestra matriz de paso, nos sale que es distinto de 0 y eso nos quiere decir que el rango de esa matriz es 3, es decir que al tener que esos tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes, automáticamente son también sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, base de $\mathbb{R}^3$. Se ha obtenido entonces una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A, con lo que, de acuerdo con el estudio inicial, esto es equivalente a que la matriz A es diagonalizable.

De la teoría del polinomio característico sacamos varias cosas en clave:

- Sabemos que su expresión es $|A - \lambda I_n|$, y de aquí nombramos ecuación característica de la matriz a la ecuación: $P(\lambda)=0$
- De todo lo anterior nos damos cuenta de que los valores propios de una matriz A son las soluciones de su ecuación característica.
- Si encontramos una base de $\mathbb{R}^n$ que está formada por vectores propios de A propios esa matriz se podrá diagonalizar.

3.1.1 METODO PARA DIAGONALIZAR UNA MATRIZ

Si tenemos una matriz A de tamaño n

1. Hallar los valores propios de esa matriz A
2. Hallar el subespacio vectorial asociado a esos valores propios hallados.
3. Si la asociación de las bases de esos subespacios vectoriales es una base de $\mathbb{R}^n$ entonces la matriz A es diagonalizable.

Vamos a ver ahora como podemos asegurar que una matriz cuadrada sea diagonalizable y para ello vamos a ver dos conceptos nuevos, la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica.

Llamaríamos multiplicidad algebraica de un valor propio al número de veces que sale ese valor propio al sacarlo como raíz del correspondiente polinomio característico y llamamos multiplicidad geométrica a la dimensión del subespacio propio asociado a dicho valor propio. A partir de estos términos:

- N es la multiplicidad algebraica de λ
- M es la multiplicidad geométrica de λ

Con esto se afirma que si:

- Sumamos todos los valores de la multiplicidad algebraica, nos tiene que dar menor o igual que n .
- La multiplicidad geométrica de cada valor propio siempre está entre 1 y su multiplicidad algebraica.

Algunas propiedades importantes:

1. Toda matriz simétrica es diagonalizable.
2. Si nuestra matriz cuadrada A de orden n tiene n valores propios reales y todos ellos son distintos, entonces la matriz es diagonalizable
3. Si las columnas o filas de A suman igual a un mismo número λ , entonces ese valor λ sería un valor propio de A .

Cabe destacar que si λ es un valor propio de A y v un vector propio asociado, entonces:

$$A.v = \lambda.v$$

$$A^2.v = (A.A)v = A(Av) = A(\lambda.v) = \lambda.(Av) = \lambda.\lambda.v = \lambda^2.v$$

$$A^3.v = (A.A^2)v = A(A^2.v) = A(\lambda^2.v) = \lambda^2.(Av) = \lambda^2(\lambda.v) = \lambda^3.v$$

y, de aquí, para cualquier potencia k :

$$A^k.v = \lambda^k.v$$

Esta es una propiedad que será fundamental en el método de las potencias para sustituir las potencias de la matriz que nos aparecen en los modelos matriciales iterativos por potencias de los valores propios de la matriz, cuando ésta es diagonalizable.

El método de las potencias nos permite estudiar la tendencia futuro del modelo matricial iterativo que estemos considerando.

Vamos a suponer que queremos realizar el cálculo $A^k P_0$ para cierta matriz $A \in M_n$, además también vamos a suponer que la matriz A es diagonalizable. Entonces, podremos calcular A para una base de vectores propios $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ cada uno de ellos asociado respectivamente a los valores propios de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en la forma,

Vector Propio	Valor asociado propio
v_1	λ_1
v_2	λ_2
v_n	λ_n

Puesto que los vectores propios $v_1, v_2, \dots, v_n$ forman una base de R^n , se puede obtener cualquier n -upla mediante una combinacional lineal de ellos. En concreto, la n -upla P_0 podrá escribirse en la forma,

$$P_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Para calcular $A^k P_0$ aprovechamos la expresión de P_0 como combinación lineal de los vectores propios, y con esto los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pueden ser calculados si resolvemos el sistema correspondiente:

$$\begin{aligned} A^k P_0 &= A^k (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \\ &A^k \alpha_1 v_1 + A^k \alpha_2 v_2 + \dots + A^k \alpha_n v_n = \\ &\alpha_1 \underline{A^k v_1} + \alpha_2 \underline{A^k v_2} + \dots + \alpha_n \underline{A^k v_n} \end{aligned}$$

Solo queda realizar los cálculos de lo que esta subrayado, aunque si tenemos en cuenta que $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores propios, es posible aplicar la formula mencionada anteriormente.

$$A^k v_1 = \lambda_1^k v_1, \quad A^k v_2 = \lambda_2^k v_2, \quad \dots, \quad A^k v_n = \lambda_n^k v_n,$$

Ahora solo queda reunir todos los cálculos realizados, ya que hemos realizado la parte más difícil del cálculo, se procedería de esta manera:

$$\begin{aligned} A^k P_0 &= \alpha_1 \underline{A^k v_1} + \alpha_2 \underline{A^k v_2} + \dots + \alpha_n \underline{A^k v_n} = \\ &\alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n = \\ &\underline{A^k P_0 = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n} \end{aligned}$$

Como ya hemos comentado, vemos como el cálculo de la potencia matricial A^k se reduce al cálculo más sencillo de las potencias numéricas $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$. Siguiendo con el ejemplo mencionado al principio del TFG y una vez hemos hallado tantos valores como vectores propios (los cuales sabemos que son una base de R^3) necesitamos expresar la upla de valores iniciales P_0 para poder aplicar el método de las potencias. Es decir, necesitamos encontrar los coeficientes α_1, α_2 y α_3 :

$$P_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ 4\alpha_1 & -\alpha_2 & -4\alpha_3 \\ 3\alpha_1 & \alpha_2 & 3\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Una vez resolvemos este sistema las soluciones que nos dan son:

$$\alpha_1 = 50, \alpha_2 = 20 \text{ y } \alpha_3 = 1$$

Ahora procedemos a calcular $A^k P^0$ de la forma que hemos visto anteriormente:

$$A^k P^0 = 50A^k v_1 + 20A^k v_2 + A^k v_3$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^k * \begin{pmatrix} 351 \\ 176 \\ 173 \end{pmatrix} = 50 * 1,1^k \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 20 * 0,4^k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,3^k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora por medio de estas expresiones podemos calcular un capital pasado un numero cualquiera de años, sustituyendo k, por el numero de años que nos pida.

El método de las potencias, en conjunción con los conceptos de valor y vector propio dominante, nos permitirán estudiar la tendencia de futuro en estos modelos matriciales iterativos. Si seguimos con nuestra matriz del ejemplo de motivación,

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

En esta matriz hemos hallado los valores propios, que serían $\lambda_1=1,1$, $\lambda_2=0,4$ y $\lambda_3=0,3$, si ahora calculamos el valor absoluto de estos valores propios obtenemos:

$$|\lambda_1| = 1,1, |\lambda_2| = 0,4, |\lambda_3| = 0,3$$

El valor absoluto del valor propio $\lambda_1 = 1,1$ es superior al de los demás valores propios. Por tanto este valor se considera valor propio dominante de la matriz A .

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \dots |\lambda_n|.$$

Si sacamos factor común el valor propio dominante en el miembro derecho, no quedaría tal que

$$A^k P_0 = \lambda_1^k (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (\lambda_2/\lambda_1)^k v_2 + \dots + \alpha_n (\lambda_n/\lambda_1)^k v_n).$$

Como λ_1 es el valor propio dominante se tiene que,

$$|\lambda_2/\lambda_1|, \dots, |\lambda_n/\lambda_1| < 1$$

sin embargo con valores grandes de k es fácil comprobar que si un número $r \in \mathbb{R}$ tiene un valor absoluto menor que 1 entonces $r^k \approx 0$, y de esta manera cuando k es grande,

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \approx 0, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k \approx 0, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \approx 0$$

Y por consiguiente si k se hace más grande nos encontraríamos con que,

$$A^k P_0 = \lambda_1^k \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n \right).$$

$$A^k P_0 \approx \lambda_1^k \alpha_1 v_1$$

De esta situación sacamos varias conclusiones:

- Si tenemos valores grandes de k , $A^k P_0$ depende solamente del valor y vector propio dominante.
- Si $|\lambda_1| < 1$, para valores grandes de k tendremos que $\lambda_1^k \approx 0$ y en ese caso

$$\alpha_1 \lambda_1^k v_1 \approx 0, \text{ es decir los valores de } P_k \text{ se anulan}$$

- Si $|\lambda_1| > 1$, para valores grandes de k tendremos que $\lambda_1^k \approx \pm\infty$ y en ese caso

$$\alpha_1 \lambda_1^k v_1 \approx \pm\infty, \text{ es decir los valores crecerán o decrecerán de forma ilimitada}$$

- Si $|\lambda_1| = 1$, para valores grandes de k tendremos $\alpha_1 \lambda_1^k v_1 = \alpha_1 v_1$, es decir los valores tenderán a un valor constante de estabilidad
- Para valores grandes de k los porcentajes representados por los datos en distintos periodos serán aproximadamente iguales a los del vector propio dominante v_1 .

Para el ejemplo que estamos siguiendo como ilustración, dado que el valor propio dominante es 1,1, la tendencia de futuro de nuestro modelo es que la distribución de capitales en cada grupo tenderá a crecer ilimitadamente.

Además, los porcentajes de distribución de capitales, cuando pase un número grande de años, vendrán dados por los del vector propio dominante. Dado que el vector propio dominante es $v_1=(7,4,3)$, los porcentajes de distribución de capitales, cuando pase un número grande de años, serán:

- Grupo A: $(7/(7+4+3))*100=50\%$
- Grupo B: $(4/(7+4+3))*100=28,57\%$
- Grupo C: $(3/(7+4+3))*100=21,43\%$

3.2 Aplicación de la economía

La segunda parte de este trabajo consiste en la aplicación de la diagonalización de matrices a la economía, todo esto lo haremos a partir de varios modelos.

3.2.1 MODELO DE LESLIE

Si lo que queremos es construir un modelo matemático tendremos que determinar un conjunto de ecuaciones que representen la realidad. Cuando el cambio de una población se lleva a cabo en función del tiempo, obtenemos un proceso que recibe el nombre de dinámica de la población. Su objetivo es observar los cambios numéricos que padecen las poblaciones, pronosticar su comportamiento y determinar sus causas. Por lo que vamos a estudiar un modelo de dinámica de poblaciones denominado ‘modelo de Leslie’.

El modelo de Leslie (1945) describe tres tipos de procesos: El primero tiene que ver con el desarrollo (progreso a través del ciclo de vida), esto se puede comparar con el desarrollo habitual de una economía en un momento determinado, el segundo es la mortalidad a la edad específica, que podría ser una analogía de cuanto una economía estaba pasando por un crisis y está en sus horas más bajas y un tercer proceso que se puede comparar con la recuperación de ese crisis y la vuelta a la normalidad de la economía, llamada reproducción a la edad específica.

Las ventajas de este modelo son varias, primero permite expresar el ciclo de vida en categorías que no necesariamente son iguales, estas categorías responden mejor a estadios en el ciclo de vida y por ultimo y la ventaja más valiosa de este modelo es que permite aprovechar las ventajas matemáticas de las matrices, propiedad esencial para poder seguir estudiando este método en el apartado de diagonalización.

En resumen, el modelo de Leslie es uno de los modelos más populares de crecimiento poblacional. Es un modelo que está basado en matrices y fue presentado por primera vez por P.H. Leslie en 1945.

Vamos a suponer que en una determinada Comunidad Autónoma española el 20% de las rentas familiares son inferiores a 6000 euros, el 70% están comprendidas entre 6000 y 12000 euros y solo el 10% supera los 12000 euros. A estos tres tramos los llamaremos tramos de renta baja, media y alta respectivamente.

Se sabe que, año tras año, un 70% de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un 20% pasan a renta media y un 10% a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un 60 %, pasando un 30 % a renta baja y un 10 % a renta alta. Por ultimo, el 60 % de las rentas altas siguen siéndolo, pasando un 30 % a rentas medias y un 10 % a rentas bajas.

Las autoridades de la mencionada Comunidad Autónoma están muy preocupadas por el tema de la distribución futura de la renta y están pensando aplicar medidas correctoras, ya que creen que la situación actual puede empeorarse en un futuro. En este ejercicio vamos a realizar tantos valores como vectores propios, y aplicaremos el método de las potencias para ver si existe una distribución de la renta estable, además de si esto es afirmativo, es decir, si es estable esta distribución, hallaremos el tanto por ciento de familias que están en cada tramo de rentas.

Con estos datos vamos a plantear un modelo matricial. Vamos a empezar suponiendo que el año de comienzo es $k = 0$, llamaremos:

- A_k al porcentaje de familias de renta baja al cabo de k años.
- B_k al porcentaje de familias de renta media al cabo de k años.

- C_k al porcentaje de familias de renta alta al cabo de k años.

Vamos a recoger esta información en una matriz columna que llamaremos P_k y que vendrá dada por:

$$P_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix}$$

Si aplicamos la matriz de transición, será más fácil los porcentajes en cada tramo:

- $A_{k+1} = 70\% \text{ de } A_k + 30\% \text{ de } B_k + 10\% \text{ de } C_k = 0,7 A_k + 0,3 B_k + 0,1 C_k$
- $B_{k+1} = 20\% \text{ de } A_k + 60\% \text{ de } B_k + 30\% \text{ de } C_k = 0,2 A_k + 0,6 B_k + 0,3 C_k$
- $C_{k+1} = 10\% \text{ de } A_k + 10\% \text{ de } B_k + 60\% \text{ de } C_k = 0,1 A_k + 0,1 B_k + 0,6 C_k$

Si con esta información empleamos la definición del producto de matrices y escribimos todo en columna, llegamos a la conclusión de que P_{k+1} sería:

$$\begin{pmatrix} 0,7A_k & +0,3B_k & +0,1C_k \\ 0,2A_k & +0,6B_k & +0,3C_k \\ 0,1A_k & +0,1B_k & +0,6C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} * P_k.$$

Así, la matriz de transición del modelo matricial sería:

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Ahora a vamos a realizar el polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,7 - \lambda & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 - \lambda & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 - \lambda \end{vmatrix}$$

Nos quedaría su ecuación característica de la matriz A:

$$- \lambda^3 + 1,9\lambda^2 - 1,1\lambda + 0,2 = 0.$$

Al resolver esta ecuación característica, nos sale las 3 soluciones que serían los valores propios de la matriz A.

$$- \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0,4 \\ \lambda = 0,5 \end{cases}$$

Si ahora calculamos el valor absoluto de estos valores propios obtenemos:

$$- |\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 0,4, |\lambda_3| = 0,5$$

El valor absoluto del valor propio $\lambda_1 = 1$ es superior al de los demás valores propios. Por tanto este valor se considera valor propio dominante de la matriz A .

$$|\lambda_1| > |\lambda_3| > |\lambda_2|$$

Entonces como existe un autovalor $\lambda = 1$, entonces si existe una distribución estable.

Como esta distribución finalmente es estable, hallaremos el tanto por ciento de familias que están en cada tramo de rentas. La distribución nos viene dada por el autovector correspondiente al autovalor $\lambda = 1$, a continuación vamos a calcular la forma de dicho autovector,

$$(A - \lambda I) \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \{-0,3x + 0,3y + 0,1z = 0$$

$$\{ 0,2x - 0,4y + 0,3z = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que sus soluciones vienen dadas por $(x, y, z) = a \cdot (1, 11/13, 6/13)$, para cualquier número real.

Así, una base del subespacio propio asociado al valor propio 1 vendría dada, por ejemplo, por el vector $v_1=(13,11,6)$.

Dado que este vector v_1 es un vector propio asociado al valor propio dominante 1, tenemos entonces que v_1 es un vector propio dominante y, en consecuencia, el tanto por ciento de familias que estarán en cada tramo de rentas en el futuro, para una distribución estable de rentas, será:

- Renta baja: $(13/(13+11+6))*100=43\%$
- Renta media: $(11/(13+11+6))*100=37\%$
- Renta alta: $(6/(13+11+6))*100=20\%$

3.2.2 La cadena de Markov

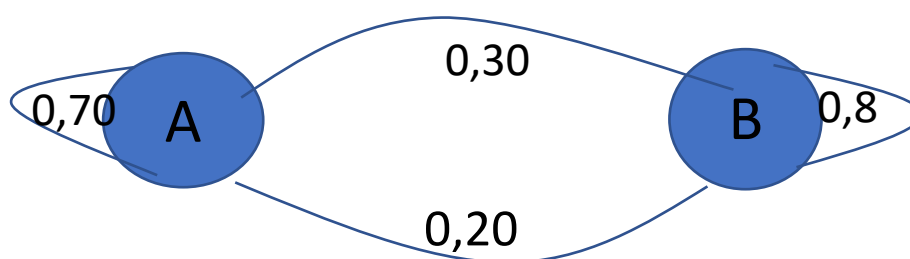
Una cadena de Markov es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de pérdida de memoria. Los estados futuros del proceso dependen únicamente del presente, por lo mismo son independientes del pasado.

De manera más técnica, sea X_i una variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en puntos discretos en el tiempo $t = 1, 2, \dots$. La familia de variables aleatorias (X_i) forma un proceso estocástico (un proceso estocástico es un proceso de Markov si un estado futuro depende solo del estado inmediatamente anterior), es decir que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo, con una cantidad finita o infinita de estados.

Vamos a suponer que un equipo de investigación de mercado está realizando una investigación controlada para determinar las preferencias de la población con respecto a pastas dentales. La muestra consta de 200 personas, a cada una de las cuales se le solicita probar dos marcas de dentífricos durante un periodo de varios meses.

Basada en las respuestas, el equipo de investigación compila las estadísticas siguientes acerca de las preferencias detectadas:

De los que utilizan la marca A en cualquier mes, 70% continúan utilizándola el mes siguiente, mientras que 30% cambian a la marca B, de los que utilizaban la marca B en cualquier mes, 80% continúan haciéndolo mientras que 20% cambiaban a la marca A.



Primero tenemos que hacer una matriz de transición, en esta matriz tenemos que establecer los estados que puede tener una persona al cambiarse de una pasta dental A a la pasta dental B. A esta matriz de transición también se le llama matriz estocástica, además de que es una matriz de probabilidad, ya que la probabilidad del evento seguro, que sería que persona siga con la pasta A o se vaya a la pasta B, son probabilidades que se puede sumar por columnas.

	A	B
A	0,7	0,2
B	0,3	0,8

 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$

Ahora hallamos el vector de estado (X_0), que sería el vector inicial de cómo se comportan las personas al inicio del ejercicio, es decir con la muestra de 200 personas, y los porcentajes dados hallamos X_0 .

$$X_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a proceder a hallar los valores y vectores propios de nuestra matriz:

Lo primero que vamos a hacer es hallar su polinomio característico.

$$|A - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0,7 - \lambda & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 - \lambda \end{pmatrix} \right| \rightarrow$$

$$\lambda^2 - 1,5 \lambda + 0,5.$$

hallando esta ecuación de segundo grado nos dan los dos valores propios.

$$\begin{cases} \lambda = 0,5 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Y ahora procedemos a calcular sus correspondientes vectores propios, que directamente los pondré ya que anteriormente en el TFG hemos mostrado como calcularlos:

{v1=(2,3), asociado al valor propio 1, y v2=(-1,1), asociado al valor propio 0,5

Una vez hemos hallado tantos valores como vectores propios, vamos a proceder a hallar los coeficientes α_1 , α_2 y α_3 , para aplicar el metodo de las potencias.

$$X_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Una vez resolvemos este sistema las soluciones que nos dan son:

$$\alpha_1 = 40, \alpha_2 = -40$$

Ahora procedemos a calcular $A^k P^0$ de la forma que hemos explicado en el apartado del metodo de las potencias:

$$A^k P_0 = 40 A^k v_1 - 40 A^k v_2$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^k * \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = 40 * 1^k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 40 * 0,5^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a ver los respectivos resultados después de tres meses, seis meses, y doce meses.

Después de tres meses X_3 :

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^3 * \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = 40 * 1^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 40 * 0,5^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 115 \end{pmatrix}$$

Después de tres meses nos quedan que 85 usan la pasta A y 115 la B.

Después de seis meses X_6 :

$$X_6 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^6 * \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = 40 * 1^6 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 40 * 0,5^6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80,6 \\ 119,4 \end{pmatrix}$$

Después de seis meses nos quedan que 80,6 usan la pasta A y 119,4 la B.

Después de doce meses X_{12} :

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^{12} * \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = 40 * 1^{12} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 40 * 0,5^{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Después de doce meses nos quedan que 80 usan la pasta A y 120 la B.

Como añadido si ahora calculamos el valor absoluto de estos valores propios obtenemos:

$$- \quad |\lambda_1| = 1, \quad |\lambda_2| = 0,5.$$

El valor absoluto del valor propio $\lambda_1 = 1$ es superior al de los demás valores propios. Por tanto este valor se considera valor propio dominante de la matriz A .

$$|\lambda_1| > |\lambda_2|$$

Entonces como existe un autovalor $\lambda = 1$, entonces si existe una distribución estable, como claramente se ve en el ejemplo al realizar los cálculos a los 12 meses.

4. Conclusiones

Con todos los conceptos que hemos visto a lo largo de este TFG, podemos comprender la importancia de la diagonalización de matrices en el ámbito económico-empresarial, a través de varios modelos y de este último apartado que son las cadenas de Markov, nos damos cuenta de la importancia de estas herramientas de diagonalización a la hora de representar estos conceptos a nivel económico, lo cual ayuda a entender mejor y simplificar cada una de las posibles escenarios que se nos puede presentar en una empresa.

5. Bibliografía

J. Jódar. Apuntes de Matemáticas I de ADE. Universidad de Jaén. 2020

<https://aga.frba.utn.edu.ar/diagonalizacion-de-una-matriz/> (disponible a fecha 09/07/2020)

<https://economipedia.com/definiciones/vectores-y-valores-propios.html> (disponible a fecha 09/07/2020)

https://www.ecured.cu/Polinomio_caracter%C3%ADstico (disponible a fecha 09/07/2020)

<https://www.matesfacil.com/diagonalizacion.htm> (disponible a fecha 09/07/2020)

<http://www.eupm.upc.edu/~fpq/numerico/resum/vaps-resum.pdf> (disponible a fecha 09/07/2020)

https://www.guiasjuridicas.es/Content/Documento.aspx?params=H4sIAAAAAAAAAEAMtMSbF1jTAAASMjEzNztbLUouLM_DxbIwMDS0NDA1OQQGZapUt-ckhlQaptWmJOcSoAfpTg6DUAAAA=WKE (disponible a fecha 09/07/2020)

http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos_empresa/archivos/archivos%20pdf/laboratorio/laboratorio%20mme_2017.pdf (disponible a fecha 09/07/2020)