



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

UNIDAD DIDÁCTICA

FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Alumno/a: Ureña Marín, José Ramón

Tutor/a: Prof. D. Francisco Javier García García
Prof. D. Antonio Jesús López Moreno

Dpto: Didáctica de las Ciencias

Junio, 2020

ÍNDICE GENERAL**PÁGINA**

0. RESUMEN	3
1.INTRODUCCIÓN	4
2.OBJETIVOS	6
3.FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	7
3.1 Marcos legislativos: Estatal y Autonómico.....	7
3.2 Análisis de los libros de texto.....	14
4.FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA	29
4.1 Introducción.....	30
4.2 Funciones reales de variable real. Consideraciones generales.....	30
4.3 Operaciones con funciones.Estructura algebraica de las funciones.....	36
4.4 Funciones elementales	40
4.5 Contextualización con la Educación Secundaria Obligatoria.....	46
4.6 Conclusiones	46
4.7 Bibliografía	46
5.FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA	46
5.1 Actitud de los alumnos ante las matemáticas: Errores y dificultades.....	47
5.2 Errores y dificultades en funciones lineales y cuadráticas.....	50
5.3 Aprendizaje mediante uso de las TIC.....	55
6.UNIDAD DIDÁCTICA	60
6.1 Título	61
6.2 Justificación	61
6.3 Contextualización del centro y del aula	63
6.4 Objetivos	65
6.5 Competencias clave	70
6.6 Contenidos	72
6.7 Metodología	73
6.8 Actividades y recursos	75
6.9 Atención a la diversidad	78
6.10 Temporalización	80
6.11 Evaluación	91

7. CONCLUSIONES	92
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	96
- ANEXO I	
- ANEXO II	

0. RESUMEN

El presente trabajo ha sido realizado como último requerimiento para la consecución del título de “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza en idiomas”, en la especialidad de Matemáticas. Se ha efectuado una búsqueda sobre investigaciones acerca de las diferentes metodologías que mejor se adaptan al panorama educativo actual, contrastándolas con las metodologías tradicionales. Así mismo, se ha diseñado y programado la unidad didáctica de Funciones Lineales y Cuadráticas de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del currículo de tercero de ESO, incorporando metodologías innovadoras que despierten el interés de los alumnos, con el fin de mejorar su aprendizaje.

El trabajo se ha elaborado poniendo en práctica los conocimientos y habilidades que se han desarrollado en las asignaturas y resto de actividades durante este curso, procurando proyectarlas en éste, con el objetivo de conseguir con sus contenidos unos resultados a nivel educativo que beneficien de forma académica y didáctica, tanto a los alumnos, como a los profesores, optimizando el proceso de enseñanza - aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Matemáticas, Unidad Didáctica, Metodología, Aprendizaje.

ABSTRACT

This Project Work is the last part required to get the Master's Degree in Teaching Mathematics at Secondary and Upper Secondary School, Professional Teachings and Language Learning. For this purpose, I have done a deep investigation on different new methodologies, that better adapt to the current Educational System, comparing them with more traditional ones in the teaching of Maths. I've also designed and programmed the Didactic Unit: "Linear and quadratic functions", which includes some Maths lessons for the 3rd Level of ESO (Compulsory Secondary Education), incorporating new techniques that could arise the students' interest and improve the learning process.

On this Project, as well, I'm putting into practise the knowledge and skills learnt during this course at University, projecting them in contents and on new approaches of learning in order to get better results, not only for academic purposes, but also for the didactic ones, benefiting both, students and teachers, in a word optimizing the whole teaching and learning process.

KEYWORDS: Maths, Teaching and Learning Process, Methodologies.

1. INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) se redacta con la finalidad de adquirir las competencias profesionales inherentes al profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas y poder desarrollarlas en una futura programación y experiencia didáctica en el aula, de cada una de las unidades que conforman la materia de una especialidad, de acuerdo a las competencias requeridas por la legislación vigente, tanto a nivel estatal como autonómico.

Así mismo, este documento desarrolla la especialidad adscrita al grupo de “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas”, dentro del cual se ha seleccionado la Unidad Didáctica: “Funciones lineales y Cuadráticas” para el curso 3º de la ESO.

Este trabajo está estructurado en dos grandes bloques bien diferenciados. El primero corresponde al análisis y desarrollo de tres tipos de fundamentos o pilares básicos que constituyen los cimientos donde se apoya el actual proceso de enseñanza y/o aprendizaje, como son el *curricular*, el *epistemológico* y el *didáctico*.

Comenzaremos con la *fundamentación curricular* (capítulo 3) donde analizaremos las disposiciones curriculares vigentes y de varios libros de texto de dos editoriales conocidas en la enseñanza, de ámbito nacional, para determinar con el mayor grado de detalle, cuál será el alcance con el que se deben desarrollar los contenidos curriculares y el enfoque dado por estos textos, en comparación con los requerimientos a este respecto que exige la Normativa vigente, con el fin de dar respuesta a los objetivos matemáticos mínimos exigibles para la adquisición de una serie de competencias que se desarrollarán posteriormente.

Continuaremos con la *fundamentación epistemológica* (Capítulo 4), donde analizaremos un tema íntimamente relacionado con la unidad didáctica “*Funciones Lineales y Cuadráticas*”, que pertenece al temario oficial de oposiciones, y que abordaremos con una mayor complejidad y rigor científico.

El último pilar básico de la enseñanza que someteremos a estudio será la *fundamentación didáctica* y en él analizaremos algunas investigaciones centradas en diversos aspectos relacionados con el tema de la unidad didáctica elegida y su enseñanza-aprendizaje, como son errores, dificultades, etc., con los que se encuentran los alumnos (cómo aprender) o bien, las distintas tipologías de recursos, estrategias, epistemología, etc.,... (cómo enseñar), para obtener en los estudiantes unos resultados satisfactorios una vez escogidas las metodologías didácticas adecuadas que así los justifiquen.

En el *segundo bloque* de este Trabajo Fin de Máster, se aborda el diseño de una unidad didáctica donde se analizarán los contenidos curriculares contemplados en la programación que se hará de la misma. Se propondrá la implantación de modelos metodológicos (además de tener en cuenta los aspectos educativos del método tradicional de enseñanza, que puedan ser de utilidad) como son por ejemplo, los que fomentan el pensamiento crítico (espíritu crítico) para la resolución de problemas o tareas académicas, tanto propuestos (ficticios), como los que puedan presentarse en una situación de la vida cotidiana y que no haya sólo un único camino para encontrar su solución, pudiendo formular los estudiantes juicios de valor acerca de las propuestas de resoluciones de los mismos, tanto a nivel individual como grupal o lo que es lo mismo, por medio del *aprendizaje cooperativo*, donde los alumnos son ahora los principales protagonistas (siempre, claro está, bajo el amparo indiscutible del docente para cualquier tipo de ayuda que precisen) pero profundizando, en definitiva, en su propio aprendizaje.

Las funciones ya son conocidas desde la Antigüedad, más concretamente desde tiempos de Arquímedes, pero fueron desarrolladas de forma más sistemática por Galileo en el siglo XVI, que consideró imprescindible la valoración cuantitativa de causas-efectos y la búsqueda de relaciones matemáticas que describieran fenómenos físicos de forma sencilla, siendo una de las ramas de las matemáticas aplicable a multitud de áreas relacionadas con las ciencias, como medicina, geografía, astronomía, economía, ingeniería, etc.

Con este trabajo se quiere demostrar que el conocimiento no sólo se transmite con la metodología tradicional, sino que vamos a incorporar junto a ella, metodologías innovadoras capaces de transmitirlo con arreglo a la velocidad con la que discurre en la actual sociedad, en continuo cambio, debido a la irrupción de las nuevas tecnologías de la información y comunicación. El fin primordial es conseguir en el alumnado un *aprendizaje significativo*, vinculando el *saber aprendido* con el *saber que queda por aprender*. En la actualidad, el conocimiento necesita potentes herramientas de transmisión y con estas metodologías que proponemos, podremos adaptarlo a las nuevas necesidades que demanda el actual escenario educativo.

Por último, cabe señalar que esta unidad didáctica se ha redactado de acuerdo a las normativas que establecen los marcos legislativos vigentes tanto estatal como autonómico siguientes:

1. Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).
2. Decreto 111/2016 de 14 de julio por el que se establece la Ordenación y el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.
3. Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el Currículo Básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

4. Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la Atención a la Diversidad y se establece la Ordenación de la Evaluación del Proceso de Aprendizaje del Alumnado.

2. OBJETIVOS

El presente Trabajo Fin de Máster se ha realizado para la consecución de una serie de objetivos, los cuales están estrechamente relacionados con la puesta en práctica y desarrollo de los conocimientos y destrezas adquiridas de las distintas asignaturas cursadas en él. Exponemos, a continuación, algunos de ellos (Guía docente de la asignatura del TFM, Universidad de Jaén):

1. Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.
2. Completar la formación disciplinar adquirida durante el Máster en la especialidad de matemáticas.
3. Complementar la formación en la capacitación para impartir docencia con las herramientas necesarias para desarrollarlas en el aula adecuadamente.
4. Lograr que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios, conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
5. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje, potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como, la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
6. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.
7. Fomentar el espíritu crítico, reflexivo y emprendedor.

8. Planificar el proceso de enseñanza en su área de matemáticas, diseñando materiales didácticos y tareas educativas innovadoras que fomenten el aprendizaje significativo, cooperativo y trabajo grupal.
9. Conocer las medidas de atención a la diversidad que se pueden adoptar para poder realizar el asesoramiento necesario en cada caso.
10. Fomentar las capacidades del estudiante para un aprendizaje por sí mismo y interactuando con sus iguales con el fin del desarrollo de sus habilidades de pensamiento y de toma de decisiones que permitan su autonomía, iniciativa y autoestima.
11. Adquirir el conocimiento, las destrezas y actitudes necesarias para el uso y aprovechamiento de las TIC en la función docente.
12. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.
13. Interpretar la evaluación como un mecanismo regulador y de estímulo al esfuerzo implementando estrategias y técnicas de evaluación.
14. Impulsar nuevas herramientas de aprendizaje para que la asignatura de matemáticas sea más atractiva.

Los objetivos que acabamos de exponer son realmente los que perseguimos con la realización del presente trabajo y guardan un vínculo muy estrecho con logros y las metas que se han pretendido alcanzar con la realización de este Máster para la formación del profesorado en su especialidad de matemáticas que son, en definitiva, la adquisición con el máximo rigor académico y didáctico de las competencias del futuro docente en dicha especialidad.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

3.1 Marcos Legislativos: Estatal y Autonómico

3.1.1 Marco Legislativo Estatal

Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en su Anexo I, indica todos los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluable que deben ser aplicados para cada una de las actividades troncales y optativas que se imparten a lo largo de la etapa de la ESO y del Bachillerato.

En referencia a lo establecido por la actual legislación en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas para el alumnado 3º de la ESO (de mayor complejidad en sus contenidos ya que se pretende continuar la formación con el Bachillerato), enfocaremos nuestro estudio en una de sus unidades didácticas: **Funciones Lineales y Cuadráticas**. Dicha materia está dividida en cinco bloques según lo dispuesto en este Real Decreto y para el desarrollo de esta unidad didáctica

debemos considerar dos bloques el 1 y el 4. El Bloque 1, titulado “Procesos, métodos y actitudes matemáticas”, es de carácter transversal al resto de los bloques, por lo que su aplicación será de obligado cumplimiento y el Bloque 4 “Funciones”, es el específico donde apoyarnos para centrar el estudio de nuestra unidad didáctica objeto de análisis.

A continuación, exponemos el Bloque 1 en la Tabla 1. Está compuesto por tres subbloques, el primero, en la columna de la izquierda se exponen los *Contenidos* que se habrán de desarrollar. La columna central corresponde a los *Criterios de Evaluación*, y en la columna de la derecha se encuentran los *Estándares de Aprendizaje Evaluables* que se deberán superar. Análogamente, en la Tabla 2 se nos expone el Bloque 4 “Funciones”, también dividido en tres columnas, la primera es una relación de los *Contenidos*, en la columna central se distribuyen los *Criterios de Evaluación* y en la columna tercera los *Estándares de Aprendizaje Evaluables*.

3.1.2 Marco Legislativo Autonómico

La Orden 14 de julio de 2016 desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía donde se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje, la regulación de aspectos referidos a la atención a la diversidad, además de definir los contenidos, objetivos de etapa y los criterios de evaluación con una o varias competencias clave asociadas a cada uno de éstos. El único elemento diferenciador entre la Orden de 14 de julio de 2016 y el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre está en los criterios de evaluación, vinculados cada uno de ellos al desarrollo de una o varias competencias clave (Ver Tablas 1,2,3, 4 y 5).

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloques e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.

Tabla 1. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas. R.D. 1105/2014 de 26 de diciembre

d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
		10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 1. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas (Continuación). R.D.
1105/2014 de 26 de diciembre

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Funciones		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente. 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. 3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente. 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

Tabla 2. Bloque 4: Funciones. R.D. 1105/2014 de 26 de diciembre

Según la legislación vigente, el trabajo escolar se debe orientar al desarrollo de una serie de competencias básicas. Exponemos, a continuación, los tipos de **competencias clave** que los Bloques 1 y 4 contribuirían a desarrollar (Tabla 3):

COMPETENCIAS CLAVE	
ACRÓNIMO	DESIGNACIÓN
CAA	COMPETENCIA DE APRENDER A APRENDER
CCL	COMPETENCIA EN COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA
CMCT	COMPETENCIA MATEMÁTICA Y COMPETENCIA BÁSICA EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA
CD	COMPETENCIA DIGITAL
CSC	COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS
SIEP	SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

Tabla 3. Cuadro de competencias desarrolladas en los Bloques 1 y 4. Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia

Comenzando con el *Bloque 1*, recogemos en la Tabla 4 sólo los elementos diferenciadores (Criterios de evaluación asociados a sus competencias clave). Análogamente se hará con el *Bloque 4* en la Tabla 5.

BLOQUE I: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS
1.1 Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
1.2 Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA

1.3 Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
1.4 Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA.
1.5 Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación	CCL, CMCT, CAA, SIEP
1.6 Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
1.7 Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA.
1.8 Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
1.9 Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
1.10 Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
1.11 Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
1.12 Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 4. Bloque 1: Criterios de evaluación asociados a competencia/s clave. Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia

BLOQUE 4: FUNCIONES	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS
4.1 Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	CMCT
4.2 Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.	CMCT, CAA, CSC.
4.3 Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	CMCT, CAA.

Tabla 5. Bloque 4: Criterios de evaluación asociados a competencia/s clave. Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia

La consecución de estos criterios contribuiría al objetivo global de desarrollo de las competencias básicas en el alumnado. En cuanto a los **objetivos de etapa**, exponemos, a continuación, los objetivos de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, para el curso 3º de la ESO (según BOJA Núm. 144):

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los

aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

De todos los objetivos de etapa que acabamos de exponer, **los objetivos 4, 6, 7, 10 y 11, se vinculan de forma más estrecha a los contenidos de la unidad didáctica;** Funciones Lineales y Cuadráticas que se desarrollarán en el capítulo 6 del presente TFM. Según describe la Orden ECD 65/2015:

“La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

La competencia matemática requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos.

El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos, así como para emitir juicios fundados y seguir cadenas argumentales en la **realización de cálculos, el análisis de gráficos y representaciones matemáticas y la manipulación de expresiones algebraicas, incorporando los medios digitales cuando sea oportuno.** Forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan.

Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida. La activación de la competencia matemática supone que el aprendiz es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática determinada.” (íbid, pp. 7-8).

3.2 Análisis de los libros de texto

Hemos escogido dos libros de texto de dos ediciones diferentes del curso 3º de Educación Secundaria Obligatoria, para analizar los contenidos curriculares que nos presentan sus autores y comprobar si están alineados respecto a los que establece la legislación vigente. Los libros sometidos a análisis curricular son los siguientes:

1. Título: “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas”. Curso 3º ESO. **Editorial Grupo Anaya, S.A.** Autores: Colera Jiménez y otros, 2015.
2. Título: “Matemáticas Enseñanzas Académicas. Andalucía”. Curso 3º ESO. Saber Hacer. Serie Resuelve. **Editorial Santillana Educación, S.L.** Autores: Grence Ruiz y otros, 2015.

En nuestro caso, compararemos los enfoques curriculares de la Unidad Didáctica: **Funciones Lineales y Cuadráticas** que desarrolla cada una de estas editoriales, para ver qué desviaciones presentan entre ellas, así como las que presentan con la normativa curricular vigente.

3.2.1 Análisis primer texto: Editorial Grupo Anaya, S.A.

Comenzando con el análisis del primer libro de texto, perteneciente a la **editorial Grupo Anaya, S.A.**, nos presenta en una portada interior los que, a su juicio, constituyen los principios básicos del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para este curso. Se muestran en la Tabla 6:

1. Inclusión	6. Pensamiento crítico
2. Interdisciplinariedad	7. Aprendizaje cooperativo
3. Rigor	8. Las TICs
4. Familia	9. Emprendimiento
5. Competencias	10. Evaluación

Tabla 6. Principios básicos del proceso enseñanza-aprendizaje. *Grupo Anaya.*
Elaboración propia

Las unidades didácticas que se han analizado han sido la 8 y la 9, pertenecientes al segundo tomo del citado libro, que comprende las unidades 6 a 10. La unidad didáctica 8, al tratarse sólo de una *unidad introductoria* al campo de las funciones sólo la trataremos de forma muy sucinta, como preámbulo de la que es objeto de análisis. Lleva por título: *Funciones y gráficas* y nos presenta la unidad estructurada en fases o bloques que posteriormente desarrollará, acompañada de un esquema en forma de árbol y sus ramificaciones, bastante útil para comprender el itinerario de los contenidos de dicha unidad (Figura 1).

Las fases comienzan con una presentación de la unidad, conocimientos mínimos exigibles, complementos importantes, anticipación de tareas, adaptación curricular y una relación de actividades para trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, las TIC, el emprendimiento, la interdisciplinariedad y la resolución de problemas.

La unidad comienza con un breve introducción histórica sobre el origen de las funciones y la necesidad de darle explicación a los fenómenos físicos; además de su observación, se hace imprescindible la valoración cuantitativa de sus variables causa (x) y efecto (y), para encontrar una relación matemática entre ellas que las describa con sencillez, como así lo experimentó Galileo a finales del siglo XVI, posteriormente Descartes, Newton, Leibniz en el XVII y finalmente Euler en el XVIII.

El primer apartado lo dedica a definir varios conceptos como *función*, *dominio* y *recorrido*, la representación gráfica por medio de dos ejes de coordenadas, x (abscisas) e y (ordenadas) terminando el apartado con una propuesta de ejercicios y actividades en una sesión denominada “Piensa y practica”.

El segundo punto de la unidad trata del estudio del *crecimiento* y *decrecimiento de una función*, y el estudio de los *máximos* y *mínimos relativos*, en ambos casos con ejemplos muy ilustrativos de la vida cotidiana y terminando el apartado con una propuesta de ejercicios y actividades en la sesión denominada “Piensa y practica”.

Análogamente ocurre con los epígrafes tercero, cuarto y quinto, donde se analizan respectivamente, *las tendencias de una función* y *funciones periódicas* y *período*, *continuidad* y *discontinuidad de una función*, concluyendo la unidad con la *expresión analítica de una función*.

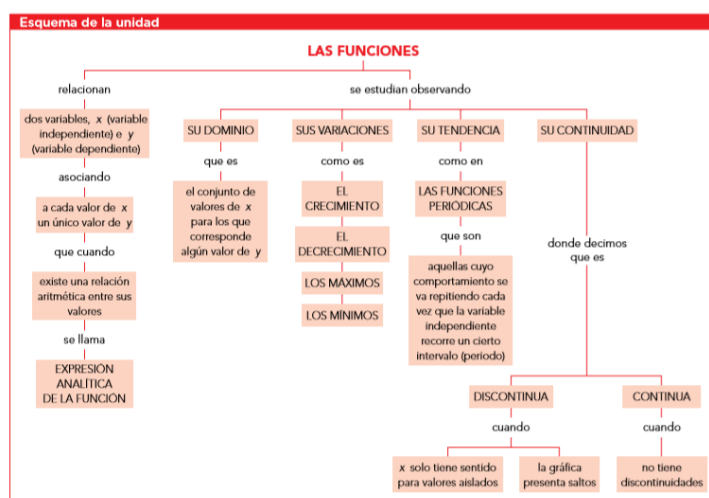


Figura 1. Distribución esquemática de los contenidos de la U.D. 8. (Colera et al., 2015 p. 112).

La **unidad didáctica 9**, objetivo principal de nuestro estudio comparativo, de las dos editoriales de este tercer apartado de fundamentación curricular y que

desarrollaremos con mayor profundidad sobre sus contenidos, lleva por título: *Funciones lineales y cuadráticas* y está constituida por siete apartados, con sus respectivas secciones de ejemplos resueltos, ejercicios propuestos y actividades complementarias. En ella se nos presenta la unidad, al igual que lo hace este libro de Anaya con el resto, y tal y como acabamos de ver con la unidad introductoria (la cual he considerado necesaria su breve exposición), está estructurada en fases o bloques que desarrolla antes de comenzar con el primer apartado de la unidad, acompañada también de un esquema preliminar en forma de árbol con la distribución de sus contenidos curriculares (Figura 2).

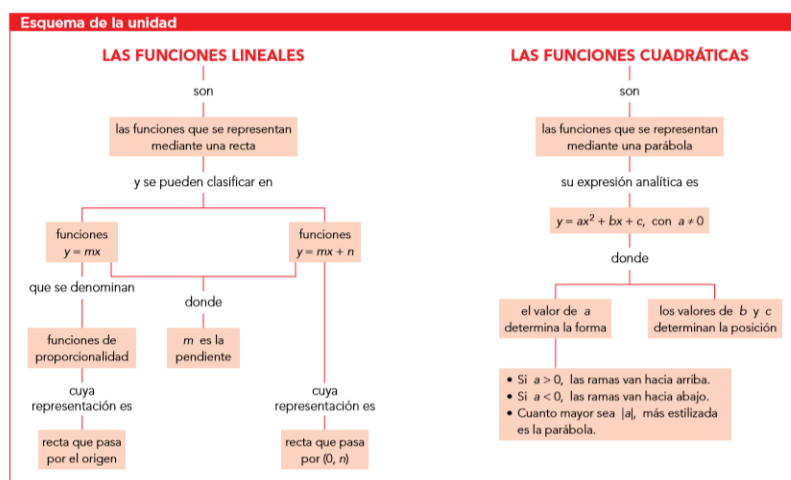


Figura 2. Distribución esquemática de los contenidos de la U.D. 9. (Colera et al., 2015 p. 126).

La unidad se inicia también con una breve introducción histórica, continuando la evolución que ha experimentado el estudio de funciones, haciendo unos comentarios sobre los importantes avances que hizo el gran científico del siglo XVII René Descartes acerca de su invención: El **sistema de coordenadas cartesianas** con el cual se consiguen expresar las curvas por medio de ecuaciones. El apartado concluye proponiéndonos una serie de ejercicios, algunos de ellos sugiere la utilización de internet para su resolución.

El contenido del primer epígrafe de esta unidad didáctica trata sobre la *función de proporcionalidad* que tiene por ecuación $y = mx$, definiendo el concepto de la misma y el de *pendiente*. Aborda, además, su representación gráfica (una recta que pasa por 0,0)) partiendo de su ecuación analítica y por último, determina la ecuación apartir de la gráfica obteniendo la pendiente de valor “m”. Además, nos recuerda en un cuadro que, cuanto mayor sea la constante de proporcionalidad, mayor pendiente tiene la recta, es decir, tendrá más inclinación respecto al eje X. A continuación de estos

conceptos teóricos, nos aporta un ejemplo de la vida real, analizando tres funciones en las que las dos variables son proporcionales:

Ejemplo: Tiempo que tardan tres tipos de vehículos a velocidad constante (bicicleta, motocicleta y coche), respecto a la distancia que recorren (Figura 3):

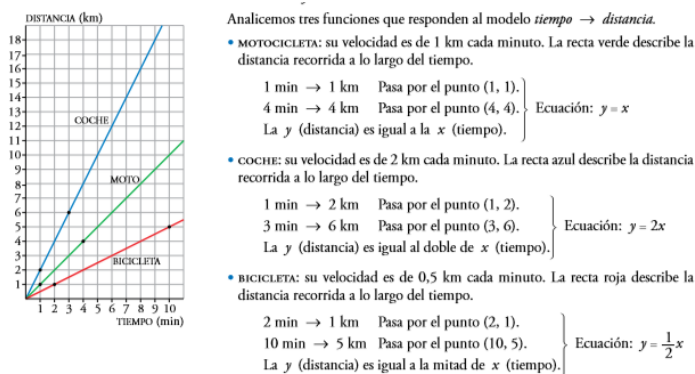


Figura 3. Ejemplos de funciones de proporcionalidad. (Colera et al., 2015 p.164).

Cada punto de este apartado contiene ejemplos resueltos y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica”.

El segundo apartado se titula, la *función* $y = mx + n$. Comienza con un nota en la que señala que en Matemáticas Superiores, se les denomina *funciones lineales* a las del tipo $y = mx$ y *funciones afines* a las del tipo $y = mx + n$. Sin embargo, en algunas aplicaciones de las Matemáticas se llama *funciones afines* a las que representan rectas como $y = mx + n$ y *de proporcionalidad* a las de tipo $y = mx$.

A continuación de estos conceptos teóricos presenta un ejemplo de la vida real: *La factura del agua*, en la que se nos ilustra por medio de una representación gráfica la función *consumo - coste* que es de la forma $y = mx + n$ y cuya pendiente tiene el valor “m”, es decir lo que aumenta el coste cuando el consumo de agua aumenta 1 m^3 . Por último, nos introduce también el concepto de *función constante* de ecuación $y = n$, paralela al eje X, cuando la pendiente “m” vale cero. Cada punto de este apartado contiene ejemplos resueltos y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica”.

El tercer punto de la unidad nos enseña a calcular la *ecuación de la recta cuando se conocen un punto y la pendiente* (Ecuación Punto-Pendiente) cuya expresión analítica es:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

A continuación de este concepto teórico, se proponen varios ejercicios resueltos y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica”.

El cuarto epígrafe de la unidad nos enseña a calcular la *ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos*, y cómo se determina su pendiente. Su expresión analítica se obtiene por el siguiente procedimiento:

$$\left. \begin{array}{l} P(x_1, y_1) \\ P(x_2, y_2) \end{array} \right\} \rightarrow m = \frac{\text{variación de la } y}{\text{variación de la } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

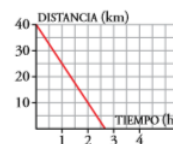
Cada punto de este apartado contiene ejemplos resueltos y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica” (Figura 4).

El quinto apartado está dedicado al estudio de *Aplicaciones de la función lineal. Problemas de móviles*. En él se recogen cuatro ejemplos resueltos de algunas funciones que describen situaciones de movimientos uniformes. Además, nos indica en un recuadro que para la representación de funciones extraídas de situaciones cotidianas, resulta frecuente la necesidad de utilizar en los ejes, escalas adecuadas al contexto. Cada punto de este apartado contiene ejemplos resueltos y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica”. Ejemplos:

3. Ricardo está en su pueblo a 40 km de nosotros. Sale hacia aquí en bicicleta a 15 km/h. ¿A qué distancia se encuentra de nosotros dentro de t horas?

Dentro de t horas, Ricardo habrá recorrido $15t$ km. En esa cantidad de kilómetros se habrá reducido la distancia que nos separa. Por tanto:

$$d = 40 - 15t$$



4. Un peregrino se encuentra todavía a 50 km de Santiago de Compostela. Prosigue su camino a las 8 de la mañana a un ritmo de 6 km/h. ¿A qué distancia de su destino se encontrará a las t horas de ese día?

El tiempo que lleva caminando a las t horas es $t - 8$. La distancia recorrida es $6(t - 8)$.

Su distancia a Santiago será:

$$d = 50 - 6(t - 8)$$

Si el peregrino estuviera andando sin parar durante 6 horas, el dominio de definición de la función sería 8-14.

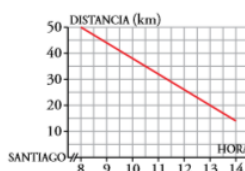


Figura 4. Ejemplos de problemas con funciones de lineales. (Colera et al., 2015 p.169).

El penúltimo apartado está dedicado al “*Estudio conjunto de dos funciones lineales*”, debiéndose representar ambas sobre los mismos ejes de coordenadas, siendo su punto de corte de especial relevancia para su conjunta interpretación. Para la determinación de sus coordenadas, es suficiente con resolver el sistema lineal formado por las ecuaciones de las funciones. Veamos un ejemplo resuelto:

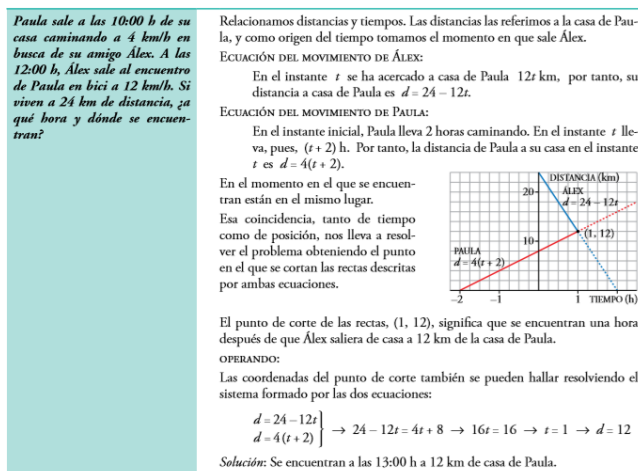


Figura 5. Ejemplos de aplicaciones con funciones lineales. Problemas de móviles.
(Colera et al., 2015 p.170).

Cada punto de este apartado contiene ejemplos resueltos y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica” (Figura 5).

En el séptimo capítulo y último de la unidad didáctica se estudian las “*Parábolas y funciones cuadráticas*” y comienza proponiendo varios ejemplos que describen este tipo de curvas, como son por ejemplo, la de *un balón lanzado a canasta*, la *curva descrita por un pelota de golf*, o *un chorro de agua*. Continúa desarrollando el tema presentándonos la parábola que responde a la función $y = x^2$, modelo de función cuadrática más sencillo y cuya representación gráfica nos la ilustra en la parte izquierda, junto con su tabla de valores (7 puntos) que sirve para construirla en la parte derecha. Es una curva **simétrica** respecto al eje Y, posee un **vértice** en el punto (0,0) y tiene dos ramas, una decreciente y la otra creciente.

También nos aporta varios ejemplos de funciones representadas mediante parábolas como son:

- a. El espacio que recorre un coche desde el instante de frenada hasta que se para, en función de la velocidad que llevaba, representándose analíticamente como:

$$e = 0,0074 v^2 + 0,21v$$

- b. La altura a la que se encuentra una piedra lanzada hacia arriba en función del tiempo transcurrido desde su lanzamiento, se representa analíticamente como:

$$a = v_0 t - 4,9t^2$$

Seguidamente, la unidad nos presenta en el segundo subapartado, las “*funciones cuadráticas*”, cuya expresión analítica es:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Su forma parabólica se puede presentar hacia arriba, hacia abajo, más o menos ancha, etc., dependiendo del valor de “a” y del coeficiente de x^2 , verificándose las siguientes condiciones:

Cuando dos funciones cuadráticas poseen el mismo coeficiente en x^2 , las parábolas correspondientes son idénticas, aunque estén situadas en distintas posiciones:

- Si $a > 0$, las ramas son hacia arriba
- Si $a < 0$, las ramas son hacia abajo
- Cuanto mayor sea el valor de $|a|$, más esbelta será la parábola.

Cada punto de este apartado contiene ejemplos resueltos de funciones de la forma

$$y = \pm ax^2 \pm bx \pm c, \quad a \neq 0$$

como el de la Figura 6:

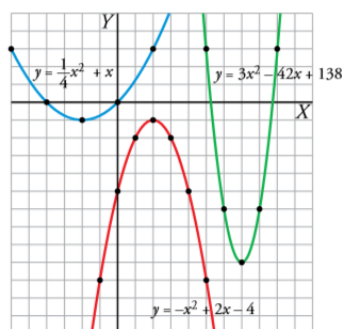


Figura 6. Ejemplos de funciones cuadráticas. (Colera et al., 2015 p.171).

y problemas propuestos en su sección de “Piensa y practica”.

Finalmente, la unidad concluye con una serie de “Pasos a seguir para la representación de funciones cuadráticas”, donde nos sugiere las fases que conviene seguir para representar la curva $y = \pm ax^2 \pm bx \pm c$ y obtener los puntos singulares de la gráfica. Estos pasos son los siguientes:

- Determinación de la **abcisa del vértice**: $p = -\frac{b}{2a}$
- Determinación de los **puntos próximos al vértice**.
- Obtención de los **puntos de corte con los ejes**.
 - Corte con el eje X: Se resuelve la ecuación: $ax^2 + bx \pm c = 0$.

- Corte con el eje Y: es el $(0, c)$.

4. Por último, su **representación**.

Nos propone este ejemplo resuelto (Figura 7) y problemas propuestos en su sección de "Piensa y practica".

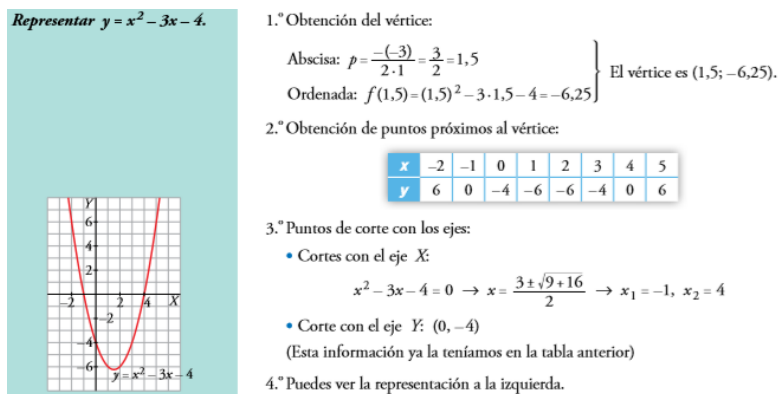


Figura 7. Resolución de problema de funciones cuadráticas paso a paso.
(Colera et al., 2015 p.172).

También nos indica en la parte izquierda con un esquema bastante explícito, cómo se determina de forma teórica la abscisa del vértice (Figura 8):

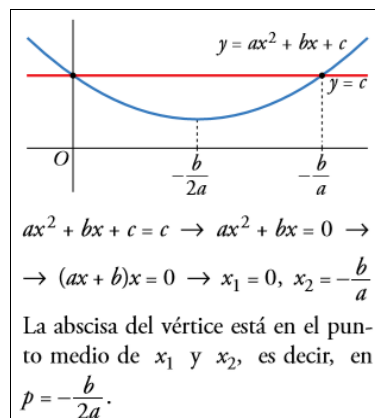


Figura 8. Esquema de cálculo de la abscisa del vértice en una función cuadrática.
(Colera et al., 2015 p.172).

Tanto en la unidad didáctica 8 como la 9, una vez expuestos los contenidos teóricos y sus problemas, se ofrecen a los alumnos varios recursos para que se ejerciten y

comprueben el grado de aprendizaje cognitivo que han desarrollado para así, poder alcanzar los objetivos de cada unidad, como varias secciones prácticas que para la unidad didáctica nº 9 son las siguientes:

- A. Ejercicios y problemas resueltos (2 uds.).
- B. Sugerencias de ayuda a los problemas.
- C. Ejercicios y problemas propuestos (35 uds. .
- D. Taller de matemáticas (cuatro apartados para desarrollar capacidades).
 - D.1 Lee e infórmate (1 ud.).
 - D.2 Reflexiona (1 ud.).
 - D.3 Piensa y decide (1 ud.).
 - D.4 Entrénate resolviendo problemas (3 uds.).
- E. Autoevaluación (relación de 7 problemas para resolver). El alumno puede encontrar su solución en la web.
- F. Aprendizaje cooperativo: Propuestas de ejercicios o actividades que unos estudiantes proponen a los demás para resolver en grupos pequeños, por ejemplo. construcción e interpretación de gráficas para que las representen o relacionen sus gráficas, funciones definidas por métodos distintos.
- G. Emprendimiento: Se sugiere por parte del profesor/a la realización de una actividad, por ejemplo, una gráfica descontextualizada y los alumnos idearán una situación coherente con la misma, definiendo la función asociada a dicha gráfica.

3.2.2 Análisis segundo texto: Editorial Santillana Educación, S.L.

Continuamos el estudio de contenidos curriculares con el segundo libro texto, perteneciente a la **Editorial Santillana Educación, S.L.**, donde trataremos las unidades didácticas 11 y 12. Procederemos, de forma análoga, al estudio del libro de texto anterior. Comenzamos describiendo de forma muy breve los contenidos de unidad didáctica 11, muy similares a los del texto anterior. Se trata de una unidad *introductoria* al estudio de las funciones, como preámbulo de la que es objeto de análisis, desarrollando los siguientes apartados clasificados en dos grupos, el grupo “SABER” (más teórico) y grupo “SABER HACER” (más práctico). Lo mostramos en la Tabla 7:

UNIDAD DIDÁCTICA 11	
SABER	1. Concepto de función
	2. Formas de expresar una función
	2.1 Función definida por un enunciado.
	2.2 Función definida por una ecuación

	2.3 Función definida por una tabla de valores 2.4 Expresar una función mediante una gráfica. 3. Características de una función Nota: Todos los apartados y subapartados llevan sus secciones de ejercicios resueltos y actividades.
SABER HACER	• Representar gráficamente una función. Fases. • Calcular el dominio y recorrido • Estudio de la continuidad y discontinuidad • Calcular los puntos de corte • Interpretar el crecimiento y decrecimiento • Periodicidad • Simetría Nota: Todos los apartados y subapartados llevan sus secciones de ejercicios resueltos y actividades.

Tabla 7. Relación de contenidos de la U.D. 11 del libro de texto de la editorial Santillana.
Elaboración propia.

Concluye la unidad con cuatro apartados de ejercicios y actividades repartidos de la siguiente forma:

- Actividades finales (35 problemas que cubren todos los apartados del tema).
- Competencias Matemáticas.
- Proyecto final. Trabajo cooperativo.
- Pruebas Pisa.

Nota: Todo el esquema de la unidad lo veremos a continuación, con mayor detalle en el desarrollo de la unidad didáctica 12, objeto de este estudio.

Continuando con los contenidos de la **editorial Santillana**, su **unidad didáctica 12**, objetivo principal de nuestro estudio comparativo de las dos editoriales, lleva el mismo título que su unidad homóloga de la editorial Anaya: *Funciones lineales y cuadráticas*.

Comienza a desarrollar el tema con un recuadro (Tabla 8) en el que, como acabamos de ver en la unidad 11, hace la siguiente clasificación:

UNIDAD DIDÁCTICA 12	
SABER	Funciones lineales Ecuación punto-pendiente Ecuación general de una recta Funciones cuadráticas

	5. Aplicaciones Nota: Todos los apartados y subapartados llevan sus secciones de ejercicios resueltos y actividades.
SABER HACER	• Representar gráficamente una función lineal • Determinar la ecuación de una recta representada gráficamente • Representar gráficamente una función cuadrática Nota: Todos los apartados y subapartados llevan sus secciones de ejercicios resueltos y actividades.

Tabla 8. Relación de contenidos de la U.D. 12 del libro de texto de la editorial Santillana.
Elaboración propia.

A continuación, se hace una presentación del tema pero a diferencia del texto de **Anaya**, no se hace un breve resumen presentando la unidad, con los conocimientos mínimos de aprendizaje, ni tampoco nos detalla esquemáticamente (a modo de árbol) cómo está estructurada. La estructura que **Santillana** hace de la unidad didáctica es muy sencilla pero muy práctica, tratando de facilitar la localización de los contenidos más importantes de los ejercicios resueltos y actividades propuestas.

Se marcan con iconos los contenidos a actividades donde se trabajarán de forma particular las competencias básicas, especificándose los contenidos **“Saber”** y los procedimientos **“Saber hacer”** a lo largo de toda la unidad didáctica. Además, facilita a modo de recordatorio unas **“Claves para empezar”**, con algunas ideas que serán de gran ayuda para abordar toda la unidad.

El texto procede directamente a presentarnos su primer apartado titulado **“Funciones lineales”** compuesto, a su vez, con varios subapartados como **“Funciones de proporcionalidad directa”**, seguido del de **“Funciones constantes”**, todos ellos con muy buenos ejemplos prácticos bastante ilustrativos, bien concebidos desde el punto de vista didáctico, con actividades para demostrar la destreza y comprensión de los alumnos sobre estos contenidos y una sección que se denomina **“Resuelve el reto”** con un problema propuesto sobre una situación real, poniendo a prueba los conocimientos del alumno y su razonamiento matemático y otra denominada **“Saber hacer”**, con ejemplos resueltos paso a paso, bastante bien estructurados y de fácil asimilación para los estudiantes, ofreciendo también en cuadros de texto laterales, **informaciones complementarias** para mejorar la interpretación del contenido.

Su segundo apartado está dedicado a la **“Ecuación Punto-Pendiente”**, donde nos da su expresión analítica y un ejemplo resuelto para ver su aplicación. Prosigue, con otro epígrafe donde nos explica cómo se determina la **“Ecuación de la recta que pasa por dos puntos”** y un ejemplo resuelto para ver su aplicación. Por último, nos propone tres actividades para practicar el aprendizaje de la materia dada.

El tercer punto de la unidad se denomina “Ecuación general de la recta” (no lo incluye como contenido la editorial Anaya). Nos da su expresión analítica, obtenida a partir de las ecuaciones anteriores:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{siendo } a, b \text{ y } c \text{ números reales}$$

También nos aporta una *información complementaria* en forma de viñeta. Por último, nos propone tres actividades para practicar el aprendizaje de este apartado y una tarea para realizar en el recuadro “Resuelve el reto” (Figura 9).

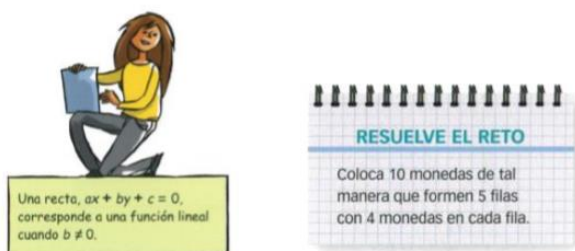


Figura 9. Ejercicio de funciones lineales del libro de texto de la editorial Santillana.
(Grence et al., 2015, p. 247).

El cuarto apartado lleva el título “Funciones cuadráticas” (similar al texto de Anaya), definiendo los conceptos de “Función cuadrática” y sus elementos, *vértice* y *eje de simetría*, con varios ejemplos resueltos. Contiene un subapartado denominado “Estudio de funciones cuadráticas” donde se nos muestra su expresión analítica (ya vista) y las expresiones de las coordenadas del vértice de la parábola:

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

y la expresión de la recta que nos da su eje de simetría:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

El texto de **Anaya** sólo nos da la abcisa del vértice, pero no nos da la ordenada en función del discriminante, como hace **Santillana**, es decir:

$$\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Tampoco **Anaya** nos explica que si los coeficiente a y b tiene el mismo signo, el vértice estará situado a la izquierda del eje “ y ” y si lo tienen distinto, el vértice se encuentra a la derecha.

En definitiva, este apartado nos ilustra bastante bien con un ejemplo resuelto muy completo y pormenorizado, además de darnos una información complementaria en forma de viñeta y nos propone una tarea para realizar en el recuadro de “Resuelve el reto”, tres actividades para asimilar los contenidos y una sección denominada “Saber hacer” con un ejemplo resuelto de la representación gráfica de dos funciones cuadráticas en 4 pasos, muy bien detallada. El quinto y último punto que desarrolla esta unidad lleva por título “Aplicaciones”. Consta de dos subapartados, el primero trata los contenidos relativos a las “Aplicaciones de las funciones lineales”, mostrándonos para su mejor interpretación un ejemplo resuelto de la vida cotidiana. El segundo considera las “Aplicaciones de las funciones cuadráticas” con otro ejemplo ilustrativo real, también resuelto. Finaliza este epígrafe con un completo e interesante **bloque práctico** constituido por *cuatro secciones* bien diferenciadas que exponemos a continuación:

1ª. *Actividades finales*. Con 24 problemas propuestos de funciones lineales, algunos de ellos resueltos y otro grupo de 38 problemas y actividades con funciones cuadráticas.

2ª. *Competencia matemática*. Nos propone tareas prácticas agrupadas en dos partes:

- a) En la vida diaria y b) Formas de pensar por medio del razonamiento matemático. Para la parte a) nos plantea decidir entre varias ofertas para cambiar de tarifa de móvil y para la b) nos invita a desarrollar el pensamiento matemático con cuatro problemas planteados.

3ª. *Proyecto Final*. Trabajo Cooperativo. En esta sección se propone a los estudiantes la realización de una actividad orientada a la enseñanza de las matemáticas por investigación y lleva por título “**Objetivo: Seleccionar una tarifa de internet**”.

PROYECTO FINAL. Trabajo cooperativo

OBJETIVO: Seleccionar una tarifa de Internet

Una vez formados los grupos, seguid este proceso:



- 1.ª Fase.**
 - Buscad información sobre las distintas formas de acceso a Internet (ADSL, fibra óptica, satélite, etc.).
 - Haced un estudio de los distintos dispositivos a través de los cuales se puede acceder a Internet.
 - Valorad qué dispositivos soléis utilizar para acceder a Internet, para que lo utilizáis y durante cuánto tiempo.
- 2.ª Fase.**
 - Informaos de qué tipo de tarifas existen, su precio y si están asociadas a otros productos (compra de teléfono móvil, plan de televisión, plan de permanencia, etc.). Representad en una gráfica los distintos costes.
 - Decidid cuánto estáis dispuestos a pagar mensualmente por un servicio de este tipo.
- 3.ª Fase.**
 - Poned en común la información recogida, valorando todos los puntos que habéis estudiado.
 - Decidid qué tarifa es la más apropiada a vuestras necesidades y presupuesto.
 - Realizad un informe que recoja las conclusiones a las que habéis llegado.

Figura 10. Actividad de trabajo cooperativo del libro de texto de la editorial Santillana. (Grence et al., 2015 p. 260).

En ella se pretende desarrollar una **clase típica IBL** (Inquiry Based Learning), cuya finalidad es conseguir en los estudiantes un **aprendizaje por investigación**, enseñando, aprendiendo, trabajando y sosteniendo sus argumentos con sólidos razonamientos matemáticos, de forma muy aproximada a como realmente trabajan esta materia los matemáticos o científicos. Para ello y un vez formados los grupos de trabajo, nos indica las fases del proceso a seguir (pág. 261 del texto de **Santillana**).

4ª. Prueba PISA: Esta cuarta y última sección de prácticas nos propone una actividad de aplicación e interpretación de modelos matemáticos¹ ya dados, para calcular la frecuencia cardíaca aconsejable para que el efecto del ejercicio físico sea el óptimo.

Pruebas PISA

Latidos del corazón

111 Por razones de salud la gente debería limitar sus esfuerzos, por ejemplo al hacer deporte, para no superar una determinada frecuencia cardíaca.

Durante años la relación entre la máxima frecuencia cardíaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula siguiente:

$$\text{Máxima frecuencia cardíaca recomendada} = 220 - \text{edad}$$

Investigaciones recientes han demostrado que debería modificarse esta fórmula ligeramente. La nueva fórmula es la siguiente:

$$\text{Máxima frecuencia cardíaca recomendada} = 208 - (0,7 \times \text{edad})$$

- Un artículo de periódico afirma:

El resultado de usar la nueva fórmula en lugar de la antigua es que el máximo número recomendado



de latidos cardíacos por minuto disminuye ligeramente para los jóvenes y aumenta ligeramente para los mayores.

¿A partir de qué edad aumenta la máxima frecuencia cardíaca recomendada como resultado de introducir la nueva fórmula? Muestra tus cálculos.

- La fórmula para la máxima frecuencia cardíaca recomendada $= 208 - (0,7 \times \text{edad})$ se aplica también para determinar cuándo es más eficaz el ejercicio físico. Las investigaciones han demostrado que el entrenamiento físico es más eficaz cuando la frecuencia cardíaca alcanza el 80% del valor máximo recomendado.

Escribe una fórmula para hallar, en función de la edad, la frecuencia cardíaca recomendada para que el ejercicio físico sea más efectivo.

(Prueba PISA 2006)

Figura 11. Actividad propuesta por PISA del libro de texto de la editorial Santillana. (Grence et al., 2015 p. 261).

En síntesis, comparando las dos editoriales, observamos que sus contenidos curriculares son muy similares, aunque cada una plantea y estructura las unidades didácticas de forma diferente. De todas formas, ninguna de ellas se extiende mucho, en lo que a demostraciones matemáticas se refiere, sino que el contenido de sus epígrafes lo dedican más al concepto prácticamente explicado e ilustrado con ejemplos, que a desarrollos teórico-prácticos para determinación de expresiones analíticas (lo que en opinión de este autor, está muy bien concebido para evitar el posible aburrimiento, falta de atención o de motivación de los estudiantes, más de lo que supone en sí para gran parte del alumnado, la propia asignatura de “mates”).

En cambio, en ambos libros de texto, sí abundan los ejemplos de problemas resueltos muy didácticos y con abundancia de detalles, con una estructura bien diseñada y

¹ La construcción de modelos matemáticos es una actividad creativa que puede introducirse en los estudiantes de forma clara y sencilla si se dirige con un procedimiento didáctico adecuado, lo que se traduce en la renovación, tanto en las metodologías aplicadas en el aula, como en las competencias y capacidades adquiridas por los estudiantes.

secuencial para introducir de una forma eficiente y escalonada los razonamientos matemáticos y llegar a las conclusiones o soluciones finales sin excesivas dificultades.

Las dos editoriales trabajan de forma muy parecida en sus propuestas de actividades y tareas, con gran diversificación en muchas de ellas para no hacer monótonas las clases prácticas y evitar que, los **cuadernos de clase** de los estudiantes estén plagados de ejercicios mecánicos con soluciones numéricas abstractas, que no aportan ningún valor añadido a su aprendizaje y tampoco un sentido práctico.

Como hemos podido constatar en el análisis de sus actividades finales, ambas editoriales amplían el campo de ejercicios, implementando tareas en agrupaciones pequeñas de alumnos, fomentando el trabajo colectivo (Aprendizaje cooperativo), como son las orientadas a la enseñanza de las matemáticas por investigación, como el desarrollo de una clase IBL, (Inquiry Based Learning), ejemplo que anteriormente acabamos de exponer y según se ha visto, tiende a fomentar el pensamiento o espíritu crítico en los alumnos, trabajando con mayor interés en darle solución a problemas de la vida cotidiana que a problemas repetitivos y poco útiles.

También se proponen algunas actividades de modelización matemática, aunque tanto éstas como las anteriores han sido escasas en los dos libros de texto. Tras el análisis de ambas obras, se ha podido percibir que la resolución de la mayor parte de los ejercicios responde a la aplicación de una metodología “ad hoc”, de acuerdo con los datos proporcionados por éstos. *Ambas editoriales continúan programando sus unidades didácticas, más bien, aplicando metodologías tradicionales, limitando y fomentando escasamente metodologías innovadoras como es el aprendizaje entre iguales (trabajo cooperativo)* que conlleva al alcance de resultados muy satisfactorios, ya que los argumentos que cimentan las respuestas se realizan en un contexto a un mismo nivel cognitivo, favoreciendo que los estudiantes aprendan unos de otros a la hora de afrontar retos matemáticos, decantándose, en definitiva, por el trabajo individualizado, ralentizando en cierta medida, el proceso de aprendizaje.

Tampoco está muy promocionado el uso de las TIC, ya que, ambas editoriales no han readaptado los enunciados de sus actividades, orientándolos para ser resueltos mediante alguna aplicación o herramienta tecnológica. Sería de gran ayuda en la elaboración y adaptación de los contenidos de los nuevos libros de texto, las experiencias y análisis (el barómetro del aprendizaje), que los docentes perciben mediante el contacto directo con el alumnado, para orientarlos de manera más eficaz y favorecer un aprendizaje más significativo con proyectos didácticos diseñados conforme a las necesidades educativas que demandan las aulas, sin abandonar, entendemos, el esquema tradicional de enseñanza, lo que sería esperanzador para despertar el interés del alumnado por las matemáticas.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Este apartado se centra en el desarrollo de uno de los temas del temario oficial de oposiciones. En este TFM se ha escogido para ello el número 21, titulado “Funciones reales de variable real. Funciones elementales: situaciones reales en las que aparecen. Composición de funciones”.

4.1. Introducción

La idea de función que manejamos actualmente se empezó a concebir en el siglo XIV cuando los filósofos escolásticos medievales comenzaron a preocuparse por medir las variaciones de ciertas magnitudes respecto a otras, como la velocidad de un cuerpo en movimiento o la diferencia de temperatura en los distintos puntos de un objeto metálico.

El apoyo gráfico, que tan importante y necesario es en nuestros días, está basado en un sistema de ejes cartesianos que fue introducido por René Descartes en el siglo XVII. Pero es durante los siglos XVIII y XIX cuando el concepto de función se despliega ampliamente para llevar adelante todo el desarrollo científico y tecnológico. Las funciones y el análisis diferencial surgen para dar apoyo a los problemas físicos, estudiados, en especial por Isaac Newton.

También Leibniz y los hermanos Bernoulli empezaron a utilizar la palabra función en un sentido parecido al actual, con funciones particulares como potencias y funciones circulares, aunque no usaron la notación funcional moderna.

Se puede considerar a Euler en el siglo XVIII el autor de la definición de función y la notación actual. A finales del XIX y comienzos del siglo XX se observó que las funciones podían sumarse, restarse, etc., surgió el **Análisis Funcional**, uno de los campos de mayor actuación dentro de la Matemática actual, donde se contemplan las funciones como simples elementos dentro de estructuras más complejas, como vectores de un espacio de funciones.

En este tema se definirá la función real de variable real, estudiaremos las propiedades de las funciones y las operaciones entre ellas, en particular la composición de funciones. A continuación, se estudiarán las funciones más elementales o usuales como la **lineal, cuadrática, polinómica y función de proporcionalidad inversa**, completando sus estudios atendiendo especialmente a las situaciones reales en donde aparecen.

4.2 Funciones reales de variable real. Consideraciones generales

4.2.1 Concepto de función. Notación y terminología

Una función real de variable real es una correspondencia o aplicación de un subconjunto no vacío $D \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (lo notaremos como $f: D \rightarrow \mathbb{R}$) que a cada elemento $x \in D$ le asocia un elemento $y \in \mathbb{R}$, y sólo uno.

El subconjunto D se llama **dominio de definición de f** y se denota **$Dom(f)$** = $\{x \in \mathbb{R} / \exists: f(x) \in \mathbb{R}\}$.

El **recorrido** o **imagen de una función** es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por las imágenes de los elementos del dominio:

$$Im f = Rec f = \{f(x) / x \in D\}$$

La letra x representa un valor del dominio de la función y se llama **variable independiente**.

Al número, y , asociado por la función al valor de x se le llama **variable dependiente**.

Veamos algunos ejemplos:

$$y = f(x) = x + 3 \quad ; \quad y = f(x) = 1/x$$

4.2.2 Formas de representar una función

Expresión mediante una fórmula: La función viene descrita por la asociación entre las dos variables (dependiente e independiente) de la forma **$y = f(x)$** . Mediante esta forma la variable “ y ” está relacionada con la “ x ” por medio de sumas, restas, productos, y demás operaciones matemáticas. Tanto el dominio como el recorrido de la función son características que se determinan partiendo de la expresión algebraica y de las operaciones que en ella intervienen, por tanto:

1. Si tiene *denominadores*, los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio (no se puede dividir entre cero).
2. Si tiene *raíces* de índice *par*, los valores de x que hacen el radical negativo tampoco pertenecen al dominio (no existen raíces de índice par con radicando negativo).
3. Si tiene *logaritmos*, los valores de x que hacen el argumento negativo o cero tampoco pertenecen al dominio (no existen logaritmos con argumento negativo o cero).

Merecen una especial atención las funciones con expresión algebraica “definida a trozos”, en las que la función toma una u otra expresión algebraica dependiendo del intervalo. Para localizar el dominio en estas funciones debemos estudiar aquellos intervalos donde están definidos cada uno de los “trozos o tramos”, estudiando el dominio en cada uno de estos intervalos.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } 0 < x < 4 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$Dom f(x) = [-2, 0] \cup (0, 4) \cup (4, \infty) - \{1\} = [2, \infty) - \{1, 4\}$$

Veamos ahora algunas definiciones:

1. **Gráfica:** Un sistema de coordenadas cartesianas en el plano es un par ordenado de dos ejes perpendiculares entre sí en un punto O. Al eje horizontal se le llama **eje de abscisas** y se designa con OX, mientras al vertical se le llama **eje de ordenadas** y se designa con OY. Sobre OX se sitúa la variable independiente y sobre OY la variable dependiente. Por ejemplo, un punto P se expresaría de la forma (x_0, y_0) , siendo x_0 la abscisa de P e y_0 la ordenada de P. La gráfica de una función queda reducida a trazar cada uno de los pares $(x, f(x))$ de la misma.

La representación gráfica de las funciones nos permite estudiar sus propiedades con más facilidad y con mayor detalle.

2. **Tabla de valores:** Es aquella donde se indican una serie de parejas $(x_i, f(x_i))$ siendo los x_i valores del dominio de la función.

x	x_1	x_2	x_3	
$y=f(x)$	$y=f(x_1)$	$y=f(x_2)$	$y=f(x_3)$	

Notas: Tengamos en cuenta las consideraciones siguientes:

- La función queda perfectamente definida cuando ésta viene descrita en las formas algebraica y gráfica, no así en la forma tabulada, pues no sabremos el valor de la función para los valores de x no definidos en ésta.
- Siempre es posible obtener la gráfica a partir de la expresión algebraica, no así el contrario. De hecho hay funciones que no pueden ser representadas como el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

- Hay funciones que son difíciles describir mediante expresión algebraica, como puede ser el crecimiento de una planta (variable x) vs el tiempo (variable y).

4.2.3. Propiedades de las funciones

4.2.3.1. Paridad de funciones: Funciones par o impar

La simetría de una función que trataremos es la *simetría par* o respecto al eje OY y la *simetría impar* o respecto al origen. Si no tiene ninguna de estas dos simetrías diremos que es *no simétrica* (aunque pueda tener otra simetría con respecto a otra recta, u otro punto).

Función par o respecto eje OY: Una función real de variables real $y = f(x)$ es *par* si y solo si a valores opuestos de "x" les corresponden el mismo valor de la "y", es decir, $f(-x) = f(x)$. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de coordenadas, ya que si contiene al punto (x,y) , también contiene al $(-x, y)$ (Figura 12). Veamos algunos ejemplos:

$$y = \cos x \quad ; \quad y = x^4 + x^2 \quad (\text{todos polinomios con potencias pares}).$$

Función impar o respecto al origen: Una función real de variables real $y = f(x)$ es *impar* si y solo si a valores opuestos de "x" les corresponden valores opuestos de la "y", es decir, $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen, ya que si contiene al punto (x, y) , también contiene al $(-x, -y)$ (Figura 12). Veamos algunos ejemplos:

$$y = \sin x \quad y = \frac{x^5}{x^2+2} \quad y = 2x^3 - 3x \quad (\text{Polinomios de potencias impares})$$

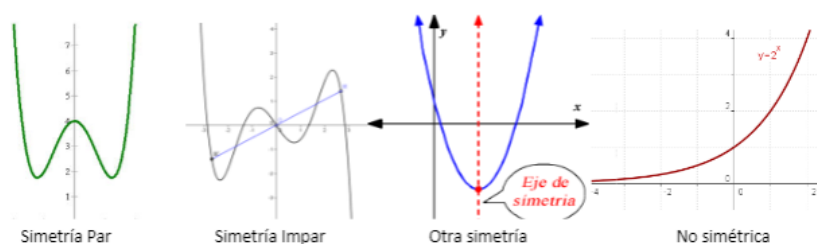


Figura 12. Funciones par, impar y simétricas. www.joseluislorente.es

4.2.3.2 Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

Función inyectiva: Una función real de variable real $y = f(x)$ es inyectiva si y solo si a valores iguales de la variable independiente les corresponden valores iguales de la variable dependiente, es decir, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x', \forall x, x' \in D$. Gráficamente observaremos que al trazar paralelas al eje OX sólo corten a la función en un punto. Veamos como ejemplos:

$$y = 2^x \quad ; \quad y = x^3$$

Función suprayectiva: Una función real de variable real $y = f(x)$ es suprayectiva si y solo si para cualquier valor $y \in \mathbb{R}$ existe algún elemento x del dominio tal que su imagen es y , es decir $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Gráficamente lo veremos cuando $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Veamos algunos ejemplos:

$$y = \tan x \quad ; \quad y = x^3$$

Función biyectiva: Una función real de variable real $y = f(x)$ es biyectiva si es a la vez inyectiva y suprayectiva. Veamos algunos ejemplos:

$$y = 2x - 3 \quad ; \quad y = x^3$$

4.2.3.3 Funciones periódicas

Función periódica: Una función real de variable real $y = f(x)$ es periódica si existe un número real no nulo T (período), tal que para cualquier valor de x del dominio se verifica que $f(x + n \cdot T) = f(x)$. De la definición se deduce que todo múltiplo de T también es período, por lo que se define al período como el menor real T en el que $f(x) = f(x+T)$ (Figura 13). Fenómenos periódicos en la vida real son por ejemplo:

- El péndulo de un reloj de pared,
- Latidos del corazón,
- Una cuerda de guitarra al ser pulsada,
- Movimiento de una rueda,
- Ondas luminosas, sísmicas...
- La corriente alterna
- Etc.....

No obstante, desde el punto de vista de muchas aplicaciones, las **funciones periódicas trigonométricas** son las más importantes.

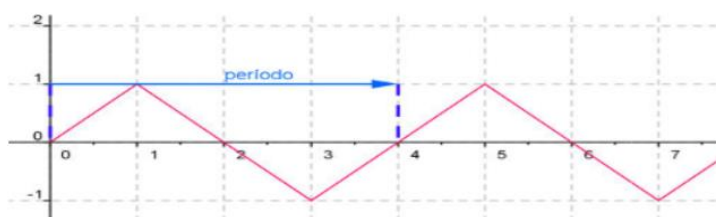


Figura 13. Ejemplo de función periódica. www.joseluislorente.es

4.2.3.4 Monotonía: crecimiento y decrecimiento. Puntos relativos

Una **función crece en un punto x_0** si existe un entorno de x_0 por la izquierda,

$E^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ donde se cumple que $f(x_0) \geq f(x)$ con $x \in E^-(x_0) - \{x_0\}$ y otro entorno por la derecha $E^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ con $x \in E^+(x_0) - \{x_0\}$.

Una **función decrece en un punto x_0** si existe un entorno de x_0 por la izquierda,

$E^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ donde se cumple que $f(x_0) \leq f(x)$ con $x \in E^-(x_0) - \{x_0\}$ y otro entorno por la derecha $E^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ con $x \in E^+(x_0) - \{x_0\}$.

Una función será **creciente (decreciente)** en un intervalo D si es creciente (decreciente) en todos los puntos de ese intervalo. Un punto x_0 es **mínimo relativo** si existe un entorno de x_0 , $E(x_0)$, tal que $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in E(x_0) - \{x_0\}$.

Un punto x_0 es **máximo relativo** si existe un entorno de x_0 , $E(x_0)$, tal que $f(x_0) \geq f(x)$

$\forall x \in E(x_0) - \{x_0\}$. Según se puede apreciar en la gráfica de la curva de la figura:

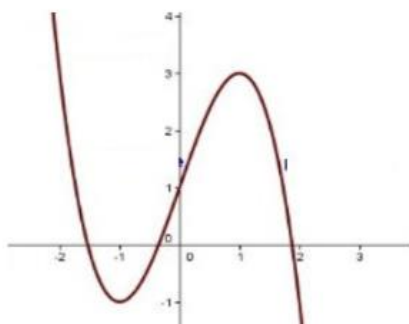


Figura 14. Ejemplo de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

www.joseluislorente.es

Observaciones: La función $f(x)$ crece en $(-1,1)$; crece en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; existe un **máximo relativo** en $M(1,3)$, y existe un **mínimo relativo** en $m(-1,-1)$.

4.2.3.5 Acotación de las funciones

Función acotada superiormente: Una función real de variable real $y = f(x)$ está acotada superiormente si existe un número real M , tal que $f(x) \leq M$ para todo valor x perteneciente al dominio D . A ese número M lo llamaremos **cota superior**. Si la función alcanza ese valor se llamará **máximo absoluto**.

Función acotada inferiormente: Una función real de variable real $y = f(x)$ está acotada inferiormente si existe un número real m , tal que $f(x) \geq m$ para todo valor x perteneciente al dominio D . A ese número m lo llamaremos **cota inferior**. Si la función alcanza ese valor se llamará **mínimo absoluto**.

Función acotada: Una función real de variable real $y = f(x)$ está acotada si lo está superior e inferiormente, es decir $m \leq f(x) \leq M$ en $x \in D$.

4.2.3. Curvatura: Concavidad y convexidad. Punto de inflexión

Se define **convexidad** en un intervalo (x_1, x_2) , de la siguiente forma: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, para todo t en $[0,1]$, donde para cada punto del intervalo $[x_1, x_2]$, la imagen de dicho punto está por debajo de la línea que une a las imágenes de los extremos. Análogamente se define la función cóncava. Una función $f(x)$ tiene un **punto**

de inflexión $P(x_0, f(x_0))$ si cambia de curvatura, es decir de cóncava a convexa o al revés. Se cumple que la recta tangente corta a $f(x)$ en P .

Nota 1: A nivel internacional, en la notación matemática estándar, la definición de concavidad y convexidad es justo la ésta, es decir, si la recta tangente se sitúa por debajo de la función entonces hablamos de convexidad. Por otro lado, definir concavidad y convexidad en términos de rectas tangentes es demasiado restrictivo ya que estamos implícitamente exigiendo que la función sea derivable para definir concavidad y convexidad. Sin embargo hay funciones habituales (como el valor absoluto) que son convexas aunque no tienen recta tangente en el origen. Adoptaremos una nomenclatura estándar para concavidad y convexidad (a grandes rasgos, $f''(x) \geq 0$ significa convexo) y utilizar una definición que no necesite de la existencia de derivada (bastaría considerar la recta que une dos puntos de la función en lugar de la tangente).

Nota 2: La terminología cóncava o convexa puede cambiar en algunos textos pudiendo ser contraria a la que se está exponiendo aquí. Según se puede apreciar en la gráfica de la curva de la Figura 15:

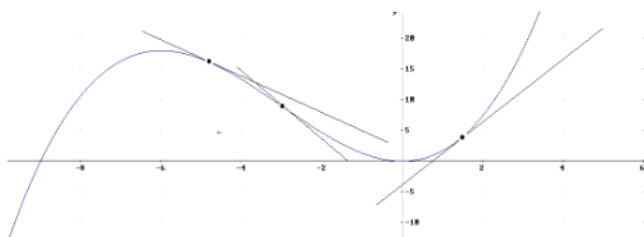


Figura 15. Concavidad, convexidad y punto de inflexión. www.joseluislorente.es

La función es convexa en $(-\infty, 3)$, cóncava en $(3, \infty)$ y punto de inflexión en $P(-3, 9)$.

4.3 Operaciones con funciones. Estructura algebraica de las funciones.

Sea $\Phi(D, \mathbb{R}) = \Phi$ el conjunto de las funciones reales de D en $\mathbb{R}$, definiremos en este conjunto las operaciones de suma, resta y producto.

4.3.1 Suma de funciones

Dadas dos funciones f y g de Φ llamamos **función suma** h y la denotamos por $h = f + g$ a la función que verifica:

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$$

Esta definición cumple la propiedad uniforme que dice que para cualesquiera funciones f y g que pertenezcan a Φ , su suma también pertenece a Φ y además es única.

Propiedades de la suma de funciones: La demostración de estas propiedades se basa en las propiedades análogas que tiene la suma de números reales.

1. Asociativa: $(f + g) + h = f + (g + h)$.
2. Conmutativa: $f + g = g + f$.
3. Elemento neutro: $\forall f \in \Phi$ existe una función que llamaremos 0 (que definiremos como $0(x) = 0, \forall x \in D$), tal que $f + 0 = 0 + f = f$.
4. Elemento simétrico. $\forall f \in \Phi$ existe una función que llamaremos **opuesta de f** y que denotaremos por $-f$, tal que $f + (-f) = (-f) + f = 0$. Dicha función quedará definida por: $(-f)(x) = -f(x)$. Con todas las propiedades anteriores respecto de la suma podemos afirmar que el conjunto Φ con la operación suma tiene **estructura de grupo abeliano** $(\Phi(D), +)$. Puesto que la notación es aditiva no se hablaría de elemento inverso sino de elemento o función "simétrico" de f que se denota $-f$. Utilizando el elemento simétrico es posible definir la operación resta que asigna a dos funciones f y g , la función resta dada por $f - g = f + (-g)$.

Cuando f y g tienen distinto dominio se cumple que el dominio de la suma es la intersección de los dominios: Si $\text{dom}(f(x)) = D_1$ y $\text{dom}(g(x)) = D_2$ implica que $h(x) = (f+g)(x)$ con $\text{dom}(h(x)) = D_1 \cap D_2$. Veamos las siguientes observaciones:

- Si $f(x)$ y $g(x)$ pares (impares) implica que $(f+g)(x)$ par (impar)
- Si $f(x)$ y $g(x)$ acotadas implica que $(f+g)(x)$ acotadas
- Si $f(x)$ y $g(x)$ periódicas con periodos T_1 y T_2 : $T_1/T_2 = p/q \in \mathbb{Q}$
Implica, que, $(f+g)(x)$ es periódica con $T = \text{mcm}(T_1, T_2)$.

4.3.2 Producto de funciones por un escalar

Dada una función $f \in \Phi$ y cualquier número $k \in \mathbb{R}$, definimos h el producto de una función f por un número real k como la función $h(x) = (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x), \forall x \in D$.

Propiedades: Con las propiedades que vamos a definir y junto a que $(\Phi(D), +)$ es grupo abeliano, hace que $(\Phi(D), +, \cdot \mathbb{R})$ sea **espacio vectorial** (de dimensión no finita). La demostración de estas propiedades se basa en las propiedades análogas que tienen suma y producto de números reales:

1. Distributiva respecto a la suma de funciones: $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$.
2. Distributiva respecto a la suma de escalares: $(k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f$.
3. Asociativa mixta: $(k \cdot k') \cdot f = k \cdot (k' \cdot f)$
4. Elemento neutro: $1 \cdot f = f$, siendo 1 el elemento neutro de $\mathbb{R}$.

Observaciones:

- Si $f(x)$ par (impares) implica que $(k \cdot f)(x)$ par (impar)
- Si $f(x)$ acotada implica que $(k \cdot f)(x)$ acotada

- Si $f(x)$ periódica implica que $(k \cdot f)(x)$ periódica con mismo período.

4.3.3 Producto de funciones

Dadas dos funciones f y g de Φ llamamos función producto h y la denotamos por $h=f \cdot g$ a la función que cumple $h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \forall x \in D$.

Propiedades del producto de funciones: La demostración de estas propiedades se hace basándonos en las propiedades de la suma y producto de números reales.

1. **Asociativa:** $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$.
2. **Conmutativa:** $f \cdot g = g \cdot f$
3. **Elemento neutro:** $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$. La función 1 estará definida como $1(x) = 1 \forall x \in D$
4. **Distributiva respecto a la suma:** $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$

Con estas propiedades el conjunto Φ con las operaciones suma y producto, $(\Phi, +, \cdot)$ tiene estructura de un **anillo conmutativo con elemento unidad**. El campo de existencia de la función producto es la intersección de los campos de existencia de cada función f y g . Si $\text{dom}(f(x))=D_1$ y $\text{dom}(g(x))=D_2$ implica que $h(x)=(f \cdot g)(x)$ con $\text{dom}(h(x))=D_1 \cap D_2$.

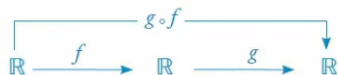
Con la operación producto no todas las funciones son inversibles. Dada una función $f(x) \in \Phi$ se puede definir su **inversa respecto al producto** como $(f(x))^{-1}$, cumpliéndose que $f(x) \cdot (f(x))^{-1} = 1$. Así, esta función será $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$ por lo que puede existir algún valor del dominio donde la función f se anule. Veamos las siguientes observaciones:

- Si $f(x)$ y $g(x)$ las dos pares o impares, entonces el producto $(f \cdot g)(x)$ es par. Si una es par y la otra impar, el producto $(f \cdot g)(x)$ es impar.
- Si $f(x)$ y $g(x)$ están acotadas entonces el producto $(f \cdot g)(x)$ está acotado
- Si $f(x)$ y $g(x)$ periódicas con periodos T_1 y T_2 : $T_1/T_2 = p/q \in \mathbb{Q}$, entonces $(f \cdot g)(x)$ es periódica con $T = \text{mcm}(T_1, T_2)$.

Cociente de funciones: Sean $f(x)$, $g(x)$ dos funciones reales: Se llama cociente de ambas a la función $h(x)=(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(h(x))$.

4.3.4 Composición de funciones. Función inversa

Sean las funciones reales de variable real: $y = f(x)$, e $y = g(x)$. Se define como **función compuesta** (f compuesta con g) a una función real de variable real, escribiremos $h=g \circ f$ a la función que se obtiene aplicando primero la función f y posteriormente la función g : $h(x) = g(f(x))$. Para que una función tenga sentido es necesario que los valores $f(x)$ pertenezcan al dominio de la función $g(x)$.



Para que una función tenga sentido es necesario que los valores $f(x)$ pertenezcan al dominio de la función $g(x)$.

Propiedades de la composición de funciones:

1. **Asociativa:** $((g \circ f) \circ h)(x) = (g \circ (f \circ h))(x)$ para todo x perteneciente al Dominio.
2. **Elemento neutro:** la función identidad: $I(x) = x$. Se cumple que $(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$ y también $(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$.
3. **No posee la conmutativa**, ya que es posible que incluso al conmutar la composición, funciones resultantes ni siquiera tengan el mismo dominio. Por ejemplo, $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x^2$, $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$; $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$.

Dada una función real de variable real f que sea inyectiva, se puede definir la **función inversa** f^{-1} : tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = \text{id}(x) = x$. Para que exista la función inversa es necesario que la misma esté definida en el recorrido de la original. La gráfica es simétrica respecto $y = x$. Pasos del **cálculo de f^{-1}** :

1. Ver que $f(x)$ es inyectiva
2. Cambiar x e y
3. Despejar y

Si representamos las gráficas de dos funciones inversas entre sí, podemos observar que son **simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante**. Veamos los siguientes ejemplos (Figuras 16 y 17): a) $y = 2^x$ vs $y = \log_2 x$

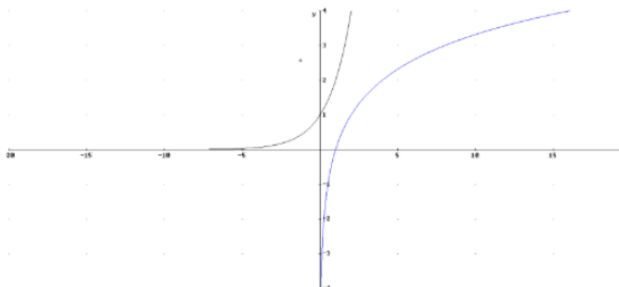


Figura 16. Representación gráfica de las funciones del ejemplo a). www.joseluislorente.es

b) $y = \frac{2x-1}{x-1}$ vs $y = \frac{x+1}{x-2}$

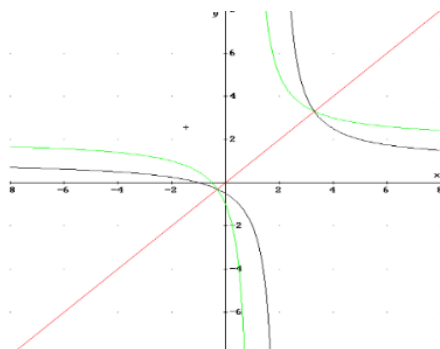


Figura 17. Representación gráfica de las funciones del ejemplo b). www.joseluislorente.es

4.4. Funciones Elementales

Las funciones se clasifican en:

$$\begin{array}{l} \text{Algebraicas } \sum a_n \cdot x^n \left\{ \begin{array}{l} \text{Polinómicas } f(x) = P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ \text{Racionales } g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \\ \text{Irracionales } = \sqrt[n]{P(x)} \end{array} \right. \\ \\ \text{Transcendentes } \left\{ \begin{array}{l} \text{Exponenciales} \\ \text{Logarítmicas} \\ \text{Trigonómicas} \\ \text{Hiperbólicas} \end{array} \right. \end{array}$$

En este apartado sólo estudiaremos las funciones elementales: **polinómicas de primer y segundo grado, de proporcionalidad inversa y raíz cuadrada.**

4.4.1 Transformación de funciones

En este apartado trataremos las transformaciones elementales que nos ayudarán a la hora de definir las funciones elementales de los puntos sucesivos.

Desplazamiento de la función en el eje OY: se consigue sumando una constante " y_0 " (valor que se desplaza la función) a la función. Así $g(x) = f(x) + y_0$ es la función $f(x)$ desplazada " y_0 " unidades en el eje OY. Veamos el siguiente ejemplo de la Figura 18:

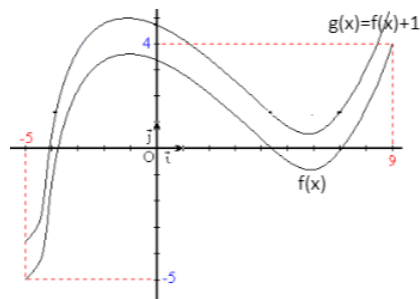


Figura 18. Transformación de funciones. Representación gráfica. www.joseluislorente.es

Desplazamiento de la función en el eje OX: Se obtiene componiendo la función con $l(x) = x - x_0$, siendo " x_0 " el valor que se desplaza la función. Así $g(x) = f(x - x_0)$ es la función $f(x)$ desplazada " x_0 " unidades en el eje OX. Veamos el siguiente ejemplo de la Figura 19:

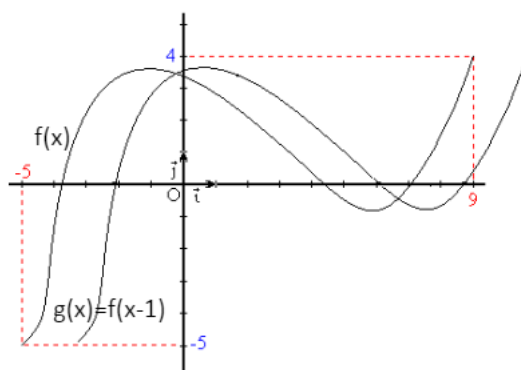


Figura 19. Transformación de funciones. Representación gráfica. www.joseluislorente.es

4.4.2 Funciones afín y lineal: situaciones reales en las que aparece

Nos planteamos estudiar a qué situaciones corresponde, qué propiedades verifica una función cuya gráfica es una recta cualquiera, sin considerar el caso particular de las rectas paralelas al eje de ordenadas, es decir, las de ecuación $x = k$.

Expresión algebraica de una recta: es una función polinómica de primer grado:

$$y = mx + n$$

El significado en la gráfica de m , es el valor de la pendiente y n el de la ordenada en el origen. El valor m depende de inclinación de la recta, es decir, la variación del

crecimiento en y respecto al de crecimiento en x. Se relaciona también con el ángulo, α , que forma con el eje OX. Así, tenemos:

$$m = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + n - (mx_1 + n)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se cumple: que si $m > 0$ la recta es creciente, si $m < 0$ es decreciente y $m=0$, la es recta paralela con el eje OX. La **ordenada en el origen**, n , es el valor de corte con el eje OY (cuando $x=0$). Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente.

Demostración: Si son **paralelas**, $m_1 = m_2$, así los ángulos de las rectas con el eje OX son también los mismo, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Dos rectas son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es -1, es decir, $m_2 = -1/m_1$.

Demostración: Si $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$, se verifica que:

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -1 / \operatorname{tg} \alpha_1 = -1/m_1$$

Si $n=0$, tenemos $y=mx$, con lo que $y/x=m$ constante. Nos describe situaciones de proporcionalidad y por eso se llama **función lineal** o de proporcionalidad directa. Son rectas que pasan por el origen.

Funciones afines a trozos: Existen funciones que son combinaciones de funciones lineales, constantes y afines. Son funciones llamadas **a trozos**. Por ejemplo, la función valor absoluto de x , $f(x)=|x|$, la función parte entera de x : $f(x)=[x]$ =mayor entero menor o igual que x (es una función escalonada), la función decimal de x , $f(x)=\operatorname{Dec}(x)=x-[x]$.

Situaciones del mundo real que se asocian a la función lineal, por ejemplo:

1. Coste mensual del teléfono o del taxi.
2. La posición de un cuerpo en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme.

Otro situación real de función afín a trozos es la que corresponde a poner un cazo al fuego: Cada minuto que pasa la temperatura aumenta una cantidad (por ejemplo 10^0) hasta que al llegar a 100^0 se estabiliza. Matemáticamente es la función:

$$f(x) = \begin{cases} 20 + 10t & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ 100 & \text{si } t \geq 8 \end{cases}$$

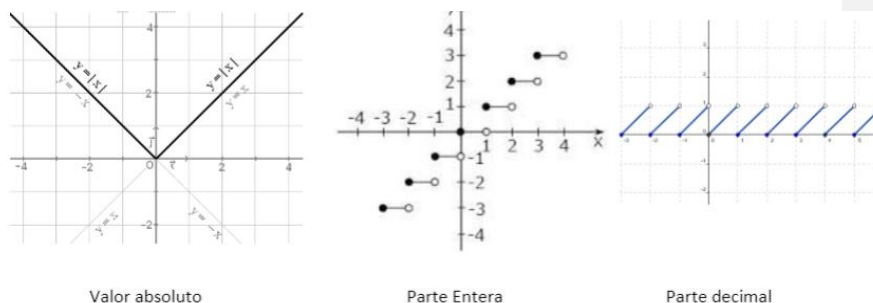


Figura 20. Ejemplos de funciones a trozos. www.joseluislorente.es

4.4.3. Función cuadrática: Situaciones reales donde aparece

Todas las funciones cuya expresión algebraica es una ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ les corresponde un mismo tipo de curva, que llamamos **parábola**.

Empecemos por la ecuación más simple $y = ax^2$. Su gráfica nos da una curva simétrica respecto al eje de ordenadas, $f(x) = f(-x)$. Además, los valores que toma la variable dependiente "y" son siempre positivos, a excepción del punto de corte al eje de simetría que es el origen de coordenadas, punto que recibe el nombre de **vértice de la parábola**. Gráfica según a:

- Si $a > 0$, la parábola que se obtiene es más convexa, más cerrada, a mayor valor de a .
- Si $a < 0$, la parábola que se obtiene es más cóncava, más cerrada, a mayor valor de $|a|$.

El resto de parábolas con expresión general $y = ax^2 + bx + c$, sus gráficas tienen la misma forma que $y = ax^2$, ya que lo único que hacemos es desplazar la curva. Así, si el vértice está en $V(x_0, y_0)$ habremos desplazado la función x_0 en el eje OX y y_0 en el eje OY. Podemos relacionar las coordenadas de V con los parámetros a , b y c , sin más que igualar las dos expresiones:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ con } y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0 = ax^2 - 2a x_0 \cdot x + (x_0^2 + y_0), \text{ luego:}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Veámos el siguiente ejemplo:

Construir la gráfica de $y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$ (Figura 21) (se obtiene a partir de $y = x^2$, trasladando tres unidades a la derecha y cuatro unidades hacia abajo). Luego el vértice es $V(3, -4)$.

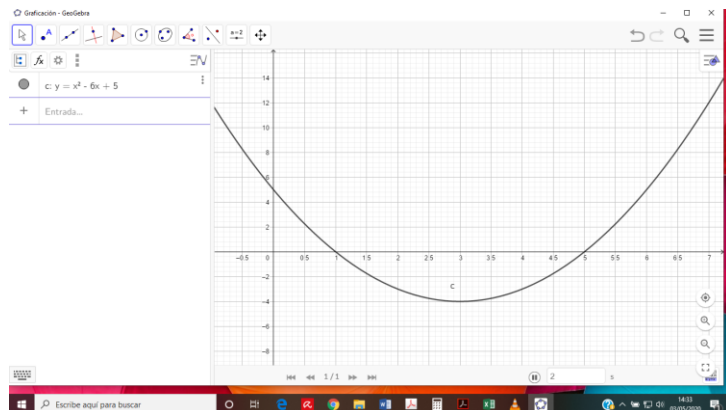


Figura 21. Ejemplo de función cuadrática representada con el programa GeoGebra.
Elaboración propia

Situaciones reales donde aparece:

1. Espacio recorrido por un móvil en un movimiento uniformemente acelerado en función del tiempo.
2. Cantidad de agua que sale en un depósito con un orificio en el fondo en función del tiempo.
3. Área de un cuadrado en función del lado,...

4.4.4 Funciones de proporcionalidad inversa.

Responden a aquellas situaciones en que $x \cdot y = k$, es decir, a situaciones de proporcionalidad inversa. La gráfica corresponde a una **hipérbola equilátera**, curva simétrica respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante si k es positivo o simétrica respecto a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante si k es negativo.

Al igual que en la función cuadrática podemos desplazarla en el eje OX o en el eje OY siendo la función de la forma $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$. Si tenemos una expresión de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, podemos identificar k , x_0 e y_0 sin más que hacer la división $(ax+b)$ entre $(cx+d)$ siendo el coeficiente a/c y el resto $b-d \cdot a/c$, así:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b - da/c}{c \cdot (x - \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{b/c - da/c^2}{x - \frac{d}{c}}$$

Veamos el ejemplo de la Figura 22:

$$y = 1 + \frac{2}{x-3}$$

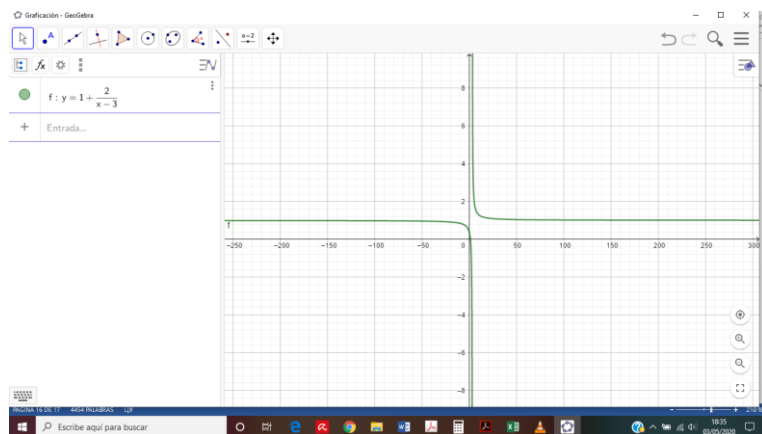


Figura 22. Ejemplo de hipérbola equilátera representada con el programa GeoGebra.
Elaboración propia

Situaciones reales donde aparece:

1. Precio que debe pagar cada persona para pagar un viaje en función del número de personas.
2. Base y altura de un rectángulo de área dada.
3. En el campo de la física: la ley de la palanca (el valor de la fuerza por longitud del brazo es constante).
4. La ley de Boyle-Mariotte (a una cierta temperatura la presión por el volumen es constante), frecuencia de un sonido y su longitud de onda...

4.4.5 Función raíz cuadrada

Son expresiones de la forma $y = \pm\sqrt{ax}$ y sus posibles traslaciones, $y = \pm\sqrt{a(x-x_0)} + y_0$

y $y = \pm\sqrt{a(x-x_0)} + y_0$. Sus gráficas son semi-parábolas con eje de simetría paralela al eje OX y vértice en (x_0, y_0) . Veamos el ejemplo: $y = \sqrt{2(x-3)} + 1$ cuyo vértice es V (3,1) (Figura 23).

Código de campo cambiado

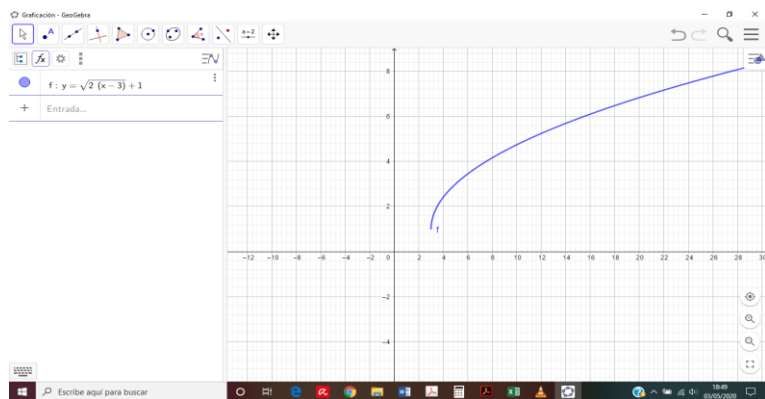


Figura 23. Ejemplo de función raíz cuadrada representada con el programa GeoGebra.

Elaboración propia

4.5. Contextualización con la Educación Secundaria Obligatoria.

- Primer y segundo curso de secundaria: Se trabaja con el concepto de función, con la representación gráfica y se describe la función lineal.
- Tercero y cuarto de secundaria: Se describen las propiedades básicas de las funciones, en 3º de la ESO se retoma la función lineal y en 4º de la ESO, se repasa la función cuadrática y se comienzan las explicaciones de las funciones, *inversa, exponencial, logarítmicas y trigonométricas*.
- Bachillerato: Tanto en las asignaturas de Ciencias Sociales como la de Naturaleza y Salud, se estudian las propiedades de todas las funciones a partir de su expresión analítica.

4.6. Conclusiones

Con esta exposición, hemos pretendido abordar las *funciones lineales y cuadráticas* desde una perspectiva con mayor coherencia, rigor y complejidad matemática, haciendo usos de terminología y notación matemática en un nivel de conceptos más elevado, considerándolos relevantes y darle un sentido más profundo y científico a esta parte tan interesante de las matemáticas.

4.7 Bibliografía

La bibliografía de este apartado 4 se encuentra en el capítulo 8, Bibliografía.

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

En el presente apartado vamos a exponer algunas investigaciones extraídas de distintas fuentes centradas en los alumnos y el proceso de aprendizaje de las matemáticas: cómo las aprenden, qué perspectiva tienen a priori de ellas y una vez

que las están estudiando, qué dificultades encuentran, qué errores comenten con más frecuencia, qué metodologías serían las más adecuadas para optimizar su aprendizaje, etc. Todas ellas las hemos analizado y contrastado con objeto de justificar las distintas metodologías que han sido escogidas para elaborar la programación de la unidad didáctica que será expuesta en el próximo capítulo de este TFM.

5.1 Actitud de los alumnos ante las matemáticas: Errores y Dificultades

La asignatura de matemáticas, por su forma particular de expresar conocimiento con un lenguaje técnico y abstracto (distinto al de cualquier asignatura como lengua, o historia por ejemplo), con unos contenidos a veces abstractos (muy diferentes a los de estas asignaturas que hemos puesto como ejemplo) y con un método de aprendizaje tradicional, poco eficaz, repetitivo, muy mecánico y nada motivador, para asimilar éstos, ha supuesto siempre para una gran porcentaje de la clase, la realización de un esfuerzo cognitivo adicional, más que en el resto de asignaturas, lo que puede dar lugar que algunos alumnos experimenten animadversión y desinterés hacia esta materia.

Se han realizado infinidad de estudios acerca del rechazo que suponen las matemáticas en los estudiantes. Así, Font (1994) señala la importancia de la falta de motivación, como una de las causas más relevantes para dar explicación a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, así como de sus diferentes factores que están relacionados con el patrón motivacional de los alumnos: metas, utilidad, etc. Según señala este autor, el constructivismo acepta que el objetivo de la intervención escolar se basa en la modificación de los esquemas de conocimiento, de acuerdo a la teoría de la equilibración de Piaget, considerando que el primer paso para que el alumno consiga realizar un aprendizaje significativo, se basa en que el nuevo contenido de aprendizaje rompa o modifique el equilibrio inicial de sus esquemas de conocimiento y cita a (Coll, 1989), el cual, justifica que una tarea que introduzca una situación de desequilibrio puede deberse a varios factores:

- a. Que la situación propuesta sea poco coherente o confusa, por lo que no propiciará el aprendizaje significativo y para resolverlo, el profesor deberá ofrecer una situación más clara, sencilla y coherente.
- b. Que el estudiante no posea los conocimientos requeridos para regresar a la situación de equilibrio y para ello, en este caso, la solución es adaptar el nuevo contenido al que ya sabe el estudiante.
- c. Que falte motivación en el alumno para abordar la actividad designada por el profesor y por tanto, podrá ocurrir que no se dé, ni siquiera, la situación de desequilibrio porque la actividad propuesta resulta distante, sin un sentido práctico por el que el profesor deberá reconstruirla en atrayente y despierte la curiosidad y el interés del estudiante.

- d. Que las concepciones intuitivas del alumno frente al nuevo contenido y las metodologías desarrolladas por el profesor, no permitan desembocar en una situación de equilibrio. Para ello, el docente intentará que el alumno vaya modificando sus estrategias cognitivas hacia un nuevo esquema del saber. Para prevenir este problema, resulta conveniente desde la educación infantil proponer modelos o estrategias que contribuyan a superar estas dificultades trabajando en los contenidos referentes a actitudes como:
- Fomentar el interés en la utilización del lenguaje de los procedimientos matemáticos.
 - Descubrimiento y valoración del propio esfuerzo para llegar a solucionar un contexto matemático.
 - Descubrir las aplicaciones de las matemáticas en problemas de la vida cotidiana, siendo consciente de las dificultades que en ocasiones presentan sus resoluciones, valorando adecuadamente las soluciones una vez alcanzadas.

Según Juidías y Rodríguez (2007), las dificultades más frecuentes en la resolución de problemas matemáticos (RPM) abarcan diferentes dimensiones como, *conocimientos base*, *heurísticos*, procesos *“metacognitivos”* y *componentes afectivos*, los cuales provocan en el estudiante el cometer errores en la resolución de problemas matemáticos.

A. Conocimientos Base

- a. El alumno traduce literalmente el enunciado y sigue el orden en que se expresan las frases (basado en Pérez, 1987)
- b. El alumno comprende el enunciado pero se equivoca al escoger las operaciones a aplicar, al elegir éstas partiendo de un análisis superficial (Tomás, 1990, Simón, 1978, citados en Pérez, 1994).
- c. El alumno no sabe cuándo aplicar sus conocimientos debido a cómo los aprendió, o generaliza incorrectamente los métodos de resolución que ya domina y cita a (Enright y Choate, 1993). El estudiante tiene dificultades para interpretar los enunciados debido a varios factores como:
 - Un bajo conocimiento semántico y lingüístico y cita a (Mayer, 1991).
 - Comprensión lectora baja ya que los textos se alejan de los de humanidades en cuanto a las exigencias de interpretación y estructura y cita a (Callejo, 1987).
 - Dificultades por el uso de un vocabulario técnico; por la notación matemática; por no ser capaces de relacionar las matemáticas con el contexto y cita a (Macnab y Cummine, 1992), o bien, dificultades en cómo ejecutar una serie de operaciones como multiplicar un nº entero por un decimal o divisiones entre números decimales, etc., y cita a (Mayer, 1991).

B. Heurísticos

El desconocimiento de este tipo de estrategias generales para la resolución de problemas, puede disminuir las posibilidades de llegar a la solución de un problema, puesto que muchos de ellos necesitan de estos métodos para llegar a su resolución o solución aproximada, porque no aseguran alcanzar la solución exacta. Son estrategias heurísticas, por ejemplo, la descomposición del problema en otros más sencillos, generalización de la solución alcanzada, etc.

C. Procesos “megacognitivos”

Las dificultades relacionadas con este tipo de procesos se manifiestan cuando (Schoenfeld, 1992):

- a. El alumno, disponiendo de recursos algorítmicos y heurísticos, no es capaz de percibir cuál es el más adecuado para la resolución de problemas matemáticos e incluso no es consciente de que exista la posibilidad de poder utilizar dichos recursos.
- b. El alumno no es capaz de cambiar de estrategia para la resolución de un problema y no busca otras alternativas.
- c. El alumno no aporta estrategias resolutorias por estimación, que le permitan comprobar las soluciones a las que llega y así poderlas cambiar en caso de que las soluciones obtenidas por este medio no coincidan por medio del cálculo.
- d. Disposición inmediata del estudiante hacia la resolución, tras una rápida lectura del problema, sin una previa reflexión sobre qué estrategias más adecuadas necesita éste para llegar a su solución, actuando de forma mecánica sin valoración alguna del caso concreto.
- e. El estudiante sabe resolver el problema aunque no sabe explicar el procedimiento aplicado, o en caso de equivocarse, necesita de una ayuda para comprender porqué su solución es incorrecta.

D. Componentes afectivos

Algunos autores como Schoenfeld (1985,1992) y Lester (1983, cita en Mayer, 1991) nos exponen una serie de creencias que no son compatibles con el aprendizaje matemático. Algunas de ellas son:

1. Los problemas matemáticos deben resolverse brevemente y desarrollarse en pocos pasos.
2. Si el alumno no se posee habilidad para resolver problemas matemáticos, como la inteligencia, no podrá resolverlos por mucho que se esfuerce para ello.
3. Las matemáticas no son de utilidad en la vida cotidiana.
4. Las *palabras clave* del problema matemático son las que condicionan el número de operaciones que hay que aplicar, pudiendo ser una o más.
5. Las matemáticas sólo exigen la aplicación de reglas y memorizarlas al ser operaciones.
6. Cuando se resuelve un problema, el tamaño del número se considera como criterio para valorar su grado de dificultad y es más importante que su significado.

7. Sólo los genios crean matemáticas.
8. El rol del estudiante en matemáticas estriba en recibir conocimientos y el del profesor/a el de transmitirlos. Los estudiantes demostrarán su nivel de conocimiento de acuerdo al número de problemas que son capaces de resolver de forma correcta.

5.2 Errores y dificultades en funciones lineales y cuadráticas.

Una vez expuesta en el apartado anterior una visión general de los errores y dificultades que presentan muchos estudiantes en adquirir las competencias matemáticas que conllevan a su aprendizaje, vamos a particularizar en uno de los bloques en los que está distribuido el currículo de la asignatura de *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*, El bloque 4: Funciones.

Veamos cuáles son sus principales dificultades y errores a la hora de realizar ejercicios sobre interpretar algebraica y gráficamente las *funciones lineales y cuadráticas* y si existen métodos más adecuados para una mejor asimilación conceptual del trabajo con funciones. Se han localizado bastantes fuentes bibliográficas y muy variadas, ya que abordan diferentes temas del aprendizaje y enseñanza de las funciones. Hemos podido consultar y analizar algunas de ellas, que nos han orientado y arrojado luz, exponiendo, a continuación, un resumen de lo más significativo.

Alpízar, Fernández, Morales y Quesada (2018) centraron su investigación en las dificultades y errores de los estudiantes al estudiar la función lineal. Para ello, distribuyeron un cuestionario a una muestra de 76 alumnos de un mismo centro de que cursaban el décimo año (equivalente a 4º de ESO en el sistema Español). Estos estudiantes ya habían abordado los contenidos sobre funciones lineales y cuadráticas. Los cuestionarios constaban de una batería de ejercicios y problemas que normalmente se encuentran los estudiantes en los libros de texto de la asignatura. En el análisis de los resultados de los cuestionarios, se detectaron los siguientes errores y se clasificaron en distintas categorías:

1. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales.
2. Errores debidos a asociaciones incorrectas.
3. Errores originados por una errónea utilización de contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática.

Para la primera categoría se detectaron **cuatro** tipos de fallos:

- a. Al utilizar la fórmula para calcular el valor numérico de la pendiente, se omite el signo negativo cuando alguna de las coordenadas de un punto es un número negativo.
- b. Mal empleo de la ley de signos en la realización de operaciones básicas en el conjunto de los números reales.
- c. Errores al realizar operaciones básicas en el conjunto de números reales tanto en sumas como multiplicaciones.

- d. Errores en la aplicación de algoritmos relacionados con la resolución de ecuaciones lineales.

Para la segunda categoría se detectaron **dos** tipos de fallos:

- a. Dado el criterio de asociación de una función lineal de la forma $f(x) = \frac{m \cdot x + n}{a}$ asocia el valor numérico de la pendiente a m y no a m/a
- b. Dado criterio de asociación de una función lineal de la forma $f(x) = \frac{m \cdot x + n}{a}$ asocia la intersección con el eje de las ordenadas b y no b/a .

Para la tercera categoría se detectaron **diez** tipos de fallos:

- a. Conceptuales, no distingue entre los términos abscisas y ordenadas abscisas y ordenadas.
- b. Aplica incorrectamente la fórmula de la pendiente al hacer:

$$m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad \text{o} \quad m = \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}$$

- c. Ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano al trazar la representación gráfica de la función.
- d. Dada una gráfica, determina de forma incorrecta pares ordenados presentes en la misma.
- e. Al dar expresiones de la forma $f(a)=b$ no distingue cuál par ordenado pertenece al gráfico funcional de f si (a,b) o (b,a) .
- f. No relaciona el signo de m (positivo, negativo, cero) con la monotonía de la función.
- g. No relaciona el signo de b (positivo, negativo, cero) con la intersección con el eje y de la representación gráfica.
- h. Error al homogenizar fracciones en la resolución de ecuaciones lineales.
- i. Dado un problema definido en forma verbal, determina una expresión algebraica que modele el mismo, pero extrae conclusiones erróneas con base en él.
- j. Dada la representación algebraica de una función lineal traza una parábola como su representación gráfica. Error al expresar en forma gráfica una situación problema dada al no tomar en cuenta si el dominio de la misma es discreto o continuo.

Por otro lado, Arce y Ortega (2013) han centrado sus investigaciones en los errores cometidos por los estudiantes en la representación gráfica de funciones. Para ello, analizaron los trazados gráficos de funciones existentes en los cuadernos de matemáticas de alumnos de varias clases de 1º de Bachillerato. Estos errores se producían en un número considerable de alumnos estando relacionados con varios conceptos: *función y asíntota*, con las características de determinadas funciones y con la utilización de las escalas en los ejes del diagrama cartesiano.

En el estudio participaron 29 estudiantes de 1º de bachillerato de dos centros distintos: un instituto público de un barrio de Valladolid (dos aulas) y un colegio privado-concertado (un aula). Estas tres aulas disponían de un profesor de matemáticas distinto y un número reducido de estudiantes (10 por cada aula, aproximadamente), participando todos en este estudio.

Los documentos empleados para hacer este estudio fueron las fotocopias de los cuadernos de los alumnos que contenían ejercicios del bloque de funciones. Las deficiencias frecuentes encontradas en esta investigación fueron:

- a. **Deficiencias asociadas al concepto de función:** Una de estas deficiencias es el trazado de ramas que son casi o talmente verticales en funciones con ramas infinitas no asintóticas, como es el caso de las funciones exponenciales o las funciones polinómicas de 2º o 3º grado, detectándose en 18 de los 29 alumnos (un 62%).
- b. **Deficiencias asociadas al concepto de asíntota:** La mayoría de estas deficiencias se encontraron en representaciones gráficas de funciones con ramas asintóticas en las cuales no existe un acercamiento gradual a la asíntota horizontal o vertical. Se detectó existencia de equidistancia entre la rama asintótica y la asíntota (vertical a partir de un determinado valor en 24 alumnos (un 83%). En 18 alumnos, 62%) se detectó equidistancia entre una rama asintótica y una asíntota horizontal (menos frecuente). Por último, en 10 alumnos (un 34%) hay alguna representación gráfica donde incluso existe un alejamiento entre rama asintótica y asíntota en la parte final de su trazado.
- c. **Deficiencias relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos** (existen varias deficiencias):
 - 1ª. Uso de escalas no proporcionales (distinta unidad a lo largo del eje) en alguno de los ejes de los gráficos existentes. Detectados 12 alumnos (un 41%).
 - 2ª. En las representaciones gráficas asociadas con problemas de interpolación lineal detectándose en una clase en siete de sus ocho alumnos (un 87,5%).
- d. **Deficiencias relacionadas con las características de las funciones:**

En una clase de 8 alumnos, siete (28%), representaron la gráfica de funciones cuadráticas donde la ésta presenta una forma pronunciada de “pico” en el entorno del vértice de la parábola.

Las recomendaciones que estos autores ofrecieron para poder evitar este tipo de deficiencias, una vez abierta una discusión acerca de las dificultades didácticas cognitivas y las limitaciones técnicas que podrían originar su aparición, fueron las siguientes:

1. Sería recomendable el uso de símbolos gráficos que caractericen y ayuden a discriminar las propiedades, como el uso de la flecha en las ramas asintóticas.
2. Proponer tareas por parejas donde se intercambien representaciones gráficas elegidas por el profesor y los estudiantes tengan que indicar cuáles son sus

propiedades (solo con la información de su representación gráfica) y compararlas con las propiedades reales de la función.

3. Proponer a los alumnos tareas donde visualicen las diferencias que provoca la elección de escalas en la representación gráfica de una función y tareas donde, tras presentar una función verbalmente o a través de su expresión analítica, se discuta cuál es la escala más adecuada para su representación gráfica “óptima”, favoreciendo la concepción global del concepto de función.

Ortega y Pecharromán (2010) centraron su investigación en la enseñanza de las **propiedades globales de las funciones (PGF)**, dando respuesta a un problema de aprendizaje detectado en el aula, desarrollando un modelo de enseñanza fundamentado en la caracterización del proceso de aprendizaje que ofrece el marco teórico del *Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)*. El objetivo es facilitar el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones, por medio de la coordinación de los sistemas de representación. Según estos autores, este estudio permite conocer el tratamiento didáctico de las PGF, es decir:

1. Qué representación es utilizada para la introducción del concepto.
2. Qué propuestas orientativas se proponen para que el alumno/a llegue a reconocer el concepto en los distintos sistemas de representación.
3. Cómo se plantean las interpretaciones entre las diferentes representaciones.

Con la finalidad de analizar la consideración didáctica de las PGF y de los contenidos sobre los que se fundamenta su aprendizaje en segundo ciclo de ESO, se realizó un análisis curricular de la unidad didáctica “Funciones y Gráficas”. Dicho análisis muestra que las *propiedades globales de las funciones* se tratan en los cuatro sistemas de representación: *numérico, verbal, algebraico y gráfico*, estando asociados a funciones concretas, salvo en el caso de su definición formal-algebraica, en la que el concepto de función es genérico y representado mediante el simbolismo funcional de las ordenadas.

El problema planteado por estos autores es que, no siempre se relacionan los símbolos de las diferentes representaciones con objeto de facilitar el tránsito de una representación a otra, es decir, es muy poca la orientación sobre la formación de los intervalos numéricos que ubican la propiedad (monotonía, signo, etc.) en el sistema de referencia cartesiano, y no siempre se usa simbolismo funcional sobre las gráficas de las funciones o relacionado con expresiones verbales, que oriente a adoptar la definición formal-algebraica de los conceptos, colaborando al conocimiento del significado de los símbolos que aparecen en esta expresión.

El *marco ELOS* plantea la enseñanza de cada concepto partiendo del conocimiento de los alumno/as, y se estructura en tres estadios de desarrollo cognitivo: *semiótico, estructural y autónomo*, donde a cada uno ellos se le asocia un nivel de aprendizaje. La

determinación de dichos aprendizajes está motivada, por una parte, por las representaciones de los conceptos (el grado de abstracción de los símbolos asociados a cada una de ellas y la dificultad para pasar de una representación a otra) y, por otra parte, por el conocimiento de los alumnos antes de dicho aprendizaje.

A continuación mostramos algunos aspectos que describen de forma global el *modelo de enseñanza de los conceptos*, serían, entre otros:

1. Basar el aprendizaje de los *símbolos nuevos* en el significado de los *símbolos antiguos*, es decir, en los que constituyen el conocimiento de los alumnos.
2. Está estructurado por los estadios de desarrollo según el marco teórico ELOS, actuando sobre las diversas representaciones: Gráfica (G), numérica (N), verbal (V) y algebraica (A), partiendo de las representaciones más cercanas al sistema antiguo, hasta alcanzar aquellas en las que es mayor la abstracción de sus símbolos.
3. En definitiva, la adquisición de los conceptos es relativamente uniforme en los dos primeros estadios, donde el aprendizaje de éstos se produce en las representaciones gráfica y numérica. Pero no ocurre así, en el estadio autónomo, donde debido a las limitaciones impuestas por el nivel educativo en el que se desarrolla enseñanza, no todos los conceptos son reconocidos en todos los sistemas de representación, por lo que el proceso de abstracción producido en el aprendizaje de cada concepto es diferente.

Finalmente, destacaré la investigación de Hernández (2013), centrada en el uso de GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. Según este autor, entre las principales dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática se encuentran las siguientes:

1. No se penetra en sus fundamentos.
2. La atención a la creatividad de los escolares es escasa.
3. Uso inadecuado de software.

Este autor nos aporta una serie de consideraciones para el uso del programa GeoGebra que, utilizado convenientemente, permite profundizar en fundamentos de la matemática escolar, ya que permite integrar, comprender y utilizar de forma fácil y rápida, contenidos de distintas áreas para justificar métodos y resultados. Así, señala que, en la práctica, en general prevalece la prioridad para la enseñanza y el aprendizaje de algoritmos que serán objeto de exámenes y *no se utilizan de manera pertinente las nuevas tecnologías y software* para profundizar en los fundamentos de la matemática escolar.

Para el tema que nos ocupa de “Parábolas y funciones cuadráticas” el apoyo de GeoGebra según el autor, contribuye a solucionar las dificultades antes indicadas,

ilustran la posibilidad de integrar contenidos que generalmente se tratan de manera fragmentada y la posibilidad de diferenciar la enseñanza partiendo de éstos.

Según las dificultades observadas, se hace evidente la necesidad de mejorar la atención al dominio que poseen los alumnos sobre los fundamentos de las matemáticas escolares y a la incidencia que, en este sentido, tienen las relaciones entre distintos contenidos matemáticos los cuales se trabajan en la actualidad de forma fragmentada. Este software permite generar y corroborar ideas, estudiar con gran facilidad y rapidez el comportamiento de las funciones al variar determinados parámetros

Nos propone una serie de ejemplos de órdenes y problemas sobre funciones cuadráticas y parábolas con apoyo del programa GeoGebra, además de algunas consideraciones y comentarios para la solución o tratamiento didáctico, pensando en posibles ideas o vías que pudieran redescubrir y plantear los alumnos a partir de sus conocimientos previos y el trabajo en equipo, es decir, inicialmente se centra la atención en las iniciativas, con el propósito de desarrollar su creatividad de forma diferenciada. Aunque la racionalidad de la vía y el aprovechamiento óptimo del programa GeoGebra resulta importante, debe resaltarse en el momento oportuno, de manera que las capacidades de los alumnos se estimulen.

Un ejemplo de aplicación mediante GeoGebra es poder determinar el eje de simetría y las coordenadas del vértice de una función cuadrática utilizando un Protocolo de Construcción. Este autor señala que es importante la función de los *deslizadores*, permitiéndonos realizar de forma breve numerosas y valiosas observaciones acerca del comportamiento de la función. Con otras herramientas, se podrán efectuar comprobaciones de construcción o constatación de ideas surgidas durante la visualización de los movimientos efectuados, por ejemplo se podrá comprobar y visualizar de forma dinámica si se conserva la longitud de segmentos, la concavidad y el crecimiento de la función, etc.

5.3. Aprendizaje mediante el uso de las TIC

Tras el análisis de las dificultades y errores cometidos con aplicaciones metodológicas, infundiendo en el alumno más bien, incertidumbre, desmotivación e incluso miedo en su aprendizaje matemático a causa de no saber cómo abordarlas, muchos investigadores llegaron a la conclusión de que la metodología utilizada, constituía un fracaso, al menos en esta asignatura, por tanto, se hacía necesario un cambio mediante la implantación de nuevos métodos didácticos diseñados para darle un vuelco evolutivo a la percepción matemática tradicional que los alumnos conservan hacia otra, más innovadora y con actividades más atractivas. Es el caso de la utilización de las TIC como herramienta o motor de aprendizaje.

Para el caso de nuestra unidad didáctica, centrada en las funciones lineales, esta potente herramienta permite la utilización de webquests, videos didácticos, videojuegos orientados a la didáctica de las matemáticas, programas de análisis matemático como Geogebra, etc. para optimizar el proceso de enseñanza – aprendizaje. En ella, Castell y otros indican que las TIC comprenden una serie de aplicaciones de descubrimiento científico cuyo núcleo central consiste en una capacidad cada vez mayor de tratamiento de información. En segundo lugar, señalan que, dependiendo del tipo de TIC utilizado, ésta se podrá seleccionar como medio de instrucción o como el ambiente idóneo para el desarrollo de un determinado contexto educativo.

Citando a Bricall (2000) y a Márques (2002), nos presentan una serie de ventajas de las TIC hacia los alumnos:

1. Potencia el interés, motivación, interacción mediante trabajo grupal fomentando el debate y discusión apoyados en las nuevas herramientas de comunicación, como son el uso de la red, videoconferencias, correo electrónico, chat, aprendizaje a partir de errores y mayor y mejor comunicación entre profesores y alumnos.
2. Ofrece un alto grado de interdisciplinariedad, alfabetización audiovisual y digital aprendizaje cooperativo, desarrolla habilidades para localización y selección de información, mejora de las competencias de creatividad y de expresión, facilita el acceso a gran cantidad de información, etc.
3. Fomentan el desarrollo de habilidades prácticas en los alumnos como, por ejemplo, en laboratorios virtuales de investigación, acceso a recursos didácticos y canales de información entre el alumnado.

En cuanto a las *ventajas para el profesor*, entre otras cabe señalar:

1. Es una mayor fuente de recursos didácticos que permite, mayor interacción entre alumnos, mayor autonomía, facilitan la formación de grupos y evitan al docente tareas mecánicas y repetitivas.
2. Facilitan el control y la evaluación, potencian la actualización profesional y proporcionan mayor posibilidad de contacto con el resto de profesores, otros centros educativos, etc.
3. Se contemplan los diferentes métodos de aprendizaje y se atiende a la diversidad, desarrollando estímulos para todos los sentidos: imágenes, música y sonido, abordándose dichas preferencias en el instante de procesar la información.

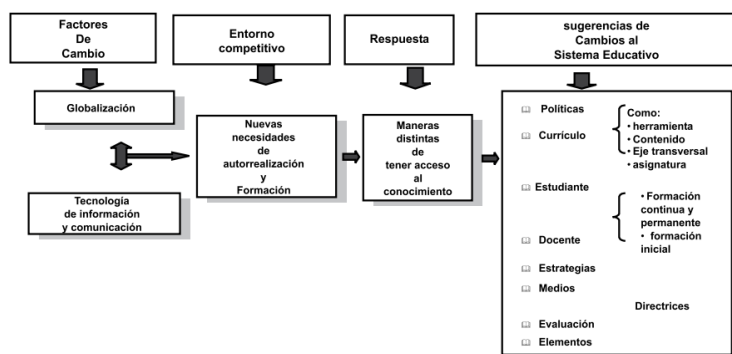


Figura 24. Cambios experimentados en la educación debidos a las TIC. *Reboloso, 2000.*
Adaptado por Castro, Guzmán y Casado, 2007.

Según Palomar (2009), en la Tabla 9 señalamos las *ventajas e inconvenientes* del uso de las TIC para el aprendizaje:

ITEM	VENTAJAS	INCONVENIENTES
1	MOTIVACIÓN, ATRACTIVAS	DISTRACCIÓN DE LOS ALUMNOS
2	INTERACCIÓN. CONTÍNUA ACTIVIDAD INTELCTUAL	DISPERSIÓN A OTRAS WEBS
3	DESARROLLO DE LA INICATIVA	PÉRDICA DE TIEMPO
4	APRENDIZAJE PARTIENDO DE ERRORES	INFORMACIONES NO FIABLES
5	MAYOR COMUNICACIÓN ENTRE ALUMNOS Y PROFESORES	APRENDIZAJES SUPERFICIALES E INCOMPLETOS
6	APRENDIZAJE COOPERATIVO Y MAYOR GRADO DE INTERDISCIPLINARIEDAD	RIGIDEZ EN LOS DIÁLOGOS COMPLICANDO SU INTERPRETACIÓN
7	ALFABETIZACIÓN AUDIOVISUAL Y DIGITAL	VISIÓN SESGADA DE LA REALIDAD
8	DESARROLLO DE COMPETENCIAS CREATIVAS Y DE EXPRESIÓN	ANSIEDAD
9	FACILITA EL ACCESO A GRAN CANTIDAD DE INFORMACIÓN	DEPENDENCIA DEL TRABAJO DEL RESTO DE COMPAÑEROS DEL GRUPO

Tabla 9: Ventajas e inconvenientes del uso de las TIC en el aprendizaje. *Palomar Sánchez, 2009*

Aprendizaje mediante el uso de la Webquest

Las autoras Pinya y Roselló (2013) señalan, en sus análisis centrados en las Webquests, que éstas han experimentado un importante impulso en los últimos años, sobre todo, en las etapas de educación primaria y secundaria. Citando a Abbit y Ophu (2008), clasifican las investigaciones sobre Webquest en tres categorías:

1. Estudios sobre el impacto metodológico de las Webquests en el proceso de enseñanza-aprendizaje, comparando los resultados con los de las metodologías tradicionales.
2. Investigaciones acerca de la repercusión de las Webquests en los alumnos, analizando sus percepciones y actitudes.

3. Análisis dirigidos a determinar cómo las Webquests fomentas destrezas de investigación y descubrimiento y habilidades de pensamiento más evolucionado.

Citando a Bernabé y Adell (2006), consideran que es una metodología sumamente adecuada para la adaptación de la docencia al Espacio Europeo de Educación Superior donde las Webquests se convierten en una potente herramienta de aprendizaje. En este contexto también se alinean las investigaciones desarrolladas por los autores, también citados como Bernabé (2007), Lara (2007), Roderá (2008), Degrossi (2009) y Palacios (2009), entre otros.

Sosa (2013) cita a Dodge (1995) y a March (1998) como los autores que desarrollaron las primeras Webquest. La definen como *“una actividad de indagación/investigación enfocada a que los estudiantes obtengan toda o la mayor parte de la información que van a utilizar de los recursos de Internet. Las WebQuests han sido ideadas para que los estudiantes hagan buen uso del tiempo, se enfoquen en utilizar información más que en buscarla, y en apoyar el desarrollo de su pensamiento en los niveles de análisis, síntesis y evaluación”*.

Una WebQuest se construye presentado por parte del docente, una tarea atrayente para los alumnos con el objetivo de guiarles en la búsqueda de información mediante el uso de los recursos de Internet, desarrollando habilidades de pensamiento de nivel superior, crítico y creativos, en el descubrimiento y dominio de la información para la resolución de un problema matemático. Los contenidos de esta actividad deberán tener consistencia y no circunscribirse solamente a algo más que a la constatación a meras preguntas o a la reproducción de lo que hay en la pantalla del ordenador. Se intentará, se deberá asociar con alguna actividad que hagan los estudiantes en su vida cotidiana, es decir, pero en un entorno distinto al de la escuela.

Partes principales de una Webquest

Una WebQuest está constituida por seis partes (Figura 25):

1. *Introducción*. Es la parte dedicada a presentar brevemente la información sobre el tema que se va a trabajar, con el objetivo de despertar el interés y motivar al alumno y procurando que sea un tema centrado en una situación de su entorno, divertido e interesante.
2. *Tarea*: Es la parte principal de la Webquest siendo la que describe y proporciona con claridad todos los datos acerca de lo que deben realizar los grupos de trabajo al finalizar la WebQuest. Es un espacio donde desarrollar sus capacidades cognitivas de investigación, análisis, evaluación y formulación de conclusiones.
3. *Proceso*: Esta parte proporciona las fases que ha de seguir el grupo para la resolución final de la tarea. Se definen cada una de las partes de la actividad que ha de desempeñar cada integrante del grupo, debiendo ser presentadas brevemente de forma estructurada y clara, adaptándose a las capacidades

cognitivas del alumno y bien coordinadas con el resto de subtaresas del gripo (aprendizaje cooperativo). En esta parte de WebQuest se proponen los recursos o caminos de búsqueda de información adicional, enlaces a otras webs...

Introducción	Establece el marco y aporta alguna información antecedente
Tarea	El resultado final de la actividad que los alumnos van a llevar a cabo
Proceso	Descripción de los pasos a seguir para llevar a cabo las tarea. Incluye los recursos y el andamiaje (<i>scaffolding</i>)
Recursos	Selección de enlaces a los sitios de interés para encontrar la información relevante. Este elemento forma parte del apartado del proceso.
Evaluación	Explicación de cómo será evaluada la realización de la tarea
Conclusión	Recuerda lo que se ha aprendido y anima a continuar con el aprendizaje

(Traducción e interpretación libre de Isabel Pérez, basado en Dodge, 1995a)

Figura 25. Esquema abreviado de las partes de un Webquest. <http://www.isabelperez.com>

4. **Recursos:** Espacio de la WebQuest donde docente indica las direcciones de Internet donde deben dirigirse los estudiantes para recabar información, con el fin de concretar los canales de búsqueda, adaptando los contenidos a su edad, y siendo actuales seguros y contrastados.
5. **Evaluación:** Es el espacio donde el profesor establece los criterios de evaluación de la tarea pudiendo los grupos hacer consultas y orientarse y verificar si sus investigaciones se acercan o se alejan de requerimientos evaluables exigidos. Se puede evaluar la WebQuest por medio de una rúbrica.
6. **Conclusión:** En esta última parte se exponen los resultados de la investigación mediante un resumen de lo más significativo y enriquecedor para el aprendizaje de esta tarea y se invita a continuar resolviendo la misma de otras formas diferentes.

Ventajas e inconvenientes del uso de la Webquest

Señalamos, según Sosa (2013) las *ventajas e inconvenientes que para el alumno y profesor* presenta el uso de las webquest como recurso educativo para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Pueden ser, entre otras (Tablas 10,11 y 12):

ITEM	VENTAJAS PARA EL PROFESOR
1	Es un gran espacio de conocimientos y creación por la multitud de recursos informáticos que posee
2	Es una herramienta que se puede adaptar a cualquier contenido educativo
3	Se adapta fácilmente a problemas con varias soluciones donde se relacionan varios temas
4	Sus objetivos didácticos pueden canalizarse por medio de las TIC para diseñar estrategias de aprendizaje significativo atrayente

5	Sorprenden a los estudiantes por la visión y organización del trabajo de forma innovadora mejorando sobre ellos sus habilidades comunicativas y ampliando su conocimiento sobre los recursos que hay disponibles para la docencia
6	En el espacio público ABRE-WQ se pueden compartir trabajos entre los docentes como extensión de sus objetivos educativos de forma rápida y eficaz
7	Contribuye a la educación en valores como la responsabilidad en el trabajo, implicación, cooperación, etc.

Tabla 10. Ventajas del uso de las TIC para el profesor. *Sosa (2013)*

ITEM	VENTAJAS PARA EL ALUMNO
1	El estudiante es el principal protagonista del proceso de aprendizaje
2	Adaptan fácilmente al nivel de complejidad de las trabajos a las capacidades del estudiante
3	Es un recurso que despierta gran interés y motivación por sus estrategias a la hora de descubrir el resultado final a la vez que se disfruta pensando.
4	Fomenta el pensamiento crítico, la capacidad resolutoria de problemas, de síntesis, y análisis de la información para construir las soluciones finales
5	Refuerzan la autoestima de los alumnos con el desempeño de una función específica de al tarea para cada uno, fomentando el colaboración y cooperación entre ellos y el desarrollo de capacidades sociales y cívicas
6	Proporcionan tareas bien estructuradas y asequibles para los alumnos, por lo que facilita el desarrollo de las mismas y sus criterios de evaluación, contribuyendo por su eficacia a una mejor transmisión del conocimiento.
7	Contribuyen a una mejor alfabetización en la búsqueda y manejo de información
8	Fomentan un permanente clima de trabajo gracias a la concentración grupal

Tabla 11. Ventajas del uso de las TIC para el alumno. *Sosa (2013)*

ITEM	INCONVENIENTES
1	Internet tiene sus limitaciones y a veces la información encontrada no dispone de la calidad suficiente para fundamentar un aprendizaje.
2	Internet no lo tiene todo y los docentes deberán aconsejar al estudiante cuando es conveniente usarlo como recursos TIC y cuándo se deben usar otros.
3	Las websquest necesitan tiempo para comprobar los logros en el aprendizaje de los alumnos para los cuales ha sido diseñada y aplicada.
4	ausencia de internet en las aulas o dificultades su conexión en muchos centros
5	Falta de formación del docente en TIC, en algunos casos
6	Falta de tiempo para diseñar y elaborar una webquest

Tabla 12. Inconvenientes del uso de las TIC. *Sosa (2013)*.

6. UNIDAD DIDÁCTICA

Para la elaboración de la presente Unidad Didáctica nos hemos apoyado en el marco legislativo vigente a nivel estatal y autonómico, que exponemos a continuación:

- **Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre**, para la mejora de la Calidad Educativa.
- **RD 1105/2014, de 26 de diciembre**, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- **Orden ECD/65/2015 de 21 de enero**, por las que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la Educación Secundaria obligatoria y el bachillerato.
- **Decreto 111/2016 de 14 de junio**, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.
- **Orden de 14 de julio de 2016**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Anexos: materias troncales, específicas y de libre configuración autonómica.

6.1 Título

La unidad didáctica objeto de estudio en este TFM, cuya programación desarrollamos a largo de este capítulo, lleva por título: **Funciones Lineales y Cuadráticas**.

6.2 Justificación

6.2.1 Punto de vista curricular

El RD 1105/2014, de 26 de diciembre tiene por objeto establecer el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En su Artículo 2, quedan establecidas las siete competencias clave de este currículo.

La **competencia matemática** implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. Requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos (operaciones, números, medidas, cantidad, espacios, formas, datos, etc.).

El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos, así como para emitir juicios fundados y seguir cadenas argumentales en la realización de cálculos, el **análisis de gráficos y representaciones matemáticas** y la manipulación de expresiones algebraicas, incorporando los medios digitales cuando sea oportuno. Forma parte de esta destreza

la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan. La competencia matemática incluye una serie de actitudes y valores que se basan en el rigor, el respeto a los datos y la veracidad.

La competencia matemática se desarrolla especialmente gracias a la contribución de la asignatura de *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*. Esta competencia proporciona a los alumnos, habilidades, estrategias, aptitudes e instrumentos para la aplicación y el desarrollo del razonamiento lógico-matemático con el objetivo de dar respuesta eficaz a problemas en contextos de la vida real, incluso aporta en elevado nivel de exactitud en los resultados que así lo requieren investigaciones en otras disciplinas. Concretamente, agrupa los siguientes aspectos: razonar, modelar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar sus símbolos, comunicarse con las matemáticas y sobre ellas y apoyarse en ayudas o herramientas tecnológicas. Las matemáticas deben saber comprenderse e interpretarse, además de intuir qué problemas les puedan dar respuesta. En el caso de las funciones (en particular las lineales y las cuadráticas) son modelos que nos permiten describir y actuar en situaciones en las que dos magnitudes varían, surgiendo como potentes herramientas para la resolución de múltiples situaciones que aparecen en la vida real así como en otras disciplinas.

6.2.2 Punto de vista social-profesional

Exponemos, a continuación, a nuestro juicio, las razones por las cuales son importantes en nuestra vida cotidiana, los contenidos abordados en este TFM, es decir, el estudio de **funciones**. Con ellas se determinan las relaciones que existen entre distintas magnitudes tanto en Matemáticas, Física, Química, Medicina, Estadística, Economía, Ingeniería, Psicología, etc...., permitiendo, entre otras muchos aspectos, poder calcular los valores de cada una de ellas en función de otras de las que depende.

En nuestra “agenda de trabajo diaria”, nos encontramos muchas veces sin darnos cuenta con la noción de correspondencia, toda regla de ésta se denomina relación y ciertos tipos especiales de reglas de correspondencia son llamadas **funciones**. Una **función** es una regla de correspondencia entre dos conjuntos, de tal forma que, a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto, el primer conjunto es llamado *dominio de la función* o conjunto de partida, el segundo conjunto es llamado *condominio de la función* o *conjunto de llegada*.

En muchas ocasiones, utilizamos las funciones matemáticas en nuestra vida sin pensar que las estamos usando y a veces muchas personas se hacen la siguiente pregunta:

¿Para qué nos sirven las funciones? Si observamos nuestro entorno, percibimos que las matemáticas y con ella las funciones se encuentran por todas partes, por ejemplo, en la catenaria de un puente colgante, como es el caso del Golden Gate, el chorro de una fuente, la trayectoria que describe una pelota de baloncesto, o la trayectoria que describe un proyectil al ser lanzado, etc. Si miramos un poco más detallado nuestro alrededor, nos daremos cuenta de que prácticamente todos los días, nos encontramos con relaciones de correspondencia, por ejemplo a cada persona le corresponde una fecha de nacimiento, a cada libro le corresponde un número de páginas, a cada objeto le corresponde un peso, etc.,

6.2.3 Punto de vista interno

Las funciones son fundamentales, como ya hemos justificado, para poder dar respuesta a problemas, tanto a nivel profesional como a situaciones de la vida real. Pero, para los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, resulta de gran interés su conocimiento y dominio puesto que constituirán la base matemática para llegar a abordar otros niveles superiores de conocimiento de la asignatura, como es el cálculo diferencial y integral. En concreto, ahondar en contenidos relativos a la teoría de funciones o en otros campos del saber matemático que requieran la aplicación y desarrollo de conceptos de mayor calado científico.

Si elevamos el nivel de complejidad, estaremos capacitados para resolver problemas, por ejemplo, de composición de funciones, problemas con funciones expresadas de forma paramétrica, funciones inversas, etc., hasta poder expresar procesos en la naturaleza mediante funciones más complejas como la transformada de Laplace, que constituye una herramienta matemática de gran utilidad. Por citar otra de las funciones importantes, podemos destacar las aplicaciones en fenómenos físicos, relacionados con la acústica, tratamiento digital de imágenes, etc., de la transformada de Fourier o el empleo de las fórmulas de Euler en trigonometría, para definir las funciones trigonométricas. Con todo esto, concluimos en que el estudio de las funciones se hace imprescindible para abordar cualquier problema, proceso o fenómeno físico de nuestro entorno.

6.3 Contextualización del centro y del aula

El I.E.S AZ-ZAIT se encuentra ubicado en la zona oeste de la ciudad de Jaén, en la Avenida de Arjona y en el confluyen cuatro barrios de diferentes características, de donde procede mayoritariamente nuestro alumnado:

Barrio de Peñamefécit, Barrio de Santa Isabel, Avenida de Andalucía y de Barcelona y Barrio de Las Fuentezuelas.

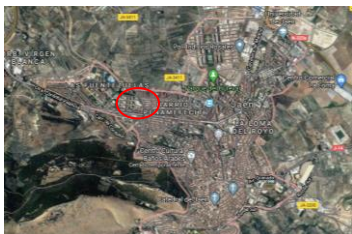


Figura 26: Plano de situación IES Az-Zait
Fuente: Google Maps



Figura 27: Plano de localización IES Az-Zait.
Fuente: Google Maps

Debido a su localización geográfica está dotado de una buena comunicación ya que cuenta con varios accesos todos ellos de buena amplitud en particular, el principal es la vía por la que se accede al centro de la ciudad, facilitando el estacionamiento de los autobuses y vehículos particulares a las horas punta de entrada y salida del mismo sin provocar colapsos de tráfico (Figuras 26 y 27).

6.3.1 Aspectos socioeconómicos del entorno escolar

En general, el entorno de influencia del centro está constituido por el contraste entre una población relativamente joven, dinámica y laboralmente activa, de clase media y con un nivel cultural medio y otro sector más envejecido o población inmigrante con bajo nivel cultural y en el que predomina el paro o una actividad laboral de cualificación profesional baja.

Hoy en día el IES Az-Zait cuenta con 200 alumnos y alumnas distribuidos de la siguiente manera: 57 en dos grupos de 1º ESO, 58 en dos grupos de 2º ESO, 58 en dos grupos de 3º y 22 en un grupo de 4º. Completan este número el grupo de Educación Especial Específica en el que hay 5 matriculados. En lo que respecta al profesorado, el número total de profesionales de la docencia que componen el Claustro en el curso 2019/20 es de 24 (18 profesoras y 6 profesores), a los que hay que añadir a la profesora de Religión Católica, al de Religión Evangélica y a la Maestra de Audición y Lenguaje que comparten horario con otros centros. La comunidad educativa también está integrada por el Personal de Administración y Servicios (PAS) formado por dos ordenanzas, una administrativa, y por el personal que atiende el Aula de Educación Especial constituido en la actualidad por una educadora y una monitora.

La realidad socio-económica del centro, nos muestra que el número de miembros que conviven en el hogar suele ser de 4 y el 30% de las familias son de padres separados/divorciados mono-parentales. En cuanto al trabajo, predomina el sector de servicios (que ocupa el 52 %) al que hay que añadirle el 10% de ocupaciones de baja cualificación (limpiadoras, atención domiciliaria, camareros, etc.), lo que representa el 2/3 de las familias. El 1/3 de familias están desempleados. En relación al nivel de estudios de las familias de este alumnado, un 57% no completaron sus estudios o sólo

tienen estudios básicos. Por otro lado, predominan las rentas medias-bajas, siendo significativo el impacto de la crisis en la zona de influencia de nuestro centro, dado que una tercera parte de las familias declara ingresos inferiores a 6000 Euros y otro tercio entre 6000 y 12000 Euros. Es decir, de ser ciertos estos datos y teniendo en cuenta que la mayoría de las familias está formada por 4 miembros, podemos concluir que 2/3 de nuestro alumnado se encuentra en riesgo de exclusión social. Otro dato que se infiere del estudio, es que aproximadamente el 80% de las familias ingresan un salario inferior al salario medio en España.

En una primera aproximación al estado real de la convivencia en el IES Az-Zait, se puede decir que la percepción que existe entre la Comunidad Educativa es que no se trata de un centro especialmente conflictivo, donde el grado de respeto entre los distintos sectores que la conforman (alumnado, profesorado, personal de administración y servicios, padres y madres) se puede considerar como aceptable.

Los planes y programas que se llevan a cabo en el centro son: Plan de Igualdad entre hombres y mujeres en la educación, Aula DCine, Aula D Jaque, Red Escuela Espacio de Paz, Innicia, ComunicA, Escuelas Deportivas, Aldea, Rockin Azzaiteros, Practicum de alumnado del máster de secundaria, Programa de Acompañamiento Escolar, Red de Bibliotecas Escolares, Bilingüismo, Erasmus (modalidades: k1 y k2).

6.4 Objetivos

6.4.1 Objetivos generales de etapa

Los objetivos generales de etapa son las capacidades que se espera que los alumnos/as hayan desarrollado al final del periodo. Se establecen conforme a lo dispuesto en el **artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre**, la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y en las alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas

por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

En definitiva, entre todos los **objetivos de etapa**, consideramos el **a), e), f) y g)** los que contribuirán a desarrollar, de manera más directa, la unidad de didáctica de *Funciones Lineales y Cuadráticas*.

Por otro lado, el **Decreto 111/2016** establece que la educación Secundaria obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

- a) Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
- b) Conocer y apreciar los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad, para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

6.4.2 Objetivos del área de matemáticas

La **Orden de 14 de julio de 2016**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía establece que los objetivos de las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* en la Educación Secundaria Obligatoria serán:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

En definitiva, entre todos los **objetivos del área de matemáticas**, consideramos que, aquellos que contribuirán a desarrollar de manera más directa la unidad de didáctica de *Funciones Lineales y Cuadráticas*, serán el 1), 2), 4), 6) y 7).

6.4.3 Objetivos generales de etapa vs objetivos del área de matemáticas

A continuación, exponemos en la Tabla 13, la relación que existe entre los objetivos generales de etapa conforme a lo dispuesto en el **artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre** y los objetivos que establece la **Orden de 14 de julio de 2016**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía en las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*.

Objetivos Generales de Etapa vs Objetivos Área de Matemáticas	Orden de 14 de julio de 2016										
	Objetivos Área de Matemáticas										
Real Decreto 1105/2014 Objetivos Generales de Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a											

[illegible]

Tabla 13. Relación entre objetivos de etapa con los objetivos del área de matemáticas.
Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre y Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración propia.

6.4.4 Objetivos de la unidad didáctica

Los objetivos que persigue esta unidad didáctica, para que sean alcanzados por el alumnado en su proceso de enseñanza-aprendizaje, son los siguientes:

1. Conocer las **funciones lineales y afines**: definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones.
2. Conocer las **funciones cuadráticas**: definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones.
3. **Hacer uso de las TIC** para el estudio y análisis de las propiedades de funciones y su representación gráfica.
4. Vincular las funciones lineales y afines con las rectas en el plano y con diferentes expresiones de las mismas: ecuación punto pendiente y ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.
5. Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones lineales, afines y cuadráticas, así como para su comprensión.
6. Conocer los modelos lineales y cuadráticos para estudiar situaciones provenientes de diversos campos de conocimiento y de la vida cotidiana, por medio de la obtención de la expresión analítica, elaboración de la tabla de valores y su representación gráfica.

7. Utilización de la modelización matemática como herramienta para desarrollar el pensamiento crítico mediante la construcción de modelos lineales y cuadráticos en situaciones reales.
8. Indagar acerca de las soluciones elegidas para resolver problemas, y comprobar si existen otros caminos que alcancen el mismo resultado haciendo uso de otras metodologías.

6.5 Competencias clave

La Programación Didáctica a la que pertenece esta unidad didáctica se ha redactado de acuerdo al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

En línea con la Recomendación 2006/962/EC, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, este real decreto se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares para propiciar una renovación en la práctica docente y en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La competencia supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz. Se contemplan, pues, como conocimiento en la práctica, un conocimiento adquirido a través de la participación activa en prácticas sociales que, como tales, se pueden desarrollar tanto en el contexto educativo formal, a través del currículo, como en los contextos educativos no formales e informales.

Según lo dispuesto en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, Se identifican siete competencias clave esenciales para el bienestar de las sociedades europeas, el crecimiento económico y la innovación, y se describen los conocimientos, las capacidades y las actitudes esenciales vinculadas a cada una de ellas.

- a) Competencia de comunicación lingüística (CCL).
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Competencia para aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

El tratamiento de la unidad didáctica de **funciones lineales y cuadráticas** aportará al alumno el desarrollo de distintas competencias con el objetivo de adquirir un aprendizaje permanente, así como para un desarrollo nivel individual y con sus iguales.

a. Competencia de comunicación lingüística (CCL)

- Comprender el sentido de los textos escritos y orales interpretando las gráficas que se presentan en la unidad y extrae la información pertinente de las mismas.
- Manejar elementos de comunicación no verbal, o en diferentes registros, en las diversas situaciones comunicativas realizando representaciones gráficas para hacerse entender cuando se comunica en el aula con el profesor o sus compañeros.
- Utilizar los conocimientos sobre la lengua para buscar información y leer textos en cualquier situación, utilizando sus conocimientos previos de la lengua para leer textos, expresiones o gráficas en los que intervienen funciones lineales y/o cuadráticas.

b. Competencia matemática y compet. básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

- Comprender e interpretar la información presentada en formato gráfico asociando a diferentes representaciones de funciones (lineal o cuadrática) su representación y viceversa.
- Expresarse con propiedad en el lenguaje matemático, utilizando la notación adecuada cuando realiza las actividades, siendo los procedimientos son claros y eficaces.
- Manejar los conocimientos sobre ciencia y tecnología para solucionar problemas, comprender lo que ocurre a nuestro alrededor y responder preguntas utilizando sus conocimiento previos sobre matemáticas para comprender algunos aspectos de las funciones (paso por el origen de coordenadas, proporcionalidad...).

c. Competencia digital (CD).

- Actualizar el uso de las nuevas tecnologías para mejorar el trabajo y facilitar la vida diaria utilizando la calculadora y otros programas informáticos para facilitar los cálculos y representaciones y rentabilizar su trabajo.
- Utilizar los distintos canales de comunicación audiovisual para transmitir informaciones diversas. Para representar funciones en diferentes canales de comunicación audiovisual (lápiz y papel, imágenes fijas, vídeos, GeoGebra...)

d. Competencia para aprender a aprender (CAA).

- Evaluar la consecución de objetivos de aprendizaje realizando las actividades finales de la unidad y las utiliza para autoevaluar los conocimientos adquiridos.
- Desarrollar estrategias que favorezcan la comprensión rigurosa de los contenidos organizando la información en mapas mentales, resúmenes, esquemas, tablas, etc. para comprender los conceptos tratados en la unidad de forma rigurosa.

e. Competencias sociales y cívicas (CSC).

- Desarrollar capacidad de diálogo con los demás en situaciones de convivencia y trabajo y para la resolución de conflictos, dialogando con sus compañeros cuando se presenta una situación de conflicto en el aula.

- Evidenciar preocupación por los más desfavorecidos y respeto a los distintos ritmos y potencialidades. Ayudando de forma espontánea a sus compañeros que presentan alguna dificultad para aplicar las destrezas desarrolladas en la unidad.
 - En las actividades que requieran trabajo cooperativo, participa activamente propiciando diálogo y una buena convivencia y ambiente de trabajo.
 - Ayuda a los compañeros que requieran explicaciones con mayor grado de detalle por presentar alguna dificultad en su aprendizaje.
 - Respeta las de opiniones e ideas fundamentadas por sus compañeros
- f. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).**
- Encontrar posibilidades en el entorno que otros no aprecian, más cercano, y en situaciones que se pueden reflejar mediante funciones
 - Incremento de iniciativa en tareas con menor grado de información.
 - Se identifica con el entorno y la materia al poder aplicar contenidos trabajados durante el desarrollo de la clase en aspectos cercanos a su vida cotidiana.
 - Utilización del aprendizaje adquirido para poder aplicarlo en situaciones nuevas y de diferente complejidad.
- g. Conciencia y expresiones culturales (CEC).**
- Elaborar trabajos y presentaciones con sentido estético, representando diferentes funciones de forma adecuada y prestando especial atención a los detalles.
 - Reconoce que la evolución histórica que han experimentado las funciones, ha sido posible gracias a las investigaciones y el conocimiento aportado por los primeros matemáticos que las desarrollaron.

6.6 Contenidos

En este apartado proponemos brevemente los contenidos de dicha unidad: **Funciones lineales y cuadráticas** (Tabla 14) y los que es conveniente **repasar** de la unidad didáctica anterior: **Funciones y gráficas** (Tabla 15). A modo de breve resumen, estos son los contenidos propuestos:

Unidad Didáctica : FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS
1. Función lineal $y = mx$. Definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones. 2. Función afín $y = mx + n$. Definición, propiedades, Representación gráfica. Aplicaciones. 3. Ecuación punto-pendiente. 4. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos. 5. Aplicaciones de la función lineal. Problemas de móviles. 6. Parábolas y funciones cuadráticas. Definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones.

Tabla 14. Contenidos de la unidad didáctica. *Elaboración propia*

Unidad Didáctica : FUNCIONES Y GRÁFICAS (REPASO)
1. Funciones y sus gráficas: Concepto de función, dominio y recorrido. 2. Estudio de crecimiento y decrecimiento. 3. Tendencias de una función. 4. Estudio de continuidad y discontinuidad. Periodicidad. 5. Expresión analítica de una función.

Tabla 15. Contenidos de la unidad didáctica previa. *Elaboración propia*

6.7 Metodología

Para abordar el aprendizaje de los contenidos de esta unidad didáctica, no sólo se ha tenido en cuenta el método tradicional de enseñanza sino que para enriquecerla, se presentan un conjunto de diferentes metodologías cuidando la coherencia entre ellas, sus actividades y sus recursos, que permitirán desarrollar distintos aspectos de la competencia matemática, a la vez que ofrecer al alumnado una oferta didáctica, lo más variada posible y también al profesorado para disponer de mayor oferta orientadora a la hora de programar sus actividades.

Se propone una **metodología transmisiva** para la introducción de todos los conceptos de forma secuenciada, que se han programado en las distintas secciones de la unidad, apoyándose sobre los libros de texto o apuntes elaborados por el profesor o profesora.

Es un método que puede provocar que decaiga el interés por las clases, disminuyendo el grado de atención y asimilación de los contenidos, por lo que se ha de procurar mantener un cierto dinamismo en el aula, sugiriendo actividades singulares, manteniendo la clase activa, “revolucionada” por el interés que puedan suscitar las mismas o proponer otro tipo de tareas atrayentes en relación con lo que se acaba de explicar, incluso abriendo debates sobre temas de situaciones reales relacionadas con las exposiciones en esa sesión.

El alumnado deberá iniciar las prácticas de su aprendizaje mediante el subrayado en el libro de texto, o recopilando las explicaciones y aclaraciones que haga en la pizarra o verbalmente el docente, tomando notas en sus cuadernos de clase y realizando seguidamente las tareas prácticas y resolución de problemas para demostración de la destreza adquirida en la interpretación y representación de funciones.

Otro tipo de estrategia didáctica propuesta para la consecución de los objetivos trazados en la etapa y las competencias fijadas en el currículo, es la que se articula en torno a procesos de **modelización matemática**. El desarrollo de la competencia modelizadora en el alumnado se puede llevar a cabo a través de diferentes metodologías. Normalmente, el desarrollo de esta competencia se suele vincular más

con metodologías centradas en el alumno, articuladas en torno a la exploración individual y colectiva de situaciones realistas, auténticas y abiertas, en las que el profesor adopta más un papel de guía o mediador. Se suelen articular con principios metodológicos propios del aprendizaje colaborativo, que permitan explotar el potencial de aprender junto con otros.

En el apartado 6.8 de este TFM, *Actividades y recursos*, expondremos varias tareas de modelización, donde los estudiantes deberán construir modelos matemáticos. En ellos podrán apreciar con mayor detalle todas las fases que integran cada una de éstas y las herramientas y recursos que el docente propone a los alumnos para realizarlo a nivel de grupos pequeños de dos o tres estudiantes para fomentar el aprendizaje cooperativo, dialógico y significativo. Con ello, se pretende que los alumnos aprendan a debatir, discutir y defender su solución a su tarea con argumentos sólidos, desde los datos reales de partida, metodologías de investigación aplicadas y propuesta de modelos matemáticos implementados.

Se procurará que los estudiantes participen e interactúen entre ellos mediante un **metodología activa** durante el mayor tiempo posible, discutiendo libremente y reflexionando de forma crítica sobre todas las estrategias resolutorias elaboradas y readaptadas al contexto de la tarea y búsqueda de información, facilitada por el docente o no, que justifiquen que sus respuestas son las más eficientes, guarda mayor coherencia y con rigor científico, pero a la vez, comparándolas con otras soluciones, extrayendo las debilidades y fortalezas de cada una de ellas. El profesor o profesora deberán intervenir lo menos posible, cediendo a los alumnos el papel de principales protagonistas, lo que seguramente les motivará y amenizará la tarea, facilitando el aprendizaje entre iguales.

Otra metodología aplicable, a la que se recurre con gran frecuencia, de gran eficacia para fomentar el aprendizaje es la que se apoya en **herramientas TIC**, por su carácter más lúdico y entretenido, lo que genera mayor repuestas positivas por parte del alumnado. Su empleo como recurso, por ofrecer mayor motivación, permitiría crear un buen ambiente en clase, tanto a nivel de trabajo individual como cooperativo. Aunque las TIC no son sólo interesantes por el componente antes anteriormente citado, sino que aportan herramientas importantes que modifican y dan sentido a la actividad matemática. Dicho en otros términos, un uso oportuno de las TIC permite hacer una actividad matemática más auténtica, rica y significativa, ayudando a los estudiantes a que descubran el verdadero valor y la verdadera potencia de las matemáticas.

También se propone el uso de metodologías basadas en el juego y la investigación, por ejemplo, a través del uso en algunas sesiones de tareas tipo **WebQuest**, donde se propondrá desarrollar una investigación sobre una muestra de elementos singulares en distintos entornos (arquitectónicos, estructurales, en exposiciones, en museos, en plazas, parques, calles, etc.) que puedan ser identificados y relacionados a distintas

tipologías de funciones, de acuerdo a su geometría o a la similitud de sus representaciones gráficas asociadas.

También se les indicarán sitios web que conducirán a diferentes clases de juegos matemáticos con distintas aplicaciones matemáticas, cuyo objetivo es amenizar y facilitar a los alumnos un marco de percepción más agradable de esta asignatura, aumentando su interés y su motivación por ella, abandonando la idea de ser aburrida, tediosa e inservible para muchos de los alumnos, aportándole más valor añadido como herramienta muy válida para solución de problemas. En el Anexo I, se mostrarán algunos sitios web que incluyen estos objetivos marcados.

6.8 Actividades y recursos

En este apartado se van a exponer un conjunto de actividades que se proponen para realizar con los alumnos, de manera que se puedan trabajar los contenidos propuestos, evaluar con los criterios seleccionados y alcanzar los objetivos curriculares fijados, de manera que abarquen los contenidos propuestos siendo coherentes con las metodologías a aplicar.

6.8.1 Actividades

Se han elegido y desarrollado varias clases de actividades y tareas con una serie de objetivos que cumplir. El primero de ellos es conseguir mejorar las dificultades y errores en los que incurren con más frecuencia los alumnos sobre funciones lineales y cuadráticas y que hemos recogido en el apartado 5, *Fundamentación didáctica*, de acuerdo al trabajo específico encomendado. El segundo objetivo trazado pretende desarrollar una recopilación de actitudes enriquecedoras y que despierten el interés por los estudiantes en resolución de problemas, con otros recursos y métodos diferentes a los tradicionales. Adelantamos, a continuación, un avance del tipo de actividades que vamos a desarrollar:

1. *Tareas para refuerzo del aprendizaje.* Comprende una serie de actividades y ejercicios que se proponen normalmente en los libros de texto, tanto al final de cada apartado de la unidad didáctica, como al final de la misma y están relacionados con los contenidos que acabamos de exponer en el apartado 6.6 de la unidad didáctica: Funciones lineales y cuadráticas. Esta recopilación se ha efectuado de varios libros, como el de las editoriales de *Anaya* y de *Santillana* de 3º de ESO y de algunos sitios webs que hemos considerado de interés, por adaptarse muy bien su metodología didáctica a los contenidos de esta unidad, incorporando muchos ejercicios que responden a contextos reales para que los alumnos les den un sentido más práctico. En el Anexo I, propondremos una batería grande de ejercicios y actividades, algunos resueltos y otros para resolver.

2. Realización de actividades matemáticas mediante la *utilización de la TIC* con programas como Geogebra para experimentar, una vez aprendidos los contenidos en el aula, la rapidez con la que esta herramienta vincula las expresiones analíticas de las funciones con sus gráficas correspondientes. En el Anexo I, vendrán ejercicios resueltos con Geogebra.
3. *Actividades de modelización*. Consistentes en abordar una cuestión de gran interés desde el punto de vista didáctico en un contexto realista, donde el aprendizaje adquirido podrá ser aplicado de forma directa en entornos de la vida cotidiana, cercanos a los alumnos, constatando así la gran utilidad y lo necesarios que son los conocimientos matemáticos. En el Anexo I, propondremos varias, alguna de ellas resueltas.
4. También se presentarán *tareas del tipo WebQuest*, estrategias constructivas que servirán para facilitar el aprendizaje, desarrollando en los estudiantes capacidades y habilidades poniendo a prueba los conocimientos previos que éstos tienen antes de iniciar un unidad didáctica, buscando información sobre la importancia del estudio de funciones a lo largo de la historia y su aplicación y repercusión en fenómenos en contextos reales, identificando su justificación matemática y relacionándola con los contenidos de la unidad didáctica. En el Anexo I, propondremos dos de ellas.

La Tabla 16 muestra la clasificación de todas estas actividades de acuerdo a su tipología y el objetivo para las cuales han sido diseñadas, que serán desarrolladas con mayor detalle en el Anexo I:

TIPO DE ACTIVIDAD	OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD
Actividad de diagnóstico (DIAG)	Identificar los conocimientos previos del alumnado
Actividad de Introducción (INT)	Propiciar un primer encuentro del alumnado con los contenidos de la unidad
Actividad de motivación (MOT)	Aumentar la implicación y "motivación" del alumno
Actividad de aprendizaje (AP)	Adquirir conceptos y desarrollar destrezas procedimentales
Actividad de desarrollo (DES)	Desarrollar y fijar los contenidos propuestos
Actividad consolidación (CON)	Reforzar los aprendizajes
Actividad creativas (CRE)	Posibilitar el desarrollo de la creatividad
Actividad resumen (RESU)	Permitir al alumnado tomar conciencia de los contenidos y procesos trabajados a lo largo de la unidad.
Actividad de evaluación (EV)	Determinar el grado de consecución de los objetivos
Actividades ampliación (AMP)	Individualizar la enseñanza para alumnado con mayores capacidades y/o interés.

Actividades recuperación (RECU)	Individualizar la enseñanza para alumnado con necesidades educativas particulares.
---------------------------------	--

Tabla 16. Clasificación de las actividades según su tipología y objetivo para las cuales han sido diseñadas. *Elaboración propia*

6.8.2 Recursos y materiales didácticos

Describimos, a continuación, los recursos y materiales que nos van a proporcionar ayuda pedagógica y didáctica de tipo personal, técnico y material, durante el desarrollo de los contenidos de la unidad didáctica: *Funciones lineales y cuadráticas*, para lograr los fines generales de la educación como es el aprendizaje y por tanto, la adquisición de competencias y capacidades de los estudiantes. Las características de los materiales curriculares, entre otras, son las siguientes:

1. Tendrán como referente las áreas y asignaturas del currículo de las distintas etapas.
2. Deberán de ser flexibles y variados para favorecer un proceso de enseñanza–aprendizaje heterogéneo adaptado a la diversidad del alumnado.
3. Las guías didácticas del profesorado deben incluir propuestas de actividades de refuerzo y ampliación.
4. Respetar en sus textos e imágenes los principios de igualdad de derechos entre los sexos, las culturas y fomentar comportamientos democráticos y valores éticos y morales.

Los tipos de recursos y materiales didácticos con los que cuenta el Instituto de Educación Secundaria “Az-Zait, de Jaén, utilizados para el aprendizaje en esta unidad didáctica son los siguientes:

- 1. Específicos:** Libro de texto 3º de ESO: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Autores: J. Colera Jiménez, Mª. J. Oliveira González, I. Gaztelu Alberro, R. Colera Cañas. Editorial Anaya. Año 2015. Geoplano, materiales de dibujo, pizarra portátil, planos y mapas, dominó, espejos, etc.
- 2. Informáticos:** Ordenadores conexión internet, Software (Geogebra, Wiris, Excel...), Páginas interactivas, etc.
- 3. Tecnológicos (TIC):** Pizarra digital, calculadora científica, portátil, Tablet, móvil, cámara de fotos.
- 4. Ambientales:** Propios: aula, patio, biblioteca del centro, salón de actos, aula informática. Externos: Parque, Museos, Biblioteca, Ciudad
- 5. Audiovisuales:** Televisión, proyector (cañón), retroproyector, DVD,
- 6. Autoconstruidos:** Carteles, Juegos (barajas, dados, monedas, compás....), figuras papiroflexia (propiedades figuras planas, poliedros), Tangram

7. Humanos / personales:

- Profesor de Matemáticas: Coordina el trabajo de clase. Desarrolla las sesiones.
- Alumnos: Son los protagonistas principales del proceso de aprendizaje,
- Profesores de otras materias: Colaboran en unid. didácticas de forma interdisciplinar.
- Equipo directivo: Colabora en la organización de actividades complementarias.
- Departamento de Orientación: Colabora con el profesorado y alumnado.
- Familias y personas invitadas a formar parte del proceso enseñanza-aprendizaje (Charlas, coloquios, excursiones....).

8. Recursos en las web

- Espacio (nube) con recursos a disposición de los estudiantes
- <http://educalab.es/recursos>
- https://www.anayaeducacion.es/index_alumnado.php
- <https://www.problemasyequaciones.com/>
- Blog de matemáticas

9. Económicos (para la asignatura de matemáticas)

- Asignación económica para recursos y materiales de la asignatura de matemáticas.

10 Impresos: Libros de texto y consulta. Fichas de ejercicios. Libros de lectura, prensa, cuaderno del alumno.

6.9 Atención a la diversidad

Para realización de este apartado nos hemos basado en el Plan de Orientación y Acción Tutorial de IES AZ-Zait de Jaén, centro educativo donde he desarrollado las prácticas que establece el Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y la esta unidad didáctica. El capítulo 8 del citado documento está dedicado a la **Atención a la Diversidad**. Está estructurado en varios epígrafes, de los cuales exponemos a continuación, algunos de ellos:

6.9.1 Marco Legislativo

La atención a la diversidad está recogida en un amplio marco legislativo. Señalamos, seguidamente, algunos de ellos:

1. Instrucciones de 22 de junio de 2015. Protocolo de Detección, Identificación y Organización de la respuesta educativa de alumnado N.E.A.E y Organización de Respuesta Educativa.
2. Instrucciones de 8 de marzo de 2017 de la Dirección General de Participación y Equidad, por las que se actualiza el protocolo de detección, identificación del

alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa.

3. Orden de 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa educación básica en los centros públicos de Andalucía.
4. Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad Autónoma de Andalucía.
5. Orden 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria.

6.9.2 Medidas generales de atención a la diversidad

Alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo:

1. Dificultades de aprendizaje
2. Alumnado TDA y TDAH
3. Alumnado con falta de motivación
4. Alumnado NEAE
5. Alumnado de incorporación tardía
6. Alumnado de altas capacidades

Las instrucciones de 8 de marzo de 2017, Protocolo de Detección, Identificación y Organización de la respuesta educativa de alumnado N.E.A.E y Organización de Respuesta Educativa recogen las siguientes medidas de específicas de atención educativa:

- a. Adaptaciones de Acceso (AAC)
- b. Adaptaciones Curriculares No Significativas (ACNS)
- c. Adaptaciones Curriculares Significativa (ACS)
- d. Programas Específicos (PE)
- e. Programas de Enriquecimiento Curricular para el alumnado con altas capacidades intelectuales (PECAI)
- f. Adaptaciones Curriculares para el alumnado con altas capacidades (ACAI)
- g. Flexibilización del periodo de escolarización.
- h. Permanencia Extraordinaria (Sólo NEE)
- i. Escolarización en un curso inferior al correspondiente por edad para alumnado de incorporación tardía en el Sist. Educativo (Sólo COM)
- j. Atención específica para alumnado que se incorpora tardíamente y presenta graves carencias en la comunicación lingüística (Sólo COM)
- k. Medidas de flexibilización y alternativas metodológicas en la enseñanza y evaluación de la Lengua Extranjera para alumnado NEE derivadas de discapacidad (dificultades de expresión oral) (ESO – Bachillerato).

Recursos personales de carácter general: Director, Jefa de Estudios, Tutores/as, Profesorado, Profesorado de apoyo a las áreas, Orientador/a y otros profesionales del EOE. En cuanto a la planificación: A) A NIVEL DE CENTRO: Proyecto Educativo, POAT y

Programaciones Educativas B) A NIVEL DE AULA: Se incluirá en las programaciones didácticas:

1. Metodologías favorecedores de la inclusión: aprendizaje basado en proyectos y aprendizaje cooperativo.
2. Adaptación del espacio, tiempo y recursos para alumnos con NEE.
3. Metodologías basadas en utilización de las TIC adaptadas al alumnado con NEE.
4. Planes de clase (IBL) adaptados al alumnado con NEE.
5. Actividades de modelización de situaciones de la vida real para niños/as con NEE.
6. Procedimientos e Instrumentos de Evaluación: uso de métodos alternativos a las pruebas escritas y adaptaciones de este formato y este tiempo.

6.10 Temporalización

A continuación, se muestra la distribución de sesiones, de contenidos y actividades de la Unidad didáctica: **FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS**, debiendo ser coherente con los objetivos y actividades propuestos conforme a los recursos y materiales que se utilizarán y la carga lectiva programada de cuatro horas a la semana. El contenido curricular del curso 3º de ESO en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas es de 15 unidades didácticas y esta unidad corresponde a unidad didáctica 9, repartiéndose sus contenidos en 10 sesiones lectivas de una hora cada una. Por tanto, se enmarca en el segundo cuatrimestre o lo que es lo mismo, corresponde al grupo de unidades didácticas que pertenecen a la segunda evaluación (Tabla 17).

CURSO 3º ESO: MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS					
Nº U.D.	UNIDAD DIDÁCTICA	Nº de SESIONES	EVALUACIÓN		
0	Estrategias matemáticas	Transversal	1ª	2ª	3ª
6	Ecuaciones	12	1ª	2ª	
7	Sistemas de ecuaciones	9		2ª	
8	Funciones y gráficas	9			
9	Funciones lineales y cuadráticas	10		2ª	
10	Problemas métricos del plano	12		2ª	

Tabla 17. Unidades didácticas que pertenecen a la segunda evaluación junto a la de funciones. *Elaboración propia.*

6.10.1 Distribución de los contenidos por sesiones

La distribución de los contenidos de la *unidad 9* en **10 sesiones de aula programadas**, son las siguientes:

Sesión 1: **Función lineal $y = mx$ y función afín $y = mx + n$.**

Sesión 2: **Ecuación punto-pendiente de la recta.**

Sesión 3: **Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.**

Sesión 4: **Aplicaciones de la función lineal. Problemas de móviles.**

Sesión 5: **Estudio conjunto de dos funciones lineales y su representación.**

Sesión 6: **Parábolas y funciones cuadráticas (1ª sesión).**

Sesión 7: **Parábolas y funciones cuadráticas (2ª sesión).**

Sesión 8: **Modelización matemática con funciones lineales y afines (1ª sesión).**

Sesión 9: **Modelización matemática con funciones lineales y afines (2ª sesión).**

Sesión 10: **Evaluación.**

6.10.2 Temporalización de las sesiones según el horario escolar

Las 10 sesiones lectivas necesarias para desarrollar esta unidad están repartidas en tres semanas con cuatro horas de clase por semana. Dado que las clases darán comienzo el 16 de marzo y finalizarán el 3 de abril, el **horario semanal** donde repartiremos dichas sesiones es el siguiente:

SEMANA 1ª (Del 16 al 20 de marzo)					
DÍA/HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
9.30 a 10.25	SESIÓN 1				SESIÓN 4
10.30 a 11.25			SESIÓN 2		
11.30 a 12.25				SESIÓN 3	
RECREO					
SEMANA 2ª (Del 23 al 27 de marzo)					
DÍA/HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
9.30 a 10.25	SESIÓN 5				SESIÓN 8
10.30 a 11.25			SESIÓN 6		
11.30 a 12.25				SESIÓN 7	
RECREO					
SEMANA 3ª (Del 30 de marzo al 3 de abril)					
DÍA/HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
9.30 a 10.25	SESIÓN 9				
10.30 a 11.25					
11.30 a 12.25			SESIÓN 10		
RECREO					

Los contenidos a los que hacemos alusión en las sesiones, corresponden a los establecidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre que están relacionados con los de la unidad didáctica. (Ver Tablas 7,8 y 14). A continuación, presentaremos las actividades programadas en cada una de las 10 sesiones en las que se ha planificado esta unidad. Respecto a la referencia que hacemos en la ficha de cada sesión con los objetivos, éstos corresponden a los de etapa, tal y como señalado en el epígrafe 6.4. En cuanto a las competencias clave, son las asignadas a los criterios de evaluación del Bloque I: *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas* y Bloque 4: *Funciones*,

conforme establece la Orden 14 de julio de 2016, según se ha expuesto en el apartado 3 de este TFM, *Fundamentación curricular*.

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS		CURSO: 3º ESO
SESIÓN 1: FUNCIÓN LINEAL $y = mx$; FUNCIÓN AFÍN $y = mx+n$		
Objetivos: -Conocer las funciones lineales y afines : definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones. -Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones lineales, afines, así como para su comprensión. - Hacer uso de las TIC para el estudio y análisis de las propiedades de funciones y su representación gráfica.		Contenidos: - Función de proporcionalidad, cuya expresión analítica viene dada por la ecuación $y = mx$. Función afín cuya expresión analítica viene dada por la ecuación $y = mx+n$.
Desarrollo de la sesión: -En la parte teórica, el profesor explicará las funciones lineales en las que las dos variables son proporcionales. Son funciones que se representan mediante rectas y tienen una expresión analítica similar: $y = mx$, se representa mediante una recta que pasa por (0, 0). La constante de proporcionalidad, m (que puede ser positiva o negativa), se llama pendiente de la recta y tiene que ver con su inclinación. También explicará la función afín que tiene por ecuación $y = mx + n$ (25 minutos). -En la parte práctica, se realizarán ejercicios resueltos en el libro o propuestos por el profesor, como por ejemplo: representar en unos ejes cartesianos las rectas, dadas sus ecuaciones; identificar la pendiente de rectas representadas gráficamente; determinar la ecuación de una recta a partir de la gráfica y obtención de la pendiente. Se resolverán algunos de ellos (los que mayor dificultad hayan podido encontrar los alumnos). (30 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.1, 1.2 y 1.7. Apartado 2. Ejercicios 2.2 y 2.7. Apartado 3. Actividades 3.1. y 3.2).		
Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa y transmisiva.		
Recursos: Docente, Libro de texto, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, proyector y conexión a internet.		
Competencias: CMCT, CD, CCL, CAA		Aprendizaje: Individual
Tipo Actividades: AP, DIAG, DES, MOT, CON		Objetivos de etapa: a,e,f,g
MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS		CURSO: 3º ESO
SESIÓN 2: ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE DE LA RECTA		

Objetivos: -Vincular las funciones lineales y afines con las rectas en el plano y con diferentes expresiones de las mismas: ecuación punto pendiente. -Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones lineales,afines, así como para su comprensión. -Hacer uso de las TIC para el estudio y análisis de las propiedades de funciones y su representación gráfica.	Contenidos: -Ecuación de la recta punto-pendiente de una recta. Significado de la pendiente y su obtención a partir de la expresión analítica. Interpretación de n , ordenada en el origen.
Desarrollo de la sesión: -En la parte teórica, el profesor explicará la ecuación punto pendiente llevándonos a la forma $y = mx + n$, y vinculándola con la expresión de la función afín, estudiada en la sesión anterior; el concepto de pendiente y su obtención a partir de la expresión analítica $y = y_0 + m(x - x_0)$. Además, propondrá que los alumnos comprueben que en dicha ecuación, el punto (x_0, y_0) puede ser cualquiera que pertenezca a la recta, y que su expresión final no cambia aunque se tome uno u otro (20 minutos). - En la parte práctica, se realizarán ejercicios resueltos en el libro de texto o propuestos por el profesor, el cuál propondrá ejercicios de páginas web ya seleccionadas, con ejercicios relacionados con esta parte teórica, para resolverlos en el cuaderno de clase o con el programa Geogebra, como por ejemplo: escribir las ecuaciones de las rectas siguientes dadas por un punto y su pendiente; escribir la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas, escogiendo de cada una otro punto distinto al que se tomó para escribir la ecuación y volviendo a escribir una ecuación con este otro punto, comprobando que se trata de la misma ecuación. Se resolverán algunos de ellos en clase (los que mayor dificultad hayan podido encontrar los alumnos). (35 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.3 y 1.4. Apartado 2. Ejercicios 2.2 y 2.5. Apartado 3. Actividad 3.3).	
Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa y transmisiva.	
Recursos: Libro de texto, cuaderno de clase, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, conexión a internet, programa Geogebra.	
Competencias: CMCT, CAA, CSC,CCL, CD	Aprendizaje: Individual
Tipo Actividades: AP, DIAG, CONC, MOT, INT	Objetivos de etapa/área de matem.: a,e,f,g /1,2,4,6,7
MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS	CURSO: 3º ESO
SESIÓN 3: ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS	

Objetivos: -Vincular las funciones lineales y afines con las rectas en el plano y con diferentes expresiones de las mismas: ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. -Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones lineales y afines, así como para su comprensión. -Hacer uso de las TIC para el estudio y análisis de las propiedades de funciones y su representación gráfica.	Contenidos: -Pendiente de una recta conociendo dos puntos de la misma. Ecuación de la recta a partir de dos puntos. Representación gráfica.
Desarrollo de la sesión: - En la parte teórica, el profesor explicará cómo se determina la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y cómo se halla la pendiente partiendo de dos puntos conocidos de la misma recta. Así mismo, demostrará que su expresión final no cambia, aunque se tome un punto u otro. (20 minutos). - En la parte práctica, se realizarán ejercicios resueltos en el libro de texto o propuestos por el profesor, el cuál propondrá ejercicios de páginas web ya seleccionadas, con ejercicios relacionados con esta parte teórica, para resolverlos en el cuaderno de clase o con el programa Geogebra, como por ejemplo: Hallar las pendientes de las siguientes rectas dadas por dos puntos. Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos P1 y P2. Dados los puntos marcados en un sistema cartesiano, hallar las ecuaciones de las rectas a, b, c,.... Utilizar los puntos marcados para calcular las pendientes. Se resolverán algunos de ellos (los que mayor dificultad hayan podido encontrar los alumnos) (35 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.4 y 1.5).	
Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa y transmisiva.	
Recursos: Libro de texto, cuaderno de clase, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, conexión a internet, programa Geogebra.	
Competencias: CMCT, CAA, CSC, CD, CCL	Aprendizaje: Individual
Tipo Actividades: AP, DES CONC, RESU, MOT, MOT, INT	Objetivos de etapa: a,e,f,g
MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS	
CURSO: 3º ESO	
SESIÓN 4: APLICACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL. PROBLEMAS DE MÓVILES	
Objetivos: -Conocer los modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de diversos campos de conocimiento y de la vida cotidiana, por medio de la obtención de la expresión analítica, elaboración de la tabla de valores y su representación gráfica. -Hacer uso de las TIC para el estudio y análisis de las propiedades de funciones y su representación gráfica.	Contenidos: Aplicaciones de la función lineal. Problemas de movimientos.

Desarrollo de la sesión:

-En la parte teórica, el profesor explicará a los estudiantes las funciones lineales utilizadas para describir fenómenos en los que se relacionan dos magnitudes que varían proporcionalmente, por ejemplo: peso de un producto/coste del mismo; tiempo de movimiento uniforme/distancia recorrida. Expondrá varios ejemplos con algunas unas funciones que describen situaciones de movimientos uniformes (20 minutos).

-Posteriormente, se realizarán ejercicios resueltos en el libro de texto o propuestos por el profesor, el cuál propondrá ejercicios de páginas web ya seleccionadas, con ejercicios relacionados con esta parte práctica de la unidad, para resolverlos en el cuaderno de clase o con el programa GeoGebra. Pueden ser del tipo:

1. Alicia salió de su casa a caminar a una velocidad de 5 km/h. ¿A qué distancia se hallará dentro de t horas?.
 2. Jaime salió de aquí hace 2 h a una velocidad de 4 km/h. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t horas?.
- En todos ellos se determinará la expresión analítica (ecuación de movimiento) y luego se representará gráficamente. Resolución de algunos de ellos (los que mayor dificultad hayan podido encontrar los alumnos) (35 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.8, 1.9, 1.10 y 1.11. Apartado 2. Ejercicio 2.7).

Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa y transmisiva.

Recursos: Docente, Libro de texto, cuaderno de clase, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, conexión a internet, programa Geogebra.

Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP, CD

Aprendizaje: Individual

Tipo Actividades: AP, DES, DIAG, CONC, MOT, INT

Objetivos: etapa/área de matemát.: a,e,f,g /1,2,4,6,7

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

CURSO: 3º ESO

SESIÓN 5: ESTUDIO CONJUNTO DE DOS FUNCIONES LINEALES Y SU REPRESENTACIÓN

Objetivos:

-Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones lineales, afines, así como para su comprensión.

-Hacer uso de las TIC para el estudio y análisis de las propiedades de funciones y su representación gráfica.

Contenidos:

Interpretación de funciones lineales. Punto de corte de dos funciones lineales. Interpretación en términos del fenómeno que representan.

Desarrollo de la sesión:

- En la parte teórica, el profesor explicará a los estudiantes problemas de aplicaciones de funciones lineales cuyas soluciones deben estudiarse de forma conjunta y compararse entre sí, donde las rectas en ambos casos (rectas) pueden o no cortarse, o bien que dichas rectas sean paralelas. Se estudiarán fenómenos en los que se relacionan dos magnitudes que varían proporcionalmente. Expondrá varios ejemplos con algunas funciones que describen situaciones de movimientos uniformes (20 minutos).
- Posteriormente, se realizarán ejercicios resueltos en el libro de texto o propuestos por el profesor, el cuál propondrá ejercicios de páginas web ya seleccionadas, con ejercicios relacionados con esta parte práctica de la unidad, para resolverlos en el cuaderno de clase o con el programa GeoGebra, en las que se muestre (con los deslizadores) c(con los duna recta al darle distintos valores a la pendiente y a la ordenada en el origen. Pueden ser, por ejemplo, del tipo:
Andrea sale a las 11:00 h de su casa caminando a 3 km/h en busca de su amigo Iván. A las 13:00 h, Iván sale al encuentro de Andrea en bici a 11 km/h. Si viven a 23 km de distancia, ¿a qué hora y dónde se encuentran?.
- En todos ellos se determinará la expresión analítica de ambas funciones (ecuación de movimiento), luego se representará gráficamente y se interpretará, en términos de fenómeno representado, el punto de corte, si lo hay, entre ambas rectas. Resolución de algunos de ellos (los que mayor dificultad hayan podido encontrar los alumnos) (35 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.13 y 1.14. Apartado 2 .Ejercicios 2.1 y 2.11).

Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa.

Recursos: Docente, libro de texto, cuaderno de clase, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, conexión a internet, programa Geogebra.

Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP, CD

Aprendizaje: Individual

Tipo Actividades: INT, AP, CRE, RESU, DES

Objetivos de etapa: a, e, f, g

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

CURSO: 3º ESO

SESIÓN 6: PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS (1ª SESIÓN)

Objetivos:

-Conocer las **funciones cuadráticas**: definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones.

-Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones cuadráticas, así como para su comprensión.

Contenidos:

-Parábolas y funciones cuadráticas. Parábola $y = x^2$. Representación gráfica. Funciones cuadráticas del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Desarrollo de la sesión:

- En la parte teórica se hará una explicación por el docente sobre la multitud de funciones que se representan mediante parábolas. Se explicará el modelo más sencillo de parábola $y = x^2$. También se introducirán las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, y sus casos particulares (25 minutos).
- En la parte práctica se realizarán ejercicios resueltos en el libro de texto o propuestos por el profesor, el cuál propondrá ejercicios de páginas web ya seleccionadas, con ejercicios relacionados con esta parte teórica, para resolverlos en el cuaderno de clase o con el programa GeoGebra, como pueden ser por ejemplo del tipo: Representar la función $y = x^2 - 3x - 4$ (30 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.12, 1.15, 1.17, 1.18 y 1.20. Apartado 2. Ejercicios 2.3, 2.4, 2.8 y 2.9. Apartado 3. Actividades 3.3, 3.4 y 3.5).

Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa y transmisiva.

Recursos: Docente, Libro de texto, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, proyector y conexión a internet.

Competencias: CMCT, CAA, CD, CCL	Aprendizaje: Individual
Tipo Actividades: AP, DIAG, DES, MOT, CON	Objetivos etapa/área matem.: a,e,f,g /1,2,4,6,7
MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS	
CURSO: 3º ESO	
SESIÓN 7: PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS (2ª SESIÓN)	
Objetivos:	Contenidos:
-Conocer las funciones cuadráticas : definición, propiedades, representación gráfica y aplicaciones.	Parábolas y funciones cuadráticas. Parábola $y = x^2$. Representación gráfica. Funciones cuadráticas del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Método para la representación gráfica de funciones cuadráticas.
-Elaborar diferentes estrategias para la resolución de los problemas en los que aparezcan involucradas las funciones cuadráticas, así como para su comprensión.	
-Conocer los modelos cuadráticos para estudiar situaciones provenientes de diversos campos de conocimiento y de la vida cotidiana, por medio de la obtención de la expresión analítica, elaboración de la tabla de valores y su representación gráfica.	

Desarrollo de la sesión:

- En la parte teórica, continuación de la explicación del docente sobre la representación gráfica de funciones cuadráticas, se explicará un método para ello, consistente en tres pasos: obtención de las coordenadas del vértice, obtención de algunos puntos próximos al vértice (en ambos lados) (o bien, obtención de los puntos de corte con el eje de abscisas, si los hay y son diferentes) y por último su representación gráfica (25 minutos).
- En la parte práctica se realizarán ejercicios resueltos en el libro de texto o propuestos por el profesor, el cuál propondrá ejercicios de páginas web ya seleccionadas, con ejercicios relacionados con esta parte teórica, para resolverlos en el cuaderno de clase o preparar con el programa GeoGebra actividades en las que se muestre cómo varía la forma de la parábola dependiendo únicamente del coeficiente de la x^2 , además de cómo se mueve una parábola sin variar su forma al darle valores a los otros coeficientes. Otro tipo de ejercicios pueden ser la determinación de la expresión analítica y la representación gráfica de problemas de situaciones de la vida cotidiana (30 minutos). (Ver Anexo I, Apartado 1. Ejercicios 1.12, 1.15, 1.17, 1.18 y 1.20. Apartado 2. Ejercicios 2.3, 2.4, 2.8, 2.9, 2.10 y 2.12. Apartado 3. Actividades 3.3, 3.4 y 3.5).

Metodología: Basada en el uso de herramientas TIC, activa y transmisiva.

Recursos: Libro de texto, calculadora científica, pizarra digital, equipo informático, proyector y conexión a internet

Competencias: CMCT, CAA, CD, CCL

Aprendizaje: Individual

Tipo Actividades: AP, DIAG, DES, MOT, CON

Objetivos etapa: e, f, g

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

CURSO: 3º ESO

SESIÓN 8: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON FUNCIONES LINEALES Y AFINES (1ª SESIÓN)

Objetivos: Utilización de la modelización matemática como herramienta para desarrollar el pensamiento crítico mediante la construcción de modelos lineales en situaciones reales.
-Conocer los modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de diversos campos de conocimiento y de la vida cotidiana, por medio de la obtención de la expresión analítica, elaboración de la tabla de valores y su representación gráfica.

Contenidos:

-Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. -
Función lineal $y = mx$.

Desarrollo de la sesión:

Exposición introductoria del docente a los alumnos a las actividades de modelización de funciones lineales y afines, donde los estudiantes desarrollarán una serie de competencias para entender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad, formulando hipótesis sobre el problema, observando con espíritu crítico los resultados y reflexionando sobre las soluciones encontradas, a desarrollar estrategias heurísticas (como dividir el problema en partes, relacionarlo con otros similares....), ser conscientes, en definitiva, de la importancia de las matemáticas en la realidad.

Parte: Práctica (Actividades, ejercicios y tareas)

Se proponen **dos actividades de modelización** de 55 minutos cada una, que se realizarán en las SESIONES 8 y 9 respectivamente. Los alumnos tendrán como objetivo la elaboración de modelos matemáticos basados en dos contextos de la vida cotidiana y donde deberán aplicar los conocimientos aprendidos en esta unidad, mediante una metodología orientada a la investigación.

1ª Actividad: "Modelización: Parquímetro"

Se realizará en el aula y estará estructurada en grupos de 2 o 3 estudiantes, trabajando en grupo de forma cooperativa, bajo las directrices metodológicas marcadas por el profesor o profesora. Se pretende trabajar en los siguientes aspectos:

- Encontrar un modelo matemático (una función lineal) que relacione el precio con el tiempo.
- Representar dicha función en un sistema de ejes coordenados.
- Usar el modelo para producir información sobre el sistema real, respondiendo a cuestiones del tipo: ¿cuánto se debe pagar por estacionar el vehículo durante 55 minutos?; ¿cuánto tiempo podré dejar el vehículo aparcado si pago 2.40 euros?

El **reparto de tiempos** para cada fase es el siguiente:

Fases 1 y 2: Introducción a la tarea de modelización (5') y explicación de la tarea

Fase 3: Trabajo cooperativo (2 o 3 alumnos) (40')

Fase 4: Exposición de resultados y conclusiones (10').

En el Anexo I, se encuentra definida y detallada esta 1ª actividad.

Metodología: Modelización. Aprendizaje por investigación (IBL). Uso de herramientas TIC.

Recursos: Docente, libro de texto, cuaderno de clase, calculadora científica, equipos informáticos, programa Geogebra, repositorio de actividades (Anexo I).

Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP, CCL

Aprendizaje: Cooperativo

Tipo Actividades: MOT, DIAG, CONC, AP

Objetivos etapa/área matem: a,e,f,g/1,2,4,6,7

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

CURSO: 3º ESO

SESIÓN 9: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON FUNCIONES LINEALES Y AFINES (2ª SESIÓN)

Objetivos:

-Utilización de la modelización matemática como herramienta para desarrollar el pensamiento crítico mediante la construcción de modelos lineales en situaciones reales.

-Conocer los modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de diversos campos de conocimiento y de la vida cotidiana, por medio de la obtención de la expresión analítica, elaboración de la tabla de valores y su

Contenidos:

Función proporcional $y = mx$. Función afín $y = mx + n$. Aplicaciones de la función lineal. Problemas de movimientos. Relación entre funciones lineales y afines y las rectas en el plano.

Desarrollo de la sesión:

Exposición introductoria del docente a los alumnos a las actividades de modelización de funciones lineales y afines, donde los estudiante desarrollarán una serie de competencias para entender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad, formulando hipótesis sobre el problema, observando con espíritu crítico los resultados y reflexionando sobre las soluciones encontradas, a desarrollar estrategias heurísticas (como dividir el problemas en partes, relacionarlo con otros similares...., ser conscientes, en definitiva, de la importancia de las matemáticas en la realidad.

Parte: Práctica (Actividades, ejercicios y tareas)

Esta **actividad de modelización** tiene una duración de 55 minutos. Los alumnos tendrán como objetivo la elaboración de un modelo matemático basado en un contexto de la vida real, debiendo aplicar para ello los conocimientos aprendidos en esta unidad, mediante una metodología de investigación.

2ª Actividad: "Modelización del final de etapa ciclista".

Se realizará en el aula y estará estructurada en grupos de 2 o 3 estudiantes, trabajando en grupo de forma cooperativa, bajo las directrices metodológicas marcadas por el profesor o profesora.

Se pretende trabajar en los siguientes **aspectos cognitivos**:

- Encontrar un modelo matemático que relacione el tiempo (horas) transcurrido desde ahora y la distancia recorrida (km) desde este momento.
- Representar en un sistema de ejes coordenados las funciones que describen: El ciclista escapado (en rojo), El grupo perseguidor (en azul), La meta.
- ¿Alcanzará el grupo perseguidor al escapado si se mantienen las velocidades?
- En caso afirmativo, determinar a qué distancia de la meta se producirá el alcance.
- ¿En cuánto tiempo será alcanzado por el grupo?

El **reparto de tiempos** para cada fase es el siguiente:

Fase 1: Introducción a la tarea de modelización (5')

Fase 2: Explicación de la tarea (5')

Fase 3: Trabajo cooperativo (2 o 3 alumnos) (35')

Fase 4: Exposición de resultados y conclusiones (15')

En el Anexo I, se encuentra definida y detallada esta 2ª actividad.

Metodología: Modelización. Aprendizaje por investigación. Uso de herramientas TIC.

Recursos: Docente, libro de texto, cuaderno de clase, calculadora científica, equipos informáticos, programa Geogebra, repositorio de actividades (Anexo I).

Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP, CCL

Aprendizaje: Cooperativo

Tipo Actividades: MOT, DIAG, CONC, AP

Objetivos etapa: a,e,f,g

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

CURSO: 3º ESO

SESIÓN 10: EVALUACIÓN

Objetivos: Todos los objetivos propuestos en la Unidad Didáctica de Funciones Lineales y Cuadráticas.

Contenidos: Todos los contenidos trabajados de la Unidad Didáctica de Funciones Lineales y Cuadráticas.

Desarrollo de la sesión: Realización de prueba de evaluación escrita en torno a los contenidos de la unidad didáctica Funciones Lineales y Cuadráticas, que consistirá en la realización en el aula, de un examen escrito que tendrá una duración de 55 minutos. (Ver ANEXO I, Propuesta de Examen). Metodología: Evaluación sumativa.	
Recursos: Calculadora científica, lápiz, goma de borrar y bolígrafos azul y rojo. Escuadra y cartabón o regla.	
Competencias: CMCT, CD, CCL, CAA	Aprendizaje: Individual
Tipo Actividades: EV, DIAG, RESU, CONC	Objetivos etapa/área matem: a,e,f,g/1,2,4,6,7

6.11 EVALUACIÓN

El artículo 14.1 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, dispone que por Orden de la Consejería competente en materia de educación se establecerá la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, que será continua, formativa, integradora y diferenciada según las distintas materias. Los criterios de evaluación se presentan como el referente más completo para la valoración no sólo de los aprendizajes adquiridos en cada materia sino también del nivel competencial alcanzado por el alumnado, al integrar en sí mismos conocimientos, procesos, actitudes y contextos.

De acuerdo a lo establecido en el Artículo 20.1 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias y el logro de los objetivos de la etapa en las evaluaciones continua y final de las materias de los bloques de asignaturas troncales y específicas, serán los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que figuran en su ANEXO 1 a este real decreto. Así mismo, conforme a lo establecido en el artículo 20.3 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se establecerán las medidas más adecuadas para que las condiciones de realización de las evaluaciones, incluida la evaluación final de la etapa, se adapten a las necesidades específicas de apoyo educativo del alumnado. Estas adaptaciones en ningún caso se tendrán en cuenta para minorar las calificaciones obtenidas.

6.11.1 Criterios de calificación

Cada estándar de aprendizaje de la unidad se evaluará asignándole una ponderación de acuerdo a la actividad en donde se haya desarrollado. En el Anexo I, se mostrarán una serie de rúbricas como procedimiento de evaluación, de acuerdo al nivel alcanzado en la consecución de los objetivos de aprendizaje de la unidad.

En la siguiente tabla se muestran cuatro criterios de calificación del alumno/a, (Anexo I, Rúbrica nº 7), según el ítem al que corresponda cada actividad desarrollada en la

unidad, estando relacionados cada uno de ellos con su rúbrica específica, asignándoles un valor porcentual sobre un total de 100:

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN		CURSO: 3º ESO
ITEM	TIPO DE ACTIVIDAD	VALORACIÓN (%)
1	Prueba de control: Examen escrito	50 %
2	Trabajo cooperativo	20 %
3	Trabajo individual	15 %
4	Participación en clase	15 %

Tabla 18. Criterios de calificación de evaluación. *Elaboración propia*

De conformidad con lo establecido en el artículo 18 de la Orden de 14 de julio de 2016, los resultados de la evaluación de cada materia se aplicarán en la correspondiente acta de evaluación, en el expediente académico del alumno/a y en el historial académico, expresándose una calificación numérica, en una escala de uno a diez, sin emplear decimales, que irá acompañada de los siguientes términos: Insuficiente (IN), Suficiente (SU), Bien (BI), Notable (NT), Sobresaliente (SB), aplicándose las siguientes correspondencias: Insuficiente: 1, 2, 3 o 4. Suficiente: 5. Bien: 6. Notable: 7 u 8. Sobresaliente: 9 o 10. Se considerarán calificación negativa los resultados inferiores a 5.

7. CONCLUSIONES

El presente TFM ha sido el último documento realizado con la finalidad de dar cumplimiento a los requerimientos exigibles para la obtención del título oficial de “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”. Dicho título, capacita al futuro docente para el desarrollo de las competencias profesionales, necesarias en la aplicación del currículo exigible por la normativa vigente, estatal y autonómica, en materia de educación. Para su elaboración, se han aplicado los conocimientos y competencias adquiridas de todas las asignaturas y actividades realizadas lo largo de este curso, con el objeto de aproximarnos con una mejor perspectiva, a un escenario educativo en un centro de enseñanza real en el que, entre otras muchas tareas, tengamos que *realizar una programación didáctica real* de la asignatura de matemáticas y desarrollar una de las correspondientes unidades didácticas.

En la primera parte de este TFM se han expuesto con detalle algunos aspectos sobre los tres pilares o fundamentos básicos sobre los que se sustenta el proceso de enseñanza-aprendizaje: *Curricular, epistemológico y didáctico*.

Se han *comparado dos libros de texto de dos editoriales distintas*, para analizar en paralelo el contenido de la unidad didáctica de *Funciones Lineales y Cuadráticas* y conocer el desarrollo de la misma desde su óptica educativa y pedagógica particular, aunque, de acuerdo a éste, se ha llegado a la conclusión de que, tanto los contenidos teóricos, la metodología didáctica y la parte dedicada a ejercicios, actividades y tareas de ambas, son muy similares. Ambos textos continúan apoyándose en la mayor parte de sus pretensiones didácticas, en una metodología tradicional, *sin incorporar*

metodologías innovadoras como una propuesta matemática más realista, más cercana al entorno de la vida cotidiana, herramientas TIC, etc., que contribuyan a un aprendizaje más atractivo, eficaz y menos rutinario.

Se ha realizado una búsqueda de fuentes bibliográficas (revistas científicas, artículos, libros, etc.) para investigar cuál es la perspectiva que tienen los alumnos, antes, durante y después de abordar la asignatura de matemáticas, encontrando en la mayoría de los casos, más respuestas de carácter decepcionante, en cuanto a la falta de interés, motivación, miedo, incertidumbre... y en general, poca empatía respecto a esta materia en gran parte del alumnado.

También se ha investigado, en distintas fuentes, los *errores y dificultades en los que incurren los estudiantes* con mayor frecuencia a la hora de abordar esta asignatura, en la que se concluye afirmando que *resulta necesaria la implantación de nuevas estrategias y recursos didácticos para minimizar las inseguridades que manifiestan los alumnos cuando han de resolver una tarea matemática*. Además, se revisó otra investigación dentro de la anterior, pero particularizada a los errores y dificultades que presentan algunos estudiantes a la hora de abordar el tema objeto de esta unidad didáctica: Funciones lineales y cuadráticas.

Una vez inventariados y clasificados los tipos de errores que con más asiduidad cometen los estudiantes, se han analizado las distintas estrategias que proponen dichos estudios para intentar evitarlos o reducirlos, apostando, en general, por un aprendizaje basado en asignar un papel más activo a los alumnos, dándoles mayor protagonismo e independencia a la hora de abordar una tarea matemática, descubriendo por sí mismos sus aciertos, sus errores, nuevos conceptos e incluso nuevas formas de resolver un mismo problema de forma más sencilla y eficaz (procurando que sea en un contexto real), fruto de su propio esfuerzo, indagación y manejo de información, siempre contrastada y apoyada por el/la docente, procurando hacer compatibles estas metodologías con la metodología tradicional. Todas juegan un papel muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Teniendo en cuenta todas estas investigaciones, *se ha diseñado una unidad didáctica que incorpora nuevas propuestas didácticas para la realización de ejercicios, actividades y tareas más amenas, persiguiendo siempre que estén relacionadas con situaciones cotidianas para darle un sentido mucho más lógico y práctico a sus soluciones, favoreciendo el aprendizaje y despertando el interés de los chicos/as por descubrir realmente “para qué sirve lo que estamos haciendo”, evitando incurrir en escenarios surrealistas y repetitivos que aburren y convierten en autómatas a los estudiantes.*

Así mismo, *se han diseñado actividades grupales que permiten a los alumnos trabajar entre ellos (2 o 3 personas), fomentando el aprendizaje cooperativo, resolviendo actividades de modelización o participando en una investigación a través de una Webquest, con contenidos relacionados con esta unidad didáctica de funciones lineales y cuadráticas*. Por otro lado, estas actividades se han centrado en proponer problemas

de situaciones reales, cercanas a su entorno espacial, social, cultural y a las experiencias del día a día del alumnado, aplicando los contenidos de dicha unidad donde. Aparte de desarrollar sus competencias matemáticas, trabajarán otras destrezas como la digital, lingüística, etc., e incluso podrán manifestar su sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

En definitiva, *el objetivo principal perseguido es fomentar el pensamiento o espíritu crítico del alumno/a y el aprendizaje entre iguales, mucho más cercano, rápido y eficiente que el adquirido con métodos tradicionales*, debido al empleo de un vocabulario menos técnico, más sencillo y asequible, que requiere menor esfuerzo por tratarse de una tarea estructurada de forma diferente a la de una sesión de clase convencional y rutinaria, cuya calificación se efectúa por medio de rúbricas en donde se especifican los objetivos que se pretenden alcancen los estudiantes.

Respecto al *período de prácticas* que he realizado en el IES AZ-Zait de Jaén, como complemento formativo a este Máster, no ha sido de forma presencial sino a distancia, On Line, de acuerdo a las medidas sanitarias adoptadas por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía a causa del COVID-19. En dicho período, en concreto en el curso 2º de la ESO, *se impartían los contenidos correspondientes a* Expresiones Algebraicas y por tanto no han coincidido con los de mi programación de la unidad didáctica de Funciones lineales y cuadráticas que propongo en este TFM.

No obstante, *mi experiencia del Practicum ha sido enriquecedora al máximo*. He conocido a través de éste, algunos aspectos educativos que desconocía en estos niveles de enseñanza y que me han ayudado a comprender con mayor grado de detalle el proceso de enseñanza – aprendizaje en un centro educativo real, tanto desde el punto de vista del docente (en mi caso, la tutora que me ha formado en mis prácticas ha sido una magnífica profesora de matemáticas), como el del alumnado. Quisiera resaltar, entre otros muchos aspectos educativos no experimentados por mí hasta ahora, la corrección de una serie de ejercicios y/ actividades que me propuso mi profesora que revisara a un grupo de alumnos de los cursos 2º A y 2º B de la ESO, por medio de una guía o *ficha de descriptores/indicadores* que debían de aplicarse para comprobar al detalle la resolución integral de un ejercicio y analizar qué tipo de dificultades o errores cometían los estudiantes en cada uno de ellos. Para el caso de ejercicios de Expresiones Algebraicas, cada descriptor estaba ponderado en un nivel de fallo de menor a mayor (de 1 hasta a 4), conteniendo tres tipos de descriptores distintos. Es un *método muy eficaz para controlar los conocimientos que se han de aplicar y que el alumno/a debe dominar, además de los pasos que ha de seguir para resolver un problema matemático*.

He aprendido a saber *cómo se enseña en una clase de matemáticas, cómo se dirige una/un docente a los alumno/as*, cómo se les orienta para optimizar el rendimiento académico, tanto en el aula, como en la casa, *a la hora de realizar los ejercicios por medio de un metodología basada en la tecnología, que poco a poco va obteniendo mejores resultados en los alumnos que la metodología tradicional*. Por esta razón, he podido percibir en muchos de los alumnos/as de este curso de 2º de la ESO, mayor

interés por el aprendizaje de las matemáticas, utilizando las TIC como herramientas alternativas metodológicas, encontrándose menos aburridos en una sesión de clase, prestando más atención a la profesora y mejorando el rendimiento de su aprendizaje por su gran oferta didáctica y multitud de actividades que el alumno puede desempeñar con mucho más entusiasmo y motivación, no solo en el campo de las ciencias.

Respecto al profesorado, con el que he tenido la gran oportunidad de conversar y compartir nuestras experiencias, *tanto los del IES AZ-Zait de Jaén, como muchos de los que me han impartido asignaturas durante este Máster y que tan amablemente me han atendido en todo momento, siempre que he acudido a ellos, han aportado un gran valor a mi formación como futuro docente*, con sus conocimientos y experiencias sobre la repercusión del empleo de nuevas metodologías didácticas en la especialidad de matemáticas, sus avances y descubrimientos sobre estrategias y recursos didácticos para despertar el interés en los alumnos sobre esta materia.

Finalmente, me gustaría terminar este apartado de conclusiones con una reflexión personal sobre mis experiencias como docente. En primer lugar, he de decir que se han producido en diversos contextos educativos, tanto con alumnos que pertenecieron al antiguo sistema educativo EGB (Educación General Básica), BUP (Bachillerato Unificado Polivalente) y COU (Curso de Orientación Universitaria), como en cursos de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, además de la Universidad (Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Málaga), en la mayoría de los casos, en la especialidad de Matemáticas, aunque he impartido también Física, Química, Tecnologías y diversas asignaturas para formación de futuros ingenieros. Centrándonos en mi experiencia como profesor de matemáticas en estudiantes sobre todo de la ESO, he llegado a varias conclusiones, a tenor de los errores, dificultades, parálisis prácticamente total en el proceso de aprendizaje matemático de algunos de mis alumnos/as (aunque pocos afortunadamente), propiciada por un “pánico” incontrolable hacia esta asignatura y que he venido observando a lo largo de mi recorrido por la docencia, a raíz de efectuar un sondeo sobre su preparación o dominio matemático y cómo se les impartía dicha materia.

De entre todas ellas cabe destacar que la principal causa de fracaso de los estudiantes en su aprendizaje, entiendo que pueda originarse por la falta notable de éxito didáctico de la metodología tradicional aplicada en sus clases, considerándolas aburridas, abstractas, con cantidades desbordantes de fórmulas para la resolución de problemas, complicadas de memorizar, siendo un suplicio soportar la teoría y muy mecánicas y repetitivas las prácticas de resolución de ejercicios de forma individualizada, provocando una pérdida de atención e interés en los primeros minutos del comienzo de una sesión normal de clase. En cambio, cuando se proponían a los alumnos actividades grupales para resolución de tareas relacionadas con problemas reales de la vida cotidiana, que suscitaban gran interés por su utilidad, afrontando retos con un mayor nivel de dificultad, enseguida se abrían debates entre los miembros del grupo,

compartiendo impresiones con los del resto de la clase para llegar a una solución individual (por grupo) o compartida, demostrándole al profesor/a que han sido capaces de afrontar esta difícil tarea y en el menor tiempo posible, sostenida con argumentos matemáticos sólidos, consiguiendo con ello que los estudiantes no desconectasen inmediatamente de la asignatura, manteniendo la atención y motivación mucho más satisfactoriamente que cuando se realizaban tareas individualizadas sin ninguna directriz por parte del docente (es decir de forma mecánica). Las tareas matemáticas vinculadas al empleo de la tecnología, cuando se han realizado resolución de problemas con el software Geogebra, reproducción de videos, webs sobre juegos matemáticos, etc., han contribuido al aumento del grado de aceptación de los estudiantes hacia la asignatura de matemáticas.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abbit, J. y Ophus, J. (2008). What we know about the Impacts of Webquest: A review of research. *AACE Journal*, 16(4), 441-456. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/275548002>
- Alpízar, M., Fernández H., Morales J. y Quesada S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación matemática educativa*, 9, 6 -19. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/327392179>
- Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.
- Bernabé, I. y Adell, J. (2006). El modelo Webquest como estrategia para la adquisición de competencias genéricas en el EEES. *Congreso Edutec*, Tarragona. Recuperado de <https://elbonia.cent.uji.es/jordi/wp-content/uploads/docs/iolanda-bernabe-munoz.pdf>
- Bernabé, I. (2007). Webquest en el Espacio Europeo de Educación Superior: Un estudio de formación-acción. I Congreso Internacional Escuela y TIC. IV *Forum Innovadors. Más allá del software libre*. Recuperado de http://www.dgde.ua.es/congresotic/public_doc/pdf/23295.pdf
- Boyer, C.B. (1986). Historia de la Matemática. Madrid, España: Alianza Universitaria
- Bricall, J. (2000). Informe Universidad 2000. De la Plaza S., *Conferencia de Rectores de las Universidades españolas (CRUE)*. Biblioteca Digital de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), Barcelona, España. Recuperado de <https://www.oei.es/historico/oeivirt/bricall.htm>
- Callejo, M.L. (1987). *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, España: Narcea.
- Cardelle-Elawar, M. (1992). Effects of teaching metacognitive skills to student with low mathematics ability. *Teaching & Teacher Education*, 8(2), 109-121.

- Castells, M. (Ed.). (1986). *El desafío tecnológico. España y las nuevas tecnologías*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Castro, S., Guzmán B. y Casado, D. (2007). Las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, 13(23), 213-234. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/761/76102311.pdf>
- Colera y otros (2015). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Curso 3º ESO*. Madrid, España: Grupo Anaya, S.A.
- Coll, C. y Solé, I. (1989). Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. *Cuadernos de Pedagogía*, 168, 16-20. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2768047>
- Degrossi, M. y Carnevali, S. (2009). Webquest y Edublog: Experiencia de la Enseñanza Universitaria de Toxicología de Alimentos. *Ried, Revista Iberoamericana de Educación a distancia*, 12(2), 211-228.
- Dodge, B. (1995). Some Thoughts About Webquests. *Distance-Educator.com*. Recuperado de: http://webquest.sdsu.edu/about_webquests.html
- Enright, B. E. y Choate, J. S. (1993). Mathematical Problem Solving: The Goal of Mathematics. En J. S. Choate (Ed.), *Successful Mainstreaming. Proven ways to detect and correct special needs* (pp. 280-303. Needham Heights, Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas. *Suma: Revista sobre enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 17, 10-16.
- Garofalo, J. (1989). Beliefs, responses and mathematics education: Observations from the back of the classroom. *School Science and Mathematics*, 89(6), 451-455.
- Grence, T. y otros (2015). *Matemáticas Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve, 3º Eso. Proyecto: Saber Hacer*. Madrid, España: Editorial Santillana Educación, S.L.
- Hernández, C. (2013). Consideraciones para el uso de Geogebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *NÚMEROS. Revista didáctica de las Matemáticas*, 82, 115- 129.
- Juidías, J. y Rodríguez I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286.
- Lara, S. (2007). Eficacia de la Webquest como una metodología acorde con el EEES: Una experiencia universitaria. *Revista de Ciencias de la Educación*, 210, 135-152.
- Lester, F.K. (1983). Trends and issues in mathematical problems solving research. En R Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematical concept and processes* (pp. 229-261). Nueva York, Academic Press.
- Macnab, D. y Cummine, J. (1992). La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad. *Revista Educación Matemática*, 14(1), 139-143.

- March, T. (1998). *Why WebQuests?, An introduction*. Recuperado de <http://tommarch.com/writings/why-webquests>
- Marqués, P. (1999). *Diseño y educación de programas educativos*. Recuperado de <http://peremarques.pangea.org/funcion.htm>
- Mayer, R.E. (1991). *Thinking, problem solving, cognition*. New York, Freeman.
- Ortega, T. y Pecharrmán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las ciencias*, 28(2), 215–226.
- Palacios, A. (2009). Las Webquest como estrategias metodológicas ante los retos de la convergencia europea de la educación superior. *Pixel Bit, Revistas de medios y comunicación*, 34, 235-249
- Palomar, M. J. (2009). Ventajas e Inconvenientes de las TIC en la docencia. *Revista Digital Innovación y Experiencias*, 25, 1-8.
- Pérez, M. P. (1987). Los problemas matemáticos. *Cuadernos de Pedagogía*, 144, 79-81.
- Pérez, M. P. (1994). La solución de problemas en matemáticas. En J.I. POZO (Coord.), *La solución de problemas* (pp. 53-83). Madrid, España: Santillana/Aula XXI.
- Pinya, C. y Roselló, M.R. (2013). La webquest como herramienta de enseñanza-aprendizaje en educación superior. *EDUTEC. Revista electrónica de tecnología educativa*, 45, 1-16.
- Reboloso, R. (2000). *La Globalización y las Nuevas tecnologías de Información*. México D.F.: Editorial Trillas México.
- Rodera, A.M. (2008). Catalogación y valoración de las Webquests desde el área de educación física y el tratamiento de temáticas transversales. *Revista Educación física y deporte*, 28(1), 55-81.
- Ruiz, I. (2019). *Unidad Didáctica de Trigonometría* (trabajo de fin de máster). Universidad de Jaén, Jaén, España.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, California: Academic Press, Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics*. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Simon, H. (1979). *Models of thought* (Vol. 1). New Haven, CT: Yale University Press.
- Sosa, M. J. (2013). *La WebQuest: Ventajas e inconvenientes como recurso educativo*. Recup. http://www.web.upsa.es/spdece08/contribuciones/146_poster_WEBQUESTdefinitiva.pdf.

Tomás, M. (1990). Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. *Educar*, 17, 119-140.

REAL DECRETO 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, Texto consolidado de 30/07/2016.

DECRETO 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, BOJA núm. 122 (2016).

REAL DECRETO 1146/2011, de 29 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

ORDEN de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA núm. 144 (2016).

Referencia de páginas web:

Gallegos, J. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas*. LOMCE. Funciones y gráficas. http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3A/F_10_Funciones_3A.pdf

Docplayer. (9 de junio de 2020). *Docplayer.es*. Recuperado de <https://docplayer.es/73942851-Tema21-funciones-reales-de-variable-real-funciones-elementales-situaciones-donde-aparece-composicion.html>

Función matemática. (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado de la página https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

International Geogebra Institute. (2020). *Descubre las matemáticas con GeoGebra*. Austria. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/E7SqdraE>

Lorente, J.L. (2006-2020). *Web del profesor José Luis Lorente*. León. España. Recuperado de http://www.joseluislorente.es/index_.htm y <https://docplayer.es/73942851-Tema21-funciones-reales-de-variable-real-funciones-elementales-situaciones-donde-aparece-composicion.html>

Pérez, I. (1997-2019). *Qué es una Webquest*. Granada. Ed. Universidad de Granada.

Problemas y ecuaciones. ISSN 2659-9899. *Funciones lineales (Rectas)*. España. <https://www.problemasyequaciones.com/funciones/lineales/fucion-lineal-problemas-resueltos-grfica-pendiente-interseccion-ejes-paralelas.html>

Proyecto Descartes. (2016). *Funciones lineales y cuadráticas. Aplicaciones*. España.
https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales-JS-LOMCE/ora.htm

Referencia de videos en la red:

Camargo I.D. (11 de septiembre de 2009). *Aplicaciones de la función Cuadrática*. YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=fA6ZMym_N5Y

Campa, G. (8 de diciembre de 2015). *Problema de aplicación de la Parábola*. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=fmejEUmSvil&list=RDt8vIrBuf67w&index=10>

Física Virtual Académica. (23 de mayo de 2018). 10. *Función cuadrática, problema de un proyectil*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=ZpNFeVcjVpQ>

Julio profe. (11 de julio de 2012). *Problema 4 con ecuaciones cuadráticas*. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=udwq50v7ECs>

Más Aprendo. (17 de mayo de 2014). *Función afín*. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=SVEeM6qffTc>

Matemáticas Profe Alex. (24 de junio de 2016). *Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto. Ejemplo 1*. <https://www.youtube.com/watch?v=KEENQd0B5dl>

MateFácil. (16 de octubre de 2015). *Ecuación de una recta con pendiente y punto dados (Formas general, simétrica, ordinaria)*. YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=5cAz9M2_l8Q

MateFácil. (21 de febrero de 2020). 33. *¿Qué es la pendiente de una recta? Explicación completa. Geometría analítica*. Youtube.
<https://www.youtube.com/watch?v=44z-uD5IR-0>

Matemáticas Bachillerato. (17 de marzo de 2018). *Problema de la Vida Real. Función Lineal*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=7av0wVoARIA>

Susi Profe. (24 de febrero de 2019). *Funciones lineales, de proporcionalidad, afines y constantes*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=ACErHP3qzmA>

ANEXO I

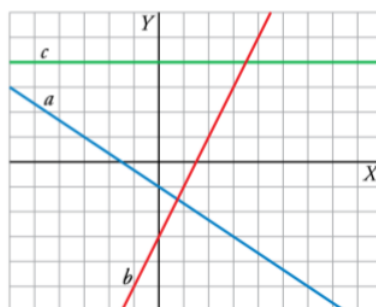
ÍNDICE**PÁGINA**

1. EJERCICIOS / ACTIVIDADES PARA RESOLVER.....	3
2. EJERCICIOS Y ACTIVIDADES RESUELTOS	6
3. ACTIVIDADES MEDIANTE USO DE TIC	12
4. ACTIVIDADES DE MODELIZACIÓN (TRABAJO COOPERATIVO)	15
5. ACTIVIDADES MEDIANTE USO DE WEBQUEST	19
6. PROPUESTA DE EXAMEN	21
7. CRITERIOS DE EVALUACIÓN.....	24
7.1 Rúbrica Nº 1: Evaluación de trabajo individual (Oral).....	24
7.2 Rúbrica Nº 2: Evaluación de trabajos escritos	25
7.3 Rúbrica Nº 3: Evaluación en la participación en trabajos cooperativos.....	26
7.4 Rúbrica Nº 4: Evaluación de pruebas orales y escritas	27
7.5 Rúbrica Nº 5: Evaluación de búsqueda y el tratamiento de la información.....	28
7.6 Rúbrica Nº6. Evaluación de hábitos personales y actitud.....	29
7.7 Rúbrica Nº7: Evaluación personalizada del alumno.....	30
7.8 Criterios de Evaluación asociados a los Bloques 1 y 4: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas y Funciones.....	31

1. EJERCICIOS Y ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Representa sobre unos ejes cartesianos en papel cuadriculado, las siguientes ecuaciones de las rectas: a) $y = 3x - 2$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 3/4 - 1/4 x$; d) $y = 2/3x - 5$; e) $y = -2$; f) $y = \frac{5x-3}{2}$

2. Determina la ecuación de cada una de estas rectas:



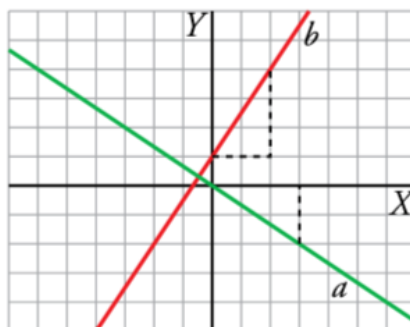
<https://www.anayaeducacion.es>

3. Escribe, en los siguientes casos, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) P (4, -3), m = 4; b) P (0, 2), m = -1/2; c) P (-3, 1), m = 5/4; d) P (0, 0), m = -1

e) P (-1, 3), m = -3/5; f) P (0, -2), m = 0

4. Determina la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Elige de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.



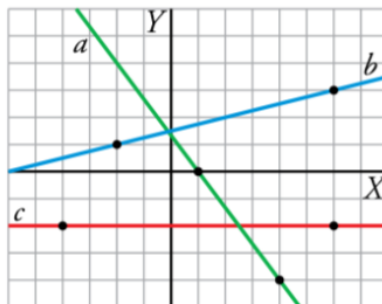
<https://www.anayaeducacion.es>

5. Halla, en los siguientes casos, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) P (2, 5), Q (-3, 6); b) P (3, -4), Q (-2, -1); c) P (-1, 0), Q (5, 5);

d) P (-7, 1), Q (3, 4); e) P (3, 1), Q (-2, 1); f) P (2, -2), Q (2, 5)

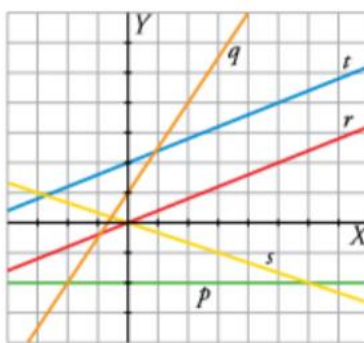
6. Determina las ecuaciones de las rectas a , b y c , utilizando para ello los puntos marcados para hallar las pendientes:



<https://www.anayaeducacion.es>

7. Asigna cada ecuación con su recta representada gráficamente:

a) $y = -1/3 x$; b) $y = 3/2 x + 1$; c) $y = 2/5 x$; d) $y = 2/5 x + 2$ e) $y = -2$



<https://www.anayaeducacion.es>

8. Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). Calcula la distancia que recorre en t minutos.

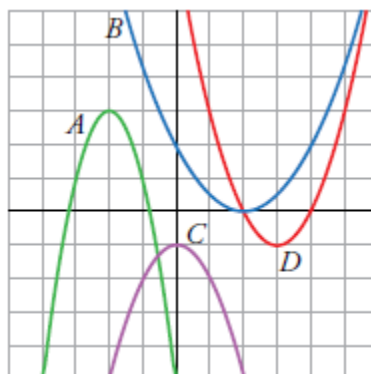
9. Un robot marcha a una velocidad de 7 m/min. Se puesto en funcionamiento hace 2 min. Calcula la distancia que nos separa de él dentro de t min.

10. Hemos alquilado a las 10:00 horas una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. Hallar la cantidad que nos devolverán si la entregamos a las t horas de ese día.

11. Un tren de alta velocidad ha salido a las 11 de la mañana de una población situada a 800 km de la nuestra y viene hacia aquí a una velocidad 200 km/h. Por otra parte, un tren de mercancías salió de nuestra ciudad dos horas antes a una velocidad de 50 km/h por un vía paralela a la del de alta velocidad. a) Expresar por medio de dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren a las t horas. b) Representar las rectas de esas dos funciones en unos ejes de coordenadas. c) Señalar en qué punto se cortan las dos rectas y dí qué significa cada una de sus coordenadas. d) Calcular por medio de un

sistema de ecuaciones la hora a la que los trenes se cruzan y a qué distancia se encuentran de nuestra ciudad.

12. Asigna estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas en la figura: a) $y = -x^2 - 1$; b) $y = 1/2 x^2 - 2x + 2$; c) $y = -2x^2 - 8x - 5$; d) $y = x^2 - 6x + 8$



<https://www.anayaeducacion.es>

13. Encuentra la posición relativa de las rectas $y = -4x + 1$, $y = 4x$. En el caso de que sean secantes, halla las coordenadas del punto de corte.

14. Determina la posición relativa de las rectas $x - 3y - 1 = 0$ y $4x + y + 1 = 0$. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

15. Representa las siguientes funciones construyendo, en cada caso, una tabla de valores como la de la figura y dí cuál es el vértice de cada parábola:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	...	...	...	...	...	...	...	...	...

a) $y = x^2 + 3$; b) $y = x^2 - 4$; c) $y = 2x^2$; d) $y = 0,5x^2$

16. Determina: a) el valor de "c" para que la recta $3x - 5y = c$ pase por el punto $(-2, 4)$. b) El valor de "b" para que la recta $2x + by = -11$ pase por el punto $(2, -5)$. c) Calcula el valor de "k" para que la parábola $y = kx^2 - 2x + 3$ pase por el punto $(-1, 0)$. d) Halla el valor de "a" para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + 2x + 3$ tenga su vértice en el punto de abscisa $x = 2$. e) Halla el valor del coeficiente "m" para que la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ tengan un solo punto de corte.

17. Determina "b" para que la gráfica de la función $y = 2x^2 + bx + 4$ pase por el punto $(3, 31)$.

18. Escribe la ecuación de la parábola que cuyo parámetro $a = -1$, corta al eje de ordenadas en $(0, -5)$ y su vértice es el punto $(4, 11)$.

19. Halla el vértice y los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -2x^2 - 2x + 4$. A partir de estos datos representa su gráfica.

20. Representa las siguientes funciones cuadráticas:

$$a) y = x^2 + 6x + 2; \quad b) y = 0,1x^2 - 0,5; \quad c) y = -x^2 - x + 1$$

21. Un grupo de 17 chicas y chicos de la misma edad organizan un viaje. A la reunión acuden los padres y las madres de todos ellos, cuya edad media es de 45 años. Pero si consideramos al grupo formado por padres, madres e hijos, la media de edad es de 35 años. ¿Qué edad tienen las chicas y los chicos?

22. Hoy tenemos una temperatura de 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura del aire desciende, aproximadamente, 6 °C por cada kilómetro de ascensión. a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C? b) Representa la función altura → temperatura y escribe su expresión analítica.

Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:

a) $y = 3x + 4$; b) $3x + 2y = 5$; c) Recta de pendiente $1/4$ que pasa por $(3, 0)$; d) Recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 4)$. ; e) Función de proporcionalidad que pasa por $(4, -3)$.

2. EJERCICIOS Y ACTIVIDADES RESUELTOS

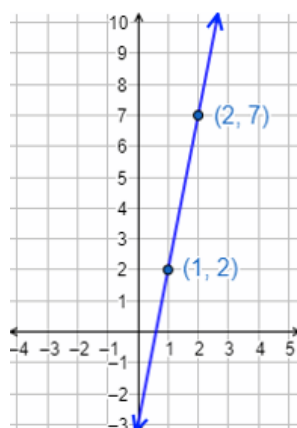
1. Calcular la función lineal que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(2,7)$. Tenemos que hallar la pendiente, m , y la ordenada, n .

Primer punto: Como $x=1$ e $y=2$, sustituyendo, $2 = m \cdot 1 + n$

Segundo punto: Como $x=2$ e $y=7$ sustituyendo, $7 = m \cdot 2 + n$

Tenemos el sistema formado por las ecuaciones $m + n = 2$ y $2m + n = 7$, por tanto:

Resolviendo el sistema, por ejemplo, por reducción, tenemos que $m=5$ (con lo que $n=-3$). Por tanto, se trata de la función $f(x) = 5x - 3$:



<https://www.problemasyecuaciones.com>

2. Obtén en tu cuaderno de clase una tabla de valores para la siguiente función, y a continuación, haz su representación gráfica.

$$y = -3x - 1$$

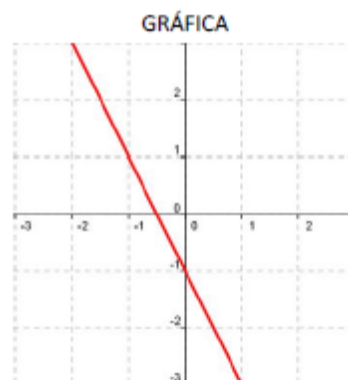
 $y = -3x - 1$ (polinomio de primer grado)

x	-2	-1	-1/2	0	1
$f(x)$	3	1	0	-1	-3

$(-2, 3)$ $(-1, 1)$ $(-1/2, 0)$ $(0, -1)$ $(1, -3)$

Pendiente: $-3 \Rightarrow$ recta decreciente

Ordenada en el origen: $-1 \Rightarrow (0, -1)$ punto de corte de la recta con el eje de ordenadas



www.apuntesmareaverde.org.es

3. Obtén en tu cuaderno de clase una tabla de valores para la siguiente función (polinómica de 2º grado), haz su representación gráfica y analiza los puntos obtenidos.

$$y = x^2 - 6x + 5$$

GRÁFICA

$$y = x^2 - 6x + 5$$

polinomio 2º grado

x	3	1	5	0	6
f(x)	-4	0	0	5	5

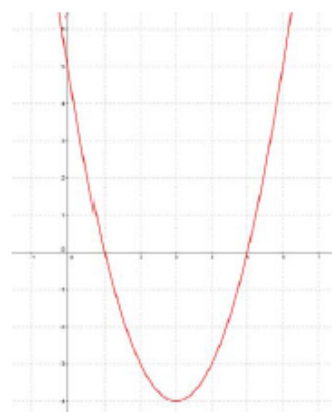
(3, -4) (1, 0) (5, 0) (0, 5) (6, 5)

Coeficiente líder: $1 > 0 \Rightarrow$ parábola convexa

$$\text{Vértice: } x = \left[\frac{-b}{2a} \right]_{a=1, b=-6} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (3, -4)$$

Ordenada en el origen: $5 \Rightarrow (0, 5)$ punto de corte con el eje de ordenadas.

Puntos de intersección con el eje de abscisas: (1, 0) y (5, 0)



www.apuntesmareaverde.org.es

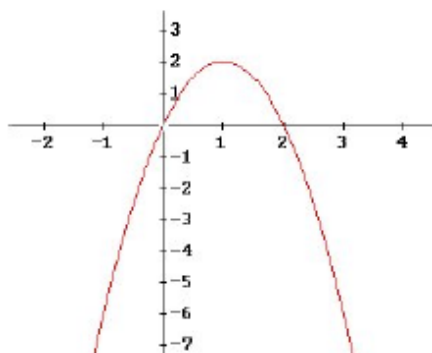
4. Representa gráficamente esta función cuadrática:

$$y = -2x^2 + 4x$$

Al ser el coeficiente líder o cuadráticos negativo ($a < 0$), la ramas de la parábola están abiertas hacia el eje Y negativo, por tanto es *cóncava*.

$$y = -2x^2 + 4x$$

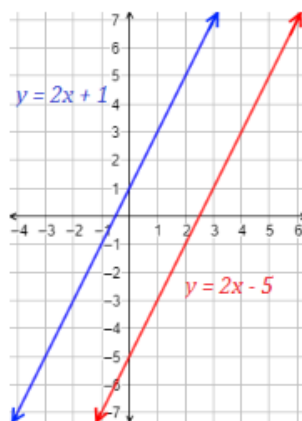
$-2 < 0$



www.apuntesmareaverde.org.es

5. Las siguientes rectas son paralelas porque tienen la misma pendiente ($m=2$)

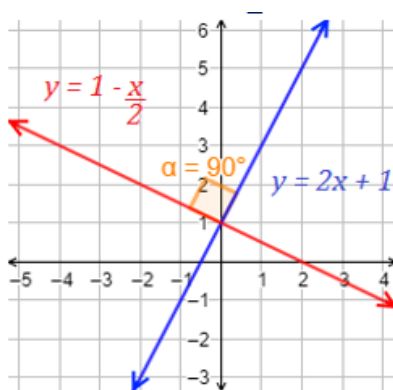
$$y = 2x + 1 \quad \text{e} \quad y = 2x - 5$$



<https://www.problemasyecuaciones.com>

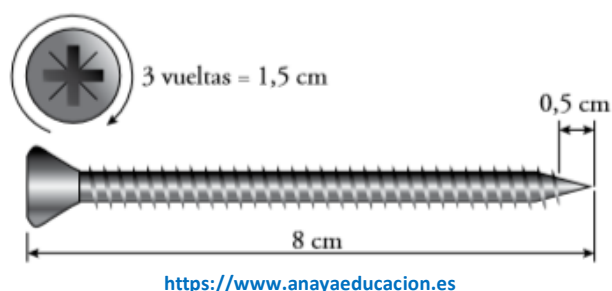
6. Las siguientes rectas son perpendiculares porque la pendiente de la una es el opuesto del inverso de la pendiente de la otra:

$$y = 2x + 1 \quad \text{e} \quad y = 1 - x/2$$



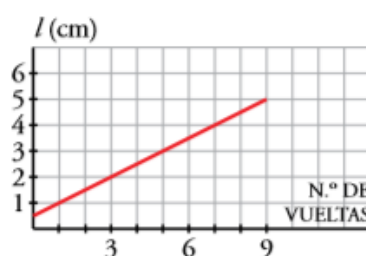
<https://www.problemasyecuaciones.com>

7. El tornillo de la figura penetra 1,5 cm por cada tres vueltas que se le hace girar. Para colocarlo en una viga de madera, se le ha dado un martillazo previamente, penetrando 0,5 cm. a) Haz una tabla que relacione el número de vueltas que se le da al tornillo, x , con la longitud que penetra, y . Construye la gráfica de dicha relación. b) ¿Cuál es la expresión analítica? ¿Cuál es el paso de rosca del tornillo (longitud que penetra por cada vuelta)? ¿Cuántas vueltas habrá que darle hasta que todo el tornillo esté hundido en la viga? c) Supongamos que se ha seguido el mismo procedimiento para atravesar un listón de 5 cm de grosor. ¿Después de cuántas vueltas empezará el tornillo a asomar por el tón?



Solución: a)

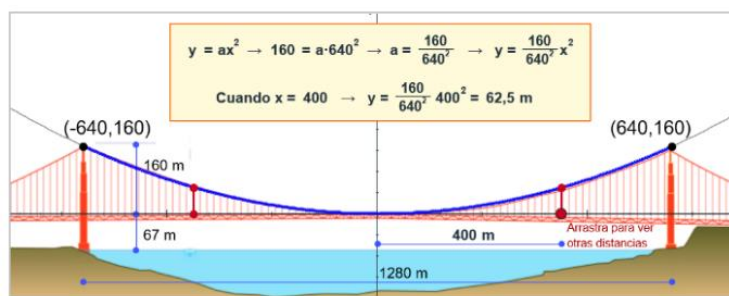
VUELTAS	0	3	6	9
LONGITUD	0,5	2	3,5	5



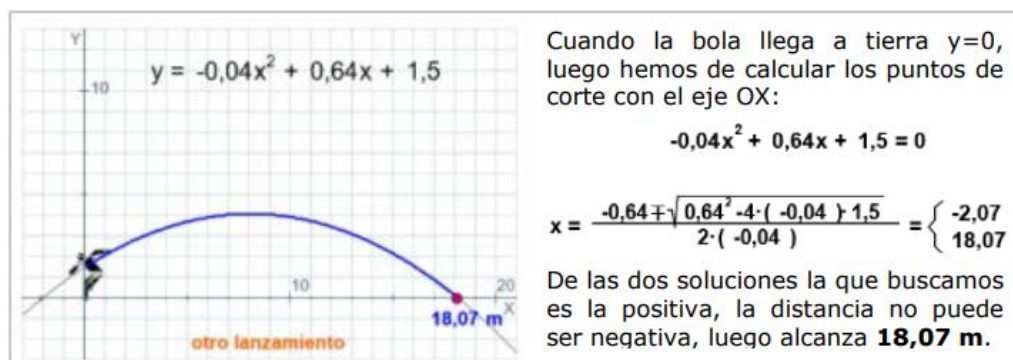
b) $y = 0,5x + 0,5$; en cada vuelta el tornillo penetra 0,5 cm, es decir 14 vueltas.

c) A las 8 vueltas

8. El famoso puente colgante de San Francisco, el Golden Gate, está suspendido por unos enormes cables adoptando una forma parabólica, tocando la calzada en centro del puente. Sus medidas se muestran en la figura. Es un problema de aplicación en el mundo real, que con la ecuación de la función que define su parábola podemos determinar la altura que tiene cada el cable en función de la distancia al centro del puente ¿Cuál es la altura de los cables a 400 m del centro del puente?

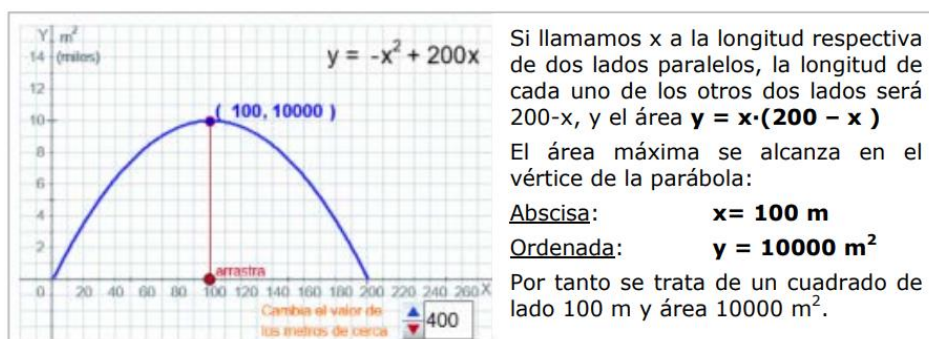


9. Un lanzador de peso lanza la bola que traza una trayectoria de ecuación $y = -0,04x^2 + 0,64x + 15$ donde x es la distancia recorrida por la bola (m) e y la altura que alcanza también (m). ¿Qué distancia alcanza la bola?



<https://proyectodescartes.org>

10. Un agricultor posee un terreno muy extenso y desea vallar una zona de forma rectangular. Decide colocar una cerca metálica de 400 m de longitud. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor superficie que puede cercar?. Calcula el valor de esa superficie.



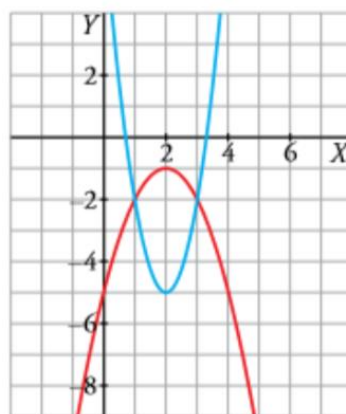
<https://proyectodescartes.org>

11. Determina la posición relativa de las rectas $2x - 5y - 1 = 0$, $-4x + 10y + 1 = 0$. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de x e y son proporcionales: $A_1=2$, $B_1=-5$, $A_2=-4$, $B_2=10$, entonces $A_1 \cdot B_2 = 20$ y $A_2 \cdot B_1 = 20$. Son iguales, por lo tanto las rectas son paralelas.

12. Dibuja las parábolas cuyas ecuaciones son: $y = 3x^2 - 12x + 7$; $y = -x^2 + 4x - 5$. Encuentra los puntos de corte mediante un sistema de ecuaciones y comprueba que corresponden a los hallados gráficamente.

Solución: Se cortan en los puntos $(1, -2)$ y $(3, -2)$



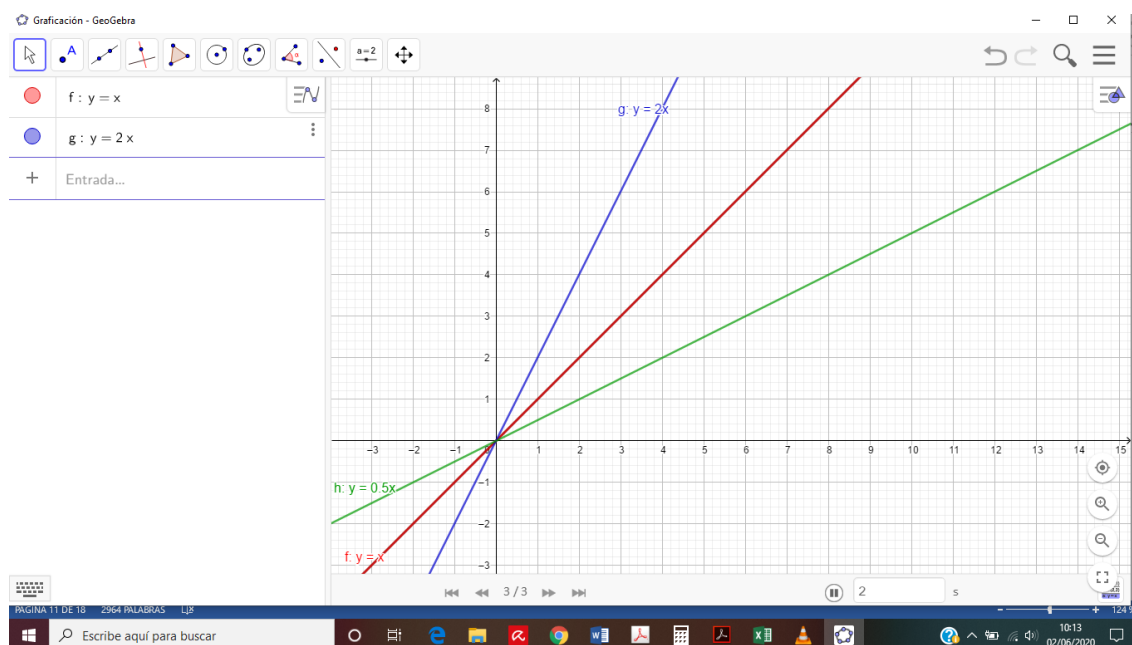
<https://www.anayaeducacion.es>

3. ACTIVIDADES MEDIANTE USO DE LAS TIC

A continuación, en el aula informática, y con el objetivo de que conozcáis una de las muchas aplicaciones que tiene el uso de las TIC, dedicaremos esta sesión a representar mediante el programa matemático Geogebra, algunos tipos de problemas de la Unidad Didáctica: **Funciones Lineales y Cuadráticas** que ya se han resuelto en una sesión de clase pasada en cuaderno de clase, utilizando lápiz, goma, calculadora y escuadra y cartabón.

3.1 Ejemplos de representación de **funciones de proporcionalidad directa**: $y = m \cdot x$

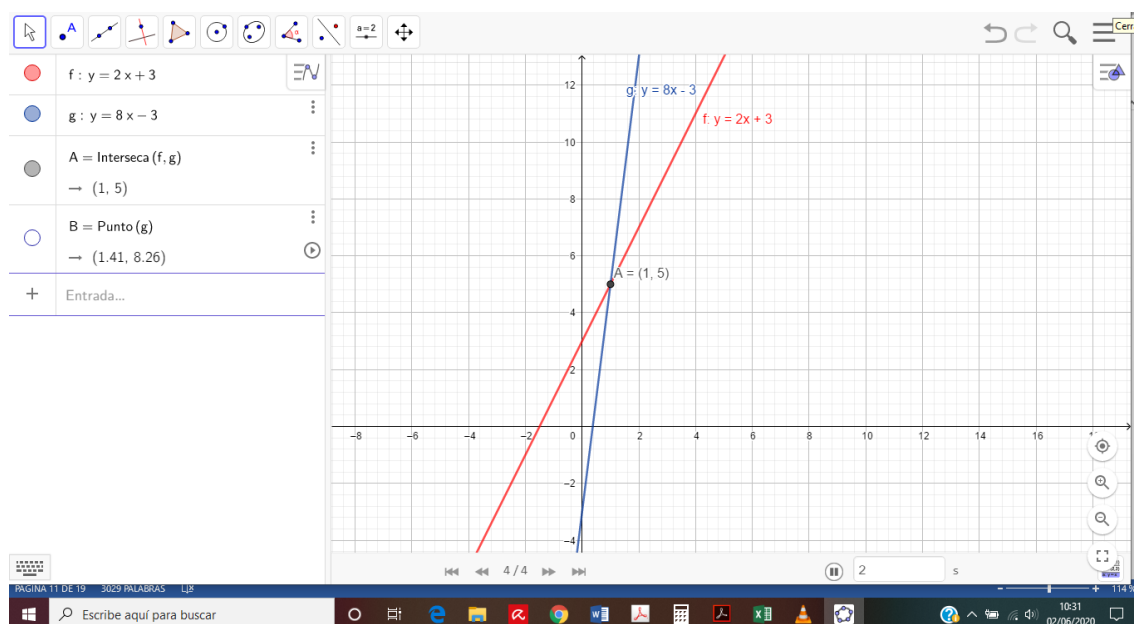
a) $y = x$; b) $y = 2 \cdot x$; c) $y = 1/2 \cdot x$



Elaboración propia

3.2 Ejemplos de representación de **funciones afines**: $y = m \cdot x + n$

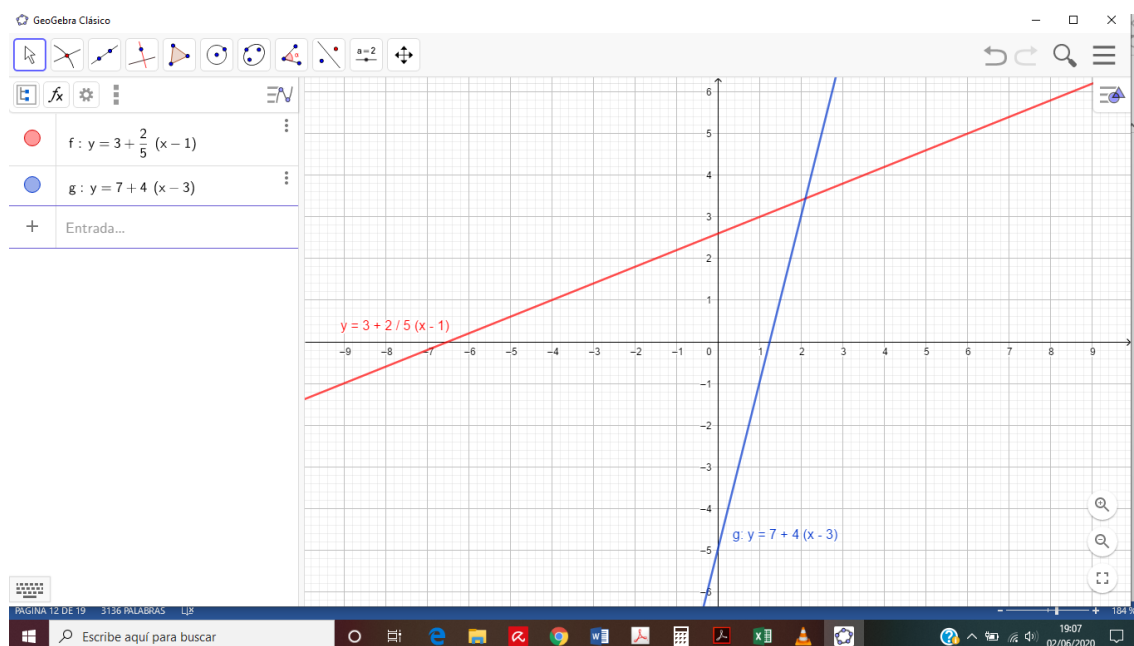
a) $y = 2x + 3$; b) $y = 8x - 3$



Elaboración propia

3.3 Ejemplos de representación de **ecuaciones punto pendiente**: $y = y_0 + m + (x - x_0)$

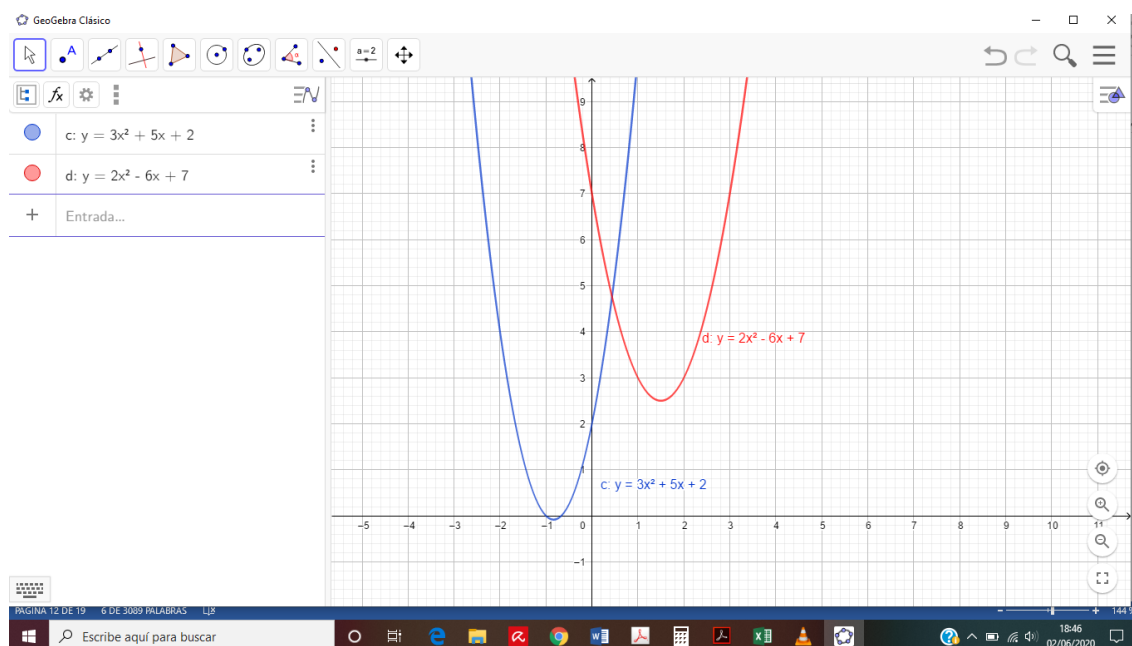
a) $y = 2x + 3$; b) $y = 8x - 3$



Elaboración propia

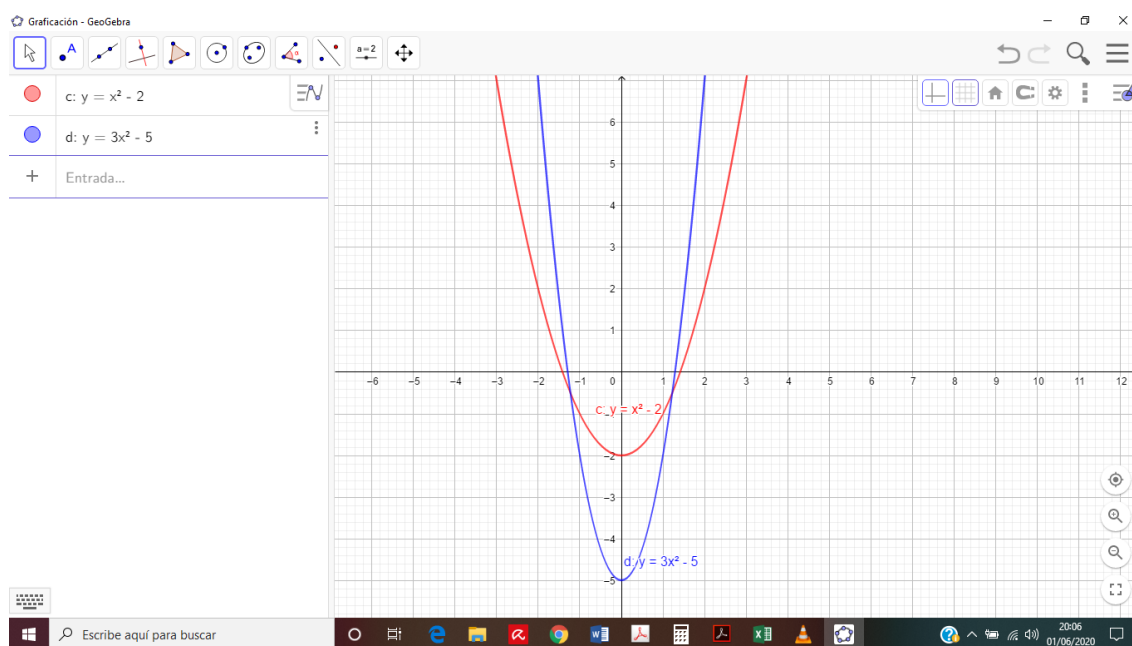
3.4 Ejemplos de representación de **funciones cuadráticas completas**: $y = \pm ax^2 \pm bx \pm c$

a) $y = 3x^2 + 5x + 2$; b) $y = 2x^2 - 6x + 7$



3.5 Ejemplos de representación de **funciones cuadráticas incompletas**: $y = \pm ax^2 \pm c$

a) $y = x^2 - 2$; b) $y = 3x^2 - 3$



4. ACTIVIDADES DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA (TRABAJO COOPERATIVO).

El objetivo de esta tarea es dar a conocer, por medio de una sesión de clase diferente y más atrayente para los niños/as, del resto de las programadas en la unidad didáctica de funciones lineales y cuadráticas, la aplicación práctica que tienen los conocimientos adquiridos sobre las funciones lineales en un contexto real, investigando y resolviendo una actividad consistente en el desarrollo de un modelo matemático propuesto por el profesor, trabajando en grupos de 2 o 3 alumnos.

ACTIVIDAD Nº1: DESARROLLAR UN MODELO MATEMÁTICO EN UN CONTEXTO REAL: **PARQUÍMETRO**

1. Presentación de la tarea: (Tiempo 5 minutos)

El docente introduce brevemente la la tarea a los alumnos, explicándoles que es una actividad de investigación útil sobre los conceptos que se han impartido en clase y de resolución grupal.

2. Explicación de la actividad: (Tiempo 45 minutos)

2.1 Reglas

- Leer despacio y de forma individual el enunciado.
- Intentar comprender e identificar todas las variables que intervienen en la modelización del problema.
- Obtener el resultado y presentarlo en limpio en una hoja o dos del cuaderno de clase firmado por todos los miembros del grupo.
- Trabajad en grupo de forma estructurada y coordinada.
- Podéis usar la calculadora científica, lápiz, goma de borrar lápices o bolígrafos de varios colores.

2.2 Enunciado

En una población se tiene implantado la (O.R.A.) Ordenanza de Regulación de Aparcamiento. Esta norma nos dice que debemos pagar una cierta cantidad por cada minuto que el vehículo esté aparcado. Alex introduce en el 1.35 euros en el parquímetro.

Se pide:

- Encontrar un modelo matemático (una función lineal) que relacione el precio con el tiempo.
- Representar dicha función en un sistema de ejes coordenados.
- ¿Cuánto se debe pagar por estacionar el vehículo durante 55 minutos?
- ¿Cuánto tiempo podré dejar el vehículo aparcado si pago 2.40 euros?

3. Exposición de resultados y conclusiones: (Tiempo 10 minutos)

Los equipos expondrán sus resultados al resto de grupo y al profesor, intentando abrir un espacio de debate y discusión, contrastando otras posibles soluciones (si las hubiere).

4. La solución será expuesta por el docente, en el caso de que los alumnos no consigan proponer ningún modelo matemático del problema.

En una ciudad tienen implantada la Ordenanza de Regulación de Aparcamiento (O.R.A.). La norma indica que se debe pagar cierta cantidad por cada minuto y que no hay un mínimo.

Juan pone 1,35€ y el parquímetro indica que dispone de 45 minutos. Sara con 0,84€ tiene 28 minutos.



Halla la ecuación que relaciona el precio con el tiempo y dibújala.
¿Cuánto hay que pagar por un aparcamiento de 55 minutos?
Si pago 2,40€ ¿de cuánto tiempo dispongo?

Elegimos las escalas de manera que el tiempo está en minutos y el precio en céntimos de euro.

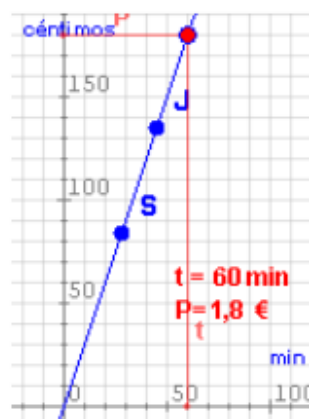
Pasa por los puntos
 $J = (45, 135)$ $S = (28, 84)$

Como pasa por el origen es lineal y la pendiente es $m = 135/45 = 3$

La ecuación es $y = 3x$

$x = 55 \text{ min} \Rightarrow y = 3 \cdot 55 = 165 \text{ c} = 1,65€$

$y = 2,40€ \Rightarrow x = 240/3 = 80 \text{ min}$



<https://proyectodescartes.org>

ACTIVIDAD Nº2: DESARROLLAR UN MODELO MATEMÁTICO EN UN CONTEXTO REAL:

“FINAL DE UNA ETAPA CICLISTA”

1. Presentación de la tarea: (Tiempo 5 minutos)

El docente introduce brevemente la la tarea a los alumnos, explicándoles que es una actividad de investigación útil sobre los conceptos que se han impartido en clase y de resolución grupal.

2. Explicación de la actividad : (Tiempo 45 minutos)

2.1 Reglas

- Leer despacio y de forma individual el enunciado.
- Intentar comprender e identificar todas las variables que intervienen en la modelización del problema.
- Obtener el resultado y presentarlo en limpio en una hoja o dos del cuaderno de clase firmado por todos los miembros del grupo.
- Trabajad en grupo de forma estructurada y coordinada.
- Podéis usar la calculadora científica, lápiz, goma de borrar lápices o bolígrafos de varios colores.

2.2 Enunciado

En una etapa ciclista cuya meta está situada en el alto de un montaña, un corredor escapado se encuentra a una distancia de la misma a 8 km y su ritmo de marcha es de 10 km/h. Un grupo perseguidor está a 10 km del final de la etapa y su ritmo de pedaleo es de 15 km/h. Se pide:

- Encontrar un modelo matemático (una función lineal) que relacione el tiempo (horas) transcurrido desde ahora y la distancia recorrida (km) desde este momento.
- Representar en un sistema de ejes coordenados las funciones que describen:
 - El ciclista escapado (color rojo)
 - El grupo perseguidor (color azul)
 - La meta (color verde)
- ¿Alcanzará el grupo perseguidor al escapado si se mantienen las velocidades?.
- En caso afirmativo, determinar a qué distancia de la meta se producirá el alcance
- En cuánto tiempo será alcanzado por el grupo?

3. Exposición de resultados y conclusiones: (Tiempo 10 minutos)

Los equipos expondrán sus resultados al resto de grupo y al profesor, intentando abrir

un espacio de debate y discusión, contrastando otras posibles soluciones (si las hubiere).

4. La solución será expuesta por el docente, en el caso de que los alumnos no consigan proponer ningún modelo matemático del problema.

Final de etapa.

En una etapa con final en alto un escapado está a 8 km de la meta y circula a 10 km/h. Un grupo perseguidor se encuentra a 10 km del final corriendo a 15 km/h. ¿Alcanzarán al escapado si mantienen las velocidades? En caso afirmativo ¿cuánto tardarán y a qué distancia de la meta?



Llamemos x al tiempo transcurrido desde ahora (medido en horas) e y a la distancia recorrida desde este momento (medida en km). El escapado está 2 km por delante, luego la función que describe el desplazamiento con respecto al tiempo en cada caso es:

Escapado: $y = 10x + 2$

Grupo perseguidor: $y = 15x$

Meta: $y = 10$

Sus gráficas según el color son:

Lo alcanzan en 0,4 horas (24 minutos)
a 4 km de la meta.



<https://proyectodescartes.org>

5. ACTIVIDAD: TRABAJO MEDIANTE UNA WEBQUEST

Una de las sesiones que se han programado para desarrollar las actividades de la unidad didáctica de **Funciones Lineales y Cuadráticas**, una vez que se han explicado todos los contenidos de la misma, es aprender a utilizar otra aplicación de las TIC que fomenta el aprendizaje cooperativo, despertando el interés y colaborando a comprender mejor la importancia de las funciones y sus múltiples aplicaciones en casi todos los campos de conocimiento. Es una herramienta muy útil y atractiva: La WebQuest.

La actividad con la WebQuest consistirá en la construcción de un escenario a base de Informaciones que los estudiantes deben buscar en distintos sitios webs, dirigidos por el profesor o profesora sobre aspectos relacionados con las funciones y sus aplicaciones. Deberán encontrar fotografías, dibujos, figuras reales como edificios, puentes, mobiliario urbano, cuyas geometrías o parte de ellas, se puedan interpretar como funciones lineales o cuadráticas. Se persigue que los alumnos pongan a prueba sus conocimientos teóricos las competencias adquiridas y los extrapolen a situaciones reales para darle más un sentido más lógico y práctico a lo que han estudiado.

SESIÓN WEBQUEST



BÚSQUEDA DE INFORMACIÓN

Utilizando la Web como recurso para la búsqueda de información, investiga en ella y pon a prueba con tu grupo, en trabajo cooperativo, vuestros conocimientos para resolver una serie de tareas y problemas. Deberéis buscar dos problemas de cada uno de los contenidos de funciones lineales y cuadráticas que se han visto en clase y que se indican en el cuadro de abajo, salvo el primero que es una tarea sobre la historia de las funciones. Para ello, en el cuadro de la derecha, se os proponen un serie de enlaces de interés para que os puedan orientar en su resolución.






ACTIVIDADES/TAREAS/EJERCICIOS

- 1- HISTORIA DE LAS FUNCIONES: ORIGEN
- 2- FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD $y = m \cdot x$
- 3- FUNCIÓN AFÍN $y = m \cdot x + n$
- 4- ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIDO UN PUNTO Y SU PENDIENTE-
- 5- RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS
- 6- APLICACIONES DE PROBLEMAS DE FUNCIONES LINEALES EN LA VIDA REAL
- 7- APLICACIONES DE PROBLEMAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN LA VIDA REAL-

ENLACES DE INTERÉS:

https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica
<https://www.youtube.com/watch?v=ACErHP3qzmA>
<https://www.youtube.com/watch?v=SVeeM6qffTc>
<https://www.youtube.com/watch?v=KEENQd0B5dI>
https://www.youtube.com/watch?v=5cAz9M2_18Q
<https://www.youtube.com/watch?v=44z-uDSIR-0>
<https://www.youtube.com/watch?v=7av0wVoARIA>
<https://www.youtube.com/watch?v=ZpNFvVcjVpQ>
<https://www.youtube.com/watch?v=udwq50v7ECs>
https://www.youtube.com/watch?v=FA6ZMym_N5Y
<https://www.youtube.com/watch?v=fmejEUm5vil&list=RDt8vIrBvf67w&index=10>

RECURSOS WEB

Actividad sobre Webquest. Fuente: Ruiz Medina, .I (2019). Elaboración propia

6. PROPUESTA DE EXAMEN

OBJETIVOS

- Evaluar todos los conceptos trabajados y aprendidos en la unidad.

CONTENIDOS

- Procedimentales: realización del examen y resolución de sus cuestiones y problemas.

COMPETENCIAS

- Competencia comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.

METODOLOGÍA

- Realización de una prueba escrita para evaluar los conocimientos adquiridos.

MATERIALES Y RECURSOS

- Humanos: profesor/a y los alumnos y alumnas de 3.º de la ESO.
- Materiales: Hoja de examen y bolígrafo.
- Espaciales: aula ordinaria.

PRUEBA ESCRITA: **2ª EVALUACIÓN****CURSO: 3ºA ESO**ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LA ENSEÑANZAS ACADÉMICAS**Unidad Didáctica: **FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS****NOMBRE:****APELLIDOS:**

1. Hallar la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-2, 3) y B(-5, -6).

[1 punto].

2. Dadas las rectas $y = 3x - 7$; $y = -2x - 2$:

a) Hallar el punto de corte de ambas. **[1 punto]**

b) Hallar los puntos donde cada una de las dos rectas cortan tanto al eje X como al eje Y.

[1 punto]

c) Representálas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas utilizando los puntos del apartado b) y señala el punto donde se cortan ambas y que has hallado en el apartado a).

[1 punto].

3. Dada la función cuadrática $y = x^2 - 3x - 4$ y siguiendo el método de los “tres pasos”:

a) Obtener las coordenadas del vértice. **[1 punto]**

b) Determinar los puntos próximos al vértice. **[1 punto]**

c) Encontrar los puntos de corte con los ejes.

d) Representarla gráficamente utilizando los datos obtenidos en los apartados anteriores. **[1 punto]**

4. Ejercicio de modelización (en un contexto real):

En una carrera de motos, cuya meta está situada en la parte más alta de un circuito trazado en la subida a una montaña, un corredor escapado se encuentra a una distancia de la misma de 20 km y su ritmo de marcha es de 80 km/h. Un grupo perseguidor está a 22 km del final de la etapa y su ritmo de marcha es de 100 km/h.

Datos: Si el modelo matemático (una función lineal) que relaciona el tiempo (horas) transcurrido desde ahora y la distancia recorrida (km) desde este momento es el siguiente:

x = Tiempo recorrido desde ahora (horas)

y = Distancia recorrida desde este momento (Km).

El corredor escapado va 2 km por delante, por lo que la función que describe el desplazamiento respecto al tiempo es, en cada caso:

- Corredor escapado $y = 80x + 2$
- Grupo perseguidor $y = 100x$
- Meta $y = 22$

Se pide:

Representar en un sistema de ejes coordenados las funciones que describen: **[2 puntos]**

a) El corredor escapado (color azul)

b) El grupo perseguidor (color verde)

c) La meta (color rojo)

d) ¿Alcanzará el grupo perseguidor al escapado si se mantienen las velocidades?.

e) En caso afirmativo, determinar a qué distancia de la meta se producirá el alcance

f) ¿En cuánto tiempo será alcanzado por el grupo?

5. Dada la función $y = x^2 + x - 6$, se pide:

a) Completar la siguiente tabla de valores. [0.5 puntos]

X	- 1/2	- 1	- 2	- 3	- 4	0	1	2	3
Y									

b) Representarla gráficamente. [0.5 puntos]

Nota: Los *criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables* serán los establecidos en el RD 1105/2014 (página 394 del BOE nº 3, Sábado 3 de enero de 2015).

Bloque 4: Funciones

Criterios de evaluación

1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.
3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.

Estándares de aprendizaje evaluables

- 1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
- 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.
- 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
- 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.
- 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.
- 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
- 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.
- 3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.
- 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

7. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

7.1 RÚBRICA Nº 1: EVALUACIÓN DEL TRABAJO INDIVIDUAL: INTERVENCIONES EN CLASE MEDIANTE EXPOSICIÓN ORAL

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Pronunciación y entonación	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	%	
Volumen y contacto visual	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes y algunas oyentes del grupo.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	%	
Recursos y apoyos	Utiliza diversos apoyos visuales y referencias al trabajo realizado a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	Utiliza algunos apoyos visuales a lo largo de su exposición y referencias al trabajo realizado que refuerzan el contenido.	Utiliza pocos apoyos visuales a lo largo de su exposición que refuerzan el contenido.	No utiliza apoyos visuales en su exposición o apenas lo hace.	%	
Contenido	Demuestra un completo dominio del tema tratado, destacando claramente los aspectos importantes, exponiéndolo de manera clara y correcta, y utilizando un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo, respondiendo adecuadamente a las preguntas del grupo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo, no siendo certero en las respuestas a las preguntas del grupo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	%	
Cuestiones formales y secuencia	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo adecuado.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y concluyéndola correctamente y en tiempo aproximado.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo establecido.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse al tiempo y manifestar interés y control emocional.	%	
VALORACIÓN FINAL						

<https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable>

7.2 RÚBRICA Nº 2: EVALUACIÓN DE TRABAJO INDIVIDUAL: EXPOSICIÓN ESCRITA

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	El documento (cuaderno, cartel, informe, trabajo...) respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	%	
Vocabulario empleado	El vocabulario es rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	El vocabulario es algo variado, con palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	%	
Signos de puntuación	Utiliza correctamente los signos de puntuación (comas, puntos y signos de interrogación o exclamación, etc.).	Utiliza correctamente los signos de puntuación, aunque presenta ocasionalmente algún error.	Utiliza los signos de puntuación, pero no siempre de forma correcta.	Utiliza muy poco los signos de puntuación o lo hace de manera incorrecta.	%	
Corrección ortográfica	El texto está escrito correctamente, sin errores ortográficos.	El texto está escrito con un error ortográfico.	El texto presenta dos o tres errores ortográficos.	El texto presenta un volumen importante de errores ortográficos.	%	
Estructura del texto	Establece planificación previa y respeta la estructura del texto planteado (introducción, desarrollo, conclusión o desenlace).	Establece planificación previa y respeta la estructura del texto planteado, con algún error ocasional.	Se respeta la estructura del texto solicitado, aunque tiene varios errores.	Se expone el texto sin respetar la estructura del texto solicitado.	%	
Contenido	Demuestra un gran conocimiento del tema tratado, ajustándose a la actividad encomendada, y de acuerdo con las fuentes utilizadas.	Demuestra un buen conocimiento del tema tratado, ajustándose a la actividad encomendada y de acuerdo con las fuentes utilizadas.	Demuestra un conocimiento parcial del tema tratado, de acuerdo con las fuentes utilizadas.	Demuestra poco conocimiento del tema tratado y presenta dificultades para consultar las fuentes propuestas.	%	
Originalidad y creatividad	El documento se presenta con aportaciones originales, ilustraciones, gráficos o mapas conceptuales, etc.	El documento se presenta con algunas aportaciones originales, ilustraciones, gráficos o mapas conceptuales, etc.	El documento se presenta con pocas aportaciones originales, ilustraciones, gráficos o mapas conceptuales, etc.	El documento se presenta sin aportaciones por parte del alumno o alumna.	%	
VALORACIÓN FINAL						

<https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable>

7.3 RÚBRICA Nº 3: EVALUACIÓN EN LA PARTICIPACIÓN EN TRABAJOS COOPERATIVOS

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Planificación del trabajo	Realiza un uso adecuado de los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles de acuerdo con el procedimiento establecido por el grupo, ajustándose al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con cierta dificultad para ajustarse al plazo previsto.	Usa los materiales y los recursos disponibles con dificultad y sin ajustarse al plazo previsto.	%	
Responsabilidad	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, valorando especialmente el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades, con alguna dificultad para valorar el esfuerzo individual y colectivo.	Elude sus responsabilidades y tiene dificultades para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	%	
Participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	%	
Habilidades sociales	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen a la cohesión.	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona con dificultades, necesitando ayuda para mantener actitudes respetuosas.	%	
Generación y presentación del producto	Contribuye de manera activa a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, responsabilizándose de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con alguna dificultad para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	Contribuye algo a la consecución de los logros en el trabajo grupal, con dificultades para responsabilizarse de su aportación en la presentación del producto conseguido.	%	
VALORACIÓN FINAL						

<https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable>

7.4 RÚBRICA Nº 4: EVALUACIÓN DE PRUEBAS ORALES Y ESCRITAS

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración	
					Oral	Escrito	
Presentación (escrita)	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes legibilidad, limpieza y orden).	-	%	
Corrección ortográfica (escrita)	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su edad.	-	%	
Expresión oral	Expone con un buen nivel de pronunciación y se expresa con confianza y seguridad.	Expone con un buen nivel de pronunciación y se expresa con alguna pausa o titubeo.	Expone nivel de pronunciación aceptable y se expresa con titubeos.	Expone con un nivel bajo de pronunciación y se expresa con muletillas, desconfianza y falta de fluidez.	%	-	
Vocabulario empleado	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema. Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque palabras específicas del tema. Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de forma coherente.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema. Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escrito de con algún error.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo. Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa oralmente o por escribir) con diversos errores.	%	%	
Contenido					%	%	
VALORACIÓN FINAL							

<https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable>

7.5 RÚBRICA Nº 5: EVALUACIÓN DE BÚSQUEDA Y EL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Búsqueda de la información	Utiliza correctamente los recursos y/o medios a su alcance para buscar toda la información.	Utiliza algún recurso y/o medio a su alcance para buscar toda la información.	Utiliza algún recurso y/o medio a su alcance para buscar parte de la información.	Utiliza algún recurso y/o medio para buscar la información con la ayuda del docente o de otro alumno/a.	%	
Obtención de la información	Obtiene todos los datos necesarios para dar respuesta a la actividad, ajustándose a los tiempos establecidos.	Obtiene bastantes datos para dar respuesta a la actividad, ajustándose a los tiempos establecidos.	Obtiene algunos datos para dar respuesta a la actividad, con dificultades para ajustarse a los tiempos establecidos.	Obtiene algunos datos con la ayuda del docente o de otro alumno/a sin ajustarse a los tiempos establecidos.	%	
Tratamiento y análisis de la información	Analiza la información obtenida de las fuentes consultadas, extrayéndola de manera rigurosa y ordenándola sistemáticamente.	Analiza la información obtenida de las fuentes consultadas, extrayéndola y ordenándola correctamente.	Analiza parte de la información obtenida de las fuentes consultadas, ordenándola de manera adecuada.	Realiza con apoyo alguna de las tareas correspondientes al tratamiento y análisis de la información.	%	
Interpretación de los resultados	Realiza valoraciones y/o emite juicios sobre la información obtenida de un modo riguroso. Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado de manera clara, rigurosa y coherente respecto a los datos obtenidos.	Realiza valoraciones y/o emite juicios sobre la información obtenida. Expone/presenta los principales hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado.	Realiza alguna interpretación sobre la información obtenida. Expone/presenta algunos hallazgos de la búsqueda y tratamiento de la información realizado.	Realiza alguna interpretación con la ayuda del docente o de otro alumno/a. Expone con mucha dificultad alguna de las informaciones obtenidas.	%	
Exposición de conclusiones					%	
VALORACIÓN FINAL						

<https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable>

7.6 RÚBRICA Nº6: EVALUACIÓN DE HÁBITOS PERSONALES Y ACTITUD

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Autonomía y confianza	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades de manera habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades con alguna ayuda.	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	%	
Creatividad	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo y en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza estrategias creativas en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza alguna estrategia creativa en el análisis del trabajo o en el planteamiento de propuestas de actuación y/o resolución.	Utiliza alguna estrategia de manera orientada y propone alguna iniciativa creativa con ayuda.	%	
Gestión emocional	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones, no permitiéndole resolver sus situaciones y problemas.	%	
Actitud respetuosa y responsable	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	%	
Corrección en la presentación	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	%	
Conclusión del trabajo	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos estimados.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.	%	
VALORACIÓN FINAL						

<https://www.recursosep.com/2017/06/18/rubricas-para-la-evaluacion-del-alumnado-version-editable>

7.7 RÚBRICA Nº 7: EVALUACIÓN PERSONALIZADA DEL ALUMNO/A

UNIDAD DIDÁCTICA: FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS							Evaluación competencias clave						
ALUMNO/A :			CURSO: 3º ESO										
Criterios Evaluación	Estándares aprendizaje evaluables	Comp. clave	Ponderación (%)				CMCT	CCL	CEC	CD	SIEP	CSC	CAA
			ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4							
			50	20	15	15							
CE 1.1		CMCT, CCL											
CE 1.2	EA 1.2.1	CMCT, CAA											
	EA 1.2.2												
	EA 1.2.3												
CE 1.4	EA. 1.4.1	CMCT, CAA											
	EA 1.4.2												
	EA 1.4.3												
CE 1.6	EA 1.6.1	CMCT,SIEP CD											
CE 1.8	EA 1.8.1	CMCT, CAA											
	EA1.8.2												
	EA 1.8.3												
CE 1.9	EA 1.9.1	CMCT,											
CE 1.10	EA 1.10.1	CMCT, CAA, SIEP											
CE 1.11	EA 1.11.1	CMCT,CD											
CE 1.12	EA 1.12.1	CMCT,CAA											
CE 4.1	EA 4.1.1	CMCT,CD											
CE 4.2	EA 4.2.1	CMCT,CAA											
CE 4.3	EA 4.3.1	CMCT,CD											
CE 4.4	EA 4.4.1	CMCT,CAA											
CE 4.5	EA 4.5.1	CMCT,CAA, CD											
CE 4.6	EA 4.6.1	CMCT, CAA											
CE 4.3	EA 4.	CMCT,CD											
CE 4.4	EA	CMCT, CAA											
VALORACIÓN MEDIA													
CALIFICACIÓN TOTAL													

7.8 CRITERIOS DE EVALUACIÓN ASOCIADOS A LOS BLOQUES 1 Y 4.

A continuación, exponemos en las siguientes tablas, los criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y las competencias clave asociadas a éstos, conforme lo establecido. En esta unidad didáctica se desarrollan los **Bloques 1: “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”** y el **Bloque 4: “Funciones”**.

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LA ENSEÑANZAS ACADÉMICAS. CURSO: 3º ESO (S/ RD 1105/2014 de 26 de diciembre)		
CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas.	CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.	EA.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema aplicando el uso del lenguaje matemático acorde a su etapa educativa. CMCT, CCL
1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación de problemas, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas, identificando los datos, relacionándolos entre ellos y entendiendo el contexto donde se desarrolla el problema. EA.1.2.2 Entiende lo que se requiere en el enunciado del problema y es capaz de detectar las soluciones que éste puede tener. EA.1.2.3. Realiza una valoración del problema y es capaz de utilizar estrategias inductivas o deductivas realizando una validación de los resultados obtenidos. CMCT, CAA
1.3 Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	EA.1.4.1. Es capaz de indagar en el resultado del problema ya resuelto, formulando otras maneras de resolución y razonando el significado del resultado obtenido, analizando su coherencia. EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas a partir de los resueltos, con nuevas aportaciones y proponiendo nuevos casos de planteamientos. CMCT CAA

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LA ENSEÑANZAS ACADÉMICAS. CURSO: 3º ESO (S/ RD 1105/2014 de 26 de diciembre)		
CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN (CE)	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES (EA)
1.5 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	EA.1.6.1. Identifica elementos o situaciones en la realidad que tienen posible relación con problemas matemáticos. Realiza su modelización. EA.1.6.2. Establece vínculos entre problemas de su vida cotidiana y el mundo matemático, interpretándolo y aportando los conocimientos matemáticos necesarios. CMCT CAA CSC SIEP
	CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.	EA.1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. CMCT,CAA
1.6 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	CE.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	EA.1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, planificación del proceso y aceptación de la crítica razonada. EA.1.8.2. Se plantea la resolución de retos con la precisión de su nivel educativo y a la dificultad de la situación. EA.1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. EA.1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, plantea y se encuentra en una búsqueda de respuestas adecuadas, tanto para el aprendizaje de conceptos como para la obtención de resultados en problemas. CMCT, CAA

	CE.1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	EA.1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización acorde a sus consecuencias y conveniencias de sencillez y utilidad. CMCT CAA CSC SIEP
--	--	---

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LA ENSEÑANZAS ACADÉMICAS. CURSO: 3º ESO (S/ RD 1105/2014 de 26 de diciembre)		
CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN (CE)	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES (EA)
	CE.1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	EA.1.10.1. Reflexiona sobre la solución de los problemas abordados y su proceso de resolución, recopilando las ideas claves para su aplicación en situaciones futuras similares.CMCT, CAA,SIEP
1.7 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:		
b) Elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos;	CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	EA. 1.11.1. Utiliza los medios tecnológicos adecuados para interpretar los conceptos trigonométricos, aumentando la facilidad de su comprensión.
c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;		EA.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para identificar y asociar elementos del entorno real con las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas, extrayendo información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. EA.1.11.3. Mediante la utilización de medios tecnológicos, elabora la representación gráfica del problema para identificar los datos que se requieren.CMCT, CAA,CD
a) Recogida ordenada y la organización de datos;	CE.1.12.Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios, tras un proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante.

e) Elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos;	en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	EA.1.12.2. Utiliza los recursos creados para cimentar la base de su aprendizaje y poder utilizarla durante las distintas sesiones de clase.CCL,CMCT,CAA,CD EA.1.12.3. Mediante los medios tecnológicos estructura adecuadamente sus conocimientos, mejorando su proceso de aprendizaje. Con los resultados obtenidos, es capaz de analizar sus puntos fuertes y débiles, focalizando y autoevaluándose para establecer pautas de mejora.
f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.		EA.1.12.4. Mediante los medios tecnológicos estructura adecuadamente sus conocimientos, mejorando su proceso de aprendizaje. Con los resultados obtenidos, es capaz de analizar sus puntos fuertes y débiles, focalizando y autoevaluándose para establecer pautas de mejora.

MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LA ENSEÑANZAS ACADÉMICAS. CURSO: 3º ESO (S/ RD 1105/2014 de 26 de diciembre)		
CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES

4.1 Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. 4.2 Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. 4.3 Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. 4.4 Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	CE 4.1 Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. CE 4.2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. CE 4.3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	EA.4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. EA 4.1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. EA 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. EA 4.1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. EA 4.2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente . EA 4.2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. EA 4.2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. EA 4.3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente. EA 4.3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario CMCT, CAA
--	--	---

ANEXO II

ÍNDICE DE FIGURAS**PÁGINA**

Figura 1. Distribución esquemática de los contenidos de la U.D. 8. (Colera et al., 2015 p.112).....	16
Figura 2. Distribución esquemática de los contenidos de la U.D. 9. (Colera et al., 2015 p.126).....	17
Figura 3. Ejemplos de funciones de proporcionalidad. (Colera et al., 2015 p.164)....	18
Figura 4. Ejemplos de problemas con funciones de lineales. (Colera et al., 2015 p.169).....	19
Figura 5. Ejemplos de aplicaciones con funciones lineales. Problemas de móviles. (Colera et al., 2015 p.170).....	20
Figura 6. Ejemplos de funciones cuadráticas. (Colera et al., 2015 p.171).....	21
Figura 7. Resolución de problema de funciones cuadráticas paso a paso. (Colera et al., 2015 p.172).....	22
Figura 8. Esquema de cálculo de la abcisa del vértice en una función cuadrática. (Colera et al., 2015 p.172).....	22
Figura 9. Ejercicio de funciones lineales del libro de texto de la editorial Santillana.(Grence et al., 2015 p 247).....	26
Figura 10. Actividad de trabajo cooperativo del libro de texto de la editorial Santillana.(Grence et al., 2015 p 260).....	27
Figura 11. Actividad propuesta por PISA del libro de texto de la editorial Santillana. (Grence et al., 2015 p 261).....	28
Figura 12. Funciones par, impar y simétricas. www.joseluislorente.es	33
Figura 13. Ejemplo de función periódica. ww.joseluislorente.es	34
Figura 14. Ejemplo de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos Relativos. www.joseluislorente.es	35
Figura 15. Concavidad, convexidad y punto de inflexión. www.joseluislorente.es	36
Figura 16. Reprerentación gráfica de las funciones del ejemplo a). www.joseluislorente.es	39
Figura 17. Reprerentación gráfica de las funciones del ejemplo b). www.joseluislorente.es	40
Figura 18. Transformaciónde funciones. Representación gráfica. www.joseluislorente.es	41

Figura 19. Transformación de funciones. Representación gráfica. <i>www.joseluislorente.es</i>	41
Figura 20. Ejemplos de funciones a trozos. <i>www.joseluislorente.es</i>	43
Figura 21. Ejemplo de función cuadrática representada con el programa GeoGebra. <i>Elaboración propia</i>	44
Figura 22. Ejemplo de hipérbola equilátera representada con el programa GeoGebra. <i>Elaboración propia</i>	45
Figura 23. Ejemplo de función raíz cuadrada representada con el programa GeoGebra. <i>Elaboración propia</i>	46
Figura 24. Cambios experimentados en la educación debidos a las TIC. <i>Reboloso, 2000. Adaptado por Castro, Guzmán y Casado, 2007</i>	57
Figura 25. Esquema abreviado de las partes de un Webquest. <i>http://www.isabelperez.com</i>	59
Figura 26. Plano de situación IES Az-Zait. <i>Fuente: Google Maps</i>	64
Figura 27. Plano de localización IES Az-Zait. <i>Fuente: Google Maps</i>	64

ÍNDICE DE TABLAS**PÁGINA**

Tabla 1. Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas. <i>R.D. 1105/2014 de 26 de diciembre.....</i>	9
Tabla 2. Bloque 4: Funciones. <i>R.D. 1105/2014 de 26 de diciembre.....</i>	11
Tabla 3. Cuadro de competencias desarrolladas en los Bloques 1 y 4. <i>Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....</i>	11
Tabla 4. Bloque 1: Criterios de evaluación asociados a competencia/s clave. <i>Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....</i>	12
Tabla 5. Bloque 4: Criterios de evaluación asociados a competencia/s clave. <i>Orden de 14 de julio de 2016.....</i>	12
Tabla 6. Principios básicos del proceso enseñanza-aprendizaje. Grupo Anaya. <i>Elaboración propia.....</i>	15
Tabla 7. Relación de contenidos de la U.D. 11 del libro de texto de la editorial Santillana. <i>Elaboración propia.....</i>	24
Tabla 8. Relación de contenidos de la U.D. 12 del libro de texto de la editorial Santillana. <i>Elaboración propia.....</i>	25
Tabla 9: Ventajas e inconvenientes del uso de las TIC en el aprendizaje. <i>Palomar Sánchez, 2009.....</i>	57
Tabla 10. Ventajas del uso de las TIC para el profesor. <i>Sosa (2013).....</i>	60
Tabla 11. Ventajas del uso de las TIC para el alumno. <i>Sosa (2013).....</i>	60
Tabla 12. Inconvenientes del uso de las TIC. <i>Sosa (2013).....</i>	60
Tabla 13. Relación entre objetivos de etapa con los objetivos del área de matemáticas. <i>Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre y Orden 14 de Julio de 2016. Elaboración propia.....</i>	69
Tabla 14. Contenido de la unidad didáctica. <i>Elaboración propia.....</i>	72
Tabla 15. Contenido de la unidad didáctica previa. <i>Elaboración propia.....</i>	73
Tabla 16. Clasificación de las actividades según su tipología y objetivo para las cuales han sido diseñadas. <i>Elaboración propia.....</i>	77

Tabla 17. Unidades didácticas pertenecientes a la segunda evaluación
junto a la de *funciones*. *Elaboración propia*.....80

Tabla 18. Criterios de calificación de evaluación. *Elaboración propia*.....92