



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Alumno/a: Moreno Montes, María

Tutor/a: Prof. D. Lorenzo Luque Cañada

Dpto: I.E.S. Az-Zait

Junio, 2020

ÍNDICE

Resumen	1
Abstract	2
1. Introducción.....	3
2. Objetivos.....	5
3. Fundamentación Curricular	6
3.1. Análisis del currículo.....	6
3.2. Análisis de libros de texto	12
4. Fundamentación Epistemológica: Desarrollo de un tema de oposición.....	19
4.1. Introducción histórica	19
4.2. Nociones básicas de funciones.....	23
4.2.1. Periodicidad.....	24
4.2.2. Puntos de corte con los ejes	25
4.2.3. Simetrías.....	25
4.2.4. Continuidad	26
4.3. Monotonía. Extremos relativos y absolutos	27
4.3.1. Máximo y mínimo absolutos.....	27
4.3.2. Extremos relativos.....	30
4.4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión	35
4.5. Asíntotas.....	38
4.6. Representación gráfica de curvas	40
5. Fundamentación Didáctica: Investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza	43
6. Proyección Didáctica: Elaboración de una Unidad Didáctica	50
6.1. Título	50
6.2. Justificación	50
6.2.1. Justificación curricular.....	50
6.2.2. Justificación social y/o profesional.....	52
6.2.3. Justificación interna	53
6.2.4. Justificación estética	54
6.2.5. Justificación cultural.....	55
6.3. Contextualización del centro y del aula	55
6.4. Objetivos	57

6.4.1. Objetivos generales de etapa.....	57
6.4.2. Objetivos del área de matemáticas.....	58
6.4.3. Relación entre los objetivos generales de etapa y los objetivos generales del área de matemáticas.....	60
6.4.4 Objetivos concretos de la unidad.....	60
6.5. Competencias Clave	61
6.6. Contenidos	64
6.7. Metodología	66
6.8. Actividades y recursos.....	68
6.8.1. Actividades	68
6.8.2. Recursos	70
6.9. Atención a la diversidad	71
6.10. Temporalización	73
6.11. Evaluación	79
6.11.1. Criterios de evaluación.....	80
6.11.2. Criterios de calificación	86
7. Conclusiones	94
8. Referencias Bibliográficas.....	96
9. Referencias Normativas.....	98

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Bloque 1 "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.....	8
Ilustración 2: Bloque 4 "Funciones", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3ºESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.	8
Ilustración 3: Número de centros públicos andaluces que utilizan cada editorial por curso, en centros públicos y privados. Fuente: Del Pino y Estepa (2015:122)	13
Ilustración 4: Editoriales utilizadas en los centros de la provincia de Jaén (públicos y privados-concertados) en el curso 2019/2020. Fuente: https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto . Elaboración propia.	13

Ilustración 5: Tablilla babilónica Plimpton 322. Fuente: https://francis.naukas.com/files/2017/09/Dibujo20170906-plimpton-322-babylonian-clay-tablet-cuneiform-1800-bc-columbia-university.png	20
Ilustración 6: Trabajo de Nicolás de Oresme. Fuente: https://alchetron.com/Nicole-Oresme	22
Ilustración 7: Gráfica de la función seno. Elaboración propia.....	25
Ilustración 8: Gráfica función par. Elaboración propia.....	25
Ilustración 9: Gráfica de una función impar. Elaboración propia.....	26
Ilustración 10: Ejemplo de función continua. Elaboración propia.	26
Ilustración 11: Ejemplo de función con discontinuidades. Elaboración propia.	26
Ilustración 12: Ejemplo de función cóncava. Elaboración propia.	35
Ilustración 13: Ejemplo de función convexa. Elaboración propia.	35
Ilustración 14: Gráfica de la función estudiada. Elaboración propia.	42
Ilustración 15: Función a trozos con diferentes imágenes para un mismo punto del dominio. Fuente: Arce y Ortega (2013:66).....	46
Ilustración 16: Ramas verticales en parábola. Fuente: Arce y Ortega (2013:65).....	46
Ilustración 17: Trazado de asíntotas. Fuente: Arce y Ortega (2013:66).....	47
Ilustración 18: Uso de una escala no proporcionada. Fuente: Arce y Ortega (2013:67).....	47
Ilustración 19: Incoherencia con la propiedad de crecimiento. Fuente: Arce y Ortega (2013:68)	48
Ilustración 20: Forma pronunciada de pico en el vértice de la parábola. Fuente: Arce y Ortega (2013:69)	48
Ilustración 21: Parábola descrita al lanzar una pelota. Fuente: https://www.bbc.com/mundo/noticias/2014/11/141121_tiros_libres_matematicas_fin_de_dv_hr	54
Ilustración 22: Puente Juscelino Kubitschek en Brasilia. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Puente_Juscelino_Kubitschek	54
Ilustración 23: Capilla Bosjes en Sudáfrica. Fuente: https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/868343/capilla-bosjes-steyn-studio	54
Ilustración 24: Fachada I.E.S. Acebuche. Fuente: www.acebuchedigital.blogspot.com	56
Ilustración 25: Ubicación I.E.S. Acebuche (Torredonjimeno). Fuente: Google Maps. Elaboración propia.....	56

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 1. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....	10
Tabla 2: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 4. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....	10
Tabla 3: Competencias adquiridas en los bloques 1 y 4. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....	10
Tabla 4: Comparación de los temas de las editoriales Santillana y Anaya. Fuente: Libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia.....	15
Tabla 5: Contenidos que se presentan en ambas editoriales. Fuente: Libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia.	16
Tabla 6: Contenidos presentes en una editorial pero no en la otra. Fuente: Libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia.....	16
Tabla 7: Correspondencia entre los objetivos generales de etapa y de área. Elaboración propia.....	60
Tabla 8: Contenidos bloque 1. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia.	65
Tabla 9: Contenidos bloque 4. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia.	65
Tabla 10. Recursos de la Unidad Didáctica. Elaboración propia.	71
Tabla 11: Contenidos, criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje de la Unidad Didáctica. Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.....	85
Tabla 12: Criterios de calificación. Fuente: elaboración propia.....	86
Tabla 13: Rúbrica prueba escrita.....	88
Tabla 14: Rúbrica intervenciones en clase.	89
Tabla 15: Rúbrica trabajos en grupo.	91
Tabla 16: Rúbrica actitud personal y trabajo autónomo.....	93

Resumen

A lo largo de este documento, vamos a realizar un Trabajo Fin de Máster (TFM) que nos permitirá obtener el título del Máster cursado durante este año académico: *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*, concretamente, en la especialidad de Matemáticas.

El título del presente trabajo es “Funciones y Gráficas” y en él se introducirán las funciones, se interpretarán las gráficas y se tratará la representación de funciones mediante gráficas, conectando así ambos conceptos.

Este TFM se divide en dos bloques.

En un primer bloque encontramos tres partes: la fundamentación curricular, en la que se realiza un análisis del currículo vigente y de dos libros de texto; la fundamentación epistemológica, en la que se desarrolla un tema del temario de oposiciones para acceder al cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en la especialidad de matemáticas; y, finalmente, la fundamentación didáctica, en la que se analizan varias investigaciones didácticas relacionadas con el campo de funciones y gráficas.

En el segundo bloque del TFM, desarrollamos una unidad didáctica sobre funciones y gráficas, donde trataremos diversos puntos como, por ejemplo, la metodología empleada, el método de evaluación o las actividades y recursos que utilizaremos.

En todo momento, a la hora de realizar este TFM, se ha seguido la normativa vigente: el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, y la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

PALABRAS CLAVE: Funciones y gráficas, Matemáticas, Unidad Didáctica, Educación Secundaria Obligatoria, Trabajo Fin de Máster

Abstract

Here, we will carry out a Master's Final Project that will allow us to obtain the title of the Master's Degree: *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*, in particular, in the specialty of Mathematics.

The title of the present thesis is “Functions and Graphs”, and we will introduce functions, interpret graphs and, also, deal with the representation of functions from graphs, connecting, in this way, both concepts.

This TFM is divided into two blocks.

In a first block, we find three parts: the curriculum foundation, where we make an analysis of the current curriculum and two textbooks; the epistemological foundation, where we develop a subject of the opposition's agenda for teachers in Secondary Education in the specialty of mathematics; and, finally, the didactic foundation, where we analyse various didactic investigations related to functions and graphs.

In the second block, we develop a didactic unit on functions and graphs, where we will deal with various points such as, for example, the methodology used, the evaluation method or the activities and resources that we will use.

At all times, we have followed the current regulations: the Royal Decree 1105/2014, of December 26, which establishes the basic curriculum of Compulsory Secondary Education, and the Order of July 14, 2016, by which the curriculum of Compulsory Secondary Education in the Autonomous Community of Andalucía is developed.

KEYWORDS: Functions and graphs, Mathematics, Didactic Unit, Compulsory Secondary Education, Master's Thesis

1. Introducción

En el presente documento, no deseo incurrir en un lenguaje sexista, pero, para no hacer la lectura del mismo tediosa por el uso de un vocabulario excesivamente reiterativo, utilizaré el genérico que reconoce la Real Academia Española de la Lengua.

Después de haber desarrollado, a lo largo de todo el curso académico, las asignaturas del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, dicho máster culmina con la elaboración del Trabajo Fin de Máster (TFM), en el cual se pone en práctica todo lo aprendido con el objetivo de realizar una intervención didáctica en el aula.

Este TFM se centra en la especialidad de Matemáticas y, más específicamente, en el tema de las funciones y sus características en el curso de 3º de ESO, concretamente en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Las funciones tienen una gran importancia en las matemáticas actuales y es que, con ellas, se trabaja en todas las ramas de las matemáticas y nos ayudan a modelizar y resolver cuestiones presentes en el día a día. Es por eso que el estudio de las mismas es fundamental y, por ello, aparecen entre los contenidos que se deben enseñar en la ESO en Andalucía y, también, en el resto de España.

Actualmente, la educación se basa en una enseñanza por competencias y, mediante el estudio de las funciones, estaremos ayudando, especialmente, a desarrollar la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología.

Si hablamos, ahora, de la estructura del TFM, podemos ver dos bloques claramente diferenciados.

Como el objetivo final de este trabajo es la elaboración de una unidad didáctica, en el primer bloque encontramos una serie de tareas que son cruciales a la hora de poder realizar dicha unidad. Entre estas tareas, encontraremos:

- **Fundamentación curricular.** En esta parte, estudiaremos qué dice la normativa vigente en Andalucía acerca del tema objeto de estudio. Además, se realizará un análisis de libros de texto de diferentes editoriales, con la intención de compararlos y ver hasta qué punto se ajustan a los contenidos que se deben estudiar según lo estipulado en el BOJA.
- **Fundamentación epistemológica.** En la fundamentación epistemológica desarrollaremos un tema relacionado con nuestro objeto de estudio, las funciones, de entre todos los que podemos encontrar en el actual temario de oposiciones en la especialidad de matemáticas. Poder entender y desarrollar un contenido profundo de matemáticas es vital para tener una buena base

matemática y ser capaz de explicar a los alumnos el contenido del temario con soltura y seguridad.

- Fundamentación didáctica. En este apartado, se estudian algunos artículos de investigación didáctica relacionados con la enseñanza de las funciones a alumnos y alumnas. Dichos estudios pueden versar, por ejemplo, sobre errores y dificultades del alumnado en el área de las funciones y sus gráficas, o estrategias y recursos para mejorar los resultados del aprendizaje en esta área.

Estas tres partes formarían el primer gran bloque de este trabajo. Por otro lado, el segundo bloque consistirá en la elaboración de una unidad didáctica, lo que, al fin y al cabo, es nuestro principal objetivo con este TFM. En la unidad didáctica se desarrollará, como ya hemos mencionado, el tema referente a las funciones y sus características (dominio y recorrido, periodicidad, monotonía y extremos, etc.) para estudiantes de 3º de ESO.

El desarrollo de esta unidad didáctica intentará, sobre todo, favorecer la enseñanza de las funciones, utilizando metodologías que fomenten la adecuada comprensión de los contenidos del tema, siempre promoviendo la adquisición de las competencias oportunas por parte del alumnado. A su vez, se procura que los alumnos alcancen un pensamiento crítico que les permita explorar diversos caminos hacia la solución, siendo conscientes de que no existe un único procedimiento para llegar a ella. Además, se intentará que los problemas planteados sean lo más cercanos posible a su entorno. De esta forma, propiciaremos un acercamiento entre las matemáticas y el alumnado. Igualmente, se intentará promover, por una parte, el uso de recursos TIC como herramienta de aprendizaje y, por otra, el Aprendizaje Cooperativo para motivar a los estudiantes y favorecer, así, el compañerismo y un clima colaborativo en el aula.

2. Objetivos

Algunos de los objetivos que aparecen en la planificación del máster están recogidos en el apartado de la página web de la Universidad de Jaén (www.ujaen.es) que está dedicado especialmente al Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, y se enuncian a continuación:

- Potenciar una actitud positiva y crítica hacia el desarrollo de la identidad profesional docente, colaborando con los agentes del ámbito educativo y, de forma especial, con los equipos directivos de los centros docentes.
- Integrar experiencias profesionales con procesos de formación e investigación en el aula, a través de la reflexión crítica, sobre todo lo que se experimenta o se aprende.
- Propiciar una formación cultural, personal, ética y social adecuada para el ejercicio de la profesión docente con el rigor científico que se debe aplicar en el ámbito de la educación de adolescentes.
- Promover el reconocimiento, análisis y atención de las características diferenciales del alumnado, según su desarrollo evolutivo, contextos familiares, sociales y culturales de referencia.
- Conocer las competencias profesionales docentes propias de cada especialidad, en este caso de la especialidad de matemáticas, y su relación con las demás competencias a través de mecanismos de transversalidad.

El TFM es una parte imprescindible del Máster para poder llegar a cumplir estos objetivos, ya que la visión teórica de las asignaturas no basta para asegurar que los conocimientos hayan sido adquiridos. Por ello, con este Trabajo Fin de Máster se pretende poner en práctica lo estudiado a lo largo de todo el curso académico en las diversas asignaturas del Máster, tratando en el mismo cada uno de los objetivos antes descritos.

Por otra parte, en la Guía Docente de la asignatura Trabajo Fin de Máster que podemos encontrar, también, en la página web de la Universidad de Jaén dedicada al Máster en Profesorado, aparecen una serie de competencias que se pretenden alcanzar con la elaboración del TFM, las cuales no vamos a enumerar debido a su numerosidad. Alcanzando tanto los objetivos mencionados arriba a través de las distintas asignaturas y con la adecuada elaboración de un Trabajo Fin de Máster, como las competencias recogidas en la Guía Docente del Trabajo Fin de Máster, podremos asegurar que se han cumplido los objetivos del Máster en Profesorado y, por tanto, que se ha adquirido, por un lado, el conocimiento necesario para superar el Máster con éxito y, por otra parte, una base importante y fundamental para llegar a ser un docente competente en el futuro.

3. Fundamentación Curricular

En la fundamentación curricular se pretende hacer, por un lado, un análisis del currículo escolar y, por otro lado, un análisis de libros de texto, todos referentes a la unidad que se trata en este TFM.

Concretamente, la unidad objeto de estudio está orientada para alumnos y alumnas de 3º de ESO en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, sobre el tema del estudio de las funciones.

3.1. Análisis del currículo

Para poder hacer un análisis del currículo vigente respecto a las funciones en la asignatura mencionada, nos referimos al Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Concretamente, en el Anexo I de dicho decreto, podemos encontrar los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para cada una de las materias de la ESO y Bachillerato.

La asignatura en la que vamos a centrar nuestra atención, como ya hemos dicho, es Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el curso de 3º de ESO. Esta asignatura, según el Real Decreto, se divide, a lo largo de todo el curso, en 5 bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, números y álgebra, geometría, funciones y estadística y probabilidad. Concretamente, en este TFM, nos interesan dos bloques: el primer bloque, procesos, métodos y actitudes matemáticas, ya que este bloque es complementario a todos los demás, por lo que debe tratarse también en el desarrollo de cualquier otro bloque, y el cuarto bloque, llamado funciones, pues es el que recoge el contenido referente a las funciones y sus gráficas.

A continuación, veremos los contenidos que, según el Real Decreto 1105/2014, deben desarrollarse en los dos bloques mencionados, junto con los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables asociados a dichos contenidos.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Ilustración 1: Bloque 1 "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Funciones		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente. 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. 3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente. 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

Ilustración 2: Bloque 4 "Funciones", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3ºESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre.

Además de consultar el Real Decreto para desarrollar este análisis del currículo, consultamos la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. De hecho, comparando el Real Decreto con la Orden de 14 de julio de 2016, se asocian cada uno de los criterios de evaluación con las correspondientes competencias que se desarrollan en cada uno de ellos.

A continuación, se enumeran los criterios de evaluación de los bloques primero y cuarto, asociados a sus respectivas competencias:

BLOQUE 1 “PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS”	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguidos en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados como contruídos.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando	CMCT, CD, CAA

con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 1: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 1. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

BLOQUE 4 "FUNCIONES"	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	CMCT
2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.	CMCT, CAA, CSC
3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	CMCT, CAA

Tabla 2: Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 4. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia

Es decir, las competencias que se deben haber desarrollado tras haber estudiado los bloques primero y cuarto son:

CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
CD	Competencia digital
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencias sociales y cívicas

Tabla 3: Competencias adquiridas en los bloques 1 y 4. Fuente: Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

Y, por último, en la Orden del 14 de julio de 2016, se explicita que las asignaturas de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas tanto en 3º como en 4º de ESO contribuirán a desarrollar en los alumnos y las alumnas los objetivos de etapa; esto es, las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

3.2. Análisis de libros de texto

Constituye una realidad que los libros de texto son habitualmente utilizados como una herramienta fundamental en casi la totalidad de los centros educativos de secundaria. En ellos se trata de adaptar, a cada nivel educativo al que va dirigido el libro, lo que se conoce como el “*saber científico*” propiciando lo que Chevallard (1991) definió como la *transposición didáctica*. Por tanto, en cualquier investigación sobre lo que ocurre en un aula de matemáticas se hace imprescindible un análisis de los manuales con los que se trabaja.

No obstante, y particularmente después de la experiencia con la enseñanza no presencial a través de medios informáticos a la que se han visto obligados a recurrir los docentes durante el estado de confinamiento de estos últimos meses, cabría preguntarse sobre el papel que van a tener en un futuro muy próximo los libros de texto en formato papel frente a la irremediable irrupción de las tecnologías de la información y comunicación y de las metodologías asociadas a ellas.

El primer problema que se nos puede plantear es el de la elección de los libros que vamos a analizar. En un estudio realizado por Del Pino y Estepa (2015) se encuentra un análisis de los libros de texto de matemáticas usados en los centros docentes públicos y privados-concertados de las capitales andaluzas. Del estudio, realizado en el curso 2013/2014, se concluía que las dos editoriales más usadas en los centros públicos eran Anaya y Santillana, mientras que en los centros privados-concertados las mayoritarias eran SM y Anaya.

Editorial	Curso											
	1º		2º		3º		4ºA		4ºB		Total	
	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi
Anaya	73	28	73	28	76	25	67	18	63	21	352	120
Bruño	22	3	22	3	21	3	9	1	8	1	82	11
Casals	2		3		2		0		0		7	0
Edelvives	4	3	4	3	4	4	1	3	1	4	14	17
Editex	0		0		0		0		1		1	0
Everest	0		1		0		0		0		1	0
Guadiel-Edebé	1	4	2	6	1	4	2	2	2	2	8	18
McGraw Hill	0		0		0		3		3		6	0
Oxford	19	5	21	4	18	5	19	6	20	6	97	26
Santillana	32	11	31	14	33	9	44	4	42	5	182	43
SM	33	39	28	45	33	41	35	31	36	42	165	198
Vicen Vives	1	2	1	1	2	2	1	0	1	0	6	5
Total	187	95	186	104	190	93	181	65	177	81	921	438
No consigna	23	14	24	5	20	16	29	44	33	28		236

CPu = Colegio Público; CPi = Colegio Privado

Ilustración 3: Número de centros públicos andaluces que utilizan cada editorial por curso, en centros públicos y privados. Fuente: Del Pino y Estepa (2015:122)

No obstante, para tratar de actualizar estos datos hemos realizado una investigación haciendo uso de la página web de la Junta de Andalucía: <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto>.

Hemos seleccionado los 114 centros de la provincia de Jaén (82 públicos y 32 privados concertados) en los que se imparte educación secundaria obligatoria, y hemos consultado qué libros de texto estaban seleccionados en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO en el curso 2019/2020.

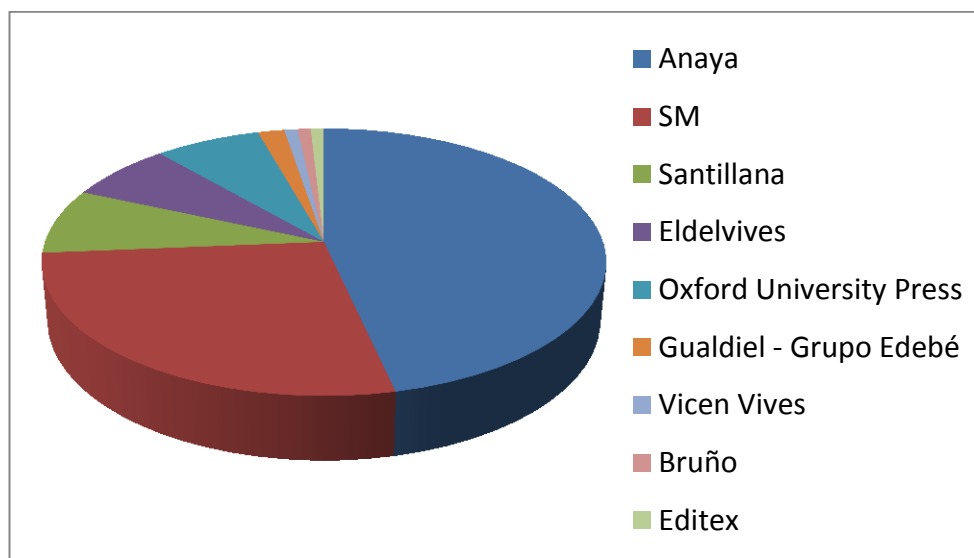


Ilustración 4: Editoriales utilizadas en los centros de la provincia de Jaén (públicos y privados-concertados) en el curso 2019/2020. Fuente: <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/becas-y-ayudas/gratuidad-de-libros/consulta-seleccion-de-libros-de-texto>. Elaboración propia.

Como podemos observar, el libro de Anaya es usado por 53 centros, seguido de SM en 31 y, a más distancia, Santillana en 9 centros.

Haciendo uso de estas dos investigaciones, finalmente optamos por realizar una revisión y comparación de los manuales de Anaya y Santillana por tratarse, probablemente, los más usados en los institutos públicos de secundaria en la comunidad de Andalucía.

Los libros en cuestión son de la asignatura que nos ocupa, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en el curso 3º de ESO. Dichos libros son:

- Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital. ISBN: 978-84-698-1953-1
- Matemáticas. Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve 3 ESO. Saber Hacer Grazaema. Santillana. ISBN: 978-84-830-5396-6

Las primeras diferencias que encontramos entre ambos libros son tanto el número de temas presentes en cada uno de ellos como la estructura de dichos temas:

Santillana	Anaya
1. Números racionales	1. Fracciones y decimales
2. Potencias y raíces	2. Potencias y raíces
3. Progresiones	3. Problemas aritméticos
4. Proporcionalidad numérica	4. Progresiones
5. Polinomios	5. El lenguaje algebraico
6. Ecuaciones de primer y segundo grado	6. Ecuaciones
7. Sistemas de ecuaciones	7. Sistemas de ecuaciones
8. Lugares geométricos. Áreas y perímetros	8. <u>Funciones y gráficas</u>
9. Movimientos y semejanzas	9. <u>Funciones lineales y cuadráticas</u>
10. Cuerpos geométricos	10. Problemas métricos en el plano
11. <u>Funciones</u>	11. Cuerpos geométricos
12. <u>Funciones lineales y cuadráticas</u>	12. Transformaciones geométricas
13. Estadística	13. Tablas y gráficos estadísticos

14. Probabilidad	14. Parámetros estadísticos
	15. Azar y probabilidad

Tabla 4: Comparación de los temas de las editoriales Santillana y Anaya. Fuente: Libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia

Subrayados en color rojo, podemos ver los temas del bloque “funciones”, que es el bloque al que pertenece nuestra unidad didáctica. Ambas editoriales dedican dos temas al bloque de funciones, con la diferencia de que cada una de las editoriales sitúa los temas de funciones en un lugar diferente.

En el caso de la editorial Santillana, los temas 11 y 12, llamados “Funciones” y “Funciones lineales y cuadráticas”, respectivamente, son aquellos en los que se estudian las funciones. Dichos temas están situados después del bloque de geometría y antes del bloque de estadística. En concreto, de estos dos temas, es el tema 11 el que más se asemeja en contenido al tema de estudio en el presente trabajo.

En el caso de la editorial Anaya, los temas 8 y 9, llamados “Funciones y gráficas” y “Funciones lineales”, respectivamente, son aquellos en los que se tratan las funciones. A diferencia de la editorial anterior, los temas de funciones se sitúan entre los bloques de álgebra (anterior) y de geometría (posterior). Específicamente, será el tema 8 el que más se adapta al contenido que queremos desarrollar en nuestra unidad didáctica.

A continuación, estudiaremos y compararemos el tema 8 de Anaya y el tema 11 de Santillana. Vamos a ver con detalle los contenidos y la estructura de ambos temas, señalando, en primer lugar, aquellos contenidos que comparten las dos, aquellos que una contiene pero la otra no y aquellos contenidos que no estudia ninguna de ellas.

Los contenidos que aparecen tanto en el tema 11 de Santillana como en el tema 8 de Anaya son:

CONTENIDOS COMUNES EN AMBAS EDITORIALES	Ejes cartesianos y coordenadas
	Concepto de función
	Variables dependientes e independientes
	Función definida mediante un enunciado, una ecuación, una tabla o una gráfica.
	Dominio y recorrido

CONTENIDOS COMUNES EN AMBAS EDITORIALES	Continuidad. Puntos de discontinuidad
	Crecimiento y decrecimiento
	Máximo y mínimos (en general)
	Periodicidad y periodo

Tabla 5: Contenidos que se presentan en ambas editoriales. Fuente: Libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia.

Por otro lado, veamos aquellos contenidos que Santillana tiene, pero no tiene Anaya, y viceversa:

Santillana	Anaya
- Intervalos - Puntos de corte con los ejes - Función constante - Simetría par e impar	- Escalas - Máximos y mínimos relativos - Comportamiento de una función a largo plazo - Continuidad de una función en un tramo

Tabla 6: Contenidos presentes en una editorial pero no en la otra. Fuente: Libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia

Por último, los contenidos que podrían estudiarse en estos temas pero que, sin embargo, no aparecen en ninguna de las dos editoriales son:

- Máximos y mínimos absolutos
- Concepto de concavidad y convexidad
- Puntos de inflexión

A pesar de estas carencias, los contenidos de ambas editoriales se adaptan al currículo vigente. Sin embargo, es cierto que se podría profundizar más, sobre todo, en las características de las funciones si las editoriales añadieran aquellos conceptos que no mencionan en sus temas.

Ahora, vamos a hablar sobre la estructura de los contenidos en las diferentes editoriales.

Para empezar, en las dos editoriales nos encontramos una introducción para presentar el tema. La diferencia es que, mientras que el libro de Anaya plantea una introducción más histórica, en el libro de Santillana la introducción es un problema de la vida cotidiana: el avión y cómo el vuelo del mismo se puede expresar como gráfica de una función.

Por un lado, Santillana, a la hora de explicar sus contenidos, nos presenta una estructura deductiva. En primer lugar, aparecen los conceptos teóricos, a continuación, ejemplos resueltos sobre esos conceptos presentados y, por último, un par de ejercicios para que el alumnado ponga en práctica lo explicado.

Por el contrario, Anaya utiliza una estructura inductiva. En este caso, se empieza dando algunos ejemplos y, a partir de analizar dichos ejemplos, se llega a las definiciones teóricas de los conceptos presentes en los ejemplos previos. Para terminar, y de igual forma que en la editorial Santillana, se proponen algunos ejercicios con los que los estudiantes podrán practicar lo aprendido.

A pesar de que, en su estructura, Santillana va de lo general a lo específico y Anaya de lo específico a lo general, realmente, ambas editoriales se basan en una metodología transmisiva, donde el docente explicaría los contenidos a la clase y, a partir de ahí, los alumnos y las alumnas podrían realizar los ejercicios propuestos.

En cuanto a los ejemplos y ejercicios resueltos, ambas editoriales dan ejemplos de cada uno de los contenidos estudiados. En el caso de Santillana, justo después de la explicación de los contenidos y, en el caso de Anaya, como introducción a dicha explicación.

Por otra parte, en ambos libros aparecen también ejercicios resueltos. En el caso de Santillana, podemos encontrar entre las páginas dedicadas a la explicación de los contenidos algunos apartados titulados “Saber hacer”, donde se explica y se detalla el procedimiento que se debe seguir para resolver problemas y se ilustra este procedimiento mediante un ejercicio resuelto. En cuanto a Anaya, justo después de haber explicado todos los contenidos del tema, llegamos a una sección dedicada a ejercicios resueltos, gracias a los cuales, el alumnado encontrará más sencillo realizar las actividades finales.

Con respecto a los ejercicios y actividades propuestas en los libros, podemos encontrar algunas diferencias, pero, sobre todo, muchas similitudes. Para empezar, los ejercicios asociados a las introducciones de cada una de las editoriales son muy distintos. Por parte de Anaya, ejercicios orientados a la investigación histórica y, por parte de Santillana, ejercicios de repaso de ejes coordinados e intervalos.

Ambos libros coinciden en que, después de la explicación de cada uno de los contenidos del tema, podemos encontrar un par de ejercicios para que los alumnos practiquen lo explicado justo arriba. Además, ambos libros presentan una gran batería de ejercicios al final de la unidad, cuando ya se han explicado todos los contenidos del tema. Con estos ejercicios se pretende poner en práctica lo aprendido a lo largo de toda la unidad. En su inmensa mayoría, estos ejercicios están enfocados a una resolución individual y consisten en aplicar, de forma mecánica, los procedimientos vistos en clase para la resolución de problemas.

Por último, en la última página del tema para ambos libros, podemos encontrar una página de actividades diferentes a las anteriores, dedicadas a desarrollar la competencia matemática y el pensamiento crítico. En el libro de Santillana,

encontramos actividades que desarrollan el pensamiento matemático aplicables a la vida real, pruebas de tipo PISA y un trabajo cooperativo. También en el libro de Anaya, se proponen actividades con el objetivo de desarrollar el razonamiento matemático, además de una autoevaluación sobre los contenidos de la unidad.

En esta última página podemos ver que el trabajo en grupo no tiene mucha importancia en ninguna de las dos editoriales, pues solo aparecen dos páginas con ejercicios de este tipo frente a las muchas páginas de ejercicios mecánicos enfocados a la individualidad.

Para terminar, mencionaremos los recursos TIC y los trabajos cooperativos que presentan respectivos libros. En cuanto a las herramientas TIC, no son mencionadas en ninguno de los dos libros en ningún momento durante el desarrollo del tema. Será competencia de los docentes utilizar las TIC para potenciar una mejora en el aprendizaje del alumnado. Y, por otra parte, en cuanto a los trabajos cooperativos, en el libro de Anaya no encontramos nada referente a trabajos cooperativos. Sin embargo, en el libro de Santillana, sí que se plantea un trabajo cooperativo al final de la unidad aunque, realmente, este no tiene mucha relación con el tema estudiado sobre funciones.

En resumen, los dos libros son muy similares. La estructura del tema es prácticamente la misma, la mayoría de ejercicios son muy parecidos, ambas conceden poca importancia a los trabajos cooperativos o a las actividades de razonamiento matemático y ninguna importancia a las herramientas TIC. Se basan, sobre todo, en ejercicios mecánicos que los alumnos y las alumnas realizarán individualmente y de forma mecánica, sin necesidad de pensar más allá de un algoritmo mecanizado y establecido. Quizás, se podría decir que el libro de Santillana tiene una base teórica más densa, mientras que el libro de Anaya concede más importancia a los ejemplos y ejercicios prácticos; pero, en esencia, el tema en ambos libros es prácticamente igual.

4. Fundamentación Epistemológica: Desarrollo de un tema de oposición

Con el objetivo de ahondar en el trasfondo matemático de las funciones, se presenta el siguiente tema, que se encuentra entre los temas recogidos en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidad y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, recogidos en la Orden de 9 de septiembre de 1993 (BOE 226 de 21 de septiembre de 1993). En concreto, desarrollaremos el tema 28: **Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones.**

Este tema presenta la siguiente estructura:

- 4.1. Introducción histórica
- 4.2. Nociones básicas de funciones
 - 4.2.1. Periodicidad
 - 4.2.2. Puntos de corte con los ejes
 - 4.2.3. Simetrías
 - 4.2.4. Continuidad
- 4.3. Monotonía. Extremos relativos y absolutos
 - 4.3.1. Máximo y mínimo absolutos
 - 4.3.2. Extremos relativos
- 4.4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión
- 4.5. Asíntotas
- 4.6. Representación gráfica de curvas

4.1. Introducción histórica

El tema que nos ocupa se refiere a la función y a sus propiedades. Para la elaboración de los distintos apartados se ha consultado en las siguientes fuentes bibliográficas: Aparicio del Prado y Payá (1999), Apóstol (1976), Apóstol (1989), Castellano, Gámez y Pérez (1997) y Spivak (2018).

El concepto de función, tal y como actualmente se define en Matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones (Ruiz Higuera, 1998:105), y aunque la noción explícita no surge hasta los principios del siglo

XVIII, sin embargo, podemos encontrar manifestaciones implícitas que se pueden remontar a 2000 años a.C. (Kleiner, 1989).

En primer lugar, y para poder conocer mejor cómo surge el concepto de función y cuál fue su evolución a lo largo de la historia, estudiaremos su desarrollo desde las primeras civilizaciones.

Tal y como explica Sastre Vázquez *et al.* (2008:142-143), a pesar de que en la Edad Antigua ni siquiera se conocía la noción de variable, y las cantidades eran expresadas en forma de gráficos, hay algunas muestras en la que se encuentra implícita la idea intuitiva de función. Por ejemplo, en las tablas numéricas de la civilización babilónica se pueden encontrar las cuatro operaciones aritméticas elementales, las cuales, realmente, son funciones con dos variables, además de progresiones como la suma de n términos. Estas tablas suelen tener una disposición de dos columnas, de forma similar a las que actualmente se usan para las funciones con $x|f(x)$, y contenían estudios de casos concretos. Sin embargo, aunque no se conserva ninguna formulación general no se puede afirmar que no hubiera una conciencia de la generalidad de reglas o principios matemáticos, *“si no hubiera, de una manera o de otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo. Tan extensas colecciones de problemas semejantes no pudieron ser el resultado del azar”* (Boyer, 1999:66).



Ilustración 5: Tablilla babilónica Plimpton 322. Fuente:

<https://francis.naukas.com/files/2017/09/Dibujo20170906-plimpton-322-babylonian-clay-tablet-cuneiform-1800-bc-columbia-university.png>

Aunque autores como Pedersen opinan que las matemáticas babilónicas poseyeron un auténtico “instinto de funcionalidad”, ya que en las tablas aparecen relaciones generales que asocian a los elementos de dos conjuntos (Pedersen, 1974, citado por Díaz Gómez, 2013), otros recelan de estos avances y no encuentran en este periodo “ni

el concepto de demostración, ni la idea de una estructura lógica basada en principios que merecieran aceptación” (Kline, 1992).

Posteriormente, las ideas de cambio y de cantidad variable no fueron ajenas al pensamiento de la época helénica, en donde se desarrolló con profundidad el estudio en el ámbito de la geometría y, a través de este estudio, también los griegos trabajaron con el concepto implícito de función, aunque no fueron capaces ni de reconocerla ni de representarla. En los Elementos de Euclides, los objetos matemáticos que nos presentan, y sus relaciones, son estáticos. Para los filósofos griegos el cambio y el movimiento eran algo ajenos a la naturaleza de las Matemáticas. Esta concepción “estática” de las Matemáticas motivó que, a lo largo de muchos siglos, se hablara más en términos de incógnitas que de variables. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, mucho antes que a las funciones. De hecho, tal y como señala René de Cotret: *“la costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo la forma de proporciones supuso un obstáculo para el desarrollo de la noción de función”* (René de Cotret, 1985:35, citado por Ruiz Higuera, 1998:109).

Por todo ello, para muchos investigadores, el pensamiento matemático de la antigüedad, independientemente de las causas que lo motivaran, no creó una noción general de cantidad variable ni de función (Youschkevitch, 1976:40). Incluso, se llega a considerar el concepto de función como un concepto clave y exclusivo de la cultura occidental moderna, *“una noción que ni siquiera fue remotamente insinuado por cualquier cultura anterior, un concepto de función que es cualquier cosa menos una extensión o elaboración de conceptos numéricos anteriores: es más bien una emancipación completa de tales nociones”* (Schaff, 1930, citado en Kleiner, 1989).

Como observa Sastre Vázquez *et al.* (2008:144), aunque se cree que la Edad Media fue un periodo en el que no se produjo ningún avance en el área de las matemáticas, esto no fue exactamente así. Por un lado, los árabes empezaron a sentar la base de una nueva disciplina matemática: el Álgebra. Además, se desarrollaron estudios sobre fenómenos naturales tales como el calor, la velocidad o la luz, lo que supuso una evolución en el concepto de función, que se describía con una expresión de sus características principales en forma verbal, o a través de un gráfico, como por ejemplo, los que aparecen en los trabajos de Nicolás de Oresme (1323-1382) que pudieron contribuir a la formación del concepto de función, a la representación funcional de las leyes físicas, y a la clasificación de las funciones (Kline, 1992:285). *“Oresme pareció darse cuenta del principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva, pero no fue capaz de hacer un uso efectivo de esta observación”* (Boyer, 1999:340). En esta época tampoco se usaban fórmulas.



Ilustración 6: Trabajo de Nicolás de Oresme. Fuente: <https://alchetron.com/Nicole-Oresme>

Durante los siglos XV y XVI no se produjeron en Matemáticas resultados especialmente brillantes, en contraposición con los grandes logros en las artes, la arquitectura y las letras, sin embargo, se perfeccionó el simbolismo algebraico y se formó, de manera definitiva, la trigonometría además de la introducción de la noción de logaritmo. Estos avances contribuyeron al posterior desarrollo del concepto de función. (Ruiz Higuera, 1998).

Sastre Vázquez *et al.* (2008:145-149) señala que fue en la Época Moderna cuando se sucedieron una serie de eventos que marcaron la evolución del concepto de función, como, por ejemplo, la anexión del Álgebra y la Geometría o la producción del Álgebra simbólica.

Desde las primeras civilizaciones, el Álgebra había estado subordinada al área de la Geometría y fue en el siglo XVII cuando se produjo un cambio en este aspecto: esta dependencia empezó a invertirse. Muchos matemáticos hicieron su aportación al concepto de función: Vieta, Galileo, Descartes, Gregory, Fermat, Bernoulli, hasta que Newton y Leibniz crearon uno de los instrumentos matemáticos más potentes: el Cálculo.

Aunque en esta época, el concepto de función estaba restringido a las funciones analíticas, ya Leibniz había usado la palabra función, tal y como la usamos hoy día. También el prolífico matemático Euler contribuyó a fijar el concepto de función, definiéndola como una expresión analítica, *“aunque el concepto de función había sido formulado por Jean Bernoulli, Euler, en el comienzo de su Introductio, define una función como cualquier expresión analítica formada, de modo arbitrario, a partir de una cantidad variable y de constantes”* (Kline, 1992b: 539). Aunque hoy en día esta definición no sería muy aceptada, dado que no se explica a qué se refiere con

“expresión analítica”, sí que se puede afirmar que desde ese momento la idea de “función” pasó a ser la idea fundamental del análisis (Boyer, 1999). Euler, junto a D’Alembert, amplía el concepto de función e introduce la posibilidad de trabajar las funciones como objetos matemáticos. Asimismo, se incluyen las funciones a trozos y funciones con gráfico pero sin expresión analítica en el concepto de función.

Tras Euler, hubo muchos otros matemáticos que contribuyeron al concepto de función hasta llegar a lo que conocemos hoy: Fourier, Cauchy, Dirichlet, Weierstrass, Cantor, Carathéodory, Bourbaki. Es con ellos que las expresiones algebraicas se sitúan al mismo nivel que los gráficos y las representaciones geométricas.

En 1822, Fourier revoluciona el concepto de función al dar una definición en la que hacía notar que lo principal era la asignación de valores, careciendo de importancia que dicha asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas. Poco después, Dirichlet, en 1829, formula por primera vez el concepto moderno de función $y = f(x)$ de una variable independiente definida en un intervalo $a < x < b$. Ya en el siglo XX Bourbaki dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios (Díaz Gómez, 2013).

A la hora de enseñar matemáticas a los alumnos y a las alumnas, es fundamental que el docente tenga un conocimiento histórico, al menos a grandes rasgos, de lo que está explicando, pues, de esta manera, podrá motivar al alumnado en el estudio e incentivar un acercamiento a este campo de las ciencias (Sastre Vázquez *et al.*, 2008:141). Conocer cómo surgió un concepto o los problemas a los que tuvieron que enfrentarse los matemáticos de la época podría fomentar el desarrollo de una buena predisposición por parte de alumnos y alumnas.

4.2. Nociones básicas de funciones

Según Spivak (2018:39), no hay duda de que el concepto de función es uno de los conceptos más importantes de las matemáticas, sino el que más. Y es que, en la mayoría de las ramas de las matemáticas, se trabaja e investiga, principalmente, con funciones.

Para empezar la materia, veremos, en primer lugar, el concepto de función que, tras tantos años de evolución, usamos actualmente.

Definición 1 (Función)

Una **función** f es un conjunto de pares ordenados (x, y) , ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.

Existen muchos tipos de funciones: las funciones polinómicas que, además, van asociadas al concepto de **grado** de f , las funciones racionales, las funciones a trozos, las exponenciales, las trigonométricas.

Asociado al concepto de función, encontramos otros dos conceptos: dominio y recorrido.

Definición 2 (Dominio y recorrido)

Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los x para los que existe algún y tal que (x, y) está en f y se nota $Dom(f)$. El conjunto de los elementos y se denomina **recorrido** de f y se nota $Im(f)$.

De la definición de función, se deduce que una función no puede tomar dos valores distintos en un punto dado x ; esto es, si $(x, y) = (x, z) \Rightarrow y = z$ y, a ese único valor se le llama $f(x)$, de forma que $y = f(x)$.

En particular, el dominio y el recorrido de una función van a ser intervalos. Podemos decir que un intervalo es un segmento rectilíneo de la recta real que une dos puntos, a y b . Además, hay varios tipos de intervalos:

- El intervalo abierto se representa como (a, b) y se define como el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- El intervalo cerrado se representa como $[a, b]$ y se define como el conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- Los intervalos semiabiertos o semicerrados son aquellos en los que un extremo es abierto y otro extremo es cerrado; es decir, $(a, b]$ o $[a, b)$.
- Los intervalos infinitos son aquellos en los que alguno de los extremos del intervalo es $-\infty$ o $+\infty$; por ejemplo, el intervalo $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ o el intervalo $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
- A veces, $\mathbb{R}$ puede verse como un intervalo cuyos extremos son infinitos; es decir, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

4.2.1. Periodicidad

Las funciones presentan muchas y diversas características. Entre ellas, se encuentra la periodicidad, una propiedad que cumplen, por ejemplo, las funciones seno y coseno. Veamos cuál es la definición rigurosa de función periódica.

Definición 3 (Periodo)

Una función f se dice que es **periódica** si $\exists A > 0$ tal que $f(x + A) = f(x) \forall x \in Dom(f)$. La constante A recibe el nombre de **periodo**.

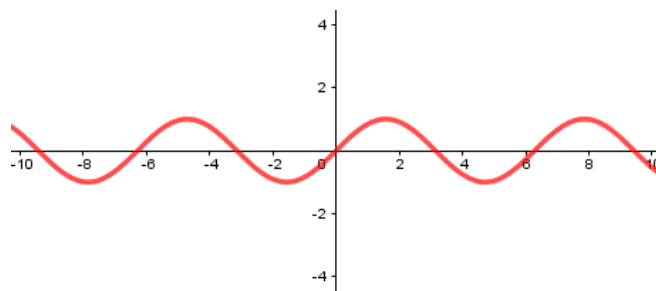


Ilustración 7: Gráfica de la función seno. Elaboración propia.

4.2.2. Puntos de corte con los ejes

Los puntos de corte de una función con los ejes son puntos que nos facilitarán la visualización de una función y el conocimiento de sus propiedades, pero, sobre todo, nos facilitará su representación en una gráfica.

Una función f intersectará con eje de abscisas cuando $y = 0$; es decir, el punto de corte entre f y el eje OX es el punto $(x, 0)$ tal que $f(x) = 0$.

De manera análoga, una función f intersectará con el eje de ordenadas cuando $x = 0$; esto es, el punto de corte entre f y el eje OY es el punto $(0, y)$ tal que $y = f(0)$.

4.2.3. Simetrías

Otra de las propiedades que pueden presentar las funciones es la simetría. Entre todas las posibles simetrías, destacan dos: la simetría par y la simetría impar, que son las que vamos a ver a continuación:

Definición 4 (Función par)

Diremos que la función f es una **función par** si es simétrica respecto del eje de ordenadas; esto es, si cumple que $f(x) = f(-x) \forall x \in \text{Dom}(f)$.

Por ejemplo, una parábola con eje en la recta $x = 0$ y con foco en el punto $(0,0)$ es una función par, tal y como se muestra a continuación:

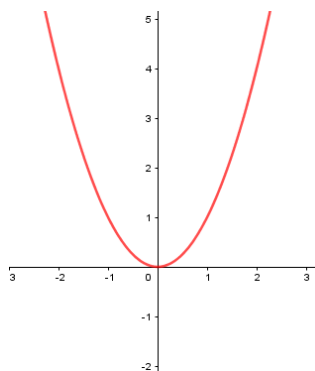


Ilustración 8: Gráfica función par. Elaboración propia.

Definición 5 (Función impar)

Diremos que la función f es una **función impar** si es simétrica respecto del origen de coordenadas; es decir, si se cumple que $f(-x) = -f(x) \forall x \in Dom(f)$.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ presenta una simetría impar, tal y como vemos a continuación:

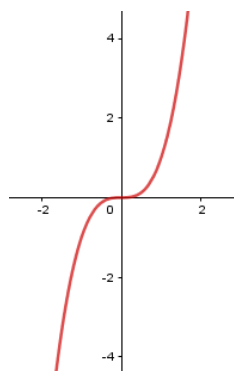


Ilustración 9: Gráfica de una función impar. Elaboración propia.

4.2.4. Continuidad

Una de las propiedades más estudiadas de una función es la continuidad. Visual e intuitivamente, una función es continua cuando su gráfica no tiene saltos, interrupciones ni oscilaciones indefinidas. Sin embargo, es fácil dejarse engañar por la gráfica de una función. Para que esto no ocurra, tenemos que dar una definición rigurosa de qué es la continuidad en un punto.

Definición 6 (Función continua en un punto)

Decimos que una función f es **continua** en un punto $x_0 \in Dom(f)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

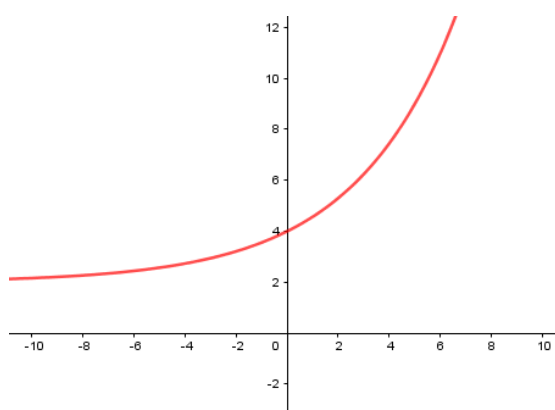


Ilustración 10: Ejemplo de función continua. Elaboración propia.

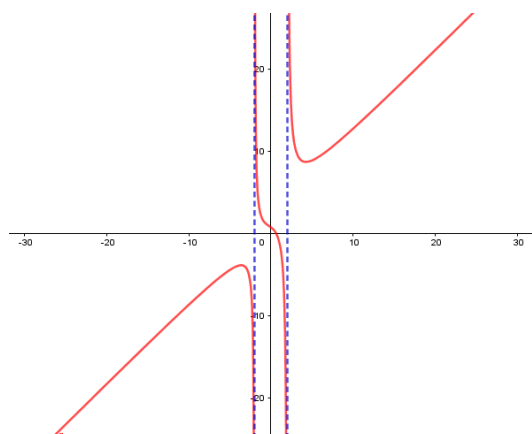


Ilustración 11: Ejemplo de función con discontinuidades. Elaboración propia.

Sin embargo, lo que realmente tiene relevancia no es la continuidad de una función en un punto, sino la continuidad de la función en todos los puntos de un intervalo o,

incluso, en todo $\mathbb{R}$. De esta forma, si f es continua en todo punto del intervalo (a, b) , diremos que f es continua en (a, b) . Del mismo modo, si f es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$, decimos que f es continua en $\mathbb{R}$.

4.3. Monotonía. Extremos relativos y absolutos

Cuando hablamos del concepto de monotonía en un intervalo, estamos hablando sobre si la función crece o decrece en ese intervalo. Dicho concepto es un concepto importante a la hora de llegar a conocer el comportamiento de la función o de representarla.

Para poder llegar a conocer la monotonía y extremos de una función, es necesario un buen manejo de la derivada de la función. Pero, en primer lugar, demos la definición matemática de función creciente y función decreciente.

Definición 7 (Función creciente)

Sea f una función. Se dice que f es **creciente** en un conjunto $S \subset Dom(f)$ si $f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in S$ que cumplan $x \leq y$. En caso de que se verifique la desigualdad estricta; esto es, $f(x) < f(y)$, $\forall x, y \in S$ con $x < y$, se dice que la función es **estrictamente creciente**.

Definición 8 (Función decreciente)

Sea f una función. Se dice que f es **decreciente** en un conjunto $S \subset Dom(f)$ si $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in S$ que cumplan $x \leq y$. En caso de que se verifique la desigualdad estricta; esto es, $f(x) > f(y)$, $\forall x, y \in S$ con $x < y$, se dice que la función es **estrictamente decreciente**.

Ahora, vamos a generalizar ambas definiciones en la definición de función monótona.

Definición 9 (Función monótona)

Se dice que f es una **función monótona** en un conjunto $S \subset Dom(f)$ si la función es creciente o decreciente en S . Análogamente, f será **estrictamente monótona** en S si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en S .

4.3.1. Máximo y mínimo absolutos

Intuitivamente, estos puntos son aquellos en los que la función alcanza su mayor y su menor valor, respectivamente. No siempre existen máximo absoluto o mínimo

absoluto, pero, cuando existen, el conocerlos nos puede facilitar enormemente tanto la representación como la comprensión de una función. Veamos las definiciones rigurosas de máximo y mínimo absoluto.

Definición 10 (Máximo absoluto)

Sea f una función definida en un conjunto S . La función f presenta un **máximo absoluto** si existe, al menos, un punto $c \in S$ tal que $f(x) \leq f(c) \forall x \in S$.

Definición 11 (Mínimo absoluto)

Sea f una función definida en un conjunto S . La función f presenta un **mínimo absoluto** si existe, al menos, un punto $d \in S$ tal que $f(x) \geq f(d) \forall x \in S$.

Con el objetivo de conocer más acerca de los máximos y los mínimos absolutos y de relacionarlos con el supremo y el ínfimo de una función (que definiremos a continuación), nos ayudamos del siguiente teorema:

Teorema 1 (Teorema de acotación para funciones continuas)

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$; esto es, existe un número $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C \forall x \in [a, b]$.

Demostración:

Utilizaremos reducción al absurdo.

Supongamos que f no es acotada. Sea $c \in [a, b]$ el punto medio de dicho intervalo. Entonces, por no estar f acotada, se tiene que dar que f no esté acotada en $[a, c]$ o que f no esté acotada en $[c, b]$.

Llamaremos $[a_1, b_1]$ a aquel intervalo en el que f no esté acotada. En caso de que no esté acotada en ninguno de los dos intervalos, elegimos el intervalo de la izquierda por convenio.

Sea c_2 el punto medio del intervalo $[a_1, b_1]$. Como f no está acotada en $[a_1, b_1]$, f no estará acotada en, al menos, uno de los intervalos $[a_1, c_2]$ y $[c_2, b_1]$. Llamamos a ese intervalo, al igual que antes, $[a_2, b_2]$.

Tomamos ahora el punto c_3 , punto medio del intervalo $[a_2, b_2]$. Razonamos del mismo modo, de forma que encontramos una sucesión de intervalos cerrados y encajados donde f no está acotada:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Cada uno de los intervalos mide la mitad de la longitud del intervalo anterior, por tanto, las longitudes de los intervalos encajados siguen la sucesión $\frac{b-a}{2^n}$. Concretamente, esta sucesión tiende a cero.

Por el Axioma de Cantor, podemos afirmar que existe un punto c que pertenece a $[a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$; es decir, pertenece a todos los intervalos encajados.

Además, por ser f continua en c (hipótesis), existe un entorno del punto c , $(c - \delta, c + \delta)$, donde f es acotada (por una de las propiedades de las funciones continuas).

En el entorno $(c - \delta, c + \delta)$ hay infinitos intervalos del tipo $[a_n, b_n]$, ya que la sucesión de las longitudes de esos intervalos tiende a cero y todos ellos contienen al punto c . Pero, en esos intervalos, la función f no está acotada, mientras que en el entorno $(c - \delta, c + \delta)$ sí lo está. Hemos llegado a una contradicción, que ha surgido de suponer que f no está acotada en $[a, b]$.

■

Si f es acotada en el intervalo $[a, b]$, los valores de f en $[a, b]$ están acotados de forma que dichos valores tienen un extremo superior ($\sup f$) y un extremo inferior ($\inf f$).

Definición 12 (Supremo e ínfimo)

Definimos el supremo y el ínfimo de una función como:

$$\sup f = \sup\{f(x): x \in [a, b]\}$$

$$\inf f = \inf\{f(x): x \in [a, b]\}$$

Se cumple que $\inf f \leq f(x) \leq \sup f, \forall x \in [a, b]$.

Teorema 2 (Teorema del máximo (mínimo) para funciones continuas)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existen puntos c y d en $[a, b]$ tales que:

$$f(c) = \sup f \quad f(d) = \inf f$$

Demostración:

Vamos a probar que f alcanza su supremo en $[a, b]$.

Sea $M = \sup f$. Supongamos que f no alcanza su supremo en $[a, b]$. Entonces, no existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = M$.

Definimos $g(x) = M - f(x)$. Como M es el supremo de f ,

$g(x) = M - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Además, como $g(x)$ nunca se anula, la función $\frac{1}{g(x)}$ va a ser continua en $[a, b]$.

Por el teorema de acotación para funciones continuas, $0 < \frac{1}{g(x)} < C$, de forma que $\frac{1}{M-f(x)} < C \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow M - f(x) > \frac{1}{C} \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{C} \quad \forall x \in [a, b]$

Entonces, $M - \frac{1}{C}$ sería la menor cota superior de f en $[a, b]$, con lo que llegamos a contradicción. Por tanto, $M = f(x)$ para algún $x \in [a, b]$.

Para el extremo inferior, lo haremos de forma análoga considerando que el extremo inferior de f es el extremo superior de $-f$.

■

De este teorema, deducimos que, cuando f es una función continua en $[a, b]$, el supremo de f es su máximo absoluto y el ínfimo de f es su mínimo absoluto.

4.3.2. Extremos relativos

Hay veces en las que encontramos puntos que, a pesar de no ser ni máximo ni mínimo absolutos de una función, tienen un valor mayor o menor que los puntos más cercanos a él. Para estos casos, surge el concepto de extremos relativos.

Definición 13 (Máximo relativo)

Sea una función f definida en un conjunto S . Diremos que f tiene un **máximo relativo** si existe un intervalo abierto I tal que:

$$f(x) \leq f(c), c \in I, \forall x \in I \cap S$$

Un máximo relativo en c de una función f es también el máximo absoluto de f en un entorno de c , aunque no es necesariamente el máximo absoluto de f en todo el conjunto S .

Definición 14 (Mínimo relativo)

Sea una función f definida en un conjunto S . Diremos que f tiene un **mínimo relativo** si existe un intervalo abierto I tal que:

$$f(x) \geq f(d), d \in I, \forall x \in I \cap S$$

Un mínimo relativo en c de una función f es también el mínimo absoluto de f en un entorno de c , aunque no es necesariamente el mínimo absoluto de f en todo el conjunto S .

En general, podemos hablar del concepto de extremo para referirnos tanto a máximos como a mínimos relativos.

Definición 15 (Extremo)

Los máximos relativos y los mínimos relativos de una función f se denominan **extremos** de f .

El siguiente teorema relaciona los extremos de una función con su derivada.

Definición 16 (Punto interior a un conjunto)

Un punto x se dice que es un punto interior de un conjunto S cuando existe un entorno de x tal que cualquier punto de dicho entorno pertenece a S .

Teorema 3 (Anulación de la derivada de un extremo interior)

Sea f una función definida en un intervalo abierto I . Supongamos que f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un punto c interior a I . Entonces, si la derivada $f'(c)$ existe, $f'(c) = 0$.

Demostración:

Vamos a definir la siguiente función:

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{si } x \in I \text{ } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c \end{cases}$$

Puesto que $f'(c)$ existe, $\lim_{x \rightarrow c} Q(x) = Q(c)$, con lo que Q es continua en c . Queremos probar que $Q(c) = 0$, para ello, probaremos que tanto $Q(c) < 0$ como $Q(c) > 0$ nos llevan a contradicción.

Supongamos que $Q(c) > 0$. Por la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, podemos asegurar que existe un intervalo J tal que $c \in J$ y $Q(x) > 0 \quad \forall x \in J$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \forall x \in J &\Rightarrow f(x) - f(c) \text{ y } x - c \text{ tienen el mismo signo} \\ &\Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(c) & \text{si } x > c \\ f(x) < f(c) & \text{si } x < c \end{cases} \end{aligned}$$

Esto contradice la hipótesis de que f tiene un extremo en c . Por tanto, no puede ocurrir que $Q(c) > 0$.

Para demostrar que $Q(c) < 0$ no puede darse, utilizamos un argumento similar.

Hemos llegado a que $Q(c) = 0$ y, como $f'(c) = Q(c)$ por definición, $f'(c) = 0$.

■

Es fundamental destacar que este teorema no implica que si la derivada en un punto es nula, entonces en ese punto hay un extremo. No se da la condición suficiente, solo la condición necesaria.

Teorema 4 (Teorema de Rolle)

Sea f una función continua en todo el intervalo $[a, b]$ y derivable en todo (a, b) . Supongamos que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración:

Demostramos este teorema por reducción al absurdo.

Supongamos que $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Según el teorema del máximo o mínimo para funciones continuas, f tiene que alcanzar su máximo absoluto y su mínimo absoluto en $[a, b]$.

Por el teorema de anulación de la derivada en un extremo interior, sabemos que ningún extremo se alcanza en los puntos interiores del intervalo $[a, b]$ (si se alcanzara, $f'(x) = 0$ para algún x en (a, b)).

Luego, utilizando estos dos resultados, hemos llegado a que los valores extremos se alcanzan en los puntos a y b . Pero, como $f(a) = f(b)$, por hipótesis, el máximo y el mínimo coinciden y, por tanto, f es constante en $[a, b]$.

Si f es constante en $[a, b]$, la derivada de f es cero para todo punto en $[a, b]$. Hemos llegado a contradicción.

Queda probado que en, al menos, un punto $c \in (a, b)$ se tiene que $f'(c) = 0$.

■

El Teorema del Valor Medio es un resultado muy importante en el cálculo y es una consecuencia del Teorema de Rolle.

Teorema 5 (Teorema del valor medio para derivadas)

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces, existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración:

Queremos aplicar el teorema de Rolle. Para ello, construimos una función h de manera que $h(a) = h(b)$:

$$h(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)]$$

De hecho, $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$.

h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) (si consideramos la función f continua y derivable en estos intervalos, respectivamente). La derivada de h vale $h'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)]$.

Aplicamos el teorema de Rolle a la función h :

$$\exists c \in (a, b): h'(c) = 0 \Rightarrow h'(c) = f'(c)(b - a) - [f(b) - f(a)] = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

■

La monotonía de las funciones también puede deducirse gracias al signo de la primera derivada, como en el siguiente teorema:

Teorema 6

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en todo punto de (a, b) . Entonces:

- a) Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.
- b) Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$.
- c) Si $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

Demostración:

Para demostrarlo, aplicaremos el teorema del valor medio.

- a) Queremos probar que $f(x) < f(y)$ cuando $a \leq x < y \leq b$, para dos x e y cualesquiera. Suponiendo que $x < y$, aplicamos el teorema del valor medio al intervalo $[x, y]$. Nos quedaría:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \text{ donde } x < c < y$$

Puesto que $f'(c) > 0$ e $y - x > 0$, tenemos que $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$ para $x < y \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.

- b) Similar a la demostración de a)

- c) Utilizaremos, igualmente, la expresión $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ para $x = a$.
Como $f'(c) = 0$, tenemos que $f(y) - f(a) = 0 \Rightarrow f(y) = f(a)$,
 $\forall y \in (a, b) \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

■

Como consecuencia de este teorema, veremos que cuando la derivada cambia de signo siempre hay un extremo.

Teorema 7

Sea f continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en todo (a, b) excepto, quizás, en el punto $c \in (a, b)$. Entonces:

- a) Si $f'(x)$ es positiva $\forall x < c$ y negativa $\forall x > c$, f tiene un máximo relativo en c .
- b) Si $f'(x)$ es negativa $\forall x < c$ y positiva $\forall x > c$, f tiene un mínimo relativo en c .

Demostración:

Vamos a demostrar el primer apartado. El segundo se haría de forma análoga.

El teorema 6 nos dice que f es estrictamente creciente en $[a, c]$ y que f es estrictamente decreciente en $[c, b] \Rightarrow f(x) < f(c) \forall x \neq c$ en $(a, b) \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en c .

■

Definición 17 (Punto crítico)

Para una función continua f en $[a, b]$, un **punto crítico** es un punto $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Tras localizar un punto crítico, hay que estudiar si dicho punto es un máximo, un mínimo o ninguno de los dos. Para ello, necesitamos más información sobre la función objeto de estudio, puesto que la naturaleza de un punto crítico podrá determinarse a partir del signo de la derivada en los alrededores del punto, utilizando los teoremas que hemos desarrollado anteriormente. Sin embargo, también la derivada segunda de una función puede sernos útil a la hora de estudiar los extremos de una función.

Teorema 8 (Criterio de la derivada segunda para extremos en un punto crítico)

Sea c un punto crítico de f en el intervalo (a, b) ; es decir, $f'(c) = 0$ para $a < c < b$. Supongamos que existe f'' en (a, b) , entonces:

- a) Si f'' es negativa en (a, b) , entonces f tiene un máximo relativo en c .

b) Si f'' es positiva en (a, b) , entonces f tiene un mínimo relativo en c .

Demostración:

Vamos a demostrar el primer apartado. El segundo se haría de forma análoga.

Partimos de que $f'' < 0$ en (a, b) . Según el teorema 6 (considerando f' como f''), f' es estrictamente decreciente en (a, b) .

Pero, por hipótesis, $f'(c) = 0$, por lo cual f' cambia su signo en c de positivo a negativo.

$f'(x) > 0 \forall x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0 \forall x \in (c, b)$ luego, por el teorema 7, f tiene un máximo relativo en c .

■

4.4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

La primera derivada de una función nos da mucha información acerca de las propiedades de la misma. Sin embargo, hay algunos aspectos de las funciones que solo se pueden estudiar a partir de la derivada segunda. Este es el caso de los conceptos de convexidad y concavidad.

Intuitivamente, las funciones cóncavas y convexas presentan una característica muy particular: toda recta tangente de la función corta a la gráfica en dicha función una única vez.

Vamos a ver, ahora, las definiciones de función cóncava y convexa.

Definición 18 (Función convexa 1)

Se dice que una función f es **convexa** en un intervalo I si para cualesquiera dos puntos del intervalo, p y q , la gráfica de la función f se sitúa por debajo del segmento que une $(p, f(p))$ y $(q, f(q))$. Si se sitúa por encima en vez de por debajo, la función será cóncava.

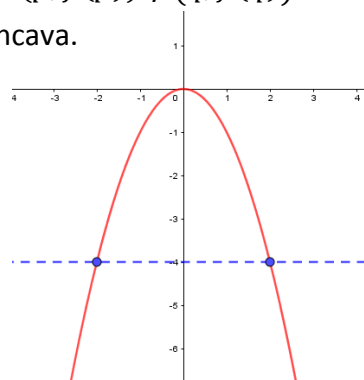


Ilustración 12: Ejemplo de función cóncava.
Elaboración propia.

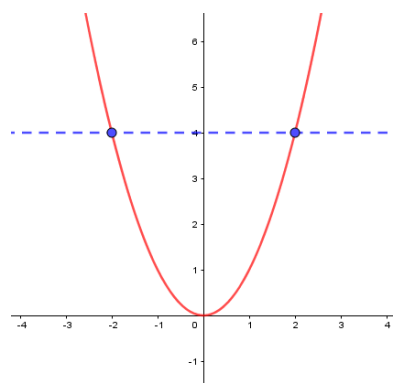


Ilustración 13: Ejemplo de función convexa. Elaboración propia.

Esta sería una definición geométrica de la convexidad, pues necesitaríamos la ayuda de la gráfica de f para poder discernir si la gráfica es convexa o no.

Para poder definir la convexidad de una función sin tener que recurrir a la gráfica, definimos una nueva función g . Dicha función es la función de la recta que pasa por $(p, f(p))$ y $(q, f(q))$.

$$g(x) = f(p) + \frac{f(q) - f(p)}{q - p}(x - p)$$

Por la definición, para que una función sea convexa en un punto x , f tiene que estar por debajo de g en dicho punto; esto es, $g(x) > f(x)$.

$$f(p) + \frac{f(q) - f(p)}{q - p}(x - p) > f(x)$$

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} > \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Hemos obtenido, así, una definición de función convexa equivalente:

Definición 19 (Función convexa 2)

Diremos que f es una **función convexa** en un intervalo si, para p , x y q en dicho intervalo con $p < x < q$, se tiene que:

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} > \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

En el caso de la concavidad, basta con cambiar la expresión por debajo por la expresión por encima en la primera definición que hemos dado de función convexa. Además, razonando análogamente, llegamos a la definición analítica de función cóncava:

Definición 20 (Función cóncava)

Diremos que f es una **función cóncava** en un intervalo si, para p , x y q en dicho intervalo con $p < x < q$, se tiene que:

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} < \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Veamos un teorema que nos va a permitir saber cuándo una función es cóncava o convexa en función de la primera derivada o en función de la segunda derivada.

Teorema 9 (Criterio de la derivada para la convexidad)

Supongamos que f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que dicha función es, además, derivable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces, si f' es creciente en (a, b) , f es convexa en $[a, b]$. En particular, f es convexa si existe f'' y f'' es no negativa en (a, b) .

Demostración:

Sean p y q dos puntos del intervalo $[a, b]$ tales que $p \neq q$.

- Supongamos que $p < q$. Aplicando el Teorema del valor medio, podemos afirmar que $\exists c \in (p, q)$ tal que $f(q) - f(p) = f'(c)(q - p)$.

Por ser f' creciente (hipótesis), sabemos que $f'(p) \leq f'(c) \leq f'(q)$; por tanto, aplicando esto en la igualdad resultante del Teorema del valor medio, nos queda:

$$f(q) - f(p) \geq f'(p)(q - p)$$

- Supongamos que $q < p$. Volvemos a aplicar el Teorema del valor medio para llegar a que $\exists c \in (q, p)$ tal que $f(p) - f(q) = f'(c)(p - q)$. Esto es equivalente a decir que $\exists c \in (q, p)$ tal que $f(q) - f(p) = f'(c)(q - p)$.

Ahora, usaremos, por un lado, que $f'(c) \leq f'(p)$, ya que $c < p$, y por otro lado que $q - p < 0$. De aquí, nos quedaría:

$$f(q) - f(p) \geq f'(p)(q - p)$$

Concluimos diciendo que, para dos puntos $p, q \in [a, b]$, se cumple la misma desigualdad, independientemente del orden de dichos puntos.

Vamos a tomar ahora tres puntos cualesquiera del intervalo $[a, b]$, los puntos $x < y < z$.

- Para $y < z$, aplicamos la desigualdad anterior para $p < q$:

$$f(z) - f(y) \geq f'(y)(z - y) \Rightarrow \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq f'(y)$$

- Para $x < y$, aplicamos la desigualdad anterior para $q < p$:

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y)$$

Por ser $x - y < 0$, llegamos a que:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y)$$

Con ambas desigualdades, hemos llegado a que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Y, por tanto, concluimos diciendo que f es una función convexa en el intervalo $[a, b]$.

Ahora, para finalizar, vamos a probar la segunda parte del teorema. Supongamos que existe la derivada segunda de la función f y que, además, $f'' \geq 0$ en todo el intervalo (a, b) . Bajo estas hipótesis, podemos aplicar el Teorema 6 para afirmar que f' es una función creciente en el intervalo $[a, b]$. Por lo demostrado anteriormente, que f' sea creciente, implica que la función f es convexa en el intervalo $[a, b]$.

■

Hemos demostrado que el signo de la derivada segunda está estrechamente ligado a la convexidad o concavidad de una función. Si f'' es positiva, la función será convexa. Además, de aquí, se deduce que si f'' es negativa, la función será cóncava. Esto último se debe a que si f es convexa, $-f$ es cóncava.

Hay ocasiones en las que, dado un punto $(p, f(p))$ de una gráfica, la recta tangente a f en el punto p corta a la gráfica de f en algún punto además de $f(p)$. Cuando esto ocurre, nos encontramos ante un tipo de puntos llamados puntos de inflexión. Además, en estos puntos, la derivada segunda vale cero. Sin embargo, que la derivada segunda valga cero no es una condición suficiente para poder caracterizar un punto de inflexión. Necesitaremos algo más.

Definición 21 (Punto de inflexión)

Dada una función f , diremos que f presenta un **punto de inflexión** en p si $f''(p) = 0$ y, además, f'' tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de p .

4.5. Asíntotas

Antes de comenzar a ver qué es una asíntota, y suponiendo que ya conocemos el concepto de límite, vamos a definir el concepto de límites laterales.

Definición 22 (Límites laterales)

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Se consideran:

$$A_{izq} = (-\infty, a] \cap A$$

$$A_{der} = [a, +\infty) \cap A$$

Ahora, tomamos a un punto que es tanto punto de acumulación de A_{izq} como punto de acumulación de A_{der} , para garantizar que hay puntos tan próximos a los dos

lados de a como se desee. Por ello, se puede hablar de límite por la izquierda y límite por la derecha de a .

Definimos el límite por la izquierda de a de la función f como:

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \in A_{izq}} f(x)$$

Análogamente, definimos el límite por la derecha de a de la función f como:

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \in A_{der}} f(x)$$

Conociendo el concepto de límite y de límites laterales, ya podemos definir qué es una asíntota. Las asíntotas nos serán muy útiles a la hora de representar la gráfica de una función.

Definición 23 (Asíntota)

Dada una función f y una recta cualquiera $y = mx + b$, diremos que la recta $y = mx + b$ es una **asíntota** de f si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

Podemos estudiar algunos casos particulares de la definición de asíntota: las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales.

Definición 24 (Asíntota vertical)

Dada una función f y una recta vertical $x = a$, diremos que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ x \rightarrow a^-}} |f(x)| = \pm\infty$$

Definición 25 (Asíntota horizontal)

Dada una función f y una recta horizontal $y = b$, diremos que la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de f si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

4.6. Representación gráfica de curvas

De manera intuitiva, tenemos una tendencia a visualizar las funciones mediante nuestra intuición geométrica, de forma que las propiedades de las funciones queden patentes en esa imagen. Para esbozar una función, utilizamos una gráfica.

Definición 26 (Gráfica de una función)

Sea f una función real de variable real. Llamamos **gráfica** de f a la representación geométrica del conjunto:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{Dom}(f), y \in \text{Im}(f)\}$$

Para dibujar una gráfica, lo ideal es que primero estudiemos sus propiedades para tener una visión más clara de cómo será la representación. Vamos a hacer un ejemplo de representación y gráfica de una función.

Ejemplo 1

Definimos la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

El dominio de f es el intervalo $(0, +\infty)$, donde está definida la función.

La función f no es periódica.

Calculamos, ahora, los puntos de corte con los ejes:

- Con el eje de abscisas, donde $y = 0$

$$\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

La función f corta al eje X en el punto $x = 1$; es decir, la función pasa por el punto $(1, 0)$.

- Con el eje de ordenadas, donde $x = 0$

No existe dicho punto de corte, puesto que $0 \notin \text{Dom}(f)$.

Veamos si nuestra función tiene algún tipo de simetría:

- Para que haya simetría par, $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Esto no se puede dar, ya que, si f existe en el punto x , f no existirá en $-x$, pues f solo está definida en la mitad del plano.
- Habrá simetría impar si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in (0, +\infty)$; esto es,

$$\frac{\ln(x)}{x} = -\frac{\ln(x)}{x} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

La igualdad anterior solo se cumple para $x = 1$; por tanto, no hay simetría impar.

La función es continua en su intervalo de definición; esto es, f es continua en $(0, +\infty)$.

Ahora, vamos a ver la monotonía y los extremos de la función. Para ello, calculamos la primera derivada de f .

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Igualamos a cero esta expresión para encontrar los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Hay un punto crítico en $(e, f(e)) = (e, 1/e)$.

Estudiamos el valor de la derivada a ambos lados del punto crítico:

- $f'(1) = \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = 1 > 0 \Rightarrow$ Por el teorema 6, f es estrictamente creciente en $(0, e)$.
- $f'(3) = \frac{1 - \ln(3)}{3^2} = \frac{1 - \ln(3)}{9} = -0.0109 < 0 \Rightarrow$ Por el teorema 6, f es estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$.

Por el teorema 7, podemos concluir diciendo que en el punto $(e, 1/e)$ hay un máximo relativo.

Además, a la vez que buscábamos conocer si este punto era un máximo o un mínimo, hemos averiguado cómo se comporta la función f en términos de crecimiento y decrecimiento.

A continuación, estudiamos la convexidad y la concavidad de f . En primer lugar, veamos si hay algún punto de inflexión. Para ello, utilizamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$$

Para hallar los posibles puntos de inflexión igualamos a cero la segunda derivada:

$$\frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

Hay un posible punto de inflexión en el punto $(e^{3/2}, f(e^{3/2})) = (e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}})$

Veamos la convexidad y concavidad a izquierda y derecha de este punto. Para ello, miramos el signo de la derivada segunda y utilizamos el Criterio de la derivada para la convexidad.

- $f''(1) = \frac{-3+2\ln(1)}{1} = -3 > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en $(0, e^{3/2})$.
- $f''(6) = \frac{-3+2\ln(6)}{6^3} = 0.0027 > 0 \Rightarrow f$ es convexa en $(e^{3/2}, +\infty)$.

Ahora sí podemos asegurar que en $(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}})$ hay un punto de inflexión y, además, sabemos cómo se comporta la función en términos de convexidad y concavidad.

Veamos si esta función tiene alguna asíntota. Para ello, calculamos los límites de f en 0 por la derecha y en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty \Rightarrow \text{Hay una asíntota vertical en } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 0$$

(hemos aplicado la regla de L'Hôpital).

Ahora, una vez que sabemos, analíticamente, las características de la gráfica, podría ser conveniente realizar una tabla con todos los puntos destacables de la función y, si fuese preciso, algunos más, para ayudarnos en la representación.

En este caso, la gráfica de f queda como sigue:

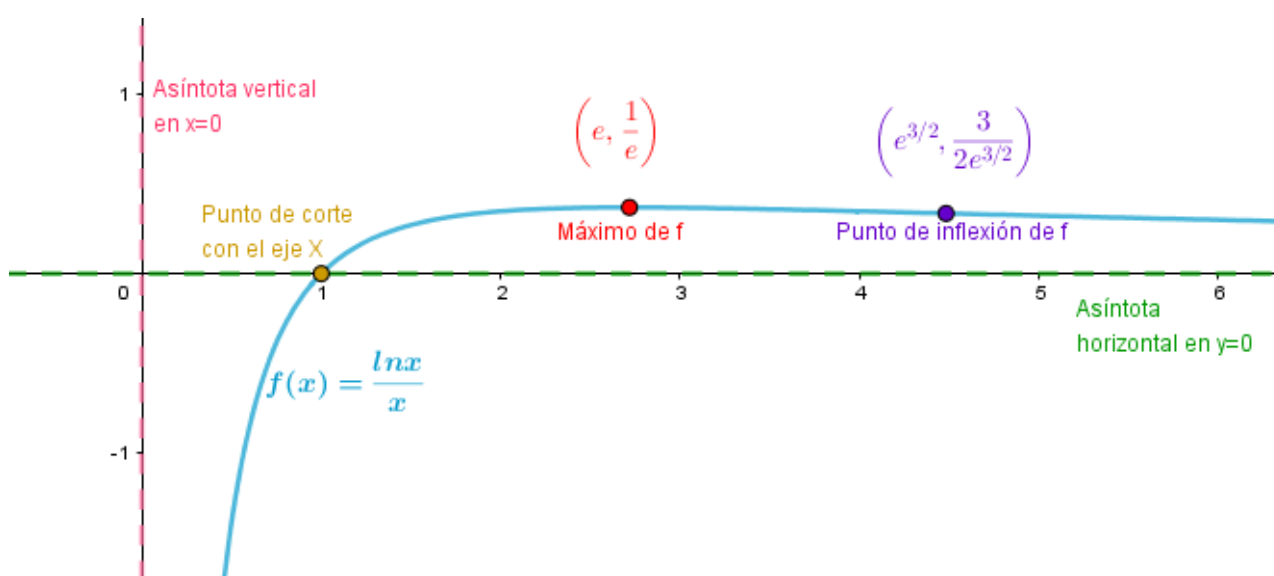


Ilustración 14: Gráfica de la función estudiada. Elaboración propia.

5. Fundamentación Didáctica: Investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza

La investigación en el área de la didáctica de las matemáticas, es decir, sobre cómo aprenden los alumnos y las alumnas las matemáticas, es amplia y compleja. Concretamente, estudiaremos cómo los estudiantes aprenden, interpretan e interiorizan los conceptos relacionados con este trabajo: la función y su gráfica. Además, será importante tener en cuenta cuales son aquellos errores y fallos más comunes entre ellos, para poder hacer más hincapié en dichos errores a la hora de desarrollar nuestra unidad didáctica con el fin de reducir esos fallos entre los miembros de nuestra clase. Sin embargo, en este apartado no se pretende elaborar un estado de la cuestión, sino hacer un breve análisis de algunos artículos de investigación que pueden ser interesantes para alcanzar un conocimiento más profundo del tema que nos ocupa.

A la hora de realizar nuestra reseña nos hemos centrado en un artículo y un libro:

- Arce, M. y T. Ortega (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato. *PNA*, 8:2, 61-73.
- Ruiz Higuera, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén.

Tanto el artículo como el libro centran su investigación en alumnos de Educación Secundaria, lo que es muy adecuado para el presente TFM, ya que la unidad didáctica está orientada a estudiantes de la ESO. Para realizar el análisis también vamos a ayudarnos, aunque en menor medida, del artículo de Alpízar Vargas *et al.* (2018), ya que tiene una temática similar y es muy adecuado para complementar nuestra reseña.

La razón por la que se ha querido estudiar el artículo de Arce y Ortega (2013) es su temática. En él se tratan los errores que los alumnos suelen cometer a la hora de realizar gráficas de funciones y, para intentar superar esos fallos, es necesario, en primer lugar, conocer dichos errores frecuentes y, así, poder abordarlos. Respecto al libro de Ruiz Higuera (1998), la temática es similar pero más generalizada al concepto de función, sin centrarse únicamente en lo referente a las gráficas. Además, ha sido decisivo a la hora de elegir este libro el hecho de que Ruiz Higuera es una investigadora de prestigio en la Universidad de Jaén y que centró su tesis doctoral en este aspecto.

Según Alpízar Vargas *et al.* (2018:7), poder detectar los errores asociados a un concepto matemático concreto nos permite saber qué aspectos han influido en el proceso de aprendizaje del alumnado. Es por ello, que, a fin de evitar los errores, los contenidos de la asignatura se deberían adaptar para poder tratar adecuadamente la diversidad de cada clase.

En Abrate, Pochulu y Vargas (2006), podemos encontrar una lista de los principales errores que los alumnos cometen en la asignatura de matemáticas:

- Errores debidos al mal uso de símbolos matemáticos.
- Errores debidos a representaciones poco adecuadas.
- Errores debidos al incorrecto uso de los conceptos.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas.
- Errores debidos a la mala traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico o gráfico.
- Errores debidos a la mala interpretación de las gráficas.

Este último tipo de errores será de gran interés en este análisis, ya que uno de los artículos tratados se dedica exclusivamente a la investigación de los errores al dibujar gráficas.

Para empezar, veamos qué errores cometen los estudiantes en cuanto al concepto de función, un concepto fundamental en matemáticas y que, muchas veces, no queda lo suficientemente claro, lo que puede dar lugar a errores importantes.

Tal y como dice Alpízar Vargas *et al.* (2018:16), en muchas ocasiones, los errores cometidos por los estudiantes se deben a la falta de dominio de los conceptos. Además, muchos de los errores no se deben particularmente a un mal manejo de los contenidos sobre funciones, sino que son errores en las operaciones básicas y contenidos más simples que, en teoría, el alumnado ya debería saber de otros años. Esto último resulta alarmante aunque, realmente, nada tiene que ver con los problemas que envuelven al concepto de función.

Según Ruiz Higuera (1998:279-281), hay tres aspectos a tener en cuenta cuando hablamos de la función: la comprensión del concepto, la representación de funciones y el uso de las funciones. En estos tres ámbitos, el alumnado tiene opiniones muy diversas.

Por ejemplo, en cuanto a la comprensión del concepto de función (Ruiz Higuera, 1998:280), encontramos muchas concepciones erróneas. Un ejemplo de ello sería no considerar las constantes como funciones, ya que, para una parte del alumnado, una función es únicamente una expresión donde, a partir de un valor para x , obtenemos un valor para y , y esto deja de lado las funciones constantes. Otro ejemplo es que algunos estudiantes no tienen en cuenta el hecho de que cada elemento de una función debe tener una imagen única, lo que no encaja en absoluto con el concepto mismo de función.

Por otro lado, con respecto a la representación de las funciones, Ruiz Higuera (1998:280) nos dice que, por un lado, hay estudiantes que únicamente reconocen la función en su forma explícita, mientras que otros piensan que solo es función aquella

expresión algebraica que se puede representar en forma de gráfica. Ahora bien, la opinión de muchos es que dicha gráfica tiene que seguir ciertos patrones de regularidad o continuidad, no pudiendo ser gráfica de una función aquella que presente demasiadas discontinuidades o un trazado irregular. Además, los alumnos piensan que ciertos aspectos de las funciones, tales como la continuidad o la monotonía, son aspectos intrínsecos de las gráficas y no de las funciones en su forma analítica.

Por último, en cuanto al último aspecto tratado en la investigación de Luisa Ruiz Higuera (Ruiz Higuera, 1998:281), hay unanimidad en la opinión de los alumnos en cuanto al uso de las funciones: de una manera u otra, todos piensan que las funciones sirven para resolver cuestiones intramatemáticas, tales como construir una gráfica, construir una tabla de valores, resolver una ecuación o determinar el dominio de una función, dejando totalmente de lado la aplicación de las funciones a la vida real o más allá de las propias matemáticas. No tienen en absoluto en cuenta cómo las funciones nos ayudan a modelizar situaciones cotidianas en las que se produce una variación.

Así pues, Ruiz Higuera (1998:286) nos habla de las inconsistencias que ha encontrado en el alumnado con respecto al tema de funciones. Entre ellas, destacan, por ejemplo, la incapacidad del alumnado para distinguir una función en su forma explícita o implícita, o también, la dificultad para asociar una función en forma algebraica a su gráfica.

No es Ruiz Higuera la única que ha llegado a estas conclusiones. Otros investigadores tales como Vinner, Tall y Dreyfus (1981, 1989) o Sierpiska (1989, 1992) identifican, en sus investigaciones, concepciones idénticas o análogas. Es así que son muchos los investigadores que han llegado a la misma conclusión que Ruiz Higuera en cuanto a los problemas que presentan los alumnos a la hora de trabajar con funciones y gráficas.

El tema de las gráficas de funciones también es extenso y amplio. Son innumerables los errores que los estudiantes pueden cometer en este aspecto. En primer lugar, un 36,2% del alumnado considera la gráfica como el fin de un proceso de análisis de una función y no como una herramienta para poder entender mejor la función objeto de estudio (Ruiz Higuera, 1998:283). Pero, no es solo la finalidad de las gráficas lo que tiene confundidos a los alumnos. También comenten muchos errores a la hora de representar las gráficas de una forma adecuada.

Es sobre este tema que trata el artículo de Arce y Ortega (2013:62): la gran cantidad de errores que encontramos en las representaciones de las funciones por parte de los alumnos. Duval (1993) considera que las representaciones son el principal motor para la comprensión de los conceptos. Son las diferentes formas de representar un concepto y la soltura a la hora de pasar de unas representaciones a otras lo que

enriquece el concepto para el alumnado. El problema de los fallos en las representaciones es que los alumnos confían mucho en dichas representaciones para resolver problemas y, es por ello que esas representaciones deberían ser lo suficientemente adecuadas y ajustarse a la definición del concepto representado (Vinner, 1991).

Para suplir estas carencias, se pretende observar cuáles son los errores más comunes que cometen los alumnos cuando representan la gráfica de una función. Las deficiencias que se encuentran pueden provocar dificultades para interpretar una función de manera adecuada únicamente a través de la información que nos da su representación gráfica (Arce y Ortega, 2013:64). Las deficiencias más comunes son:

- Deficiencias por el concepto de función

Estas deficiencias se deben a que los alumnos no tienen en cuenta la unicidad de la imagen de una función. A la hora de dibujar una gráfica esto se refleja en dos aspectos: un 62% dibuja ramas prácticamente verticales en ramas infinitas que no son asintóticas, como es el caso de las parábolas, y un 31% dibuja varios puntos imagen para un mismo punto del dominio. Este fenómeno se da, sobre todo, en las funciones definidas a trozos (Arce y Ortega, 2013:65).

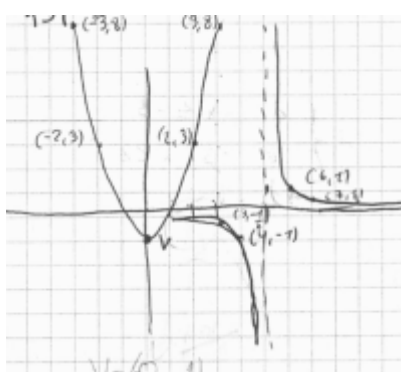


Ilustración 15: Función a trozos con diferentes imágenes para un mismo punto del dominio.
Fuente: Arce y Ortega (2013:66)

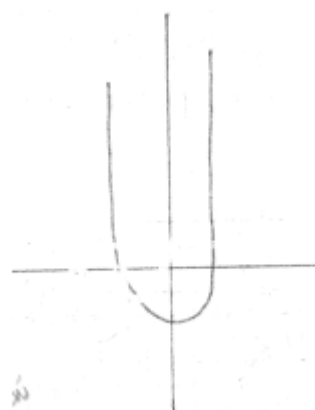


Ilustración 16: Ramas verticales en parábola.
Fuente: Arce y Ortega (2013:65)

- Deficiencias por el concepto de asíntota

Los errores en la representación de asíntotas son muy numerosos. Según Arce y Ortega (2013:66), hay estudiantes que, incluso, no dibujan las asíntotas cuando corresponde o, si lo hacen, no parece una asíntota como tal. También hay ocasiones en las que se produce un alejamiento entre la asíntota y la función en la parte final del trazado de la función cuando, ahí, la función debería estar más cercana a la asíntota que nunca. Sin embargo, el mayor problema a la hora de dibujar asíntotas es que el acercamiento de la función a la asíntota no se produce de manera progresiva. De

hecho, la función y la asíntota equidistan a partir de un cierto punto en las representaciones de un 83% del alumnado.

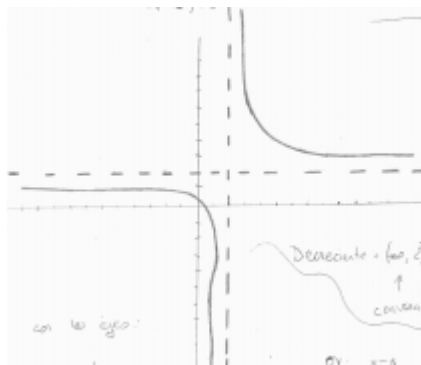


Ilustración 17: Trazado de asíntotas.
Fuente: Arce y Ortega (2013:66)

- Deficiencias por el uso de escalas en los ejes

En cuanto al uso de escalas, Arce y Ortega (2013:67) señalan que un 41% de los alumnos y alumnas usan escalas no proporcionadas. Por otro lado, la deficiencia más común (un 76% del alumnado) es la omisión de las escalas; es decir, no usan ningún tipo de escala para hacer una representación precisa de la gráfica.

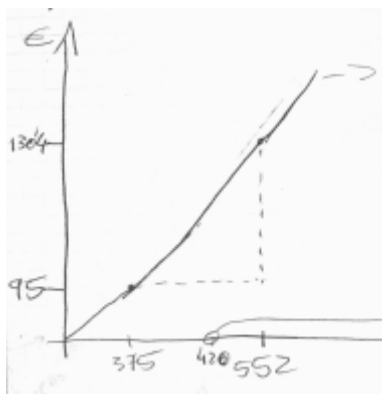


Ilustración 18: Uso de una escala no proporcionada.
Fuente: Arce y Ortega (2013:67)

- Deficiencias por las características de las funciones

En este caso, Arce y Ortega (2013:68) nos presentan varios ejemplos de deficiencias que tienen que ver con las propias características de la función. Es el caso del crecimiento en la función, por ejemplo, logaritmo, donde la rama infinita (no asíntótica, la función es creciente en todo su dominio) se acaba trazando paralela al eje o, incluso, decreciente. También se menciona la derivabilidad de las parábolas, la cual puede ponerse en duda debido a la forma de pico tan pronunciada que se puede encontrar en ciertas gráficas en el entorno del vértice de la parábola.

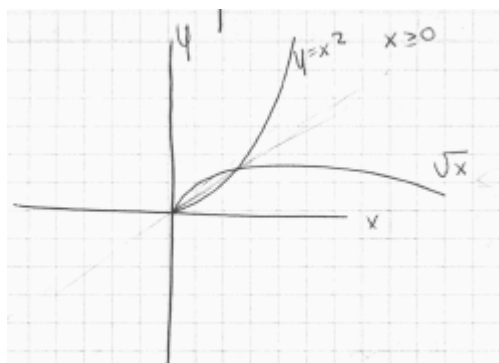


Ilustración 19: Incoherencia con la propiedad de crecimiento. Fuente: Arce y Ortega (2013:68)

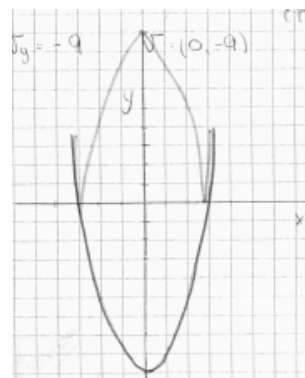


Ilustración 20: Forma pronunciada de pico en el vértice de la parábola. Fuente: Arce y Ortega (2013:69)

Según estas investigaciones, existen causas por las que los alumnos comenten estos errores, tanto los relacionados con el concepto de función, su representación y su uso, como los de trazado de funciones.

Tal y como argumenta Ruiz Higuera (1998:286-287), el alumnado se enfrenta a una serie de obstáculos cuando le explican el concepto de función. Estos obstáculos pueden ser didácticos (errores que se deben al tratamiento limitado en que los alumnos reciben información sobre las fórmulas, técnicas algebraicas o la proporcionalidad, por ejemplo) o debidos al propio conocimiento del alumno (errores que se deben a intuiciones erróneas o conceptos que malinterpretan). Además, la enseñanza fomenta el uso de funciones específicamente configuradas para estudiar ciertas características, lo que podría suponer el desconocimiento de otro tipo de funciones por parte de los estudiantes (Ruiz Higuera, 1998:295).

Por otro lado, en cuanto al trazado de gráficas, Arce y Ortega (2013:69) defienden que las causas por las que encontramos deficiencias en el trazado de gráficas de funciones podrían ser que el alumnado no ha asimilado adecuadamente las propiedades de las funciones, que no saben transcribir adecuadamente esas propiedades al trazado de la gráfica o que existen errores en los propios de conceptos de función, asíntota, etc. Además, estos errores se pueden ver incrementados si el docente comete algún error didáctico. El hecho de que, además, el trazado de una función en papel es impreciso contribuye a aumentar las deficiencias de la representación.

Además, hoy en día, se prioriza la evaluabilidad; es decir, la necesidad de que las funciones o las gráficas objeto de estudio por parte de los alumnos y las alumnas sean adecuadas para poder evaluarlas fácilmente. El sistema de enseñanza actual se centra mucho en la importancia de lo algebraico (Ruiz Higuera, 1998:296) y, de esta forma, se deja totalmente de lado la importancia de la modelización, de manera que los estudiantes, por un lado, tienen concepciones muy limitadas sobre el concepto de función o el uso de las gráficas y, por otro lado, no pueden ver un objetivo en el uso de

las matemáticas más allá del plano intramatemático (Ruiz Higuera, 1998:288). En definitiva, los alumnos no llegan a conocer la importancia de las funciones en nuestra vida cotidiana.

Veamos, ahora, qué soluciones se proponen para intentar suplir todos los errores y las deficiencias que hemos mencionado a lo largo de este análisis.

En primer lugar, Ruiz Higuera (1998:300) nos habla de la necesidad de abordar problemas de modelización para que los alumnos tengan una visión de las funciones más allá de las propias matemáticas. Así, se podrá ver cómo las funciones y las gráficas son herramientas útiles. Por otro lado, las actividades que se proponen deberían ir más allá de aquellas cuya resolución se alcanza mediante el uso mecánico y sistemático de algoritmos, sin necesidad de que el alumnado piense o se cuestione cómo está utilizando los conceptos (Alpízar Vargas *et al.*, 2018:17).

Y, en cuanto a las gráficas, es necesario que el alumnado interprete las gráficas como una manera de expresar la variabilidad y la dependencia y no únicamente como un soporte para señalar propiedades de la función (Ruiz Higuera, 1998:300). Además, los estudiantes deben desarrollar su pensamiento crítico en cuanto al trazado de funciones y poder decidir por ellos mismos hasta qué punto una representación gráfica refleja adecuadamente y con precisión las propiedades de la función que representa (Arce y Ortega, 2013:70).

En resumen, la modelización se basa en las funciones y sus representaciones y, siendo una herramienta tan útil y potente, es una pena que los alumnos se queden únicamente con el uso de las funciones y el estudio de sus propiedades en el plano matemático. Por ello, los docentes deben propiciar un acercamiento a la modelización matemática y el desarrollo del pensamiento crítico por parte del estudiantado para que, por sí mismos, puedan discernir cuando se ha utilizado el concepto de función o su representación de una manera adecuada y no limitante.

6. Proyección Didáctica: Elaboración de una Unidad Didáctica

6.1. Título

La unidad didáctica que vamos a desarrollar a continuación recibe el nombre de “Funciones y gráficas” y se incluye en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso académico de 3º de ESO.

6.2. Justificación

En este apartado, se defiende desde varios puntos de vista el porqué es necesaria la elaboración de la presente unidad didáctica sobre funciones y sus gráficas correspondientes.

6.2.1. Justificación curricular

Previamente, en el apartado de fundamentación curricular, se realiza un análisis del currículo, donde se pone de manifiesto aquellos contenidos que se estudian en el bloque sobre funciones y, también, en el bloque primero, que debe ser complementario al resto de bloques. En este caso, nos centraremos únicamente en el bloque de las funciones, del que obtendremos aquellos conceptos que vamos a ver en esta unidad didáctica. Además, no todo lo recogido en el bloque de funciones va a estudiarse en este apartado, puesto que sería demasiado temario para ver en una única unidad y es por ello que, en el presente tema, solo veremos la primera mitad de los contenidos que deben estudiarse relacionados con las funciones.

Tanto en el Real Decreto 1105/14, de 26 de diciembre, como en la Orden de 14 de julio de 2016, se establecen los contenidos que se deben estudiar en la materia de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 3º de ESO acerca de las funciones, las propiedades de las mismas y su representación gráfica. En concreto, sobre este tema, la Orden de 14 de julio de 2016, nos dice:

“Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.”

Asociados a estos contenidos encontramos los siguientes criterios de evaluación:

1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. CMCT.
2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. CMCT, CAA, CSC.

Y, por último, en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, encontramos los estándares de aprendizaje evaluables asociados a los criterios de evaluación de los contenidos objeto de estudio:

- 1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
- 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.
- 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
- 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.
- 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
- 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Podemos ver que hemos obviado aquellos contenidos acerca de funciones cuadráticas y de las distintas expresiones de la recta, puesto que dichos contenidos no se van a desarrollar en la presente unidad, ya que estos se incluirían en una unidad posterior que no nos compete en este TFM.

Relacionados con los criterios de evaluación descritos arriba, podemos ver que los alumnos van a desarrollar las siguientes competencias con el estudio de los contenidos de esta unidad: CMCT (Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología), CAA (Competencia de aprender a aprender) y CSC (Competencias sociales y cívicas).

Además de las competencias mencionadas, también se tratarán otras competencias como:

- La competencia lingüística, que se adquiere con la lectura de los enunciados y con la explicación de las soluciones obtenidas para los problemas.
- La competencia digital, que se adquiere mediante la investigación a través de Internet y el uso de programas informáticos. Con ella, se pretende que el alumnado desarrolle un alto grado de responsabilidad digital.

Aunque estas competencias están menos relacionadas con las matemáticas en sí, son igualmente importantes para el desarrollo de los estudiantes en la vida cotidiana, además de fomentar ciertas habilidades que pueden serles de utilidad para otras asignaturas y, en el futuro, para el ámbito profesional.

6.2.2. Justificación social y/o profesional

Las funciones son una parte de las matemáticas que se utilizan mucho, desde siempre, en diferentes situaciones de nuestro día a día. El problema es que, en la mayoría de las ocasiones, no nos damos cuenta de que estamos usándolas.

Según Ballester Sampedro (2009:2), en cualquier ámbito de la ciencia (y también en ámbitos que no son de ciencias), podemos establecer leyes que relacionan distintas magnitudes, por ejemplo, podemos relacionar la masa con la velocidad; esto es, a partir del valor de una magnitud y a través de una función, podemos llegar a conocer el valor de otra magnitud relacionada con la primera. Además, las funciones pueden ser representadas algebraicamente o en forma de gráficas. Esta última forma de representación nos ayuda a poder visualizar más fácilmente cómo una función relaciona magnitudes y es más intuitiva y entendible para todo tipo de personas.

Las áreas en las que están presentes las funciones son muchísimas, puesto que relacionar dos magnitudes mediante una fórmula demostrada puede ser muy útil para predecir el comportamiento de una magnitud en función de la otra.

Las funciones se utilizan, por supuesto y para empezar, en las matemáticas y en la estadística, pero también en multitud de ámbitos de la física, como por ejemplo, la cinemática, la dinámica, la energía, la termodinámica, etc., y, por tanto, se estudiarán tanto en los estudios superiores de ingenierías como en física, óptica, química, biología. También podemos encontrar funciones en el área de la economía, donde, por ejemplo, los costes y la cantidad de producto pueden relacionarse mediante una función.

Y no es solo en estos ámbitos donde aparecen las funciones. También podemos encontrar funciones, por ejemplo, en el área de la música y del sonido. Los pitagóricos, en la antigua Grecia, ya defendían que “toda la naturaleza consiste en armonía que brota de números”.

En resumen, son muchas las áreas del conocimiento en las que es necesario el uso de funciones. No solo en estudios superiores, también en la vida diaria donde predomina, sobre todo, la función lineal.

Para terminar, por ejemplificar un poco cómo las funciones están presentes en nuestra vida aunque, a veces, no seamos conscientes de ello, ponemos el ejemplo de

la escala de Richter, de la que todos hemos oídos hablar en la televisión o en otros medios de comunicación. Esta escala se utiliza para medir la fuerza de los seísmos o terremotos y se implementa a través de una función. De la misma manera que este ejemplo, hay infinidad de funciones presentes en nuestra sociedad y que tienen una clara utilidad práctica.

6.2.3. Justificación interna

Es fundamental que los estudiantes comprendan el concepto de función y de gráfica de una función, pues, durante su etapa académica, necesitarán este conocimiento para abordar nuevos temas relacionados con las funciones.

Son muchísimos los conocimientos que tienen su base en las funciones. En la ESO y Bachillerato, se introducirán nociones que no tendrían sentido sin haber estudiado previamente las funciones. Por ejemplo, las funciones cuadráticas, la función inversa, la interpolación, los tipos de funciones que existen y la representación de cada uno de los tipos, los límites de las funciones, las indeterminaciones, la continuidad y los tipos de discontinuidades, la derivación, la recta tangente, la primitiva, las integrales, el cálculo de áreas mediante la integral definida, la Regla de Barrow o los problemas de optimización. Estos son algunos de los conceptos que tienen su base en las funciones.

Por otro lado, al acceder a estudios superiores relacionados con las ciencias (matemáticas, física, ingenierías, economía, óptica, etc.) es imprescindible haber aprendido y entendido perfectamente los contenidos referentes a funciones durante las etapas de ESO y Bachillerato, pues este conocimiento será fundamental a la hora de alcanzar el nivel de conocimientos exigidos en el grado universitario. Esto se debe a que muchas de las asignaturas que se verán en la universidad tienen su base en las funciones y en la modelización. Como ya dijimos en un apartado anterior, las funciones son esenciales en temas como la cinemática, la termodinámica o la economía. La Ley de la gravitación universal de Newton o la Ley de Coulomb son ejemplos de conceptos con una potente base matemática en los que necesitamos utilizar las funciones. También para la determinación de las ondas electromagnéticas de Maxwell, y así, con un largo etcétera.

En resumen, es vital el estudio de las funciones para asegurarnos el éxito futuro tanto en ESO y Bachillerato como en estudios universitarios. Las funciones son un pilar sobre el que se sustenta gran parte del conocimiento matemático superior y en torno al cual gira gran parte de la investigación matemática actual.

6.2.4. Justificación estética

Son innumerables las gráficas de funciones que podemos encontrar en la naturaleza y en nuestra sociedad y que nos permiten apreciar la belleza de las matemáticas y, en concreto, de la representación de funciones.

Podemos encontrar esta representación en movimientos en la naturaleza. Por ejemplo, en el movimiento al lanzar una pelota de fútbol (o de otro deporte). Dicha pelota va a describir una trayectoria que es, en realidad, la gráfica de una función cuadrática. También cuando un objeto se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme o con un movimiento rectilíneo acelerado, podemos expresar su movimiento en términos de una función lineal y una función cuadrática, respectivamente.



Ilustración 21: Parábola descrita al lanzar una pelota. Fuente:
https://www.bbc.com/mundo/noticias/2014/11/141121_tiros_libres_matematicas_finde_dv_hr

Por otro lado, con respecto a elementos contruidos por el hombre, podemos encontrar muchos objetos en los que su estructura sigue la gráfica de una función. Un primer ejemplo de ello sería la antena parabólica, la cual representa la gráfica de una función cuadrática o parabólica. Por otra parte, podemos localizar estructuras en muchas partes del mundo, las cuales tienen un diseño que sigue la gráfica de alguna función. Este sería el caso del puente Juscelino Kubitschek en Brasilia (el cual se identifica con una función cuadrática o parabólica) o la Capilla Bosjes en Sudáfrica (la cual se identifica con una función trigonométrica).



Ilustración 22: Puente Juscelino Kubitschek en Brasilia. Fuente:
https://es.wikipedia.org/wiki/Puente_Juscelino_Kubitschek



Ilustración 23: Capilla Bosjes en Sudáfrica. Fuente:
<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/868343/capilla-bosjes-steyn-studio>

Es de estas formas cómo, estéticamente, se puede representar en nuestro mundo las funciones y podemos, así, apreciar la belleza de las matemáticas en el ámbito del análisis matemático.

6.2.5. Justificación cultural

Las funciones han estado presentes en nuestra cultura desde la aparición de las primeras civilizaciones.

Según Sastre Vázquez *et al.* (2018:142-149), a pesar de que fue en la Edad Moderna cuando se sucedieron una serie de eventos que marcaron la evolución del concepto de función como tal, encontramos, al menos de forma implícita, la idea intuitiva de función tanto en la Edad Antigua como en la Edad Media.

Respecto a la Edad Antigua, por un lado, en la civilización babilónica, se pueden encontrar las cuatro operaciones aritméticas elementales, las cuales, realmente, son funciones con dos variables, además de progresiones como la suma de n términos, y, por otra parte, durante la época helénica, se desarrolla en profundidad el estudio en el área de la geometría y, a través de este estudio, también los griegos trabajaron con el concepto implícito de función.

Y, en cuanto a la Edad Media, se empezaron a desarrollar estudios sobre fenómenos naturales tales como el calor, la velocidad o la luz, lo que supuso una evolución en el concepto de función, que se describía con una explicación verbal de sus características principales, o a través de un gráfico.

Podemos apreciar, pues, que ya las primeras civilizaciones intuían el concepto de función aunque no fueran capaces de describirlo explícitamente. A partir de entonces, las funciones y sus gráficas han estado presentes en las matemáticas a lo largo de toda la historia y ello ha contribuido a que hayan alcanzado una gran importancia cultural actualmente.

6.3. Contextualización del centro y del aula

Toda la información acerca de la contextualización del centro I.E.S. Acebuche ha sido extraída de la página web oficial del centro.

El I.E.S. Acebuche se encuentra en el municipio de Torredonjimeno. Este municipio está situado en la provincia de Jaén, concretamente, al oeste de la capital. La distancia entre la ciudad de Jaén y Torredonjimeno es de 17 kilómetros. En general, y a pesar de los avances de los últimos años, la agricultura y, en especial, el cultivo del olivar, sigue siendo muy importante en esta localidad.

El centro se encuentra en la calle Antonio Machado, número 4.



Ilustración 24: Fachada I.E.S. Acebuche. Fuente:
www.acebuchedigital.blogspot.com

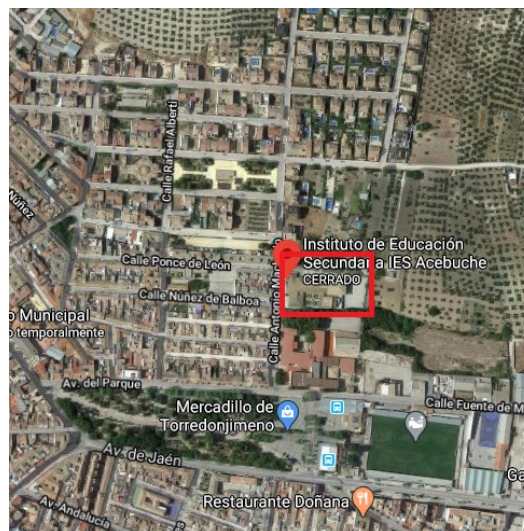


Ilustración 25: Ubicación I.E.S. Acebuche (Torredonjimeno).
Fuente: Google Maps. Elaboración propia

En el centro se imparten los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), dos bachilleratos (uno en la modalidad de Ciencias y otro en la de Humanidades y Ciencias Sociales) y tres cursos formativos: Formación Profesional Básica: Servicios Administrativos, Grado Medio: Gestión Administrativa y Grado Superior: Educación Infantil.

A este centro acuden más de 400 alumnos y alumnas cada año y el profesorado está formado por 41 profesores y una orientadora. En cuanto a este equipo docente, el 67% son mujeres, mientras que el 33% son hombres. Por otro lado, también trabajan en el centro dos conserjes, una auxiliar administrativa y dos limpiadoras.

En cuanto a las características socioeconómicas de las familias de los alumnos y las alumnas del centro, predominan las familias obreras, con profesiones poco cualificadas aprendidas en un taller pero sin haber cursado una formación profesional reglada. Esto se ve reflejado en el nivel de estudios de los padres, pues, en su mayoría, tienen únicamente estudios primarios. Además, las madres presentan, incluso, un nivel educativo más bajo que los padres.

En general, podríamos decir que las familias tienen un nivel económico medio-bajo. También, en casi todos los casos, el ambiente familiar es estable y positivo, con una media de dos hijos por familia. Asimismo, la relación de las familias con el centro es buena, destacando las relaciones de padres y madres con los tutores.

Sin embargo, como dato desfavorable, se mencionan las pocas horas dedicadas al estudio por parte de los estudiantes del centro: entre una y dos horas al día.

El curso concreto al que va dirigida esta unidad didáctica es el curso de tercero de la ESO orientado a las enseñanzas académicas. En dicha clase, durante el curso 2019/2020, hay un total de 24 estudiantes: 13 alumnas y 11 alumnos, concretamente.

Dentro de la heterogeneidad de la clase, en general, tanto los aspectos físicos como psicológicos del alumnado responden a un modelo estándar propio de su edad. Entre los alumnos no hay nadie con necesidades especiales o, al menos, que hayan sido diagnosticadas.

En principio, todos los miembros de la clase están suficientemente capacitados para seguir el ritmo de la clase, aunque hay algunos más predispuestos a aprender y a comprometerse con la asignatura que otros.

6.4. Objetivos

6.4.1. Objetivos generales de etapa

Los objetivos generales de etapa son aquellos objetivos que los estudiantes deben haber trabajado a lo largo de todo el periodo de la Educación Secundaria Obligatoria y que deben haber alcanzado al finalizar la misma. Estos objetivos se pueden encontrar en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, concretamente en el artículo 11. Dicho artículo, nos dice que la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

6.4.2. Objetivos del área de matemáticas

En la Orden del 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, encontramos que los objetivos de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, asignatura que se imparte tanto en 3º como en 4º de ESO, son:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Relación entre los objetivos generales de etapa y los objetivos generales del área de matemáticas

Objetivos del área de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas académicas (Orden de 14 de julio de 2016)	Objetivos generales de etapa (ESO) (Real Decreto 1105/2014)											
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1						X	X	X				
2						X	X					
3						X						
4					X	X						
5						X						X
6					X	X						
7						X	X					
8					X	X	X					
9		X				X						
10						X	X					
11	X		X	X		X				X		X

Tabla 7: Correspondencia entre los objetivos generales de etapa y de área. Elaboración propia.

6.4.4 Objetivos concretos de la unidad

La unidad sobre “Funciones y gráficas” presenta unos objetivos propios, que, en teoría, el alumnado debe alcanzar durante la implementación del tema y los cuales deben ser superados en el examen final de la unidad. Estos objetivos son:

1. Conocer y comprender los conceptos de función, gráfica de una función y dominio y recorrido de una función y saber distinguir entre la variable dependiente y la independiente de una función.
2. Saber interpretar una gráfica y utilizar, de forma adecuada, los ejes cartesianos y las escalas.
3. Saber transcribir adecuadamente un enunciado al lenguaje algebraico para obtener una función y, a partir de ella, saber representar la gráfica de esa función.
4. Emparejar cada gráfica con la función que la define.
5. Conocer y entender los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función y saber localizar estas propiedades en una gráfica.
6. Saber distinguir, observando su gráfica, los extremos de una función y saber cuáles son absolutos y cuáles son relativos.
7. Conocer los conceptos de función periódica y de función simétrica y saber decir, según su gráfica, si una función es periódica o simétrica.
8. Conocer el concepto de continuidad y, a partir de una gráfica, saber distinguir cuando una función es continua o cuando presenta discontinuidades.

9. Saber relacionar enunciados de problemas cotidianos con la función y la gráfica que describen dicho problema y, a partir de ellas, saber dar soluciones a esos problemas de la vida real.
10. Fomentar el uso de herramientas TIC, concretamente, para investigar el comportamiento de las gráficas y mejorar, así, el proceso de aprendizaje del alumnado.
11. Mostrar una actitud crítica hacia las resoluciones de los problemas, examinando los distintos caminos que pueden existir para llegar a la solución.
12. Reflexionar sobre si la solución de un problema es coherente con el enunciado del mismo.

6.5. Competencias Clave

Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los alumnos deben desarrollar siete competencias clave con el fin de conseguir la resolución adecuada y eficaz de actividades y problemas complejos. Dichas competencias serán adquiridas con el diseño de actividades de aprendizaje integrado, de forma que el alumnado pueda desarrollar, al mismo tiempo, más de una competencia.

Estas competencias son:

- a) Comunicación lingüística (CCL).
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).
- g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Entre ellas, las dos que se deben potenciar con más ahínco son las competencias Comunicación lingüística y Competencia matemáticas y competencias básicas en ciencia y tecnología. En concreto, en la Unidad Didáctica objeto de estudio, se intentarán implementar actividades que permitan al alumnado el desarrollo en distintas competencias.

a) Comunicación Lingüística (CCL)

Esta competencia estará presente a lo largo de toda la unidad y será fundamental para la comprensión de los contenidos y la ejecución de ejercicios. Se desarrollará esta competencia de las siguientes formas:

- Durante las explicaciones de los contenidos de la unidad por parte de la profesora.
- Durante la lectura de textos, por ejemplo, de enunciados de ejercicios, para entender con precisión su significado y poder extraer de ellos información adecuadamente.
- Durante la corrección de los ejercicios, ya sea por parte de la profesora o por parte de algún miembro del alumnado.
- Al expresarse oralmente para preguntar dudas, explicar el desarrollo de alguna actividad o dar la resolución de un ejercicio.
- Durante los trabajos o actividades en grupo, donde los alumnos interactúan, dan su opinión y la argumentan.
- Al utilizar elementos de comunicación no verbal en alguna de las situaciones anteriores.

b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

Esta competencias es fundamental en cualquier ámbito del conocimiento pero, más aún, cuando hablamos de la asignatura de matemáticas. En cuanto a esta Unidad Didáctica, esta competencia se adquiere en diversos y numerosos momentos del aprendizaje:

- Al enfrentarse a una gráfica, donde el alumno debe comprender la información que contiene y saber interpretarla. Además, asociando funciones a sus gráficas correspondientes.
- Cuando utiliza los conceptos de ciencias y de tecnología aprendidos a lo largo del tema para llegar a la solución de un problema, comprendiendo, además, su relación con nuestra vida cotidiana.
- Cuando expresa esos conceptos matemáticos con claridad y de manera adecuada y, a su vez, comprende las ideas que explican el resto de sus compañeros y compañeras.
- Cuando es capaz de reconocer la presencia de gráficas de funciones a su alrededor en el día a día.

c) Competencia digital (CD)

Esta competencia se intentará integrar a lo largo de la Unidad mediante aplicaciones y programas:

- Mediante un constructor de gráficas online para entender más intuitivamente el concepto de función.
- Mediante la representación de gráficas de funciones a través del programa GeoGebra.

- Mediante el uso adecuado de la calculadora para implementar los cálculos más complejos.
- Mediante el uso de Internet para buscar información necesaria para algunas de las actividades que se realizarán en el tema.

d) Aprender a aprender (CAA)

El alumnado debe ser consciente de aquellos aspectos de las matemáticas que conoce y que desconoce:

- Cuando se utiliza la creatividad para construir funciones que han sido inventadas.
- Cuando se desarrolla el pensamiento crítico al interpretar la coherencia de una solución o la posibilidad de llegar a ella por distintos caminos.
- Cuando estructura la información de forma adecuada, facilitando así la comprensión de los conceptos estudiados.

e) Competencias sociales y cívicas (CSC)

Debido a que el ser humano es un ser social, es fundamental en el desarrollo personal de cualquier alumno mejorar, día a día, su capacidad para relacionarse con los demás. Esta competencia es imprescindible para el éxito en el futuro profesional y personal, y se incentiva cuando:

- Se relaciona tanto con sus compañeros como con la profesora con naturalidad y calma, sin que esto suponga una situación de estrés.
- Al comunicarse con sus compañeros en el desarrollo de actividades en grupo y participar activamente en la resolución de las mismas.
- Se fomenta el diálogo y el respeto y se propicia un buen ambiente en el aula.
- Expresa su opinión sin miedo, argumentándola pero sin menospreciar las opiniones de los demás.

f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP)

Con esta competencia se pretende desarrollar en el alumnado una capacidad de decisión que le ayude a tomar decisiones en su vida futura, tanto laboral como personal, a través de diversas situaciones:

- Al buscar y encontrar, en el entorno más cercano del alumnado, situaciones que se pueden modelizar mediante el uso de funciones y gráficas.
- Encuentra motivación en la libertad dada a la hora de resolver problemas menos guiados por parte de la profesora.
- Se interesa y toma la iniciativa cuando se tiene que resolver un problema de índole menos tradicional.

g) Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Para poder conocer nuestro presente, debemos entender nuestro pasado y ser conscientes de la importancia que este tiene en nuestro día a día, como nuestro pasado nos ha llevado a la situación actual, en cualquier ámbito del conocimiento. Esta competencia se fomenta cuando:

- Se concede mucha importancia al sentido estético a la hora de representar funciones y se encuentran dichas representaciones en entornos reales.
- Al ser consciente de la importancia de las funciones en las matemáticas y en la vida real y de cómo han evolucionado a lo largo del tiempo gracias a matemáticos de gran renombre.

6.6. Contenidos

Contenidos del Real Decreto 1105/2014	Contenidos de la Unidad Didáctica
BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	-Transcribir un enunciado verbal al lenguaje algebraico; es decir, a partir de un enunciado obtener la función que modeliza dicho problema. - Enunciar las propiedades que presenta una función mediante la observación de su gráfica. -Reflexionar sobre procesos de resolución de un problema.
1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	-Asegurarse de que haya coherencia entre el enunciado de un problema y la solución a la que hemos llegado. -Analizar diferentes formas de llegar a la solución de un problema.
1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	- Investigar y recabar información sobre una actividad de índole histórica. - Investigar sobre información necesaria para realizar ciertas actividades. - Investigar acerca del comportamiento de distintos tipos de gráficas y sus propiedades más importantes.

1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	-Relacionar problemas de la vida cotidiana con funciones que modelizan dichos problemas.
1.7. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.	- Investigación histórica: búsqueda de información en la Web. - Constructor online de funciones. - Programa GeoGebra para representar gráficas a partir de funciones y enunciar las propiedades de una función a partir de su gráfica. - Búsqueda de información necesaria para realizar actividad no guiada.

Tabla 8: Contenidos bloque 1. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia.

Contenidos del Real Decreto 1105/2014	Contenidos de la Unidad Didáctica
BLOQUE 4: FUNCIONES	
4.1. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.	-Concepto de función -Concepto de gráfica e interpretación de la misma -Concepto de escala, dominio y recorrido
4.2. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.	-Crecimiento y decrecimiento -Extremos absolutos y relativos -Periodicidad y simetría -Continuidad y discontinuidades - Interpretación de estas propiedades a partir de una gráfica.
4.3. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.	-Variables dependientes e independientes -Función en sus cuatro posibles expresiones: enunciado, ecuación, tabla y gráfica, y saber pasar de una expresión a otra.

Tabla 9: Contenidos bloque 4. Fuente: Real Decreto 1105/2014. Elaboración propia.

6.7. Metodología

En la presente unidad didáctica no se utilizará una única metodología, sino que se combinarán varias con el fin de hacer el aprendizaje lo más ameno posible para los estudiantes, además de favorecer la asimilación adecuada de los conceptos y la relación de dichos conceptos con el entorno del alumnado.

En primer lugar, una de las metodologías que se usarán es la metodología tradicional: una metodología transmisiva. Esta metodología consiste en que la profesora realiza una explicación de los contenidos del tema y expone todos los conceptos y propiedades que los alumnos deben aprender en el desarrollo de la unidad. Esta metodología que, generalmente, resulta más pesada y tediosa para el alumnado es, realmente, fundamental, pues no podremos implementar otro tipo de metodologías sin que los estudiantes conozcan y entiendan los conceptos teóricos.

Complementando esta metodología, tenemos las actividades llamadas de desarrollo, las cuales se realizan con el objetivo de afianzar los conocimientos explicados por la profesora, de forma que los alumnos aprendan a desenvolverse adecuadamente con el temario visto en clase.

Durante el desarrollo de las sesiones con esta metodología, el papel del alumnado es más bien pasivo. Los estudiantes se dedicarían a tomar notas y apuntes de lo que explica la profesora o a subrayar en el libro de texto. Sin embargo, es deber de la profesora que el entusiasmo de sus alumnos no decaiga a pesar de este tipo de metodología. Para ello, es fundamental poner énfasis y pasión en las explicaciones, además de intentar generar debates y dejar preguntas en el aire para que alumnos mantengan un alto grado de atención hacia la clase.

A pesar de lo anteriormente dicho sobre la metodología transmisiva, se procurará, en general, implementar una metodología activa en todas las sesiones de la unidad. La metodología activa fomenta el pensamiento crítico en los alumnos, les invita a la reflexión desde una perspectiva crítica y favorece el intercambio libre de opiniones. Además, fomenta la autonomía y la iniciativa y, también, motiva a la participación en clase. De esta forma, los estudiantes tendrán un papel protagonista y fundamental en el desarrollo de nuestras clases, siendo una parte activa de las mismas y logrando una comunicación bidireccional, por un lado, entre docente y alumnado y, por otro lado, entre los propios estudiantes entre sí.

De esta unidad didáctica, cabe destacar, sobre todo, la importancia de trabajar en grupo, de manera colaborativa. Es por ello que casi todas las actividades, ya sean actividades de desarrollo ligadas a la metodología transmisiva u otro tipo de actividades que aplican otras metodologías, se realizan en pequeños grupos de trabajo. Y es que, como seres sociales, es fundamental para los alumnos aprender a

trabajar en grupo y a respetar la diversidad de opiniones dentro de un grupo de trabajo.

Dentro de las actividades en grupo se utilizan diferentes metodologías que nombraremos a continuación. Pero antes, señalaremos que, justo al empezar esta unidad, se mandará a los alumnos que investiguen acerca de algún matemático, de manera que puedan tener cierta perspectiva histórica de las funciones y se favorezca, así, la visualización del papel cultural, histórico y social de las matemáticas.

A lo largo de nuestra unidad, utilizaremos las herramientas TIC para, por un lado, buscar información (como en el caso de la investigación histórica, por ejemplo) y, por otro lado, utilizar aplicaciones y recursos web que nos ayuden en la comprensión y asimilación de los conceptos teóricos del tema.

La búsqueda de información a través de Internet debe hacerse desde una perspectiva crítica y responsable, adquiriendo la capacidad de filtrar toda la información a la que estamos sobreexpuestos actualmente para quedarnos, únicamente, con aquella que nos convenga. Esta es una cualidad que debe desarrollarse en los alumnos que, debido a la gran influencia de la información en nuestro día a día, deben ser capaces de reflexionar de manera crítica acerca de la información que nos llega. Por otra parte, el uso de aplicaciones y recursos web nos puede facilitar el aprendizaje de los conceptos, además de hacerlos más entretenidos a ojos de los alumnos, lo que propiciaría que el nivel de motivación y entusiasmo hacia la asignatura creciera. En general y en cuanto al tema de la informática y la tecnología, es imprescindible que tanto docentes como familiares inculquen en los menores la responsabilidad digital, por la cual se favorecerá una coexistencia digital ética y rica, donde Internet se convertiría en un espacio sano y seguro.

Puesto que el trabajo en grupo tiene tanta importancia, también lo tiene el aprendizaje dialógico. Este aprendizaje busca el diálogo igualitario entre estudiantes, donde las personas interactúan a través del diálogo de forma tolerante y, sobre todo, en igualdad. De hecho, a lo largo de toda la unidad se proponen debates y tiempos para la charla, donde se quiere que los alumnos den su opinión con argumentos coherentes y válidos y respetando la opinión del resto. Para los estudiantes es fundamental, además, la capacidad de debatir y de llegar a un acuerdo con el propio grupo de trabajo, pues la negociación y la conciliación pueden ser claves en la vida futura, tanto personal como profesionalmente.

Y, por último, vamos a hablar sobre las actividades de tipo IBL (aprendizaje por investigación). Según Abril *et al.* (2014:24), la Unión Europea considera que el aprendizaje por investigación (IBL) es la mejor metodología a la hora de enseñar en el área de las ciencias y de las matemáticas. Esto se debe a que el IBL es una metodología que expone a los alumnos a situaciones de investigación abiertas y ricas, donde

necesitarán recurrir a sus conocimientos previos, a una gran diversidad de procesos y donde se les concederá una autonomía y libertad de pensamiento mayores que en cualquier otra metodología.

Debido a los beneficios nombrados anteriormente, en esta unidad didáctica se plantean varias actividades de tipo IBL, además, para trabajarlas en grupo, de forma que, además de las ventajas propias del IBL, se busca la cooperación y colaboración entre estudiantes para poder llegar a una posible solución válida entre todos los miembros del grupo, los cuales han de participar de forma activa en la actividad. Con las actividades IBL se pretende, también, hacer más entretenido el aprendizaje y motivar al alumnado en el estudio de las ciencias y las matemáticas para que sea consciente de que esta rama de las ciencias no es algo ajeno a nuestro día a día, sino que está presente en nuestra vida diaria y es fundamental que cualquier persona tenga una base matemática sólida para poder enfrentarse a ciertos problemas cotidianos.

6.8. Actividades y recursos

A continuación, vamos a enunciar las actividades y recursos que se van a utilizar a lo largo de la presente unidad didáctica. El objetivo de estas actividades y recursos es que los alumnos afiancen los conocimientos desarrollados en el tema y logren adquirir de forma adecuada las competencias y los contenidos que se especifican en el reglamento autonómico.

6.8.1. Actividades

Todas las tareas propuestas para el desarrollo de la presente unidad didáctica vienen recogidas en el **Anexo I** y cada actividad tiene asociada los criterios de evaluación que se desea trabajar para poder facilitar la evaluación del alumnado. Además, dichas tareas se pueden dividir en cuatro grupos claramente diferenciados:

A. Actividades y problemas de desarrollo

Estas actividades son las típicas actividades que encontramos en los libros de texto al final de cada apartado en el que se explica un determinado contenido. Estas actividades sirven, principalmente, para afianzar los conceptos explicados previamente.

En cuanto a los problemas, nos referimos a actividades que solo se pueden realizar al finalizar el desarrollo del tema, pues en ellas se combinan casi todos los contenidos

explicados a lo largo de la unidad. La realización de problemas permite a los alumnos abordar casi todos los conocimientos que han aprendido durante el tema.

B. Actividades para fomentar el uso de las TIC

A lo largo del tema, podemos encontrar varias actividades en las que se necesita recurrir a Internet para realizar una búsqueda de información sin la cual no se podrían completar determinados ejercicios. Además, algunos de ellos se consideran ejercicios diseñados específicamente para fomentar el uso de las TIC entre el alumnado.

C. Actividad para incluir el debate científico

Una de las actividades que vamos a llevar a cabo a lo largo de la unidad es un debate científico sobre la interpretación de las gráficas.

Esta actividad puede ser muy ventajosa para los alumnos, puesto que el debate es una herramienta que favorece múltiples aspectos en el alumnado. Por un lado, la comunicación y la argumentación, fundamentales a la hora de defender una postura en cualquier debate, además del pensamiento crítico por el cual cada alumno se forma una opinión propia y se posiciona en un debate. Por otro lado, el respeto y la tolerancia hacia las opiniones del resto de la clase y la concienciación de que, en muchos aspectos de la vida, no existe una verdad absoluta ni una respuesta única, sino que la verdad y la respuesta subjetiva de cada persona pueden ser igualmente válidas. Y, por supuesto, al tratarse de un debate de tipo científico, también se quiere motivar a los alumnos hacia la rama científica, además de ayudar al alumnado a adquirir ciertos conocimientos recogidos en el tema que nos ocupa.

D. Actividades de tipo IBL

Las actividades de tipo IBL (Inquiry-Based Learning) pretenden, como su propio nombre indica, fomentar la enseñanza a través de la investigación. Son muchos los beneficios que aporta este tipo de aprendizaje frente a la realización de actividades de tipo tradicional y, es por eso que en esta unidad didáctica se le da muchísima importancia a este tipo de actividades y se pretende poder trabajar sobre varias de estas actividades con el alumnado.

Entre todas las actividades que hemos propuesto, encontramos algunas que responden a lo que Ruiz Higuera plantea como problemas de modelización, en los que se trata de ver la utilidad de las funciones más allá de las matemáticas. Según hemos visto en el análisis de las investigaciones didácticas, Ruiz Higuera propone este tipo de actividades para que los alumnos sean conscientes de la importancia de las

funciones en nuestra vida cotidiana y de que las gráficas de funciones son, realmente, una herramienta con la que trabajar y no un fin en sí mismas, tal y como los alumnos las conciben.

En el **Anexo I** veremos con más detalle cómo ciertas actividades propuestas pueden ayudar a reducir los errores o las interpretaciones inadecuadas que, según nuestro análisis anterior, los alumnos comenten frecuentemente.

6.8.2. Recursos

Para poder desarrollar la unidad didáctica y llevar a cabo las actividades previstas, se necesitarán una serie de recursos de diversa índole. Dichos recursos son los siguientes:

TIPO DE RECURSO	RECURSOS
Específico	❖ Libro de texto: Matemáticas Enseñanzas Académicas 3 ESO. Santillana. ISBN: 978-84-830-5396-6 ❖ Pizarra ❖ Pizarritas pequeñas para uso del alumnado.
Impreso	❖ Cuaderno de los estudiantes. ❖ Actividades externas al libro de texto. Se proporcionarán fotocopias al alumnado sobre dichas actividades (Actividades tipo IBL (D), números 2 y 4, Anexo I).
Audiovisual	❖ Proyector. El proyector nos servirá para poder visualizar aquellas actividades externas al libro de texto en las que no es necesario repartir fotocopias, por ejemplo, en la actividad para fomentar el debate en clase (C, Anexo I).
Informático	❖ Ordenadores con conexión a Internet. ❖ Software GeoGebra, procesador de textos (como Word u OpenOffice), navegador web.
Tecnológico	❖ Calculadora científica.
Ambiental	❖ Aula ❖ Aula con ordenadores
Humano/Personal	❖ Profesora de matemáticas, encargada de guiar al alumnado a través de las diferentes sesiones de la

	unidad didáctica. ❖ Alumnas y alumnos ❖ Otros docentes, tanto del departamento de matemáticas como de otros departamentos. ❖ Equipo directivo ❖ Departamento de Orientación ❖ Familias de los alumnos ❖ Personal del entorno
Recursos web	❖ Constructor de funciones online: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_en.html ❖ Programa GeoGebra online: https://www.geogebra.org/

Tabla 10. Recursos de la Unidad Didáctica. Elaboración propia.

6.9. Atención a la diversidad

Nuestro objetivo como docentes es que, independientemente de las necesidades educativas de cada alumno o alumna, todo el alumnado alcance los objetivos mínimos establecidos para la presente unidad. Para poder conseguir que esto suceda, será necesario ofrecer a los estudiantes programas de atención a la diversidad, donde se recogerán actividades de refuerzo o de ampliación que se adapten a sus necesidades educativas.

En primer lugar, la profesora necesitará conocer el nivel inicial de cada alumno. Para ello, utilizará la primera sesión de la unidad, en la cual observará especialmente cómo se desenvuelve cada miembro de la clase para poder hacerse una idea del nivel de cada uno de ellos. Además, gracias a la evaluación continua, esta primera percepción del nivel de los alumnos puede ir cambiando constantemente, según veamos los avances o dificultades que presentan a lo largo del desarrollo de la unidad. Esto nos permitirá ir ajustando las actividades sobre la marcha, de forma que nos adaptemos a cada estudiante según vayamos comprobando sus progresos de manera diaria en el desarrollo de cada una de las sesiones.

Los programas de atención a la diversidad no solo se centran en ejercicios de refuerzo o de ampliación. Por ejemplo, también es fundamental establecer un programa para aquellos alumnos que tengan materias pendientes de cursos anteriores y necesiten aprobarlas y, por supuesto, para alumnos que hayan repetido el curso. En ambas circunstancias se podrían necesitar actividades específicas que consigan

reforzar el conocimiento del alumnado. Estas actividades serán suministradas por la profesora o por el departamento de matemáticas de manera individualizada.

En cuanto a las actividades de refuerzo o de ampliación, que pretenden adaptarse específicamente al nivel concreto de cada alumno o alumna, la profesora realizará una selección de las actividades propuestas en el apartado Actividades A. “Actividades y problemas de desarrollo” (**Anexo I**) y se realizará una adaptación de las mismas para adecuarse al nivel educativo de aquellos alumnos que lo necesiten.

Por lo otro lado, y debido a la gran importancia que tienen en la presente unidad didáctica el trabajo en grupo (ya sea por parejas o por grupos de más de dos personas), es imprescindible que los grupos de trabajo en las actividades grupales de la unidad estén formados siguiendo el criterio de la profesora y no de manera casual. Este criterio fomentará la creación de grupos de trabajo heterogéneos en todos los sentidos posibles y, especialmente, en base a la diversidad del alumnado presente en el aula. Sería buena idea, además, comentar la creación de estos grupos con otros profesores que tengan contacto con el grupo de alumnos, para que nos puedan guiar y aconsejar a la hora de establecer unos grupos de trabajo óptimos.

Para finalizar, vamos a poner un ejemplo de cómo una actividad se puede adaptar para poder adecuarse a las necesidades educativas de ciertos grupos de alumnos de manera sencilla.

La actividad en cuestión es la Actividad D.3. “Construcción de una calculadora de índice de masa corporal (IMC)” (**Anexo I**), recogida en las actividades de tipo IBL propuestas en esta unidad didáctica. En principio, se plantea esta actividad como un problema estructurado; sin embargo, existe la posibilidad de desarrollarla como un problema no estructurado. En concreto, el enunciado de la versión no estructurada sería, simplemente:

Construye, manualmente, una calculadora que, en función del peso y la altura de una persona, calcule el índice de masa corporal (IMC). Para la construcción de dicha calculadora, sería útil ayudarse de tablas de datos y gráficas que relacionen el peso y la altura con el IMC.

Esta variación sería una buena idea para dar aún más autonomía a aquellos grupos cuyo nivel educativo les permita realizar de forma adecuada la actividad sin tener que seguir una estructura establecida por el enunciado. Por supuesto, la profesora decidiría qué grupos realizarían la actividad en su versión estructurada y cuáles harían la versión no estructurada de la actividad, de acuerdo a unos criterios que se basan en las necesidades educativas de cada uno de los alumnos que componen los grupos.

6.10. Temporalización

En principio, para el desarrollo de la presente unidad didáctica se necesitarán un total de once horas lectivas, de las cuales se empleará la última de ellas para realizar una evaluación al alumnado sobre el tema tratado a lo largo de las diez sesiones previas. Cada una de esas sesiones tendrá una duración de una hora, y, por tanto, para el desarrollo de la unidad se necesitarán once horas de clase.

A continuación, vamos a desarrollar una por una cada una de las sesiones, indicando qué contenidos se verán en cada una de ellas y las actividades que se llevarán a cabo. Además, señalaremos las competencias clave que se pretenden desarrollar en cada una de las sesiones y los objetivos de la unidad que se están fomentando en el transcurso de las mismas.

Todas las tablas que hay a continuación contienen la explicación del desarrollo de cada una de las sesiones y todas responden a una elaboración propia.

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES
Contenidos: 1.4., 1.7., 4.1.
Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.12., CE.4.2.
Objetivos: 1, 10
Competencias Clave: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP, CEC
Desarrollo: ○ Investigación con el objetivo de conocer más acerca de la historia de las matemáticas (Ver Anexo I Actividad B.1.). En grupos de cuatro personas, los alumnos tienen que buscar, a través de Internet, el nombre de algún matemático que, a lo largo de la historia, haya hecho alguna aportación al tema de las funciones. A continuación, se buscará información sobre dicho matemático y se redactará en algún procesador de textos una breve biografía sobre su vida y sus principales aportaciones a las matemáticas. Esta redacción se enviará al correo electrónico de la profesora. (20 minutos) ○ Simulador de funciones. Antes de presentar al alumnado el concepto de función, trabajaremos con un constructor de funciones online. El enlace a dicho recurso es el siguiente: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_en.html Utilizaremos únicamente las modalidades “Patterns” y “Numbers”. Por parejas, los alumnos irán probando y jugando con el constructor de funciones con el objetivo

de trabajar y comprender de manera intuitiva qué es una función, aún sin haber dado una definición rigurosa. (10 minutos)

- Explicación del concepto de función por parte de la profesora. La profesora explica los conceptos de función, variable dependiente y variable independiente. Además, soluciona las dudas que le puedan surgir a los alumnos durante la explicación. (20 minutos)
- Cuestiones acerca del concepto de función y las variables dependientes e independientes (ver **Anexo I Actividades A. "Sobre el concepto de función y variables dependientes e independientes"**). En voz alta y entre toda la clase, se irán resolviendo algunas cuestiones referentes a lo explicado y se van corrigiendo al mismo tiempo. Las cuestiones tratan sobre si existe una función o no entre dos variables y, en caso afirmativo, cuál de esas dos variables es dependiente y cuál es independiente. (10 minutos)

SESIÓN 2: LAS FUNCIONES EN FORMA DE ENUNCIADOS Y ECUACIONES

Contenidos: 1.2., 1.3., 1.7., 4.1., 4.3.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.2.

Objetivos: 1, 3, 10, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP

Desarrollo:

- Explicación de contenidos. La profesora explicará cómo una función puede venir definida por un enunciado y por una ecuación. Además, resolverá las dudas que los alumnos pueden tener respecto a la explicación. (20 minutos)
- Experimentación con el constructor de funciones utilizado en la sesión anterior. Los alumnos volverán a acceder al simulador de funciones online, cuyo enlace es: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_en.html En este caso, se experimentará con las modalidades "Equations" y "Mystery", para asimilar e interiorizar el concepto de función y cómo está puede venir definida mediante una ecuación. (15 minutos)
- Ejercicios para practicar cómo transcribir una función definida por un enunciado a una función definida por una ecuación, y viceversa (ver **Anexo I Actividades A. "Sobre funciones definidas a partir de un enunciado y una ecuación"**). Por parejas, los alumnos resolverán ejercicios de este tipo en clase. (15 minutos)
- Corrección de los ejercicios anteriores. Algunos voluntarios darán la solución a los ejercicios propuestos anteriormente y la profesora irá corrigiendo dichos ejercicios, además de las dudas que puedan surgir. (10 minutos)

SESIÓN 3: LAS FUNCIONES EN FORMA DE TABLA Y GRÁFICA

Contenidos: 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 4.1., 4.3.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 9, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CAA, CSC, SIEP

Desarrollo:

- Explicación de contenidos. La profesora explica cómo una función puede venir definida por una tabla de valores y da algún ejemplo de ello. Además, también explica el concepto de gráfica (los ejes cartesianos y las coordenadas) y cómo una función puede representarse también en forma de gráfica. Se pone algún ejemplo de esto y se muestra cómo de una tabla de valores asociada a una función se puede representar la gráfica de esa función. Veremos algún ejemplo de función definida mediante sus cuatro posibles tipos de representaciones (enunciado, ecuación, tabla y gráfico). (30 minutos)
- Debate acerca de la interpretación de determinadas gráficas (ver **Anexo I Actividad C.**). La clase se divide en grupos de cuatro personas y cada uno de esos grupos se intenta poner de acuerdo acerca de las posibles interpretaciones de cada una de las gráficas dadas. Cada grupo anota brevemente sus teorías en una pizarrita de mano. Este debate durará unos 10 minutos. Tras esto, todos los grupos muestran sus pizarras y empieza un debate general en el que participa toda la clase, con la profesora como moderadora, y donde los alumnos tendrán que defender sus propias teorías y discutir sobre la viabilidad de las teorías del resto. Este debate durará unos 20 minutos. (30 minutos)
- Por último, se mandará alguna actividad para hacer en casa de manera individual (ver **Anexo I Actividades A. "Sobre funciones definidas mediante una tabla y una gráfica"**).

SESIÓN 4: LAS FUNCIONES EN SUS CUATRO FORMAS DE REPRESENTACIÓN

Contenidos: 1.2., 1.3., 1.5., 4.1., 4.3.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 2, 3, 4, 9, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CSC, SIEP

Desarrollo:

- Algunos alumnos voluntarios salen a la pizarra para corregir los ejercicios que se

mandaron como deberes en la sesión anterior. La profesora revisa dichos ejercicios. (20 minutos)

- Realización de ejercicios que consisten en reescribir funciones definidas en una de sus representaciones a otra representación (ver **Anexo I Actividad D.1.**). Estos ejercicios se realizarán por parejas y en clase, y se irán corrigiendo al mismo tiempo, comparando las soluciones de cada pareja con las del resto de parejas de la clase. (40 minutos)

SESIÓN 5: ACTIVIDAD SOBRE ASOCIACIÓN DE FUNCIONES

Contenidos: 1.2., 1.3., 4.1., 4.3.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 11

Competencias Clave: CLL, CMCT, CSC, SIEP

Desarrollo:

- Desarrollo de una actividad para interpretar funciones, gráficas y tablas en grupos de 2 o 3 personas (ver **Anexo I Actividad D.2.**). Cada grupo tendrá que asociar a cada función en forma de enunciado, su expresión algebraica, su tabla y su gráfica. El objetivo de esta actividad es afianzar definitivamente el concepto de función y sus posibles representaciones. (50 minutos)
- Corrección de la actividad anterior. Los estudiantes van comparando sus resultados y la profesora resuelve las posibles dudas que haya surgido con respecto a la solución correcta del ejercicio. (10 minutos)

SESIÓN 6: DOMINIO, RECORRIDO Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Contenidos: 1.2., 1.3., 4.1., 4.2.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1.

Objetivos: 1, 8, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CSC, SIEP

Desarrollo:

- Explicación de los contenidos. La profesora explica los siguientes contenidos: dominio y recorrido de una función, continuidad y puntos de discontinuidad de una función y, además, da varios ejemplos de cada uno de los conceptos. (30 minutos)

- Actividades sobre los contenidos explicados (ver **Anexo I Actividades A. "Sobre dominio y recorrido de una función"** y **Actividades A. "Sobre continuidad y puntos de discontinuidad"**). Por parejas y en clase, se realizarán ejercicios sobre el dominio, el recorrido, la continuidad y los puntos de discontinuidad de las funciones. (20 minutos)
- Corrección de las actividades realizadas. Algunos voluntarios saldrán a la pizarra a corregir los ejercicios propuestos y como representantes de la pareja. La profesora irá, a su vez, revisando dichos ejercicios. (10 minutos)

SESIÓN 7: PUNTOS DE CORTE, MONOTONÍA Y EXTREMOS

Contenidos: 1.2., 1.3., 1.4., 1.7., 4.2.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.4., CE.1.5., CE.1.11., CE.1.12., CE.4.1.

Objetivos: 5, 6, 10

Competencias Clave: CLL, CMCT, CD, CAA, CSC

Desarrollo:

- Explicación de los contenidos. La profesora explica los siguientes contenidos: puntos de corte de una función con los ejes y cómo calcularlos, funciones crecientes, decrecientes y constantes y concepto de máximos y mínimos (relativos y absolutos). Además, se darán ejemplos de cada uno de los conceptos explicados y se resolverán todas las dudas que hayan podido surgir durante la explicación de los contenidos. (35 minutos)
- Actividad con el programa GeoGebra (ver **Anexo I Actividad B.2.**). Los alumnos se distribuyen por parejas y, haciendo uso del programa GeoGebra, introducen en él funciones en lenguaje algebraico para que el programa les devuelva su expresión gráfica. Sobre estas gráficas y utilizando el propio programa, deberán señalar los puntos de corte con los ejes y los extremos, indicando si estos son máximos o mínimos, relativos o absolutos. Además, se indicará donde la función es creciente, decreciente o constante. Se mandará un correo electrónico a la profesora donde la pareja adjuntará las imágenes de las gráficas exploradas y todas las características de las funciones que han ido señalando en dichas gráficas. (25 minutos)

SESIÓN 8: CONSTRUCCIÓN DE UNA CALCULADORA DE IMC

Contenidos: 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 4.1.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.5., CE.1.6., CE.1.12., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 2, 3, 9, 10, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP, CEC

Desarrollo:

- Actividad para construir una calculadora que devuelva el Índice de Masa Corporal (IMC) (ver **Anexo I Actividad D.3.**). La clase se distribuirá en grupos de cuatro personas y cada uno de los grupos tendrá que desarrollar una calculadora de IMC mediante una función, una tabla de valores y una gráfica. (45 minutos)
- Comentario acerca de la actividad. Al final de la clase, cada uno de los grupos describe brevemente las pautas que ha seguido para diseñar su calculadora y da su opinión sobre la actividad. (15 minutos)

SESIÓN 9: PERIODICIDAD Y SIMETRÍA DE FUNCIONES

Contenidos: 1.2., 1.3., 4.2.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 1, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CSC

Desarrollo:

- Explicación de los contenidos. La profesora explica qué es la periodicidad y el periodo de una función. También la simetría par e impar en una función y da ejemplos de cada uno de los conceptos explicados. Además, resuelve las dudas que hayan podido surgir durante la explicación. (20 minutos)
- Actividades sobre periodicidad y simetría (ver **Anexo I Actividades A. “Sobre periodicidad y simetría”**). Por parejas y en clase, se harán algunos de estos ejercicios, dejando unos 15 minutos para realizarlos. Tras esto, se procede a la corrección de dichos ejercicios. (25 minutos)
- Problemas finales (ver **Anexo I Actividades A. “Problemas para aplicar todos los contenidos del tema”**). De manera individual, se empezará a trabajar en clase sobre unos ejercicios que incluyan los máximos contenidos posibles de la unidad y se terminarán, si fuera necesario, en casa. (15 minutos)

SESIÓN 10: ACTIVIDAD ALQUILER DE CAMIONETAS

Contenidos: 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 4.1., 4.3.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 9, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, CAA, CSC, SIEP, CEC

Desarrollo:

- Corrección de los problemas finales del día anterior. Algunos voluntarios salen a la pizarra a corregir los problemas. (15 minutos)
- Desarrollo una actividad sobre alquiler de coches y camionetas (ver **Anexo I Actividad D.4.**). En esta actividad, se trabajará, principalmente, por parejas, aunque habrá momentos en los que se comentará la actividad y se trabajará en grupos de cuatro personas. El desarrollo en sí de la actividad durará 40 minutos, mientras que 5 minutos se dedicarán a comentar la actividad y escuchar la opinión del alumnado sobre la misma. (45 minutos)

SESIÓN 11: EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos: 1.2., 1.3., 4.1., 4.2., 4.3.

Criterios de evaluación: CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12

Competencias Clave: CLL, CMCT, SIEP

Desarrollo:

- Realización de una prueba escrita para valorar si los alumnos han alcanzado los objetivos tras el desarrollo de la unidad. Esta prueba se realizará de forma individual. (1 hora)

6.11. Evaluación

A la hora de especificar la evaluación de los alumnos en la presente unidad didáctica, debemos tener en cuenta dos aspectos: el qué vamos a evaluar y el cómo lo vamos a evaluar. En otras palabras, los criterios de evaluación y las herramientas de evaluación. Además, para la evaluación de un alumno, no solo se deben tener en cuenta los aprendizajes adquiridos en el tema, sino las competencias clave que ha desarrollado el alumnado.

6.11.1. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación vienen recogidos, oficialmente, tanto en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, como en la Orden de 14 de julio de 2016. A su vez, en la Orden podemos encontrar cada una de las competencias que se pretende desarrollar con cada uno de los criterios de evaluación, mientras que en el Real Decreto también podemos encontrar, asociados a cada uno de los criterios de evaluación, los correspondientes estándares de aprendizaje evaluables. Esos criterios y estándares son los que deberemos considerar a la hora de evaluar al alumnado.

Aunque el contenido principal de nuestra unidad pertenece al cuarto bloque, llamado funciones, también se trata, de manera transversal, el bloque primero, donde se pretende desarrollar procesos, métodos y actitudes en matemáticas. Por ello, a continuación, analizaremos los criterios y estándares asociados a los contenidos que nos interesan en ambos bloques.

Contenidos	Criterios de evaluación	CC	Estándares de aprendizaje evaluables
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT CAA	EA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). EA.1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. EA.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. EA.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	CE.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su	CCL CMCT CAA	EA.1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. EA.1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. EA.1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos:

	utilidad para hacer predicciones. CE.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.		revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. EA.1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problemas y la realidad.
1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	CE.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL CMCT CAA SIEP	EA.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguidos además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico y probabilístico.
1.5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT CAA CSC SIEP	EA.1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. EA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. EA.1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o

problemas dentro del campo de las matemáticas.

EA.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

EA.1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.

1.7. Utilización de los medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a) la recogida ordenada y la organización de datos.	CE.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL CMCT CD CAA	EA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión.
--	--	--------------------------	--

b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.	CE.1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT CD CAA	EA.1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. EA.1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. EA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.
c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.			
d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.			
4.1. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.	CE.4.1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	CMCT	EA.4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. EA.4.1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. EA.4.1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. EA.4.1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a
4.2. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de			

la gráfica correspondiente.	funciones dadas gráficamente.		
4.3. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.	CE.4.2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.	CMCT CAA CSC	EA.4.2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. EA.4.2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Tabla 11: Contenidos, criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje de la Unidad Didáctica. Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y Orden de 14 de julio de 2016. Elaboración propia.

Tal y como indica el artículo 14 de la Orden de julio de 2016, *los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa...son los criterios de evaluación y su concreción en los estándares de aprendizaje evaluables*. Es decir, la evaluación del alumnado es *criterial*.

Por tanto, el Departamento Didáctico de Matemáticas, dentro de su programación anual, habrá realizado una ponderación de todos los criterios de evaluación que se trabajan en el curso. De esta manera, los criterios evaluados en esta unidad tendrán un peso dentro de la totalidad de criterios del curso.

6.11.2. Criterios de calificación

A continuación, veremos el cómo se van a evaluar los criterios y estándares descritos en el apartado anterior; es decir, las herramientas que vamos a utilizar para evaluar a los alumnos. Asociada a cada una de las herramientas que utilizaremos para la evaluación, encontramos una rúbrica. La rúbrica nos ayuda a especificar el método de evaluación de cada una de las actividades, exámenes, etc. programados.

En la siguiente tabla vemos cómo se distribuye la ponderación de cada una de las partes a evaluar en la presente unidad:

Rúbrica	Herramienta de evaluación	Ponderación
1	Prueba escrita	50%
2	Intervenciones en clase	15%
3	Trabajos en grupo	20%
4	Actitud personal y trabajo autónomo	15%

Tabla 12: Criterios de calificación. Fuente: elaboración propia.

A continuación, en las páginas siguientes, vamos a desarrollar cada una de las rúbricas asociadas a las herramientas de evaluación. Encontramos, pues, cuatro rúbricas: la rúbrica de la prueba escrita, la rúbrica de las intervenciones en clase (voluntarias o no, orales o en pizarra), la rúbrica de los trabajos en grupo y la rúbrica de la actitud del alumnado y su trabajo autónomo. Cada miembro de la clase tiene una rúbrica con la que va a ser evaluado para cada actividad, trabajo, intervención o prueba que se lleve a cabo en clase. **Todas las rúbricas han sido sacadas de la siguiente página web:**

<https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/documents/15883887/16172385/R%C3%BAbricas+de+evaluaci%C3%B3n/c5d85179-c5fe-f624-2e26-c3c043d883c5?download=true>

Por otra parte, en el artículo 18 de la Orden de 14 de julio de 2016 se recogen los procedimientos, técnicas e instrumentos de evaluación. Las notas se expresarán numéricamente del 1 al 10, sin poder utilizar decimales. Aquellas notas mayores o iguales a 5 son notas favorables (dentro de estas, encontramos el suficiente, bien, notable y sobresaliente), mientras que las notas menores que 5 son notas desfavorables (insuficiente).

Las rúbricas son los instrumentos asociados a las herramientas de evaluación que nos permiten calificar los criterios que estemos trabajando en cada momento.

RÚBRICA 1. PRUEBA ESCRITA

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	La prueba respeta todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta casi todos los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta bastantes de los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	La prueba respeta poco los elementos de presentación establecidos (título, márgenes, legibilidad, limpieza y orden).	15%	
Ortografía	El texto está escrito correctamente.	El texto contiene algún error ortográfico no significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos no significativos o algún error significativo.	El texto presenta varios errores ortográficos significativos para su edad.	15%	
Vocabulario	Vocabulario rico, variado, sin repeticiones, y con palabras y expresiones específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y poco variado, aunque palabras específicas del tema.	Vocabulario algo repetitivo y con pocas palabras específicas del tema.	El vocabulario empleado es pobre y repetitivo.	10%	
Contenido	Demuestra buen dominio del contenido requerido y lo expresa de forma coherente.	Demuestra dominio del contenido requerido y lo expresa de forma coherente.	Demuestra dominio medio del contenido requerido y lo expresa con algún error.	Demuestra dominio bajo del contenido requerido y lo expresa con diversos errores.	60%	
Valoración final						

Tabla 13: Rúbrica prueba escrita.

RÚBRICA 2. INTERVENCIONES EN CLASE

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Pronunciación y entonación	Pronuncia correctamente y con la entonación adecuada, sin pausas y con seguridad.	Pronuncia correctamente con algún fallo en la entonación.	Tiene algunos fallos en la pronunciación y en la entonación.	Tiene muchos fallos tanto en la pronunciación como en la entonación.	10%	
Volumen y contacto visual	El volumen es el adecuado a la situación y dirige la mirada a todo el grupo.	El volumen no es totalmente adecuado a la situación y dirige la mirada a la mayoría del grupo.	El volumen es bajo para la situación y se centra solo en algunos oyentes del grupo.	El volumen no es adecuado a la situación y apenas mira a los oyentes y las oyentes.	10%	
Contenido	Demuestra un completo dominio del tema utilizando un vocabulario específico, destacando los aspectos importantes, exponiendo claramente.	Demuestra un buen dominio del tema y utiliza normalmente un vocabulario específico del mismo.	Demuestra un dominio de la mayoría de las partes del tema y utiliza un vocabulario básico del mismo.	Presenta lagunas importantes del tema y utiliza un vocabulario pobre del mismo.	60%	
Cuestiones formales y secuencia	Sigue un orden lógico, con interés y control emocional, y en un tiempo adecuado.	Sigue un orden, con interés y control emocional, y en un tiempo más o menos adecuado.	Sigue un cierto orden, con alguna dificultad en el control emocional y aproximándose al tiempo adecuado.	Tiene dificultades para mantener un orden, ajustarse a un tiempo adecuado y manifestar interés y control emocional.	20%	
Valoración final						

Tabla 14: Rúbrica intervenciones en clase.

RÚBRICA 3. TRABAJOS EN GRUPO

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Responsabilidad	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, valorando especialmente el esfuerzo individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades y las de los demás, reconociendo el esfuerzo, individual y colectivo.	Comprende y asume sus responsabilidades, con alguna dificultad para valorar el esfuerzo individual y colectivo.	Elude sus responsabilidades y tiene dificultades para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	25%	
Participación	Forma parte activa de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo, y realiza alguna propuesta para mejorar el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de las dinámicas establecidas por el grupo con la ayuda del docente.	25%	
Habilidades sociales	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista y favoreciendo la cohesión.	Interacciona con empatía y autocontrol, manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona manteniendo una actitud respetuosa hacia otros puntos de vista.	Interacciona con dificultades, necesitando ayuda para mantener actitudes respetuosas.	25%	

Generación y presentación del producto	Contribuye de manera activa a la consecución de los logros en el trabajo grupal y se responsabiliza de su aportación al mismo.	Contribuye a la consecución de los logros en el trabajo grupal y se responsabiliza de su aportación al mismo.	Contribuye a la consecución de los logros con dificultad para responsabilizarse de su aportación al trabajo grupal.	Contribuye algo a la consecución de los logros con dificultad para responsabilizarse de su aportación al trabajo grupal.	25%	
Valoración final						

Tabla 15: Rúbrica trabajos en grupo.

RÚBRICA 4. ACTITUD PERSONAL Y TRABAJO AUTÓNOMO

	Excelente (9-10)	Bueno (7-8)	Adecuado (5-6)	Mejorable (1-4)	Ponderación	Valoración
Autonomía y confianza	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades y las tareas propuestas superando las dificultades.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades superando las dificultades de forma habitual.	Hace uso de sus recursos personales para el desarrollo de las actividades superando las dificultades con alguna ayuda.	Necesita supervisión constante y ayuda para la realización de sus tareas.	10%	
Gestión emocional	Sabe utilizar sus sentimientos y emociones, gestionándose para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver adecuadamente las dificultades.	Utiliza generalmente sus sentimientos y emociones, gestionándolos para resolver a veces las dificultades.	Manifiesta una inadecuada gestión de los sentimientos y emociones.	20%	
Actitud respetuosa y responsable	Mantiene siempre una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Generalmente mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	A veces mantiene una actitud respetuosa y responsable, razonando el sentido del compromiso respecto a uno mismo y a los demás.	Mantiene habitualmente una actitud poco respetuosa y responsable, con dificultades para comprometerse.	25%	

Corrección en la presentación	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible de manera autónoma.	Presenta sus tareas de manera ordenada y legible con alguna ayuda.	A veces presenta sus tareas de manera ordenada y legible.	Generalmente necesita una supervisión constante para presentar las tareas ordenadas y legibles.	20%	
Conclusión del trabajo	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos establecidos, mostrando una actitud positiva hacia el trabajo.	Concluye sus tareas correctamente y dentro de los plazos establecidos.	Concluye sus tareas dentro de los plazos con alguna ayuda para su consecución.	Concluye alguna tarea si se realiza una supervisión constante.	25%	
Valoración final						

Tabla 16: Rúbrica actitud personal y trabajo autónomo.

7. Conclusiones

Con la realización de este TFM se ha pretendido alcanzar todos los objetivos nombrados en el apartado 2 de este trabajo y, por tanto, adquirir y terminar de afianzar los propósitos, no solo del TFM, sino del Máster en general, ya que se consideran fundamentales para llegar a ser un buen docente.

Además, también se han querido llevar a la práctica todos los conocimientos que hemos aprendido a lo largo del presente curso académico en las diferentes asignaturas, uniendo los aprendizajes de asignaturas que, a priori, no tenían mucha relación entre sí pero que, a la hora de ponerlos en práctica, se pueden y se deben complementar.

En el desarrollo de la presente Unidad Didáctica, se ha intentado integrar la metodología transmisiva con otro tipo de metodologías que puedan llegar a motivar más al alumnado, eligiendo, para ello, actividades que puedan ser de su interés y que, a su vez, puedan llegar a disminuir los errores más frecuentes que los alumnos comenten con respecto a las funciones y las gráficas. Estos errores se han analizado en el apartado acerca de la investigación didáctica y, para reducirlos, los autores hacen una serie de propuestas que, en la elaboración de las actividades de la unidad, se han tenido muy en cuenta, como las actividades de modelización. Así, la variedad de actividades propuestas pretende mitigar las carencias que, según los estudios revisados, los alumnos presentan más frecuentemente.

También, con estas actividades, se rompe con la imagen que dan los libros de texto. En el apartado sobre Fundamentación Curricular, al revisar los libros de dos editoriales, se ha llegado a la conclusión de que hay muchos ejercicios mecanizados, en los que los alumnos simplemente deben aplicar un algoritmo mecánico, sin necesidad de pensar ni de plantearse hasta qué punto entienden los conceptos. Esto contribuye a que los estudiantes comenten errores por no interiorizar correctamente los contenidos. Es por ello que, en las actividades propuestas, se presentan otro tipo de actividades que, además de reducir los errores que los estudiantes suelen cometer, pueden ser más motivantes para el alumnado.

Además, en la unidad, se ha intentado priorizar sobre cualquier otra cosa el trabajo en grupo y la capacidad de debatir y de expresarse libremente. Es por ello que muchas de las actividades propuestas, sino casi todas, independientemente de su tipología, se proponen para desarrollar en grupo o en parejas. Aprender a trabajar en grupo es crucial para el futuro de nuestros estudiantes, puesto que, en el futuro, necesitarán, muy posiblemente, esta habilidad para enfrentarse a su vida laboral.

Con respecto al debate y la opinión de los alumnos y las alumnas, con el presente TFM se quiere transmitir al alumnado que su opinión es importante para los docentes.

Es por eso que, tras cada actividad, hay un pequeño tiempo, no solo para corregir la actividad, sino para que los estudiantes den su opinión personal acerca del transcurso de la tarea. De esta forma, la profesora podrá ir reconduciendo las clases en función de aquello que interesa o no a sus alumnos. Por otra parte, el debate fomenta la tolerancia entre el alumnado, el respeto hacia opiniones diversas y la capacidad de comunicación y argumentación. Estas cualidades son fundamentales, no solo de cara al futuro y a la vida laboral de nuestros estudiantes, sino en su formación humana y social.

El objetivo general de la Unidad es mantener alto el entusiasmo y la motivación del alumnado ya que, de esta forma, podremos propiciar un aumento en el interés de los estudiantes hacia la asignatura de matemáticas, pudiendo, incluso, dar otra perspectiva de la asignatura diferente a la tradicional que anime a más alumnos a decantarse por estudios superiores en el ámbito de las ciencias. Especialmente a las alumnas, ya que la representación femenina suele ser baja en las carreras de ciencias tecnológicas e ingenierías, donde las matemáticas juegan un papel esencial.

8. Referencias Bibliográficas

- Abrate, R., Pochulu, M. y J. Vargas (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Abril, A.M., Ariza, M.R., Quesada, A y F.J. García (2014). Creencias del profesorado en ejercicio y en formación sobre el aprendizaje por investigación. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11:1, 22-33.
- Alpízar Vargas, M., Fernández Álvarez, H., Morales Reyes, J. y S. Quesada Segura (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa (RIEDME)*, 9:6-19.
- Aparicio del Prado, C. y R. Payá Albert (1999). *Análisis matemático I*. Granada: Universidad de Granada.
- Apostol, T.M. (1976). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Apostol, T.M. (1989). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Arce, M. y T. Ortega (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato. *PNA*, 8:2, 61-73.
- Ballester Sampedro, S. (2009). Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. *Revista digital: Innovación y experiencias educativas*, 23.
- Boyer, C.B. (1999) *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Ciencia y tecnología.
- Castellano Alcántara, J., Gámez Domingo, D. y R. Pérez Gómez (1997). *Cálculo Matemático Aplicado a la Técnica*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Colera Jiménez, J., Gaztelu Alberio, I., Oliveira González, M.J. y R. Colera Cañas. *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Profesorado. Anaya + Digital*. Editorial Anaya. ISBN: 978-84-698-1953-1
- De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C. y D. Sánchez Figueroa. *3º ESO. Matemáticas. Enseñanzas académicas. Serie resuelve*. Santillana Educación, S.L. ISBN: 978-84-830-5396-6
- Del-Pino, J. y Estepa, A. (2015). Análisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. M. Gea y M. M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 117-124).

- Díaz Gómez, J.L. (2013). El Concepto de Función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, Vol.4. Cinvestav-IPN. México.
- Duval, R. (1993). Sémiotique et Noésis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa*, 118-144. México DF: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Kleiner, I. (1989). *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*. The College Mathematics Journal, September 1989, Volume 20. Number 4, pp. 282–300.
- Kline, M. (1992a). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol. I. Alianza Universidad.
- Kline, M. (1992b). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol. II. Alianza Universidad.
- Pancorbo, L. y G. Ruiz. *MAT 3A Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*. Vicens Vives. ISBN: 978-84-682-3040-5
- Pedersen, O. (1974). *Logistics and the Theory of Functions*. Arch. Intern & Hist. d. Sciences. 24. N.94. 29-50
- René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction: Analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Mémoire de Maîtrise en Mathématiques. Montreal: Université du Québec.
- Ruiz Higuera, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén.
- Sastre Vázquez, P., Rey, G. y C. Boubée (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155.
- Schaaf, W. L. (1930) *Mathematics and World History*. Math. Teacher 23 (1930) 496-503.
- Sierpinski, A. (1989). *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive points*. Warsaw: Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Preprint, 454.
- Sierpinski, A. (1992). Un understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 25-58. USA: Mathematical Association of America.
- Spivak, M. (2018). *Calculus*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Vinner, S. y D. Tall (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

- Vinner, S. y T. Dreyfus (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education in Science and Technology*, 14, 356-366.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrecht: Kluwer.
- Youschkevitch, A. P. (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. Hist. Ex. Sci. 16, (1976) 37-85.

9. Referencias Normativas

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación por el proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA núm. 144(2016)

ANEXO I

ÍNDICE

A. Actividades y problemas de desarrollo	1
B. Actividades para fomentar el uso de las TIC	12
C. Actividad para incluir el debate científico.....	14
D. Actividades de tipo IBL	16
E. Examen de la Unidad.....	29

A continuación, vamos a presentar todas las actividades que se van a llevar a cabo durante el desarrollo de la Unidad Didáctica. Junto a cada actividad, podemos encontrar los criterios de evaluación asociados a ella; es decir, los criterios que pretendemos trabajar con cada tarea.

A. Actividades y problemas de desarrollo

Tanto las actividades como los problemas de desarrollo que se van a tratar en esta unidad didáctica, y que se especifican a continuación, han sido recogidos de los libros de texto de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 3º de ESO de las editoriales Anaya y Santillana.

Sobre el concepto de función y variables dependientes e independientes:

1. (CE.1.2., CE.1.3., CE.4.2.) ¿Son las siguientes relaciones funciones? En caso afirmativo, ¿podrías decir cuál de las dos variables es dependiente y cuál es independiente?
 - a) Un número y su mitad.
 - b) Un número y su valor absoluto.
 - c) Un número y su raíz cuadrada.
 - d) Un número y su raíz cúbica.
 - e) Número de jabones comprados y precios a pagar.
 - f) El número de DNI y la suma de sus dos últimos dígitos.
 - g) Medida del ancho de un rectángulo y perímetro del rectángulo.
 - h) Número de monedas de 2€ y cantidad de dinero que representan.
 - i) Radio de un círculo y su área.
 - j) Perímetro de un rectángulo y área del rectángulo.
 - k) Base de un rectángulo y su perímetro.

2. (CE.1.2., CE.4.2.) Calcula, para los números 1, 2, 3, 4 y 5, el número o números que les corresponden con estas relaciones, e indica cuáles son funciones.
 - a) A cada número, su opuesto.
 - b) A cada número, su doble más 5.
 - c) A cada número, su cantidad de divisores.

3. (CE.1.2., CE.1.4., CE.1.5., CE.4.2.) Encuentra una relación que sea función y otra que no lo sea.

Sobre funciones definidas a partir de un enunciado y una ecuación:

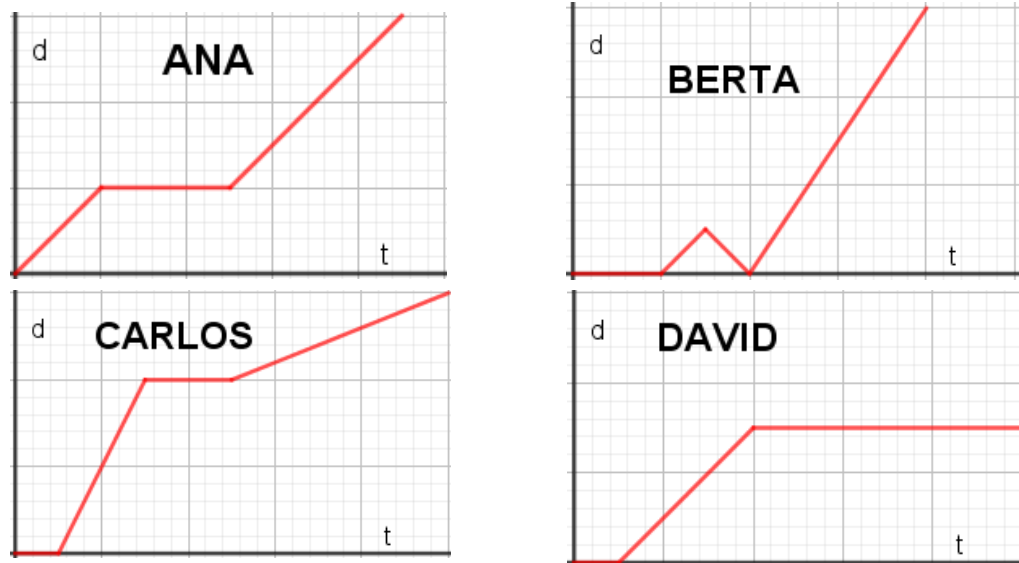
4. (CE.1.2., CE.4.2.) Expresa, mediante un enunciado, las siguientes funciones:
- a) $y = 2x - 1$
 - b) $y = -x + 3$
5. (CE.1.2., CE.1.3., CE.4.2.) Encuentra la expresión algebraica de la relación que a cada número le hace corresponder:
- a) Su triple
 - b) Su cuadrado
 - c) Su doble más cinco
 - d) Su doble menos tres
 - e) Su tercera parte más dos
 - f) La mitad de su triple
 - g) La raíz cuadrada de su cubo
6. (CE.1.2., CE.1.3., CE.4.2.) Escribe la relación entre las siguientes magnitudes con una expresión algebraica.
- a) Área de un cuadrado y su lado
 - b) Apotema de un hexágono regular y lado del hexágono
 - c) Volumen de una esfera y radio de la esfera
7. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.2.) Halla la expresión algebraica de la función que pasa una medida expresada en metros a la misma medida expresada en centímetros.

Sobre funciones definidas mediante una tabla y una gráfica:

8. (CE.1.2., CE.4.1.) Construye una tabla de valores para la función que a cada número lo relaciona con:
- a) Su triple menos dos unidades.
 - b) La suma de su cuadrado y dos unidades.
 - c) Su número opuesto más tres unidades.
9. (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja las gráficas que determinan las funciones de la actividad anterior.

10. (CE.1.2., CE.4.1.)Elabora una tabla de valores para cada una de las funciones y realiza su gráfica.
- a) $f(x) = x - 3$
 - b) $f(x) = \frac{1-x}{2}$
 - c) $f(x) = 5x - 1$
 - d) $f(x) = \frac{x}{2} + 4$
 - e) $f(x) = -x + 6$
11. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.)Una familia consume semanalmente 10 barras de pan, 3 kg de carne, 16 l de leche y 6 kg de frutas y verduras. Haz en unos ejes de coordenadas, utilizando diferentes colores, la representación gráfica del consumo a lo largo de seis semanas.
12. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.)Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 minutos a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión. En el eje horizontal, da 2 minutos a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.
13. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.)Un grifo, que arroja 4 l de agua por minuto, se mantiene abierto hasta llenar un depósito de 200 l. Representa la gráfica de la función que relaciona los minutos durante los que está abierto el grifo con:
- a) La cantidad de agua arrojada.
 - b) La cantidad de agua que falta para llenar el depósito.

14. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1.) Cuatro hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (d) – tiempo (t) de cada uno:



Fuente: Libro de texto editorial Anaya. Elaboración propia

A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Quién ha salido antes?
- ¿Quién ha llegado más tarde?
- Dos de ellos han ido a buscar a sus amigos para ir juntos a clase. ¿Quiénes son?
- ¿A cuál de ellos se le ha olvidado algo en casa?
- ¿Cuál no ha ido hoy a clase?
- ¿Quién ha andado más lento en algún momento?
- ¿Quién ha ido más rápido?
- ¿Quién ha estado más tiempo parado?

15. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) El precio de una entrada es de 15,75€. Expresa esta función mediante una ecuación, una tabla y una gráfica.

Sobre dominio y recorrido de una función:

16. (CE.1.2., CE.4.1.) Obtén la expresión algebraica, dominio, recorrido y gráfica de las siguientes funciones:

- La función que asocia a cada número real su triple menos seis.
- La función que asocia a cada número real su inverso más tres.

17. (CE.1.2., CE.4.1.) Indica el dominio y el recorrido de estas funciones.

- a) $f(x) = x^2 - 7$
- b) $f(x) = \frac{3}{4x}$
- c) $f(x) = -2$
- d) $f(x) = |x|$
- e) $f(x) = +\sqrt{x}$
- f) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

18. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1.) Esta es la gráfica de la temperatura de una ciudad durante todo el día. Indica el dominio y el recorrido.



Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Página 227 Ejercicio 21

Sobre continuidad y puntos de discontinuidad:

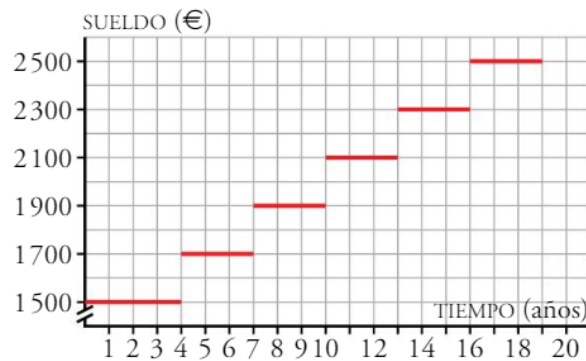
19. (CE.1.2., CE.4.1.) Elabora una tabla de valores para cada una de las funciones, haz la representación gráfica y analiza la continuidad.

- a) $y = \frac{2}{x} - 1$
- b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$
- c) $f(x) = \frac{x-4}{x}$
- d) $f(x) = \sqrt{3x}$
- e) $f(x) = \sqrt{4-2x}$

20. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1.) La entrada al parque de atracciones vale 5€, y por cada atracción hay que pagar 1€.

- a) Representa la función “atracciones en las que se monta – coste”.
- b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?
- c) ¿Cuántos costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

21. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1.) La siguiente gráfica muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

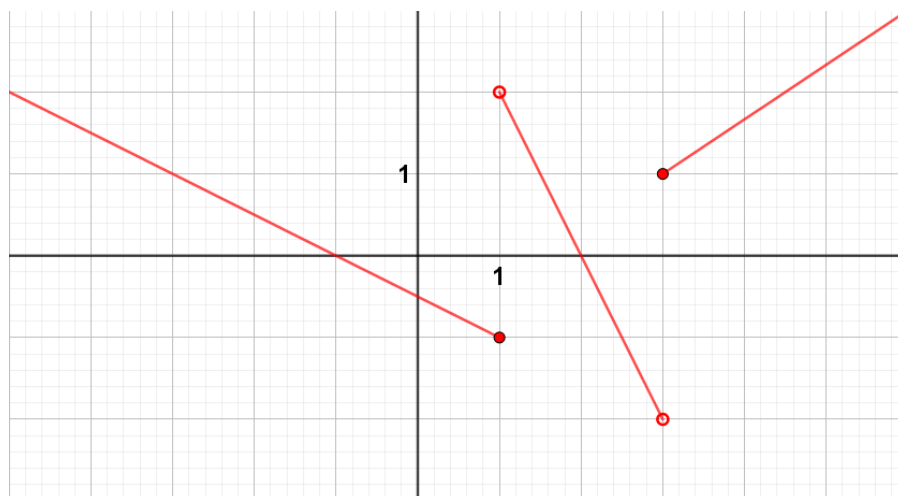


Fuente: Libro de texto editorial Anaya. Página 151 Ejercicio 2

- ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?
- ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?
- ¿Es una función continua?

Sobre puntos de corte con los ejes:

- (CE.1.2., CE.4.1.) Observa la gráfica de esta función y determina los puntos de discontinuidad y los puntos de corte con los ejes.



Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Elaboración propia

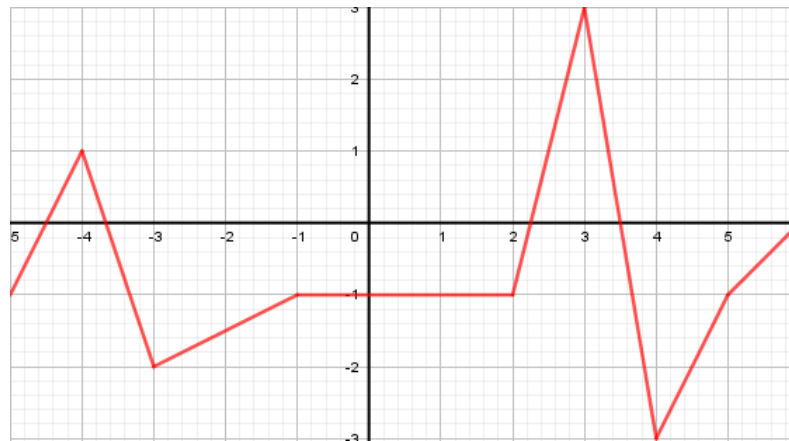
- (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja una función continua para todos los valores de x excepto en $x = -2$ y $x = 4$, y que corte a los ejes en $(0, 4)$, $(2, 0)$ y $(6, 0)$.
- (CE.1.2., CE.1.4., CE.4.1.) Halla los puntos de corte con los ejes de $f(x) = ax + b$, donde a y b son números, sabiendo que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, -1)$.
- (CE.1.2., CE.4.1.) Halla los puntos de corte con el eje de abscisas y con el eje de ordenadas de estas funciones.

- a) $y = 4x - 1$
- b) $y = 2x^2 + 4$
- c) $y = 3 - x$
- d) $y = (x - 1)^2$
- e) $y = x^2 - x + 2$
- f) $y = 3(x + 1)$
- g) $y = -4x - 4$
- h) $y = (x - 2)^2$
- i) $y = \frac{x-8}{3}$

26. (CE.1.2., CE.1.5., CE.4.1.) ¿Pueden tener los mismos puntos de corte con los ejes dos funciones diferentes? Dibuja la gráfica de dos funciones que cumplan esta condición.

Sobre monotonía y extremos de las funciones:

27. (CE.1.2., CE.4.1.) Determina cómo se comporta esta función en términos de monotonía, señalando los máximos y los mínimos de la misma e indicando cuando esos extremos son absolutos o relativos.



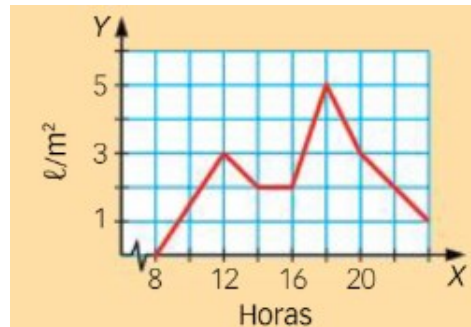
Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Elaboración propia

28. (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja la gráfica de una función que sea creciente en los intervalos $(-4,0)$ y $(6,9)$ y decreciente en el resto.
29. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1.) Observa los precios, en euros, del kilogramo de patatas en el período de 2006-2010. Representa los datos en una gráfica y analiza su crecimiento y decrecimiento.

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Precio	0,51	0,65	0,57	0,49	0,64

Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Elaboración propia.

30. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) Esta gráfica representa el número de litros por metro cuadrado a lo largo de un día lluvioso.



Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Página 231 Ejercicio 33

- ¿Cuáles son los intervalos de tiempo en que aumentó la cantidad de litros por metros cuadrado? ¿Y en los que disminuyó?
- ¿A qué hora del día llovió más?
- ¿Y la hora en que la cantidad de litros por metro cuadrado fue la menor?

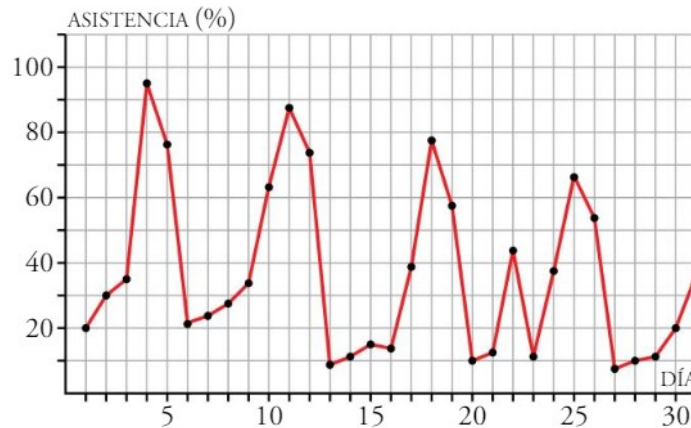
31. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) La siguiente gráfica muestra la evolución de la temperatura de un paciente a lo largo de 10 horas.



Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Página 231 Ejercicio 34

- ¿Cuáles son los periodos de tiempo en los que le aumenta la temperatura? ¿Y en los que le disminuye?
- ¿Cuál fue el momento en que su temperatura fue máxima?
- ¿A qué hora registró la temperatura mínima?

32. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:



Fuente: Libro de texto editorial Anaya. Página 149 Ejercicio 2

- ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?
- ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?
- ¿Cuántos máximos y mínimos relativos tiene la gráfica de la función? ¿Y absolutos?
- Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?
- Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?

Sobre periodicidad y simetría:

33. (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja la gráfica de una función periódica de periodo 2.
34. (CE.1.2., CE.4.1.) Comprueba si las siguientes funciones son simétricas y si lo son, di de qué tipo.
- $y = x^3$
 - $y = x^2 + x$
 - $y = \frac{x}{2}$
 - $y = (x - 2)^2$
 - $y = x^2 - 2x^3$
 - $y = x^3$
 - $y = \frac{3}{x}$
35. (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja la gráfica de una función par de la que se sabe que $f(-2) = -1$ y $f(3) = 0$.

36. (CE.1.2., CE.1.5., CE.4.1.) Una función simétrica respecto del origen, ¿puede ser periódica?

Problemas para aplicar todos los contenidos del tema:

37. (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja una función con estas características:

- Dominio: $[-3, 9]$
- Recorrido: $[0, 6]$
- La ordenada en el origen es 5.
- $f(-3) = 1, f(-2) = 0, f(4) = 6$ y $f(9) = 2$

38. (CE.1.2., CE.4.1.) Dibuja una función cuyos dominio y recorrido son $\mathbb{R}$, creciente hasta $x = 3$ y decreciente en el resto, y con una máxima de ordenada 8.

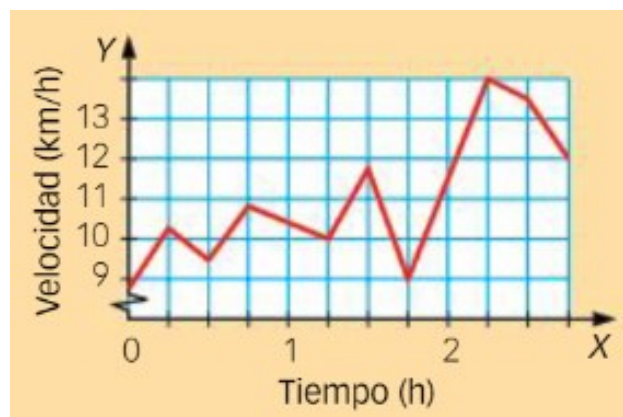
39. (CE.1.2., CE.4.1.) Estudia las características de estas funciones.

a) $y = 5x - 3$

b) $y = \frac{x+3}{2}$

c) $y = x^2 + 2x - 3$

40. (CE.1.2., CE.1.6, CE.4.1., CE.4.2.) En la gráfica se muestra la velocidad de Pablo (en kilómetros por hora) durante una carrera.



Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Página 233 Ejercicio 39

- Analiza su continuidad.
- ¿En qué puntos corta a los ejes?
- Estudia su crecimiento.
- Señala sus máximos y mínimos e indica si son relativos o absolutos.
- ¿A partir de qué minuto supera Pablo los 12 kilómetros por hora?

41. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a media que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:

Tiempo (s)	4	8	12	16	20
Altura (m)	3,7	7	9,7	11,4	12

Fuente: Libro de texto editorial Anaya. Elaboración propia.

- Representa la gráfica de la función tiempo-altura de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.
- ¿A qué tiempo corresponden sus máximos y mínimos relativos?
- ¿Es una función periódica?
- ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

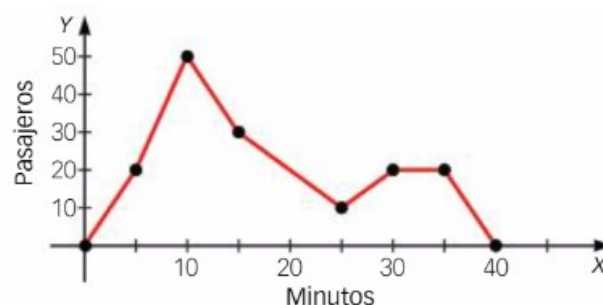
42. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) Luis, meteorólogo, se encuentra en lo alto de un puerto de montaña midiendo las variaciones de temperatura a lo largo de una noche (empieza con -4 horas porque faltan 4 horas para las 0:00h). Esta tabla muestra los datos transmitidos:

t(h)	-4	-2	0	2	4	6	7	8	9
T(°C)	-4	-3,75	-3,25	-2	0	4	3	0,5	2

Fuente: Libro de texto editorial Anaya. Elaboración propia.

- Representa la gráfica tiempo-temperatura.
- ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Y el recorrido?
- ¿En qué valores la gráfica corta a cada uno de los ejes? Explica su significado.
- ¿En qué periodo la temperatura asciende, por hora, más lentamente? ¿Y más rápidamente? ¿Cuándo es máxima?

43. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) La gráfica muestra el número de pasajeros de un autobús urbano a lo largo de sus paradas.

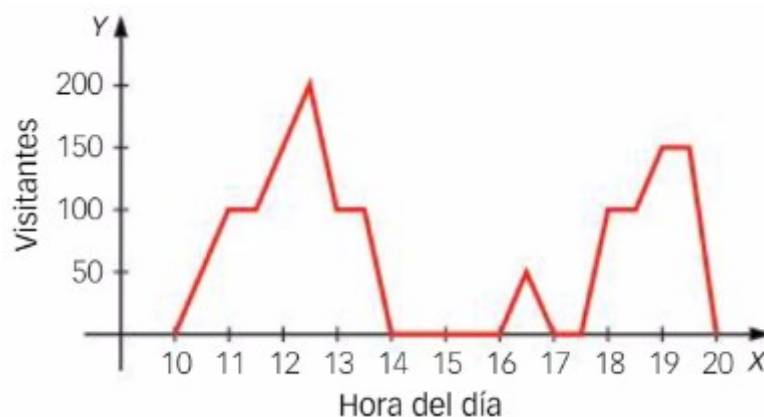


Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Página 237 Ejercicio 74

- a) ¿Cuántos pasajeros van en el autobús después de diez minutos en circulación?
- b) ¿En qué momento había menos pasajeros?
- c) ¿Cuánto tarda en realizar un viaje completo?

44. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) Un artesano fabrica relojes que vende a 600€ cada uno. Si emplea una semana en fabricar cada reloj, representa la función tiempo-ganancia y determina sus puntos de discontinuidad.

45. (CE.1.2., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) El número de visitantes de un museo a lo largo de un día se muestra en la siguiente gráfica.



Fuente: Libro de texto editorial Santillana. Página 237 Ejercicio 76

- a) ¿Cuál es el horario del museo?
- b) ¿En qué momento hay más visitantes?
- c) ¿Cuál es el número máximo de visitantes?
- d) Indica los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
- e) ¿En qué períodos había más de 100 personas en el museo?
- f) ¿En algún momento, mientras permanecía abierto el museo, se ha quedado vacío?

B. Actividades para fomentar el uso de las TIC

Las actividades que vamos a considerar pertenecientes a este grupo son dos.

1. Investigación histórica (CE.1.2., CE.1.5., CE.1.12.)

El objetivo principal de esta actividad es conocer un poco más sobre la historia de las matemáticas. Para ello, la clase se agrupará en grupos de cuatro personas. Como el tema que se va a estudiar son las funciones, el grupo deberá buscar y escoger, a través de Internet, uno de los muchos matemáticos que han hecho aportaciones al campo de

las funciones a lo largo de la historia. Cuando hayan seleccionado dicho matemático, investigarán acerca de su biografía y sus aportaciones a las matemáticas.

A continuación, el grupo redactará un texto breve en un procesador de textos, donde se resuman los resultados de la investigación sobre el matemático elegido. Dicho documento de texto será enviado a la profesora a través de un correo electrónico.

Aproximadamente, la duración de esta actividad será unos 20 minutos y, para su realización, se necesitará un ordenador con acceso a Internet para cada grupo.

Mientras los estudiantes trabajan, la profesora se paseará entre los grupos por si surge alguna duda. Sin embargo, lo ideal es que la profesora intervenga lo menos posible, pues se pretende fomentar la autonomía de alumnos y alumnas.

2. Programa GeoGebra (CE.1.2., CE.1.4., CE.1.5., CE.1.11., CE.1.12., CE.4.1.)

Los objetivos de esta actividad son, principalmente, dos. Por un lado, que los alumnos sepan desenvolverse con el programa GeoGebra, al menos a grandes rasgos. Y, por otro lado, afianzar los conceptos de puntos de corte, monotonía y extremos (tanto absolutos como relativos).

En esta actividad, la clase se distribuirá para trabajar en parejas. Cada pareja accederá al programa GeoGebra, en el cual introducirán funciones en su forma algebraica (bien vistas en clase o bien inventadas por ellos). Al introducir una función, el programa les devolverá su gráfica correspondiente. Es con esta gráfica con la que tienen que trabajar.

Sobre esa gráfica indicarán dónde la función tiene sus puntos de corte con los ejes y donde se sitúan los máximos y los mínimos (señalando si son absolutos o relativos). Además, se especificará en qué intervalos la función es creciente, decreciente o constante.

Repetirán este proceso con tantas funciones y gráficas como les dé tiempo. A su vez, irán redactando en un procesador de textos un documento en el que se incluirán imágenes de cada una de las gráficas trabajadas (con una captura de pantalla, por ejemplo) y anotaciones sobre sus características (monotonía, extremos).

Tras la redacción de este documento, se enviará al correo electrónico de la profesora.

La actividad durará en torno a los 25 minutos y, para su correcto desarrollo, es necesario que cada pareja disponga de un ordenador con acceso a Internet, o bien un ordenador que tenga instalado el programa GeoGebra.

Mientras las parejas trabajan, la profesora se paseará por la clase para resolver las dudas que puedan ir surgiendo. Sin embargo, lo ideal es que intervenga lo menos posible, pues se pretende fomentar la autonomía de los alumnos.

Esta actividad puede contribuir a reducir los errores que, según Arce y Ortega (2013), los alumnos comenten frecuentemente al dibujar las gráficas. Gracias al programa GeoGebra, el alumnado va a estar en contacto, durante esta actividad, con gráficas muy precisas que no presentan las imperfecciones propias de las gráficas dibujadas en la pizarra o el papel. Esto puede contribuir a que los estudiantes interioricen más fácilmente, por ejemplo, el buen uso de las escalas o la buena interpretación y representación de las asíntotas.

C. Actividad para incluir el debate científico

La actividad que desarrollaremos a continuación ha sido sacada del proyecto Primas (www.primas-project.eu), un proyecto que busca promover el aprendizaje basado en la investigación en los países europeos. Dentro de la actividad que proponemos, encontramos tres temas de debate. En concreto, los dos primeros están tomados de *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham (1985).

1. Lanzamiento de golf (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.2.)

¿Cómo va variando la velocidad que toma una pelota de golf tras haber sido golpeada hasta que, finalmente, cae al suelo? Para ilustrar vuestra respuesta, dibuja una gráfica que represente velocidad-tiempo.

2. ¿Qué deporte es? (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.2.)

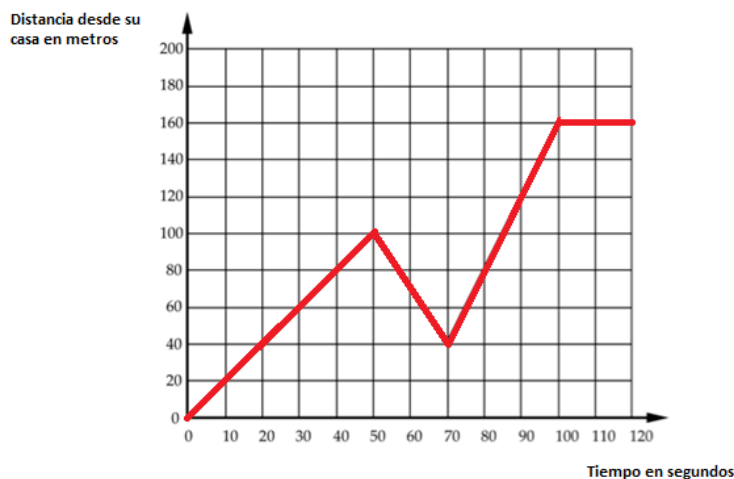
A continuación vemos una gráfica que representa un deporte. ¿De qué deporte se trata?



Fuente: www.primas-project.eu

3. ¿Qué le sucedió a Julia? (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.2.)

Todas las mañanas, Julia camina por una calle que comunica su casa con una parada de autobús, donde se monta en el autobús para ir al instituto. La parada está a 160 metros de su casa en línea recta. A continuación, podemos ver la gráfica que representa su recorrido hasta la parada de autobús un día en concreto.



Fuente: www.primas-project.eu

Observando la gráfica, indicad qué pudo haber sucedido en el camino de Julia desde su casa a la parada de autobús.

Estos son los tres ejercicios que serán objeto de debate. Para su ejecución, los alumnos se distribuirán en grupos de cuatro personas. La profesora planteará, uno a uno, los tres ejercicios y ella será una simple moderadora del debate, sin intervenir ni participar.

En una primera parte de cada ejercicio, cada grupo de cuatro personas debate una posible respuesta al ejercicio que se les plantea y, finalmente, intenta ponerse de acuerdo en una posible teoría, la cual se escribe en una pequeña pizarra. En la segunda parte del debate, todos los grupos muestran su pizarra y, entre toda la clase, se debaten todas las posibles soluciones a las que ha llegado cada grupo.

Esta actividad durará un tiempo de 30 minutos. Aproximadamente, 10 minutos para cada uno de los tres ejercicios que se plantearán, aunque esto puede variar en función del debate que genere o no cada uno de los diferentes ejercicios.

Es importante, en esta actividad, que los alumnos y las alumnas tomen conciencia de que no hay una única respuesta correcta, sino que cada grupo podría llegar a una respuesta diferente, todas igualmente válidas y adecuadas. De esta forma, se estarían

fomentando las actividades en las que los alumnos se ven obligados a pensar más allá de los algoritmos mecánicos que se suelen utilizar para resolver ejercicios, tal y como aconseja Alpízar Vargas *et al.* (2018), para que el alumno realmente se cuestione cómo está utilizando los conceptos y cómo está interpretando las gráficas.

D. Actividades de tipo IBL

Las actividades de este tipo que vamos a trabajar con nuestra clase se especifican a continuación.

1. Usar distintas representaciones de las funciones (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.)

La siguiente actividad se compone de varios ejercicios, concretamente, de cuatro. El objetivo de la misma es interiorizar de manera adecuada las diferentes formas de representación para las funciones. Se basa en un aprendizaje de conceptos por investigación y ha sido extraído de la página web del proyecto Primas: www.primas-project.eu.

Al igual que la actividad anterior, para la resolución de estos ejercicios, no vale con aplicar algoritmos mecánicos, sino que el alumno tiene que tomar la iniciativa y pensar si está utilizando los conceptos estudiados de una manera adecuada. Este es un tipo de actividades que recomienda Alpízar Vargas *et al.* (2018) para reducir los errores que los estudiantes comenten al utilizar el concepto de función.

Para realizar esta actividad, la clase se distribuirá en parejas. Cada vez que se realice una de las tareas que componen esta actividad, se discutirá en voz alta con toda la clase y, entre todos, se intentará llegar a una solución válida y adecuada.

En general, la profesora se paseará por la clase encaminando y dando indicaciones a las parejas que se encuentren especialmente perdidas, pero intervendrá lo menos posible y nunca dando una solución a los ejercicios para no sugestionar las respuestas de los alumnos.

Para la realización de la actividad se requerirán, en principio, unos 40 minutos. Aproximadamente, serán 10 minutos para cada una de las cuatro tareas, aunque este tiempo puede cambiar en función de la dificultad de cada una de las tareas.

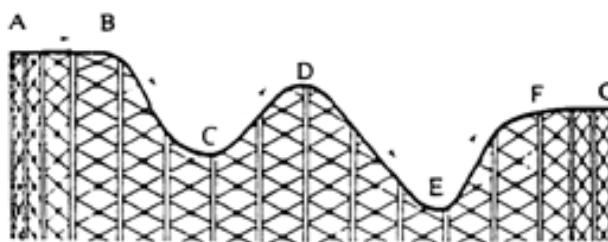
Los enunciados de las tareas son los siguientes:

- a) Construid una tabla en la que se represente el siguiente enunciado: “Al duplicar el número de personas que trabajan en una fábrica, se reduce el tiempo que tardan dichas personas en completar el trabajo a la mitad.”

Número de personas	1	2	3	4	5	6
Tiempo trabajando (en horas)						

Fuente: www.primas-project.eu. Elaboración propia.

- b) Dibujad una gráfica en la que se muestre la velocidad que lleva una montaña rusa durante todo su recorrido a partir de la imagen de abajo. La gráfica que se pide es la que relaciona las variables velocidad de la montaña rusa – distancia recorrida durante el recorrido.



Fuente: www.primas-project.eu. Aprendizaje de conceptos por investigación. Página 6

- c) A partir de la siguiente tabla, dibujad una gráfica donde las variables son número de supervivientes-edad que represente adecuadamente los datos.

Edad (años)	Número de supervivientes
0	1000
5	979
10	978
20	972
30	963
40	950
50	913
60	808
70	579
80	248
90	32
100	1

Fuente: www.primas-project.eu. Elaboración propia.

- d) A continuación, se muestra una tabla en la que se relacionan el número de equipos (n) que participan en un torneo con el número de partidos (p) que se juegan en dicho torneo. En este torneo, además, cada uno de los equipos tiene que jugar contra otro equipo dos veces: una vez en casa y otra vez fuera. Intentad encontrar una fórmula que relacione el número de equipos participantes con el número de partidos jugados. A partir de esa fórmula hallada, completad la tabla con otros datos, como por ejemplo, ¿cuántos partidos se deben jugar si se tienen 15 equipos?

Número de equipos (n)	2	3	4	5	6	7	8
Número de partidos (p)	2	6	12	20	30	42	56

Fuente: www.primas-project.eu. Elaboración propia.

2. Interpretar funciones, gráficas y tablas (CE.1.2., CE.1.3., CE.4.1., CE.4.2.)

La siguiente actividad ha sido sacada de la siguiente página web:
<http://www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/A7.pdf>

El objetivo de esta actividad es que los alumnos y las alumnas comprendan la relación que existe entre las expresiones algebraicas, los enunciados, las tablas y las gráficas de una función. De esta manera, se pueden reducir algunos de los errores que nos indica Ruiz Higuera (1998) en su libro, tales como las dificultades que encuentran los estudiantes para asociar una función algebraica a su gráfica o la incapacidad para reconocer que las propiedades de una gráfica también son propiedades de la función en su forma analítica. Esto ayudará al alumnado a dejar de concebir una función sin gráfica y viceversa.

Para la realización de la presente actividad se necesitará una hora de tiempo (una sesión completa), de la cual se usarán 50 minutos para realizar la actividad y otros 10 minutos de tiempo para hablar de ella y corregirla. La actividad se realizará por parejas o en grupos de tres personas.

Para esta actividad, se necesitarán 5 fotocopias:

FOTOCOPIA 1: FÓRMULAS

$y = x^2$	$y = 2x$
$y^2 = x$	$y = x + 2$
$2y = x$	$y = 2$
$y = x - 2$	$xy = 2$
$y = \pm\sqrt{x}$	$x + y = 2$
$y = \frac{2}{x}$	$y = \frac{x}{2}$
$y = -x + 2$	$x = \pm\sqrt{y}$

Fuente: <http://www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/A7.pdf>.

Elaboración propia

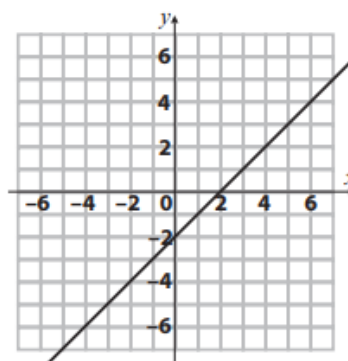
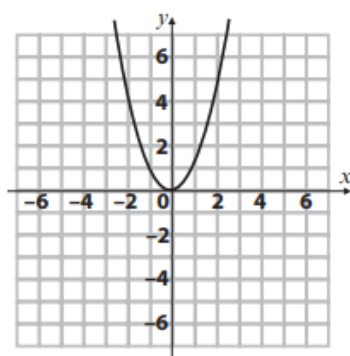
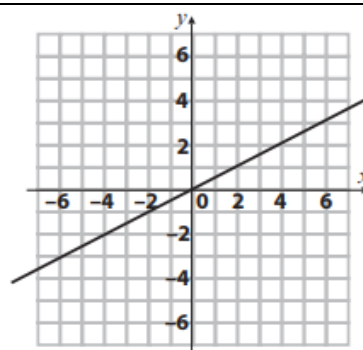
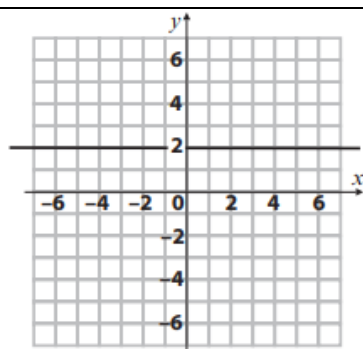
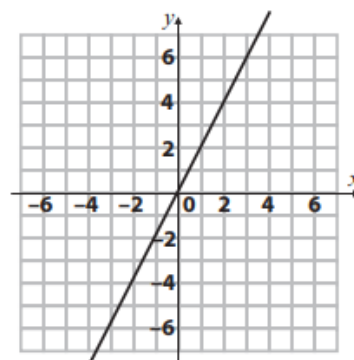
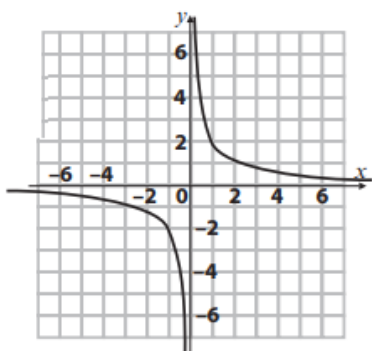
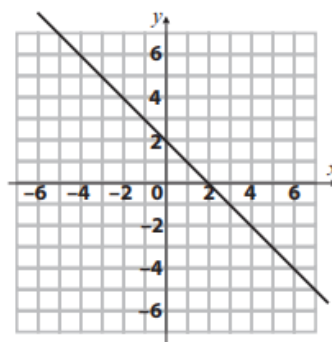
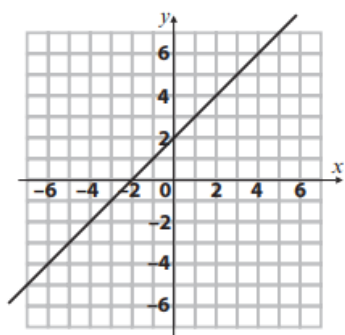
FOTOCOPIA 2: ENUNCIADOS

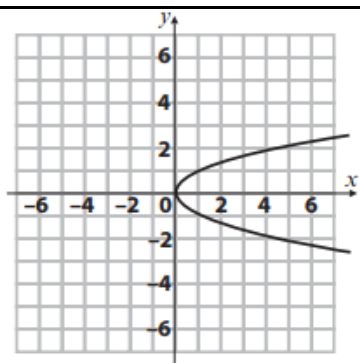
y es la mitad de x	Si a x le añadimos y es igual a 2
y es dos unidades mayor que x	x multiplicado por y es igual a 2
y es dos unidades menor que x	y es el doble de x
y es siempre igual a 2	x es igual que y multiplicado por y
y es igual a 2 dividido por x	y es igual que x multiplicado por x
x es la raíz cuadrada de y	y es igual que x dividido entre 2

Fuente: <http://www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/A7.pdf>.

Elaboración propia.

FOTOCOPIA 3: GRÁFICAS





Fuente: <http://www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/A7.pdf>. Imágenes extraídas de la página 8. Tabla de elaboración propia.

FOTOCOPIA 4: TABLAS

<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	-4	-3	-2	-1	0	1	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	4	3	2	1	0	-1
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	-4	-3	-2	-1	0	1																																			
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	4	3	2	1	0	-1																																			
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>-0.5</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1</td><td>1.5</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	-4	-2	0	2	4	6
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5																																			
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	-4	-2	0	2	4	6																																			
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>± 1</td><td>± 2</td><td>± 3</td><td>± 4</td></tr></table>							x	0	1	4	9	16	y	0	± 1	± 2	± 3	± 4	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	0	1	2	3	4	5		
x	0	1	4	9	16																																				
y	0	± 1	± 2	± 3	± 4																																				
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	0	1	2	3	4	5																																			
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	4	1	0	1	4	9	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>-2</td><td>$\pm \infty$</td><td>2</td><td>1</td><td>0.5</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	-1	-2	$\pm \infty$	2	1	0.5
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	4	1	0	1	4	9																																			
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	-1	-2	$\pm \infty$	2	1	0.5																																			
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>							x	-2	-1	0	1	2	3	y	2	2	2	2	2	2																					
x	-2	-1	0	1	2	3																																			
y	2	2	2	2	2	2																																			

Fuente: <http://www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/A7.pdf>.

Elaboración propia.

FOTOCOPIA 5: VARIACIONES

Si duplicas x , y se duplica	Si duplicas x , y se divide por la mitad
Si añades 1 a x , 2 se añade a y	Si añades 1 a x , 1 se añade a y
Si añades 1 a x , La mitad se añade a y	Si doblas x , y no varía
Si doblas x , y se multiplica por 4	Si multiplicas x por 4, y se multiplica por 2

Fuente: <http://www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/A7.pdf>.

Elaboración propia.

Para empezar con la actividad, la profesora reparte una fotocopia 1 y 2 a cada uno de los grupos. Cada grupo debe unir las expresiones de la fotocopia 1 con los enunciados de la fotocopia 2 (algunos enunciados corresponden a varias expresiones equivalentes). Tras haber asociado cada enunciado con su expresión algebraica, cada grupo comenta alguna de esas asociaciones y explica por qué esas dos expresiones son equivalentes al resto de la clase.

La profesora continúa repartiendo las fotocopias 3 y 4, donde tenemos las gráficas y las tablas. Al igual que antes, los grupos tienen que relacionar cada una de las gráficas con una tabla y, tras esto, asociar tabla y gráfica a una expresión algebraica y a un enunciado, ambos relacionados previamente. De esta forma, habríamos encontrado las cuatro posibles representaciones de una función.

De las fotocopias 3 y 4 cabe destacar la existencia de algunos huecos en blanco. Esos huecos deben ser completados por los alumnos, que tendrán que dibujar la gráfica y la tabla de las expresiones que se quedan sin gráfica o tabla asociada.

Para terminar la actividad, aquellos grupos que tengan tiempo recibirán una última fotocopia: la 5, en la que se expresan las funciones en términos de variaciones. De igual forma que antes, el grupo tendrá que asociar cada una de las expresiones de la

fotocopia 5 con las 4 representaciones de la función a la que corresponde. Y, del mismo modo que anteriormente, los huecos en blanco que presenta la fotocopia 5 deben ser completados con las expresiones que faltan.

Tras esto y para finalizar la sesión, los grupos dan las soluciones a las distintas asociaciones y se discute en la clase cuáles serían las relaciones correctas entre las distintas fotocopias.

3. Construcción de una calculadora de índice de masa corporal (IMC) (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.5., CE.1.6., CE.1.12, CE.4.1., CE.4.2.)

El siguiente problema es, en principio, un problema estructurado. Realmente, podría desarrollarse en forma de problema no estructurado pero, a continuación, desarrollaremos únicamente la versión estructurada.

Esta actividad ha sido obtenida de la página web del proyecto Primas: www.primas-project.eu

Esta actividad responde a lo que Ruiz Higuera (1998) recomienda para suplir las carencias que los alumnos tienen a la hora de ver las matemáticas como algo inútil y no como una herramienta para enfrentarnos a la vida real. En esta actividad se fomenta, por un lado, el uso de las funciones más allá del plano matemático y, por otro lado, la percepción de las gráficas como una herramienta y no como un fin. El objetivo principal es que los estudiantes sean conscientes de lo importantes que son, realmente, las matemáticas en nuestra vida cotidiana y de cómo muchas cosas a nuestro alrededor responden a un ejercicio de modelización basado en funciones.

Los alumnos se agruparán en grupos de cuatro personas para realizar esta actividad. La construcción de la calculadora se realizará en 45 minutos. El enunciado de esta actividad es el siguiente:

La calculadora de índice de masa corporal (IMC) es una calculadora cuyo objetivo es que los adultos sepan si tienen o no sobrepeso. Para saberlo, el adulto debe introducir su peso y su altura y, así, la calculadora les devuelve el índice de masa corporal, un número que indica si tiene delgadez extrema, un peso normal o sobrepeso.

En esta actividad, tendréis que construir una calculadora de IMC. Podéis empezar fijando un peso, por ejemplo, 2 metros, y, en función de esa altura podéis completar la siguiente tabla que relaciona el peso con el IMC:

Peso (kg)	60	70	80	90	100	110	120	130	140
IMC									

Tabla 17. Fuente: www.primas-project.eu. Elaboración propia

A partir de esta tabla, construid una gráfica que represente estos datos. Además, podemos plantearnos muchas preguntas, entre ellas:

- ¿A partir de qué peso se considera que una persona pesa menos de lo normal?
- ¿A partir de qué peso se considera que una persona tiene sobrepeso?
- ¿Qué ocurre con el IMC cuándo se duplica el peso?
- Buscad una fórmula para que, una vez fijada una altura, podáis calcular el IMC en función del peso.

A continuación, en vez de fijar la altura y variar el peso, fijad el peso y variad la altura. Contestad a las preguntas anteriores para el caso de un peso fijo de 80 kg y una altura que varía. Construid, previamente, una tabla y una gráfica para ayudaros a responder a las preguntas.

Por último, intentad no fijar ni la altura ni el peso, ¿seríais capaces de dar una fórmula que calcule el IMC en función de un peso y una altura, ambos sin fijar?

Para realizar esta actividad, los estudiantes necesitarán un ordenador con acceso a Internet para investigar sobre el índice de masa corporal y sus valores en función del peso y la altura.

La profesora, por su parte, irá pasando entre los grupos para orientar a aquellos que se encuentren especialmente perdidos pero evitando en cualquier caso decir soluciones o pasos a seguir para la construcción de la calculadora. En vez de eso, intentará plantear preguntas a los grupos que los guíen y los hagan pensar por sí mismos, para que ganen en autonomía.

En los últimos 15 minutos de la clase, cada grupo tomará la palabra para contar a sus compañeros y compañeras cómo han realizado la calculadora de IMC y qué les ha parecido la actividad.

4. Alquiler de vehículos (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.)

La siguiente actividad ha sido extraída de la siguiente página web: <https://www.mrbartonmaths.com/resources/standard%20unit%20pdfs/SU%20Number%20lessons/N10%20-%20Developing%20an%20Exam%20Question%20-%20number.pdf>

El objetivo de esta actividad es resolver problemas creativos sobre funciones, gráficas y tablas. Al igual que en la actividad anterior, se fomenta el uso de las funciones y las gráficas más allá de las matemáticas, para que los alumnos sean conscientes de su importancia y utilidad en la vida real. También se ajustaría, por tanto, a lo que Ruiz Higuera (1998) nos recomienda para reducir los errores que los alumnos cometen en relación al concepto de función, su representación y, especialmente, su uso.

Para realizar la actividad necesitaremos unos 45 minutos de tiempo, de los cuales dedicaremos 40 minutos a desarrollar la actividad y los 5 minutos restantes a comentar qué les ha parecido a los alumnos y las alumnas la actividad.

Durante el desarrollo de la actividad, la profesora intentará intervenir lo menos posible en la resolución de la actividad, para que los estudiantes desarrollen y potencien su autonomía.

En primer lugar, los alumnos se agruparán en parejas y se les repartirá una primera fotocopia:

FOTOCOPIA 1: ALQUILER DE CAMIONETAS

ALQUILER DE CAMIONETAS GÓMEZ	ALQUILER DE CAMIONETAS MARTÍNEZ										
30€ por las primeras 50 millas Tras las 50 millas, cada milla extra costará 20 céntimos	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #ADD8E6; padding: 5px;">Millas viajadas</th> <th style="padding: 5px;">50</th> <th style="padding: 5px;">100</th> <th style="padding: 5px;">150</th> <th style="padding: 5px;">200</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="background-color: #ADD8E6; padding: 5px;">Precio</td> <td style="padding: 5px;">16€</td> <td style="padding: 5px;">32€</td> <td style="padding: 5px;">48€</td> <td style="padding: 5px;">64€</td> </tr> </tbody> </table>	Millas viajadas	50	100	150	200	Precio	16€	32€	48€	64€
Millas viajadas	50	100	150	200							
Precio	16€	32€	48€	64€							

Lucía va a mudarse a un nuevo barrio. Para trasladar los muebles de su antigua casa a su nueva casa quiere alquilar una camioneta. Los dos anuncios que encuentra en Internet son los que aparecen arriba.

Lucía tiene pensado utilizar la camioneta unas 175 millas. ¿Cuál de las dos compañías le saldría más rentable contratar a Lucía?

Dibuja una gráfica que relacione el coste en € y la distancia viajada en millas de ambas compañías (Ayúdate de colores para diferenciar las compañías). A partir de esa gráfica, ¿cuándo sería más rentable la compañía Gómez y cuándo la compañía Martínez?

Fuente: <https://www.mrbartonmaths.com/resources/standard%20unit%20pdfs/SU%20Number%20Lessons/N10%20-%20Developing%20an%20Exam%20Question%20-%20number.pdf>. Elaboración propia

Universidad de Jaén

La pareja intentará resolver esta fotocopia (10 minutos) y después, se unirán a otra pareja (serían cuatro personas) para debatir la solución al problema planteado (5 minutos).

Tras este pequeño debate, cada pareja vuelve a trabajar sola sobre una segunda fotocopia, que reparte la profesora a cada pareja

FOTOCOPIA 2: ALQUILER DE COCHES

ALQUILER DE COCHES

___ € por las primeras ___ millas

Tras las ___ millas, cada milla extra costará ___ céntimos

ALQUILER DE COCHES

Millas viajadas				
Precio				

[illegible]

Dibuja una gráfica que relacione el coste en € y la distancia viajada en millas de ambas compañías (Ayúdate de colores para diferenciar las compañías). A partir de esa gráfica, ¿cuándo sería más rentable la compañía _____ y cuándo la compañía _____?

Fuente: <https://www.mrbartonmaths.com/resources/standard%20unit%20pdfs/SU%20Number%20lessons/N10%20-%20Developing%20an%20Exam%20Question%20-%20number.pdf>. Elaboración propia.

La pareja debe completar los datos que faltan en la segunda fotocopia sobre precios y nombres. Además, la pareja será la encargada de enunciar un problema y plantear

preguntas relativas a ese problema como considere (10 minutos). Tras esto, las parejas se intercambian las fotocopias, de manera que cada pareja resuelve el problema que ha planteado otra pareja (10 minutos).

Finalmente, cada pareja explica a la pareja que ha redactado su problema cómo ha conseguido resolverlo y a qué conclusiones ha llegado (5 minutos).

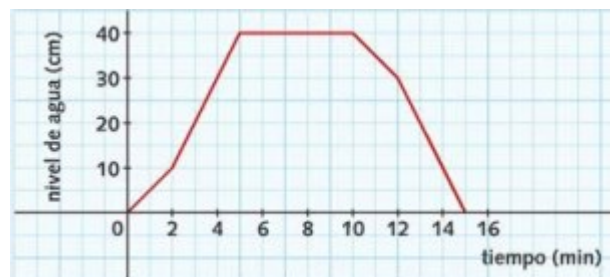
Para terminar con la sesión, los últimos 5 minutos se dedicarán a que los alumnos y las alumnas den su opinión sobre el ejercicio y el transcurso de la actividad.

E. Examen de la Unidad

A continuación, vamos a diseñar una posible prueba escrita que los alumnos tendrían que realizar en la sesión 11 para asegurarnos de que han entendido los conceptos y procedimientos explicados a lo largo del tema. Asociados a cada ejercicio, podemos encontrar los criterios de evaluación que estamos evaluando con cada uno de ellos.

Todos los ejercicios que se describen a continuación se han cogido del libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del curso 3º de ESO de la editorial Vicens Vives.

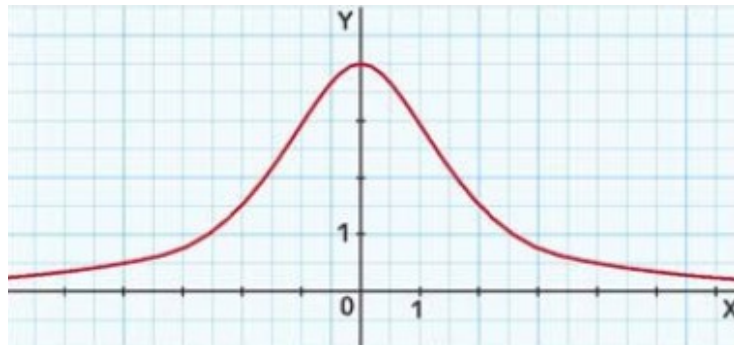
1. (CE.1.2., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.2.) Esta gráfica muestra el nivel de agua de una bañera en relación al tiempo transcurrido. Explica verbalmente la relación entre las dos variables y cuáles son los sucesos que han podido ocurrir.



Fuente: Libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3ºESO. Página 212.

2. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) Un mecanismo deja caer una bola en un recipiente cada minuto.
 - a) Haz una tabla que represente el número de bolas que hay en el recipiente al cabo de 1, 2, 3,..., 10 minutos.
 - b) Representa gráficamente los datos de la tabla anterior. ¿Cómo ha de ser la gráfica en los intervalos (1,2), (2,3), etc.?

3. (CE.1.2., CE.4.1.) Responde razonadamente las cuestiones para la función cuya gráfica es la siguiente:



Fuente: Libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3ºESO. Página 226

- a) ¿Cuál es su dominio?
- b) ¿Cuál es su imagen o recorrido?
- c) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de corte con el eje OX? ¿Y con el eje OY?
- d) ¿Se trata de una función par o impar?
- e) ¿Es periódica?
- f) ¿Es continua?
- g) ¿En qué intervalos es creciente?
- h) ¿En qué intervalos es decreciente?
- i) ¿Cuáles son las coordenadas de sus máximos y de sus mínimos relativos? ¿Son absolutos?

4. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) Observa y responde:



Fuente: Libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3ºESO. Página 227

- a) ¿Qué variables se relacionan?
- b) ¿Por qué el eje vertical no empieza en cero?

- c) ¿Es cierto que al aumentar la edad aumenta siempre la altura?
 - d) ¿Qué altura ganan las chicas entre los 5 y los 10 años?
 - e) ¿A qué edad alcanzan las chicas su altura máxima? ¿Y los chicos?
5. (CE.1.2., CE.1.3., CE.1.4., CE.1.5., CE.1.6., CE.4.1., CE.4.2.) El tren Córdoba-Málaga alcanza una velocidad máxima de 300 km/h, pero solo la consigue tras 20 km de aceleración después de cada parada y la mantiene hasta que, a 20 km de la parada siguiente, comienza a frenar. La longitud del trayecto es de 155 km, y las dos paradas intermedias son a 60 km y 110 km de Córdoba. Haz la gráfica de la velocidad en función del espacio recorrido.