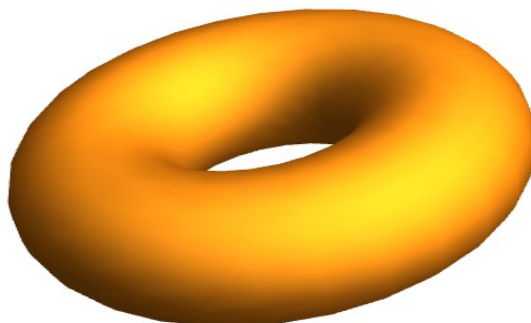




UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN DE TIPO WEINGARTEN



Alumna: Carretero Hermoso, Paula

Tutor: Dr. Ildelfonso Castro López.
Área : Geometría y Topología.
Dpto: Matemáticas.

Marzo, 2020

*“Algún matemático dijo que el verdadero placer no reside en el
descubrimiento de la verdad, sino en su búsqueda.”*
Tolstoy.

Índice general

Resumen	3
Abstract	4
Résumé	5
Introducción	6
1. Preliminares	13
1.1. Curvas planas regulares	13
1.2. El Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas	18
1.3. Superficies parametrizadas	21
1.4. Superficies de revolución	25
1.5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	28
2. El Problema de Singer	30
2.1. Curvas con curvatura dependiendo de la distancia a un eje	31
2.2. Familias de curvas integrables	35
2.2.1. Curvas planas tales que $k(x)=C/x^2$, $C \neq 0$	35
2.2.2. Curvas planas tales que $k(x)=Ce^x$, $C > 0$	36
2.2.3. Curvas planas tales que $k(x)=C/\cos^2 x$, $C > 0$	37
2.2.4. Curvas planas tales que $k(x)=C/\cosh^2 x$, $C > 0$	39
2.2.5. Curvas planas tales que $k(x)=C/\sqrt{x}$, $C > 0$	44
3. El momento lineal geométrico de una superficie de revolución	47
3.1. Determinación de una superficie de revolución	47
3.2. Superficies de revolución con momento lineal geométrico constante	49
3.3. Superficies de revolución con momento lineal geométrico directamente proporcional a la distancia al eje de revolución	52
3.4. Superficies de revolución con momento lineal geométrico inversamente proporcional a la distancia al eje de revolución	54
3.5. Superficies de revolución con momento lineal geométrico directamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia al eje de revolución	55
3.6. Otras superficies de revolución con momentos lineales geométricos en términos de funciones elementales	56

4. Superficies de revolución con una condición de tipo Weingarten	60
4.1. Superficies de tipo Weingarten	60
4.2. Superficies de revolución de tipo Weingarten y el momento lineal geométrico	61
4.2.1. Superficies de revolución de tipo Weingarten con curvatura media prescrita	63
4.2.2. Superficies de revolución de tipo Weingarten con curvatura de Gauss prescrita	66
4.3. Resultados de unicidad	67
4.3.1. Toros de revolución	68
4.3.2. Superficies de revolución generadas por las cicloides	69
Bibliografía	72

Resumen

Este trabajo se sitúa dentro del contexto de la Geometría Diferencial Clásica. Tras un repaso de la Teoría Local de Curvas y Superficies, se estudian las superficies de revolución cuyas curvaturas principales guardan una relación funcional. Esta condición se denomina *de tipo Weingarten* en la literatura especializada.

El papel crucial en nuestro estudio lo juega una función asociada a la curva generatriz, que llamamos *momento lineal geométrico* por su interpretación física. Analíticamente, es una función primitiva de la curvatura de la curva cuando ésta se expresa dependiendo de la distancia al eje de revolución. Su bondad radica en que determina unívocamente a la curva y, por añadidura, a la superficie de revolución salvo traslaciones a lo largo del eje de revolución.

Tras conseguir expresar las curvaturas principales en términos del momento lineal geométrico, se consiguen nuevas demostraciones de resultados clásicos y teoremas de clasificación originales acerca de superficies de revolución con curvatura de Gauss y curvatura media prescritas.

Palabras clave: Geometría Diferencial Clásica, momento lineal geométrico, superficies de revolución, superficies de tipo Weingarten.

Abstract

This work is located within the context of the Classical Differential Geometry. After a review of the Local Theory of Curves and Surfaces, the surfaces of revolution whose principal curvatures have a functional relationship will be studied. This condition is called *Weingarten type* in the specialized literature.

The crucial role in our study is played by a function associated with the generatrix curve, which we call *geometric linear momentum* because of its physical interpretation. Analytically, it is a primitive function of the curvature of the curve when it is expressed depending on the distance to the axis of revolution. Its goodness lies in the fact that it determines uniquely the curve and, as a consequence, the surface of revolution up to translations along the axis of revolution.

After expressing the principal curvatures in terms of the geometric linear momentum, new proofs of classical results and original classification theorems about prescribed revolution surfaces with prescribed Gaussian curvature and mean curvature are obtained.

Key words: Classical Differential Geometry, geometric linear momentum, surfaces of revolution, surfaces of Weingarten type.

Résumé

Ce travail est situé dans le cadre de la Géométrie Différentielle Classique. Après un examen de la Théorie Local de Courbes et Surfaces, seront étudiées les surfaces de révolution dont les courbures principales ont une relation fonctionnelle. Cette condition est appelée de type Weingarten dans la littérature spécialisée.

Le rôle crucial dans notre étude est joué par une fonction associée à la courbe génératrice, que nous appelons *moment linéaire géométrique* en raison de son interprétation physique. Analytiquement, c'est une fonction primitive de la courbure de la courbe lorsqu'elle est exprimée en fonction de la distance à l'axe de révolution. Sa bonté réside dans le fait qu'il détermine uniquement la courbe et, en outre, la surface de révolution, à l'exception des translations le long de l'axe de révolution.

Après avoir exprimé les courbures principales en termes du moment géométrique linéaire, de nouvelles démonstrations de résultats classiques et de théorèmes de classification originaux sur les surfaces de révolution prescrites avec courbure gaussienne et moyennes sont obtenues.

Mots clés: Géométrie Différentielle Classique, moment linéaire géométrique, surfaces de révolution, surfaces de type Weingarten.

Introducción

Competencias a adquirir

Este trabajo se presenta como culminación del Máster en Matemáticas realizado en la Universidad de Jaén en el curso académico 2019-2020.

A continuación se enumeran las competencias y resultados de aprendizaje establecidos por la Guía Docente de la asignatura Trabajo Fin de Máster del Máster en Matemáticas de la Universidad de Jaén.

- Poseer habilidades de aprendizaje que permitan continuar estudiando de un modo autodirigido o autónomo.
- Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.
- Saber aplicar los conocimientos adquiridos y la capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con el área de estudio.
- Ser capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.
- Saber comunicar las conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
- Saber analizar y construir demostraciones, así como transmitir conocimientos matemáticos avanzados.
- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada y del mundo de las aplicaciones) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas o refutarlas.

-
- Resolver problemas matemáticos avanzados, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos.
 - Proponer, analizar, validar e interpretar modelos matemáticos complejos, utilizando las herramientas más adecuadas a los fines que se persigan.
 - Desarrollar programas informáticos que resuelvan problemas matemáticos avanzados, utilizando para cada caso el entorno computacional adecuado. Saber elegir y utilizar aplicaciones informáticas, de cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras, para experimentar en matemáticas y resolver problemas complejos.
 - Desarrollar programas informáticos que resuelvan problemas matemáticos avanzados, utilizando para cada caso el entorno computacional adecuado.
 - Conocer los problemas centrales, la relación entre ellos y las técnicas más adecuadas en los distintos campos de estudio, así como las demostraciones rigurosas de los resultados relevantes.
 - Utilizar con soltura herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos.
 - Usar el inglés, como lengua relevante en el ámbito científico.
 - Saber trabajar en equipo y gestionar el tiempo de trabajo.

Resultados de aprendizaje

- Adquirir las competencias globales ligadas al desarrollo y aplicación de los conocimientos del Máster.
- Adquirir las competencias ligadas a la búsqueda y organización de información y documentación relevante sobre el tema objeto de estudio.
- Presentar de forma escrita y oral, la memoria, los resultados y las conclusiones del trabajo realizado.

Antecedentes, contenidos y objetivos

El presente Trabajo Fin de Máster se sitúa en el contexto de la Geometría Diferencial Clásica. Más concretamente, en el seno de la Teoría Local de Superficies. Se estudiarán las superficies de revolución que verifican una condición tipo Weingarten, que da título a esta memoria.

Antecedentes

El Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas establece que una curva plana queda unívocamente determinada, salvo su posición en el plano, por su curvatura dada como función de su longitud de arco. Significa pues, que la longitud y la curvatura de una curva plana son sus coordenadas geométricas intrínsecas. La demostración de

este resultado crucial es constructiva y se basa en la resolución de tres integrales que determinan el ángulo del vector tangente unitario de la curva con una dirección fija y las dos componentes cartesianas de la curva a determinar.

Motivado por este resultado clásico, David A. Singer propuso en 1999 [19] el problema de determinar una curva plana si su curvatura viene prefijada en términos de su posición, en lugar de su longitud de arco. Se introduce pues con la posición de la curva un matiz extrínseco. El planteamiento analítico de este problema, llamado el *Problema de Singer* en la literatura, supone la resolución de una complicada ecuación diferencial no lineal difícil de controlar para una función arbitraria cualquiera que juegue el papel de curvatura. Un caso muy interesante resuelto del Problema de Singer corresponde a las clásicas curvas elásticas establecidas por Euler en 1744 [9], que satisfacen que su curvatura es proporcional a una de sus funciones coordenadas. Es decir, $k = k(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, por ejemplo.

Motivados por las elásticas de Euler y por el Problema de Singer, los autores de [1] estudiaron las curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta. Salvo un movimiento rígido del plano, podemos fijar como recta de referencia una recta vertical, que denotaremos como eje z (pues nos servirá en el futuro como eje de revolución de la curva plana que estamos considerando). Así, estamos abordando el problema geométrico-analítico de encontrar las curvas planas $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ regulares (parametrizadas por el arco) tales que su curvatura satisface la condición geométrica extrínseca $k = k(x)$ para cualquier función de una variable prescrita como curvatura. Nótese que x representa justamente la distancia al eje z .

En el Teorema 2.1.1 se prueba, en la misma línea del Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas, un resultado abstracto de integrabilidad que muestra que el problema de determinar tales curvas puede resolverse también mediante tres integrales o cuadraturas si la función $k(x)$ es continua (véanse [1, 2, 3, 4, 19]).

El papel crucial en este contexto lo juega precisamente la función primitiva $\mathcal{K}(x)$ escogida de la curvatura prescrita $k(x)$, que denominaremos *momento lineal geométrico* por su interpretación física (véase la Definición 2.1.1). Este momento determina unívocamente la curva salvo traslaciones en la dirección del eje z (véase el Teorema 2.1.1).

El hecho de tener un buen control de las curvas planas que satisfacen una propiedad geométrica relevante respecto a una recta prefijada nos conduce inexorablemente a considerar qué propiedades se heredan a las superficies de revolución generadas al rotar dichas curvas alrededor de la recta prefijada, que actúa como eje de revolución. Máxime, cuando desde el punto de vista físico, las superficies de revolución son modelos muy útiles en diferentes problemas de diversa índole y naturaleza por su alto grado de simetría.

Por otro lado, en la Teoría Local de Superficies es de gran interés el estudio de las superficies que satisfacen una relación funcional entre sus curvaturas principales (condición llamada de tipo Weingarten, pues fue éste en 1861 quien introdujo este concepto). Se ha de mencionar que las curvaturas principales k_1 y k_2 son la máxima y la mínima curvatura normal de las secciones normales de la superficie en cada punto de la misma. Sus medias geométrica (al cuadrado) y aritmética definen invariantes tan importantes en el estudio de una superficie como la curvatura de Gauss $K = k_1 k_2$ y la curvatura media

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Desde un punto de vista analítico, la primera familia de superficies en este contexto a estudiar sería aquella que verifique una condición lineal de tipo Weingarten. Esto es, $a k_1 + b k_2 = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Bajo esta simple relación lineal entre las curvaturas principales se encuentran familias muy interesantes desde el punto de vista geométrico: las umbilicales ($k_1 = k_2$), las isoparamétricas (k_1 y k_2 constantes) y las superficies con curvatura media constante ($k_1 + k_2 = 2H_0 \in \mathbb{R}$) que, en particular, incluyen a las superficies mínimas (que son aquellas con $H_0 = 0$).

Algunas de estas familias de superficies están bien estudiadas (las únicas umbilicales son el plano y la esfera; las únicas isoparamétricas, el plano, la esfera y el cilindro circular recto), pero otras como las superficies con curvatura media constante y las superficies mínimas en particular, son hoy en día foco activo de importantes investigaciones en este campo.

Además, existe un interés creciente por el estudio de superficies, especialmente de revolución, que modelizan problemas físicos relacionados con capilaridad y modelización de gotas líquidas bajo rotación que conducen al estudio de ciertas funciones curvatura media prescritas en función de la distancia al eje de revolución de la superficie [8, 14, 17].

Contenidos

El contenido fundamental de esta memoria se centra en el estudio de las superficies de revolución que verifican una condición de tipo Weingarten. Para ello, la aportación fundamental será poner de manifiesto que las superficies de revolución quedan completamente definidas esencialmente por el momento lineal geométrico $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ de la curva generatriz $\alpha = (x, z)$ respecto al eje z de revolución de la superficie (véanse el Teorema 2.1.1 y el Corolario 3.1.1).

De este modo, probaremos que las curvaturas principales de una superficie de revolución (que se alcanzan sobre meridianos y paralelos, que son las líneas de curvatura para este tipo de superficies) se expresan en términos del momento $\mathcal{K}(x)$ y de la distancia $x > 0$ al eje de revolución mediante las expresiones:

$$k_1 \equiv k_m = \mathcal{K}'(x), \quad k_2 \equiv k_p = \frac{\mathcal{K}(x)}{x}$$

habiendo usado la notación k_m y k_p por distinguir respectivamente las curvaturas principales que se alcanzan precisamente sobre meridianos y paralelos de la superficie de revolución.

De este modo, cualquier condición de tipo Weingarten $\Phi(k_m, k_p) = 0$ se traducirá inmediatamente en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con incógnita $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$. Hecho muy destacable, pues no olvidemos que el momento lineal geométrico determina la superficie de revolución esencialmente.

Ilustraremos este proceso en la Sección 4.2 con los casos de las superficies umbilicales e isoparamétricas. Además, pondremos de manifiesto en la Sección 4.2.1 que si prefijamos la curvatura media de la superficie de revolución mediante una función continua $H = H(x)$, la correspondiente E.D.O. lineal que aparece puede resolverse explícitamente

mediante la resolución de la siguiente integral para determinar una familia uniparamétrica de momentos lineales geométricos:

$$(1) \quad x\mathcal{K}(x) = 2 \int x H(x) dx.$$

Consecuencia inmediata (1) será una original y escueta prueba del famoso resultado de Euler [9, 10] que caracteriza el plano y la catenoide como las únicas superficies mínimas (esto es, con $H = 0$) de revolución.

Sin embargo, el proceso llevado a cabo se sofisticaba enormemente con solo dar el salto a considerar el caso de superficies de revolución con curvatura media constante (CMC), clasificadas por Delaunay en [7]. La familia de momentos lineales que emana entonces de (1) obliga al uso de integrales elípticas para determinar las curvas generatrices de las superficies CMC.

No obstante, somos capaces en el Teorema 4.2.2 de establecer un nuevo teorema de unicidad para el plano, el cono circular y la catenoide, prefijando no solo su curvatura media (como inversamente proporcional a la distancia al eje de revolución de la superficie) sino también su curvatura de Gauss (como inversamente proporcional a la cuarta potencia de la citada distancia).

Este resultado nos da pie a estudiar en la Sección 4.2.2 las superficies de revolución con curvatura de Gauss $K = K(x)$ prescrita, obteniendo una fórmula análoga a (1) para el momento lineal geométrico en este caso dado por:

$$(2) \quad \mathcal{K}(x)^2 = 2 \int x K(x) dx.$$

Consecuencia inmediata de (2) será la clasificación conocida de las superficies llanas (esto es, con $K \equiv 0$) de revolución: planos, cilindros y conos circulares.

De nuevo, el siguiente caso en dificultad (K constante no nula) supone necesariamente el uso de integrales elípticas para su solución.

Finalmente, concluimos esta memoria con dos resultados originales (los Teoremas 4.3.1 y 4.3.2) que caracterizan a través de ciertas funciones curvatura media y curvatura de Gauss prescritas, superficies de revolución interesantes que no habíamos cubierto en nuestros resultados precedentes. Concretamente:

Las únicas superficies de revolución con curvatura media $H(x) = \lambda + \mu/x$ y curvatura de Gauss $K(x) = \beta + \gamma/x$, (representando x la distancia de la superficie al eje de revolución) con $\lambda \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ son la esfera (si $\mu = \gamma = 0$) y el toro de revolución.

Las superficies de revolución generadas por las cicloides son las únicas con curvatura media $H(x) = \lambda/\sqrt{x}$, $\lambda \neq 0$ y curvatura de Gauss $K(x) = \mu/x$ con $\mu \neq 0$ representando $x > 0$ la distancia de la superficie al eje de revolución.

Objetivos

En esta sección procedemos a exponer los objetivos principales de este Trabajo Fin de Máster. De manera evidente, el objetivo principal es superar las disposiciones académicas necesarias relacionadas con el Máster en Matemáticas de la Universidad de Jaén. Es por ello que ponemos de manifiesto los conocimientos y competencias adquiridos durante el curso 2019-2020. Enumeramos pues esos objetivos:

1. Realizar una breve introducción a la Geometría Diferencial Local de las curvas planas y de las superficies de revolución, así como un escueto repaso de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
2. Definición y estudio del *momento lineal geométrico* de una curva plana como elemento geométrico distinguido que permite determinar una curva plana una vez prescrita su curvatura en términos de la distancia a una recta. Análisis del anterior proceso en curvas explícitas interesantes.
3. Aplicación del Objetivo 2 al estudio de las superficies de revolución. Determinación de las curvaturas principales en términos del momento lineal geométrico.
4. Obtener nuevas demostraciones de resultados clásicos en la teoría de las superficies de revolución como la clasificación de las llanas (superficies con curvatura de Gauss nula) y las mínimas (aquellas con curvatura media cero).
5. Conseguir resultados de unicidad para superficies de revolución prescribiendo su curvatura de Gauss y su curvatura media como funciones de la distancia de la superficie al eje de revolución.
6. Estudiar la bibliografía relacionada con el problema planteado.

Conclusiones y trabajo futuro

Este Trabajo Fin de Máster permite concluir la realización del Máster en Matemáticas y, por supuesto, persigue cubrir una serie de objetivos de cara a la formación completa del estudiante, los cuales fueron planteados en las secciones precedentes. En esta sección se pretende realizar una reflexión y análisis final sobre la consecución de los objetivos planteados.

Esta memoria consta de cuatro bloques principales. El primer bloque de trabajo (Capítulo 1: Preliminares) tenía como objetivo fundamental recopilar los conceptos y resultados previos que han sido necesarios a lo largo del desarrollo realizado en el resto de capítulos. Creo que se ha cumplido este objetivo elaborando un texto matemático homogéneo, que evite errores asociados a una notación arbitraria y presentando los principales conceptos matemáticos necesarios a lo largo de la memoria.

En el segundo bloque fundamental del trabajo (Capítulo 2: El Problema de Singer) se satisface el objetivo de presentar el problema original de Singer para utilizarlo como base para poder analizar, posteriormente, diferentes familias de curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta (véase la referencia [1]).

El tercer bloque (Capítulo 3: El momento lineal geométrico de una superficie de revolución) verifica el objetivo del estudio de las superficies de revolución generadas como aplicación directa del bloque anterior. Tomando las familias de curvas estudiadas en el Capítulo 2, es decir, tomando curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta, consideramos dicha recta como un eje de revolución a partir del cual generar distintas superficies. Con ello, establecemos distintos resultados de unicidad para cada una de ellas lo que nos encamina a la finalidad principal del trabajo, recogida en el último bloque.

En el cuarto bloque (Capítulo 4: Superficies de revolución con una condición de tipo Weingarten) se recoge el objetivo principal de esta memoria, que no es otro que el estudio de las superficies de revolución de tipo Weingarten y, para ello, partimos de los resultados establecidos en los bloques anteriores. Gracias a este planteamiento cumplimos los objetivos dirigidos a la obtención de nuevas demostraciones de resultados clásicos ya conocidos, además de nuevos teoremas que cerrarán esta memoria con un punto final que deja abierto un interesante campo de estudio.

De hecho, se podría continuar la línea de investigación abierta en este Trabajo Fin de Máster analizando en detalle otras familias de superficies de revolución no abordadas en esta memoria (como las de curvatura de Gauss constante o las de curvatura media constante) por su dificultad al involucrar integrales elípticas. Se necesitarían otros preliminares previos y extensos sobre este tipo de integrales no elementales.

Por otro lado, aprovechando este estudio quizás se pudiese aspirar a considerar (de manera diferente a la encontrada en la literatura) superficies de revolución que modelan ciertos tipos de gotas líquidas en problemas de capilaridad y revestimientos de membranas celulares (véase [8, 18]).

Finalmente, quizás pudiese realizarse un estudio completamente semejante al realizado para las superficies de revolución de $\mathbb{R}^3$ para los diversos tipos de superficies de revolución (en función de la causalidad del eje de revolución) que existen en el espacio 3-dimensional de Lorentz-Minkowski.

Este Trabajo Fin de Máster supone la culminación del proceso de enseñanza desarrollado en el Máster en Matemáticas y creo que cumple con las competencias necesarias para la formación del alumnado.

Capítulo 1

Preliminares

Como dice el título de este trabajo, vamos a estudiar un tipo concreto de superficies de revolución. En este capítulo vamos a introducir ciertos preliminares sobre Geometría Diferencial de Curvas y Superficies que nos van a recordar brevemente los conceptos necesarios para estudiar dichas superficies. Para ello, hemos utilizado los manuales [6] y [13].

1.1. Curvas planas regulares

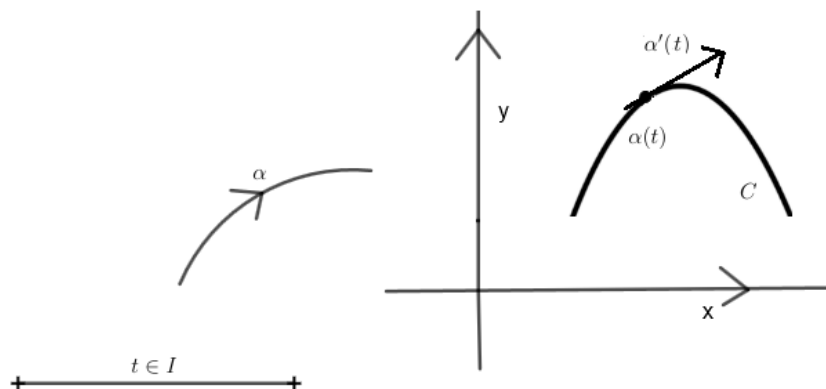
Definición 1.1.1. Llamaremos *curva (parametrizada) diferenciable* a una aplicación

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)),\end{aligned}$$

donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones derivables (véase la Figura 1.1). De forma equivalente, nos referiremos a la traza de la curva con la letra C . La curva C puede venir representada por sus ecuaciones paramétricas

$$C = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in I.$$

Figura 1.1: Curva plana.



CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Una misma curva C puede venir dada por diferentes parametrizaciones. Nos interesan aquellas propiedades que no dependan de la parametrización escogida ni de la posición de la curva en el plano.

El vector tangente de la curva viene dado por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ y el vector aceleración por $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$. La función $t \mapsto |\alpha'(t)|$ se denomina la velocidad de la curva. El vector normal a la curva es dado por $N(t) = J\alpha'(t) = (-y'(t), x'(t))$, donde J denota el giro de 90° en sentido antihorario.

Definición 1.1.2. Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable. Diremos que α es una *curva regular* si $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$. Es decir, el vector tangente es no nulo en todo instante t . Equivalentemente, $|\alpha'(t)| > 0$, para todo $t \in I$.

Definición 1.1.3. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Definimos la *función longitud de arco* mediante

$$s : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto s(t) = \int |\alpha'(t)| dt.$$

Esta función es invertible por ser estrictamente creciente, ya que $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$. La función s no depende de la parametrización escogida.

Es posible considerar cualquier curva parametrizada por el arco (abreviadamente p.p.a.), es decir, con velocidad constante $|\alpha'(s)| = 1$. Para ello, como $s = s(t)$ es invertible, basta considerar el cambio de parámetro $t = t(s)$.

Definición 1.1.4. La base ortonormal positivamente orientada dada por

$$\{T(s) = \alpha'(s), N(s) = J\alpha'(s)\},$$

donde s es el parámetro arco, recibe el nombre de *diedro de Frenet*.

Estudiando la variación del diedro de Frenet a lo largo de la curva se deducen las *ecuaciones de Frenet* dadas por

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s), \end{cases}$$

donde $k = k(s)$ es la función *curvatura* de la curva (que intuitivamente mide cómo se dobla la trayectoria según se avanza por la misma) y que se puede calcular de las siguientes maneras:

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \alpha''(s), JT(s) \rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)).$$

Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual y $\det$ la función determinante. La curvatura de una curva no depende de la parametrización escogida. Por tanto, la longitud de una curva y su curvatura son invariantes geométricos intrínsecos de la curva.

Observación 1.1.1. Téngase en cuenta que si estamos trabajando con una curva parametrizada no necesariamente por el arco, resulta que

$$k = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3}, \quad T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \quad y \quad N = \frac{J\alpha'}{|\alpha'|}.$$

Ejemplo 1.1.1.

Recta. Una recta puede parametrizarse mediante

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \alpha(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2),$$

donde $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de la recta y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ su vector director (véase la Figura 1.2). El vector tangente es precisamente el vector director de la curva, que podemos tomar unitario para que la recta esté p.p.a.:

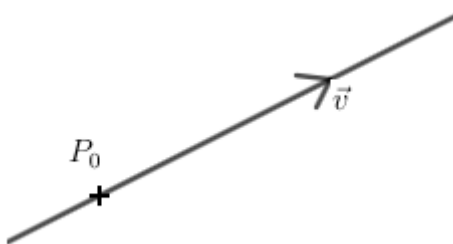
$$\alpha'(t) = (v_1, v_2) = \vec{v}, \forall t \in \mathbb{R},$$

y por tanto, la aceleración es nula:

$$\alpha''(t) = (0, 0) = \vec{0}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De aquí se deduce que la curvatura de cualquier recta es idénticamente nula $k \equiv 0$.

Figura 1.2: Recta: $k \equiv 0$.

**Ejemplo 1.1.2.**

Circunferencia de radio $R > 0$. Podemos suponer sin restricción que la circunferencia está centrada en el origen. La ecuación cartesiana vendrá dada por $x^2 + y^2 = R^2$, donde $R > 0$ es el radio de la circunferencia (véase Figura 1.3). Pasando a coordenadas polares, podemos considerar $x = R \cos \theta$ e $y = R \sin \theta$. De esta manera, la circunferencia viene dada por la siguiente parametrización:

$$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \longmapsto \alpha(\theta) = R(\cos \theta, \sin \theta).$$

Su vector tangente es

$$\alpha'(\theta) = R(-\sin \theta, \cos \theta),$$

y su vector aceleración es

$$\alpha''(\theta) = R(-\cos \theta, -\sin \theta) = -R(\cos \theta, \sin \theta).$$

Calculemos ahora su curvatura y, para ello, vamos a considerar su parametrización por el arco:

$$s = s(\theta) = \int |\alpha'(\theta)| d\theta = \int R d\theta = R\theta.$$

La nueva parametrización será entonces

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 2\pi R] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s) = R \left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right).\end{aligned}$$

Ahora su vector tangente es unitario:

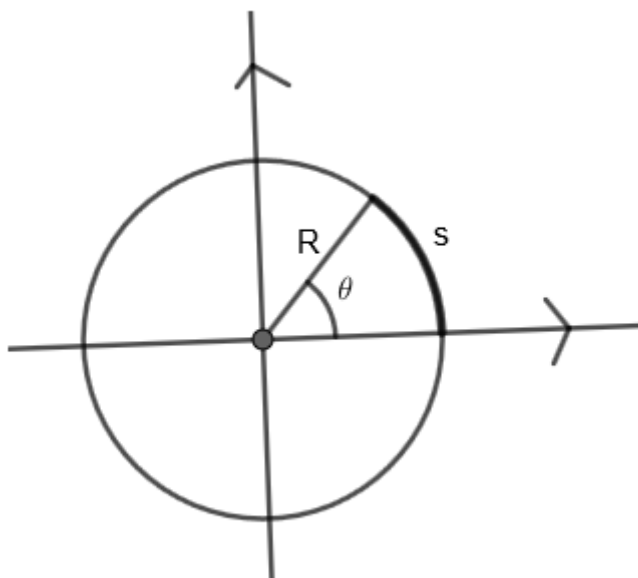
$$\alpha'(s) = \left(-\sin \left(\frac{s}{R} \right), \cos \left(\frac{s}{R} \right) \right),$$

y su vector aceleración viene dado por

$$\alpha''(s) = \frac{1}{R} \left(-\cos \left(\frac{s}{R} \right), -\sin \left(\frac{s}{R} \right) \right) = \frac{1}{R} J\alpha'(s).$$

De aquí se deduce que la curvatura es constante (no nula), $k \equiv \frac{1}{R}$, justamente el inverso del radio R .

Figura 1.3: Circunferencia de radio R : $k \equiv \frac{1}{R}$.



Ejemplo 1.1.3.

Catenaria Llamaremos catenaria de cuerda $a > 0$ a la curva formada por una cuerda suspendida entre dos puntos fijos dentro de un campo de gravedad uniforme, de manera que la cuerda no está sometida a otras fuerzas distintas de su propio peso y a es la distancia mínima entre la cuerda y el suelo.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Para estudiar la catenaria, vamos a considerar el grafo $x = a \cosh\left(\frac{y}{a}\right)$ con $y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$ (véase la Figura 1.4). Lo hacemos de esta manera no convencional, ya que más adelante nuestra finalidad será rotarla alrededor del eje vertical para obtener la catenoide.

Por tanto, la catenaria vendrá dada por la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = \left(a \cosh\left(\frac{t}{a}\right), t \right).\end{aligned}$$

Su vector tangente es

$$\alpha'(t) = \left(\sinh\left(\frac{t}{a}\right), 1 \right),$$

y su vector aceleración es

$$\alpha''(t) = \left(\frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right), 0 \right).$$

Calculemos ahora su curvatura y, para ello, vamos a considerar su función longitud de arco.

$$\begin{aligned}s = s(t) &= \int |\alpha'(t)| dt = \int \sqrt{\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right) + 1} dt = \int \sqrt{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) - 1 + 1} dt = \\ &= \int \cosh\left(\frac{t}{a}\right) dt = a \sinh\left(\frac{t}{a}\right).\end{aligned}$$

Entonces $t = a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{a}\right)$. La nueva parametrización por el arco será entonces:

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s) = \left(a \cosh\left(\frac{a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{a}\right)}{a}\right), a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{a}\right) \right).\end{aligned}$$

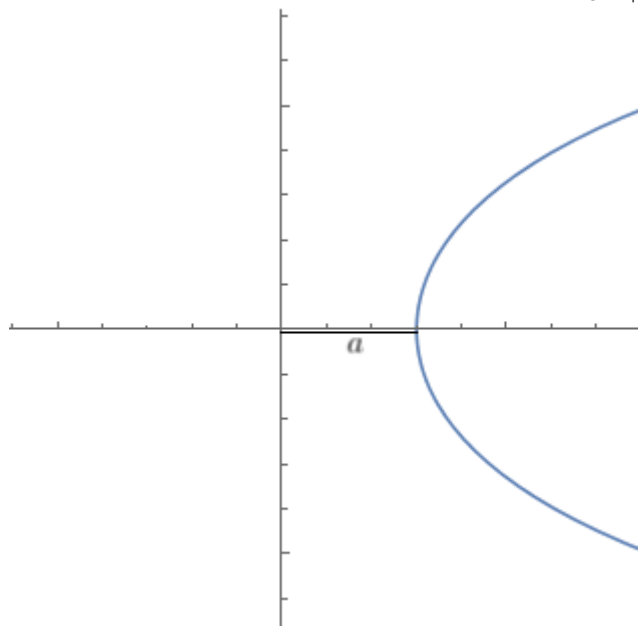
Siguiendo la Observación 1.1.1, se tiene:

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^3\left(\frac{t}{a}\right)} \begin{vmatrix} \sinh\left(\frac{t}{a}\right) & 1 \\ \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right)}{\cosh^3\left(\frac{t}{a}\right)} = \frac{\frac{-1}{a}}{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}.$$

Puesto que $t = a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{a}\right)$, se tiene que $\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) = 1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right) = 1 + \frac{s^2}{a^2} = \frac{a^2 + s^2}{a^2}$. Por tanto,

$$k(s) = \frac{-a}{s^2 + a^2}.$$

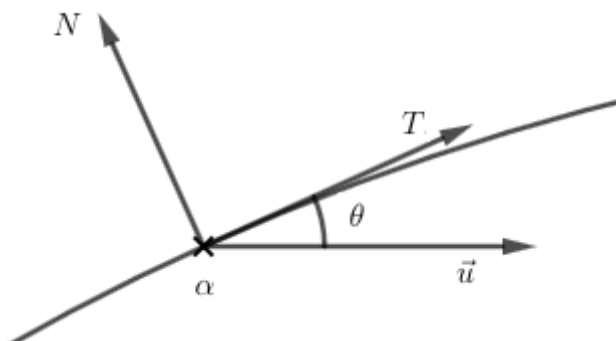
Observación 1.1.2. Nótese que la expresión de la curvatura de la catenaria que obtenemos aparece con signo opuesto a la expresión más habitual $k(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$. Esto se debe a que la catenaria de la Figura 1.4 se recorre de abajo a arriba, es decir, recorremos la catenaria en sentido horario, al contrario que con el cálculo usual de la catenaria en el que se recorre en sentido antihorario. Este hecho es común a cualquier curva, de manera que un cambio de sentido de recorrido cambia el signo de la curvatura.

Figura 1.4: Catenaria de cuerda a : $k(s) = \frac{-a}{s^2 + a^2}$.

1.2. El Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas

Consideremos una curva C p.p.a. y su diedro de Frenet $\{T(s), N(s)\}$ en cualquier punto $\alpha(s)$ de la curva. Tracemos la semirrecta horizontal que pasa por ese punto y consideremos un vector director $\vec{u}$ unitario con origen en ese punto (véase la Figura 1.5). Denotamos $\theta(s)$ al ángulo entre $T(s)$ y $\vec{u}$, es decir:

$$\theta(s) := \angle(T(s), \vec{u}).$$

Figura 1.5: Ángulo θ .

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Teniendo en cuenta que tanto T como $\vec{u}$ tienen módulo 1, tenemos que

$$\cos \theta = \frac{\langle T, \vec{u} \rangle}{|T||\vec{u}|} = \langle T, \vec{u} \rangle.$$

Por tanto, derivando con respecto al parámetro arco (notamos por $\dot{\cdot}$ la derivación respecto a s), y usando las ecuaciones de Frenet, la igualdad anterior y que N es unitario, se tiene:

$$\begin{aligned} -\sin(\theta)\dot{\theta} &= \langle \dot{T}, \vec{u} \rangle + \langle T, \dot{\vec{u}} \rangle = \langle \dot{T}, \vec{u} \rangle = k\langle N, \vec{u} \rangle = \\ &= k|N||\vec{u}| \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -k \sin \theta. \end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que $k = \dot{\theta}$, es decir, la curvatura de una curva mide la variación del ángulo que forma su recta tangente con una dirección fija:

$$k(s) = \dot{\theta}(s) = \frac{d\theta}{ds}.$$

Esta última interpretación de la curvatura de una curva plana nos permite probar el primer resultado de esta teoría.

Teorema 1.2.1. (*Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas*)

Sea $k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua cualquiera. Entonces existe una curva parametrizada por el arco, tal que su curvatura es la función prescrita k . Además, la curva es única salvo movimientos rígidos directos (rotaciones y traslaciones) del plano.

Demostración. Definimos en primer lugar la función

$$\theta(s) := \int k(s)ds.$$

Esta función está determinada salvo una constante de integración $\theta_0 \in \mathbb{R}$. A continuación definimos, $x(s) := \int \cos(\theta(s))ds$ e $y(s) := \int \sin(\theta(s))ds$. De esta manera, consideramos la curva dada por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = \left(\int \cos(\theta(s))ds, \int \sin(\theta(s))ds \right),$$

que está determinada salvo una constante de integración a_1 y a_2 en cada componente. Entonces, se tiene:

$$\dot{\alpha}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)).$$

Observamos que tenemos una curva p.p.a. Además:

$$\ddot{\alpha}(s) = (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s)) = (-\sin \theta(s)\dot{\theta}(s), \cos \theta(s)\dot{\theta}(s)).$$

Por tanto, la curvatura de la curva α vendrá dada por

$$k_\alpha(s) = \det(\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = \begin{vmatrix} \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ -\sin \theta(s)\dot{\theta}(s) & \cos \theta(s)\dot{\theta}(s) \end{vmatrix} =$$

$$= \dot{\theta}(s)(\cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s)) = \dot{\theta}(s) = k(s).$$

Por tanto, hemos probado que α es una curva p.p.a. tal que su curvatura es k y, además, está determinada salvo las constantes θ_0 , a_1 y a_2 . θ_0 corresponde a una rotación de ese mismo ángulo y (a_1, a_2) corresponde a una traslación de α . Es decir, la curva está determinada salvo movimientos rígidos directos. $\square$

Describimos a continuación algunas funciones elementales, que nos van a conducir a curvas planas ya conocidas previamente.

Ejemplo 1.2.1.

$k \equiv 0$. Por el teorema anterior, existe una única curva (salvo movimientos rígidos) p.p.a. cuya curvatura es $k = 0$. Necesariamente esa curva es una recta. En efecto:

$\theta(s) = \theta_0$ donde $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Y sean $x(s) := \int \cos(\theta_0) ds$ e $y(s) := \int \sin(\theta_0) ds$. Luego $x(s) = \cos(\theta_0)s$ e $y(s) = \sin(\theta_0)s$.

De aquí $s = \frac{x}{\cos(\theta_0)}$ y por tanto, $y = \sin(\theta_0) \frac{x}{\cos(\theta_0)}$. Es decir, tenemos $y = \tan(\theta_0)x$, que la ecuación de una recta con pendiente θ_0 . Salvo traslaciones, tenemos todas las rectas del plano.

Ejemplo 1.2.2.

$k \equiv k_0 > 0$. Por el teorema anterior, existe una única curva (salvo movimientos rígidos) p.p.a. cuya curvatura es $k = k_0$. Veamos que esa curva es la circunferencia de radio $R = 1/k_0$.

Consideramos $\theta(s) := \int k_0 ds$, por tanto $\theta(s) = k_0 s + \theta_0$ donde θ_0 es la constante de integración que vamos a tomar como $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Y sean $x(s) := \int \cos(k_0 s + \frac{\pi}{2}) ds$ e $y(s) := \int \sin(k_0 s + \frac{\pi}{2}) ds$. Luego

$$x(s) = \frac{\sin(k_0 s + \frac{\pi}{2})s}{k_0} = \frac{\cos(k_0 s)}{k_0}$$

e

$$y(s) = -\frac{\cos(k_0 s + \frac{\pi}{2})s}{k_0} = \frac{\sin(k_0 s)}{k_0}.$$

Hemos obtenido la curva $\alpha(s) = \frac{1}{k_0}(\cos(k_0 s), \sin(k_0 s))$. Es decir, tenemos una circunferencia de radio $\frac{1}{k_0}$. Salvo traslaciones, tenemos cualquier circunferencia del plano con ese radio.

Ejemplo 1.2.3.

$$k(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad a \neq 0.$$

Por el teorema anterior, existe una única curva (salvo movimientos rígidos) p.p.a. cuya curvatura es $k(s)$. Veamos que esa curva es la catenaria de cuerda $a > 0$.

Consideramos $\theta(s) := \int k(s)ds = \int \frac{a}{a^2+s^2} ds$, por tanto

$$\theta(s) = \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} ds = \int \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} ds = \arctan\left(\frac{s}{a}\right).$$

Sean ahora $x(s) := \int \cos(\arctan(\frac{s}{a}))ds$ e $y(s) := \int \sin(\arctan(\frac{s}{a}))ds$. Para calcular estas integrales usaremos que $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} x(s) &:= \int \cos\left(\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right) ds = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2}} ds = \\ &= a \int \frac{\cosh(v)}{\sqrt{1 + (\sinh(v))^2}} dv = a \int dv = av = a \operatorname{arsenh}\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

(habiendo usado el cambio de variable $s = a \sinh(v)$). Y tenemos

$$\begin{aligned} y(s) &:= \int \sin\left(\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right) ds = \int \frac{\frac{s}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2}} ds = \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = a\sqrt{u} = a\sqrt{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

(habiendo realizado el cambio de variable $u = 1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2$).

Hemos obtenido:

$$\alpha(s) = \left(a \operatorname{arsenh}\left(\frac{s}{a}\right), a\sqrt{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right),$$

cuya ecuación cartesiana es $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, es decir, la parametrización correspondiente a la catenaria, que está girada 90° respecto a la parametrización usada en el Ejemplo 1.1.3.

1.3. Superficies parametrizadas

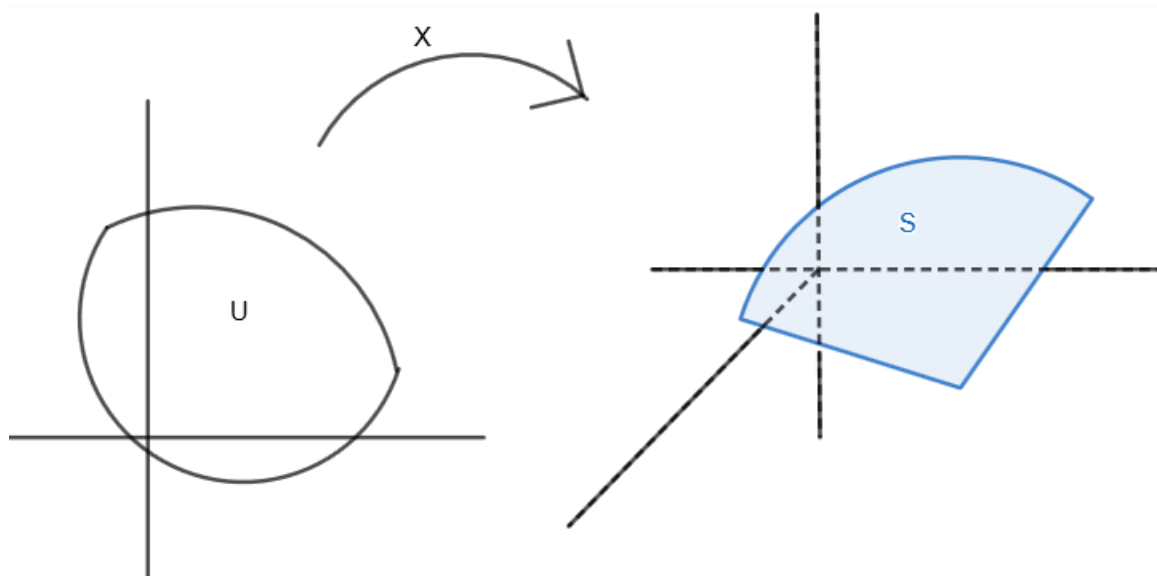
Definición 1.3.1. Llamaremos *superficie parametrizada regular* (véase la Figura 1.6) a un subespacio topológico $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$, existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $V \subset S$, con $p \in V$, y una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

que verifica:

1. X es homeomorfismo.
2. $dX_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para cada $p \in U$.

Figura 1.6: Superficies parametrizadas.



Dicha aplicación X recibe el nombre de carta y juega el papel de parametrización en el caso de las curvas planas. Por ello hablamos de que la aplicación X es una superficie parametrizada. Esta aplicación es diferenciable y, por tanto, existen las derivadas parciales X_u y X_v . Estas derivadas reciben el nombre de vectores coordenados y van a ser vectores tangentes a S , es decir, van a generar el plano tangente a la superficie.

Por último, exigimos que S sea regular, es decir, que X_u y X_v sean linealmente independientes, lo que ocurrirá cuando $X_u \times X_v \neq \vec{0}$ (nótese que este producto vectorial nos dará como resultado un nuevo vector que será normal al plano formado por los vectores tangentes coordenados).

Ejemplo 1.3.1.

Plano. Un plano (véase la Figura 1.7) viene dado por la siguiente parametrización

$$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(u, v) = P_0 + u\vec{m} + v\vec{w},$$

donde $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto y $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son los vectores directores del plano. Por tanto,

$$X(u, v) = (x_0 + um_1 + vw_1, y_0 + um_2 + vw_2, z_0 + um_3 + vw_3),$$

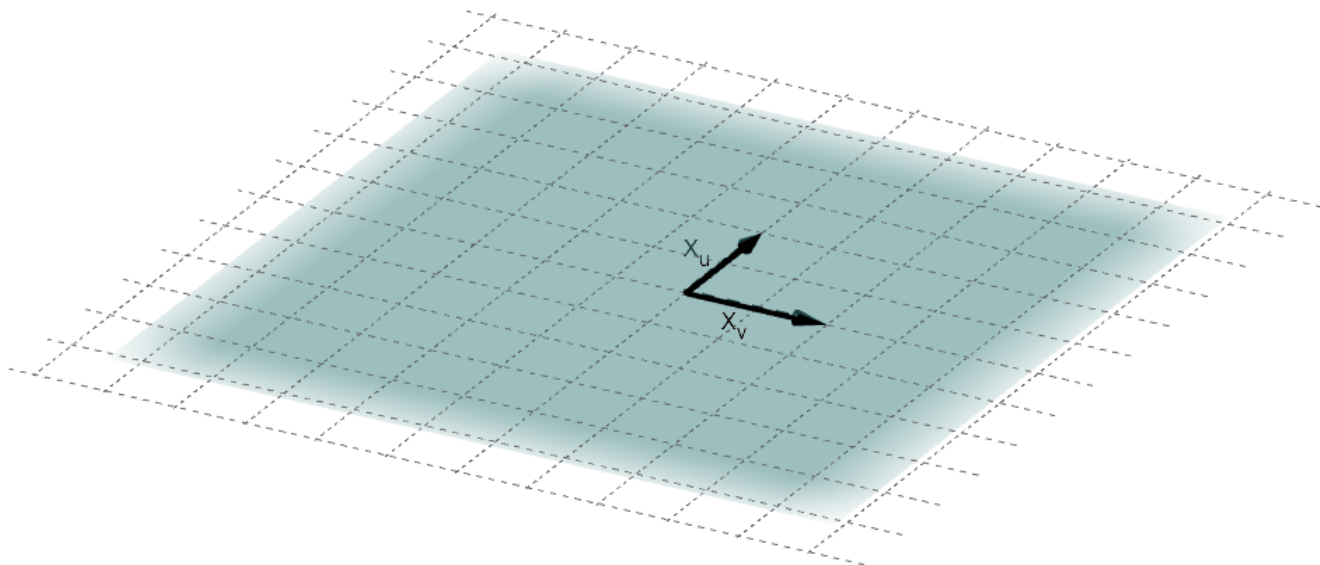
$$X_u = (m_1, m_2, m_3) = \vec{m}$$

y

$$X_v = (w_1, w_2, w_3) = \vec{w}.$$

Por otra parte, las derivadas parciales de segundo orden van a estar relacionadas con la curvatura de la superficie, es decir, con el hecho de si la superficie se dobla más o menos. En este caso $X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = (0, 0, 0)$, la superficie no se dobla, tal y como podíamos intuir al tratarse de un plano.

Figura 1.7: Plano.



Ejemplo 1.3.2.

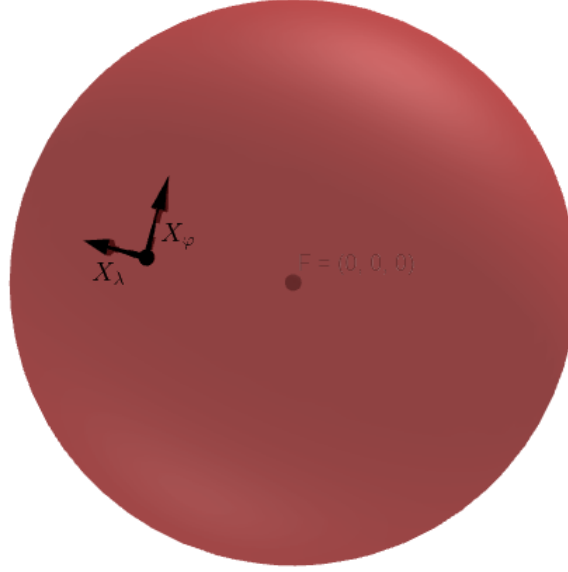
Esfera de radio R . Como sólo nos importa su geometría independientemente de su posición, vamos a suponer que la esfera (véase la Figura 1.8) está centrada en el origen. La ecuación cartesiana vendrá dada por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, donde $R > 0$ es el radio de la esfera. Pasando a coordenadas geográficas podemos considerar $x = R \cos(\varphi) \cos(\lambda)$, $y = R \cos(\varphi) \sin(\lambda)$ y $z = R \sin(\varphi)$, donde φ es la latitud y λ la longitud. De esta manera, la esfera viene dada por la siguiente parametrización:

$$X : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(\varphi, \lambda) = R(\cos(\varphi) \cos(\lambda), \cos(\varphi) \sin(\lambda), \sin(\varphi)).$$

En este caso, las derivadas de primer orden nos proporcionan el plano tangente y el vector normal a la esfera y las derivadas parciales de segundo orden $X_{\varphi\varphi}$, $X_{\varphi\lambda} = X_{\lambda\varphi}$ y $X_{\lambda\lambda}$ nos darán información sobre cómo se curva la esfera, que lo hace de manera constante intuitivamente.

Figura 1.8: Esfera.



Al igual que en el caso de las curvas planas, la parametrización de una superficie no es única y por ello las propiedades de la superficie no deberán depender de ella.

Geometría de una superficie parametrizada

Consideramos una superficie parametrizada S con parametrización $X = X(u, v)$. Para estudiar la geometría de cualquier superficie regular se utilizan principalmente la primera y la segunda forma fundamental.

La primera forma fundamental nos permite calcular medidas en la superficie (áreas, ángulos, longitudes). Viene expresada de la siguiente manera:

$$I \equiv ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

donde $E = |X_u|^2$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ y $G = |X_v|^2$.

Por otro lado, la segunda forma fundamental nos ayuda a estudiar la curvatura de una superficie. Viene expresada de la siguiente manera:

$$II \equiv edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

$$\text{donde } e = \frac{\det(X_{uu}, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, f = \frac{\det(X_{uv}, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \text{ y } g = \frac{\det(X_{vv}, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

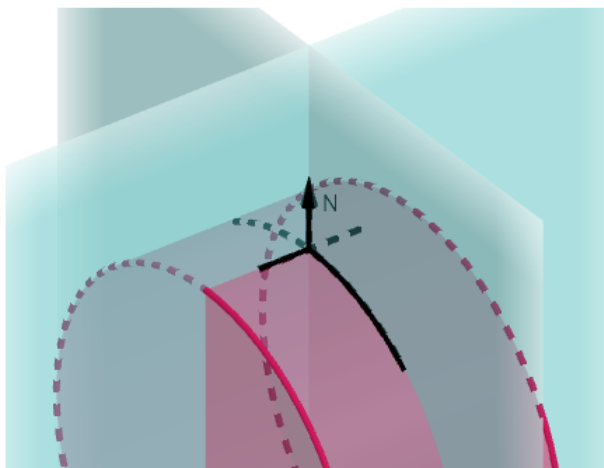
Observación 1.3.1. Nótese que estas expresiones están bien definidas, ya que $EG - F^2 = |X_u|^2|X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 \neq 0$, puesto que X_u y X_v son linealmente independientes por ser la superficie regular.

Además, el vector normal unitario a la superficie viene dado por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Las curvas resultantes de cortar la superficie con el haz de planos con dirección este normal recibe el nombre de secciones normales (véase la Figura 1.9).

Figura 1.9: Secciones normales.



Se define la *curvatura normal* como el cociente de las dos formas fundamentales.

$$k_n = \frac{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Si consideramos la dirección tangente $\lambda = \frac{dv}{du}$ y dividimos en la expresión de k_n por du^2 en el numerador y en el denominador, tenemos:

$$k_n = k_n(\lambda) = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}.$$

La curvatura normal se calcula en cada punto de la superficie y depende de la dirección tangente de λ . Un resultado importante en esta teoría nos asegura que en cualquier punto de toda superficie existe una máxima y una mínima curvatura normal, k_1 y k_2 , que reciben el nombre de *curvaturas principales*.

Definición 1.3.2. Se define la *curvatura de Gauss* K como producto de las curvaturas principales, es decir, $K = k_1 k_2$. Y se define la *curvatura media* H como la media aritmética de las curvaturas principales, es decir, $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Observación 1.3.2. El tipo de superficies que vamos a estudiar a lo largo del trabajo son las superficies de revolución de tipo Weingarden y para estas superficies va a existir una relación funcional entre las dos curvaturas principales.

1.4. Superficies de revolución

Estudiaremos un tipo de superficies llamadas de revolución, que se generan por la rotación en el espacio de una curva plana alrededor de un eje (véase la Figura 1.10).

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Vamos a considerar en $\mathbb{R}^3$ la curva generatriz C contenida en el plano xz , es decir, parametrizada de la siguiente manera:

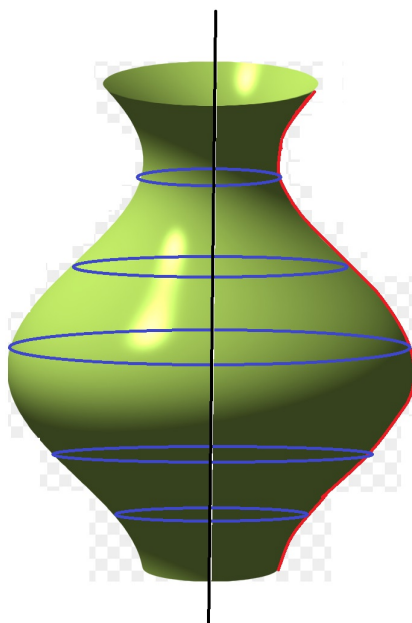
$$C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0, \\ z = z(t) \end{cases}$$

donde $t \in I$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Esta curva la vamos a revolucionar considerando el eje z como eje de revolución y así vamos a obtener la superficie de revolución generada por C . Por tanto, la superficie de revolución que denotaremos S_C posee la siguiente parametrización

$$S_C \equiv X(t, \theta) = (x(t) \cos(\theta), x(t) \sin(\theta), z(t)),$$

donde $t \in I$ y $\theta \in (0, 2\pi)$.

Figura 1.10: Superficie de revolución.



Si la curva C es regular, podemos considerar sin restricción que C está p.p.a. y asumimos que C no toca al eje de z de revolución:

$$C = \begin{cases} x = x(s) > 0, \\ z = z(s), \end{cases}$$

con $s \in I$. Como C está p.p.a. sabemos que $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$ y, además, $k(s) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{z} \end{vmatrix} = \dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z}$.

La parametrización de S_C se reescribe como

$$S_C \equiv X(s, \theta) = (x(s) \cos(\theta), x(s) \sin(\theta), z(s)),$$

con $s \in I$ y $\theta \in (0, 2\pi)$. Vamos a calcular la primera y la segunda forma fundamental de S_C en las coordenadas curvilíneas (s, θ) . Para ello calculamos las derivadas parciales de

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

primer y segundo orden. Por una parte, abreviando sin especificar la dependencia respecto de s , tenemos:

$$\begin{cases} X_s = (\dot{x} \cos(\theta), \dot{x} \sin(\theta), \dot{z}), \\ X_\theta = (-x \sin(\theta), x \cos(\theta), 0), \end{cases}$$

y, por otro lado:

$$\begin{cases} X_{ss} = (\ddot{x} \cos(\theta), \ddot{x} \sin(\theta), \ddot{z}), \\ X_{s\theta} = X_{\theta s} = (-\dot{x} \sin(\theta), \dot{x} \cos(\theta), 0), \\ X_{\theta\theta} = (-x \cos(\theta), -x \sin(\theta), 0). \end{cases}$$

En consecuencia, los coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por

$$E = |X_s|^2 = \dot{x}^2 \cos^2(\theta) + \dot{x}^2 \sin^2(\theta) + \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1,$$

$$F = \langle X_s, X_\theta \rangle = -x\dot{x} \cos(\theta) \sin(\theta) + x\dot{x} \sin(\theta) \cos(\theta) = 0,$$

$$G = |X_\theta|^2 = x^2 \sin^2(\theta) + x^2 \cos^2(\theta) = x^2 > 0.$$

Por tanto, la primera forma fundamental de S_C viene dada por $I = ds^2 + x(s)^2 d\theta^2$. Y de aquí se tiene que $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{x^2} = x$.

Por otra parte, se tiene:

$$\det(X_{ss}, X_s, X_\theta) = \begin{vmatrix} \ddot{x} \cos(\theta) & \ddot{x} \sin(\theta) & \ddot{z} \\ \dot{x} \cos(\theta) & \dot{x} \sin(\theta) & \dot{z} \\ -x \sin(\theta) & x \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = -x\ddot{x}\dot{z} + x\dot{x}\ddot{z} = x(\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z}),$$

$$\det(X_{s\theta}, X_s, X_\theta) = \begin{vmatrix} -\dot{x} \sin(\theta) & \dot{x} \cos(\theta) & 0 \\ \dot{x} \cos(\theta) & \dot{x} \sin(\theta) & \dot{z} \\ -x \sin(\theta) & x \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

puesto que aparecen dos filas proporcionales, y finalmente

$$\det(X_{\theta\theta}, X_s, X_\theta) = \begin{vmatrix} -x \cos(\theta) & -x \sin(\theta) & 0 \\ \dot{x} \cos(\theta) & \dot{x} \sin(\theta) & \dot{z} \\ -x \sin(\theta) & x \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = x^2 \dot{z}.$$

Por consiguiente, los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados por

$$e = \frac{x(\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z})}{x} = \dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z},$$

$$f = 0,$$

$$g = \frac{x^2 \dot{z}}{x} = x\dot{z}.$$

Observamos que para las superficies de revolución tenemos siempre que $f = F = 0$. Por tanto, las expresiones para la curvatura media H y la curvatura de Gauss K se simplifican, obteniéndose:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + g}{G} = \frac{1}{2} \frac{(\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z})x^2 + x\dot{z}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(k + \frac{\dot{z}}{x} \right),$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{G} = \frac{(\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z})x\dot{z}}{x^2} = \frac{(\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z})\dot{z}}{x} = k\frac{\dot{z}}{x}.$$

Además, las curvaturas principales se pueden expresar a partir de la curvatura media y la curvatura de Gauss de la siguiente manera $k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$, $i = 1, 2$. Por tanto, en el caso de las superficies de revolución, las curvaturas principales vienen dadas por

$$\begin{aligned} k_i &= H \pm \sqrt{H^2 - K} = \frac{1}{2} \frac{eG + g}{G} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{eG + g}{G}\right)^2 - \frac{eg}{G}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG + g}{G} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{(eG + g)^2}{G^2} - \frac{eg}{G}} = \frac{1}{2} \frac{eG + g}{G} \pm \sqrt{\frac{(eG + g)^2 - eg4G}{4G^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG + g}{G} \pm \sqrt{\frac{(eG - g)^2}{4G^2}} = \frac{1}{2} \frac{eG + g}{G} \pm \frac{eG - g}{2G}. \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } k_1 = \frac{2eG}{2G} = e = k(s) \text{ y } k_2 = \frac{2g}{2G} = \frac{g}{G} = \frac{x\dot{z}}{x^2} = \frac{\dot{z}}{x} = \frac{\dot{z}(s)}{x(s)}.$$

1.5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En esta sección vamos a incluir algunos conceptos básicos acerca de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Esto se debe a que posteriormente, en el Capítulo 4, necesitaremos resolver ciertas ecuaciones diferenciales para poder llegar a los resultados a los que va encaminado este trabajo.

En concreto, comenzaremos recordando el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden y los métodos de resolución para ecuaciones separables o de variables separadas y lineales.

Definición 1.5.1. Llamaremos *ecuación diferencial ordinaria de primer orden* a una ecuación cuya incógnita es una función que depende de una única variable y en cuya expresión sólo intervienen la variable y la primera derivada de la función incógnita, además de ella misma.

Vamos a denotar la función incógnita por $y = y(x)$, donde x es la variable independiente. Con esta notación, podemos expresar la ecuación diferencial ordinaria de primer orden de manera implícita mediante una expresión del tipo $F(x, y, y') = 0$, o de manera explícita por $y' = f(x, y)$, siendo F y f funciones.

Ilustremos un par de métodos de resolución para ciertos tipos de estas ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones separables

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice separable o de variables separadas si puede expresarse de la siguiente manera en forma explícita:

$$y' = g(x)h(y),$$

donde $g(x)$ y $h(y)$ son funciones continuas de una variable. Distinguimos dos posibles tipos de soluciones:

- Si existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(y_0) = 0$, entonces la solución constante $y(x) \equiv y_0$ es obviamente solución de la ecuación.
- Siempre que $h(y) \neq 0$, reescribimos la ecuación como una igualdad de diferenciales en diferentes variables e integramos en ambos miembros:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx.$$

Una vez resueltas ambas integrales, basta despejar y (si fuese posible) para encontrar la solución de la ecuación, considerando una única constante esencial de integración.

Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice lineal si puede expresarse de forma explícita de la siguiente manera:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones continuas. Para resolver este tipo de ecuaciones, se hace uso de un factor integrante, concretamente $\mu = e^{\int P(x)dx} > 0$. Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por μ y resulta:

$$e^{\int P(x)dx}(y' + P(x)y) = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

Observamos que en el primer miembro de la igualdad, tenemos la derivada del producto $e^{\int P(x)dx}y$. Reescribimos e integramos:

$$(e^{\int P(x)dx}y)' = e^{\int P(x)dx}Q(x) \Rightarrow e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x) dx.$$

Finalmente, despejamos la incógnita y obtenemos la solución de la ecuación diferencial lineal:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx}Q(x) dx.$$

Capítulo 2

El Problema de Singer

Hasta ahora, gracias al Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas Planas, hemos conseguido determinar una curva plana a partir de su curvatura en términos del parámetro arco. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones es complicado realizar los cálculos necesarios para determinar dicha curva. David A. Singer [19] se planteó este problema cambiando el enfoque haciéndose esta pregunta: ¿será posible determinar una curva plana si se prefija su curvatura en términos de su posición? Este problema se conoce con el nombre de *Problema de Singer*.

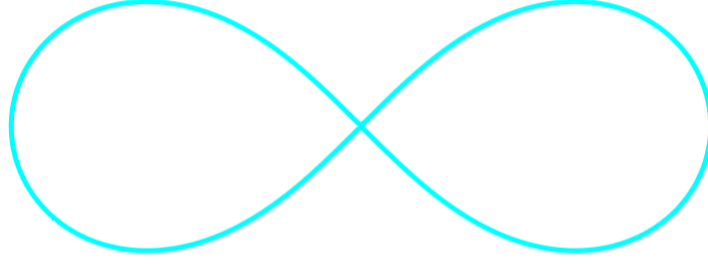
En una primera instancia parece que lo único que hizo Singer fue complicar más las cosas, ya que en este caso la curvatura dependería de dos variables en lugar de una (pasaríamos de $k = k(s)$ a $k = k(x, y)$). Cabe destacar que este caso incluye las famosas curvas elásticas de Euler (véase [20]), utilizadas en Ingeniería, ya que en un cierto sistema de referencia todas las elásticas cumplen $k(x) = 2\lambda x$ con $\lambda > 0$. Además, analíticamente estaríamos planteando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales difícil de resolver en la mayoría de los casos:

$$k(x(t), y(t)) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Es por ello que Singer se planteó ejemplos específicos en los que la curvatura de la curva dependiera de su posición. Concretamente, estudió el caso en el que la curvatura fuera igual a la distancia al origen, es decir, $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Singer probó que dada una curva con curvatura prefijada $k(r)$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se puede determinar la curva correspondiente con dicha curvatura a través de integrales, siempre y cuando la función $rk(r)$ sea continua. En particular la lemniscata de Bernoulli (véase la Figura 2.1) es una de las curvas que satisface $k(r) = r$.

Motivados por el problema de Singer y las elásticas de Euler, vamos a centrar nuestro estudio en determinar curvas planas cuya curvatura dependa únicamente de la distancia a una recta fija, en concreto, la distancia hasta el eje. De esta manera, las curvaturas de las curvas a estudiar van a depender de una distancia extrínseca a ellas mismas.

Todo este estudio lo hacemos con el objetivo final de que, una vez determinadas estas curvas, únicamente nos quedará revolucionar tomando como eje la recta fijada y podremos estudiar las superficies de revolución de tipo Weingarten, objeto de este trabajo.

Figura 2.1: Lemniscata de Bernoulli: $k(r) = r$.

2.1. Curvas con curvatura dependiendo de la distancia a un eje

Con la idea de tomar nuestras curvas como curvas generatrices de una superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$, situamos las mismas en el plano xz . Sea pues la curva $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ p.p.a. y asumimos que su curvatura dependa únicamente de la distancia al eje z ; es decir, $k = k(x)$. Según las ecuaciones de Frenet de α , tenemos que:

$$\begin{cases} (\ddot{x}, \ddot{z}) = k(-\dot{z}, \dot{x}) \\ (-\ddot{z}, \ddot{x}) = -k(\dot{x}, \dot{z}) \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = -k\dot{z} \\ \ddot{z} = k\dot{x}. \end{cases}$$

Definición 2.1.1. Dada una curva $\alpha = (x, z) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, llamaremos *momento lineal geométrico* de α a la función diferenciable dada por

$$\mathcal{K}(s) := \langle T(s), (0, 1) \rangle = \dot{z}(s), \quad s \in I.$$

La interpretación física es que el momento lineal geométrico de una curva hace referencia al momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula de masa unidad que sigue la trayectoria $\alpha(s)$ con velocidad unitaria.

Observación 2.1.1. Si $\alpha = (x, z)$ no está parametrizada por el arco, teniendo en cuenta que $T = \alpha' / |\alpha'|$ se tiene que, para una parametrización cualquiera $\alpha = \alpha(t) = (x(t), z(t))$ el momento lineal geométrico viene dado por:

$$\mathcal{K}(t) = \frac{z'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

El signo de la función $\mathcal{K}$ depende de la orientación de recorrido de la curva. Un cambio de sentido de recorrido provoca un cambio de signo del momento lineal geométrico.

Ejemplo 2.1.1. La recta $y = \tan \theta_0 x$ con $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ puede parametrizarse por el arco mediante $x(s) = \cos \theta_0 s$, $z(s) = \sin \theta_0 s$. Por tanto:

$$\mathcal{K} \equiv \sin \theta_0 \in (-1, 1).$$

CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE SINGER

Ejemplo 2.1.2. La circunferencia de centro $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, y radio $R > 0$ puede parametrizarse por el arco mediante $x(s) = a + R \cos \frac{s}{R}$, $z(s) = R \sin \frac{s}{R}$. Así $\mathcal{K}(s) = \cos \frac{s}{R}$. Por tanto:

$$\mathcal{K}(x) = \frac{x - a}{R}.$$

Ejemplo 2.1.3. La catenaria de cuerda $a > 0$, dada por $x = \cosh \frac{z}{a}$, $z \in \mathbb{R}$ se parametriza mediante $\alpha(t) = (a \cosh \frac{t}{a}, a)$. Usando el Ejemplo 1.1.3 tenemos que $|\alpha'(t)| = \cosh \frac{t}{a}$. Por tanto, usando la Observación 2.1.1:

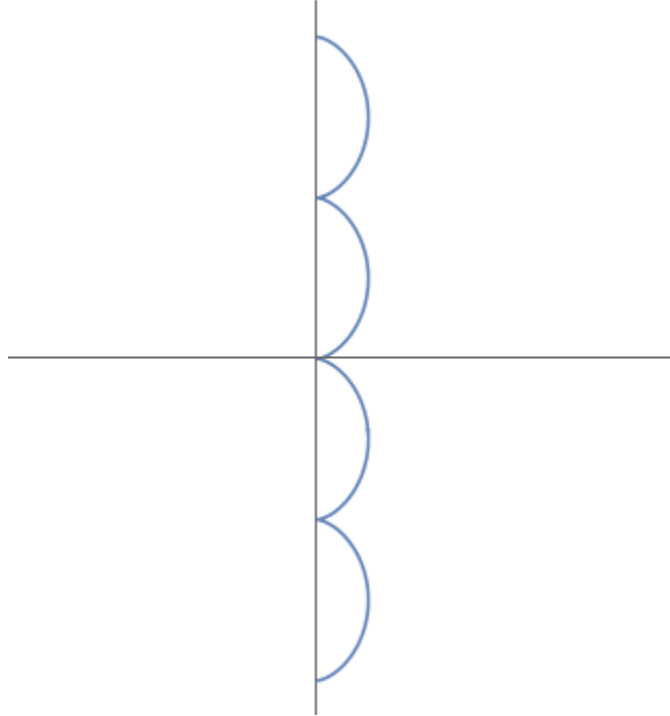
$$\mathcal{K}(t) = \frac{z'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\cosh \frac{t}{a}} = \frac{1}{\frac{x(t)}{a}} = \frac{a}{x(t)}.$$

Así pues, el momento lineal geométrico de la catenaria de cuerda $a > 0$ viene dado por:

$$\mathcal{K}(x) = \frac{a}{x}.$$

Ejemplo 2.1.4. La cicloide de radio $R > 0$ se define como la curva descrita por un punto de la circunferencia de radio R cuando ésta rueda a lo largo de una línea recta. Viene parametrizada por $\alpha(t) = (R(1 - \cos t), R(t - \sin t))$ con $t \in \mathbb{R}$ (véase la Figura 2.2).

Figura 2.2: Cicloide de radio $R > 0$.



Se tiene que $x'(t) = R \sin t$ y que $z'(t) = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2(t/2)$. Así, $x'(t)^2 + z'(t)^2 = 4R^2 \sin^2(t/2)$. Usando la Observación 2.1.1, resulta

$$\mathcal{K}(t) = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}} = \frac{2R \sin^2(t/2)}{\sqrt{4R^2 \sin^2(t/2)}} = \sin(t/2).$$

CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE SINGER

Teniendo en cuenta que $x = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2(t/2)$ concluimos finalmente que

$$\mathcal{K}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2R}}.$$

En todos estos ejemplos, partiendo de la curva α inicial, tenemos que $\mathcal{K}(s) = \dot{z}(s)$ y por tanto $\dot{\mathcal{K}}(s) = \ddot{z}(s) = k(x)\dot{x}(s)$. En consecuencia:

$$d\mathcal{K} = \dot{\mathcal{K}}(s)ds = \ddot{z}(s)ds = k(x)\dot{x}(s)ds = k(x)dx.$$

Luego, el momento lineal geométrico puede interpretarse como una primitiva de la función curvatura, es decir:

$$(2.1) \quad \mathcal{K}(x) = \int k(x) dx.$$

Además, como la curva α está p.p.a. tenemos que $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$, y por consiguiente, $\dot{x}^2 + \mathcal{K}^2 = 1$. De aquí se obtiene la siguiente ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{dx}{ds} = \dot{x} = \sqrt{1 - \mathcal{K}(x)^2}.$$

Tenemos dos opciones (véase la Sección 1.5):

Si $\dot{x} = 0$: entonces $\mathcal{K}^2 = 1$ y tenemos una recta vertical paralela al eje z .

Si $\dot{x} \neq 0$: por tanto, de $\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \mathcal{K}(x)^2}$ podemos deducir $ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(x)^2}}$. Luego $\int ds = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(x)^2}}$, es decir

$$(2.2) \quad s = s(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \mathcal{K}(x)^2}},$$

siempre que $\mathcal{K}(x)^2 < 1$. De aquí, invirtiendo $s = s(x)$ podemos deducir $x = x(s)$.

Finalmente, como $\mathcal{K}(s) = \dot{z}(s)$, se tiene que $\frac{dz}{ds} = \mathcal{K}(x(s))$, es decir:

$$(2.3) \quad z = z(s) = \int \mathcal{K}(x(s)) ds.$$

Por tanto, para determinar una curva con curvatura que dependa de la distancia al eje z , es decir, partiendo de una curvatura $k(x)$, basta resolver las integrales (2.1), (2.2) y (2.3), donde la única constante esencial está en la resolución de la primera de ellas. En la segunda, la constante sólo representa una traslación del parámetro arco y la tercera supone una traslación a lo largo del eje z .

En resumen, hemos probado el siguiente resultado local.

Teorema 2.1.1. *Cualquier curva plana $\alpha = (x, z) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ está unívocamente determinada, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por su momento lineal geométrico $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ como función de su coordenada (no constante) x . Además, la curvatura de α viene dada por $k(x) = \mathcal{K}'(x)$.*

Ilustremos algunos ejemplos sencillos de aplicación del Teorema 2.1.1.

Ejemplo 2.1.5.

$\mathbf{k} \equiv 0$. Veamos a partir del procedimiento anterior que la curva definida por esta curvatura es obviamente cualquier recta.

Consideramos, a partir de (2.1), $\mathcal{K}(x) = K_0$, con K_0 una constante en el intervalo $(-1, 1)$ que podemos elegir como $K_0 = \sin(\theta_0)$ con $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ahora calculamos s a partir de (2.2):

$$s(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^2(\theta_0)}} = \frac{1}{\cos(\theta_0)} \int dx = \frac{x}{\cos(\theta_0)}.$$

Calculando la inversa, tenemos que $x(s) = \cos(\theta_0)s$.

Por último, de (2.3), $z(s) = \int \sin(\theta_0) ds = \sin(\theta_0)s$. Así $\alpha(s) = (\cos(\theta_0)s, \sin(\theta_0)s)$, es decir, tenemos una recta que pasa por el punto $(0, 0)$ y con vector director $(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$, esto es, con pendiente $m = \tan \theta_0$. En particular, si $\theta_0 = 0$, entonces tendremos $\alpha(s) = (s, 0)$, es decir, una recta horizontal. Salvo z -traslaciones, tenemos todas las rectas (no verticales) del plano. Por tanto, podemos concluir que las rectas no verticales están determinadas por el momento lineal geométrico constante $\mathcal{K} \equiv \sin(\theta_0)$ con $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. En particular, una recta horizontal está caracterizada por su momento lineal geométrico nulo, esto es, $\mathcal{K} \equiv 0$.

Ejemplo 2.1.6.

$\mathbf{k=k_0 > 0}$. Veamos que la curva definida por esta curvatura es obviamente la circunferencia de radio $\frac{1}{k_0}$.

De (2.1), $\mathcal{K}(x) = k_0x + K_0$, con $K_0 \in \mathbb{R}$. Por tanto, realizando la integral (2.2) obtenemos:

$$s(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (k_0x + K_0)^2}} = \frac{1}{k_0} \arcsin(k_0x + K_0).$$

Calculando la inversa llegamos a que $x(s) = \frac{1}{k_0}(\sin(k_0s) - K_0)$.

Por último, de (2.3)

$$z(s) = \int (k_0x(s) + K_0) ds = \int \sin(k_0s) ds = -\frac{1}{k_0} \cos(k_0s).$$

Luego

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_0} (\sin(k_0s) - K_0, -\cos(k_0s)),$$

es decir, tenemos una circunferencia recorrida en sentido horario de radio $R = \frac{1}{k_0}$ y de centro $(-K_0/k_0, 0)$.

Obtenemos así todas las circunferencias de radio $\frac{1}{k_0}$ y centro situado en el eje x . Salvo z -traslaciones, obtendríamos cualquier circunferencia del plano con ese radio. Por tanto, podemos concluir que las circunferencias con curvatura $k_0 > 0$ están determinadas por el momento lineal geométrico proporcional a la distancia al eje z , es decir, $\mathcal{K}(x) = k_0x + K_0$, con $k_0 > 0$ y $K_0 \in \mathbb{R}$.

Si $K_0 = 0$ la circunferencia está centrada en el origen y por tanto, el momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = k_0x$ caracteriza a todas las circunferencias con centro en el eje z .

Una vez vistos estos dos ejemplos sencillos, vamos a realizar los cálculos para otros ejemplos más sofisticados en los que nos aparecen únicamente funciones elementales a la hora de resolver las integrales correspondientes. Compárese con el estudio realizado en [12].

2.2. Familias de curvas integrables

2.2.1. Curvas planas tales que $k(x)=C/x^2$, $C \neq 0$

Sea $k(x) = C/x^2$ con $C \neq 0$ constante. Veamos que una curva destacada definida por esta curvatura es la catenaria.

Consideramos $\mathcal{K}(x) = \int \frac{C}{x^2} dx = \frac{-C}{x} + K_0$, con K_0 constante que vamos a considerar $K_0 = 0$. Ahora calculamos:

$$s(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{-C}{x})^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2 - C^2}{x^2}}} = \int \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - C^2}} dx = \int du = u = \sqrt{x^2 - C^2},$$

(hemos hecho el cambio $u = \sqrt{x^2 - C^2}$). Calculando la inversa tenemos que $x(s) = \sqrt{s^2 + C^2}$. Por último calculamos:

$$\begin{aligned} z(s) &= \int \frac{-C}{x(s)} ds = - \int \frac{C}{\sqrt{s^2 + C^2}} ds = - \int \frac{C}{\sqrt{\frac{C^2}{C^2}(s^2 + C^2)}} ds = \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{(\frac{s}{C})^2 + 1}} ds = -C \int \frac{\frac{1}{C}}{\sqrt{(\frac{s}{C})^2 + 1}} ds = -C \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \\ &= -C \int \frac{\cosh(v)}{\sqrt{\sinh(v)^2 + 1}} dv = -C \int dv = -Cv = -C \operatorname{arcsenh}(u) = -C \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{C}\right), \end{aligned}$$

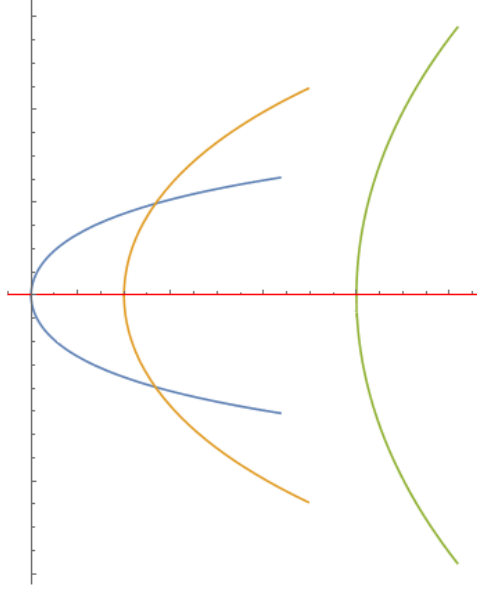
(hemos hecho los cambios $u = \frac{s}{C}$ y $u = \sinh(v)$). Luego

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{s^2 + C^2}, -C \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{C}\right) \right) = \left(C \sqrt{\left(\frac{s}{C}\right)^2 + 1}, -C \operatorname{arcsenh}\left(\frac{s}{C}\right) \right),$$

es decir, hemos obtenido la expresión de la catenaria de cuerda $a = |C|$ recorrida de abajo a arriba (véase la Figura 2.3).

Como consecuencia del Teorema 2.1.1, concluimos con el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 2.2.1. *La catenaria es la única curva plana, salvo traslaciones en el eje z , con momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = C/x$ con $C \neq 0$.*

Figura 2.3: Catenarias con distintas cuerdas $a = |C|$.

2.2.2. Curvas planas tales que $k(x) = Ce^x$, $C > 0$

Sea $k(x) = Ce^x$ con $C > 0$ constante. Si $C = 0$, tendremos $k(x) = 0$, es decir, una recta y si $C < 0$, únicamente nos cambia el signo de la curvatura, es decir, el sentido de recorrido de la curva. Esta situación se va a repetir en todos los ejemplos posteriores y por ello, vamos a considerar siempre $C > 0$.

Veamos ahora quién es la curva definida por la curvatura $k(x) = Ce^x$.

Consideramos $\mathcal{K}(x) = \int Ce^x dx = Ce^x + K_0$, con K_0 una constante que vamos a considerar $K_0 = 0$. Ahora calculamos:

$$s(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (Ce^x)^2}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}} = - \int \frac{du}{1 - u^2} = -\operatorname{arctanh} u$$

(hemos hecho los cambios $t = Ce^x$ y $u = \sqrt{1 - t^2}$). Por tanto:

$$s(x) = -\operatorname{arctanh}(\sqrt{1 - (Ce^x)^2}).$$

Calculando su inversa tenemos que:

$$x(s) = \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \tanh^2(-s)}}{C} \right) = \ln \left(\frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 s}} \right),$$

es decir,

$$x(s) = -\ln \cosh s - \ln C.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} z(s) &= \int C e^{(-\ln \cosh s - \ln C)} ds = \int C \frac{1}{C \cosh s} ds = \int \frac{ds}{\cosh s} = \\ &= \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u = \arctan(\sinh s). \end{aligned}$$

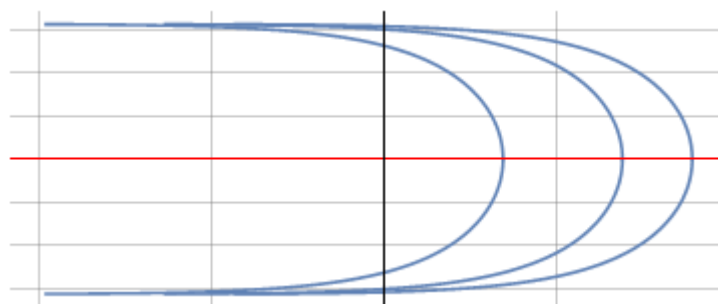
(hemos hecho el cambio $u = \sinh s$).

Luego:

$$\alpha(s) = (-\ln \cosh s - \ln C, \arctan(\sinh s)).$$

Observamos que nos aparecen las curvas conocidas como "grim-reaper" en función del parámetro C . (Véase la Figura 2.4).

Figura 2.4: Curvas "grim-reaper" con distinto C .



Como consecuencia del Teorema 2.1.1, concluimos con el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 2.2.2. *La curva "grim-reaper" es la única curva plana, salvo traslaciones en el eje z , con momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = Ce^x$.*

2.2.3. Curvas planas tales que $k(x) = C/\cos^2 x$, $C > 0$

Sea $k(x) = \frac{C}{(\cos x)^2}$ con $C > 0$ constante. Veamos quién es la curva definida por esta curvatura (véase la Figura 2.5).

Consideramos $\mathcal{K}(x) = \int \frac{C}{(\cos x)^2} dx = C \tan x + K_0$, con K_0 una constante que vamos a considerar $K_0 = 0$. Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (C \tan x)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - C^2 \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(\cos x)^2 - C^2 (\sin x)^2}{(\cos x)^2}}} dx = \\ &= \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - (\sin x)^2 - C^2 (\sin x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - C^2 u^2}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (1 + C^2)u^2}} du = \\ &\text{(hemos hecho el cambio } u = \sin x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \int \frac{\sqrt{1+C^2}}{\sqrt{1-(\sqrt{1+C^2}u)^2}} du = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \arcsen(\sqrt{1+C^2}u).$$

Por tanto,

$$s(x) = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \arcsen(\sqrt{1+C^2} \sen x).$$

Calculando la inversa tenemos que $x(s) = \arcsen\left(\frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{1+C^2}}\right)$ y ahora calculamos:

$$\begin{aligned} z(s) &= \int C \tan(x(s)) ds = C \int \tan\left(\arcsen\left(\frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{1+C^2}}\right)\right) ds = \\ &= C \int \frac{\frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{1+C^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{1+C^2}}\right)^2}} ds = C \int \frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{1+C^2-(\sen(s\sqrt{1+C^2}))^2}} ds = \\ &= C \int \frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{C^2+(\cos(s\sqrt{1+C^2}))^2}} ds = \frac{-C}{\sqrt{C^2+1}} \int \frac{du}{\sqrt{C^2+u^2}} = \end{aligned}$$

(hemos hecho el cambio $u = \cos(s\sqrt{C^2+1})$)

$$= \frac{-C}{\sqrt{C^2+1}} \int \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{u}{C})^2}} du = \frac{-C}{\sqrt{C^2+1}} \operatorname{arcsenh}(u).$$

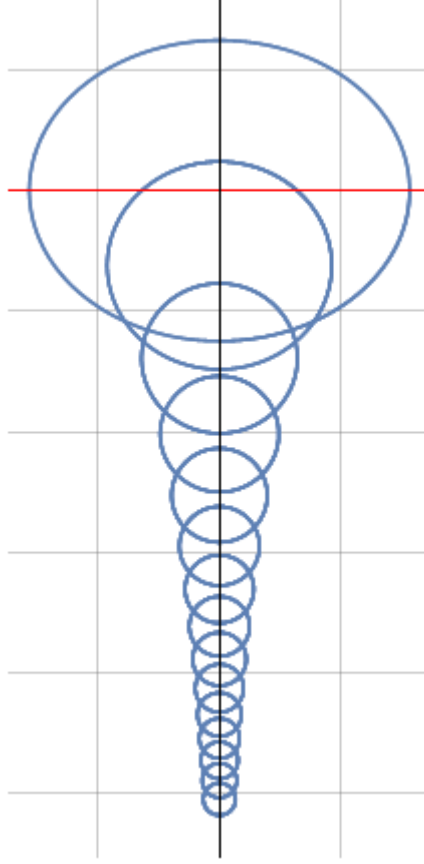
Finalmente:

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{-C}{\sqrt{C^2+1}} \operatorname{arcsenh}(\cos(s\sqrt{C^2+1})) = \\ &= \frac{-C}{\sqrt{C^2+1}} \log\left(\frac{\cos(s\sqrt{C^2+1})}{C} + \sqrt{\left(\frac{\cos(s\sqrt{C^2+1})}{C}\right)^2 + 1}\right) = \\ &= \frac{-C \log\left(\frac{1}{C} \left(\cos(s\sqrt{C^2+1}) + \sqrt{\cos(s\sqrt{C^2+1})^2 + C^2}\right)\right)}{\sqrt{C^2+1}} = \end{aligned}$$

Luego $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con

$$(2.4) \quad x(s) = \arcsen\left(\frac{\sen(s\sqrt{1+C^2})}{\sqrt{1+C^2}}\right) \quad y$$

$$(2.5) \quad z(s) = \frac{-C}{\sqrt{1+C^2}} \log\left(\cos(s\sqrt{C^2+1}) + \sqrt{\cos(s\sqrt{C^2+1})^2 + C^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \log C.$$

Figura 2.5: Curvas α con distinto C .

Como consecuencia del Teorema 2.1.1, concluimos con el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 2.2.3. *Dado $C > 0$, la curva $\alpha(s) = (x(s), z(s))$, dada por (2.4) y (2.5), es la única curva plana, salvo traslaciones a lo largo del eje z , con momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = C \tanh x$.*

2.2.4. Curvas planas tales que $k(x) = C/\cosh^2 x$, $C > 0$

Sea $k(x) = \frac{C}{(\cosh x)^2}$ con $C > 0$ constante. Veamos quién es la curva definida por esta curvatura.

Consideramos $\mathcal{K}(x) = \int \frac{C}{(\cosh x)^2} dx = C \tanh x + K_0$, con K_0 una constante que vamos a considerar $K_0 = 0$.

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (C \tanh x)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - C^2 \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(\cosh x)^2 - C^2 (\sinh x)^2}{(\cosh x)^2}}} dx \\ &= \int \frac{\cosh x}{\sqrt{1 + (\sinh x)^2 - C^2 (\sinh x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 - C^2 u^2}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - C^2)u^2}} du \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE SINGER

(hemos hecho el cambio $u = \sinh x$). Llegados a este punto tenemos que resolver la siguiente integral:

$$s(u) = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - C^2)u^2}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (C^2 - 1)u^2}} du,$$

donde $u = \sinh x$. Esta integral dependerá del valor de $C^2 - 1$, por tanto, tenemos que diferenciar varios casos.

1. $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = C \tanh(\mathbf{x})$, con $0 < C < 1$. (Véase la Figura 2.6). Tenemos:

$$s(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - C^2)u^2}} du = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - C^2}}}{\sqrt{1 + t^2}} dt =$$

(hemos hecho el cambio $t = \sqrt{1 - C^2}u$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + (\sinh u)^2}} du = \\ &\frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \int 1 du = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} u = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \operatorname{arcosh}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \operatorname{arcosh}(\sqrt{1 - C^2}u). \end{aligned}$$

(hemos hecho el cambio $t = \sinh u$). Por tanto, tenemos que:

$$s(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \operatorname{arcosh}(\sqrt{1 - C^2} \sinh x).$$

Calculando la inversa tenemos:

$$x(s) = \operatorname{arcosh} \left(\frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{\sqrt{1 - C^2}} \right).$$

De aquí,

$$\begin{aligned} z(s) &= \int C \tanh(x(s)) ds = \int C \tanh \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{\sqrt{1 - C^2}} \right) \right) ds = \\ &= C \int \frac{\frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{\sqrt{1 - C^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{\sqrt{1 - C^2}} \right)^2}} ds = C \int \frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{\sqrt{1 - C^2 + (\sinh(\sqrt{1 - C^2}s))^2}} ds = \\ &= C \int \frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{\sqrt{(\cosh(\sqrt{1 - C^2}s))^2 - C^2}} ds = C \int \frac{\sinh(\sqrt{1 - C^2}s)}{C \sqrt{\left(\frac{\cosh(\sqrt{1 - C^2}s)}{C} \right)^2 - 1}} ds = \end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arccosh} u.$$

(hemos hecho el cambio $u = \frac{\cosh(\sqrt{1-C^2}s)}{C}$). Por tanto,

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\cosh(\sqrt{1-C^2}s)}{C} \right) = \\ &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\frac{\cosh(\sqrt{1-C^2}s)}{C} + \sqrt{\left(\frac{\cosh(\sqrt{1-C^2}s)}{C} \right)^2 - 1} \right) = \\ &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\frac{1}{C} \left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) + \sqrt{\left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) \right)^2 - C^2} \right) \right) = \\ &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) + \sqrt{\left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) \right)^2 - C^2} \right) - \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\frac{1}{C} \right). \end{aligned}$$

Luego $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con

$$x(s) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sinh(\sqrt{1-C^2}s)}{\sqrt{1-C^2}} \right)$$

y

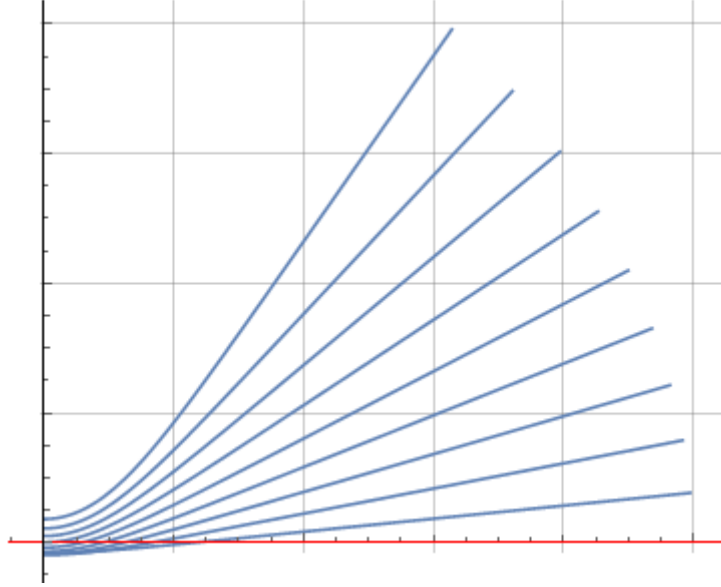
$$z(s) = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) + \sqrt{\left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) \right)^2 - C^2} \right) - \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\frac{1}{C} \right).$$

2. $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \tanh(\mathbf{x})$. Tenemos:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{1-(\tanh x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2}} dx = \int \frac{\cosh x}{\sqrt{(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2}} dx = \\ &= \int \cosh x = \sinh x. \end{aligned}$$

Calculando la inversa tenemos:

$$x(s) = \operatorname{arcsenh}(s).$$

Figura 2.6: Curvas con $0 < C < 1$.

De aquí,

$$z(s) = \int C \tanh(\operatorname{arcsenh}(s)) ds = \int \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} = \sqrt{1+s^2}.$$

(hemos hecho el cambio $u = 1 + s^2$). Finalmente tenemos:

$$z(s) = \sqrt{1+s^2}.$$

Luego $\alpha(s) = (x(s), z(s)) = (\operatorname{arcsenh}(s), \sqrt{1+s^2})$. Tenemos la catenaria (véase la Figura 2.7).

3. $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = C \tanh(\mathbf{x})$, con $C > 1$. (Véase la Figura 2.8). Tenemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(C^2-1)u^2}} du = \int \frac{1}{\sqrt{C^2-1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{C^2-1}} \operatorname{arc sen} t =$$

(hemos hecho el cambio $t = \sqrt{C^2-1}u$)

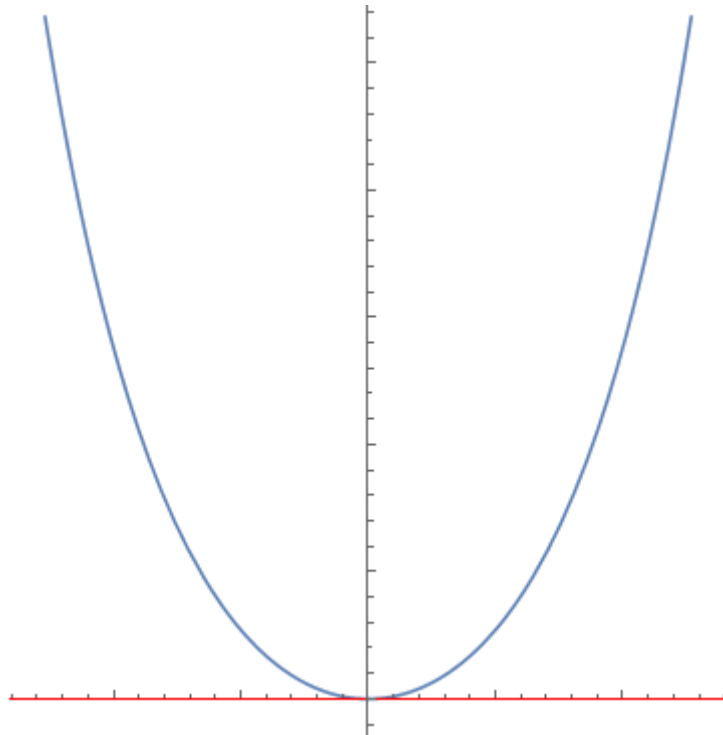
$$= \frac{1}{\sqrt{C^2-1}} \operatorname{arc sen} \left(\sqrt{C^2-1}u \right) = \frac{1}{\sqrt{C^2-1}} \operatorname{arc sen} \left(\sqrt{C^2-1} \sinh x \right).$$

Calculando la inversa tenemos:

$$x(s) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{\sqrt{C^2-1}} \right).$$

De aquí,

$$z(s) = \int C \tanh(x(s)) ds = \int C \tanh \left(\operatorname{arcsenh} \left(\frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{\sqrt{C^2-1}} \right) \right) ds =$$

Figura 2.7: Curva con $C = 1$: la catenaria.

$$\begin{aligned}
 &= C \int \frac{\frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{\sqrt{C^2-1}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{\sqrt{C^2-1}}\right)^2}} ds = C \int \frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{C^2 - 1 + \operatorname{sen}^2(s\sqrt{C^2-1})} ds = \\
 &= C \int \frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{C^2 - \cos^2(s\sqrt{C^2-1})} ds = \frac{-C}{\sqrt{C^2-1}} \int \frac{1}{\sqrt{C^2-u^2}} du =
 \end{aligned}$$

(hemos hecho el cambio $u = \cos(s\sqrt{C^2-1})$).

$$= \frac{-C}{\sqrt{C^2-1}} \int \frac{1}{C \sqrt{1 - \left(\frac{u}{C}\right)^2}} du = \frac{-C}{\sqrt{C^2-1}} \operatorname{arc sen} \left(\frac{u}{C} \right).$$

Finalmente tenemos:

$$z(s) = \frac{-C}{\sqrt{C^2-1}} \operatorname{arc sen} \left(\frac{\cos(s\sqrt{C^2-1})}{C} \right).$$

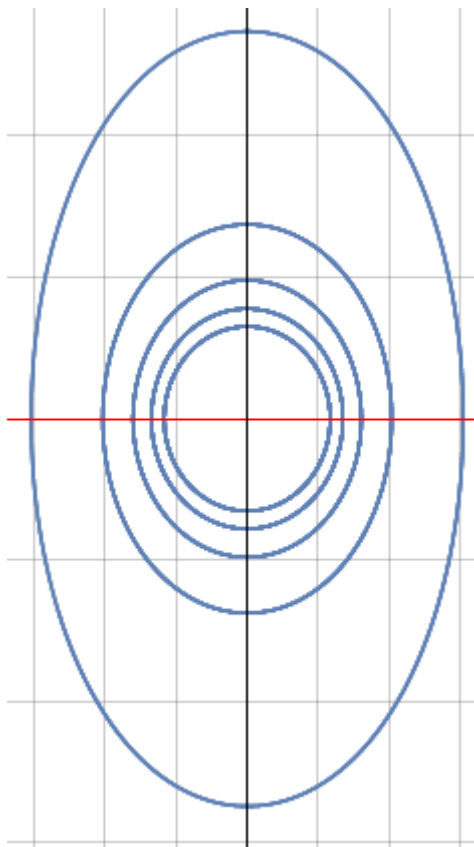
Luego $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con

$$x(s) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2-1})}{\sqrt{C^2-1}} \right).$$

y

$$z(s) = \frac{-C}{\sqrt{C^2 - 1}} \arcsen \left(\frac{\cos(s\sqrt{C^2 - 1})}{C} \right).$$

Figura 2.8: Curvas con $C > 1$.



2.2.5. Curvas planas tales que $k(x) = C/\sqrt{x}$, $C > 0$

Sea $k(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$ con $C > 0$ constante. Veamos quién es la curva definida por esta curvatura.

Consideramos $\mathcal{K}(x) = \int \frac{C}{\sqrt{x}} dx = 2C\sqrt{x} + K_0$, con K_0 una constante que vamos a considerar $K_0 = 0$.

Ahora calculamos:

$$s(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2C\sqrt{x})^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4C^2x}} = \frac{1}{-4C^2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{-4C^2} t^{\frac{1}{2}} =$$

(hemos hecho el cambio $t = 1 - 4C^2x$). Por tanto:

$$s(x) = \frac{1}{-2C^2} \sqrt{1 - 4C^2x}.$$

Para que esto tenga sentido necesitamos que $1 - 4C^2x > 0$, es decir, $x < \frac{1}{4C^2}$.

CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE SINGER

Ahora calculamos su inversa y tenemos que:

$$x(s) = \frac{4(C^2s)^2 - 1}{-4C^2} = \frac{1 - 4(C^2s)^2}{4C^2} = \frac{1 - 4C^4s^2}{4C^2}.$$

De aquí:

$$\begin{aligned} z(s) &= \int 2C\sqrt{x(s)}ds = \int 2C\sqrt{\frac{1 - 4C^4s^2}{4C^2}}ds = \int \sqrt{1 - 4C^4s^2}ds = \\ &= \frac{1}{2C^2} \int \sqrt{1 - u^2}du = \frac{1}{2C^2} \int \cos t \sqrt{1 - (\sin t)^2}dt = \frac{1}{2C^2} \int (\cos t)^2 dt = \\ & \text{(hemos hecho los cambios } u = 2C^2s \text{ y } u = \sin t) \\ &= \frac{1}{2C^2} \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{1}{4C^2} \int \cos(2t) + 1 dt = \frac{1}{4C^2} \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right) = \\ &= \frac{1}{4C^2} \left(\frac{\sin(2(\arcsin u))}{2} + \arcsin u \right) = \frac{1}{4C^2} \left(\frac{2 \sin(\arcsin u) \cos(\arcsin u)}{2} + \arcsin u \right) = \\ &= \frac{1}{4C^2} (u \cos(\arcsin u) + \arcsin u) = \frac{1}{4C^2} (u\sqrt{1 - u^2} + \arcsin u) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$z(s) = \frac{1}{4C^2} \left(2C^2s\sqrt{1 - (2C^2s)^2} + \arcsin(2C^2s) \right) = \frac{1}{4C^2} \left(2C^2s\sqrt{1 - 4C^4s^2} + \arcsin(2C^2s) \right).$$

Luego:

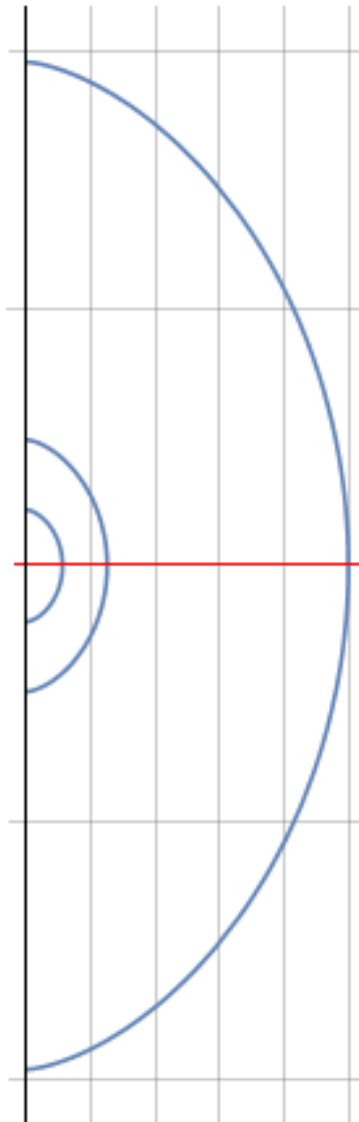
$$\alpha(s) = \left(\frac{1 - 4C^4s^2}{4C^2}, \frac{1}{4C^2} \left(2C^2s\sqrt{1 - 4C^4s^2} + \arcsin(2C^2s) \right) \right).$$

Observamos que nos aparecen trozos de cicloides (véase la Figura 2.9).

Como consecuencia del Teorema 2.1.1, concluimos con el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 2.2.4. *La cicloide de radio $R > 0$, es la única curva plana, salvo traslaciones a lo largo del eje z , con momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = 2R\sqrt{x}$.*

Figura 2.9: Trozos de cicloides con distinto C .



Capítulo 3

El momento lineal geométrico de una superficie de revolución

3.1. Determinación de una superficie de revolución

En el capítulo anterior hemos estudiado distintos ejemplos de curvas cuya curvatura depende de la distancia a uno de los ejes coordenados y para ello la herramienta fundamental ha sido el momento lineal geométrico $\mathcal{K}$ de cada curva. Hemos puesto de manifiesto que a través del cálculo de tres integrales en las que el momento lineal geométrico fijado está implicado, podemos determinar la curva salvo traslaciones a lo largo del eje. Esto nos ha llevado a la conclusión de que el momento lineal geométrico, al igual que la curvatura, determina la curva; pero además, el momento lineal geométrico también nos determina la posición de dicha curva respecto al eje coordenado fijado, hecho que no ocurría cuando partíamos de la curvatura como dato prescrito.

Todas las curvas estudiadas en el Capítulo 2 las hemos descrito en el plano xz , considerando x el eje horizontal y z el eje vertical, con la intención de revolucionarlas alrededor del eje z y así obtener una superficie de revolución a partir de la curva de inicio que llamamos *curva generatriz* o *curva perfil* de la superficie de revolución. De manera general, hemos expresado la curva como $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ el parámetro arco. Ahora, si la rotamos alrededor del eje z conseguimos una superficie S_α con la siguiente parametrización:

$$S_\alpha \equiv X(s, \theta) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)),$$

donde $\theta \in (0, 2\pi)$ y $s \in I \subseteq \mathbb{R}$. Como consecuencia del Teorema 2.1.1 y del hecho de que si trasladamos la curva generatriz α de una superficie de revolución S_α a lo largo del eje z obtenemos una superficie congruente a la superficie de revolución original, concluimos el siguiente resultado de naturaleza local.

Corolario 3.1.1. *Toda superficie de revolución S_α en $\mathbb{R}^3$ está unívocamente determinada, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por el momento lineal geométrico $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ de su curva generatriz $\alpha = (x, z)$, siendo x no constante.*

Como ya estudiamos en la Sección 1.4, las curvaturas principales vienen dadas por $k_1(s) = k(s)$, donde $k(s)$ es la curvatura de la curva perfil $\alpha(s)$ y $k_2(s) = \dot{z}(s)/x(s) = \mathcal{K}(x(s))/x(s)$. Además, por ser superficies de revolución, estas curvaturas principales van

CAPÍTULO 3. MOMENTO LINEAL DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

a referirse necesariamente a las curvaturas normales de los paralelos y de los meridianos. Por tanto, a partir de ahora notaremos respectivamente a estas curvaturas principales de la siguiente manera:

$$k_m(s) = k(s), \quad k_p(s) = \frac{\dot{z}(s)}{x(s)} = \frac{\mathcal{K}(x(s))}{x(s)}.$$

En consecuencia con el Corolario 3.1.1, ponemos de manifiesto que la geometría de la superficie de revolución S_α , con $\alpha = (x, z)$, se expresa a continuación en términos de la distancia $x > 0$ al eje de revolución y del momento lineal geométrico $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$. Concretamente, la primera forma fundamental viene dada por $I \equiv ds^2 + x^2 d\theta^2$ (véase la Sección 1.4) y las curvaturas principales, usando (2.1) se expresan mediante:

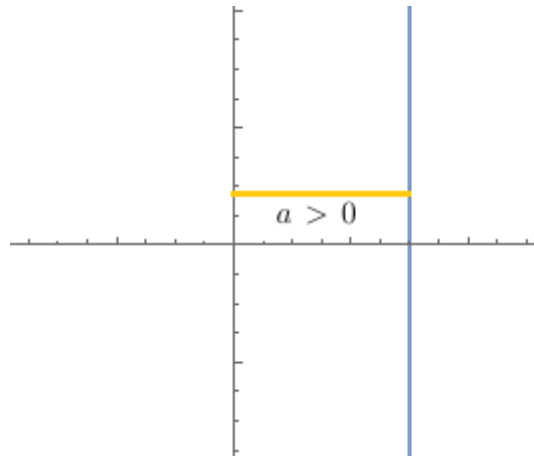
$$k_m = \mathcal{K}'(x), \quad k_p = \frac{\mathcal{K}(x)}{x}.$$

Estudiaremos en este capítulo qué tipo de superficies de revolución obtenemos a partir de algunos de los ejemplos que se han desarrollado en el capítulo anterior. En concreto, consideramos qué ocurre cuando el momento lineal geométrico $\mathcal{K}$ es igual a una constante, cuando es directamente proporcional a la distancia al eje z y cuando es inversamente proporcional a la distancia al eje z .

Observación 3.1.1. Nótese que en el capítulo anterior, a la hora de calcular el momento lineal geométrico, distinguíamos el caso en el que la distancia x al eje z era constante, para centrarnos finalmente en el estudio del caso x no constante. Por tanto, en este capítulo también tenemos que tener en cuenta el caso de x constante en un principio.

Cuando x es constante, $x \equiv a > 0$ sin restricción, puesto que $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$, tenemos que $z(s) = \pm s$. El signo únicamente nos va a determinar el sentido de recorrido de la curva. Por tanto, tendremos $\alpha(s) = (a, s)$, donde $a > 0$ y $s \in \mathbb{R}$. Es decir, tenemos una recta vertical a una distancia a del eje z .

Figura 3.1: Recta vertical $x \equiv a > 0$.



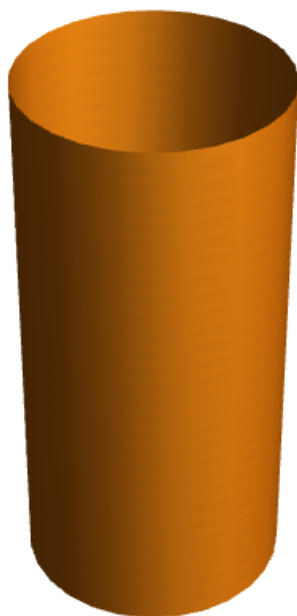
Por tanto, al revolucionar esta curva alrededor del eje z , nos quedará la superficie

$$X(s, \theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, s),$$

CAPÍTULO 3. MOMENTO LINEAL DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

donde $\theta \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Es decir, tenemos un cilindro circular de radio $a > 0$ (véase la Figura 3.2). Sus curvaturas principales son $k_m = 0$, pues los meridianos son rectas verticales, y $k_p = 1/a$, pues los paralelos son circunferencias de radio $a > 0$. Por tanto su curvatura de Gauss es nula, $K \equiv 0$, y su curvatura media es constante $H = 1/2a$.

Figura 3.2: Cilindro circular de radio $a > 0$.



En el resto del capítulo consideraremos casos en los que la distancia al eje de revolución no es constante. Para ello, estudiaremos las superficies de revolución asociadas a los momentos lineales geométricos ya estudiados en el capítulo anterior.

3.2. Superficies de revolución con momento lineal geométrico constante

En la Sección 2.1, concretamente en los Ejemplos 2.1.1 y 2.1.5, al considerar el momento lineal geométrico constante $\mathcal{K} \equiv \sin \theta_0$ con $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ constante, obteníamos rectas con pendiente $\tan \theta_0$.

1. Si $\theta_0 = 0$, tenemos que $\mathcal{K} \equiv 0$. Por tanto, tenemos la recta horizontal $x = s$, $z = 0$ (véase la Figura 3.3), que al revolucionar alrededor del eje z nos conduce a la superficie

$$X(s, \theta) = (s \cos \theta, s \sin \theta, 0),$$

donde $\theta \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$. Es decir, tenemos el plano horizontal $z = 0$ (véase la Figura 3.4). Salvo z -traslaciones, podemos colocar este plano a cualquier altura.

Figura 3.3: Recta horizontal: $\mathcal{K} \equiv 0$.

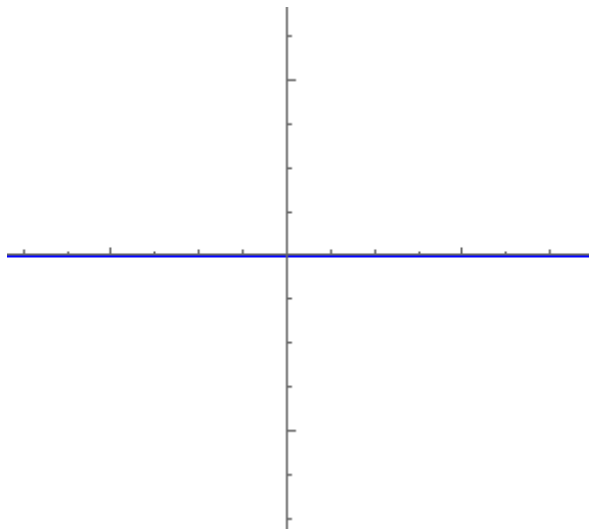


Figura 3.4: Plano horizontal "de revolución": $\mathcal{K} \equiv 0$.



2. Si $\theta_0 \neq 0$, tenemos que $\mathcal{K} \equiv \sin \theta_0$ constante no nula. Según el Ejemplo 2.1.1 y el Ejemplo 2.1.6 obtenemos la recta $\alpha(s) = (\cos \theta_0 s, \sin \theta_0 s)$, $s \in \mathbb{R}$ (véase la Figura 3.5).

Al revolucionar esta recta alrededor del eje z obtenemos la siguiente superficie de revolución

$$X(s, \theta) = (\cos \theta_0 s \cos \theta, \cos \theta_0 s \sin \theta, \sin \theta_0 s),$$

donde $\theta \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$ y $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta_0 \neq 0$. Es decir, hemos obtenido el cono de revolución $x^2 + y^2 = \cot^2 \theta_0 z^2$ (véase la Figura 3.6).

Figura 3.5: Recta $z = \tan \theta_0 x : \mathcal{K} \equiv \sin \theta_0$, $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

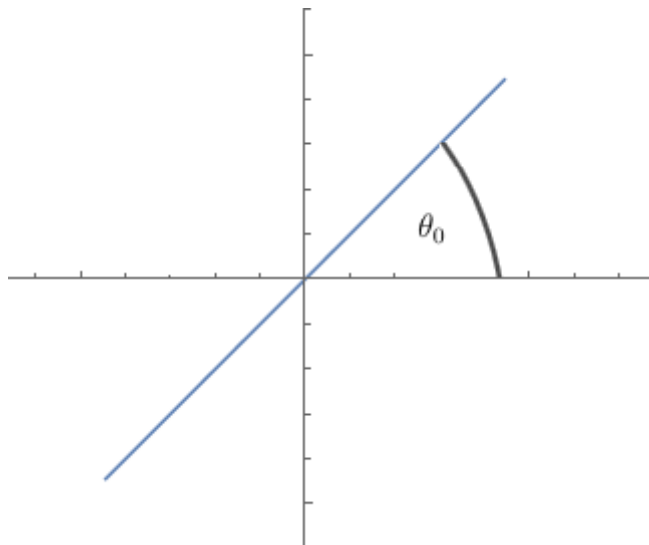
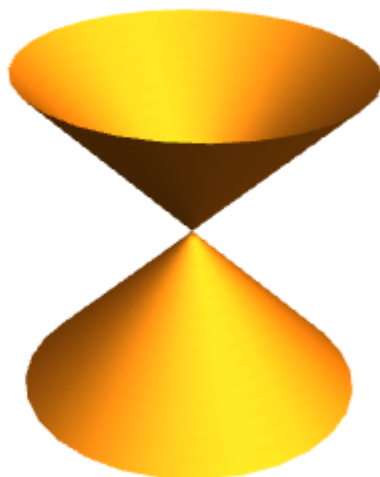


Figura 3.6: Cono de revolución $x^2 + y^2 = \cot^2 \theta_0 z^2 : \mathcal{K} \equiv \sin \theta_0$, $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta_0 \neq 0$.



En resumen, como consecuencia del Corolario 3.1.1, hemos probado el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 3.2.1.

- (i) *Cualquier plano horizontal está unívocamente determinado por el momento lineal geométrico $\mathcal{K} \equiv 0$.*
- (ii) *El cono de revolución $x^2 + y^2 = \cot^2 \theta_0 z^2$, $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta_0 \neq 0$, está unívocamente determinado, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por el momento lineal geométrico $\mathcal{K} \equiv \sin \theta_0$.*

3.3. Superficies de revolución con momento lineal geométrico directamente proporcional a la distancia al eje de revolución

En el capítulo anterior estudiábamos el caso en el que el movimiento lineal geométrico era proporcional a la distancia al eje x , es decir, $\mathcal{K}(x) = k_0x + K_0$ con $k_0 > 0$ y $K_0 \in \mathbb{R}$ (véase el Ejemplo 2.1.6).

En ese caso, obteníamos la curva

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_0} (\sin(k_0s) - K_0, -\cos(k_0s)),$$

es decir, una circunferencia de radio $\frac{1}{k_0}$ y de centro $(-K_0/k_0, 0)$.

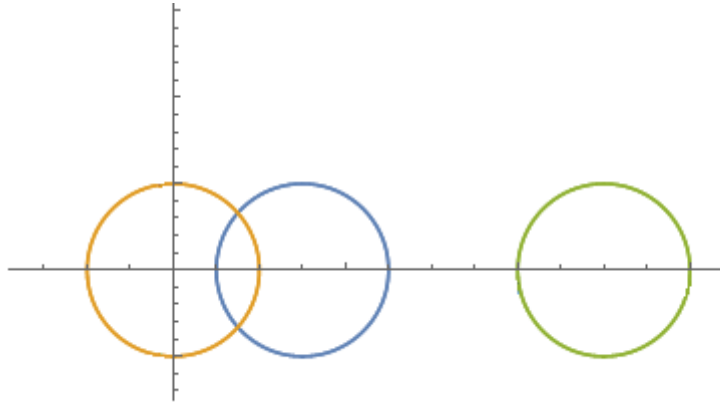


Figura 3.7: Circunferencias con centro $(-K_0/k_0, 0)$ y radio $1/k_0$.

Reparametrizando salvo una traslación en el parámetro arco, podemos reescribir la circunferencia como:

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_0} (\cos(k_0s) - K_0, \sin(k_0s)).$$

(Véase la Figura 3.7).

Por tanto, al revolucionar esta circunferencia alrededor del eje z nos quedará la siguiente superficie:

$$X(s, \theta) = \frac{1}{k_0} ((\cos(k_0s) - K_0) \cos \theta, (\cos(k_0s) - K_0) \sin \theta, \sin(k_0s))$$

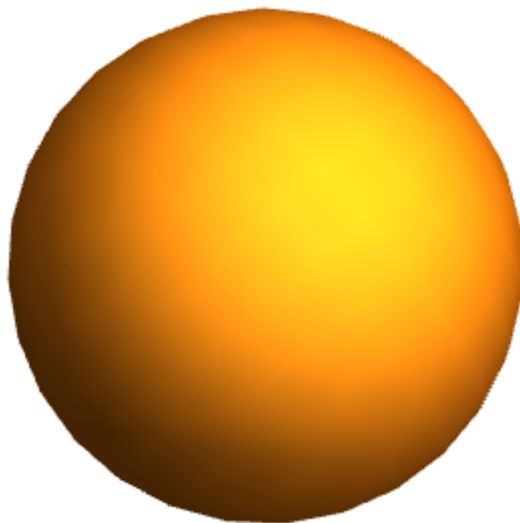
donde $\theta \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$ y $K_0 \in \mathbb{R}$.

Como resultado obtenemos diferentes superficies de revolución dependiendo del valor de K_0 . Si $K_0 = 0$, nos queda:

$$X(s, \theta) = \frac{1}{k_0} (\cos(k_0s) \cos \theta, \cos(k_0s) \sin \theta, \sin(k_0s)),$$

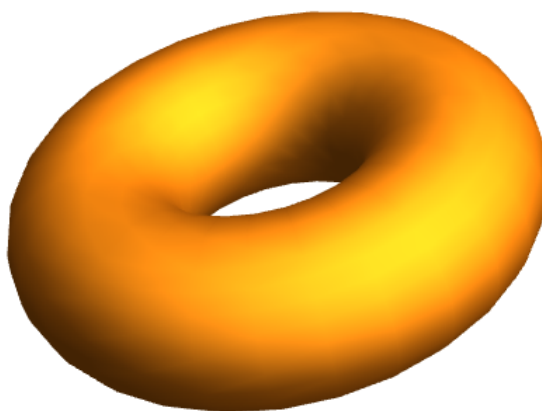
es decir, una esfera de radio $\frac{1}{k_0}$ centrada en el origen (véase la Figura 3.8).

Figura 3.8: Esfera de radio $1/k_0 > 0$: $\mathcal{K}(x) = k_0 x$.



Si $K_0 \neq 0$, obtenemos el toro de revolución generado por la circunferencia de radio $1/k_0$ centrada en el punto $(-K_0/k_0, 0)$ (véase la Figura 3.9).

Figura 3.9: Toro de revolución de radios $\frac{1}{k_0} > 0$ y $|\frac{-K_0}{k_0}|$: $\mathcal{K}(x) = k_0 x + K_0$.



En resumen, para $K_0 = 0$ obtenemos una esfera y para $K_0 \neq 0$ obtenemos un toro de revolución. En conclusión, a partir del Corolario 3.1.1 y de los Ejemplos 2.1.2 y 2.1.6, obtenemos el siguiente resultado de caracterización de esferas y toros de revolución.

Corolario 3.3.1.

- (i) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$ está unívocamente determinada, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por el momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = x/R$.
- (ii) El toro de revolución de radios $R > 0$ y $|a| > 0$ está unívocamente determinado, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por el momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = \frac{x-a}{R}$.

3.4. Superficies de revolución con momento lineal geométrico inversamente proporcional a la distancia al eje de revolución

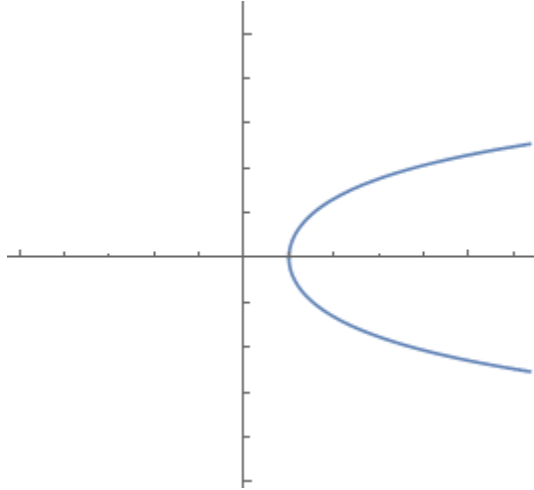
En la Sección 2.2.1 estudiábamos el caso en el que el movimiento lineal geométrico era inversamente proporcional a la distancia al eje x , es decir, $\mathcal{K}(x) = -C/x$ con $C > 0$.

En ese caso, obteníamos la curva

$$\alpha(s) = C \left(\sqrt{\left(\frac{s}{C}\right)^2 + 1}, -\operatorname{arcosh}\left(\frac{s}{C}\right) \right),$$

es decir, una catenaria de cuerda $a = |C|$ (véase el Ejemplo 2.1.3).

Figura 3.10: Catenaria de cuerda $a = |C|$: $\mathcal{K}(x) = a/x$.

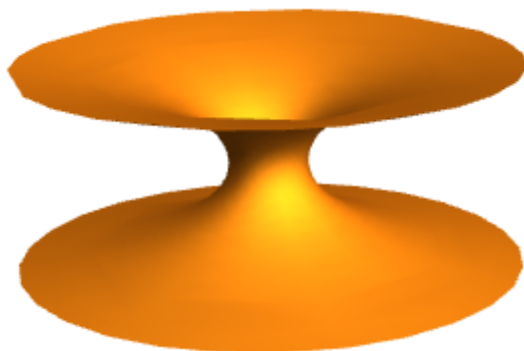


Por tanto, al revolucionar esta curva alrededor del eje z , nos quedará la superficie

$$X(\theta, s) \equiv C \left(\cos \theta \sqrt{\left(\frac{s}{C}\right)^2 + 1}, \sin \theta \sqrt{\left(\frac{s}{C}\right)^2 + 1}, -\operatorname{arcosh}\left(\frac{s}{C}\right) \right),$$

que recibe el nombre de catenoide de cuerda $|C|$ (véase Figura 3.11). Resumiendo, como aplicación del Corolario 3.1.1 concluimos con la siguiente caracterización de esta superficie.

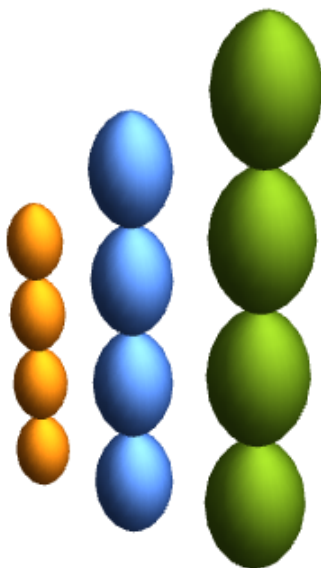
Corolario 3.4.1. *La catenoide de cuerda $a > 0$, $x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2 z/a$, está unívocamente determinada, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por el momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = a/x$.*

Figura 3.11: Catenoide de cuerda $a = |C'|$: $\mathcal{K}(x) = a/x$.

3.5. Superficies de revolución con momento lineal geométrico directamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia al eje de revolución

En el Ejemplo 2.1.4 poníamos de manifiesto que el momento lineal geométrico de la cicloide se radio $R > 0$ venía dado por $\mathcal{K}(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2R}$. La superficie de revolución generada por esta curva (véase la Figura 3.12) viene dada por:

$$X(\theta, s) \equiv R((1 - \cos s) \cos \theta, (1 - \cos s) \sin \theta, s - \sin s), \quad s \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi).$$

Figura 3.12: Superficies de revolución generadas por cicloides de radios $R > 0$.

Como consecuencia del Corolario 3.1.1, podemos concluir el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 3.5.1. *La superficie de revolución generada por la cicloide de radio $R > 0$ está unívocamente determinada, salvo traslaciones a lo largo del eje z , por el momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2R}$.*

3.6. Otras superficies de revolución con momentos lineales geométricos en términos de funciones elementales

Momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = Ce^x$, $C > 0$

En la Sección 2.2.2 obteníamos que

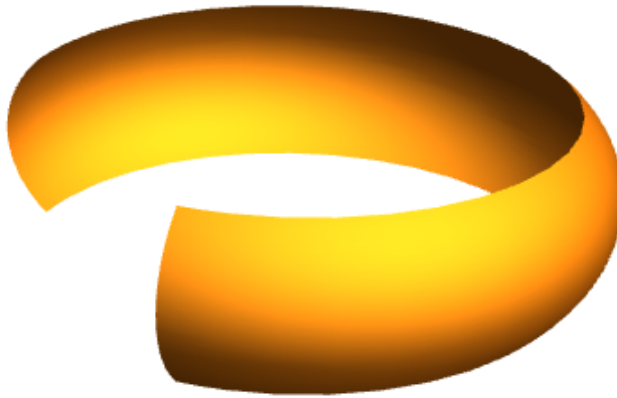
$$(3.1) \quad \alpha(s) = (-\ln \cosh s - \ln C, \arctan(\sinh s))$$

era la curva cuyo momento lineal geométrico era igual a $\mathcal{K}(x) = Ce^x$, con $C > 0$. Por tanto, la superficie de revolución generada por esa curva (véase la Figura 3.13) viene dada por:

$$X(\theta, s) \equiv ((-\ln \cosh s - \ln C) \cos \theta, (-\ln \cosh s - \ln C) \sin \theta, \arctan(\sinh s)), \quad s \in \mathbb{R}$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$.

Figura 3.13: Superficie de revolución generada por (3.1) con $\theta \in (0, 3\pi/2)$.



Además, en este caso la curvatura media vendrá dada por

$$2H(x) = Ce^x + \frac{Ce^x}{x} = Ce^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

y la curvatura de Gauss será

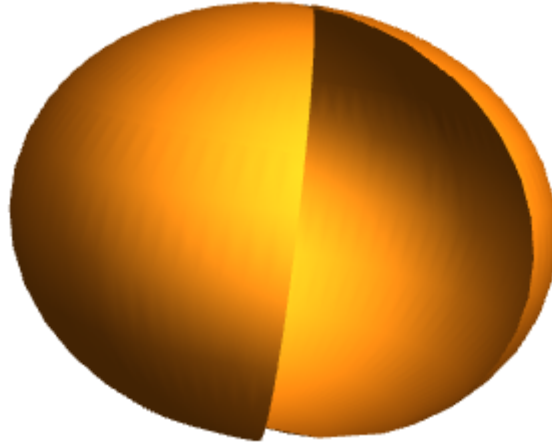
$$K(x) = \frac{C^2 e^{2x}}{x}.$$

Momento lineal geométrico $\mathcal{K}(\mathbf{x})=C \tan x$, $C>0$

En la Sección 2.2.3 obteníamos que la curva $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con $x(s)$ y $z(s)$ dados por (2.4) y (2.5), respectivamente, era aquella cuyo momento lineal geométrico era igual a $\mathcal{K}(x) = C \tan x$, con $C > 0$. Por tanto, la superficie de revolución generada por esa curva (véase la Figura 3.14) viene dada por

$$X(\theta, s) \equiv (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi).$$

Figura 3.14: Superficie de revolución generada por la curva α con $\theta \in (0, 3\pi/2)$.



Además, en este caso la curvatura media vendrá dada por

$$2H(x) = \frac{C}{\cos^2 x} + \frac{C \tan x}{x} = C \left(\frac{x + \sin x \cos x}{x \cos^2 x} \right)$$

y la curvatura de Gauss será

$$K(x) = \frac{C^2 \tan x}{x \cos^2 x} = \frac{C^2 \sin x}{x \cos^3 x}.$$

Momento lineal geométrico $\mathcal{K}(\mathbf{x})=C \tanh x$, $C>0$

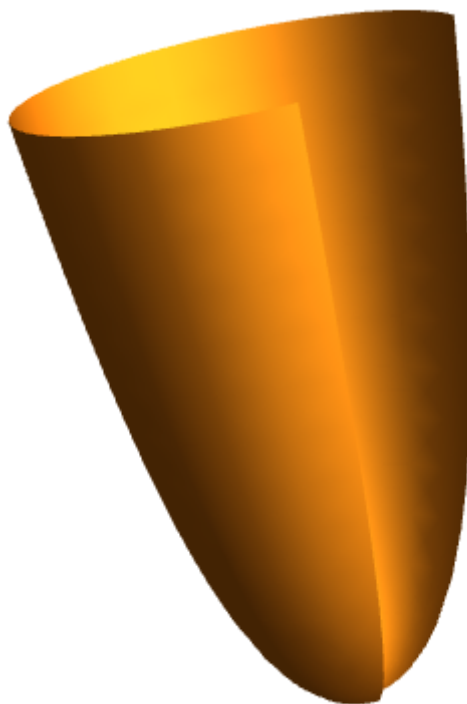
En la Sección 2.2.4 obteníamos por una parte que la curva $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con

$$x(s) = \operatorname{arcosh} \left(\frac{\sinh(\sqrt{1-C^2}s)}{\sqrt{1-C^2}} \right) \quad y$$

$$z(s) = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) + \sqrt{\left(\cosh(\sqrt{1-C^2}s) \right)^2 - C^2} \right) - \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \log \left(\frac{1}{C} \right),$$

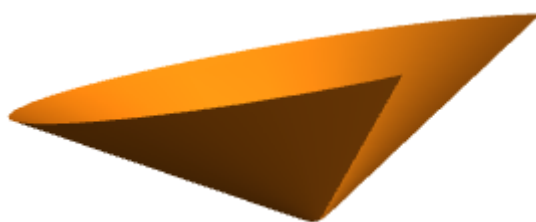
era aquella cuyo momento lineal geométrico era igual a $\mathcal{K}(x) = C \tanh x$, con $0 < C < 1$. Por tanto, la superficie de revolución generada por esa curva (véase la Figura 3.15) viene dada por:

Figura 3.16: Superficie de revolución generada por la curva (3.2) con $\theta \in (0, 3\pi/2)$.



$$X(\theta, s) \equiv (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi).$$

Figura 3.15: Superficie de revolución generada por la curva α con $\theta \in (0, 3\pi/2)$.



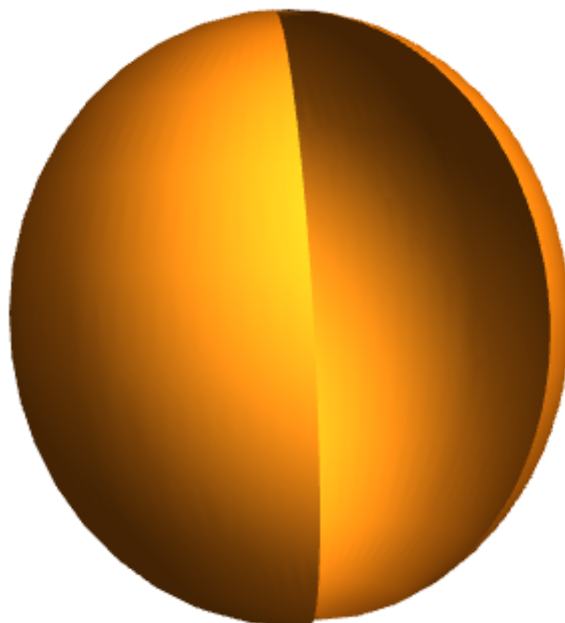
Por otra parte, también obteníamos que la curva

$$(3.2) \quad \alpha(s) = (\operatorname{arcsenh}(s), \sqrt{1+s^2})$$

era aquella cuyo momento lineal geométrico era igual a $\mathcal{K}(x) = \tanh x$. Por tanto, la superficie de revolución generada por esa curva (véase la Figura 3.16) viene dada por:

$$X(\theta, s) \equiv \left(\operatorname{arcsenh}(s) \cos \theta, \operatorname{arcsenh}(s) \sin \theta, \sqrt{1+s^2} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi).$$

Figura 3.17: Superficie de revolución generada por la curva α con $\theta \in (0, 3\pi/2)$.



Por último, en la Sección 2.2.4 también obteníamos que la curva $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ con

$$x(s) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\operatorname{sen}(s\sqrt{C^2 - 1})}{\sqrt{C^2 - 1}} \right).$$

y

$$z(s) = \frac{-C}{\sqrt{C^2 - 1}} \operatorname{arc sen} \left(\frac{\cos(s\sqrt{C^2 - 1})}{C} \right)$$

era aquella cuyo momento lineal geométrico era igual a $\mathcal{K}(x) = C \tanh x$, con $C > 1$. Por tanto, la superficie de revolución generada por esa curva (véase la Figura 3.17) viene dada por:

$$X(\theta, s) \equiv (x(s) \cos \theta, x(s) \operatorname{sen} \theta, z(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi).$$

Además, en este caso la curvatura media vendrá dada por

$$2H(x) = \frac{C}{\cosh^2 x} + \frac{C \tanh x}{x} = C \left(\frac{x + \operatorname{senh} x \cosh x}{x \cosh^2 x} \right)$$

y la curvatura de Gauss será

$$K(x) = \frac{C^2 \tanh x}{x \cosh^2 x} = \frac{C^2 \operatorname{senh} x}{x \cosh^3 x}.$$

Capítulo 4

Superficies de revolución con una condición de tipo Weingarten

En este último capítulo se recoge la finalidad principal de este trabajo que no es otra sino el estudio de las superficies de revolución de tipo Weingarten. Todos los resultados que hemos establecido a lo largo del trabajo iban dirigidos a servir de apoyo para desarrollar este estudio particular.

4.1. Superficies de tipo Weingarten

Las superficies de tipo Weingarten fueron definidas por Weingarten [21] y Chern [5] como aquellas superficies del espacio euclídeo 3-dimensional cuyas curvaturas principales satisfacen una relación funcional, esto es, $\Phi(k_1, k_2) = 0$.

Como punto de partida, podríamos considerar la situación simple en la que la relación que existiese entre las curvaturas principales fuese una relación lineal, es decir:

$$ak_1 + bk_2 = c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$.

Observamos que bajo la condición anterior estamos considerando algunas familias importantes de superficies:

- las *superficies umbilicales*, que son aquellas cuyas curvaturas principales coinciden: $k_1 = k_2$. Es bien conocido que son el plano y la esfera.
- las *superficies isoparamétricas*, que son aquellas cuyas curvaturas principales son constantes. Se conoce que son planos, esferas y cilindros circulares.
- las *superficies con curvatura media constante* (abreviadamente CMC), esto es, $k_1 + k_2 = c$, con $c \in \mathbb{R}$, que incluyen la importante familia de *superficies mínimas* (o *minimales*) $k_1 + k_2 = 0$.

Mencionamos que recientemente otros autores [11, 16] definen las superficies de tipo Weingarten como aquellas en las que existe una relación funcional entre la curvatura media H y la curvatura de Gauss K , esto es $\Psi(H, K) = 0$. La definición que nosotros hemos adoptado es la clásica, que además es más general.

4.2. Superficies de revolución de tipo Weingarten y el momento lineal geométrico

Nosotros nos vamos a centrar en el estudio de las superficies de revolución de tipo Weingarten. Por tanto, disponemos de una curva generatriz $\alpha = (x, z)$ que genera una superficie de revolución S_α (véase el Capítulo 3). Recordando la relación de las curvaturas principales de una superficie de revolución con el momento lineal geométrico de su curva generatriz ($k_m(x) = k(x)$, $k_p(x) = \mathcal{K}(x)/x$), queda:

$$\Phi \left(k(x), \frac{\mathcal{K}(x)}{x} \right) = 0.$$

Pero además, utilizando (2.1), tenemos:

$$\Phi \left(\mathcal{K}'(x), \frac{\mathcal{K}(x)}{x} \right) = 0.$$

Reescribiendo esta igualdad llegamos a una ecuación diferencial de primer orden cuya función incógnita resulta ser el momento lineal geométrico como función de la distancia al eje de revolución:

$$\bar{\Phi}(x, \mathcal{K}(x), \mathcal{K}'(x)) = 0.$$

Así pues, concluimos que bastaría resolver una ecuación diferencial de primer orden para calcular el momento lineal geométrico asociado a una superficie de revolución de tipo Weingarten. Y no olvidemos que este momento determina completamente la superficie gracias al Corolario 3.1.1, caso aparte del cilindro circular (que corresponde al caso x constante).

Para ilustrar el anterior proceso, estudiaremos qué ocurre cuando alguna de las curvaturas principales es constante y qué sucede cuando las curvaturas principales son iguales.

Ejemplo 4.2.1. Supongamos que S_α posee alguna de las curvaturas principales, k_m o k_p , constante. Vamos a distinguir dos casos:

- Alguna de las curvaturas principales es nula (véase la Figura 4.1). Si $k_m = 0$, entonces $\mathcal{K}(x) = C$ con $C \in (-1, 1)$ necesariamente. Por tanto, aplicando el Corolario 3.2.1, S_α es un cilindro circular ($k_m = 0$), un plano (si $C = 0$) o un cono circular (si $C \neq 0$). Y si $k_p = 0$, entonces necesariamente $\mathcal{K}(x) = 0$ y, por tanto, S_α es un plano.
- Alguna de las curvaturas principales es constante no nula (véase la Figura 4.2). Si $k_m = C$, con $C \neq 0$, entonces $\mathcal{K}(x) = Cx + K_0$, $K_0 \in \mathbb{R}$. Aplicando el Corolario 3.3.1, S_α puede ser una esfera de radio $1/|C|$ si $K_0 = 0$, y si $K_0 \neq 0$, S_α es un toro de revolución. Por otra parte, si $k_p = C$ con $C \neq 0$, entonces o bien S_α es un cilindro circular o bien necesariamente $\mathcal{K}(x) = Cx$. Por tanto, S_α es una esfera de radio $1/|C|$ en este caso.

Estamos ya en condiciones de encontrar las superficies isoparamétricas de revolución (véase la Figura 4.3). Las dos curvaturas principales han de ser ambas constantes (nulas o no nulas, por definición). De la distinción anterior, la conclusión es que han de ser el plano, la esfera o el cilindro circular. Nótese que en los conos circulares k_p no es constante, al igual que en los toros de revolución.

Figura 4.1: Superficies de revolución con alguna curvatura principal nula.

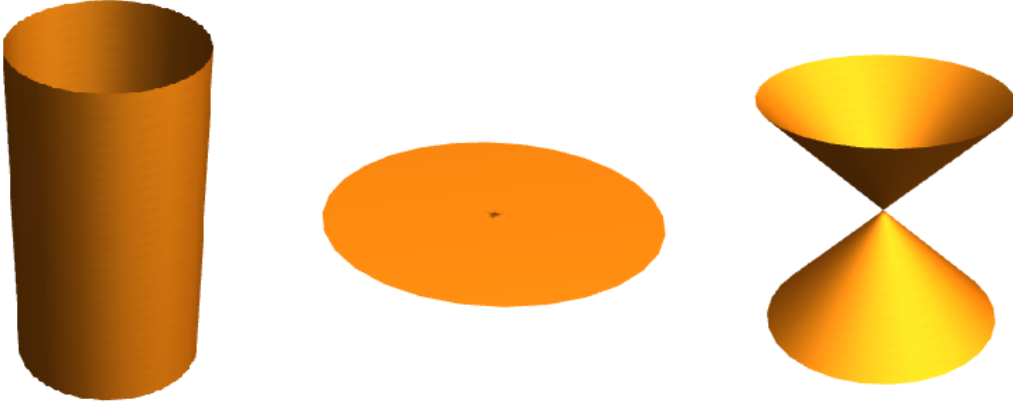
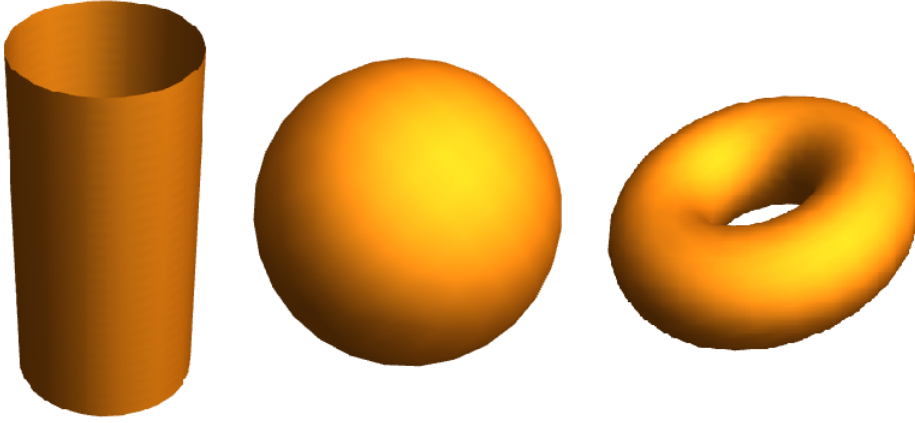


Figura 4.2: Superficies de revolución con alguna curvatura principal constante no nula.



Ejemplo 4.2.2. Comprobamos a continuación que el plano y la esfera son las únicas superficies umbilicales (de revolución). Si S_α una superficie umbilical, entonces $k_m = k_p$. Se cumple pues que $\mathcal{K}'(x) = \mathcal{K}(x)/x$. Nos encontramos frente a una ecuación diferencial de primer orden de variables separadas (véase la Sección 1.5):

$$\frac{d\mathcal{K}}{dx} = \frac{\mathcal{K}(x)}{x},$$

que resolvemos separando variables, esto es, $d\mathcal{K}/\mathcal{K} = dx/x$ e integrando:

$$\int \frac{d\mathcal{K}}{\mathcal{K}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \mathcal{K} = \ln x + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$. De aquí se deduce fácilmente que $\mathcal{K}(x) = Dx$, con $D \in \mathbb{R}$. Si $D = 0$, la superficie es un plano (corresponde a la solución trivial $\mathcal{K} = 0$) y si $D \neq 0$, la superficie es una esfera. (Véase la Figura 4.4).

Figura 4.3: Superficies isoparamétricas (de revolución).

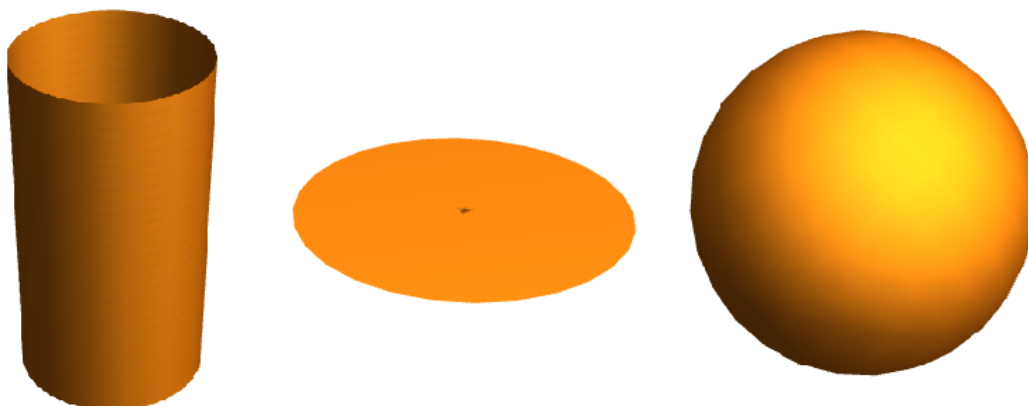
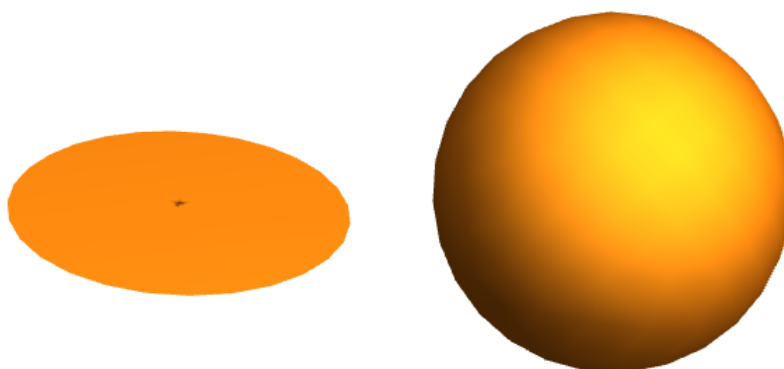


Figura 4.4: Superficies umbilicales (de revolución).



4.2.1. Superficies de revolución de tipo Weingarten con curvatura media prescrita

Al inicio de este capítulo habíamos planteado el estudio de las superficies de tipo Weingarten cuya relación entre las curvaturas principales fuera lineal. Nos habían aparecido, entre otras, las superficies CMC. Esto nos motiva la búsqueda de una expresión para la curvatura media H de una superficie de revolución en función del momento lineal geométrico.

Recordamos que la curvatura media se define como la media aritmética de las curvaturas principales, esto es $H = \frac{k_1+k_2}{2}$. Pero además, en el seno de las superficies de revolución, usando el momento lineal geométrico $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ de la curva generatriz, se tiene:

$$2H = \mathcal{K}'(x) + \frac{\mathcal{K}(x)}{x}.$$

Si para una superficie de revolución prescribimos su curvatura media mediante la función de una variable $H(x)$, podemos identificarla con el término de no homogeneidad de la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\mathcal{K}'(x) + \frac{\mathcal{K}(x)}{x} = 2H(x).$$

CAPÍTULO 4. SUPERFICIES WEINGARTEN DE REVOLUCIÓN

Si siguiendo las pautas de la Sección 1.5, si multiplicamos por el factor integrante $x > 0$ cada miembro de la anterior ecuación, resulta:

$$x\mathcal{K}'(x) + \mathcal{K}(x) = 2x H(x).$$

Sucede entonces que el primer miembro corresponde a la derivada del producto de $x\mathcal{K}(x)$. Por tanto, resolvemos la ecuación lineal a partir de la expresión:

$$(4.1) \quad x\mathcal{K}(x) = 2 \int x H(x) dx.$$

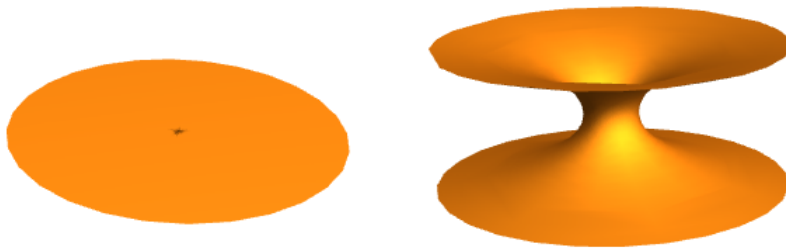
Hemos llegado a una expresión (4.1) que relaciona el momento lineal geométrico con la curvatura media prescrita de una superficie de revolución.

Esto nos permite dar una prueba muy sencilla alternativa a la demostración habitual, del resultado clásico de Euler [9, 10] sobre las superficies mínimas de revolución. Recordemos que las superficies mínimas se definen como aquellas cuya curvatura media H es idénticamente nula.

Teorema 4.2.1. *Las únicas superficies mínimas de revolución son el plano y la catenoide. (Véase la Figura 4.5).*

Demostración. Si $H = 0$, entonces (4.1) se reduce a $x\mathcal{K}(x) = C$, con $C \in \mathbb{R}$. De aquí se deduce que $\mathcal{K}(x) = C/x$ (recordemos que $x > 0$ por tratarse de una superficie de revolución). Por tanto, se tienen dos posibilidades: si $C=0$, $\mathcal{K}(x) = 0$ y por consiguiente, la superficie es un plano aplicando el Corolario 3.2.1. Y si $C \neq 0$, $\mathcal{K}(x) = C/x$ y, por consiguiente, la superficie es una catenoide aplicando el Corolario 3.4.1. $\square$

Figura 4.5: Superficies mínimas de revolución.



Comenzábamos esta sección motivados por el estudio de las superficies CMC y en consecuencia, hemos obtenido una expresión para la curvatura media H . Si nos centramos en las superficies CMC, su curvatura media será $H \equiv H_0$ constante. Si esa constante es igual a cero, nos encontramos ante la situación del Teorema 4.2.1, pero si $H_0 \neq 0$ la situación cambia ostensiblemente. En ese caso, a partir de (4.1), se obtiene que $x\mathcal{K}(x) = 2H_0 \int x dx$, y de aquí,

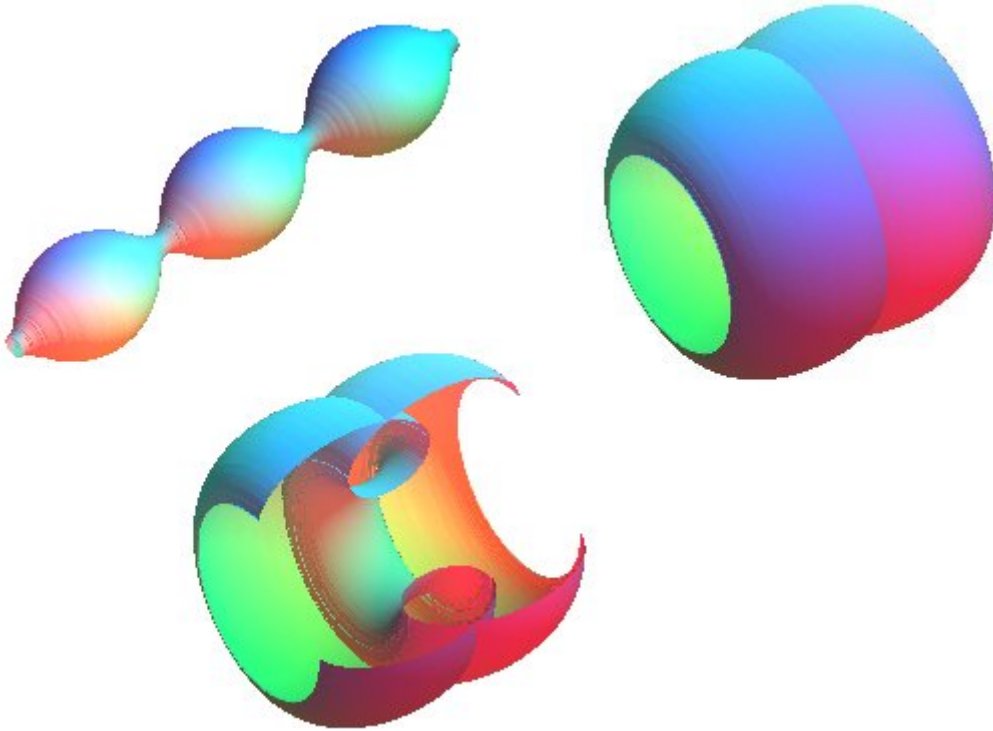
$$\mathcal{K}(x) = H_0 x + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

CAPÍTULO 4. SUPERFICIES WEINGARTEN DE REVOLUCIÓN

Si $C = 0$, $\mathcal{K}(x) = H_0x$ y por tanto, la superficie es una esfera por el Corolario 3.3.1.

Pero si $C \neq 0$, haciendo un estudio similar al de los ejemplos considerados en los Capítulos 2 y 3, se llega a la conclusión de que partiendo del momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x) = H_0x + \frac{C}{x}$ con $C \neq 0$, las superficies resultantes son las llamadas superficies de Delaunay [7] (véase la Figura 4.6), que ya no vienen dadas por funciones elementales, sino que involucran integrales elípticas en su resolución.

Figura 4.6: Superficies CMC de revolución: las superficies de Delaunay (Fuente: www.mathcurve.com).



Motivados por el Teorema 4.2.1 anterior y su demostración, nos disponemos a enunciar y demostrar un teorema que va a clasificar las superficies de revolución con curvatura media H inversamente proporcional a la distancia al eje x y curvatura de Gauss K inversamente proporcional a la cuarta potencia de la citada distancia.

Teorema 4.2.2. *Las únicas superficies de revolución con curvatura media $H(x) = \mu/x$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y curvatura de Gauss $K(x) = \nu/x^4$ con $\nu \in \mathbb{R}$ (representando x la distancia de la superficie al eje de revolución) son el plano, el cono circular y la catenoide. (Véase la Figura 4.7).*

Demostración. Puesto que $H(x) = \mu/x$, usando (4.1) se tiene que $x\mathcal{K}(x) = 2\mu \int dx = 2\mu x + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $\mathcal{K}(x) = 2\mu + C/x$. A partir del momento lineal geométrico, podemos calcular la curvatura de Gauss K de la superficie de revolución:

$$K(x) = \mathcal{K}'(x) \frac{\mathcal{K}(x)}{x} = -\frac{C}{x^2} \frac{2\mu + C/x}{x} = -\frac{C}{x^2} \frac{2\mu x + C}{x^2} = -\frac{2\mu Cx + C^2}{x^4}.$$

CAPÍTULO 4. SUPERFICIES WEINGARTEN DE REVOLUCIÓN

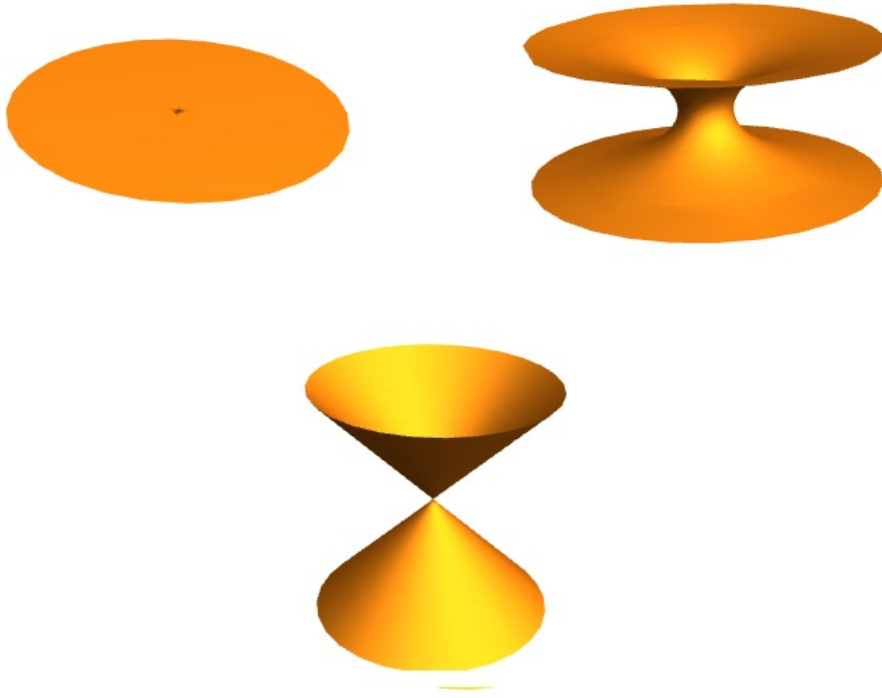
Usando ahora la hipótesis de que $K(x) = \nu/x^4$, llegamos necesariamente a que $\mu C = 0$ y entonces $\nu = -C^2$.

Si $C=0$, $\mathcal{K}(x) = 2\mu$ y por el Corolario 3.2.1 la superficie es un plano (si $\mu = 0$) o un cono circular (si $\mu \neq 0$). Ambas son superficies llanas.

Si $\mu=0$, $\mathcal{K}(x) = C/x$ y por el Corolario 3.4.1 la superficie es un plano (si $C = 0$) o una catenoide (si $C \neq 0$) que tiene curvatura de Gauss $K(x) = \frac{-C^2}{x^4}$.

□

Figura 4.7: Superficies de revolución con $H(x) = \mu/x$ y $K(x) = \nu/x^4$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.



4.2.2. Superficies de revolución de tipo Weingarten con curvatura de Gauss prescrita

Supongamos ahora en esta sección que prescribimos la curvatura de Gauss de una superficie de revolución. Recordemos que la curvatura de Gauss K se define como el producto de las curvaturas principales, $K = k_1 k_2$. En el caso de las superficies de revolución, haciendo uso del momento lineal geométrico $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$, se tiene:

$$K = \frac{\mathcal{K}(x)\mathcal{K}'(x)}{x}.$$

Así, si prescribimos la curvatura de Gauss para una superficie de revolución mediante la función $K(x)$, llegamos a la ecuación diferencial

$$\mathcal{K}(x)\mathcal{K}'(x) = xK(x).$$

que podemos reescribir como

$$(\mathcal{K}(x)^2)' = 2xK(x)$$

y por tanto:

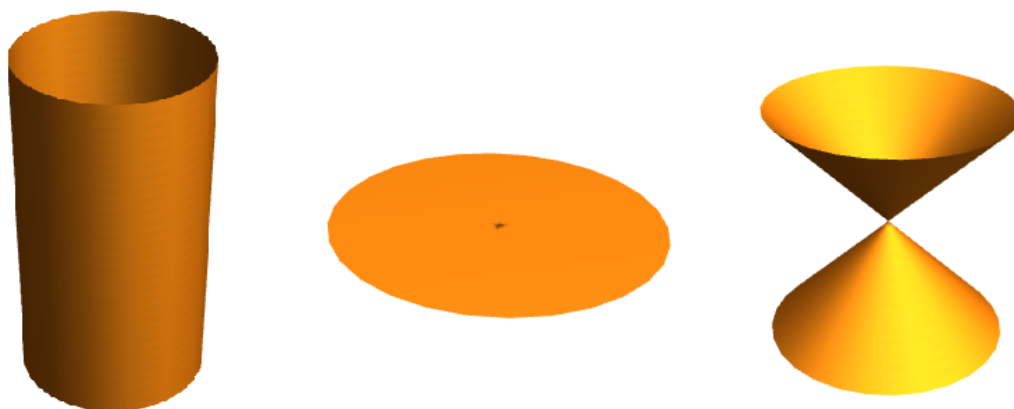
$$(4.2) \quad \mathcal{K}(x)^2 = 2 \int xK(x)dx.$$

Llegamos, pues, a una expresión que relaciona el momento lineal geométrico con la curvatura de Gauss prescrita de una superficie de revolución. Clasificamos, como aplicación inmediata de (4.2), las superficies de revolución llanas, esto es, con curvatura de Gauss nula.

Teorema 4.2.3. *Las únicas superficies de revolución llanas son el plano, el cilindro circular y el cono circular. (Véase la Figura 4.8).*

Demostración. Basta tener en cuenta que si $K \equiv 0$, entonces (4.2) obliga a que $\mathcal{K}$ es constante y aplicar el Corolario 3.2.1 sin olvidar el caso del cilindro circular. $\square$

Figura 4.8: Superficies de revolución llanas.



Si analizamos las superficies de revolución con curvatura de Gauss constante no nula, distinguimos entre que ésta sea positiva o negativa. Consideramos simultáneamente $K = \pm a^2$, $a \neq 0$. Usando (4.2), se tiene:

$$\mathcal{K}(x)^2 = \pm 2a^2 \int x dx = \pm a^2 x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

y entonces $\mathcal{K}(x) = \pm \sqrt{C \pm a^2 x^2}$. Si $C = 0$, necesariamente $K \equiv a^2$ y entonces $\mathcal{K}(x) = ax$, y la superficie es una esfera de radio $1/|a|$ por el Corolario 3.3.1. Pero si $C \neq 0$, el proceso de los Capítulos 2 y 3 para la determinación de la curva generatriz y la superficie de revolución correspondiente involucra de nuevo integrales elípticas y las superficies así obtenidas están fuera del estudio de esta memoria.

4.3. Resultados de unicidad

Terminamos este capítulo con un par de teoremas de rigidez para ciertas superficies de revolución en la línea del Teorema 4.2.2.

4.3.1. Toros de revolución

Para los toros de revolución de radios $|a| > 0$ y $R > 0$ (véanse los Ejemplos 2.1.2 y 2.1.6 y la Sección 3.3), tenemos que

$$H(x) = \frac{1}{R} - \frac{a}{2Rx} \quad y \quad K(x) = \frac{1}{R^2} - \frac{a}{R^2x},$$

habiendo usado que $H(x) = \mathcal{K}'(x) + \mathcal{K}(x)/x$ y que $K(x) = \mathcal{K}'(x)\mathcal{K}(x)/x$. El siguiente resultado los caracteriza en esta misma línea a partir de ciertas expresiones para la curvatura media y la curvatura de Gauss.

Teorema 4.3.1. *Las únicas superficies de revolución con curvatura media $H(x) = \lambda + \mu/x$ y curvatura de Gauss $K(x) = \beta + \gamma/x$, (representando x la distancia de la superficie al eje de revolución) con $\lambda \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ son la esfera (si $\mu = \gamma = 0$) y el toro de revolución (si $\mu \neq 0$, $\gamma \neq 0$). (Véase la Figura 4.9).*

Demostración. Usando que $H(x) = \lambda + \mu/x$ en (4.1), se tiene:

$$x\mathcal{K}(x) = \int (2\lambda x + 2\mu)dx = \lambda x^2 + 2\mu x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Así, $\mathcal{K}(x) = \lambda x + 2\mu + C_1/x$.

Por otro lado, usando que $K(x) = \beta + \gamma/x$ en (4.2), obtenemos:

$$\mathcal{K}(x)^2 = \int (2\beta x + 2\gamma)dx = \beta x^2 + 2\gamma x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Y, por tanto, $\mathcal{K}(x) = \sqrt{\beta x^2 + 2\gamma x + C_2}$. Igualando ambas expresiones obtenidas para el momento lineal geométrico y elevando al cuadrado, resulta:

$$(\lambda x + 2\mu + C_1/x)^2 = \beta x^2 + 2\gamma x + C_2,$$

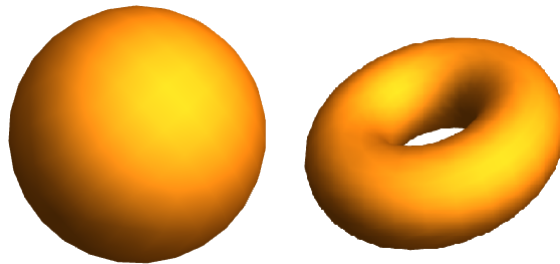
$$\lambda^2 x^2 + 4\mu^2 + \frac{C_1^2}{x^2} + 4\lambda\mu x + 2\lambda C_1 + 4\mu C_1 = \beta x^2 + 2\gamma x + C_2.$$

De donde, deducimos que $C_1 = 0$, $\beta = \lambda^2$, $\gamma = 2\lambda\mu$ y $C_2 = 4\mu^2$. De este modo, resulta finalmente que

$$\mathcal{K}(x) = \lambda x + 2\mu = \sqrt{\lambda^2 x^2 + 4\lambda\mu x + 4\mu^2}.$$

Si $\mu = \gamma = 0$, entonces $\mathcal{K}(x) = \lambda x$ y la superficie es una esfera de radio $R = 1/|\lambda| = 1/\sqrt{|\beta|}$ por el Corolario 3.3.1. Si $\mu \neq 0$ ($\gamma \neq 0$), entonces $\mathcal{K}(x) = \lambda x + 2\mu$ y la superficie es un toro de revolución de radios R y $|a|$, con $-a/R = 2\mu$ por el Corolario 3.3.1. $\square$

Figura 4.9: Superficies de revolución con $H(x) = \lambda + \mu/x$, $K(x) = \beta + \gamma/x$, $\lambda \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$.



4.3.2. Superficies de revolución generadas por las cicloides

Recordamos que a partir del Ejemplo 2.1.4 se deduce que las cicloides de radio $R > 0$ parametrizadas por

$$\alpha(t) = (R(1 - \cos t), R(1 - \sin t))$$

con $t \in \mathbb{R}$, poseen un momento lineal geométrico del tipo $\mathcal{K}(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2R}$ y, por tanto, curvatura $k(x) = C/\sqrt{x}$, $x > 0$, con $C = 1/2\sqrt{2R}$ (véase la Sección 2.2.5).

En el siguiente resultado, establecemos un teorema de unicidad para las superficies de revolución generadas por las cicloides, como las únicas que poseen curvatura de Gauss inversamente proporcional a la distancia al eje de revolución y con curvatura media inversamente proporcional a la raíz cuadrada de esa distancia.

Teorema 4.3.2. *Las superficies de revolución generadas por las cicloides son las únicas con curvatura media $H(x) = \lambda/\sqrt{x}$, $\lambda \neq 0$ y curvatura de Gauss $K(x) = \mu/x$ con $\mu \neq 0$, representando $x > 0$ la distancia de la superficie al eje de revolución. (Véase la Figura 4.10).*

Demostración. Usando que $H(x) = \lambda/\sqrt{x}$ en (4.1), se tiene:

$$x\mathcal{K}(x) = 2\lambda \int \frac{xdx}{\sqrt{x}} = 2\lambda \int \sqrt{x}dx = \frac{4\lambda}{3}x\sqrt{x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

De donde se deduce:

$$\mathcal{K}(x) = \frac{4\lambda}{3}\sqrt{x} + \frac{C_1}{x}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, usando $K(x) = \mu/x$ en (4.2), obtenemos:

$$\mathcal{K}(x)^2 = 2\mu \int dx = 2\mu x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

que implica que

$$\mathcal{K}(x) = \pm\sqrt{2\mu x + C_2}.$$

Igualando ambas expresiones obtenidas para el momento lineal geométrico $\mathcal{K}(x)$ y elevando al cuadrado, resulta:

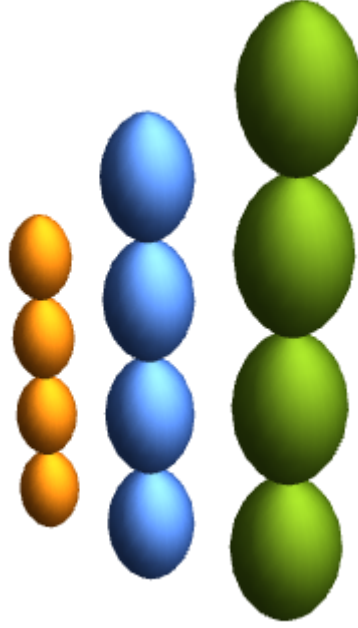
$$\frac{16\lambda^2}{9} + \frac{8\lambda C_1}{3\sqrt{x}} + \frac{C_1^2}{x^2} = 2\mu x + C_2,$$

que obliga a que $C_1 = C_2 = 0$ y $8\lambda^2 = 9\mu$. Así pues,

$$\mathcal{K}(x) = \frac{4\lambda}{3}\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{\mu}}{2\sqrt{2}}\sqrt{x}$$

y por el Corolario 3.1.1 se concluye que la curva generatriz de la superficie de revolución ha de ser una cicloide de radio $R = 1/4\mu = 9/32\lambda^2$. $\square$

Figura 4.10: Superficies de revolución con $H(x) = \lambda/\sqrt{x}$, $K(x) = \mu/x$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$



Nuestro modo de enfocar el estudio de las superficies de revolución que verifican una condición tipo Weingarten brinda una oportunidad de abordar algunas familias interesantes consideradas en la literatura bajo nuestro particular punto de vista. Citamos algunas de ellas por sus aplicaciones:

- Las superficies de revolución cuya curvatura media se escribe como

$$2H(x) = ax^2 + b, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

que describen las gotas líquidas axialmente simétricas (véase [8]). Se corresponderían, realizando el estudio de su momento lineal geométrico a través de (4.1) con

$$\mathcal{K}(x) = ax^3/4 + bx/2 + C/x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

El caso $C = 0$ es precisamente el considerado por López en [14, 17].

- Las superficies de revolución cuyas curvaturas principales guardan una relación cuadrática entre ellas: $k_1^2 = ak_2$ ó $k_2^2 = bk_1$, $a > 0$, $b \neq 0$, que sirven para modelizar ciertos revestimientos de membranas celulares (véase [18]). Se corresponderán con los siguientes momentos lineales geométricos:

$$\mathcal{K}(x) = (\sqrt{ax} + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{K}(x) = \frac{bx}{1 + bCx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

El caso $C = 0$ en ambas expresiones conduce al caso trivial de la esfera, por el Corolario 3.1.1.

- Las superficies de revolución de tipo Weingarten lineales, con las que comenzábamos este capítulo:

$$ak_1 + bk_2 = c, a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$$

que podemos reescribir, considerando $a \neq 0$ sin restricción, como

$$k_1 = \alpha k_2 + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Estas superficies se han clasificado recientemente en [15]. Bajo nuestra óptica, consiste en considerar los siguientes tipos de momento lineal geométrico:

$$\alpha \neq 1 : \quad \mathcal{K}(x) = \frac{\beta x}{1 - \alpha} + Cx^\alpha, C \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = 1 : \quad \mathcal{K}(x) = \beta x \ln x + Cx, C \in \mathbb{R}.$$

Estas complicadas expresiones de los momentos explican el complejo estudio cualitativo realizado en [15] para determinar las correspondientes curvas generatrices.

Bibliografía

Referencias bibliográficas

1. Castro I. and Castro-Infantes I., *Plane curves with curvature depending on distance to a line*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016) 77–97.
2. Castro I., Castro-Infantes I. and Castro-Infantes J., *New plane curves with curvature depending on distance from the origin*, Mediterr. J. Math. **14** (2017) 108.
3. Castro I., Castro-Infantes I. and Castro-Infantes J., *Curves in Lorentz-Minkowski plane: elasticae, catenaries and grim-reapers*, Open Math. **16** (2018) 747–766.
4. Castro I., Castro-Infantes I. and Castro-Infantes J., *Curves in Lorentz-Minkowski plane with curvature depending on their position*, Preprint, arXiv: 1806.09187.
5. Chern S. S., *Some new characterization of the Euclidean sphere*, Duke Math. J. **12** (1945), 279–290.
6. Do Carmo, M. P., *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial (1990).
7. Delaunay, C., *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl., **6** (1841), 309–320.
8. Leandro E.S.G., Oliveira R.M. and Miranda J.A., *Geometric approach to stationary shapes in rotating Hele-Shaw flows*, Physica D **237** (2007), 652–664.
9. Euler, Leonhard (1744.), *Methodus inveniendi lineas curvas: maximi minimive proprietate gaudentesive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti (in Latin)*, Opera Omnia: **Series 1**, Volume 24.
10. Euler L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentesive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Springer Science & Business Media **1** (1952).
11. Gálvez, J. A., Martínez and A., Milán, F., *Linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Monatsh. Math. **138** (2003), 133–144.
12. Gutiérrez M., *Un problema de David A. Singer sobre Curvas Planas*, (Trabajo Fin de Máster dirigido por Castro, I.). Universidad de Jaén, Jaén, España 2019.

13. Hernández Cifre, María de los Ángeles y Pastor González, José Antonio, *Un curso de Geometría Diferencial*, 2ª Edición: Madrid : Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2019.
14. López R., *A criterion on instability of rotating cylindrical surfaces*, Arch. Math. **94** (2010), 91–99.
15. López R. and Pámpano Á., *Clasification of rotational surfaces in Euclidean space satisfying a lineal relation between their principal curvatures*, Preprint, arXiv: 1808.07566, (2018).
16. López R., *On linear Weingarten surfaces*, Internat. J. Math. **19** (2008), 439–448.
17. López R., *Stationary rotating surfaces in Euclidean space*, Calc. Var. **39** (2010), 333–359.
18. Mladenov, I. V. and Oprea, J., *The mylar balloon revisited*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), 761–784.
19. Singer D., *Curves whose curvature depends on distance from the origin*, Amer. Math. Monthly, **106** (1999) 835-841.
20. Singer D., *Lectures on elastic curves and rods*, Curvature and variational modelling in Pysics and Biophysics. AIP Conf. Proc., **1002** (2008) 3-32.
21. Weingarten, J., *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, J. Reine Angew. Math. **59** (1861), 382–393.

