



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

EL NÚMERO DE ORO (Φ): FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

Alumno/a: Valdivia Blánquez, Rafael

Tutor/a: Prof. D. Antonio Moreno Verdejo
Dpto: Matemáticas

Octubre, 2021

Índice

1.	Resumen y palabras clave	3
2.	Introducción	4
3.	Objetivos	5
3.1.	Objetivos Generales	5
3.2.	Objetivos Específicos.....	7
4.	Fundamentación curricular	7
4.1.	Análisis del currículo escolar	7
4.2.	Análisis del libro de texto	14
5.	Fundamentación epistemológica	21
5.1.	Antecedentes y estado de la cuestión	21
5.2.	Definición y conceptos básicos	23
5.2.1.	Los números irracionales	23
5.2.2.	Definición y construcción geométrica.....	24
5.2.3.	El rectángulo áureo y el ángulo áureo	28
5.2.4.	Polígonos regulares. El pentágono.....	31
5.2.5.	El triángulo áureo	33
5.2.6.	La espiral de Durero. Aproximación a la espiral logarítmica.....	34
5.2.7.	La sucesión de Fibonacci. La Espiral de Fibonacci y el número de oro	36
5.2.8.	Poliedros.....	37
5.3.	El número de oro en la realidad que nos rodea.....	37
5.3.1.	La sucesión de Fibonacci en la biología.....	37
5.3.2.	El cuerpo humano y el número de oro	40
5.3.3.	El número de oro en la pintura y en la escultura	41
5.3.4.	El número de oro en la arquitectura.....	43
6.	Fundamentación didáctica	47
6.1.	Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales (Herrera, 2010)	48
6.2.	El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas (Mota & Valles, 2020)	52
6.3.	Reflexiones conjuntas de ambos estudios	56
7.	Proyección didáctica.....	56
7.1.	Título	56
7.2.	Justificación	56
7.3.	Contextualización del centro y del aula	58
7.4.	Objetivos	59

7.4.1.	Objetivos de etapa	59
7.4.2.	Objetivos del área de matemáticas.....	61
7.4.3.	Objetivos de la unidad	63
7.5.	Competencias clave	63
7.6.	Contenidos	65
7.7.	Metodología	66
7.8.	Actividades, recursos y temporalización.....	67
7.8.1.	Sesión 1: Aprender a clasificar los números reales.....	68
7.8.2.	Sesión 2: “Historia y aplicaciones del número de oro”	70
7.8.3.	Sesión 3: “Dibujando la proporción áurea”	72
7.8.4.	Sesión 4: “Buscando el número de oro en monumentos de Jaén”	75
7.8.5.	Sesión 5: “Sacando conclusiones de la visita”	77
7.8.6.	Sesión 6: “El número de oro en Marmolejo”	79
7.8.7.	Recursos utilizados en todas las sesiones	81
7.8.8.	Temporalización	82
7.9.	Atención a la diversidad	84
7.9.1.	Alumnado con dificultades respecto al progreso esperado o disfuncionalidades físicas	84
7.9.2.	Alumnado con altas capacidades	85
7.10.	Evaluación	86
7.10.1.	Evaluación del estudiante	86
7.10.2.	Evaluación de la propuesta	89
8.	Conclusiones.....	90
9.	Referencias bibliográficas.....	91
10.	ANEXOS.....	93
10.1.	Anexo 1.....	93
10.2.	Anexo 2.....	96
10.3.	Anexo 3.....	99
10.4.	Anexo 4.....	100
10.5.	Anexo 5.....	101
10.6.	Anexo 6.....	103
10.7.	Anexo 7.....	104

1. Resumen y palabras clave

Las matemáticas se erigen como uno de los pilares básicos en la formación intelectual de las personas, de tal manera que les permite resolver problemas cotidianos, colaboran en la formación de individuos creativos, con capacidades de emprender y de decidir por sí mismos. Estas capacidades se ven mermadas al utilizar en el aula prácticas como la memorización, repetición, aplicación de algoritmos que limitan la creatividad y la interacción con el entorno.

El objetivo fundamental de este Trabajo Fin de Máster (en adelante TFM) es elaborar una propuesta didáctica del bloque “Números y Álgebra” de 4º de la ESO, que contiene el estudio de los números irracionales y, dentro de estos, el número de oro, mediante metodologías activas como el aprendizaje colaborativo, flipped classroom o clase invertida, visitas exteriores, alternadas con una metodología creativa que se apoya en diferentes recursos tecnológicos al alcance de todos los estudiantes.

Este trabajo tiene como base teórica la de los números irracionales, el número de oro y sus múltiples aplicaciones en los campos del arte, la música, la arquitectura, etc. y su presencia en la naturaleza y en todo lo que nos rodea. Además, se soporta en metodologías activas y herramientas didácticas que son de actualidad y motivadoras para el alumnado.

Como conclusión final, destacamos la importancia de este tema para la motivación de los estudiantes mediante actividades que enlazan el contenido teórico de las matemáticas con la realidad cotidiana.

Palabras clave: Número de oro, proporción áurea, trabajo cooperativo, clase invertida, TIC, Unidad Didáctica.

Abstract

Mathematics stands as one of the basic pillars in the intellectual formation of people, in such a way that it allows them to solve everyday problems, they collaborate in the formation of creative individuals, with capacities to undertake and decide for themselves. These capacities are diminished when using practices in the classroom such as memorization, repetition, application of algorithms that limit creativity and interaction with the environment.

The main objective of this Master's Thesis (hereinafter TFM) is to develop a didactic proposal for the block "Numbers and Algebra" of 4th ESO, which contains the study of irrational numbers and, within these, the golden number, through active methodologies

such as collaborative learning, flipped classroom or inverted class, external visits, alternated with a creative methodology that is supported by different technological resources available to all students.

This work has as its theoretical basis that of irrational numbers, the golden number and its multiple applications in the fields of art, music, architecture, etc. and its presence in nature and in everything that surrounds us. In addition, it is supported by active methodologies and didactic tools that are current and motivating for students.

As a final conclusion, we highlight the importance of this topic for the motivation of students through activities that link the theoretical content of mathematics with everyday reality.

Keywords: Gold number, golden ratio, cooperative work, flipped classroom, ICT, Didactic Unit.

2. Introducción

El presente TFM es el trabajo final del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la Especialidad de Matemáticas en el curso académico 2020/2021 en la Universidad de Jaén. Se ha elaborado con el objetivo de poner en uso los contenidos adquiridos en este Máster durante las clases teóricas y poner en práctica lo aprendido durante el período de prácticas docentes en un centro de secundaria.

Este trabajo tiene como objetivo principal mostrar una Unidad Didáctica sobre el número de oro, con el fin de desarrollar los objetivos previstos a través del trabajo de los contenidos asociados a este tema y enseñar al alumnado los aspectos amables de las matemáticas y su aplicación en la vida real. Para la construcción de esta unidad, he seleccionado un tema transversal, la Sección Áurea, que no aparece como un tema en sí en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, sino que aparece en los contenidos de algunos temas del currículo.

En cuanto a la estructura del trabajo, tras describir los objetivos del TFM, se procede a la elaboración de una serie de fundamentaciones teóricas con el propósito de facilitar el desarrollo de la Unidad Didáctica. Las fundamentaciones teóricas son:

- **Fundamentación curricular.** Se ha realizado un análisis del currículo escolar tanto a nivel estatal como autonómico, además se han comparado los

contenidos de los dos libros de texto más usados en Andalucía, y centrado en el tema escogido para el diseño de la unidad didáctica.

- **Fundamentación epistemológica.** Se ha desarrollado el tema correspondiente al número de oro con recursos y fuentes distintas, desde una perspectiva matemática, teórica y práctica más profunda que la unidad didáctica en sí.
- **Fundamentación didáctica.** Se han abordado dos estudios, uno sobre las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales (el número de oro es irracional) y otro sobre las consecuencias de implementar una unidad didáctica sobre la proporción áurea en una clase de matemáticas.

Finalmente, se presenta la unidad didáctica diseñada con sus correspondientes objetivos, competencias clave, metodología, temporalización y evaluación entre otros apartados a destacar, realizada en seis sesiones.

En resumen, con las competencias adquiridas durante el Máster de Secundaria se elabora el presente TFM en el que, a partir de una fundamentación curricular, epistemológica y didáctica, se elabora una unidad didáctica que pretende ser aplicada en un aula de 4º de ESO.

3. Objetivos

3.1. Objetivos Generales

A continuación, se presentan los objetivos que se pretenden conseguir con la elaboración de este TFM. Estos objetivos se relacionan con la formación adquirida para llegar a ser profesor de matemáticas.

Estos objetivos están relacionados con el Apartado 3 del Anexo de la Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, así como con algunas de las competencias y resultados de aprendizaje de la Guía Docente del Trabajo Fin de Máster.

Estos objetivos son:

- Conocer los desarrollos teórico-prácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- Buscar, obtener y comunicar información, transformarla en conocimiento y ponerla en práctica en los procedimientos de enseñanza y aprendizaje en la materia de matemáticas.
- Conocer la historia de la materia de matemáticas y adquirir la formación necesaria para poder transmitir una visión dinámica de la misma.
- Conocer el valor formativo y cultural de la asignatura de matemáticas.
- Adquirir el conocimiento requerido para el uso de las TIC's en el aula.
- Aplicar los conocimientos en comunicación audiovisual y multimedia en el aula.
- Conocer el currículo de la asignatura de matemáticas.
- Crear, a partir de los currículos, programas de actividades.
- Tener una primera toma de contacto con la planificación en el proceso de enseñanza de la asignatura de matemáticas.
- Participar en la creación del currículo que se vaya a aplicar en un determinado centro escolar.
- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes, así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- Adquirir las destrezas que permitan aplicar propuestas docentes innovadoras.
- Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.
- Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.
- Conocer estrategias y técnicas de evaluación.
- Crear y poner en práctica metodologías didácticas, en grupo e individuales, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
- Planificar alternativas de aprendizaje centradas en el alumnado con necesidades especiales.
- Entender y valorar la diversidad de los discentes.
- Adquirir las habilidades y destrezas necesarias para seguir aprendiendo de un modo autónomo.

3.2. Objetivos Específicos

En cuanto a los objetivos específicos que pretendemos alcanzar con la puesta en práctica de esta unidad didáctica sobre el número de oro, son los siguientes:

- Estudiar, analizar y comprender la importancia del número de oro mediante la contextualización del concepto matemático en la arquitectura de nuestro entorno, obras de arte, objetos de la naturaleza, etc.
- Poner en prácticas determinadas metodologías adecuadas basadas en la investigación durante el proceso de aprendizaje del número de oro.
- Aumentar la motivación del alumnado por la asignatura de matemáticas, mediante la implementación de metodologías activas y conectando nuestro tema con otras áreas del conocimiento.
- Conocer ejemplos en la arquitectura de nuestra provincia, e incluso en Marmolejo, cuyas construcciones se han basado en el conocimiento del número de oro.

4. Fundamentación curricular

Esta fundamentación curricular se va dividir en dos partes. En la primera parte, se va a realizar un análisis de los boletines oficiales, tanto a nivel nacional como autonómico, en los que se recogen los contenidos de la unidad didáctica de este TFM. En la segunda parte, se realizará un análisis de la presentación de dichos contenidos reflejada en los dos libros de texto más usados en los centros públicos de Andalucía.

Hay que tener en cuenta que el tema elegido para este TFM no corresponde con ninguna unidad temática completa de ningún nivel de ESO y Bachillerato, sino que es un contenido específico dentro del tema de números irracionales, proporcionalidad, etc. En concreto, esta unidad didáctica está orientada para alumnos y alumnas de 4º de ESO en la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*, sobre el tema del número de oro.

4.1. Análisis del currículo escolar

Para poder hacer un análisis del currículo vigente respecto al número de oro en la asignatura de *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 4º de ESO*, nos basamos en el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*.

En particular, en el Anexo I de este Real decreto se detallan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para cada materia de ESO y Bachillerato.

La asignatura en la que vamos a centrar nuestra atención, según este Real Decreto, se divide en cinco bloques, que se impartirán a lo largo de todo el curso: Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; Bloque 2: Números y álgebra; Bloque 3: Geometría; Bloque 4: Funciones; Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

Concretamente, para este TFM, nos interesan tres bloques: el primer bloque de *Procesos, métodos y actitudes matemáticas*, ya que este bloque complementa a todos los demás, por lo que debe tratarse también en el desarrollo de cualquier otro bloque, el bloque 2 de *Números y Álgebra*, pues es el que recoge los números irracionales (el número de oro es uno de ellos), y el bloque 3 *Geometría* en el que también se recogen algunos aspectos relacionados con el número de oro, como el pentágono, el rectángulo áureo y el triángulo áureo.

A continuación (Tablas 1, 2 y 3), veremos los contenidos que, según el Real Decreto 1105/2014, deben desarrollarse en los tres bloques mencionados y que tienen que ver con nuestro tema, junto con los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables asociados a dichos contenidos. De todos ellos, hemos entresacado aquellos que tienen que ver y que pondremos en práctica con el estudio de esta unidad didáctica basada en el número de oro.

Tabla 1 Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre. BOE (2014). Elaboración propia.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
-Planificación del proceso de resolución de problemas. -Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. -Reflexión sobre los resultados: revisión de	1.Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2.Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3.Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. -Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. -Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. -Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. -Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o	utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas	Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
		12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 2 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje relativos al número de oro del Bloque 1 “Números y Álgebra”, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre. BOE (2014). Elaboración propia.

Bloque 2. Números y Álgebra		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
-Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. -Números irracionales. Representación de números en la recta real. Intervalos. -Potencias de exponente entero o fraccionario y radicales sencillos. -Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. -Ecuaciones de grado superior a dos.	1. Conocer los distintos tipos de números e interpretar el significado de algunas de sus propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc. 2. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico. 3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.	1.1. Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales y reales), indicando el criterio seguido, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.2. Aplica propiedades características de los números al utilizarlos en contextos de resolución de problemas. 2.1. Opera con eficacia empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, y utilizando la notación más adecuada. 2.2. Realiza estimaciones correctamente y juzga si los resultados obtenidos son razonables. 2.3. Establece las relaciones entre radicales y potencias, opera aplicando las propiedades necesarias y resuelve problemas contextualizados. 2.6. Compara, ordena, clasifica y representa distintos tipos de números sobre la recta numérica utilizando diferentes escalas. 2.7. Resuelve problemas que requieran conceptos y propiedades específicas de los números. 3.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.

Tabla 3 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje relativos al número de oro del Bloque 3 "Geometría", Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4º ESO. Fuente: R.D. 1105/2014, de 26 de diciembre. BOE (2014). Elaboración propia.

Bloque 3. Geometría		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
-Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. -Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. -Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Como podemos comprobar, en ninguno de estos tres bloques podemos encontrar una mención explícita al número de oro, ya que se trata de un concepto transversal relacionado con parte de los contenidos de los bloques mencionados.

Además de consultar el Real Decreto para desarrollar este análisis del currículo, hemos consultado también la *Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas*. De hecho, comparando el Real Decreto con la Orden de 15 de enero de 2021, se asocian cada uno de los criterios de evaluación con las correspondientes competencias que se desarrollan en cada uno de ellos.

A continuación, en las tablas 4, 5 y 6, se enumeran los criterios de evaluación de los bloques primero, segundo y cuarto, asociados a sus respectivas competencias:

Tabla 4 Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 1. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

BLOQUE 1 "PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS"	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT

2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CL, CMCT, CAA
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruados.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA, SIEP
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 5 Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 2. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

BLOQUE 2 “NÚMEROS Y ÁLGEBRA”	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Conocer los distintos tipos de números e interpretar el significado de algunas de sus propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc.	CCL, CMCT, CAA
2. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.	CCL, CMCT, CAA

4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inequaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.	CCL, CMCT, CD
--	---------------

Tabla 6 Competencias asignadas a los criterios de evaluación Bloque 3. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

BLOQUE 3 "GEOMETRÍA"	
Criterio de evaluación	Competencias
1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	CMCT, CAA
2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	CMCT, CEC, CAA
3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	CCL, CMCT, CD, CEC, CAA

En la tabla 7 podemos ver las competencias que se tendrán que haber desarrollado de forma parcial una vez que hemos estudiado los contenidos relativos al número de oro:

Tabla 7 Competencias adquiridas en los bloques 1,2 y 3. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
CD	Competencia digital
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencias sociales y cívicas
CEC	Competencia conciencia y expresiones culturales

Como conclusión al estudio de la legislación estatal y autonómica en cuanto al currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, concretamente el de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO, podemos decir que el tema desarrollado en este TFM proporciona más competencias al estudiante que un tema estándar, puesto que trata contenidos de varios bloques a la misma vez y es más amplio.

4.2. Análisis del libro de texto

Hoy en día, los libros de texto son comúnmente utilizados como una herramienta habitual en casi todos los centros educativos de secundaria. En ellos, se trata de

sinetizar, para cada nivel educativo al que van dedicados, el “*saber científico*” sobre una determinada materia, orientado por los contenidos básicos recogidos en la normativa vigente. Es por esto por lo que cualquier estudio didáctico sobre un aula en concreto debe recoger un análisis de los que libros de textos con los que se trabaja.

Aunque con las experiencias de docencia virtual a las que nos hemos visto obligados en los últimos meses debido a la pandemia de la covid-19, deberíamos preguntarnos sobre el futuro de los libros de textos en formato físico frente a la irrupción de nuevas metodologías de docencia virtual, plataformas online, etc.

Con el fin de saber cuáles son los dos libros de texto más utilizados en los centros públicos de la comunidad autónoma de Andalucía para la asignatura de matemáticas, hemos acudido al estudio realizado por Del Pino y Estepa (2015). Se trata de un análisis de los libros de texto de matemáticas usados en los centros docentes públicos y privados-concertados de las capitales andaluzas. En este estudio, realizado en el curso 2013/2014, se concluía que las dos editoriales más usadas en los centros públicos para 4º de ESO eran Anaya y Santillana, mientras que en los centros privados-concertados las mayoritarias eran SM y Anaya, tal y como se desprende de la siguiente en la tabla 8.

Tabla 8 Número de centros públicos andaluces que utilizan cada editorial por curso, en centros públicos y privados. Fuente: Del Pino y Estepa, 2015, p.122.

Curso												
Editorial	1º		2º		3º		4ºA		4ºB		Total	
	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi
Anaya	73	28	73	28	76	25	67	18	63	21	352	120
Bruño	22	3	22	3	21	3	9	1	8	1	82	11
Casals	2		3		2		0		0		7	0
Edelvives	4	3	4	3	4	4	1	3	1	4	14	17
Editex	0		0		0		0		1		1	0
Everest	0		1		0		0		0		1	0
Guadiel-Edebé	1	4	2	6	1	4	2	2	2	2	8	18
McGraw Hill	0		0		0		3		3		6	0
Oxford	19	5	21	4	18	5	19	6	20	6	97	26
Santillana	32	11	31	14	33	9	44	4	42	5	182	43
SM	33	39	28	45	33	41	35	31	36	42	165	198
Vicen Vives	1	2	1	1	2	2	1	0	1	0	6	5
Total	187	95	186	104	190	93	181	65	177	81	921	438
No consigna	23	14	24	5	20	16	29	44	33	28		236

CPu = Colegio Público; CPi = Colegio Privado

Por tanto, vamos a realizar el estudio centrándonos en estos dos libros de texto:

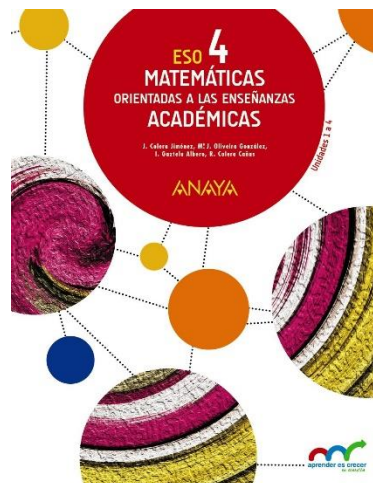
- Matemáticas. Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve 4º ESO. Saber Hacer Grazaema. Santillana. ISBN: 978-84-830-5695-0 (Ilustración 1).

- Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º. ESO. Profesorado. Anaya + Digital. ISBN: 978-84-678-0734-9 (Ilustración 2).

Ilustración 1 Portada del libro *Matemáticas Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve 4º ESO. Saber Hacer Grazaalema. Santillana. Fuente: www.lasmatematicas.eu*



Ilustración 2 Portada del libro *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º. ESO. Profesorado. Anaya + Digital. Fuente: www.amazon.es*



En ambos libros, el primer tema correspondiente al Bloque 1 del currículo, es el de los *Números Reales*, añadiéndole en el libro de Santillana *Porcentajes*. Así, los contenidos dados en este primer tema en ambos libros pueden verse en la tabla 9:

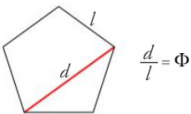
Tabla 9 Comparación de contenidos del tema 1 entre los libros de Anaya y Santillana. Fuente: Elaboración propia.

Anaya	Santillana
TEMA 1. NÚMEROS REALES	TEMA 1. NÚMEROS REALES. PORCENTAJES
Números irracionales	Números racionales
Números reales: la recta real	Números irracionales
Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas	Números reales
Raíces y radicales	Aproximación de números reales
Números aproximados. Errores.	Errores de aproximación
Números en notación científica. Control del error.	Intervalos
Logaritmos	Porcentajes
	Interés simple
	Interés compuesto

Si empezamos por este tema, en el libro de Anaya aparecen varias referencias al número de oro. En el primer punto, *Números Irracionales*, realiza una definición de estos números y su diferenciación con los números racionales, explica el caso particular de la diagonal de un cuadrado de lado 1 que es $\sqrt{2}$, también otros irracionales que se expresan mediante radicales y a continuación, explica dos casos particulares de números irracionales: el número de oro (Φ) y el número pi (π).

Ilustración 3 Extracto de la pág. 13 del libro de Anaya, *Matemáticas Académicas 4º ESO*, sobre el número *Fi*. Fuente: Colera, J. et al. (2019). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Anaya.

El número de oro: $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$



$\frac{d}{l} = \Phi$

La diagonal de un pentágono de lado unidad es el número $(\sqrt{5} + 1) : 2$ que, evidentemente, es irracional. Además, es, históricamente, el primer número del que se tuvo conciencia de que lo era.

Estrella pitagórica



Esta figura, formada con las cinco diagonales de un pentágono regular, era el símbolo de los pitagóricos.

En el siglo v a. C., los griegos pitagóricos descubrieron con sorpresa (y casi con espanto) que la diagonal del pentágono y su lado no guardaban una proporción exacta. Hasta entonces se creía que todo el universo se regía por los números naturales y las proporciones entre ellos (fracciones), pero al descubrir que no era así les pareció que el caos se asomaba a su mundo. Por eso, llamaron irracional (contraria a la razón) a esta relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Más adelante, los artistas griegos consideraron que la proporción $\Phi : 1$ resultaba especialmente armoniosa, por lo que la llamaron **proporción áurea**, y a Φ , **número áureo**.

El nombre, Φ (fi, letra F en griego), es la inicial de **Fidias**, escultor griego del siglo v a. C. que utilizó reiteradamente esta proporción.

Como podemos observar, no solo recoge la expresión numérica del número de oro ($\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$), sino que también explica su historia y su descubrimiento por parte de los pitagóricos a través del cálculo de la diagonal de un pentágono de lado la unidad. Además, reseñan de dónde viene el nombre de este número (fi, la inicial de Fidias, el arquitecto del Partenón).

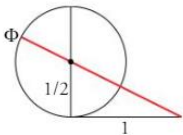
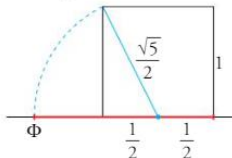
Además, en la misma página del libro de Anaya (pág. 13), se proponen tres ejercicios en el apartado *Piensa y practica* relacionados con el número de oro, que son los siguientes (Ilustración 4):

Ilustración 4 Extracto de la pág. 13 del libro de Anaya, *Matemáticas Académicas 4º de ESO, ejercicios propuestos relacionados con el número de oro*. Fuente: Colera, J. et al. (2019). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Anaya.

Piensa y practica



2. Justifica que las construcciones siguientes:

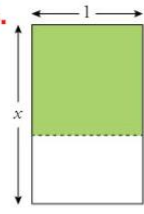



dan un segmento de medida igual al número de oro:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

3. Demuestra que el número áureo, Φ , es irracional.

4.  Este rectángulo tiene la peculiaridad de que si le suprimimos un cuadrado de longitud de lado el menor de los lados del rectángulo, el rectángulo que queda es semejante al inicial.

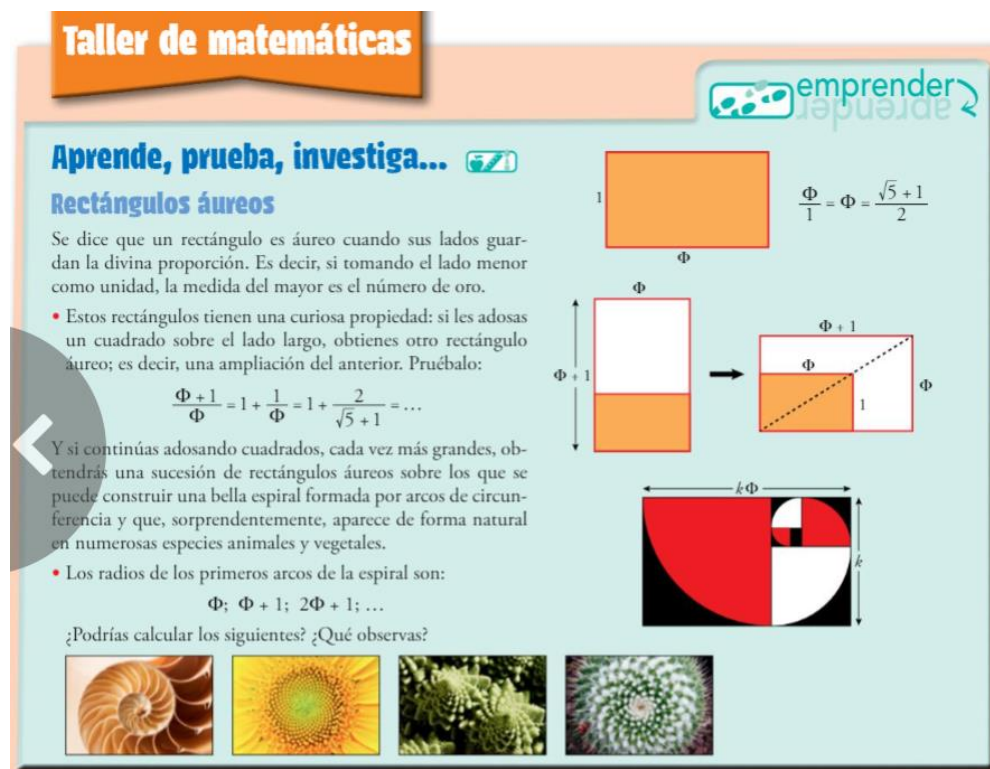


Demuestra que su lado mayor es $x = \Phi$.

Como podemos observar, estos ejercicios se han propuesto para trabajar y poder explicar varias de las propiedades del número áureo: la construcción gráfica de un rectángulo áureo y la especial peculiaridad de que si al rectángulo áureo le suprimimos un cuadrado de longitud de lado el menor de los lados del rectángulo, el rectángulo restante sigue siendo un rectángulo áureo, y así sucesivamente.

En el libro de Anaya, al final de cada tema hay un apartado que se llama *Taller de Matemáticas*, en el que se pueden encontrar lecturas, actividades, consejos, informaciones, etc. sobre algún tema en concreto. Al final del tema 1, en la pág. 32, han querido dedicar también el *Taller de Matemáticas* al número de oro, como puede verse en la ilustración 5. En este taller, se plantea una actividad de investigación en la que se juega con las propiedades del rectángulo áureo y el dibujo de la espiral de Durero mediante la construcción de rectángulos áureos sucesivos y arcos de circunferencias. Además, relaciona esta construcción geométrica con muchas formas que pueden verse en la naturaleza, lo que sirve para incrementar la motivación del alumnado.

Ilustración 5 Extracto de la pág. 32 del libro de Anaya, *Matemáticas Académicas 4º de ESO, Taller de Matemáticas*. Fuente: Colera, J. et al. (2019). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Anaya.



En el libro de Santillana, sorprendentemente, se realiza una sola mención al número de oro en el *Tema 1.- Números Reales. Porcentajes, Apartado 2.- Números irracionales*. Concretamente, en la página 9, aparece la única mención en un párrafo en el que se dice que existen infinitos números irracionales, por ejemplo algunos números especiales como π , e y Φ , sin nombrar su nombre ni siquiera (Ilustración 6).

Ilustración 6 Extracto de la página 9 libro de Santillana, *Matemáticas Académicas 4º ESO*, en el que se hace una leve mención al número de oro. Fuente: Grence, T. et al. (2019). *Matemáticas. Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve 4º ESO*. Santillana.

Existen infinitos números irracionales, por ejemplo:

- Cualquier raíz no exacta: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{24}$, ...
- Algunos números especiales: π , e , Φ , ...
- Determinados números obtenidos combinando sus cifras decimales, por ejemplo: 0,010010001...; 0,12345678910...; ...

Lamentablemente, en este tema del libro de Santillana no existe ninguna otra mención al número de oro, ni en la parte de teoría ni en los ejercicios propuestos.

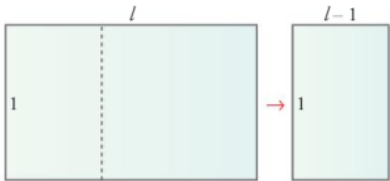
Volviendo al libro de Anaya, en el tema 6 *Semejanza. Aplicaciones*, perteneciente al Bloque 3 de *Geometría* tal y como hemos visto en el análisis del currículo, concretamente en la página 133, recoge otro apartado sobre el rectángulo áureo que podemos ver en la ilustración 7:

Ilustración 7 Extracto de la pág. 133 del libro de Anaya, *Matemáticas Académicas de 4º de ESO, rectángulo áureo*. Fuente: Colera, J. et al. (2019). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO*. Anaya.



Rectángulo áureo

El rectángulo del margen tiene la siguiente peculiaridad: si se le suprime un cuadrado, el rectángulo que queda es semejante al inicial. Veamos cuál es la relación entre sus dimensiones:



Tomamos como unidad el lado menor. La semejanza de los rectángulos nos lleva a la siguiente proporción:

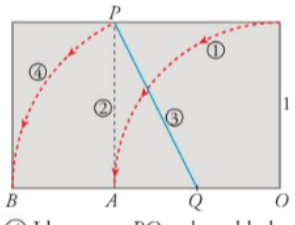
$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1} \rightarrow l(l-1) = 1 \rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \rightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

La relación entre los lados es el número $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿Recuerdas? Es el número áureo, Φ , que veíamos en la unidad 1. Por eso, este rectángulo y todos los semejantes a él se llaman rectángulos áureos.

El DNI y las tarjetas de crédito, por ejemplo, son rectángulos áureos. En arquitectura también se utilizan con mucha frecuencia rectángulos áureos.

Comprobamos con regla y compás que el rectángulo es áureo con un método basado en la construcción del número Φ .



① Llevamos el lado menor, 1, sobre el mayor: $OA = 1$.

② Levantamos $\overline{AP} = 1$, formando un cuadrado.

③ Q es el punto medio de AO . Y $PQ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

④ Llevamos PQ sobre el lado mayor del rectángulo. BO mide:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

El rectángulo áureo y otros rectángulos de proporciones interesantes.

En este apartado realizan una demostración de que si a un rectángulo áureo se le suprime un cuadrado de longitud de lado el menor de los lados del rectángulo, el rectángulo resultante es otro rectángulo áureo. Además, explica que el DNI y las tarjetas de crédito son también rectángulos áureos. Y, por último, realiza una explicación gráfica y numérica de la construcción de un rectángulo áureo.

Al finalizar este tema, en el *Taller de Matemáticas*, se hace mención a otros números y proporciones especiales, el número de plata y el triángulo cordobés, incidiendo en la idea de relacionar las matemáticas con ejemplos de nuestra realidad y así aumentar la motivación del alumnado por esta asignatura.

Analizando el libro de Santillana, en el tema 6 *Áreas y volúmenes. Semejanza* perteneciente también al bloque 3 de Geometría, no se hace ninguna referencia al número de oro, ni a la proporción áurea ni al rectángulo áureo. Tampoco existen actividades propuestas en relación a nuestro tema.

En resumen, considero que el libro de Anaya aborda con suficiencia y rigurosidad los contenidos relativos al número de oro, incluso con demasiada dedicación si se atiende a los ejercicios propuestos en el *Taller de matemáticas*, lo que llevará a despertar el interés del alumnado en este concepto y en su relación con la arquitectura histórica, arte y música, comprendiendo que las matemáticas están presentes en cualquier aspecto de nuestra realidad. Sin embargo, el libro de Santillana obvia casi por completo este concepto, lo que me parece un verdadero error y que debería ser revisado.

5. Fundamentación epistemológica

5.1. Antecedentes y estado de la cuestión

No se sabe a ciencia cierta el origen exacto del nombre de sección áurea y todos sus sinónimos: proporción divina, proporción dorada, canon áureo, número de oro, número áureo, número divino, etc. Pero lo que sí sabemos es que La Proporción Aurea ha inspirado a intelectuales de todas las disciplinas hasta un punto que ningún otro número ha podido hacerlo en la historia de las matemáticas. Artistas, matemáticos, humanistas, músicos, historiadores, biólogos, etc. lo han utilizado de mil formas a lo largo de la historia. El término Sección Áurea apareció por primera vez en una obra alemana de principios del s. XIX, aunque cabe pensar que se utilizara de forma oral con anterioridad.

La sección áurea podría definirse como una proporción determinada que ha jugado un papel importante a la hora de encontrar una representación gráfica y analítica de la belleza en todos sus campos, es decir, a la hora de representar ésta mediante un número, una proporción concreta. Además, lo que hace atractiva a esta Proporción es que aparece de forma milagrosa en muchísimos aspectos de la realidad física.

Es por eso que desde muy antiguo se ha hablado, de forma indirecta, de esta proporción. Desde el Egipto de los faraones, que la descubrieron al encontrar medidas para dividir las tierras de una forma exacta, pasando por Grecia y llegando más tarde hasta Roma. Quizás, la primera referencia a este número la encontramos en Pitágoras (Isla de Samos, 569 a.C.) y su Escuela Pitagórica, cuyo símbolo era la estrella pentagonal. Esta figura geométrica, como más tarde veremos, tiene la peculiaridad de que en todas

sus relaciones aparece el número de oro, y es de común aceptación que, a partir de esta figura, los pitagóricos descubrieron el concepto de la inconmensurabilidad y los números irracionales, es decir, aquellos que no pueden expresarse mediante números enteros ni fracción de los mismos, como es el caso del número de oro. Más tarde, otro gran filósofo griego y discípulo de los pitagóricos, Platón (Atenas, 427-347 a.C.), estuvo unido a la Sección Áurea a través de dos aspectos que le eran muy cercanos: la inconmensurabilidad y los sólidos platónicos.

Años más tarde, otro gran matemático y geómetra griego, Euclides de Alejandría (330-275 a.C.) definió, por primera vez y de forma precisa, lo que posteriormente se conoció como Proporción Áurea, como una proporción resultante de la simple división de una línea en lo que él mismo vino a llamar “media y extrema razón”. Esta definición apareció por primera vez en su obra principal *Elementos* (300 a.C.), extenso tratado matemático y geométrico que se compone de trece volúmenes sobre las proporciones, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Más tarde, Vitruvio (Roma, 80-15 a.C.), arquitecto, escritor e ingeniero romano, vuelve a tratar la Sección Áurea en sus *De Architectura* (15 a.C.).

Desde entonces se había avanzado poco en el estudio de esta Proporción, hasta que Leonardo de Pisa (Pisa, 1170-1240), más conocido como Fibonacci, el más distinguido matemático europeo de la Edad Media, volvió a tratarlo. Su contribución al estudio de la Sección Áurea fue fundamental en dos aspectos: en los problemas en los que usó conscientemente esta proporción (la sucesión descubierta y denominada *de Fibonacci* guarda relación directa con el número de oro) y en la formulación del problema de la reproducción de los conejos, que consiguió expandir su alcance.

Finalmente, en el periodo renacentista, existen numerosos autores que retoman el estudio de la Sección Áurea. El monje franciscano Luca Pacioli (Borgo San Sepolcro, 1445-1514) la empezó a denominar “divina proporción” y escribe todo un tratado sobre ella titulado: *De Divina Proportione* (1509), sobre sus propiedades y proporciones. Aunque es justo nombrar que este tratado recogió las ideas de su paisano Piero della Francesca (Borgo San Sepolcro, 1415-1492), quien había expuesto en su *Trattato d’Abaco* (1465), manual de matemáticas para comerciantes, el cálculo de proporciones. Durante este tiempo, otros artistas, como Leonardo da Vinci (Vinci, 1452-1519) o Alberto Durero (Núremberg, 1471-1528), estudiaron en sus trabajos las relaciones existentes entre el número áureo y las proporciones del hombre, y admiraron la armonía y el equilibrio que desprenden las obras que fueron concebidas con el conocimiento de esta proporción.

Uno de los últimos renacentistas que indagaron en el mundo de esta proporción divina fue Johannes Kepler (Weil der Stadt, 1571-1630), quien en su libro *El secreto del*

universo (1596) afirmaba: “hay dos tesoros en la geometría, uno el teorema de Pitágoras y otro la división proporcional, una joya” (Kepler, 1992, p. 142).

Después, esta proporción divina cayó en desuso hasta el s. XIX. Fue entonces cuando vuelve a ser puesta de manifiesto por el alemán Adolf Zeising (Ballenstedt, 1810-1876), quien afirma en su *Ästhetische Forschungen* (1855): “Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso, desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor, la misma razón que entre la mayor y el todo” (Zeising, 1855). Además, Zeising comprobó mediante la estadística que el ombligo divide al cuerpo humano según la razón áurea. En este mismo siglo, pintores como Seurat (París, 1859-1891) o Cézanne (Aix en Provence, 1839-1906) volvieron a encontrar el equilibrio y la belleza en sus obras mediante reglas geométricas exactas como la razón áurea. En el campo de la arquitectura, tenemos que destacar, sin duda, a Le Corbusier (La Chaux de Fonds, 1887-1965) por su contribución a encontrar en toda creación humana, las leyes de la naturaleza traducidas en simples proporciones geométricas.

Todavía hoy son muchos los artistas que utilizan esta proporción para vertebrar sus creaciones, de forma consciente e inconsciente, debido a la trayectoria histórica de siglos.

Aparece en pinturas de *Dalí*, en la *Venus de Boticelli*, en *Los Fusilamientos del 3 de Mayo* de *Goya*. En estas pinturas, los artistas disponían los elementos principales de la pintura en posiciones áureas. Algo similar se usa en la industria del cine.

En España, podemos encontrar el número en edificios como la Universidad de Salamanca, el Escorial, o en la Alhambra. En el mundo, tenemos claros ejemplos en la catedral de Notre Dame de París, en la sede de la ONU en Nueva York, en el templo de las Cariátides, etc. Hasta nosotros, si miramos en nuestra cartera, llevamos rectángulos áureos, como son nuestros DNI y nuestras tarjetas de crédito.

5.2. Definición y conceptos básicos

5.2.1. Los números irracionales

Empecemos definiendo los números irracionales. Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros, es decir, tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos.

Los números reales se dividen en números racionales e irracionales. Los números racionales se pueden reducir a números enteros y estos, a números naturales. Los irracionales no pueden subdividirse más.

De estos números irracionales, hay tres de gran importancia en el mundo de las matemáticas y que se nombran con una letra. Son los siguientes: el número “e”, Pi (π) y el número de oro (Φ).

- El número e, también conocido como número de Euler (s. XVIII) o constante de Napier (Neper), fue “descubierto” y usado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático. El número e aparece como límite de la sucesión:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2'71828 \dots$$

- El número Pi se representa con la letra griega $\pi = 3'14159\dots$ y relaciona la longitud de una circunferencia con su diámetro.

$$L = 2\pi R \rightarrow \pi = \frac{L}{2R} = \frac{L}{\text{diámetro}} = 3,14159 \dots$$

- Y, por último, nuestro número: el número de oro. Este número se representa con la letra griega $\Phi = 1'61803\dots$ (Fi), gracias al matemático americano Mark Barr, que decidió representarlo así debido a que es la inicial del nombre del escultor griego Fidias, debido a que este escultor griego utilizó el número de oro en las proporciones de sus obras como, por ejemplo, el Partenón de Atenas.

La diferencia más importante con los dos números anteriores es que estos no son solución de ninguna ecuación algebraica, por ello a estos dos números se les llama trascendentes. Sin embargo, el número de oro es la solución de la siguiente ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1'61803 \dots = \Phi$$

5.2.2. Definición y construcción geométrica

Podemos definir la sección áurea como una proporción que aparece entre los segmentos de una recta al dividir ésta en *media y extrema razón*. Es decir, si tenemos una recta AB, ésta queda dividida por un punto F en otros dos segmentos (AF y FB) de

tal manera que el segmento mayor es al menor, como el todo es al mayor (Ilustración 8).

Ilustración 8 Media y extrema razón. Fuente: Elaboración propia.



De todos los puntos de la recta AB, únicamente existe un punto F que verifique esta relación de segmentos y cumpla la proporción $AF/FB = AB / AF$, que también se puede escribir como $AF / FB = (AF+FB) / AF$.

Entonces, si hacemos $AF=x$ y $FB=1$, tenemos que:

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si de las dos soluciones, elegimos la positiva tenemos que:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339885 \dots$$

Y de este modo, obtenemos el Número de Oro que, como hemos visto en el punto anterior, representamos con la letra Φ (Φ). Como un número irracional que es, no se puede expresar mediante el cociente de dos números enteros, su periodo es infinito y sus cifras decimales no son periódicas. Además, lo curioso de este número es que tiene propiedades únicas, como podemos ver a continuación.

Vamos a obtener dos expresiones distintas del número de oro. La primera, la obtenemos sustituyendo x en la ecuación algebraica por Φ :

$$x = \Phi$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi} \dots}}$$

$$\Phi = \lim \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

La segunda expresión del número de oro, podemos obtenerla dividiendo por Φ los dos miembros de la igualdad:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Sustituyendo de forma reiterada Φ por su valor, tenemos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \dots$$

$$\Phi = 1 + \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

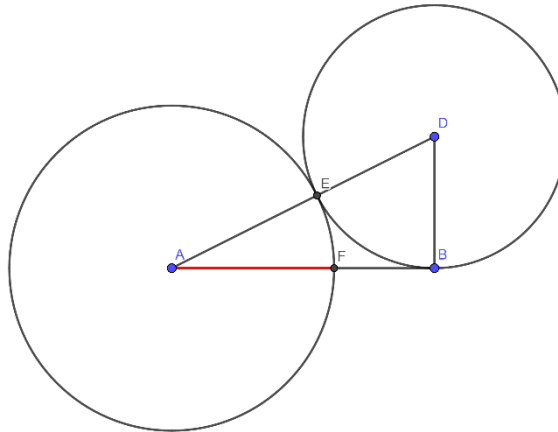
Por lo que:

$$\frac{1}{\Phi} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Vamos a ver ahora la construcción geométrica de la sección áurea. Básicamente, existen dos formas básicas de dibujar la sección áurea:

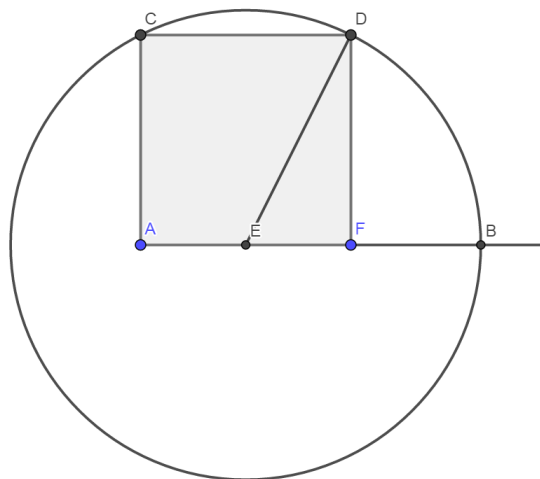
- 1) En la primera forma, vamos a dividir un segmento en media y extrema razón, tal y como hemos visto anteriormente. Partimos del segmento AB y queremos encontrar un punto F, de modo que los segmentos AF y FB, estén en proporción áurea. Para ello, trazamos la perpendicular a AB por B y en ella obtenemos el punto D, de tal forma que el segmento BD sea igual a AB/2. Con centro en D, trazamos la circunferencia con radio BD, y obtenemos el punto E sobre el segmento AD. Con centro en A y radio AE, trazamos la circunferencia y obtenemos el punto F sobre la recta AB, y este punto es el que cumple la condición de la proporción áurea entre los segmentos (Ilust. 9).

Ilustración 9 División de un segmento en media y extrema razón. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



2) En la segunda forma, a partir de un segmento AF conocido, debemos encontrar un segmento FB, que esté en proporción áurea con el segmento AF. Para ello, trazamos sobre AF un cuadrado de lado AF, y con centro en el punto $AF/2$ (punto E), trazamos una circunferencia de radio ED (punto opuesto del cuadrado). Si prolongamos el segmento AF, donde la circunferencia corte a esta prolongación obtenemos el punto B, y obtenemos el segmento buscado FB que cumple las proporciones áureas (Ilust. 10).

Ilustración 10 Trazado de la sección áurea. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



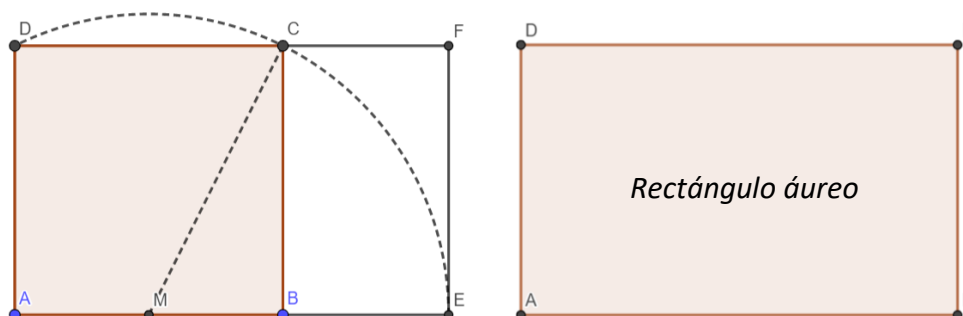
Esta segunda forma, no es otra que la construcción del pentágono regular, que, como ya hemos indicado, está muy relacionado con el número de oro.

5.2.3. El rectángulo áureo y el ángulo áureo

Como definición, diremos que un rectángulo áureo (o dorado) es aquel que entre cuyos lados existe una proporcionalidad igual a la razón áurea. Si sustraemos la imagen de un cuadrado inscrito en él de lado el lado menor del rectángulo áureo, obtendremos otro rectángulo áureo de menores dimensiones. Como curiosidad, si disponemos de varios rectángulos de distintas medidas, el áureo será considerado el más estéticamente agradable.

Se puede construir de la siguiente manera. Partiendo de un cuadrado ABCD, se dibuja un arco de circunferencia con centro el punto medio de AB (punto M) y radio MC, hasta cortar la prolongación del lado del cuadrado AB en el punto E. El rectángulo AEFD es un rectángulo áureo (Ilust. 11). La construcción la hemos podido ver en la segunda forma de construir la sección áurea del punto anterior.

Ilustración 11 Construcción de rectángulo áureo y rectángulo áureo. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



Supongamos que el lado del cuadrado dado vale 1, entonces podemos verificar la siguiente expresión:

$$AE = AM + ME = \frac{1}{2} + ME$$

Ya que el segmento ME es la hipotenusa del triángulo rectángulo MBC, si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$ME^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$ME = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

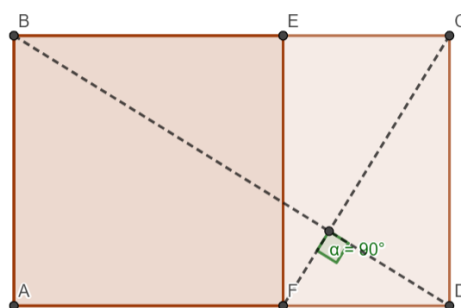
$$AE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1,618033989 \dots$$

Por lo tanto, queda demostrado analíticamente que los lados del rectángulo áureo AEFD que hemos obtenido gráficamente son 1 y Φ , guardando, por tanto, proporciones áureas.

Propiedades del rectángulo áureo:

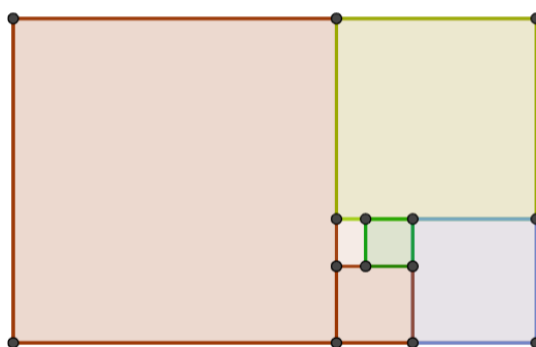
Como hemos visto anteriormente, una de las propiedades del rectángulo áureo ABCD es que, si eliminamos de su interior el cuadrado ABEF de lado el lado menor del rectángulo áureo, obtenemos otro rectángulo áureo más pequeño FDCE. Además, las diagonales de estos dos rectángulos áureos ABCD y FDCE se cortan siempre en ángulo recto, como podemos ver en la Ilustración 12.

Ilustración 12 Propiedades de los rectángulos áureos. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



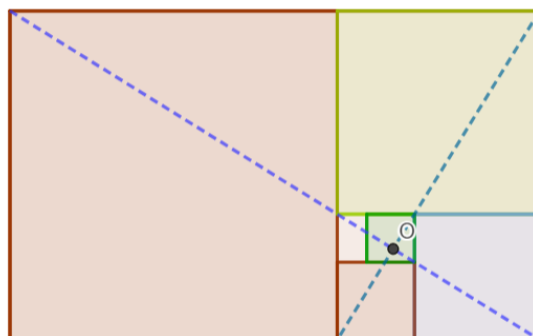
Si en el rectángulo áureo resultante hacemos la misma operación sucesivamente, es decir, sustraemos el cuadrado de lado el menor del rectángulo áureo de forma infinita, obtendremos la siguiente sucesión de rectángulos dorados (Ilust. 13):

Ilustración 13 División del rectángulo áureo en más rectángulos áureos. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



Si trazamos las diagonales de todos los rectángulos áureos resultantes, como hemos hecho en la Ilustración 12, podemos comprobar que todas ellas están situadas en las rectas BD y CF (Ilust. 12), y que se cortan siempre en el mismo punto O. A este punto, donde convergen las diagonales de todos los infinitos rectángulos áureos resultantes se le denomina “el ojo de Dios” (Ilust. 14).

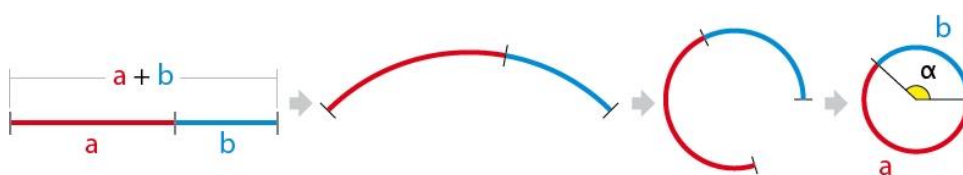
Ilustración 14 El ojo de Dios. Fuente: Elaboración propia con Geogebra..



El ángulo áureo

Si tenemos dos segmentos, a y b , que están en proporción áurea y dibujamos con ellos una circunferencia, es decir, que la longitud de la circunferencia sea $a+b$, el valor del ángulo central que se corresponde con el segmento menor es un número irracional que se puede simplificar como $137'5^\circ$. Si ahora dividimos el ángulo correspondiente al segmento mayor entre el correspondiente al segmento menor, obtendremos el número de oro (Ilust. 15).

Ilustración 15 El ángulo áureo. Fuente: Recuperado de [c3a1ngulo-c3a1ureo.jpg \(792x231\)](https://c3a1ngulo-c3a1ureo.jpg) (wordpress.com)



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi(\text{Phi}) = 1.61803399... \rightarrow \alpha = 137.507764^\circ... \sim 137.5^\circ$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

$$\frac{222'492236}{137'507744} = \Phi = 1'618033989 ...$$

Este ángulo es de gran importancia en la naturaleza, pues está presente en la disposición de las hojas en el tallo de una planta, por ejemplo, ya que es el ángulo que maximiza la cantidad de luz solar que reciben las hojas alrededor del tallo. Además, también podemos encontrarlo en la disposición de las pipas en un girasol, o en la disposición de los piñones en una piña.

5.2.4. Polígonos regulares. El pentágono.

El pentágono regular es el polígono por excelencia donde el número de oro está presente en múltiples relaciones de medidas. Luca Pacioli, en su *De divina proportionem* (1509) recoge los trece “efectos”, es decir, las distintas aplicaciones matemáticas, de este número. Algunos de estos efectos están relacionados con los polígonos regulares y más concretamente con el polígono regular. Estos efectos son el séptimo: “que los lados del hexágono y del decágono estén en esta proporción”, el noveno: “que mediante el cruce de las diagonales del pentágono obtendremos la relación del lado con la diagonal”, el undécimo: “al dividir el lado de un hexágono según esta proporción, su parte mayor será siempre el lado del decágono”, y el decimotercer efecto: “Como sin esta proporción no es posible construir un pentágono equilátero y equiángulo” (Pacioli, 1987, pp. 48-58).

El pentágono:

Una de las formas más fáciles de obtener el número de oro en un polígono regular es a través de un pentágono. En un pentágono regular, el cociente entre la medida de su diagonal y un lado es el número de oro. (Ilust. 16).

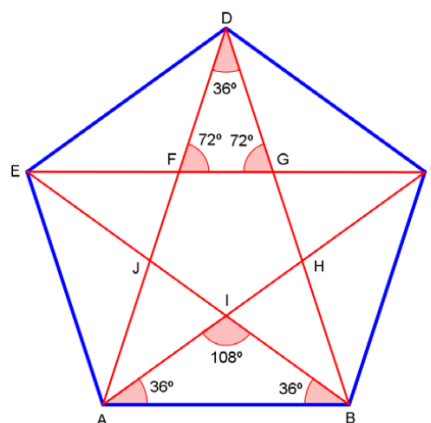
$$\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{AB} = \Phi$$

Además, existe proporcionales áureas entre los dos tipos de triángulos isósceles que forman sus diagonales. Uno con ángulos de 36°, 36° y 108° y el otro con ángulos de 72°, 72° y 36°. En ambos triángulos el cociente entre el lado mayor y el lado menor es el número de oro.

$$\frac{AB}{\text{sen}108^\circ} = \frac{AI}{\text{sen}36^\circ}$$

$$\frac{AB}{AI} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ} = 1'6180 \dots$$

Ilustración 16 Pentágono regular. Relaciones de diagonales. Fuente: Bragado, J. *La proporción áurea*. Recuperado de www.juanbragado.es



$$\frac{FD}{\text{sen}72^\circ} = \frac{FG}{\text{sen}36^\circ}$$

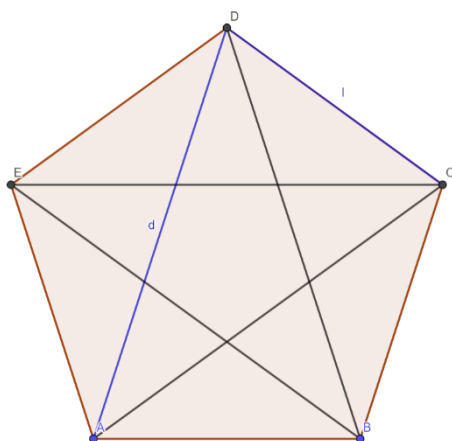
$$\frac{FD}{FG} = \frac{\text{sen}72^\circ}{\text{sen}36^\circ} = \frac{\text{sen}(180^\circ - 72^\circ)}{\text{sen}36^\circ} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ} = 1'6180 \dots$$

$$\frac{AB}{AI} = \frac{FD}{FG} = \Phi$$

El Pentagrama Pitagórico

Como hemos visto en la Ilustración 16, si dibujamos las cinco diagonales interiores de un pentágono regular, construimos una estrella de cinco vértices, un polígono complejo conocido históricamente como el pentagrama pitagórico, ya que, según la tradición, este símbolo representaba a la escuela fundada por Pitágoras en el s. VI a. C. Aunque estos pensaban, en sus inicios, que el mundo estaba configurado en base a un orden numérico representado por números fraccionarios, descubrieron que en su propio símbolo existían relaciones geométricas con una proporción distinguida, que más tarde pasaría a llamarse proporción áurea o divina.

Ilustración 17 El pentagrama pitagórico. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



En el pentagrama, los diferentes ángulos que aparecen son múltiplos de números enteros de los demás, como hemos visto en la ilustración anterior, 36° , 72° y 108° . Sin embargo, los pitagóricos descubrieron que esto no pasaba con las relaciones de las medidas de sus lados y diagonales. Así, en un primer momento, cabría pensar que en una figura tan perfecta como el pentágono, podría cumplirse que existieran números enteros (m y n) tales que las medidas de las diagonales y los lados fuesen múltiplos de otra medida menor: $d=mu$ y $l=mu$.

Pronto descubrieron que no existían tales números enteros y que el cociente entre la diagonal y el lado del pentágono regular no era un número racional. Se abrió, así, la puerta de la inconmensurabilidad. Podemos comprobar que tanto en el pentágono como en el pentagrama regular, aparece el número de oro entre cualquier segmento y el inmediatamente mayor a él.

El pentágono y el número de oro en la naturaleza

Son muchísimos los ejemplos que podemos encontrar en la naturaleza que siguen la forma geométrica del pentágono regular y que, por tanto, tienen presente el número de oro en sus proporciones. Tanto en la flora, como en la fauna, como en la arquitectura, etc. A continuación, recogemos solo algunos de ellos.

Ilustración 18 Petunia. Recuperado de [Pentágono en petunia | Patrones en la naturaleza, Forma geométrica, Petunias \(pinterest.com\)](#)



Ilustración 19 Estrella de mar. Recuperado de [EL PENTÁGONO, EL PENTAGRAMA Y EL PENTÁCULO \(pentagono-pentagrama-pentaculo.blogspot.com\)](#)

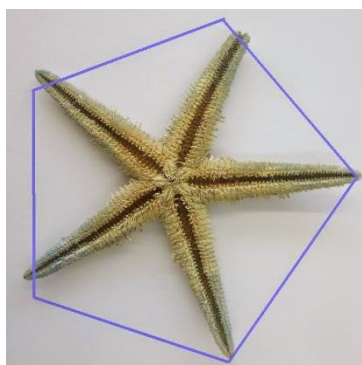
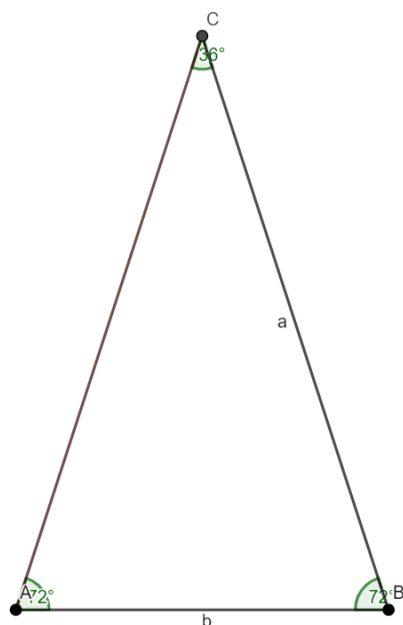


Ilustración 20 Rosetón. Recuperado de [EL PENTÁGONO, EL PENTAGRAMA Y EL PENTÁCULO \(pentagono-pentagrama-pentaculo.blogspot.com\)](#)



5.2.5. El triángulo áureo

Ilustración 21 Triángulo áureo. Fuente: *Elaboración propia con Geogebra.*

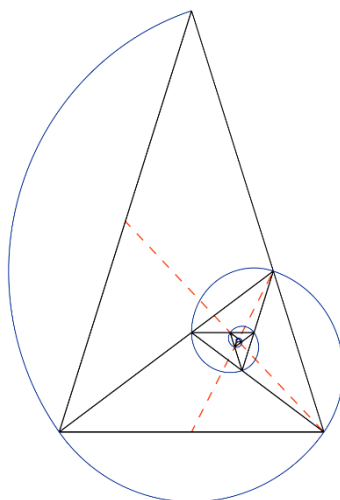


Como hemos visto en el punto anterior, las diagonales del pentágono regular forman dos tipos de triángulos isósceles cuyas relaciones entre los lados mayores y menores son el número de oro. Por tanto, estos triángulos se llaman triángulos áureos, de oro o dorados. Por definición, el triángulo áureo es un triángulo isósceles en el que el cociente entre el lado mayor duplicado (a) y el lado menor (b) es el número de oro (Ilust. 21):

$$\frac{a}{b} = \Phi$$

A partir de un triángulo áureo, podremos construir una espiral logarítmica. Si dividimos los ángulos de la base, creamos un nuevo punto que, a su vez, crea otro triángulo áureo. Si continuamos con el proceso de bisección, vamos creando un número infinito de triángulos áureos y podremos dibujar una espiral logarítmica uniendo sus vértices (Ilust. 22).

Ilustración 22 Espiral logarítmica.
Recuperado de [Triángulo áureo - Wikipedia, la enciclopedia libre](#)



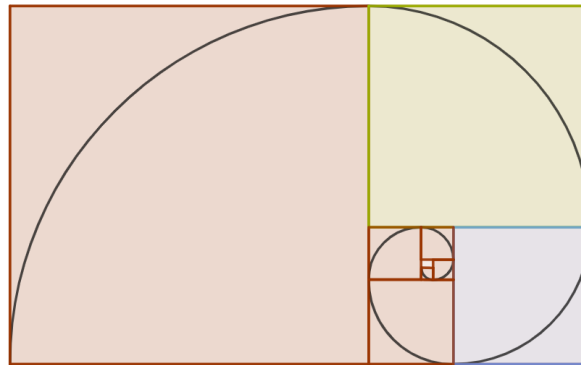
Como ocurría en el caso del rectángulo áureo, que si sustraímos el cuadrado de su interior nos quedaba otro rectángulo áureo de menores dimensiones, en el triángulo áureo, si continuamos trazando bisectrices obtenemos triángulos áureos más reducidos en el interior del triángulo primero. Así, de esta forma, obtenemos la espiral logarítmica (Ilust. 22) que convergirá en un mismo punto que en el apartado anterior hemos denominado “el ojo de Dios”.

5.2.6. La espiral de Durero. Aproximación a la espiral logarítmica.

Alberto Durero, artista renacentista alemán, escribió en 1525 la obra titulada “Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas”. En este libro, el autor trataba de explicar a artistas, arquitectos y matemáticas de aquella época cómo podían dibujarse algunas figuras geométricas y, en concreto, cómo podía trazarse con regla y compás la espiral basada en la sección áurea, que hoy conocemos bajo el nombre de “Espirale de Durero”.

Su construcción es muy sencilla. Trazamos arcos de circunferencia de radio el lado del cuadrado inscrito en cada rectángulo áureo resultante, y vamos uniendo unos arcos con otros hasta conseguir la espiral, que irá convergiendo en el punto mencionado en el apartado anterior (Ilust. 23).

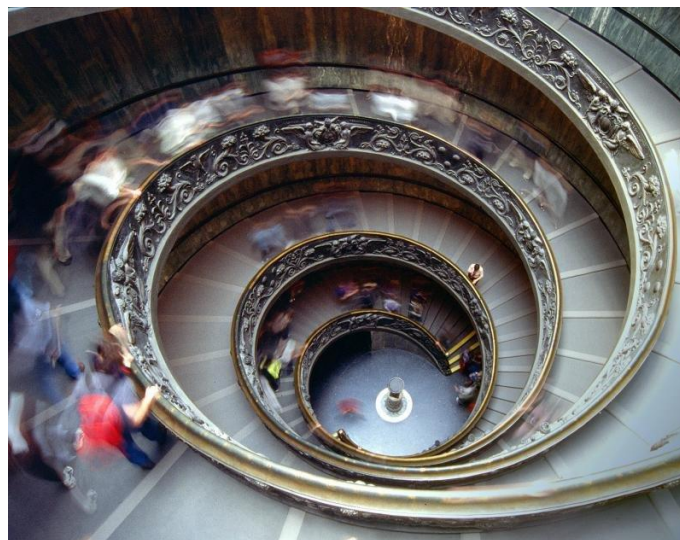
Ilustración 23 La espiral de Durero. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



Esta espiral es casi una espiral logarítmica, con un salto angular de 90° y el número de oro como razón geométrica y es la única espiral que se puede construir con regla y compás. Esta espiral gobierna el crecimiento armónico de muchas formas animales como las conchas de los moluscos y formas vegetales como flores y frutos.

En arquitectura también se ha utilizado, siendo uno de los ejemplos más extendidos las escaleras del Vaticano de la ilustración 24. El número de oro rige todavía nuestra forma de concebir el mundo.

Ilustración 24 Escaleras en el Vaticano. Ejemplo de espiral de Durero. Fuente: www.abc.es



5.2.7. La sucesión de Fibonacci. La Espiral de Fibonacci y el número de oro

En su libro *Liber Abaci* (1202), Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci (1170-1240), presentó la sucesión que después recibió su nombre, como la solución a un problema planteado de la cría de conejos. Mucho más tarde, en el siglo XIX, Édouard Lucas, descubrió muchas propiedades de esta sucesión y la denominó con el nombre que la conocemos actualmente: sucesión de Fibonacci. Esta sucesión se caracteriza porque cada número es el resultado de la suma de los dos términos anteriores:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

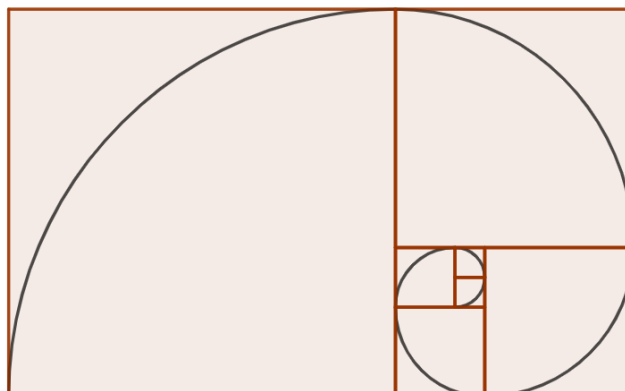
Además, si dividimos dos términos consecutivos de la sucesión, el mayor entre el menor, y conforme más altos sean los términos, el resultado se aproxima al número de oro. A continuación, hacemos la prueba:

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1'66; \quad \frac{8}{5} = 1'6; \quad \frac{13}{8} = 1'625; \quad \frac{21}{13} = 1'615 \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t_n}{t_{n-1}} \right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Para poder trazar la espiral de Fibonacci, empezamos dibujando dos cuadrados contiguos de 1 unidad de lado. Estos dos cuadrados unidos por uno de sus lados, forman un rectángulo cuyo lado mayor son dos unidades. Dibujamos un cuadrado pegado a este rectángulo por el lado mayor cuyo lado sea dos unidades. Ahora, tenemos un rectángulo de dimensiones 3x2, y dibujamos un nuevo cuadrado contiguo de lado 3 unidades, y así sucesivamente, iremos dibujando cuadrados cuyos lados tienen de longitud los términos de la sucesión de Fibonacci. La curva se va trazando mediante arcos de circunferencia de radios el lado de cada cuadrado (Ilust. 25).

Ilustración 25 Espiral de Fibonacci. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



5.2.8. Poliedros

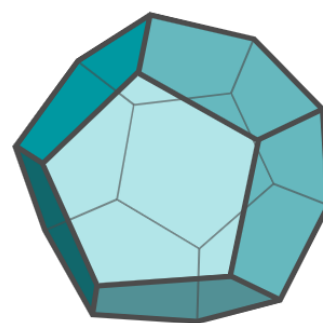
Si cortamos tres rectángulos áureos en el espacio de forma perpendicular entre sí por su punto medio y unimos todos sus vértices, obtenemos un *icosaedro regular*. Si ahora unimos los puntos medios de sus caras, obtenemos el poliedro dual del icosaedro que es el *dodecaedro regular*, cuyas caras son pentágonos regulares por lo que, como hemos visto en los puntos anteriores, el número de oro está presente en todas sus relaciones geométricas (Ilust. 26).

De hecho, el cálculo de su superficie y su volumen para una arista igual a la unidad puede expresarse en función del número de oro mediante las siguientes expresiones:

$$S = \frac{15\Phi}{\sqrt{3} - \Phi}$$

$$V = \frac{5\Phi^2}{6 - 2\Phi}$$

Ilustración 26 *Dodecaedro regular.* Recuperado de sangakoo.com: [Área y volumen \(sangakoo.com\)](http://sangakoo.com)



Los cristales de Piritas, llamados *Piritoedros*, tienen una estructura dodecaedral y sus caras son pentágonos perfectos (Ilust. 27)



Ilustración 27 *Cristal de pirita.* Fuente: www.geologiaweb.com

5.3. El número de oro en la realidad que nos rodea

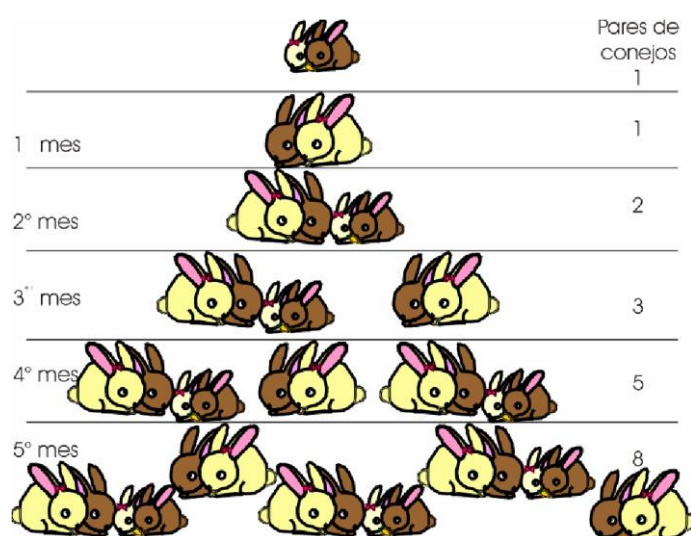
5.3.1. La sucesión de Fibonacci en la biología

Como hemos visto en los apartados anteriores, en 1202 Fibonacci planteó un problema del que se habla aún en nuestros días: el de la reproducción de los conejos. Quería saber cuántos conejos habría en una granja en el transcurso de un año si comenzaba con una pareja. Las hipótesis eran las siguientes: una pareja de conejos recién nacidos, macho y hembra, se encerraban en un lugar aislado. Al mes de nacer ya están preparados para procrear y, tras un mes de gestación, dan a luz a otra pareja de conejos, siempre un macho y una hembra. Además, suponemos también que los conejos

no mueren. Con estas premisas, ¿podemos saber el número de conejos que habrá en la granja al cabo de un año?

Si vamos analizando la evolución de los conejos bajo estas premisas, el número de parejas de conejos estará determinado por la sucesión de Fibonacci, y al cabo de un año habrá 144 parejas, el doceavo término de la sucesión (Ilust. 28).

Ilustración 28 Esquema de reproducción de los conejos según la serie de Fibonacci. Recuperado de [Fibonacci y la Reproducción de los Conejos \(mascotaplanet.com\)](http://Fibonacci y la Reproducción de los Conejos (mascotaplanet.com))



Ahora analizaremos el interesante patrón que rige la disposición de las hojas o flores alrededor del tallo de las plantas, que en biología recibe el nombre de filotaxia. Esta disposición busca siempre recibir el máximo de iluminación en sus hojas y flores y es por esto por lo que ninguna hoja nace en la vertical exacta de la anterior, sino que se distribuyen a lo largo del tallo siguiendo secuencias basadas en la sucesión de Fibonacci.

Además, el número de espirales en multitud de flores y frutos también se ajustan a parejas consecutivas de los términos de la famosa sucesión. Por ejemplo, el patrón de las semillas dentro de la cabeza de un girasol. Así, el número de espirales que hay en un girasol, en uno y otro sentido, coinciden con términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, siendo los más comunes 21 y 34, 34 y 55, 89 y 144. Por ejemplo, en la fotografía del girasol de la ilustración 29, el número de espirales existentes en el sentido de las agujas del reloj es de 34 y en el sentido contrario de 21.

Ilustración 29 Disposición de espirales en el girasol en el sentido de las agujas del reloj de 34 y 21 en el otro sentido. Fuente: www.researchgate.net



A la hora de nacer la primera semilla en la parte central del girasol, es empujada paulatinamente por el resto de semillas nacientes. La semilla elige una trayectoria radial con un ángulo determinado, de tal manera que se va cubriendo la cabeza del girasol de una manera óptima sin que quede ningún hueco. Este ángulo no es otro que el ángulo áureo, visto en los apartados anteriores, $137,5^\circ$.

Es por esto por lo que encontramos el número de oro tantas veces al estudiar el crecimiento de las plantas, por los empaques, es decir, la manera de cubrir el espacio y ordenar los objetos minimizando el espacio perdido. Así, podemos ver este mismo patrón en las semillas de una flor, en los pétalos o en el lugar de las hojas a lo largo del tallo. Esta ordenación está condicionada por un determinado ángulo de rotación a partir del punto central y mediante el cual las hojas y los pétalos se van ordenando con el crecimiento de la planta. Este ángulo es conocido. Por ejemplo, en la ilustración 30, el ángulo que separa cada una de las hojas con sus respectivas anteriores a lo largo del tallo coincide con el ángulo áureo, $137,5^\circ$. Esto responde a la solución natural que buscan las plantas para que, a medida que crecen, cada hoja reciba la máxima luz posible sin que las hojas superiores puedan estorbarles. Se trata del ángulo óptimo para tal fin.

Ilustración 30 Planta cuyas hojas se disponen según el ángulo áureo. Fuente: www.geocities.ws

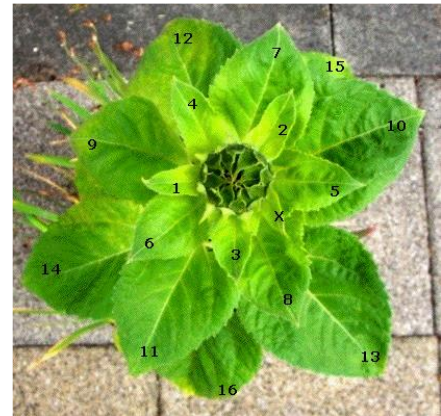
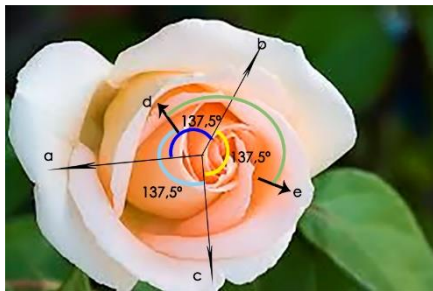


Ilustración 31 Disposición de los pétalos de una rosa según el ángulo áureo. F: www.plantae.garden.com



Además, el ángulo áureo también aparece en la disposición de los pétalos de una rosa o de un cactus, como podemos ver en la ilustración 31.

Si seguimos analizando el mundo vegetal, la mayoría de las flores tienen 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 u 89 pétalos, los términos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, el *Lirio* tiene 3 pétalos, algunos *Ranúnculos* 5 o bien 8. Las *margaritas* también respetan esta sucesión y disponen sus semillas en 21 y 34 espirales.

Existen multitud de ejemplos más en biología, pero debido a la limitada extensión del trabajo solo se han especificado de manera genérica algunos interesantes para nuestra unidad didáctica.

5.3.2. El cuerpo humano y el número de oro

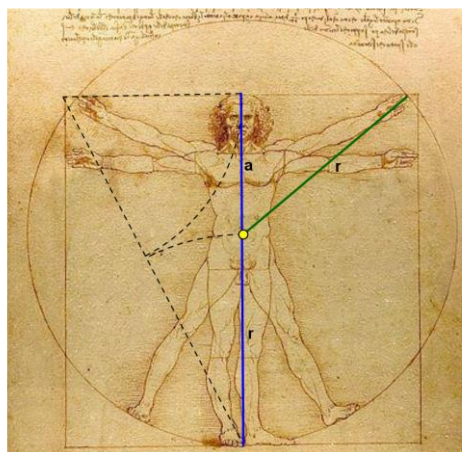
Como hemos visto, hubo durante el Renacimiento italiano dos figuras que destacaron al número de oro como patrón de belleza y perfección. Estos fueron Luca Pacioli (1445-1517) y Leonardo da Vinci (1452-1519). En el libro *De Divina Proportione*, escrito por Luca Pacioli en Milán entre 1496 y 1498, eleva esta proporción basada en el número de oro al grado de divina.

Este libro fue ilustrado por Leonardo Da Vinci, bajo las indicaciones de Luca Pacioli. Uno de los dibujos más famosos de este artista es el *Hombre de Vitruvio* o *Estudio de las proporciones ideales del cuerpo humano* realizado en torno a 1490. Se trata de un análisis de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos de Vitruvio, un arquitecto de la antigua Roma.

El dibujo representa a una figura masculina desnuda en dos posiciones distintas sobreimpresas de brazos y piernas, inscritas en un cuadrado y en una circunferencia. Según Luca Pacioli, la proporción perfecta del hombre es aquella en la que sus relaciones de medidas corporales están basadas en proporciones áureas. El círculo que inscribe al hombre se traza estirando sus piernas y brazos y tomando como centro el ombligo del cuerpo, mientras que el cuadrado tiene la altura del cuerpo que coincide con la longitud de los brazos extendidos con los dedos abiertos, formando un ángulo de 90º con el cuerpo.

Leonardo da Vinci propuso que el cuadrado y la circunferencia que inscriben al cuerpo tienen centros diferentes. Mientras que los genitales son el centro del cuadrado, el ombligo es el centro de la circunferencia. Las proporciones perfectas del cuerpo humano serían aquellas cuya relación entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia es el número de oro (Ilust. 32).

Ilustración 32 El hombre de Vitruvio. Fuente: www.computerhoy.com



$$\frac{\text{lado del cuadrado}}{\text{radio del círculo}} = \frac{\text{altura del hombre}}{\text{distancia desde el ombligo al suelo}} = \frac{r + a}{r} = \Phi = 1'618..$$

Además, es muy curioso que el número de oro se encuentra presente en muchas partes de nuestro cuerpo. Por ejemplo, la longitud de las falanges de nuestras manos sigue la secuencia de Fibonacci, como podemos ver en la radiografía de la ilustración 33.

Ilustración 33 Longitud de las falanges y sucesión de Fibonacci. Fuente: www.biocuriosidades.com



Pero hay muchas relaciones más, veremos algunas. La relación entre la distancia del hombro a la punta de los dedos y del codo a la punta de los dedos es, aproximadamente, el número de oro. La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla es también el número de oro. La relación entre el primer hueso de los dedos, el metacarpiano, y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, es también el número de oro. La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz, es el número de oro. Si dividimos la tráquea en sus bronquios y medimos el diámetro de estos y lo relacionamos con el de la tráquea, obtenemos el número de oro, o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas).

Se han hecho multitud de estudios que deducen que cuantas más veces aparece el número de oro en las proporciones de nuestro cuerpo y en el rostro, la mayoría de las personas reconocen a esos individuos como bellos y proporcionados.

5.3.3. El número de oro en la pintura y en la escultura

Uno de los pintores españoles que mejor entendió y aplicó de manera sistemática la sección áurea en sus creaciones fue Salvador Dalí (1904-1989). Uno de los mayores ejemplos es su obra titulada *La última cena* (1955), en la que Salvador Dalí introduce el número de oro en dos situaciones: en las mismas proporciones de la obra, pues la relación entre la longitud y la altura del cuadro es el número de oro, y otra en la composición pictórica, pues en la escena puede verse un dodecaedro formado por doce pentágonos regulares que configura la escena, y en su centro está el cuerpo de Cristo. Incluso, los doce apóstoles están colocados según esta proporción (Ilust. 34).

Ilustración 34 Longitud de las falanges y sucesión de Fibonacci. Fuente: www.todocadros.com



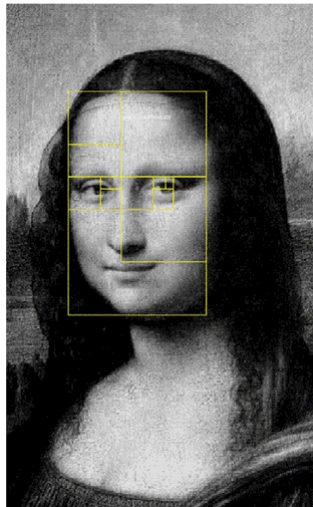
Otra de las obras más célebres de la historia del arte español, es *Las meninas* (1656) de Velázquez, de la que existe la teoría de que el pintor utilizó la espiral de Durero para distribuir el espacio y los personajes en la obra. Esta espiral entraría por la ventana lateral derecha y acabaría en la paleta y pincel del propio pintor, tal y como podemos ver en la ilustración 35.

Ilustración 35 *Las meninas* de Velázquez y su relación con la espiral de Durero. Fuente: www.pinterest.es



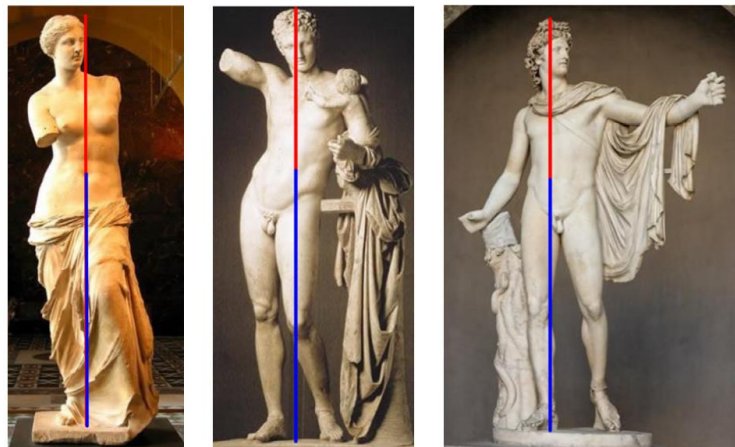
Como hemos comentado en puntos anteriores, Leonardo da Vinci fue uno de los artistas mundiales que más utilizó y practicó con el número de oro. Por eso no es descabellado pensar que utilizó las proporciones de los rectángulos áureos para componer el rostro de la llamada *Gioconda* (1503), tal y como vemos en la ilustración 36.

Ilustración 36 *La Gioconda de Leonardo da Vinci y los rectángulos áureos. Fuente: www.marianasacotonavia.com*



También podemos encontrar proporciones basadas en el número de oro en algunas de las más importantes estatuas griegas. En las tres esculturas de la ilustración 37, *Venus de Milo*, *Hermes Praxíteles* y *Apolo de Belvedere*, si dividimos la altura de la escultura entre la distancia desde el ombligo hasta el suelo obtenemos el número de oro.

Ilustración 37 *Esculturas de la Venus de Milo, Hermes Praxíteles y Apolo de Belvedere y su relación con el número de oro. Fuente: [Pinterest.es](https://www.pinterest.es)*



5.3.4. El número de oro en la arquitectura

A lo largo de la historia, el número de oro ha sido utilizado para la composición arquitectónica de multitud de edificios, muchos de ellos han llegado desde la antigüedad

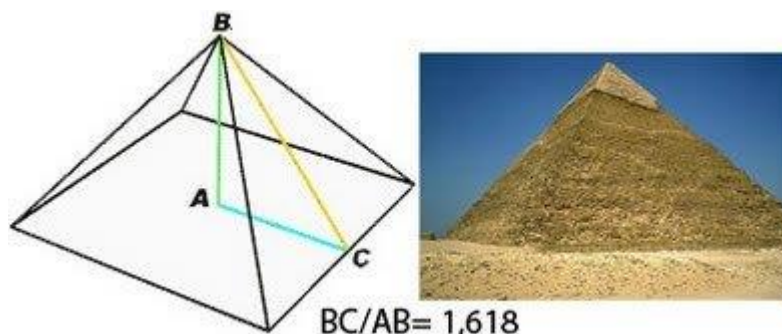
hasta nuestros días, mostrándonos que esta proporción divina ha sido utilizada desde hace miles de años.

La gran pirámide de Keops

Una de las primeras manifestaciones en arquitectura del número de oro que conocemos, es la de la gran pirámide de Keops, construida hacia el año 2600 a.C.

Ya en el siglo V a.C., el historiador griego Heródoto (Halicarnaso, 484 a.C.-425 a.C.), estudió que los egipcios construyeron la Gran Pirámide de manera que el área de una cara coincidiera con el área de un cuadrado de lado la altura de la pirámide. Lo que quiere decir que la apotema de la pirámide, es decir, la distancia desde la cúspide hasta el punto medio de uno de los lados de la base, se elegía para que la superficie de cada una de las caras triangulares fuera igual al cuadrado de la altura. Aunque esta premisa no es difícil de calcular, se podía hacer por el método de ensayo-error, lo cierto es que si establecemos relaciones geométricas en las pirámides descubrimos el número de oro. Por ejemplo, el cociente entre la altura de una cara y la mitad del lado de la base es 1,618... ¡el número de oro! Además, el cociente entre el área total y el área lateral de la pirámide también será el número de oro. Y, por último, el cociente entre el área lateral y el área de base también se aproxima al número de oro (Ilust. 38).

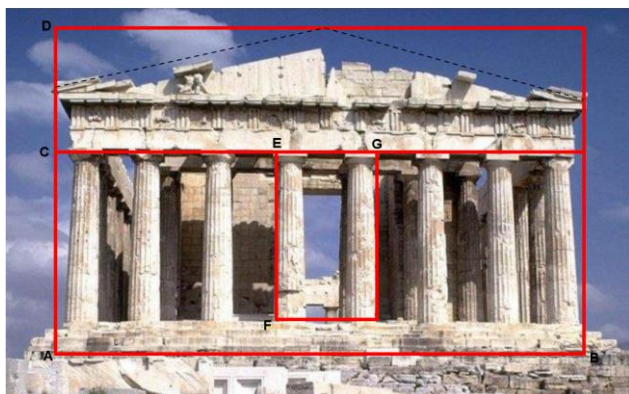
Ilustración 38 Pirámide de Keops y su relación con el número de oro. Fuente: aureo.webgarden.es



El Partenón de Atenas

Los griegos también utilizaron este número para proporcionar muchas de sus construcciones. La más representativa es el *Partenón*, situado en la Acrópolis de Atenas y dedicado a la diosa Atenea. Todas sus proporciones están relacionadas con el número de oro, siendo sus diagonales las de un rectángulo áureo.

Ilustración 39 El Partenón y sus secciones áureas. Fuente: www.oscarenfotos.com



En la ilustración 39 podemos comprobar que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{EF}{EG} = \Phi$$

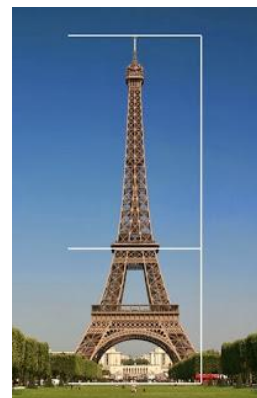
Otros ejemplos importantes

No solo podemos encontrar rectángulos áureos en la arquitectura antigua, sino que existen ejemplos de edificios y monumentos a lo largo de la historia que los han incorporado en su diseño. Por ejemplo, el edificio de la ONU de Nueva York, (Ilust. 40) que es un rectángulo áureo tal cual, o la Torre Eiffel de París (Ilust. 41), etc.

Ilustración 40 Edificio de la ONU de Nueva York. Recuperado de [Arte y Arquitectura - Número Áureo \(webgarden.es\)](http://Arte.y.Arquitectura-NúmeroÁureo.webgarden.es)



Ilustración 41 Torre Eiffel de París y el número áureo. Recuperado de [VALDEPROJECT: Proporción divina en la Torre Eiffel \(valdeprojectcvc.blogspot.com\)](http://VALDEPROJECT:ProporciónDivinaenlaTorreEiffel.valdeprojectcvc.blogspot.com)



Otro ejemplo clásico es la catedral de Notre Dame en París, en la que el cociente entre la altura y el ancho del rectángulo obtenemos el número de oro, es decir, su fachada principal es un rectángulo áureo (Ilust. 42).

En España, en la fachada de la universidad más antigua del país, la de Salamanca, el número áureo también esté presente en sus proporciones (Ilust. 43).

Ilustración 42 Catedral de Notre Dame y rectángulo áureo. Fuente: www.rotokommerling.com

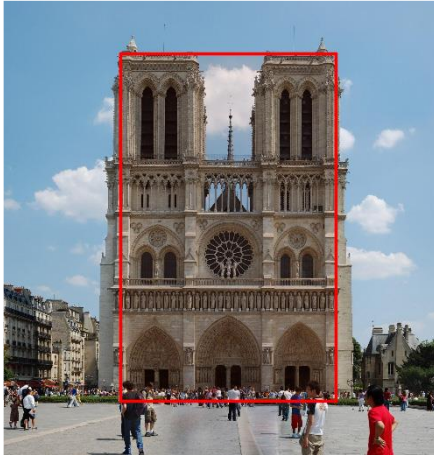


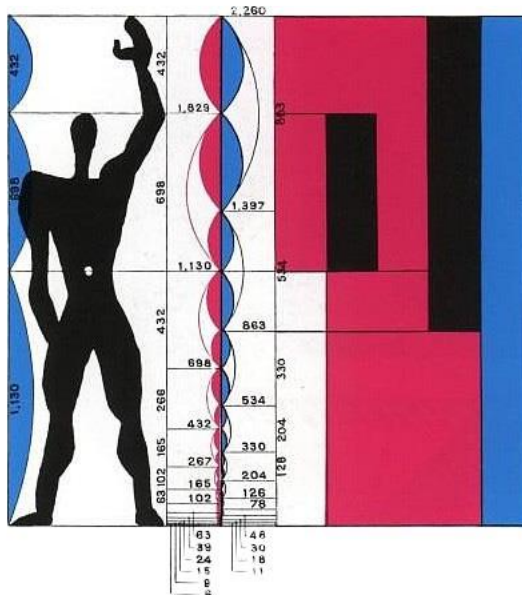
Ilustración 43 Parte de la fachada de la Universidad de Salamanca. Fuente: www.academiaplay.es



Le Corbusier

Charles-Édouard Jeanneret-Gris (La Chaux de Fonds, 1887-1965), llamado Le Corbusier, era de origen suizo pero nacionalizado francés. Entre los años 1942 y 1948 desarrolló el *Modulor*, analizando el *Hombre de Vitrubio*. El *Modulor* era un sistema de medidas en el que cada magnitud se relaciona con las demás según la Proporción Áurea y a la vez se corresponde con las medidas del cuerpo humano (Ilust. 44).

Ilustración 44 El Modulor de Le Corbusier. El hombre con la mano levantada mide 226 cm y su mitad se encuentra en el ombligo a 113 cm. del suelo. Fuente: www.plataformaarquitectura.cl



De alguna forma, Le Corbusier quería establecer un sistema de medidas para el cuerpo humano de tal manera que cada una de ellas se relaciona con la anterior mediante el número áureo, con el objetivo de que sirvieran como sistema de medidas

para la arquitectura y el diseño. Con el *Modulor*, Le Corbusier quería resucitar el pensamiento antiguo de establecer una relación directa entre las medidas del hombre y la propia arquitectura.

El DNI, tarjetas de crédito y miles de cosas más

Como curiosidad final en esta fundamentación epistemológica, el número de oro también se ha usado en el diseño del DNI (ilust. 45), tarjetas de crédito, en la construcción de muebles, marcos para ventanas, camas, etc. y en las cajetillas de tabaco.



Ilustración 45 DNI español, un rectángulo áureo. Fuente: www.centros.edu.xunta.es

6. Fundamentación didáctica

Para realizar esta fundamentación se han abordado diversos estudios sobre el problema de los alumnos para comprender los números irracionales (teniendo en cuenta que el número de oro es uno de ellos) y algunos aspectos de las matemáticas en general. Entre ellos, los más importantes han sido *Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales* (2010), escrito por Mariela Lilibeth Herrera Ruiz. Otro estudio abordado es el que lleva por título *El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas* (2020) escrito por Dorenis Josefina Mota Villegas y Ricardo Enrique Valles Pereira.

Ambos artículos nos van a marcar dos aspectos diferenciados del estudio del número de oro. Por un lado, los problemas y obstáculos que podemos encontrarnos a la hora de su estudio por parte del alumnado, es decir, los errores más frecuentes en el estudio de los irracionales como, por ejemplo, las operaciones con radicales. Por otro lado, el segundo estudio nos muestra cómo la implementación de una unidad didáctica sobre el número de oro aumenta la motivación e interés del alumnado por la asignatura de Matemáticas, objetivo primordial que hemos querido conseguir con la elección del tema de este TFM.

6.1. Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales (Herrera, 2010)

Este estudio ha sido realizado Mariela Lilibeth Herrera Ruiz para la Universidad de Venezuela dentro del campo de investigación de “Pensamiento numérico” publicado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Con este estudio, la investigadora pretende analizar los problemas cognitivos que tienen estudiantes de 3º año de educación media a la hora de enfrentarse al estudio de los números irracionales. Para ello, la investigadora recopiló y estudió los cuadernos de clase de los estudiantes y las evaluaciones realizadas y, con esta informo, elaboró un cuestionario que luego fue dado a los alumnos.

El objetivo fundamental de esta investigación ha sido detectar y analizar los problemas y conflictos que tiene el alumnado al enfrentarse por primera vez al concepto matemático de número irracional dentro del normal desarrollo de las clases y plan pedagógico y, a la misma vez, poner en valor el papel investigador del propio docente que tiene la capacidad de poder describir y analizar lo que ocurre a cada momento en clase.

Bases teóricas del estudio de Herrera

Como podemos leer en el apartado correspondiente del estudio, Herrera se ha basado en la teoría de Socas (1997) abordada en su tesis *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*, en las dimensiones afectivas analizadas por Gómez (2000), en la teoría de obstáculos de Brousseau (1976) y en la teoría de errores de Radatz (1979).

Según Socas, “las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las Matemáticas” (Socas, 1997, p.35). Así, estas dificultades son el producto de dos elementos: los intramatemáticos, constituidos por los objetos, los procesos, el simbolismo, etc. y los extramatemáticos, que son aquellos que tienen que ver con la cognición, las actitudes, etc.

Según esto, Socas establece una clasificación de las dificultades de acuerdo a su origen:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas:* están relacionadas con el lenguaje en cuanto a la comprensión y comunicación de los conceptos matemáticos.

- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:* están relacionadas con las rupturas internas del pensamiento matemático, por ejemplo, cuando se realizan ejemplos, dibujos en pizarras, imágenes idealizadas, todo eso puede provocar errores.
- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas:* están relacionadas con los métodos de enseñanza que deben cumplir los objetivos del propio sistema y currículo legal.
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos:* es fundamental que cuando se diseñen las estrategias y métodos de enseñanza, se tenga en cuenta el momento cognitivo del alumnado.
- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* están relacionadas con las actitudes, las creencias y emociones que hacen que la enseñanza matemática sea más activa o, por el contrario, resistente.

Por otro lado, están los obstáculos, que son las dificultades propias del alumno y que son causa del estancamiento o del retroceso en el proceso de aprendizaje. Brousseau (1976) recoge tres tipos de obstáculos: *de origen epistemológico*, estos obstáculos están en la historia de los conceptos en sí mismos y no tiene por qué repetirse siempre; *de origen didáctico*, estos aparecen cuando se eligen los distintos métodos didácticos; y *de origen ontogénico o psicogénico*, son provocados por el desarrollo del propio alumno. En esta investigación, Herrera sólo ha considerado los obstáculos epistemológicos y didácticos.

Además, tenemos que tener presentes los errores. Radatz (1979) los distingue en cinco clases de errores:

- *Dificultades del lenguaje:* los errores son consecuencia del uso inadecuado o equivocado de los símbolos y conceptos matemáticos, derivados de un mal aprendizaje de los mismos.
- *Dificultad para obtener información espacial:* estos errores se generan de representaciones erróneas de conceptos y situaciones matemáticas.
- *Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos:* estos errores provienen de déficits en el uso y manejo de los procedimientos matemáticos aprendidos con anterioridad.
- *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento:* estos errores están relacionados con la oposición natural a aprender nuevos conceptos matemáticos. A su vez, se dividen en cuatro grupos: por perseverancia, de asociación, de inferencia, y de asimilación.

- *Aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes:* estos errores son provocados al utilizar unas reglas o unos procedimientos que son análogos, pero no ciertos, ya que la analogía no funciona siempre en las Matemáticas.

Metodología utilizada

Para la obtención de datos reales, Herrera realizó una labor de observación directamente a los alumnos en clase en las condiciones habituales en las que tiene lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los procedimientos de la investigación se han dividido en:

- *Para analizar las dificultades en el aprendizaje de los números irracionales:* Herrera realizó un cuestionario, que posteriormente fue validado y aplicado a los alumnos.
- *Para analizar los obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales:* Herrera procedió a realizar un análisis de los cuadernos de los alumnos y los registros observados, como el contenido dado, los ejercicios que realizó el profesor, los planteados, las resoluciones de los estudiantes, etc.
- *Para analizar los errores en el aprendizaje de los números irracionales:* Herrera confeccionó evaluaciones de acuerdo al contenido de los números irracionales, se estudiaron los errores cometidos por los alumnos y se tipificaron siguiendo la tipología de Radatz.

Resultados

Al final del estudio, la autora detectó los siguientes conflictos cognitivos en el aprendizaje de los números irracionales:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas:* se detectaron confusiones semánticas, por ejemplo, la palabra *raíz*, los alumnos la confundían con la de los árboles, o la palabra *índice* con el dedo que se nombra así o con la tabla de contenido de un trabajo, la palabra *racional* la mayoría lo relaciona con un número, pero para otros es sinónimo de equilibrio y la palabra *irracional* la asocian con algo que no tiene sentido, con una persona que no piensa, etc.
- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:* la autora detectó que, normalmente, los estudiantes comprenden el argumento lógico de una situación común, sin embargo, cuando este contiene conceptos matemáticos, ya tienen dificultades en la comprensión del argumento lógico para esa misma situación, introducen datos no dados y obvian algunos de los datos enunciados.

- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas:* según Herrera, durante el estudio los estudiantes manifestaron dificultades para comprender la posición de los números irracionales en la recta numérica entre dos racionales, por lo que deseaban la representación única de los irracionales en esta recta.
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos:* cuando la investigadora presentó los cuestionarios, los estudiantes solicitaban en todo momento la explicación de los enunciados, lo que evidenció deficiencias en la comprensión lectora y en el lenguaje matemático.
- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* Herrera recogió que, para los alumnos, las matemáticas eran importantes, útiles para la vida cotidiana, en general difíciles y aburridas. Son más entendidas cuando los profesores explican de una forma lenta y paso a paso.

En cuanto a los obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales:

- *De origen epistemológico:* Herrera detectó que los alumnos creen que 5 y $\sqrt{5}$ son un mismo número y además piensan que todos los números con decimales infinitos son irracionales.
- *De origen didáctico:* La autora detectó que, para explicar la representación de las raíces en la recta numérica, se usó la relación pitagórica sin haber enseñado el teorema de Pitágoras ya que este requiere conocer los radicales. Además, se usaron los radicales para explicar la imposibilidad de resolver las ecuaciones de la forma $x^2 = 2$ con números racionales.

En cuanto a los errores cometidos en el aprendizaje de los números irracionales:

- *Dificultades del lenguaje:* La investigadora detectó que los alumnos identificaban al radical como “v”, siendo la lectura de $\sqrt{5}$ como “uve cinco” y además usaban el símbolo de igual para comparar dos elementos totalmente distintos.
- *Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos:* Herrera detectó que los estudiantes tienen problemas para identificar cuándo dos términos son semejantes, además, presentaban problemas con las operaciones básicas de suma, multiplicación, división y potenciación tanto en los enteros como en los racionales, se equivocan en la descomposición factorial de los números y no reconocen los números notables.
- *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento:* cuando en los cuestionarios se les ha pedido que identificasen los elementos de un radical, al subradical, los estudiantes le han llamado coeficiente, exponente de la cantidad subradical o

denominador. Tampoco identifican cuándo dos radicales son semejantes o cuándo son simples.

- *Aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes:* Herrera también comprobó que los estudiantes sumaban radicales sin ser semejantes, que no sabían realizar la reducción a radicales simples, etc.

Conclusiones

Como conclusión a este estudio sobre la dificultad de aprendizaje de los números irracionales, Herrera sintetiza:

Los errores presentados por los estudiantes no se deben percibir como simples descuidos o equivocaciones ingenuas, ya que su aparición es sencillamente la evidencia de los conflictos cognitivos que surgen producto de dificultades y obstáculos, por ejemplo, detrás de los errores por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento subyacen dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas, en concreto los estudiantes no identifican correctamente los términos de un radical ya que presentan dificultades de confusión semántica por la injerencia del lenguaje cotidiano de palabras homónimas. Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático originan errores por un aprendizaje deficiente de los prerrequisitos, en particular cuando los estudiantes no identifican si dos radicales es porque no comprenden cuando dos términos semejantes.

Para diseñar estrategias pedagógicas dirigidas a fomentar el pensamiento numérico necesitamos realizar previamente una investigación indagatoria de las deficiencias que presentan los estudiantes, y justamente esta investigación surgida dentro de la práctica profesional docente pretende servir de punto de partida para la elaboración de una propuesta didáctica (Herrera, 2010, p. 254).

6.2. El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas (Mota & Valles, 2020)

Este estudio fue realizado por Dorenis Josefina Mota Villegas y Ricardo Enrique Valles Pereira para la Universidad Católica del Ecuador y publicado en la INNOVA Research Journal, ISSN 2477-9024, mayo-agosto 2020, vol. 5 pp. 157-173. Para nuestro trabajo y como fundamentación didáctica, el tema elegido de este estudio, “el número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas”, supone un gran apoyo para conocer los efectos que la implementación de la unidad didáctica de este TFM puede tener en los alumnos.

En este estudio, los investigadores pretendieron implementar una experiencia didáctica en una clase de matemáticas básica, con el objetivo de motivar a los estudiantes en el estudio de esta materia. Esta experiencia consistió en desarrollar una unidad didáctica basada en el número de oro, desde su origen, evolución, desarrollo y aplicaciones en la vida real. Fue por este último motivo por el que se eligió este tema, ya que así se despierta el interés del alumnado. La metodología utilizada por estos investigadores fue la de la acción participativa, con una aclaración previa de los conceptos básicos sobre el número de oro. Los resultados previos fueron positivos, ya que la mayor parte de los alumnos se sintieron atraídos por este tema, con actitud receptiva en la realización de actividades y satisfechos con el aprendizaje.

Metodología

La metodología de esta investigación ha consistido en una experiencia en una clase de matemáticas, diseñando los contenidos y obteniendo los datos de la observación directa y teniendo como base material bibliográfico creado y actualizado a tal efecto.

Los autores realizaron este estudio en un aula con 31 alumnos de la Universidad Pontificia Católica de Ecuador, en Quito, durante el curso de 2018.

Número áureo y didáctica

Para realizar este estudio, los investigadores se han basado, entre otras teorías, en la Teoría Socio-epistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Se trata de una teoría de Didáctica de la Matemática propuesta por Cantoral en su tesis doctoral de 1990, que pretende democratizar el aprendizaje de las matemáticas.

Los investigadores destacaron la importancia del número de oro para tal fin, por sus relaciones con aspectos intrínsecos de las matemáticas, como la sucesión de Fibonacci, el rectángulo de oro o la estrella pitagórica, y aspectos externos de las matemáticas como la arquitectura, el diseño, la botánica, la biología, la ecología, etc.

Para el caso en concreto del aula en estudio, aunque el número de oro no es parte del temario específico de las Matemáticas básicas, está relacionado con todos los temas de estas, como números irracionales, sucesiones, proporciones, raíces de polinomio de grado 2, geometría, etc. Además, se conectó con los aspectos reales del entorno más inmediato del estudiante mediante actividades y fichas donde pudieron comprobarlo.

Realización de la prueba

A continuación, hacemos un resumen de lo que supuso la prueba y cómo los investigadores llegaron a implementarla.

Lo primero que tuvieron que hacer los estudiantes es buscar información sobre el número de oro y sus aplicaciones, como la razón áurea, el rectángulo áureo, la sucesión

de Fibonacci, etc. Además, se les invitó a visualizar un video de Youtube (Ventura, 2016), de corta duración e interesante para los alumnos que están aprendiendo un nuevo tema. Una vez que se empaparon de toda esta información, los alumnos ya estaban preparados para realizar las distintas actividades que los investigadores tenían preparadas, y que fueron las siguientes:

- *Actividad 1: Mesa de discusión.*

Los investigadores realizaron grupos en el aula, y se les instó a construir en equipo la historia del número de oro y su fundamentación epistemológica de acuerdo a la información que habían recopilado previamente.

- *Actividad 2: Demostración del número áureo, construcción del rectángulo áureo y de la espiral de Durero.*

Esta actividad fue llevada a cabo por el profesor, el cual dedujo el número de oro a partir de la proporción áurea y la construcción del rectángulo áureo. Después, dibujó la espiral de Durero mediante el dibujo sucesivo de rectángulos áureos, mientras que los alumnos repetían todo el proceso en sus cuadernos a la vez.

- *Actividad 3: Mapa mental*

En otra sesión, los estudiantes debían construir un mapa mental con la fundamentación histórica y epistemológica del número de oro y sus relaciones con la naturaleza.

- *Actividad 4: El número de oro en diseño, construcción y arquitectura: Época antigua, Época moderna.*

En esta sesión, los alumnos debían realizar una búsqueda de informa sobre la aparición del número de oro en el diseño y en la arquitectura de la zona de épocas antiguas y modernas, en la zona.

- *Actividad 5: Realización de maqueta.*

La última sesión consistía en la fabricación de una maqueta de alguna construcción arquitectónica en cuyo diseño aparecía el número de oro.

Cuestionarios finales

Al finalizar, los investigadores realizaron una encuesta sobre las actividades aplicadas a los alumnos, con las siguientes preguntas:

- *Pregunta 1: ¿Consideras que mediante el estudio del número áureo pudiste comprender algunos conceptos de matemática básica? El 71% contestó que sí.*

- *Pregunta 2:* ¿Consideras que fueron de utilidad, como motivación positiva, las actividades realizadas sobre el número áureo para el estudio de la matemática básica? El 93% contestó que sí.
- *Pregunta 3:* ¿Consideras que la matemática básica estudiada puede ser de beneficio o se relaciona con tu Carrera? El 80% contestó que sí.
- *Pregunta 4:* ¿Consideras que la matemática básica estudiada (apoyada en el número áureo), permitirá valorar a la Ciencia en el ámbito profesional a futuro? El 68% contestó que sí.
- *Pregunta 5:* ¿Consideras que la matemática básica estudiada (apoyada en el número áureo) puede servir de sustento en las asignaturas prácticas de tu carrera? El 84% contestó que sí.
- *Pregunta 6:* ¿Consideras que el estudio de las asignaturas de matemática superior, deberían ser abordadas con la metodología implementada en el curso de matemática básica, fundamentada en los tópicos del número áureo? El 94% contestó que sí.

Conclusiones finales

Con este estudio, que sirve de base y sustento a la unidad didáctica que he planteado en este TFM y por ese motivo decidí elegir el tema, los investigadores han demostrado que se puede conseguir un cambio de conducta en la motivación y las actitudes de los estudiantes, con tan solo proponiendo un tema distinto a la tradicional clase de matemáticas. Con la mera proposición de un tema hasta ahora desconocido por ellos y al brindarle la oportunidad de descubrir información con medios multimedia atractivos y a su alcance, se consiguió cambiar el clima de aprendizaje en la clase, lo que produjo un cambio en sus actitudes a la hora de recibir una clase de matemáticas y aumentó la atención de los estudiantes.

Además, la manera de proponer las actividades sobre el número de oro aumentó el interés del alumnado y mostraron entusiasmo a la hora de realizar las actividades no tradicionales propuestas.

Como conclusión final de este estudio, hay que dejar claro que con esto no se ha encontrado la forma de conseguir que todos los estudiantes quieran aprender la tediosa asignatura de las matemáticas, pero sí se consigue dar un paso importante para extraer las matemáticas de las cuatro paredes del aula y regalarle al estudiante un camino distinto de aprendizaje de las mismas.

6.3. Reflexiones conjuntas de ambos estudios

A continuación, se recogen algunas reflexiones realizadas, que he podido extraer de la lectura y análisis de estos dos estudios y que tienen que ver con nuestro TFM:

- El número de oro es un número irracional, y el estudio de sus propiedades requiere conocimientos matemáticos como resolución de ecuaciones de segundo grado, operaciones con radicales, operaciones con fracciones, sucesiones, etc. Por tanto, es de vital importancia conocer dónde los alumnos y alumnas tienen problemas e intentar resolverlos mediante ejemplos y explicaciones acertadas, tal y como se analiza en el primer estudio.
- La elección del tema de este TFM no es por capricho ni arbitraria, supone un reto ya que no se trata de un tema estándar del temario de oposiciones de Matemáticas que pueda ser usado como base. La intención es conseguir diseñar una unidad didáctica que, tras su implementación en un aula, se aprendan conocimientos básicos como los números irracionales, polígonos regulares y semirregulares, arte, arquitectura, etc. y aumente, además, la motivación e interés del alumnado por las Matemáticas, tal y como demuestra el segundo estudio.
- El tema del número de oro requiere el aprendizaje y el repaso de varios conceptos matemáticos, lo que supondría un refuerzo a colación de conseguir otro objetivo: aumentar el interés por una asignatura que provoca rechazo en la mayoría de los estudiantes y propiciar la observación de la realidad que nos rodea (arquitectura, arte, música, etc.)

7. Proyección didáctica

7.1. Título

El número de oro (Φ): fundamentos y aplicaciones.

7.2. Justificación

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se ha basado en los procesos y objetos matemáticas, estableciendo mínimas relaciones entre la realidad que nos rodea

y estos conceptos. Es por esto, quizás, que los alumnos siempre han considerado esta asignatura como aburrida y difícil, lo que redundaría en una minoración del interés por la misma, ya que no llegan a comprender cuál es el uso que le pueden dar a estos conocimientos para resolver problemas de nuestra realidad, es decir, cuál es su utilidad y por qué los docentes se empeñan en afirmar que es muy importante y obligatorio su estudio.

Por esta razón, hemos visto conveniente realizar este TFM con una unidad didáctica sobre el número de oro, ya que es un concepto matemático que no sólo nos llevará a estudiar conceptos puramente matemáticos, sino que nos brinda la oportunidad de relacionarlos con nuestro entorno a través de su interesante historia, del arte, de la cultura y de la visita y análisis de diferentes lugares de nuestro alrededor que llevan implícitos en su diseño la proporción áurea.

Para ello, desarrollaremos los contenidos con metodologías activas y participativas, como es la clase invertida *-flipped classroom-* con la que trataremos de conseguir que los estudiantes trabajen fuera del aula buscando y analizando información, usando algo que tienen al alcance de la mano, las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). De esta manera, el docente actuará de moderador y aclarador de dudas. Además, haremos uso del aprendizaje colaborativo, ya que es un método que beneficia al alumno de forma individual y aumenta su interés, sin contar que, a la misma vez, aprenden valores esenciales como el respeto, la tolerancia, la solidaridad o la responsabilidad con los demás miembros del grupo.

Como hemos dicho, la elección del tema del número de oro no es arbitraria. Se trata de un concepto que conecta con otros conceptos muy variados del mundo de las Matemáticas, además de con la realidad que nos rodea y con otras disciplinas como la arquitectura, el arte, la música, etc. Además, este tema proporciona importancia al aprendizaje de esta asignatura, ya que nos permite conocer la utilidad de estudiar un tema importante como es el de los números irracionales, normalmente difíciles de comprender, mediante la conexión de este número irracional con nuestra realidad.

Por último, hemos de destacar que una forma de aumentar el interés del estudiante y que este vea la asignatura como algo con lo que también se puede divertir, es mediante el viaje de visita a dos monumentos de nuestra provincia y otro de Marmolejo para comprobar la presencia del número de oro en sus diseños arquitectónicos. Lo que, irremediablemente, hará que aumente el interés del alumno por comprender lo que está viendo y analizando.

7.3. Contextualización del centro y del aula

El centro escolar al que se enfoca la presente unidad didáctica es el I.E.S Virgen de la Cabeza de Marmolejo (Jaén). Este instituto se inauguró en 1.961 como centro para la formación de agricultores. Su nombre original fue de "Granja Escuela" y se dedicó a impartir los cursos de Capataces Agrícolas. En el curso 1.973/74 con la Ley General de Educación se inician en este Centro los estudios de Formación Profesional Agraria de primer y segundo grado, en Explotaciones Agrarias. En el mismo curso se inicia la reducción de las enseñanzas de Capataces Agrícolas. Con la LOGSE, en 1.992-93 se inician las enseñanzas de formación profesional de Ciclos Formativos, Educación Secundaria y Bachillerato.

El centro se encuentra ubicado al final de la calle Calvario, en el límite del casco urbano, en la carretera hacia el famoso Balneario de Marmolejo. El centro se encuentra rodeado principalmente por tierras de cultivo y zonas verdes, con escasa presencia de viviendas. Como se trata del único instituto de la localidad, su alumnado es totalmente heterogéneo y de todos los niveles socioeconómicos, lo que favorece la enseñanza de valores como la igualdad, el respeto y la tolerancia.

Ilustración 46 Fachada y patio del I.E.S. Virgen de la Cabeza. Fuente: www.juntadeandalucia.es



La oferta educativa de este centro es ESO, Bachillerato y los siguientes Ciclos Formativos:

- Grado Medio: Producción Agropecuaria.
- Grado Medio: Aprovechamiento y Conservación del Medio Natural.
- Grado Superior: Paisajismo y Medio Rural.
- Grado Superior: Gestión Forestal y del Medio Natural.
- Formación Profesional Básica: 1º Actividades Agropecuarias. 2º Agrojardinería y Composiciones Florales.

La clase de 4º de ESO a la que se orienta esta unidad didáctica se compone de veinticinco estudiantes. Por su parte, el centro consta de una serie de herramientas que facilitarán el trabajo de ciertos contenidos y la realización de determinadas actividades, tales como:

- Sillas y mesas aptas para su desplazamiento en caso de realizar actividades en grupo.
- Pizarra electrónica y pizarra de tiza convencional.
- Sala de ordenadores y carritos con portátiles.

Por un lado, la sala de ordenadores del centro permitirá llevar a cabo actividades empleando ciertos softwares informáticos como el *GeoGebra*. Además, el hecho de que las sillas y mesas sean aptas para su desplazamiento permite realizar ciertas actividades dividiendo la clase en grupos. Cabe destacar que el espacio en la clase es algo reducido, lo que hace que los grupos no puedan ser muy extensos (cuatro personas a lo sumo).

Debe tenerse en cuenta que la unidad didáctica consta de varias actividades de tipo cooperativo, de forma que, para aplicarse a una determinada clase, ésta debe tener los suficientes alumnos para poder llevarse a cabo.

7.4. Objetivos

Los objetivos de la unidad didáctica se dividirán en tres partes: objetivos generales de etapa, objetivos del área de matemáticas y objetivos concretos de la unidad. A continuación, se desarrolla cada uno de ellos.

7.4.1. Objetivos de etapa

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato refleja en el Artículo 11 (CAPÍTULO II) los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria. Además, en el Decreto 182/2020, de 10 de noviembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se nombran más objetivos.

Estos objetivos generales de etapa que se persiguen con la presente unidad didáctica son los siguientes:

1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
5. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
7. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
8. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
9. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
10. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
11. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y

social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

12. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Además de los objetivos anteriores, la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

13. Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
14. Conocer y apreciar los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad, para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

7.4.2. Objetivos del área de matemáticas

La Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, establece los objetivos del área de esta asignatura.

De entre todos estos objetivos, con el desarrollo de la presente unidad didáctica se persiguen los siguientes:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor; utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u

otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, la salud, el consumo, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de nuestra sociedad y al conocimiento matemático acumulado por la humanidad, la aportación al crecimiento económico desde los principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social o la convivencia pacífica.

7.4.3. Objetivos de la unidad

Y, por último, desarrollamos los objetivos que se espera que los estudiantes alcancen una vez realizada esta unidad didáctica:

1. Aprender los conceptos matemáticos relacionados con el número de oro.
2. Investigar y conocer el alcance del número de oro mediante el estudio de su historia y de sus relaciones con el mundo exterior, como es en el arte, en la arquitectura, etc.
3. Enseñar edificaciones en pueblos de su alrededor, incluido el propio, cuyo diseño arquitectónico está basado en la proporción áurea.
4. Motivar al profesorado al estudio de nuevas metodologías y temáticas como el número áureo, para hacer más atractiva la asignatura de Matemáticas, relacionándolas con otras ciencias.
5. Introducir el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas.

7.5. Competencias clave

Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se entiende por competencia “las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos” (MECD, 2014, p. 4).

Según lo dispuesto en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se identifican siete competencias clave, las competencias del currículo serán las siguientes:

Tabla 10 Competencias clave. Fuente: Real Decreto 1105/2014

CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
CD	Competencia digital
SIEP	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencias sociales y cívicas
CEC	Competencia conciencia y expresiones culturales

Afortunadamente, con el desarrollo de esta unidad se trabajará con todas las competencias clave:

- *Competencia en comunicación lingüística* (CCL). Es el resultado de la acción comunicativa. Esta unidad puede contribuir al desarrollo de esta competencia mediante la realización de actividades por grupos, donde los alumnos tendrán que dialogar entre ellos para dar solución a la actividad propuesta y en la expresión crítica de los resultados obtenidos en las diferentes actividades propuestas.
- *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología* (CMCT). Implica la adquisición de un conjunto de destrezas que permitan la aplicación de las herramientas matemáticas en diversos contextos. La unidad contribuye al desarrollo de esta competencia mediante la deducción y demostración de las propiedades del número de oro y en la resolución de problemas.
- *Competencia digital* (CD). Implica, entre otras cosas, utilizar recursos tecnológicos para la comunicación y resolución de problemas y tener la curiosidad y la motivación por el aprendizaje y la mejora en el uso de las tecnologías. La unidad contribuye al desarrollo de esta competencia al llevar a cabo actividades con el software *GeoGebra*, como la construcción del rectángulo áureo y su superposición en elementos arquitectónicos de la provincia de Jaén y del propio Marmolejo.
- *Competencia de aprender a aprender* (CAA). Implica, entre un conjunto de aspectos, conocer los procesos implícitos en el aprendizaje. Esta competencia se desarrolla mediante la competencia digital, ya que el software *GeoGebra* proporciona a los alumnos cierta autonomía para aprender por ellos mismos, además del uso de la metodología de flipped classroom, ya que el alumno investiga y aprende de una manera casi autónoma.
- *Competencias sociales y cívicas* (CSC). Implica, entre diversos aspectos, los siguientes:
 - Conocer códigos de conducta aceptados en distintas sociedades, contextos y situaciones.
 - Tener la habilidad de comunicarse de una forma constructiva en diferentes contextos y mostrar tolerancia.
 - Mostrar solidaridad y tener interés por la resolución de problemas.
 - Tomar parte de forma constructiva en los quehaceres de un grupo de personas.
 - Dejar atrás los prejuicios y aceptar las diferencias.

- Tomar parte de la toma de decisiones.

La unidad didáctica contribuye al desarrollo de esta competencia mediante la realización de varias actividades por grupos en las que los estudiantes tendrán que comunicarse, mostrar solidaridad e interés, tomar parte en la actividad del grupo, aceptar las diferencias entre iguales, tomar decisiones, etc.

- *Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE)*. Implica, entre otros, los siguientes aspectos:

- Capacidad de resolución de problemas.
- Capacidad de comunicar, presentar y negociar.
- Tener iniciativa e interés, ya sea en la vida social como en la profesional.

En cuanto a la capacidad de resolución de problemas, este aspecto queda implícito en la implicación que tendrán que poner en marcha los alumnos del número de oro para conocer su relación con nuestro medio. Por su parte, la capacidad para comunicar, presentar y negociar y el hecho de tener iniciativa e interés son habilidades que se trabajan en la actividad en grupo.

- *Conciencia y expresiones culturales (CEC)*. Esta competencia implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos. Esta competencia se fomenta en nuestra unidad cuando:

- Realizamos el análisis de la presencia de oro en la arquitectura histórica de nuestro alrededor, analizando su contexto y sus valores patrimoniales.
- Explicamos el descubrimiento del número de oro y su evolución en la historia.
- Hacemos un recorrido por la historia del arte, el diseño, la arquitectura, la música que han seguido como patrón el número áureo.

7.6. Contenidos

Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se entiende por contenidos:

Conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en

función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado (MECD, 2014, p.4)

Los contenidos a desarrollar durante esta unidad didáctica sobre el número de oro corresponden principalmente al Bloque 2: *Números y Álgebra* del currículo de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas para 4º de ESO que constan en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre. Entre ellos, podemos elegir el primero:

- Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.

Además, esta unidad didáctica repasará otros contenidos específicos como:

- Números irracionales.
- Definición y propiedades del número de oro.
- Historia del número de oro.
- Representación del número de oro.
- Triángulo áureo, rectángulo áureo y espirales.
- El número de oro y su presencia en el arte, diseño y arquitectura.

7.7. Metodología

En esta unidad didáctica se van a combinar distintas metodologías con el objetivo principal de que el aprendizaje de los conceptos matemáticos que implican sea lo más interesante y ameno posible para los alumnos, y que sean afianzados con mayor éxito por los mismos.

La metodología más importante que vertebrará toda la unidad didáctica, será la clase invertida o *flipped classroom*, mediante la cual los estudiantes podrán aprender a su ritmo usando las TIC disponibles en casa (móvil, ordenador, plataformas de videos, programas gratuitos, etc.). Toda la información necesaria está subida en la clase digital o *classroom* de Google que se utiliza en el centro para el resto de las asignaturas.

Se velará porque la búsqueda de contenido en Internet se haga desde una visión crítica, con capacidad para poder filtrar la ingente cantidad de información disponible y entresacar la que nos interese. Con este desarrollamos el espíritu crítico de los estudiantes, que deben enfrentarse diariamente a una sociedad sobreinformada, en la que se ofrece demasiada información y no siempre es cierta. Además, es necesario implicar a docentes y padres o tutores de los estudiantes en fomentar una responsabilidad digital compartida, de tal manera que el uso de internet para la docencia sea siempre seguro y útil.

Por otro lado, trabajemos con el aprendizaje colaborativo, ya que es una forma de propiciar en los alumnos habilidades de participación y colectividad, tan necesarias en el mundo que nos rodea fuera de las aulas. De esta manera, los alumnos irán aprendiendo de una forma constructivista, ya que ellos mismos van adquiriendo y formándose su propio conocimiento en esta materia, bajo la tutorización y guía del profesor.

Además, tenemos que tener en cuenta la flexibilidad en la impartición de esta unidad didáctica, atendiendo a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado y a la diversidad del aula en cuanto a intereses, actitudes y aptitudes ante el aprendizaje de las matemáticas.

Y, por último, tenemos que centrarnos en un concepto docente de gran importancia, las actividades de tipo IBL (aprendizaje por investigación). Según Abril et al. (2014, p.24), la Unión Europea considera que el aprendizaje por investigación (IBL) es la mejor metodología a la hora de enseñar en el área de las ciencias y de las matemáticas. Esto se debe a que el IBL es una metodología que expone a los alumnos a situaciones de investigación abiertas y ricas, donde necesitarán recurrir a sus conocimientos previos, a una gran diversidad de procesos y donde se les concederá una autonomía y libertad de pensamiento mayores que en cualquier otra metodología.

Es por esto que en esta unidad didáctica vamos a plantear algunas actividades de tipo IBL para trabajarlas en grupo, lo que será beneficioso para ellos doblemente. Por un lado, pretendemos hacer más ameno y entretenido el aprendizaje de los conceptos matemáticos con este tipo de actividades, motivando al alumnado, y, por otro, lo hace de una manera activa, compartida y tolerante con el resto de miembros del grupo. Estas actividades hacen ver al alumno que no son conceptos matemáticos aislados, sino que están relacionados con el mundo que nos rodea y que se usan para resolver problemas cotidianos.

7.8. Actividades, recursos y temporalización

En este apartado recogemos todas las actividades y recursos propuestos en las diferentes sesiones en las que se desarrollará nuestra unidad didáctica. Estas actividades y recursos se han diseñado y planificado con el fin de que los alumnos aprendan los conceptos matemáticos concretos, adquieran las competencias reseñadas y los contenidos recogidos en apartados anteriores.

Por tanto, pasamos a explicar las sesiones en las que desarrollaremos nuestra unidad didáctica acerca del número de oro:

7.8.1. Sesión 1: Aprender a clasificar los números reales

Contenido

El contenido de esta sesión será la clasificación de los números reales, en sus diferentes categorías, a saber: números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Objetivo

El objetivo principal que se pretende conseguir con el desarrollo de esta sesión, es que los estudiantes sepan discernir a qué grupo pertenece cada número y aprendan las diferencias entre número racional e irracional, ya que nuestro número de oro es un número irracional.

Duración

Esta sesión se desarrollará en dos partes, la primera se hará con trabajo autónomo del alumno en su casa, con una duración de 35 minutos, y la segunda se hará con trabajo en clase, que tendrá una duración de 45 minutos.

Competencias Clave

En esta sesión, como vamos a desarrollar actividades en grupo, desarrollaremos las siguientes competencias clave: CMCT, CCL, CSC.

Recursos

Para esta sesión, necesitaremos tener un dispositivo con acceso a internet desde casa para poder realizar el cuestionario de diagnóstico y visualizar un video de la plataforma de Youtube, papel, bolígrafo y pizarra.

Evaluación

La evaluación de esta sesión se realizará mediante una rúbrica (Tabla 13. Rúbrica de evaluación de la sesión 1) y tendrá como valoración 20% del total de la nota.

Actividades

En esta sesión, habrá que realizar actividades en casa y durante la clase:

ACTIVIDADES EN CASA (Tiempo 35 minutos):

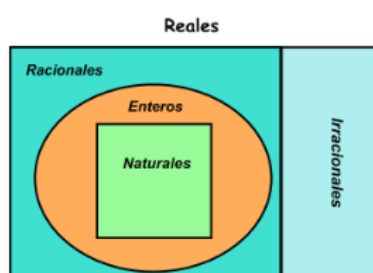
- **Actividad 1** (Tiempo 15 minutos): El alumno deberá responder, individualmente, a un cuestionario de evaluación (formulario de Google) para saber su grado de conocimiento previo acerca de la clasificación de los números reales (ANEXO 1). El enlace del formulario es <https://forms.gle/F4Lq3YNkevZSovrf8>

- **Actividad 2** (Tiempo 20 minutos): Los alumnos deberán visualizar en casa un video de la plataforma virtual Youtube de Eduardo Sáenz de Cabezón titulado “¿Qué son realmente los números reales?” (Derivando, 2018) y responder a las siguientes preguntas, cuyas respuestas llevarán escritas a clase:
 - ¿Qué son los números enteros?
 - ¿Qué son los números racionales?
 - ¿Qué son los números irracionales?

ACTIVIDADES EN CLASE (Tiempo 45 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 10 minutos): Creación de grupos estables de 4 alumnos durante toda la unidad didáctica. El profesor repartirá a los alumnos un papel con un número del 1 al 9. Entonces, preguntará a un alumno que diga un número de cuatro cifras, por ejemplo, el 8125, y se juntarán en un grupo aquellos cuatro alumnos que tengan los números 8, 1, 2 y 5. Si alguno lo tiene repetido, se quedará el de menor edad. Así, los grupos serán aleatorios y heterogéneos.
- **Actividad 2** (Tiempo 15 minutos): Resolver en clase las preguntas planteadas en casa sobre la visualización del video de Eduardo Sáenz de Cabezón y dudas que a los alumnos les haya surgido acerca de la clasificación de los números. Para ello, dibujaremos en la pizarra el siguiente esquema (Ilust. 47), y lo explicaremos someramente para afianzar los conocimientos adquiridos.

Ilustración 47 Clasificación de los números reales.
Recuperado de [TEST DE OPOSICIONES ONLINE: Clasificación De Los Números](https://test-de-oposiciones-online.com/2018/05/01/Clasificación-De-Los-Números/) (test-gratis-oposiciones.blogspot.com)



- **Actividad 3** (Tiempo 20 minutos): Consistirá en una actividad de dinámica de grupos con el fin de afianzar el aprendizaje de la clasificación de los números reales en forma de juego. Este comenzará con la pregunta que el profesor formulará a todos los grupos: ¿-2 a qué subconjunto de los números reales pertenece? El primer grupo que levante la mano y conteste acertadamente (a los enteros), será el siguiente en formular la pregunta que ellos quieran elegir al resto de grupos. Si no acierta ningún grupo, el punto será para ellos. Si otro grupo

acierta, este se llevará el punto y formulará la nueva pregunta y así sucesivamente. El grupo ganador será el que más puntos obtenga. El truco de este juego está en buscar números que puedan llevar a confusión o que su clasificación sea difícil, así, los alumnos no solo tienen que pensar en la respuesta correcta y clasificar los números que se propongan, sino también en buscar los más difíciles, hablando, discutiendo y poniéndose de acuerdo con el resto de compañeros del grupo.

7.8.2. Sesión 2: “Historia y aplicaciones del número de oro”

Contenido

El contenido de esta sesión será la fundamentación histórica y epistemológica del número de oro y la sucesión de Fibonacci y su relación con otras disciplinas, como el arte, arquitectura, música, biología, etc.

Objetivo

El objetivo principal que se pretende conseguir con el desarrollo de esta sesión, es que los estudiantes conozcan la historia del número de oro, su expresión analítica y su presencia en la naturaleza, arte, arquitectura, etc. a lo largo de los siglos.

Duración

Esta sesión se desarrollará en dos partes, la primera se hará con trabajo autónomo del alumno en su casa, con una duración de 20 minutos, y la segunda se hará con trabajo en clase, que tendrá una duración de 45 minutos.

Competencias Clave

En esta sesión, como vamos a desarrollar actividades en grupo, desarrollaremos las siguientes competencias clave: CMCT, CCL, CSC, CD y CEC.

Recursos

Para esta sesión, necesitaremos tener un dispositivo con acceso a internet desde casa para poder visualizar un vídeo de la plataforma Youtube, los móviles personales con conexión a internet (wifi del aula), un billete de 5€, el DNI, regla, calculadora, papel, bolígrafo y pizarra.

Evaluación

La evaluación de esta sesión se realizará mediante un cuestionario online que deberán rellenar los estudiantes (anexo 2) y tiene como valoración el 20% de la nota total.

Actividades

En esta sesión, habrá que realizar actividades en casa y durante la clase:

ACTIVIDADES EN CASA (Tiempo 20 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 15 minutos): El alumno deberá visualizar un video de Youtube titulado “¿Es divina la Sección Áurea?” (Curiosamente, 2017) cuyo enlace es el siguiente [¿Es divina la Sección Áurea? Phi - CuriosaMente 70 - YouTube](#) y que habla sobre la historia del número de oro y su aparición en la naturaleza y arquitectura. Una vez acabado, el alumno deberá responder a las siguientes preguntas para discutir las en clase al día siguiente:
 - Según Luca Paccioli, ¿por qué el número de oro es el número divino?
 - ¿Dónde podemos encontrar el número de oro en la naturaleza?
 - Partiendo del 0, escribe los siguientes 20 términos de la sucesión de Fibonacci y explica cómo se obtienen.
- **Actividad 2** (Tiempo 5 minutos): Los alumnos deberán traer a la sesión de clase un billete de 5 €, el DNI y una regla de medir.

ACTIVIDADES EN CLASE (Tiempo 45 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 15 minutos): Resolver en clase las preguntas planteadas del día anterior. El profesor explicará en la pizarra cuál es la expresión analítica del número de oro y sus principales propiedades.
- **Actividad 2** (Tiempo 10 minutos): Los alumnos deberán sacar el billete de 5€ y medir con la regla sus dimensiones para contestar a estas preguntas:
 - ¿Cuál es la razón entre el largo y el ancho?
 - ¿Las dimensiones del billete de 5€ están en proporción áurea?
 - Si doblamos el billete por su lado menor, el rectángulo que nos queda, ¿también guarda las proporciones áureas?
- **Actividad 3** (Tiempo 5 minutos): Los alumnos deberán sacar su DNI y medir el ancho y el largo y contestar a la siguiente pregunta: ¿nuestro DNI también guarda aproximadamente la proporción áurea?
- **Actividad 4** (Tiempo 10 minutos) Los alumnos deberán realizar el siguiente ejercicio.

Resuelve la ecuación $x^2 = x + 1$. ¿Cuál es su valor positivo y su expresión numérica?

- **Actividad 5** (Tiempo 5 minutos): Los alumnos deberán responder, desde sus teléfonos móviles, el formulario de Google que servirá de evaluación de esta sesión en el siguiente enlace: <https://forms.gle/9pVStnG47Nb3EsUY8> (Anexo 2).

7.8.3. Sesión 3: “Dibujando la proporción áurea”

Contenido

El contenido de esta sesión será la fundamentación histórica y epistemológica del número de oro, su presencia en arquitectura y obras de arte. La construcción gráfica del rectángulo áureo y de la espiral de Durero.

Objetivo

El objetivo principal que se pretende conseguir con el desarrollo de esta sesión, es que los estudiantes conozcan la relación del número de oro con nuestro mundo exterior, a través de su presencia en arquitectura y obras de arte, y sepan construir un rectángulo áureo y la espiral de Durero utilizando programas de dibujo virtuales y libres.

Duración

Esta sesión se desarrollará en dos partes, la primera se hará con trabajo autónomo del alumno en su casa, con una duración de 20 minutos, y la segunda se hará con trabajo en clase, que tendrá una duración de 45 minutos.

Competencias Clave

En esta sesión, como vamos a desarrollar actividades en grupo, desarrollaremos las siguientes competencias clave: CMCT, CD y CEC.

Recursos

Para esta sesión, necesitaremos tener un dispositivo con acceso a internet desde casa para poder buscar los datos pedidos, y un ordenador de clase para cada alumno conectado a internet.

Evaluación

La evaluación de esta sesión se realizará mediante el análisis de la resolución de ejercicios enviados al correo electrónico del profesor y tiene como valoración el 20% de la nota total.

Actividades

En esta sesión, se realizarán actividades tanto en casa como en el aula:

ACTIVIDADES EN CASA (Tiempo 20 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 20 minutos): Los alumnos deberán resolver a las siguientes cuestiones:
 - Buscar dos edificios cuyos diseños estén relacionados con el número de oro y relacionar sus arquitectos, año de construcción y partes en los que está presente el número de oro.
 - Buscar dos obras de arte (pinturas y esculturas) en las que esté presente el número de oro, y relacionar sus autores y año de creación.

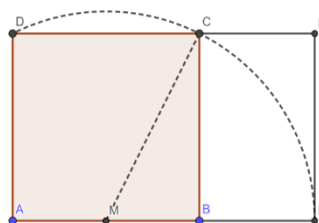
ACTIVIDADES EN CLASE (Tiempo 45 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 15 minutos): En la sala de ordenadores, los alumnos utilizarán el programa abierto y gratuito Geogebra a través de la página web [GeoGebra Clásico](https://www.geogebra.org/m). Una vez abierto, los alumnos deberán resolver el siguiente problema:

Vamos a construir un rectángulo áureo a partir de un cuadrado. Para conseguirlo, sigue los siguientes pasos con el programa Geogebra:

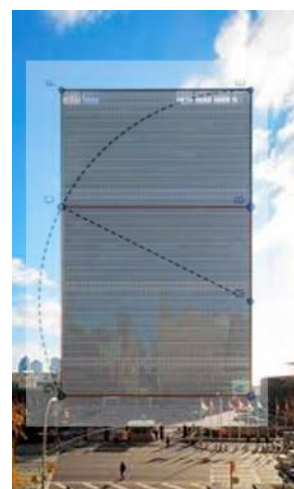
- a) Dibuja un cuadrado ABCD (en el sentido contrario a las agujas del reloj) de lado AB.
- b) Halla el punto medio de AB y denótalo como M.
- c) Con centro en el punto M, dibuja un arco de circunferencia de radio MC y halla el punto E en la intersección de esta circunferencia con la prolongación del lado AB.
- d) Levanta en E una perpendicular a AB y busca el punto de corte con la prolongación del lado DC para obtener el punto F.
- e) Traza el rectángulo AEFD y comprueba que es un rectángulo áureo.
- f) Envía el dibujo al correo del profesor.

Ilustración 48 Construcción del rectángulo áureo. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



- **Actividad 2** (Tiempo 15 minutos): Los alumnos deberán buscar en internet una imagen de la fachada del Partenón de Atenas y otra del edificio de las Naciones Unidas de New York, con la única condición de que sean fotos de frente de ambas fachadas. Los alumnos abrirán las dos fotos en el Geogebra y superpondrán el rectángulo áureo, creado por ellos mismos, en las fachadas de ambos edificios singulares para comprobar que efectivamente guardan las proporciones áureas. Después deberán enviar los resultados al correo del profesor.

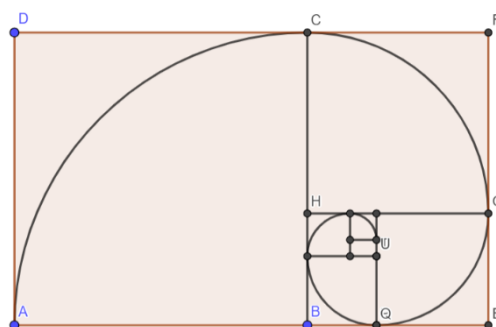
Ilustración 49 El Partenón de Atenas y el edificio de Naciones Unidas de Nueva York y el rectángulo áureo. Fuente: Elaboración propia.



- **Actividad 3** (Tiempo 15 minutos): Con el rectángulo áureo en pantalla, los alumnos deberán construir la espiral de Durero, resolviendo la siguiente actividad:
Dibuja la espiral de Durero. A partir del rectángulo áureo AEFD dibujado, sigue los siguientes pasos:
 - a) Con centro en B y radio BA, traza el arco de circunferencia con puntos A y C.
 - b) En el rectángulo áureo más pequeño BEFC, dibuja un cuadrado CFGH de lado CF, el lado menor del rectángulo.
 - c) Con centro en H, dibuja un arco de circunferencia con puntos C y G.
 - d) Repite las operaciones de los apartados a, b y c hasta cuatro veces más.

e) Manda la espiral resultante al correo del profesor.

Ilustración 50 Espiral de Durero. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



7.8.4. Sesión 4: “Buscando el número de oro en monumentos de Jaén”

Contenido

El contenido de esta sesión será el número de oro y su presencia en la arquitectura de tres monumentos de la provincia de Jaén: La Capilla del Salvador y la Portada de la Iglesia de San Nicolás de Bari de Úbeda y la Fuente Nueva en Martos.

Objetivo

El objetivo principal que se pretende conseguir con el desarrollo de esta sesión, es que los estudiantes comprueben que el número de oro está presente en nuestro alrededor, concretamente, en monumentos de nuestra provincia. Esta sesión es importante para que los alumnos comprueben la conexión de las matemáticas con nuestra realidad.

Duración

Esta sesión se desarrollará en dos partes, la primera se hará con trabajo autónomo del alumno en su casa, con una duración de 25 minutos, y la segunda se hará con una visita a tres monumentos de las ciudades de Úbeda y Martos, en la provincia de Jaén, con una duración total de 5 horas.

Competencias Clave

En esta sesión, como vamos a desarrollar actividades en grupo, desarrollaremos las siguientes competencias clave: CMCT, CCL, CD, CSC y CEC.

Recursos

Para esta sesión, necesitaremos material de medición como medidor láser, cámaras fotográficas, móviles y recursos humanos como el guía turístico.

Evaluación

La evaluación de esta sesión se realizará mediante el análisis de la ficha entregada por grupos (ANEXO 4) y que será aplicada en la siguiente sesión, con un total del 10% de la calificación total.

Actividades

En esta sesión, se realizarán actividades tanto en casa como en los lugares a visitar:

ACTIVIDADES EN CASA (Tiempo 25 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 20 minutos): Los alumnos deberán visualizar el siguiente video en sus casas <https://www.youtube.com/watch?v=Kfo2S4kKYik> (Rincón, 2015) en el que se describe la Sacra Capilla del Salvador de Úbeda y escribir dos preguntas para realizar al profesor.
- **Actividad 2** (Tiempo 5 minutos): Los alumnos deberán solicitar la autorización de los padres o tutores para poder realizar la visita y el viaje fuera del centro.

ACTIVIDADES EN CLASE (Tiempo 5 horas):

- **Actividad 1** (Tiempo 10 minutos): El profesor explicará, antes de la salida, los lugares que van a visitar y los objetivos del viaje. Además, recordará las normas de comportamiento de los alumnos durante el viaje y repartirá una ficha con recomendaciones y puntos a considerar durante la visita (anexo 3).
- **Actividad 2** (Tiempo 60 minutos): Traslado en autobús desde el I.E.S. Virgen de la Cabeza de Marmolejo hasta la plaza del Salvador de Úbeda.
- **Actividad 3** (Tiempo 60 minutos): Una vez que los estudiantes llegan a la Plaza del Salvador de Úbeda, se realizan las siguientes actividades:
 - Los estudiantes se agrupan por grupos formados en la sesión 1.
 - El guía turístico, previamente contratado, empieza la visita.
 - Los estudiantes deben tomar apuntes para realizar las actividades que se recogen en la ficha de trabajo.
 - Los estudiantes deben fotografiar las partes del monumento donde creen que está presente el número de oro.

- **Actividad 4** (Tiempo 60 minutos): Traslado en autobús desde la ciudad de Úbeda hasta la Fuente Nueva de la ciudad de Martos.
- **Actividad 5** (Tiempo 30 minutos): Visitar el monumento de la Fuente Nueva de Martos. Los alumnos deberán realizar las mediciones y fotografías necesarias de la Fuente y comprobar que guarda la proporción áurea, posteriormente deberán rellenar la ficha.
- **Actividad 6** (Tiempo 30 minutos): Tiempo libre para relajación y convivencia con los compañeros.
- **Actividad 7** (Tiempo 60 minutos): Retorno en autobús desde Martos hasta el IES Virgen de la Cabeza de Marmolejo.

7.8.5. Sesión 5: “Sacando conclusiones de la visita”

Contenido

El contenido de esta sesión será el número de oro y su presencia en la arquitectura de tres monumentos de la provincia de Jaén: La Capilla del Salvador y la Portada de la Iglesia de San Nicolás de Bari de Úbeda y la Fuente Nueva en Martos. Trazado del rectángulo áureo en arquitectura. Composición de trabajos para exposición.

Objetivo

Que los alumnos certifiquen la presencia del número de oro en monumentos de nuestra provincia. Que sepan extraer conclusiones sobre las observaciones realizadas y que trabajen de manera colaborativa mediante actividades grupales para mejorar las habilidades sociales.

Duración

Esta sesión se desarrollará en dos partes, la primera se hará con preparación de material en casa, con una duración de 15 minutos, y la segunda se hará con trabajo en clase con una duración de 45 minutos.

Competencias Clave

En esta sesión, como vamos a desarrollar actividades en grupo, desarrollaremos las siguientes competencias clave: CMCT, CCL, CSC y CEC.

Recursos

Para esta sesión, necesitaremos fotografías de las fachadas de los monumentos realizadas por los alumnos, cartulina, material de dibujo como reglas y compás, bolígrafo.

Evaluación

La evaluación de esta sesión se realizará mediante una rúbrica de calificación (Tabla 14. Rúbrica de evaluación de la sesión 5) que puntuará con el 20% de la unidad.

Actividades

En esta sesión, se realizarán actividades tanto en casa como en clase:

ACTIVIDADES EN CASA (Tiempo 15 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 15 minutos): Los alumnos, por grupos, deberán traer las fotografías impresas de las partes de los monumentos donde aparecen el número de oro y una cartulina.

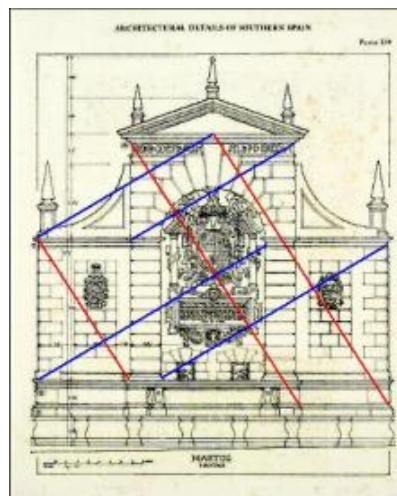
ACTIVIDADES EN CLASE (Tiempo 45 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 5 minutos): Por grupos, los alumnos pondrán en una cartulina los aspectos positivos y negativos de la visita a los monumentos y rellenarán la ficha de autoevaluación (anexo 4).
- **Actividad 2** (Tiempo 15 minutos): Por grupos, los alumnos pegarán en la cartulina la mejor fotografía de la parte de los monumentos donde aparezcan el número de oro, y trazar sobre ellas las proporciones áureas para comprobar que las cumplen, por ejemplo, puede hacerse mediante rectángulos áureos. Para ello, utilizarán las mediciones realizadas el día anterior y las fotografías.

Ilustración 52 Portada Principal Sacra
Capilla de El Salvador de Úbeda.
Fuente: La proporción áurea en
Andalucía. Juan Morales Larrubia.



Ilustración 51 Fuente Nueva de Martos.
Fuente: Mark y Gibson (1986).



- **Actividad 3** (Tiempo 25 minutos): Los alumnos deberán exponer los trabajos realizados, cada grupo dispondrá de 5 minutos.

7.8.6. Sesión 6: “El número de oro en Marmolejo”

Contenido

El contenido de esta sesión será el número de oro y su presencia en uno de los monumentos más importantes de Marmolejo y muy conocido por todos los estudiantes: el Puente de San Bartolomé del Balneario de Marmolejo.

Objetivo

Que los alumnos certifiquen la presencia del número de oro en su entorno más inmediato, en un monumento que siempre habían visto pero que hasta ahora no sabían que tenía relación con el número de oro.

Duración

Esta sesión se desarrollará en dos partes, la primera se hará con una visita de forma individual o en grupos, fuera del horario de clase, al Balneario de Marmolejo con una duración total de 35 minutos, y la segunda se hará con trabajo en clase con una duración de 45 minutos.

Competencias Clave

En esta sesión, como vamos a desarrollar actividades en grupo, desarrollaremos las siguientes competencias clave: CMCT, CD, CCL, CSC y CEC.

Recursos

Para esta sesión, necesitaremos móvil con cámara de fotos, tableta y ordenadores de la sala de ordenadores del IES.

Evaluación

Al finalizar, se evaluará el trabajo de *Geogebra*. Nota de un 10% sobre el total de la unidad.

Actividades

En esta sesión, se realizarán actividades tanto en casa como en clase:

ACTIVIDADES EN CASA (Tiempo 35 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 30 minutos): Los alumnos deberán visitar el Balneario de Marmolejo para hacer una fotografía del arco principal del Puente Renacentista de San Bartolomé.

*Ilustración 53 Puente Renacentista de Marmolejo.
Fuente: Ayuntamiento de Marmolejo*



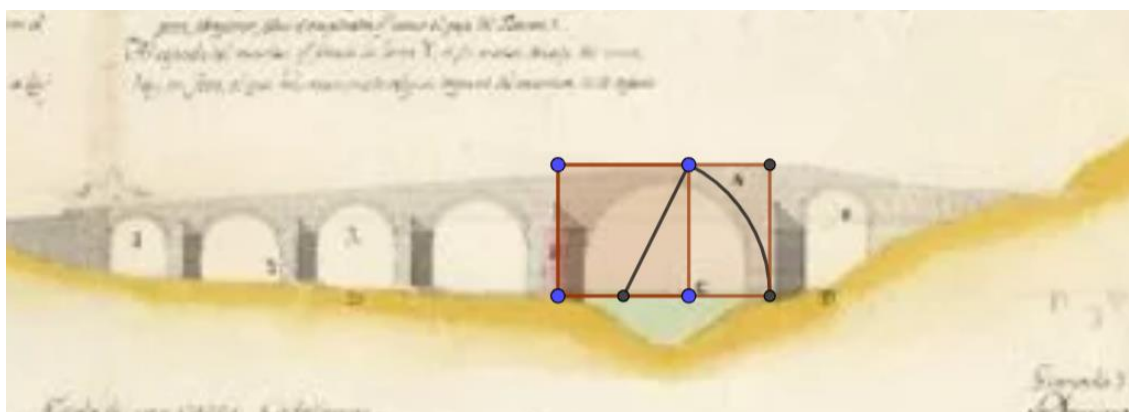
- **Actividad 2** (Tiempo 5 minutos): Los alumnos tendrán que pasar la fotografía realizada a un USB para poder usarla al día siguiente en el Instituto.

ACTIVIDADES EN CLASE (Tiempo 45 minutos):

- **Actividad 1** (Tiempo 10 minutos): El profesor de historia del Instituto explicará a los alumnos la historia del Puente Renacentista de San Bartolomé, construido en el s. XVI.

- **Actividad 2** (Tiempo 15 minutos): En la clase de ordenadores, los alumnos tendrán que abrir el programa Geogebra, y realizar las siguientes actividades:
 - Construye un rectángulo áureo según la forma que vimos en la sesión 3.
 - Abre la fotografía del puente de San Bartolomé.
 - Superpone el rectángulo áureo en el arco principal del puente y dimensionalo.
 - Contesta a las siguientes preguntas: ¿Cumple la proporción áurea? ¿Tiene sentido que el arquitecto la tomara en cuenta? ¿Por qué?
 - Sube la imagen a la plataforma *Classroom*.

Ilustración 54 Plano del puente de San Bartolomé de Marmolejo y el rectángulo áureo. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.



- **Actividad 3** (Tiempo 15 minutos): Un representante de cada grupo deberá exponer y explicar sus conclusiones.
- **Actividad 4** (Tiempo 5 minutos) Los alumnos deberán responder al cuestionario final de la unidad didáctica, con el fin de saber los resultados finales y conocer los aspectos que hay que reforzar y los que hay que mejorar, en el siguiente enlace <https://forms.gle/Vb9fzSgFCoLnx8E49> (anexo 5).

7.8.7. Recursos utilizados en todas las sesiones

Aunque se ha descrito en cada sesión, definimos los recursos utilizados:

- **Humanos:**
 - Docente.
 - Estudiantes.
 - Guía turístico.

- **Materiales:**

- Materiales de medición: fluxómetro, cinta métrica, medidor láser.
- Calculadora.
- Material de papelería.
- Fotografías.
- Cartulina.
- Billeto de 5 €.
- DNI.
- Regla, escuadra y cartabón.

- **Tecnológicos:**

- Sala de Ordenadores.
- Internet.
- Aplicación gratuita de *Geogebra*.
- Videos de YouTube.
- Cámara digital o cámara del móvil.
- Móvil.

7.8.8. Temporalización

Esta unidad didáctica sobre el número de oro está distribuida en seis sesiones, con una duración total de 45 minutos en clase y variable en casa, y una sesión de cinco horas. Cada sesión comprende actividades interesantes para los alumnos, con visitas a tres monumentos históricos de la provincia de Jaén que guardan relación con el número de oro, y también a un monumento del pueblo de Marmolejo, además de juegos que contribuyan al aumento del interés del alumnado, metodologías como la clase invertida, el aprendizaje colaborativo y el uso de las TIC. En la siguiente tabla (Tabla 11), se recogen las sesiones y su temporalización.

Tabla 11 Temporalización de la unidad didáctica. Fuente: Elaboración propia.

SEMANAS	SEMANA 1								SEMANA 2			
SESIONES	1		2		3		4		5		6	
	Casa	Aula	Casa	Aula	Casa	Aula	Casa	Aula	Casa	Aula	Casa	Aula
1. Aprender a clasificar los números reales	35 min.											
		45 min.										
2. Historia y aplicaciones del número de oro			20 min.									
				45 min.								
3. Dibujando la proporción áurea					20 min.							
						45 min.						
4. Buscando el número de oro en monumentos de Jaén							25 min.					
								5 horas				
5. Sacando conclusiones de la visita									15 min.			
										45 min.		
6. El número de oro en Marmolejo											35 min.	
												45 min.

7.9. Atención a la diversidad

Para el ámbito en el que nos encontramos, podemos entender la atención a la diversidad como aquellas acciones o actividades que pretenden prevenir y dar una respuesta a las necesidades de todos los alumnos del centro y, especialmente, a aquellos que requieren acciones específicas debido a factores personales o sociales que le han conllevado una desventaja sociocultural, de altas capacidades, con dificultades de comunicación, discapacidades físicas, psíquicas o sensoriales, con problemas de conducta o del desarrollo.

Hay que trabajar bajo una premisa: que el alumnado no es uniforme, más bien, cada alumno es distinto, con diferentes ritmos de aprendizaje e, incluso, tal y como defiende la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner (EE.UU., 1943), las personas poseemos diferentes tipos de inteligencias, que las desarrollamos de diferente manera. Por eso encontramos una diversidad infinita entre los estudiantes.

De las ocho inteligencias de Gardner (lingüística, lógico-matemática, espacial, musical, corporal, intrapersonal, interpersonal y naturalista), tenemos que destacar para la confección de esta unidad didáctica las inteligencias lógico-matemáticas, la intrapersonal y la interpersonal.

La inteligencia lógico-matemática nos permite resolver problemas de diferentes maneras, así como la inteligencia emocional, en la que están enmarcadas la inteligencia intrapersonal e interpersonal. Estos dos tipos de inteligencias podemos encontrarlas a la hora de resolver las diferentes encuestas de esta unidad y en el trato con los demás compañeros y compañeras. Así, la inteligencia intrapersonal, es aquella que nos da la capacidad de tener conciencia propia para valorar nuestras acciones y lo que perciben nuestros sentidos del mundo que nos rodea, y la inteligencia interpersonal es aquella que nos da la capacidad para relacionarnos con los demás y comprender y tolerar a los otros.

7.9.1. Alumnado con dificultades respecto al progreso esperado o disfuncionalidades físicas

Las metodologías puestas en marcha en esta unidad didáctica, como el trabajo colaborativo y la clase invertida, proporcionan al alumnado grandes posibilidades de encontrar su lugar y de adaptación para cada actividad propuesta, en función de sus capacidades. El trabajo en equipo permite al alumno realizar la función dentro del grupo que mejor se adapte a sus capacidades y habilidades.

A la misma vez, en estos grupos aleatorios se mezclan los alumnos que sobresalen sobre los demás, que tienen un mayor ritmo de aprendizaje, junto con los que presentan alguna leve dificultad de aprendizaje. Con esto se consigue un equilibrio, ya que estos últimos alumnos se apoyarán en los más aventajados y el aprendizaje será solidario, rico y creativo.

También, hay que tener en cuenta otros aspectos como los siguientes:

- **Actividad con GeoGebra.** En el caso que, por la situación particular del alumno con necesidades especiales, no pudiera seguir las clases de las sesiones 3 y 6 mediante el uso de *GeoGebra*, el docente podría presentarle una plantilla del rectángulo áureo para que pueda superponerla a las fotografías de los monumentos o la del puente de San Bartolomé. El objetivo sería simplemente que el estudiante comprenda que el arco principal del Puente de San Bartolomé, guarda las proporciones áureas. Una vez conseguido esto, si el alumno se animase a reproducir esta composición en *Geogebra*, aunque no fuera al mismo ritmo que el resto de sus compañeros, el resultado de la sesión sería aún más positivo.
- **Excursiones a los monumentos.** Si entre el alumnado hubiese alguno con disfuncionalidad de movimiento, visión o audio, tendríamos que conseguir que el autobús que realizara el desplazamiento de los alumnos estuviese adaptado para personas con movilidad reducida (que en la actualidad es normativa de obligado cumplimiento). En cuanto a las visitas en la ciudad de Úbeda y Martos, los lugares son totalmente accesibles y los guías turísticos están preparados con material para personas ciegas o sordas.

7.9.2. Alumnado con altas capacidades

Para los alumnos que muestren altas capacidades, ofreceremos material extra y recomendaremos libros y portales de internet donde puedan ampliar los conocimientos de esta unidad didáctica. Podemos pedir a estos alumnos que nos entreguen un trabajo, de forma individual, con demostraciones o contenidos de mayor dificultad, como demostrar las propiedades algebraicas del número de oro. Por ejemplo:

Ejercicio 1.- Demuestra que Phi es el único número real positivo que cumple que su cuadrado es el doble de su valor. Es decir:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Ejercicio 2.- Demuestra que el inverso de Phi es su valor menos la unidad. Es decir:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

7.10. Evaluación

7.10.1. Evaluación del estudiante

Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se define criterios de evaluación como:

El referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura (MECD, 2014, p. 4).

Y, también, se define estándares de aprendizaje evaluables como:

Especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables (MECD, 2014, p. 4).

Para el presente trabajo los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables que hemos considerado corresponden al *Bloque 2. Números y Álgebra* de la normativa española vigente que constan en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y son:

Tabla 12 Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del Bloque 2 Números y Álgebra de la asignatura de matemáticas enseñanzas académicas de 4º de ESO. Fuente: RD 1105/2014. Elaboración propia.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1. Conocer los distintos tipos de números e interpretar el significado de algunas de sus propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc.	1.1. Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales y reales), indicando el criterio seguido, y los utiliza para representar e

	interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.2. Aplica propiedades características de los números al utilizarlos en contextos de resolución de problemas.
2. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.	2.1. Opera con eficacia empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, y utilizando la notación más adecuada. 2.2. Realiza estimaciones correctamente y juzga si los resultados obtenidos son razonables.
3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.	3.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.

La evaluación de esta unidad didáctica se realiza de forma continua durante su desarrollo. Antes de iniciar la unidad, los alumnos realizan un cuestionario con el fin de conocer el estado de los conocimientos previos sobre el tema a tratar (anexo 1). Después, a lo largo de la unidad, realizamos evaluaciones formativas en la clase, lo que nos permitirá saber el grado de afianzamiento de los conocimientos por parte de los alumnos. La evaluación se hará de una forma sumativa al final de cada unidad, de la siguiente forma:

- Cuestionario de diagnóstico: anexo 1, no computa para nota.
- Sesión 1: mediante una rúbrica (Tabla 13) con un 20% de la nota total.
- Sesión 2: mediante un cuestionario (anexo 2) con un 20% de la nota total.
- Sesión 3: mediante la evaluación de los ejercicios enviados con un 20% de la nota total.
- Sesión 4: mediante una rúbrica de autoevaluación (anexo 4) con un 10% de la nota total.
- Sesión 5: mediante una rúbrica (tabla 14) con un 20% de la nota total.
- Sesión 6: mediante el envío de las actividades con un 10% de la nota total.

La forma de realizar las evaluaciones de las sesiones 1 y 5, será a través de rúbricas que nos proporcionarán información de cómo se está integrando el alumno en el grupo, sus dificultades y si ha integrado a aquellos compañeros con dificultades en el aprendizaje.

Estas rúbricas han sido confeccionadas de acuerdo a los siguientes criterios de evaluación:

- 1 punto: los objetivos no se cumplen.
- 2 puntos: el alumno realiza algunas de las actividades planteadas.
- 3 puntos: el alumno o grupo cumple con los objetivos planteados

A continuación, detallamos cada rúbrica.

Tabla 13 Rúbrica de evaluación de la sesión 1. Fuente: Elaboración propia.

ASPECTOS A VALORAR	1 PUNTO	2 PUNTOS	3 PUNTOS
Trabajo grupal	Trabaja de manera poco colaborativa, realiza las actividades propuestas de forma aislada	Trabaja de manera colaborativa, realiza algunas actividades propuestas con precisión	Trabaja de manera colaborativa, realiza todas las actividades propuestas con precisión
Clasificar los diferentes números reales	El grupo de trabajo no reconoce los números reales y no propone números para los demás grupos	El grupo de trabajo reconoce los números reales y propone números fáciles para los demás grupos	El grupo de trabajo reconoce los números reales, propone números para los demás grupos y cumple objetivos
Relación con otros grupos	Los estudiantes no responden a los criterios de dificultad y fluidez del juego	Los estudiantes responden a los criterios de dificultad, no hay fluidez en el juego	Los estudiantes responden a los criterios de dificultad y proporcionan fluidez al juego

Tabla 14 Rúbrica de evaluación de la sesión 5. Fuente: Elaboración propia.

ASPECTOS A EVALUAR	1 PUNTO	2 PUNTOS	3 PUNTOS
Trabajo grupal	Trabaja de manera poco colaborativa, realiza las actividades propuestas de forma aislada	Trabaja de manera colaborativa, realiza algunas actividades propuestas con precisión	Trabaja de manera colaborativa, realiza todas las actividades propuestas con precisión
Recolección de información	El grupo de trabajo dispone de cierta información solicitada de manera superficial	El grupo de trabajo dispone de cierta información solicitada en la ficha de trabajo con responsabilidad y precisión	El grupo de trabajo dispone de toda la información solicitada en la ficha de trabajo con responsabilidad y precisión
Identificar si los monumentos visitados cumplen con la proporción áurea	El estudiante realiza ciertas mediciones en los monumentos visitados, por lo que no puede comprobar la proporción áurea	El estudiante realiza las mediciones correctas en los monumentos visitados, y comprueba la proporción áurea, pero no las relaciona con la perfección	El estudiante realiza las mediciones correctas en los monumentos visitados, y comprueba la proporción áurea, las relaciona con la perfección
Exposición del trabajo grupal	Los estudiantes exponen su trabajo con fluidez	Los estudiantes exponen su trabajo con fluidez y coherencia. No existe relación con la ejemplificación	Los estudiantes exponen su trabajo con fluidez, coherencia y cohesión con la ejemplificación

7.10.2. Evaluación de la propuesta

Con el fin de mejorar nuestra unidad didáctica de cara al futuro, los estudiantes rellenarán un cuestionario online (anexo 5) con el fin de comprobar si han adquirido los conocimientos básicos y si la unidad didáctica ha servido para aumentar su interés por la asignatura de matemáticas, además de darles la oportunidad para que expresen cuál ha sido la actividad que más le ha gustado y la que menos.

Además, los alumnos podrán valorar al docente en una rúbrica (anexo 6), donde van a valorar la fluidez de las explicaciones del profesor, la conveniencia de las diferentes metodologías puestas en marcha, así como las herramientas utilizadas para su

desarrollo. Además, también podrán evaluar las actividades en tanto en cuanto sirven para comprender los conceptos de la unidad y si generan interés y aumentan la motivación de los estudiantes.

También, el profesor realizará una autoevaluación para determinar su opinión acerca de la implementación de la unidad didáctica (anexo 7).

8. Conclusiones

Los objetivos principales de este TFM han sido implementar una unidad didáctica en torno al número de oro, sus fundamentos teóricos y prácticas y sus aplicaciones en multitud de disciplinas a lo largo de la historia, que los estudiantes lo identifiquen en elementos de nuestro entorno más inmediato y adquieran el conocimiento a través de metodologías activas como el trabajo colaborativo y la clase invertida o *flipped classroom*.

El fin que se pretende conseguir con la implementación y desarrollo de esta unidad didáctica en una clase de 4º de ESO, es el de mejorar la motivación y aumentar el interés de los estudiantes por la asignatura de matemáticas, comúnmente considerada aburrida y difícil por su desconexión con nuestra realidad y su profundo marco teórico conceptual.

Como sustento teórico de esta unidad didáctica, se ha realizado una fundamentación curricular, epistemológica y didáctica sobre el número de oro como número irracional dentro del currículo nacional. Además, la implementación de la unidad didáctica se ha basado en metodologías activas que proporcionan más autonomía al alumno y la autoconstrucción del conocimiento, el uso de las tecnologías de la información y comunicación, el aprendizaje colaborativo en grupos aleatorios y heterogéneos y la constatación mediante visitas al exterior de la presencia del concepto matemático en nuestra realidad más inmediata.

En este sentido, este TFM aborda la comprobación física y la relación directa de la teoría matemática con la realidad, mediante visitas de observación en forma de excursión fuera del centro docente, concretamente a las ciudades de Úbeda, Martos y Marmolejo, donde se ubica el centro.

En definitiva, con este TFM se ha pretendido contribuir a aumentar el interés de los alumnos por las matemáticas, a mostrar al docente que existen oportunidades para hacer las matemáticas más divertidas e interesantes y, sobre todo, seguir aprendiendo conceptos matemáticos en relación con otras disciplinas como el arte, la música, la arquitectura, etc.

9. Referencias bibliográficas

- Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. (2007). *Boletín Oficial del Estado*, 312, 29 de diciembre de 2007, 53751 a 53753.
<https://www.boe.es/eli/es/o/2007/12/27/eci3858>
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2014). *Boletín Oficial del Estado*, 3, 3 de enero de 2015, 169 a 546.
<https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con>
- Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas. (2021). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 7, 18 de enero de 2021, 2 a 1024.
<https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/1>
- Del Pino, J. y Estepa, A. (2015). *Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria*. Universidad de Jaén.
- Grence, T. et al. (2020). *4º ESO. Matemáticas Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve*. Santillana.
- Colera, J. et al. (2020). *4º ESO. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*. Anaya.
- Bonell, C. (2009). *La divina proporción. Las formas geométricas*. Arquitect.
- Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA.
- Toledo, Y. (2016). *Sección áurea en arte, arquitectura y música*. [Trabajo Fin de Máster, Universidad Complutense de Madrid]. https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf
- Bragado, J. (2018). *La proporción áurea* [Archivo PDF]. <http://www.juanbragado.es/ficheros/Mis%20trabajos%20para%20la%20web/El%20numero%20de%20oro.pdf>
- Herrera, M. (2010). *Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales* [Tesis, Universidad de Venezuela]. <https://core.ac.uk/download/33251246.pdf>

- Mota, D. y Valles, R. (2020). El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas. *INNOVA Research Journal*, 2477-9024. <https://doi.org/10.33890/innova.v5.n2.2020.1230>
- Collazos, C. y Mendoza, J. (2006). *Cómo aprovechar el aprendizaje colaborativo en el aula. Educación y educadores* [Archivo PDF]. <http://www.scielo.org.co/pdf/eded/v9n2/v9n2a06.pdf>
- Correa, H. y Vera, D. (2014). Ideas para enseñar: Propuesta didáctica de la sección áurea manifestada en la pintura y la fotografía. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 148.
- Berenguer, C. (2016). Acerca de la utilidad del aula invertida o flipped classroom. *Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinarios*, 1466-1480.
- Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner "de la Revolución Cognitiva" a la "Revolución Cultural". *EDUCERE*, 235-241.
- Abril, A.M., Ariza, M.R., Quesada, A y F.J. García (2014). Creencias del profesorado en ejercicio y en formación sobre el aprendizaje por investigación. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11:1, 22-33.
- Naspud, C. (2019). *Localización del número de oro en los lugares turísticos de la provincia del Cañar, con alumnos del cuarto de la ESO, utilizando metodologías innovadoras* [Trabajo Fin de Máster, Universidad Internacional de la Rioja].
- Sánchez, V. (2012). *Matemáticas en la vida real. Propuesta de Programación Didáctica para 4º de ESO (opción B)* [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Oviedo].
- Moreno, M. (2020). *Funciones y gráficas* [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Jaén].
- Arjona, F. (2020). *Teorema de Pitágoras en 2º de ESO* [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Jaén].

10.ANEXOS

10.1. Anexo 1



CUESTIONARIO SOBRE CONOCIMIENTOS PREVIOS ACERCA DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

Responda a todas las preguntas de este formulario sin buscar las respuestas en internet ni mirar en libros de texto. Sólo tratamos de saber lo que sabes, ¡tranquilo! que no cuenta para nota. ¡Sé sincero!

 rafavaldiviablanca@gmail.com (no compartidos) 

[Cambiar de cuenta](#)

***Obligatorio**

Nombre y apellidos *

Tu respuesta

1. Clasifique cada número en el conjunto al que pertenecen

	Enteros	Racionales	Irracionales
0,1234567891011...	☐	☐	☐
2,8	☐	☐	☐
3/4	☐	☐	☐
-12	☐	☐	☐
Pi	☐	☐	☐

2. ¿A qué conjunto pertenece un número con infinitas cifras decimales no periódicas?

- ☐ A los enteros
- ☐ A los racionales
- ☐ A los irracionales
- ☐ A los naturales

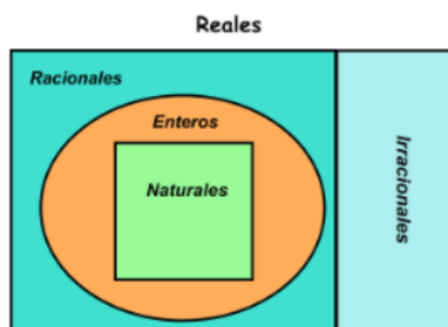
3. La solución de la ecuación $3x - \sqrt{2} = 0$ es un número...

- ☐ Entero
- ☐ Racional
- ☐ Natural
- ☐ Irracional

4. ¿La raíz cuadrada de 64 es un número racional o irracional?

Elige ▼

5. El conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números naturales.



☐ Verdadero

☐ Falso

Gracias por su colaboración

Enviar

Borrar formulario

10.2. Anexo 2



EVALUACIÓN SESIÓN 2: HISTORIA Y APLICACIONES DEL NÚMERO DE ORO

Esta es la evaluación de la sesión 2: Responde a las siguientes preguntas.



rafavaldiviablanca@gmail.com (no compartidos)

[Cambiar de cuenta](#)



Borrador restaurado

***Obligatorio**

Nombre y apellidos *

Tu respuesta

1. El número de oro es un número racional.

☐ Verdadero

☐ Falso

2. La relación entre el alto y el ancho de la fachada del Partenón de Atenas es... (varias verdaderas)



- ☐ Aproximadamente 1,61803398...
- ☐ El número Pi
- ☐ Aproximadamente 2,61803398...
- ☐ El número Fi
- ☐ El número de oro
- ☐ Un número racional

3. En la sucesión de Fibonacci, el término siguiente es... 0,1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



Tu respuesta _____

4. La disposición de las hojas en el tallo de las plantas se rigen por... (varias verdaderas)



- ☐ La búsqueda de la máxima exposición al sol
- ☐ El capricho de la naturaleza
- ☐ El ángulo áureo
- ☐ La sucesión de Fibonacci

5. El número de oro está presente en las grandes pirámides de Egipto...



- ☐ En la relación entre la apotema de una de sus caras y la altura
- ☐ Grabado en multitud de piedras de su base
- ☐ En la relación entre los lados de su base
- ☐ Es un mito

¡Gracias y mucha suerte!

Enviar

Borrar formulario

10.3. Anexo 3

VISITA DE OBSERVACIÓN A LOS MONUMENTOS DE ÚBEDA Y MARTOS

FICHA DE TRABAJO

1. Demostrar un comportamiento de respeto y responsabilidad durante todo el recorrido.
2. Formar los grupos de trabajo establecidos.
3. No alejarse del grupo.
4. Prestar atención a las indicaciones de los guías turísticos.
5. Realizar las preguntas necesarias al guía turístico.
6. Seleccionar partes de los monumentos en los que podrían estar presente el número de oro.
7. Cada grupo realizará las mediciones necesarias.
8. Elaborar un gráfico con los datos recolectados.
9. Tomar fotografías desde los diferentes ángulos que puedan ser utilizados para analizar la presencia del número de oro.
10. Realizar las grabaciones necesarias para la elaboración del informe respectivo.
11. Disfrutar de un momento de relajación.

10.4. Anexo 4

AUTOEVALUACIÓN

VISITA A LOS MONUMENTOS DE ÚBEDA Y MARTOS

Nombre del estudiante _____

Fecha _____

Rango de calificaciones: 3 calificación máxima, 2 calificación media, 1 calificación mínima

	INDICADORES	3	2	1
1	¿He tenido un comportamiento correcto con alumnos y profesores?			
2	¿Participé de manera activa en las actividades realizadas en la visita?			
3	¿Recogí los datos necesarios?			
4	¿Mi participación fue efectiva durante el trabajo colaborativo?			
	TOTAL			

10.5. Anexo 5



CUESTIONARIO FINAL

Responde con sinceridad, queremos saber tu opinión sobre la experiencia vivida con el número de oro.

 rafavaldiviablanca@gmail.com (no compartidos) 

[Cambiar de cuenta](#)

***Obligatorio**

Nombre y apellidos *

Tu respuesta

1. ¿Te ha ayudado el número de oro a comprender otros conceptos de las matemáticas?

☐ Sí

☐ No

☐ Tal vez

2. ¿Te han parecido interesantes las actividades planteadas sobre el número de oro?

☐ Sí

☐ No

☐ Tal vez

3. ¿Crees que el estudio del número de oro te ha servido para aumentar tu interés por las Matemáticas?

- ☐ Sí
- ☐ No
- ☐ Tal vez

4. ¿Cuál ha sido la actividad que más te ha gustado?

Tu respuesta

5. ¿Cuál ha sido la actividad que menos te ha gustado?

Tu respuesta

¡Muchas gracias por participar!

Enviar

Borrar formulario

10.6. Anexo 6

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DEL PROFESOR

Conteste las siguientes preguntas, donde 3 es completamente de acuerdo, 2 de acuerdo y 1 no está de acuerdo.

EL PROFESOR	3	2	1
1. Consigue que preste atención durante la clase.			
2. Explica los conceptos con claridad.			
3. Nos anima y motiva a adquirir nuevos conocimientos.			
4. Nos trata con respeto.			
5. Nos pregunta si tenemos dudas y nos ayuda a resolverlas.			
6. Las actividades propuestas son innovadoras.			
7. Al trabajar en grupos nos ayuda a comprender mejor.			
8. Me ha gustado salir a realizar trabajo de campo.			
9. Se me ha informado cómo se evalúa mi trabajo.			
10. He aprendido sobre el número de oro.			
La nota para tu profesor es (del 1 al 10):			
Escribe tus comentarios y recomendaciones:			
¡GRACIAS!			

10.7. Anexo 7

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN DOCENTE

Conteste de acuerdo a los parámetros establecidos, donde 3 es que cumple totalmente, 2 cumple parcialmente y 1 cumple a un nivel bajo.

EL DOCENTE	3	2	1
1. Uso mayor tiempo en actividades que ayuden a generar aprendizajes significativos.			
2. Dosifico el tiempo en las sesiones de aprendizaje.			
3. Problematizo y/o planteo retos cognitivos que orienten la adquisición de conocimientos.			
4. Desarrollo estrategias innovadoras para el proceso enseñanza-aprendizaje.			
5. Ejecuto evaluación formativa y/o sumativa a los/as estudiantes en las diferentes sesiones.			
6. Las actividades propuestas son innovadoras.			
7. Utilizo recursos educativos que ayudan al desarrollo de las actividades de aprendizaje.			
8. Me ha gustado salir a realizar trabajo de campo.			
9. Reconozco el esfuerzo tanto individual como grupal de los estudiantes utilizando un lenguaje positivo, palabras o gestos que motivan.			
10. Cumpló el horario establecido.			
La nota es:			