



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

ESTUDIO GLOBAL DE FUNCIONES. APLICACIONES A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Alumno/a: **Rodríguez Moral, Jose Juan**

Tutor/a: Prof. D. Antonio Jesús López Montoya

Dpto: Departamento de Estadística e
Investigación Operativa

Junio, 2021

Contenido

Resumen	6
Abstract	6
1. Introducción	7
2. Objetivos.....	8
3. Fundamentación epistemológica	9
3.1 Introducción	9
3.2 Dominio de una función.....	9
3.2.1 Dominio de funciones elementales.....	10
3.3 Cortes con los ejes. Periodicidad. Simetrías	11
3.3.1 Cortes con los ejes	11
3.3.2 Periodicidad.....	11
3.3.3 Simetrías	12
3.4 Asíntotas y ramas parabólicas.....	13
3.4.1 Asíntotas verticales.....	13
3.4.2 Asíntotas horizontales	14
3.4.3 Asíntotas oblicuas.....	14
3.4.4 Ramas parabólicas	15
3.4.5 Estudio de funciones elementales.....	16
3.5 Monotonía: Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos y absolutos	19
3.6 Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.....	22
3.7 Representación gráfica de una función	23
4. Fundamentación curricular	27
4.1 Análisis del currículo escolar	27
4.2 Análisis de los libros de texto.....	30
5. Fundamentación Didáctica: Investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza	37
5.1 Principales dificultades en la enseñanza del bloque de funciones.....	37
5.2 Método Singapur.....	39

6.	Proyección de una unidad didáctica.....	42
6.1	Título	42
6.2	Justificación	42
6.2.1	Justificación curricular	42
6.2.2	Justificación en otras áreas de las ciencias	42
6.3	Contextualización del centro y del aula	44
6.4	Objetivos	46
6.4.1	Objetivos generales de etapa	46
6.4.2	Objetivos del área de matemáticas.....	47
6.4.3	Objetivos propios del IES Fuente de la Peña en Educación Secundaria Obligatoria....	49
6.4.4	Objetivos propios de la unidad.....	50
6.5	Competencias clave	50
6.6	Contenidos	53
6.7	Metodología	54
6.8	Actividades y recursos.....	60
6.8.1	Actividades	60
6.8.2	Recursos.....	60
6.9	Atención a la diversidad	61
6.9.1	Alumnado con necesidades especiales	62
6.9.2	Medidas extraordinarias para alumnado con NEAE	63
6.9.3	Contextualización y actuación sobre el grupo	64
6.10	Temporalización	65
6.11	Evaluación	68
6.11.1	Estándares de aprendizaje evaluables	68
6.11.2	Criterios de evaluación	70
6.11.3	Criterios de calificación.....	73
7.	Conclusiones.....	74
8.	Bibliografía.....	76

Índice de ilustraciones

Figura 1 Gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$. Fuente: Elaboración propia...	12
Figura 2 Asíntotas verticales Fuente: Elaboración propia.....	13
Figura 3 Asíntotas horizontales Fuente: Elaboración propia	14
Figura 4 Asíntotas oblicuas Fuente: Elaboración propia	15
Figura 5 funciones polinómicas descritas anteriormente Fuente: Elaboración propia	17
Figura 6 funciones exponenciales y logarítmicas Fuente: Elaboración propia	19
Figura 7 Representación gráfica de la función. Elaboración propia.....	26
Figura 8 Ejemplo de representación gráfica de un problema práctico del vuelo de un helicóptero. Fuente: Editorial Anaya	35
Figura 9 Ejemplo de confusión entre las características de un contexto real con la gráfica de una función. Fuente: (Carlson M. O., 2005)	38
Figura 10 Marco curricular del Método Singapur Fuente: (Linares, 2020)	40
Figura 11 Representación gráfica de la relación P-V de un fluido	44
Figura 12 Actividad 1. Fuente Ed. Anaya. Pág. 136	78
Figura 13 Actividad 2. Fuente Ed. Anaya. Pág. 137	78
Figura 14 Ejemplo para mostrar a los alumnos las fases de vuelo con la representación gráfica.....	79
Figura 15 Ejemplo de la actividad 3.....	80
Figura 16 Ejemplo completo de la actividad 3	80
Figura 17 Hoja 1 de la actividad 3	81
Figura 18 Hoja 2 de la actividad 3	81
Figura 19 Hoja 3 de la actividad 3	82
Figura 20 Hoja 4 de la actividad 3	82
Figura 21 Hoja 5 de la actividad 3	83
Figura 22 Hoja 6 de la actividad 3	83
Figura 23 Actividad 4. Fuente Anaya Pág 138	83
Figura 24 Actividad 5. Fuente Anaya Pág 138	84

Figura 25 Actividad 6. Fuente Anaya. Pág 138	85
Figura 26 Actividad 7. Fuente Anaya. Pág 140	85
Figura 27 Actividad 8. Fuente Anaya. Pág 141	85
Figura 28 Actividad 9. Fuente Anaya. Pág 145	86
Figura 29 hoja 1 de la actividad grupal 10.....	87
Figura 30 hoja 2 de la actividad grupal 10.....	87
Figura 31 hoja 1 de la actividad 11.....	88
Figura 32 hoja 2 de la actividad 11.....	89
Figura 33 Actividad 12. Fuente Anaya. Pág. 144	89
Figura 34 Actividad 13. Fuente Anaya. Pág. 145	90

Índice de tablas

Tabla 1 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para el bloque de funciones, Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 3º de ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014	28
Tabla 2 Contenidos, criterios de evaluación y competencias según la Orden de 14 de Julio de 2016.....	29
Tabla 3 Comparación de índices de ambas editoriales	32
Tabla 4 Fundamentación teórica del Método Singapur. Fuente (Linares, 2020) .	40
Tabla 5 Objetivos específicos del área de matemáticas	49
Tabla 6 Competencias clave y relación con la unidad didáctica	53
Tabla 7 Contenidos para el bloque 1: procesos, métodos y actitudes en matemáticas	54
Tabla 8 Contenidos para el bloque 4: funciones	54
Tabla 9 Criterios para la selección de diversas metodologías. Fuente A. Fernández (2006)	57
Tabla 10 Metodologías para formar en competencias (Fortea Bagán, 2019). Adaptación de (De Miguel Díaz, 2006).....	58
Tabla 11 Alumnos con necesidades de aprendizaje especiales	64
Tabla 12 Estándares de aprendizaje para el bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	70

Tabla 13 Estándares de aprendizaje para el bloque 4: Funciones	70
Tabla 14 Sistema de calificación.....	73

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad principal el desarrollo de una unidad didáctica en el área de Matemáticas, aplicando los conocimientos adquiridos en el curso del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, concretamente en la especialidad de Matemáticas.

Dicha unidad didáctica está enfocada en el bloque de funciones y gráficas, pudiéndose concretar de la siguiente manera:

Por un lado, en la fundamentación epistemológica se estudia un tema del temario de oposiciones con alto rigor matemático; en la fundamentación curricular se hace un análisis del currículo vigente y del contenido de varios libros de texto utilizados en los centros españoles; y finalmente, en fundamentación didáctica se incide en las investigaciones en el área de las matemáticas.

Por otro lado, se desarrolla una unidad didáctica enfocada al bloque de funciones y gráficas para el curso 3º de ESO, analizando diversas metodologías, detallando los objetivos a conseguir, las competencias clave y los contenidos, entre otros.

PALABRAS CLAVE: funciones, gráficas, unidad didáctica, matemáticas.

Abstract

The main purpose of this Master's degree final project is the development of a didactic unit in the area of mathematics, by applying the knowledge acquired in the course of the Master's Degree in Teachers from Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, in the speciality of mathematics.

This didactic unit is focused on the block of functions and graphs. It can be specified as follows:

On the one hand, in the epistemological foundation, we will study a topic from the syllabus with high mathematical rigour; in the curricular foundation, we will analyse the current curriculum and the content of several textbooks used in Spanish schools; and finally, in the didactic foundation, we will focus on researching in the mathematics' area.

On the other hand, a didactic unit focused on the block of functions and graphs for the 3rd year of Compulsory Secondary Education will be developed. Thus, it has been needed to analyse different methodologies and detail the objectives, the key competences and the contents to be achieved, among others.

KEYWORDS: functions, graphs, mathematics, didactic unit.

1. Introducción

El objetivo principal de este trabajo es poner en práctica todos los conocimientos adquiridos a lo largo del *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*, concretamente en la especialidad de Matemáticas.

Para ello, se desarrolla un trabajo en el área de matemáticas que puede ser dividido en 3 bloques:

Por un lado, la fundamentación epistemológica, en la que se analiza un tema del temario de oposiciones con alto rigor matemático. Concretamente se hace un estudio global de funciones y su representación gráfica.

Por otro lado, dividido a su vez en dos bloques más pequeños, en el primero se desarrolla la fundamentación curricular, en la que se hace un análisis del currículo educativo español y un análisis de libros de texto, haciendo un breve estudio de la situación actual referente al tema, terminando con una comparación de dos editoriales de libros de texto; en el segundo se desarrolla una fundamentación didáctica para conocer los principales errores que cometen los alumnos y docentes en cuanto a la enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas se refiere.

Finalmente, se desarrolla una unidad didáctica enfocada al tema de funciones y gráficas, destinada a un curso de 3º de ESO en el centro IES Fuente de la Peña de Jaén, al cual asistí como profesor en prácticas durante un periodo de un mes, entre otras clases. Para dicho curso se hace hincapié en la atención a la diversidad, ya que está evaluado como curso PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento).

En todo el proceso de este trabajo se ha hecho uso de diferentes artículos para poner en contexto la actual situación de la didáctica en el área de las Matemáticas, poniendo de manifiesto a su vez las dificultades que encuentra el Sistema Educativo Español frente al de otros países.

2. Objetivos

A continuación, se detallan los objetivos que se desean alcanzar a través del presente trabajo:

- Consolidar los conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo del año académico correspondiente al máster y ponerlos en práctica mediante el desarrollo de una unidad didáctica.
- Desarrollar la competencia profesional a través del diseño curricular fundamentado de una unidad didáctica.
- Analizar las disposiciones curriculares vigentes y libros de texto de diversas editoriales para fundamentar la unidad didáctica desde el punto de vista curricular.
- Desarrollar con rigor matemático un tema de oposición relacionado con los contenidos de la unidad didáctica.
- Indagar sobre investigaciones que analicen aspectos relacionados con la enseñanza del tema en cuestión.
- Elaborar una unidad didáctica orientada a un alumnado específico, considerando aspectos relevantes como la metodología a emplear, la atención a la diversidad, entre otros.

Por otro lado, se detallan los objetivos que se desean alcanzar al terminar el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, recogidos en la página web de la Universidad de Jaén:

- Potenciar una actitud positiva y crítica hacia el desarrollo de la identidad profesional docente, colaborando con los agentes del ámbito educativo y, de forma especial, con los equipos directivos de los centros docentes.
- Integrar experiencias profesionales con procesos de formación e investigación en el aula, a través de la reflexión crítica, sobre todo lo que se experimenta o se aprende.
- Propiciar una formación cultural, personal, ética y social adecuada para el ejercicio de la profesión docente con el rigor científico que se debe aplicar en el ámbito de la educación de adolescentes.
- Promover el reconocimiento, análisis y atención de las características diferenciales del alumnado, según su desarrollo evolutivo, contextos familiares, sociales y culturales de referencia.
- Conocer las competencias profesionales docentes propias de cada especialidad y su relación con las demás competencias a través de mecanismos de transversalidad.

3. Fundamentación epistemológica

El presente apartado va destinado a desarrollar un tema enfocado a funciones, recogido en la Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. Más concretamente, se desarrolla el tema 28 con título “Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones”.

3.1 Introducción

El estudio de las funciones es de vital importancia no solo en el ámbito de las matemáticas, sino también en el de la economía o las ciencias aplicadas, por su capacidad de definir cualquier tipo de fenómenos regidos a partir de leyes expresables en forma de funciones y representaciones gráficas, permitiendo interpretar su evolución y sacar conclusiones extrapolables a la práctica.

Es por ello por lo que desde un punto de vista didáctico la función es uno de los conceptos más importantes en la rama de las matemáticas, donde los alumnos deben de saber expresar y utilizar con solvencia todos los aspectos de esta rama.

3.2 Dominio de una función

Definición: Dominio y recorrido

Se llama dominio de una función con variable real al conjunto de números reales x para los que existe un número real y , de modo que $f(x) = y$, representando tal dominio como D .

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y\}$$

Al representar gráficamente la función $y = f(x)$, es importante saber para qué valores existe una imagen mediante $f(x)$.

Al conjunto de los elementos y se denomina recorrido de $f(x)$ y se nota como $Im(f)$

A continuación, se estudia una clasificación de las funciones más típicas, donde se analizan los aspectos más relevantes para cada una. Se tendrá en cuenta que la mayoría de las funciones “típicas” son curvas continuas en sus dominios, por lo que las discontinuidades se producen en los puntos exteriores al dominio.

3.2.1 Dominio de funciones elementales

Funciones polinómicas. $P(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_i \cdot x^i + \dots + a_1 \cdot x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$

El dominio de una función polinómica será siempre $\mathbb{R}$, dado que todo valor $x \in \mathbb{R}$ se puede calcular siempre como una suma de productos basados en éste.

Funciones racionales. $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Para el dominio de una función racional se estudia el denominador, ya que los valores numéricos de los polinomios que la componen se pueden calcular siempre. Es decir, La función se puede calcular siempre que el valor del denominador sea distinto de 0, en cuyo caso la fracción no existe.

$$D = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

Funciones irracionales. $y = \sqrt[n]{f(x)}, n \in \mathbb{N}^*$

Si el índice n es impar, siempre que exista el radicando se puede calcular el radical, por lo que el dominio de la función $f(x)$ se calcula según la naturaleza de ésta: Si el índice es par, además del estudio del dominio de $f(x)$, habrá que resolver la inequación $f(x) > 0$, ya que solo en este caso el radical se puede calcular.

Como norma, en las clases de secundaria el radicando está compuesto por un polinomio de primer o segundo grado, o una función racional sencilla.

Funciones trigonométricas.

Para el caso de las funciones trigonométricas, el dominio tanto para las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ es $\mathbb{R}$, ya que existe para cualquier argumento $x \in \mathbb{R}$. El resto de funciones trigonométricas son operaciones compuestas con estas dos últimas funciones, por lo que se estudian a partir del análisis de dicha relación algebraica, determinando en qué casos se puede efectuar y en qué casos no.

Como ejemplo, se propone la función $y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, donde esta función existe para todos los valores de x salvo en los que $\cos x = 0$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Funciones exponenciales y logarítmicas. $y = a^x, y = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+$

El dominio para toda función exponencial es $\mathbb{R}$, puesto que cualquier potencia con base positiva se puede calcular siempre, independientemente del exponente. Sin embargo, para la función logarítmica, siendo la inversa de la exponencial, su dominio se

encuentra en el intervalo $(0, +\infty)$, ya que la función exponencial recorre todos los valores positivos.

En el caso de que se tenga una función a partir de las dos funciones explicadas anteriormente, habrá que analizar separadamente cada una de las partes que la componen, para luego estudiar sus interrelaciones y conocer finalmente el dominio de la función principal.

3.3 Cortes con los ejes. Periodicidad. Simetrías

3.3.1 Cortes con los ejes

Definición:

Los cortes con los ejes para una función determinada $y = f(x)$ vienen dados por los puntos de su gráfica que están sobre dichos ejes. Esto significa que los cortes con los ejes son los puntos de la forma $(x, f(x))$, donde $x \in D$, tales que $x = 0$, o $f(x) = 0$, dado que, al tener un punto sobre una de las coordenadas, la otra debe de ser 0.

Por tanto, para conocer los cortes con un eje debemos de obtener los puntos para los que la coordenada segunda valga 0, y de igual manera se procede para calcular los puntos en la coordenada segunda, haciendo 0 los puntos de la primera coordenada.

3.3.2 Periodicidad

Definición:

Para una función dada $y = f(x)$ diremos que es periódica con periodo $p \in \mathbb{R}^+$ si y solo si se cumple que $f(x + p) = f(x) \forall x \in D$ siempre que $x + p \in D$, y p es el menor de los números reales que cumplen esta propiedad.

Por tanto, la gráfica se repite en cada intervalo de valor p . Por lo que basta con estudiar la función en uno de sus intervalos, incluyendo ambos extremos en el dominio.

De todas las funciones elementales, las únicas periódicas son las trigonométricas.

Ejemplo:

Sea la función $y = \text{sen}(x) + \cos(x)$. El periodo tanto de la primera parte de la función como de la segunda es 2π . Por tanto, $\text{sen}(x) + \cos(x) = \text{sen}(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi)$. Esto es, la función tiene el mismo periodo.

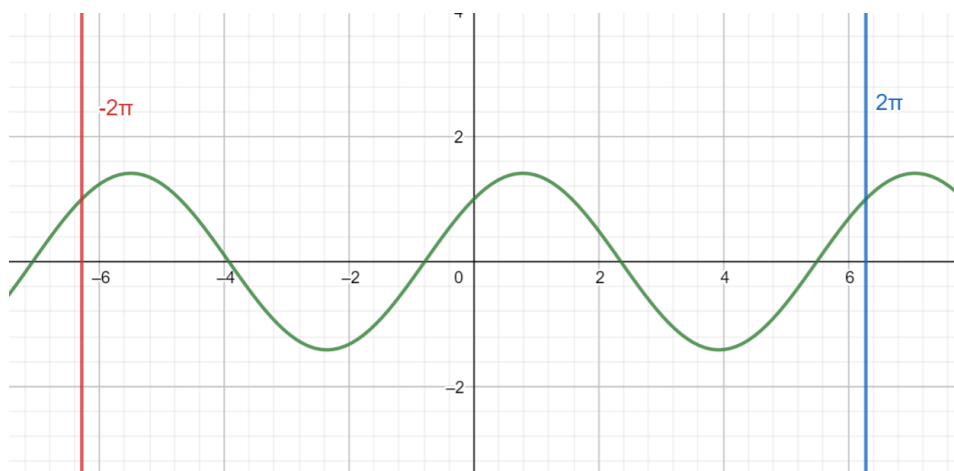


Figura 1 Gráfica de la función $y = \sen x + \cos x$. Fuente: Elaboración propia

3.3.3 Simetrías

Definición:

Dada una función $y = f(x)$, diremos que es una función simétrica respecto del eje Y (simetría par) si y solo si cumple que $f(x) = f(-x) \forall x \in D$.

Esta definición se corresponde con la de simetría axial respecto del eje Y, ya que si un punto (x, y) queda inscrito en la gráfica de la función se verifica siempre que el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica.

Dada una función $y = f(x)$ diremos que es una función simétrica respecto del origen (simetría impar) si y solo si verifica que $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$.

Se observa que esta definición corresponde con la definición de simetría respecto del punto $(0,0)$, ya que si el punto (x, y) está en la gráfica de la función, el punto $(-x, -y)$ también lo estará.

Las funciones polinómicas $y = P(x)$ son pares cuando los exponentes que afectan a x son pares, mientras que son impares cuando los exponentes que afectan a x son impares. La explicación es directa si tenemos en cuenta que $x^{2n} = (-x)^{2n}$ y que $x^{2n+1} = -(-x)^{2n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Si hay exponentes de ambas paridades la función no es par ni impar.

Por otro lado, las funciones racionales dependen de la paridad de sus exponentes para ser pares o impares, como las funciones irracionales formadas por una función polinómica o racional dentro de una raíz.

Las exponenciales y sus inversas no son pares ni impares, ya que $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, que es distinto de a^x y de $-a^x$ (excepto si $x = 0$).

Por último, las funciones trigonométricas tienen diferentes simetrías: Sabemos que $\sen(-x) = -\sen(x)$ y que $\cos(x) = \cos(-x)$, por tanto, la función $y =$

$\text{sen}(x)$ es impar y la función $y = \cos(x)$ es par. La función $y = \tan(x)$ será impar como consecuencia de lo anterior.

3.4 Asíntotas y ramas parabólicas

Definición de asíntota

Una asíntota es una recta tangente a una curva dada en “el infinito”, es decir, donde la distancia entre la curva y la recta tiende a cero. Por ello, se clasifican 3 tipos de asíntotas: verticales, cuando se trata de una recta vertical con la expresión $x = a$; horizontales, cuando sea una recta horizontal $y = a$; y oblicuas, cuando se tratan de la expresión $y = mx + n$.

A continuación, se detalla una definición más propia para cada tipo.

3.4.1 Asíntotas verticales

Dada una función $y = f(x)$, diremos que existe una asíntota vertical en la recta $x = a$, $a \in D$, si y solo si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

La interpretación de esta definición implica que cuanto más se acerca la gráfica de la función a la recta, más alejado está el punto de contacto, produciéndose en el infinito. Dentro de este caso se pueden interpretar 4 límites laterales distintos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo:

La función $\frac{x}{x-2}$ tiene una asíntota vertical en $x=2$, puesto que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \infty$.

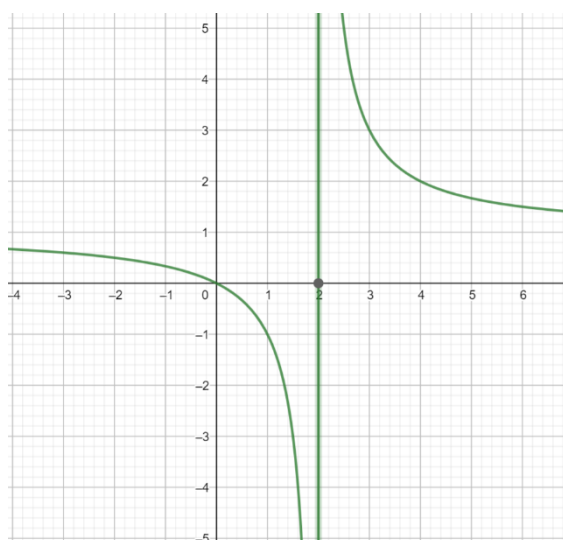


Figura 2 Asíntotas verticales Fuente: Elaboración propia

En el estudio de los límites laterales, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty$$

Lo cual coincide con la gráfica de la Figura 2.

3.4.2 Asíntotas horizontales

La función $y = f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = a$, si y solo si, se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. Esto implica que la distancia entre la curva $f(x)$ y la recta $y = a$ tiende a cero cuando nos desplazamos a infinito. Además, es importante distinguir ambos límites laterales, puesto que si $\lim_{x \rightarrow \infty+} f(x) = a$, y $\lim_{x \rightarrow \infty-} f(x) = b$, diremos que la función a estudiar tiene asíntota horizontal por la izquierda cuando $y = b$, y una asíntota horizontal por la derecha cuando $y = a$.

Como curiosidad, se puede dar el caso en el que una función tenga una asíntota horizontal solo por un lado, aunque en la práctica es un caso bastante poco común.

Ejemplo:

Consideramos la función $y = \begin{cases} \frac{x}{3-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{3+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En este ejemplo, se obtiene que $\lim_{x \rightarrow \infty+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty-} f(x) = -1$, por lo que la curva posee una asíntota por la izquierda y por la derecha en $y = -1$ y en $y = 1$.

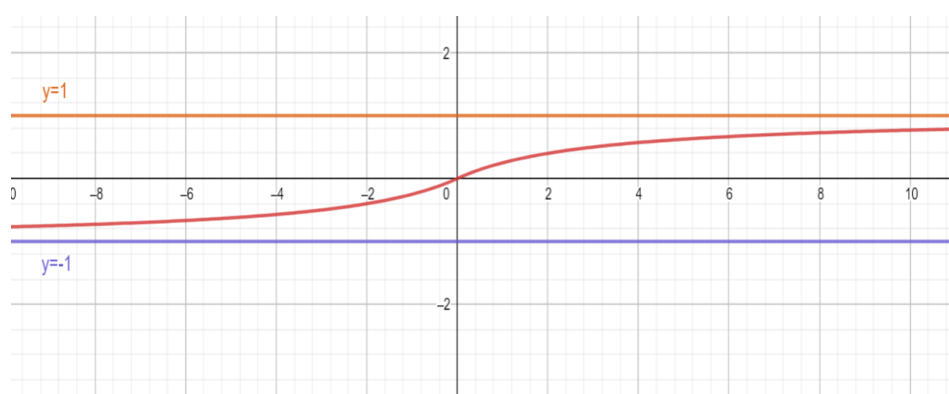


Figura 3 Asíntotas horizontales Fuente: Elaboración propia

3.4.3 Asíntotas oblicuas

Una función tiene una asíntota oblicua en la recta $y = mx + n$, si y solo si, se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = m$, y $\lim_{x \rightarrow \infty+} (f(x) - mx) = n$.

Cuando la función tiende a la tangente en el infinito, la pendiente de la recta tiende al cociente $\frac{f(x)}{x}$, mientras que, en el punto de tangencia, se da la igualdad $f(x) = mx + n$, se cumple que $f(x) - mx = n$ en el infinito.

Como en apartados anteriores, se debe de estudiar la lateralidad de los límites, debido a que podríamos tener dos asíntotas distintas, o tener una asíntota solo por un lado.

Ejemplo:

Sea la función:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{2+x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si estudiamos el límite por la izquierda y la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty+} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty+} f(x) - x = -2$$

Por lo que resulta una asíntota horizontal por la izquierda en $y = 1$, y una asíntota oblicua por la derecha en $y = x - 2$.

Además, se tiene una asíntota vertical en $x = -1$ por ser $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$.



Figura 4 Asíntotas oblicuas Fuente: Elaboración propia

En dicho ejemplo, $f(x) - [mx + n] = \frac{x^2}{2+x} - x + 2 = \frac{1}{2+x} > 0$ si x tiende a $+\infty$, por lo que el acercamiento a la asíntota es por arriba.

3.4.4 Ramas parabólicas

Dada una función $y = f(x)$, diremos que presenta una rama parabólica si y solo si se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

Se distingue entre los siguientes 4 casos: en función de la lateralidad del límite se decidirá si la rama parabólica es por la izquierda (x tiende a $-\infty$) o por la derecha (x tiende a $+\infty$), además de distinguir en función de si el resultado del límite es $+\infty$ o $-\infty$ para conocer si la rama parabólica se produce por encima del eje X o por debajo.

Además, se distinguen dos casos extra en función de que la tendencia de la función hacia ∞ sea más o menos rápida, es decir, se distinguen casos que se pueden calificar como tendencia rápida (en el sentido del eje Y) o tendencia lenta (en el sentido del eje X), por lo que el número total de casos es 8.

Diremos que una función $y = f(x)$, que tiene una rama parabólica, la tendrá en el sentido del eje Y, si y solo si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. Además, si dicho límite es 0, se tiene que la rama parabólica lo es en el sentido del eje X.

Se puede concluir con que el primer caso de crecimiento se corresponde con el de una función exponencial o una función polinómica de grado mayor que uno, mientras que el segundo caso se corresponde con el crecimiento de una función logarítmica, la cual desarrolla el crecimiento más lento conocido hacia ∞ .

3.4.5 Estudio de funciones elementales

Funciones polinómicas

Conocida una función polinómica $y = P(x)$ de grado mayor que 1, se cumple $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x} = \pm\infty$, en función del grado de la función y del signo de su coeficiente principal, por lo que presentará ramas parabólicas en ambos extremos sin asíntotas horizontales u oblicuas.

Si el grado de $P(x)$ es n y su coeficiente principal es $a_n \neq 0$, se tendrán los siguientes casos:

Si n par y a_n positivo $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{x} = +\infty \rightarrow$ presenta dos ramas parabólicas hacia arriba, en el sentido del eje Y.

Si n par y a_n negativo $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{x} = -\infty \rightarrow$ presenta dos ramas parabólicas hacia abajo, en el sentido del eje Y.

Si n impar y a_n positivo $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x} = +\infty \rightarrow$ presenta una rama parabólica hacia abajo por la izquierda, y otra rama parabólica hacia arriba por la derecha, las dos en el sentido del eje Y.

Si n impar y a_n negativo $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x} = -\infty \rightarrow$ presenta una rama parabólica hacia arriba por la izquierda, y otra rama parabólica hacia abajo por la derecha, las dos en el sentido del eje Y.



Figura 5 funciones polinómicas descritas anteriormente Fuente: Elaboración propia

En la Figura 5, se muestran los 4 casos anteriormente mencionados, cuyas funciones son:

$$y = x^4 - 6x^2$$

$$y = -x^2 + 10$$

$$y = x^3 - 4x^2$$

$$y = -x^3 + 1$$

Con respecto a las asíntotas verticales, las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, por tanto, no tienen.

Funciones racionales

Dada una función racional $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de grados n y m respectivamente. Se distinguen los siguientes casos:

Si $n < m$. Para este caso $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x \cdot Q(x)} = 0$, luego la función tiene como asíntota por ambos lados la recta $y = 0$, o sea, el eje X.

Si $n = m$. Para este caso $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x \cdot Q(x)} = 0$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales respectivos de $P(x)$ y $Q(x)$. Esto implica que la función tiene

una asíntota horizontal por los dos lados en la recta $y = \frac{a_n}{b_n}$ y no existen asíntotas oblicuas.

Si $n = m + 1$. Entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x \cdot Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales respectivos de $P(x)$ y $Q(x)$. Esto implica que la función no tiene asíntotas horizontales, pero sí una asíntota oblicua, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{a_n}{b_n} \cdot x \right] = \frac{b_n \cdot a_{n-1} - a_n \cdot b_{n-1}}{b_n^2}$$

Si $n > m + 1$. Para este caso $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x \cdot Q(x)} = \infty$, por lo que la función presenta ramas parabólicas dependientes de los signos de los coeficientes principales y los grados de los polinomios.

Para las asíntotas verticales, éstas existirán en las raíces de $Q(x)$, ya que la función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en las raíces del denominador. Conocidas una de estas raíces $a \in \mathbb{R}$ pueden ocurrir los siguientes casos:

Si $Q(a) = 0, P(a) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$, con lo que la función tiene una asíntota vertical en $x = a$.

Si $Q(a) = 0, P(a) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x - a)^q \cdot Q_1(x)$ y $P(x) = (x - a)^p \cdot P_1(x)$. Distinguimos ahora dos subcasos:

Si $q > p \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$, y se tiene una asíntota vertical en $x = a$.

Si $q \leq p \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = k \in \mathbb{R}$ y no hay asíntota vertical en este punto.

Funciones exponenciales y logarítmicas.

En este apartado se distinguirán dos casos:

- 1) $0 < a < 1$. En este caso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, por tanto, la función tendrá una asíntota horizontal en el eje X por la derecha, y una rama parabólica hacia arriba, en el sentido del eje Y, por la izquierda.
- 2) $a > 1$. En este caso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, por lo que la función presenta una asíntota horizontal en el eje X por la izquierda y una rama parabólica hacia arriba en el eje Y, por la derecha.

Para el caso de la función logarítmica se tiene en cuenta que es la simétrica de la función exponencial de la misma base, respecto de la bisectriz $y = x$. Por tanto, ésta presenta ramas hiperbólicas en el sentido del eje X donde la exponencial presenta ramas parabólicas, y una asíntota vertical en Y.

A continuación, se muestran los 4 casos comentados, cuyas funciones son: $y = 3^x$; $y = 0,5^x$, $y = \log_3 x$; $y = \log_{0,5} x$

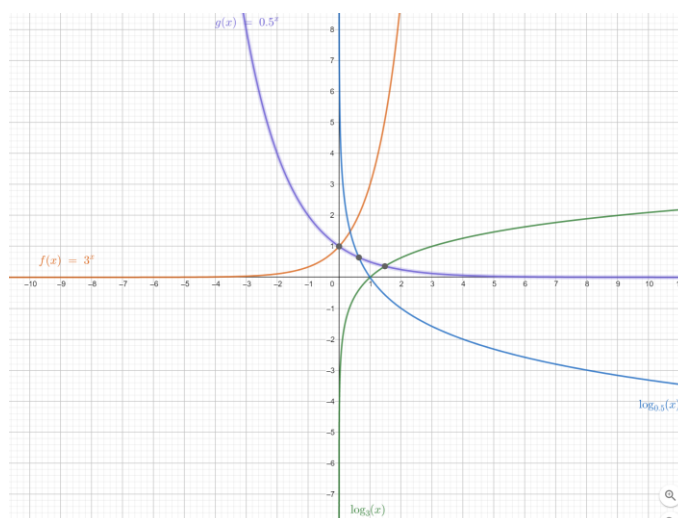


Figura 6 funciones exponenciales y logarítmicas Fuente: Elaboración propia

Funciones trigonométricas

El estudio de las funciones seno y coseno determina que son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ y periódicas, por lo que no presentan asíntotas ni ramas parabólicas.

Por otro lado, la función $y = \tan(x)$ presenta infinitos puntos que no pertenecen al dominio $\left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, presentando una asíntota vertical en cada uno de ellos.

3.5 Monotonía: Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos y absolutos

Definición: Crecimiento y decrecimiento.

Para una función $y = f(x)$ definida en un entorno $a \in \mathbb{R}$, se dice que es:

a. Creciente en un punto a si y solo si, $\exists h > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \text{Para } a-h < x < a \rightarrow f(x) \leq f(a) \\ \text{Para } a+h > x > a \rightarrow f(x) \geq f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \text{Signo}(x-a) = \text{Signo}(f(x)-f(a))$$

b. Decreciente en un punto a si y solo si, $\exists h > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \text{Para } a-h < x < a \rightarrow f(x) \geq f(a) \\ \text{Para } a+h > x > a \rightarrow f(x) \leq f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \text{Signo}(x-a) \neq \text{Signo}(f(x)-f(a))$$

ESTUDIO

El estudio del crecimiento y decrecimiento de una función suele limitarse al estudio de la derivada primera $f'(x)$, ya que si se resuelve la inecuación $f'(x) > 0$ se obtendrán los intervalos de crecimiento. La resolución de esta inecuación lleva implícito

la necesidad de resolver la expresión $f'(x) = 0$, donde tendremos puntos en los que no podemos asegurar nada. El resto de puntos conformarán los intervalos de decrecimiento.

TEOREMA 1

Dada una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) , si para todo x de (a, b) es $f'(x) > 0$, será estrictamente creciente en $[a, b]$.

Demostración.

Sean (x, x') dos puntos cualesquiera de $[a, b]$ y supongamos que $x < x'$. Aplicando el teorema del valor medio a la función f restringida al intervalo cerrado $[x, x']$, resulta:

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(c)$$

Siendo c un punto de (x, x') tal que $f'(c)$ es positivo, se deduce que $f'(x) - f(x) > 0$, lo que implica que $f(x) < f(x')$. Luego f es creciente en $[a, b]$.

Análogamente se demuestra el siguiente teorema:

TEOREMA 2

Dada una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) , si para todo x de (a, b) es $f'(x) < 0$, será estrictamente decreciente en $[a, b]$.

TEOREMA 3

Para que una función f real definida en un intervalo $I = [a, b]$ sea constante es necesario y suficiente que sea derivable y que su derivada se anule en todos los puntos de I .

Demostración.

Sea f una función real definida en un intervalo I de la recta real, suponiendo que f es derivable en I y que su derivada vale 0 en todo punto de I . Si x' y x'' son dos puntos cualesquiera del intervalo I , se puede aplicar el teorema del valor medio de Lagrange al intervalo compacto $[x', x'']$ y concluir que existe al menos un punto c en el interior de ese intervalo tal que se cumple $f(x'') - f(x') = (x'' - x') \cdot f'(c)$. Pero como c pertenece luego a I , la derivada $f'(c)$ será igual a 0, y por tanto $f(x'') = f(x')$. Así pues, la función f no puede tomar los valores distintos en dos puntos arbitrarios del intervalo I , es decir, es una función constante.

Definición: Máximo y mínimo relativo.

Una función $f(x)$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en a si $\exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

Una función $f(x)$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en a si $\exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.

TEOREMA 4

El teorema del extremo relativo (o de Fermat) dice que dada una función f derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$. Si f tiene un extremo relativo en a , entonces $f'(a) = 0$ (esto es, la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es horizontal).

TEOREMA 5

Sea f una función continua en un entorno U de un punto a y derivable en los dos semientornos $U^- = \{x \in U: x < a\}$ y $U^+ = \{x \in U: x > a\}$.

- i. Si $f'(x) > 0$ para $x \in U^-$ y $f'(x) < 0$ para $x \in U^+$, entonces f tiene un máximo relativo estricto en a .
- ii. Si $f'(x) < 0$ para $x \in U^-$ y $f'(x) > 0$ para $x \in U^+$, entonces f tiene un mínimo relativo estricto en a .

Demostración.

Se comprueba el primer apartado donde, para el segundo apartado se puede razonar de manera análoga. Si $x \in U^-$, a f se le puede aplicar el teorema del valor medio en $[x, a]$, del que se deduce:

$$f(a) - f(x) = f'(c)(a - x), \text{ para un cierto } c \in (x, a)$$

Como $c \in U^-$, es $f'(c) > 0$, con lo que $f(a) - f(x) > 0$; así, pues, para todo $x \in U^-$ es $f(x) < f(a)$. De igual forma se comprueba que si $x \in U^+$ también es $f(x) < f(a)$. Por tanto, $f(x) < f(a)$ para todo $x \in U$, con lo que f tiene un máximo relativo en a .

Una vez se ha estudiado el crecimiento, extremos y tendencias asintóticas de la función, se concluye si una función posee o no extremos absolutos, es decir, puntos en los cuales la función sea mayor o menor que para cualquier otro punto del dominio.

Definición: máximo y mínimo absolutos

Para una función $y = f(x)$ existirá un máximo absoluto si hay, al menos, un punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq f(a) \forall x \in \mathbb{R}$.

Para una función $y = f(x)$ existirá un mínimo absoluto si hay, al menos, un punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq f(a) \forall x \in \mathbb{R}$.

3.6 Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Definición:

- Una función $f(x)$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ es cóncava en el punto a , si la función es mayor que la recta tangente a la función en un entorno del punto a . Es decir:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

- Una función $f(x)$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ es convexa en el punto a , si la función es menor que la recta tangente a la función en el mismo punto a . Es decir:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \leq f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

- Una función $f(x)$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ tiene un punto de inflexión en dicho punto si existe un $\delta > 0$. En $(a - \delta, a)$ $f(x)$ es cóncava y en $(a, a + \delta)$ $f(x)$ es convexa, o viceversa.

ESTUDIO

Para el estudio de la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de una función, se procede de la misma forma que para el cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. Sin embargo, en vez de trabajar únicamente con la primera derivada, se trabaja con la segunda.

Se analiza la resolución de la expresión $f''(x) = 0$ y la inecuación $f''(x) > 0$. Las soluciones de la primera dan los puntos posibles de inflexión pero que, a priori, no podemos asegurar nada, mientras que la segunda da los intervalos de concavidad. El resto de puntos conforman los intervalos de convexidad.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que una función puede ser creciente o decreciente independientemente de si es cóncava o convexa. Por ello, se tienen cuatro posibilidades: creciente-cóncava, creciente-convexa, decreciente-cóncava, decreciente-convexa.

TEOREMA 6

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en un intervalo I .

- i. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, f es estrictamente convexa en I .
- ii. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, f es estrictamente cóncava en I .

Demostración

Se comprueba el primer apartado, siendo el segundo apartado completamente análogo.

Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$ y sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Basta probar que la función g dada por $g(x) = f(x) - (mx + n)$ es negativa en el intervalo (a, b) . Por ser $f''(x) = (f')'(x) > 0$ en cualquier $x \in I$, según el Teorema 1, la derivada f' es estrictamente creciente. Como es $g'(x) = f'(x) - m$, también g' es estrictamente creciente. Por otra parte, $g(a) = g(b) = 0$, así es que por el Teorema de Rolle, existe algún $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, lo que supone que $g'(x) < 0$ para todo $x \in [a, c]$ y $g'(x) > 0$ para todo $x \in (c, b]$. Por tanto, g es estrictamente decreciente en $[a, c]$ y $g(x) < g(a) = 0$ para todo $x \in (a, c]$, y g es estrictamente creciente en $[c, b]$, con lo que $g(x) < g(b) = 0$ para todo $x \in [c, b)$.

Resulta así que $g(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, como había que probar.

Otras consideraciones a tener en cuenta son las siguientes:

- a) Si una función presenta un máximo en un punto cualquiera a , ésta ha de ser convexa en un entorno de este. En caso contrario se presentaría una situación absurda.
- b) Si una función presenta un mínimo en un punto cualquiera a , ésta ha de ser cóncava en un entorno de este, por el mismo motivo que antes.
- c) Si una función presenta una continuidad en un intervalo y tiene dos máximos consecutivos en el mismo, en los puntos a y b , ha de alcanzarse entre ambos un mínimo. Según el teorema de Bolzano, si consideramos el intervalo $[a, b]$, ha de alcanzarse un mínimo en dicho intervalo, mínimo que no se alcanza en los extremos, pues son máximos relativos.
- d) Si una función presenta una continuidad en un intervalo y tiene dos mínimos consecutivos en el mismo en dos puntos a y b , ha de alcanzarse entre ambos un máximo, por el mismo razonamiento que en el anterior.
- e) Si una función es continua en un intervalo, dos extremos relativos consecutivos deben de ser máximo y mínimo o viceversa. En caso contrario, aplicando el razonamiento anterior, se llegaría al absurdo.
- f) Si una función es continua en un intervalo, entre dos extremos relativos consecutivos se produce un cambio de concavidad a convexidad, o viceversa, ya que la función será cóncava en el mínimo y convexa en el máximo, por lo que se tendrá un punto de inflexión como mínimo entre los dos extremos.

3.7 Representación gráfica de una función

Definición:

Sea $f(x)$ una función, llamamos gráfica de la función a la representación geométrica del conjunto:

$$H(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \text{Dom}(f), y \in \text{Im}(f)\}$$

Para la representación se establece un metódico análisis para lograr un estudio completo de la función. A continuación, se refleja un ejemplo del estudio para la representación de una función.

Se procede a partir de las siguientes pautas:

a) Definición de la función.

La función a analizar será un polinomio de orden 3, como es el siguiente:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

b) Estudio del dominio, periodicidad y simetría de la función.

- La función es continua en $\mathbb{R}$
- La función no es periódica
- Para la simetría analizamos las siguientes posibilidades:
 - Para que exista simetría par $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.
 $-x^3 + 3x^2 - 3 \neq x^3 - 3x^2 + 3 \Rightarrow \text{No existe simetría par}$
 - Para que exista simetría impar $-f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$
 $-x^3 + 3x^2 - 3 \neq -x^3 + 3x^2 + 3 \Rightarrow \text{No existe simetría impar}$

c) Cálculo de los cortes con los ejes y extremos relativos y absolutos.

- Para el corte con el eje X sustituimos la variable y por 0:

$$y = 0 \rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 3 \rightarrow x_1 = -0,89; x_2 = 1,35; x_3 = 2,53$$

La función corta al eje de abscisas en los 3 puntos calculados.

- Para el corte con el eje Y sustituimos la variable x por 0:

$$x = 0 \rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0 + 3 \rightarrow y = 3$$

La función corta al eje de ordenadas en $y = 3$.

d) Estudio de la monotonía de la función.

Para conocer el crecimiento y decrecimiento de la función, primero debemos conocer los puntos singulares de la función. Para ello, se estudian los puntos de la función en el que la pendiente de la tangente es igual a 0, o dicho de otro modo, donde la derivada de la función se iguala a cero:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x - 2) \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

Se obtienen 2 puntos singulares o críticos, estos son:

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \rightarrow (0, 3) \\ f(2) &= -1 \rightarrow (2, -1) \end{aligned}$$

Ya tenemos los puntos críticos de la función, ahora se estudia la monotonía, es decir, en qué intervalos la función crece y en qué intervalos decrece.

Para ello se analiza el signo de la derivada de la función a ambos lados de cada punto crítico. Se escogen los puntos $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$. Si el signo de la derivada en un punto es positivo, la función será creciente en el intervalo correspondiente, y si el signo es negativo, la función será decreciente.

$$f'(-1) = +9 \Rightarrow \text{La función es creciente en el intervalo } (-\infty, 0)$$

$$f'(1) = -3 \Rightarrow \text{La función es decreciente en el intervalo } (0, 2)$$

$$f'(3) = +9 \Rightarrow \text{La función es creciente en el intervalo } (2, \infty)$$

Además, podemos decir que existe un máximo relativo en el punto $(0, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(2, -1)$.

e) Cálculo de la convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.

Por último, se estudia la convexidad y concavidad de la función. Para ello, primero se analizan los puntos posibles de inflexión de la función analizando la segunda derivada e igualándola a 0:

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$$

Tenemos un posible punto de inflexión en el punto:

$$(1, f(1)) \rightarrow (1, 1)$$

Ahora se estudian la concavidad y convexidad de la función a izquierda y derecha de este punto. Si el signo de la segunda derivada en el punto es positivo, la función será convexa, mientras que, si la segunda derivada es negativa, la función será cóncava en el mismo punto:

$$\text{Estudio del signo de } f''(x) \begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Convexa} \\ f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Cóncava} \end{cases}$$

$$f''(0) = -6 \text{ Cóncava}$$

$$f''(2) = +6 \text{ Convexa}$$

Además, se confirma que en el punto $(1, 1)$ la función presenta un punto de inflexión, ya que pasa de ser cóncava a convexa, cambiando la curvatura.

f) Representación gráfica de la función a partir de los puntos característicos.

Finalmente, para la representación gráfica se utiliza toda la información que se ha ido obteniendo hasta ahora, desde los puntos característicos de la función hasta la monotonía o concavidad/convexidad de la función, obteniendo la siguiente representación:

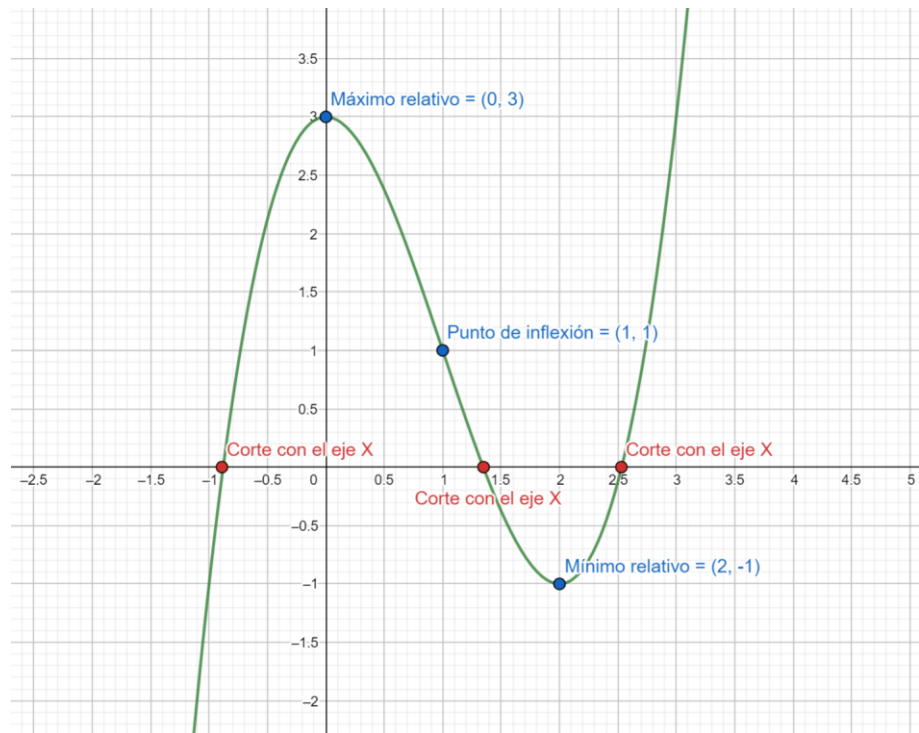


Figura 7 Representación gráfica de la función. Elaboración propia

4. Fundamentación curricular

Para la fundamentación curricular se desarrolla, en primer lugar, un análisis del currículo educativo español, y, por otro lado, un análisis de libros de texto, haciendo un breve estudio de la situación actual referente al tema, terminando con una comparación de dos editoriales utilizadas en los centros educativos a nivel nacional.

Concretamente, el estudio se centra en un curso de alumnos y alumnas de 3º de ESO de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, en la unidad de funciones.

4.1 Análisis del currículo escolar

Para el análisis del currículo escolar, más específicamente en lo que concierne al tema de funciones para alumnado de 3º de ESO de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, se hará uso del Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

En el Artículo 4. de dicho Real Decreto, “*Currículo básico de las materias del bloque de asignaturas troncales*” se especifica lo siguiente: Los contenidos comunes, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de las materias del bloque de asignaturas troncales se recogen en el Anexo I.

Recopilando lo recogido en el Anexo 1, apartado 28, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, se puede encontrar una descripción de dicha asignatura, y lo que es más importante, una tabla con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que deben darse para 3º de ESO.

El tema de funciones se desarrolla según la tabla en el Bloque 4, denominado con el mismo nombre, “Funciones”. A continuación, en la Tabla 1 se muestra el citado bloque.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Funciones		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y	2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la	1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica,

globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana	utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. 3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características	interpretándolos dentro de su contexto. 1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente. 2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente. 2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características. 3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.
---	--	---

Tabla 1 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para el bloque de funciones, Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 3º de ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014

Por otro lado, se ha analizado la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo para la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se detallan los criterios del sistema de evaluación para el alumnado y se especifican aspectos relevantes sobre la atención a la diversidad. Para el tema que nos concierne los contenidos y criterios de evaluación se recopilan en la Tabla 2.

Contenidos	Criterios de evaluación y competencias
Bloque 4. Funciones	
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. CMCT. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. CMCT, CAA, CSC. 3. Reconocer situaciones de relación funcional que puedan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros, características y realizando su representación gráfica. CMCT, CAA.

Tabla 2 Contenidos, criterios de evaluación y competencias según la Orden de 14 de Julio de 2016

Las competencias requeridas en el bloque 4 son:

- CMCT. Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología
- CAA. Competencia de aprender a aprender
- CSC. Competencias sociales y cívicas

De cara al desarrollo del currículo en la comunidad de Andalucía, Bolívar A. (2010) indicaba positivamente la mayor autonomía de los centros y equipos docentes en el desarrollo del currículo. Así lo indica el artículo 5:

“Artículo 5. Autonomía de los centros docentes. De acuerdo con lo establecido en el artículo 125.1 de la Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía, los centros docentes podrán tener determinada autonomía pedagógica, de organización y de gestión para poder gestionar sistemas de funcionamiento propios, en el marco de la legislación vigente, en los términos recogidos en esa Ley y en las normas que la desarrollen. A tales efectos, y en el marco de las funciones asignadas a los distintos órganos existentes en los centros en la normativa reguladora de la organización y el funcionamiento de los mismos, y de conformidad con lo establecido en el artículo 7.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, desarrollarán y complementarán, en su caso, el currículo en su proyecto educativo y lo adaptarán a las necesidades de su alumnado y a las características específicas del entorno social y cultural en el que se encuentra, configurando así su oferta formativa.”

4.2 Análisis de los libros de texto

Antes de realizar un análisis de los libros de texto, es interesante poner en contexto cómo repercuten estas herramientas en el sistema educativo español, ya que este recurso es ampliamente utilizado entre el alumnado tanto de primaria como secundaria.

Por un lado, Piedrahita (1999) destaca el libro de texto como un recurso que garantiza la igualdad de oportunidades entre alumnos, donde destaca como material que permite a los alumnos que van más atrasados, que pierden clase por enfermedad u otra causa, o sencillamente que no han entendido la lección dada por el docente, mantener el ritmo del grupo haciendo uso del trabajo autónomo en casa con los diferentes recursos (teoría, ejercicios etc.) que proporciona.

Campanario (2001) hace uso de una descripción también positiva de los libros de texto, indicando que dichas herramientas son fuente de información para profesores y alumnos, de ejercicios y problemas, y por último, de problemas y cuestiones de evaluación.

Por otro lado, analizando la parte negativa, diversas investigaciones relacionan el libro de texto a partir del contexto social en el que se produce y se utiliza. Así, se han replanteado controvertidas discusiones sobre cómo se escogen ciertos contenidos y eliminan otros, en función de contextos políticos e ideológicos, las limitaciones didácticas y los intereses comerciales que distorsionan la finalidad de los libros de texto, además de deprimir la capacidad investigadora y crítica del alumnado al darlo todo hecho (Palop, 2017).

Además, si se hace una autocrítica de la participación de España en varias *“organizaciones internacionales que buscan promover y desarrollar nuevas iniciativas*

internacionales de evaluación de los sistemas educativos con el objetivo de desarrollar información para la mejora” (López Varona, 1997) los resultados dejan mucho que desear. Entre varios, uno de los más conocidos es el organizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), el conocido Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), en el que nuestro país participó en las ediciones de 2000, 2003 (donde se profundizó principalmente la competencia matemática del alumnado), 2006, 2009 y 2012

En todas estas pruebas, los resultados indican que los estudiantes españoles quedan por debajo de la media europea, subrayando las deficiencias del sistema español frente al resto de países.

Uno de los focos principales que son estudiados por su amplio uso en el sistema educativo español son los libros de texto, ya que hoy en día el 99,1% del alumnado español lo utiliza como recurso didáctico (Palop, 2017), por lo que no es de extrañar que se cuestione su rendimiento.

Si nos paramos a analizar los libros de texto de uno de los países con mejores resultados obtenidos en pruebas internacionales como es Singapur (Beaton, 1996; López Varona & Moreno Martínez, 1997; Ministerio de Educación, 2010; Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2012; Ministerio de Educación y Ciencia, 2004, 2007, 2008; Ministerio de Educación y Política Social y Deporte, 2005; OECD, 2012), podemos comprobar que son libros estructurados de manera que poco a poco se puedan adquirir las definiciones matemáticas con mayor profundidad. Utilizan un enfoque comenzando por representaciones pictóricas de los contenidos, pasando posteriormente a enfoques más abstractos, haciendo uso de definiciones claras y sencillas, las cuales permiten la transmisión de los conceptos en los niveles inferiores, sin eliminar el rigor (Palop, 2017).

Por otro lado, se debe de analizar la situación hoy en día de las nuevas tecnologías, las cuales cada vez están ganando más terreno a los libros de texto, ya que ofrecen más posibilidades de aprendizaje. Es por ello, que las editoriales se están adaptando a los nuevos formatos, añadiendo nuevos recursos tales como información en sus propias páginas web, recursos educativos como lo son pensamientos visuales, actividades interactivas, audiovisuales, e información y documentación adicional.

Una vez conocidos los principales puntos de vista que se han y se están estudiando sobre el uso del libro de texto en el sistema educativo, se realizará un análisis comparativo entre dos editoriales españolas como son Anaya y SM.

Como dato de partida se comienza por comparar el índice para el curso que nos atañe, 3º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Dichos índices quedan mostrados en la Tabla 3.

EDITORIAL ANAYA	EDITORIAL SM
1. Números naturales, enteros y decimales	1. Conjuntos numéricos
2. Fracciones	2. Potencias y raíces
3. Potencias y raíces	3. Polinomios
4. Problemas aritméticos	4. Ecuaciones
5. Secuencias numéricas	5. Sistemas de ecuaciones
6. El lenguaje algebraico	6. Proporcionalidad
7. Ecuaciones	7. Figuras planas
8. Sistemas de ecuaciones	8. Movimientos en el plano
9. Funciones características	9. Cuerpos geométricos
10. Funciones lineales y cuadráticas	10. Sucesiones
11. Elementos de geometría plana	11. Funciones
12. Figuras en el espacio	12. Funciones lineales y cuadráticas
13. Movimientos en el plano. Frisos y mosaicos	13. Estadística unidimensional
14. Tablas y gráficos estadísticos	14. Probabilidad
15. Parámetros estadísticos	

Tabla 3 Comparación de índices de ambas editoriales

Algunas de las principales diferencias referentes al índice son:

- Anaya dedica un tema entero a fracciones mientras que SM lo incluye en el Tema 1 “Conjuntos numéricos” en el apartado 1.3 “Fracciones. Números racionales” y 1.4 “Operaciones con fracciones”.
- Mientras que la editorial SM hace una diferencia entre los temas 6 y 7, añadiendo apartados como el teorema de Tales o razones de longitudes, áreas y volúmenes y escalas en el bloque de números y álgebra, dichos apartados quedan descritos según la editorial Anaya en el bloque de geometría.
- Cada editorial sigue un orden distinto: SM se rige por un orden de bloques como son números y álgebra (desde el tema 1 al 6), geometría (del 7 al 9), funciones (del 10 al 12) y por último estadística y probabilidad (temas 13 y 14). Por otro lado, Anaya no especifica concretamente dentro del libro el orden que sigue, pero sí se puede entrever la relación de temas adyacentes, como por ejemplo el Tema 1 de números naturales, enteros y decimales y el Tema 2 fracciones, o Temas 7 y 8 referidos a ecuaciones, entre otros.

A continuación, se describe una comparación detallada de cómo se organizan las unidades didácticas según cada editorial.

EDITORIAL ANAYA	EDITORIAL SM
Breve apertura de la unidad. Introducción histórica de los contenidos y cómo se relacionan con el desarrollo histórico.	Presentación de la unidad. Breve fragmento literario sobre los contenidos que se verán en la unidad
Desarrollo de los contenidos y actividades. Dividido en epígrafes y subepígrafes, resaltando los contenidos más importantes, añadiendo ejemplos resueltos y actividades para realizar por el alumno. Incluye además iconos en las actividades propuestas que sugieren qué tipo de actividad se va a resolver (aprendizaje cooperativo, desarrollo del pensamiento, cultura emprendedora, TIC, etc).	Desarrollo de los contenidos. Dividido en epígrafes, con enlaces a actividades interactivas con GeoGebra donde el alumno puede practicar. También hace uso de ejemplos resueltos para explicar la teoría y da al alumno ejercicios propuestos para practicar. Por último, proporciona un apartado llamado “Pon en valor” que trata de un breve texto informativo relacionado con el contenido, donde puede trabajar en la web de la editorial distintas estructuras de pensamiento crítico
Ejercicios y problemas. Ejercicios y problemas resueltos donde se sugieren estrategias, pistas, etc., para abordarlos. Por otro lado, se añaden ejercicios a realizar por el alumno, convenientemente clasificados y ordenados por contenidos y dificultad, especificando el grado de dificultad de 1 a 3.	Ejercicios y problemas. Ejercicios y problemas propuestos y resueltos para que el alumno trabaje lo aprendido en la unidad, organizados por grupos de contenidos y nivel de dificultad. Por grupos de contenidos se dividen en: • Ejercicios. Actividades para aplicar la teoría • Ejercicios de síntesis. Problemas, actividades y cuestiones que relacionan diferentes nociones de la unidad. • Problemas. Situaciones con contexto para ilustrar aplicaciones de la teoría estudiada • Emprende. Actividad propuesta para trabajar la habilidad de

	convertir ideas en actos y fomentar el compromiso social
Autoevaluación y curiosidades matemáticas. Se puede encontrar lecturas, actividades, consejos... y una autoevaluación donde el alumnado puede comprobar mediante actividades propuestas, si el aprendizaje es el deseado	Ponte a prueba. Ofrece problemas y actividades PISA desde un contexto, donde la primera actividad se presenta resuelta paso a paso. Por otro lado, ofrece una autoevaluación donde el alumnado puede evaluar los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad.

Ambas unidades siguen una estructura de cada unidad muy parecida, desde la presentación del contenido, su distribución y ejercicios resueltos y propuestos. Sin embargo, cabe destacar que Anaya sigue un marco más tradicional, presentando la teoría y la práctica y haciendo uso de ejercicios resueltos y propuestos, mientras que SM ofrece un modelo más interactivo y actual, relacionando el contenido de los temas con actividades y programas matemáticos actuales, ofreciendo recursos transversales para desarrollar el pensamiento crítico de los alumnos, mostrando actividades de competiciones internacionales a modo de ejemplo al final de cada unidad y relacionando la materia con la magia para mostrar una parte divertida y dinámica de las matemáticas.

Por último, realizando un análisis de las unidades referidas al bloque que nos concierne en este trabajo como son funciones y representación gráfica de funciones, se muestran las siguientes diferencias y similitudes entre ambas editoriales.

Empezando por las diferencias de índices, la editorial SM divide en 3 temas dicho bloque, “Sucesiones, funciones y funciones lineales y cuadráticas”, ordenados desde el Tema 10 al Tema 12. En ella se encuentra una estructura deductiva, donde los contenidos de epígrafes y subepígrafes quedan descritos de manera teórica al inicio presentando la idea principal sin más dilación, y a continuación, se muestran ejemplos resueltos para afianzar los conocimientos teóricos mostrados anteriormente.

Por otro lado, la editorial Anaya no considera las unidades en el mismo bloque o las muestra desordenadas, como son la unidad de “secuencias numéricas” en el Tema 5 y los temas de “funciones y funciones lineales y cuadráticas” quedan descritos en los temas 9 y 10. En este caso se puede comprobar una estructura inductiva, donde se indican ciertos aspectos sobre el marco teórico, con la intención de que sea el propio alumno el que vaya sacando unas conclusiones preliminares, y finalmente, se llegan a las definiciones teóricas.

Un ejemplo de esta estructura se puede encontrar en el Tema 9 “Funciones y características”, apartado 2 “Las funciones y sus gráficas”. La editorial Anaya comienza mostrando la Figura 8 que representa el vuelo de un helicóptero y añade lo siguiente:

“En la extinción de un incendio, un helicóptero realiza los siguientes movimientos: 1 Sale de la base. 2 sube a una cierta altura para tomar perspectiva. 3 baja a altura de crucero y viaja hasta el embalse. 4 baja al embalse a llenar los tanques de agua. 5 sube a altura de crucero y viaja hasta el incendio. 6 baja a apagar el fuego. 7 sube a altura de crucero y viaja de vuelta a la base. 8 desciende a la base. La gráfica que describe el vuelo del helicóptero relaciona dos variables: el tiempo, t , que ha transcurrido desde que salió de la base y la altura, a , a la que se encuentra el aparato.

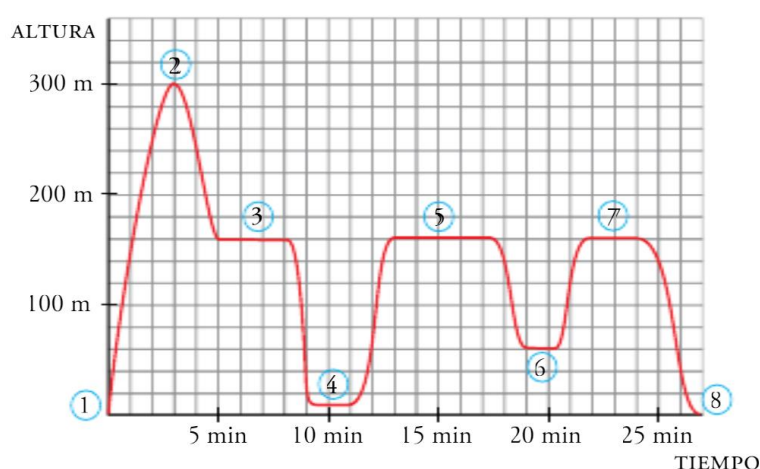


Figura 8 Ejemplo de representación gráfica de un problema práctico del vuelo de un helicóptero. Fuente: Editorial Anaya

Con esta introducción la editorial pretende mostrar un ejemplo de función y representación gráfica real para que el alumno vaya interpretando tanto la utilidad como el funcionamiento de la unidad que se va a desarrollar, antes de pasar a los conceptos teóricos que se pretenden estudiar en la lección.

El desarrollo de contenidos que sigue cada editorial para la unidad puesta en común denominada como “Funciones” varía en el orden establecido:

La editorial Anaya se centra inicialmente en la explicación de representación gráfica, pasando a la monotonía y extremos relativos, dominio, periodicidad y simetría y terminando con la expresión analítica de una función.

La editorial SM, por otro lado, estructura los contenidos empezando por el dominio y recorrido, continuidad, simetría y periodicidad, terminando por el crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos relativos. Ambas editoriales utilizan la representación gráfica de funciones en todo momento para mostrar visualmente la teoría de cada apartado.

En lo que se refiere a ejercicios resueltos y propuestos, ambas editoriales muestran ejemplos resueltos en cada subepígrafe y ejemplos propuestos tanto al final de cada apartado como al final de la unidad, indicando la dificultad de cada ejercicio y ordenándolos por bloques vistos en cada apartado.

Por tanto, se concluye que la editorial SM adopta un formato más actual, adaptando las nuevas formas de aprendizaje, mientras que Anaya opta por un método más tradicional con ciertas pinceladas de recursos actuales. Por otro lado, ambas editoriales desarrollan poco el aprendizaje cooperativo, ya que, aunque añaden (principalmente la editorial SM) recursos didácticos para trabajar en grupo, la mayor parte del contenido de ambas reside en un formato individualizado, el cual también sirve como una recopilación de contenido de currículo para que el docente lo pueda adaptar a sus clases y los niños puedan trabajar de manera autónoma en sus casas.

5. Fundamentación Didáctica: Investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza

5.1 Principales dificultades en la enseñanza del bloque de funciones

Por parte del alumnado, la asimilación del concepto de función entraña grandes dificultades, así como la comprensión de función a partir de términos como variables dependientes e independientes (Carlson M. O., 2005).

El mismo autor años atrás indicaba que los alumnos interpretan el término de funciones únicamente en un sentido simbólico o procedimental y no son capaces de realizar un estudio más general y real del término función, careciendo de una comprensión correctamente planificada en la que se dé la posibilidad de relacionar distintas funciones entre sí o de interpretar la relación entre una variable dependiente y otra independiente (Carlson M. P., 1998).

Numerosos estudios analizan la comprensión que tienen los estudiantes acerca del concepto función y su representación gráfica, observándose que existen diversos errores de comprensión. Principalmente, los errores más comunes suelen estar relacionados a tres factores como son el concepto de función y su interpretación analítica, la representación gráfica y el propio lenguaje analítico.

1) Errores de concepto

(Carlson M. O., 2005) analizó que cuando a los alumnos se les pregunta por una función del tipo $f(x + a)$, en lugar de sustituir por $(x + a)$, lo que suelen hacer es añadir el término a después de haber sustituido. Siguiendo con este problema, al preguntarles por el razonamiento que han seguido, emplean sencillas reglas que los alumnos memorizan para argumentarse y no se paran a pensar en $(x + a)$ como una variable que es independiente de la función.

También es común encontrar la confusión entre una función algebraica y una ecuación, lo cual suele pasar a menudo debido a que los propios docentes utilizan libremente el término “fórmula” como “ecuación”, además de los diferentes usos que se le da al signo “igual”.

2) Errores de representación gráfica

Una de las confusiones más comunes entre los estudiantes es la de suponer que toda función que tenga forma de “U” es estrictamente una parábola, confusión que, si al explicar las principales características de las funciones se asocia cada una a su correspondiente expresión algebraica, puede llegar a corregirse (Schwarz, 1999).

Otra confusión común es creer que toda función constante no llega a ser propiamente una función ya que no varía. Sin embargo, si se busca el error más grave, puede encontrarse el de confundir las características físicas de un contexto de la realidad con las características de la gráfica de la función que la determina, es decir, el estudiante interpreta la representación gráfica como un “dibujo” de la situación física que representa, en vez de interpretarlo como una relación de variables independientes y dependientes relacionadas entre sí (Carlson M. O., 2005).

Por ejemplo se da el siguiente problema en el que se muestra una representación gráfica del corte transversal de una montaña por el que un ciclista hará su recorrido, y se le pide al alumno dibujar otra gráfica que relacione la velocidad con la posición a lo largo del proceso.

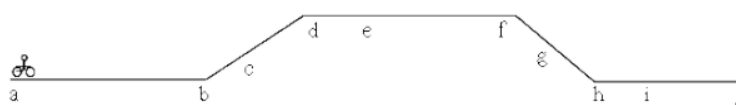


Figura 9 Ejemplo de confusión entre las características de un contexto real con la gráfica de una función.
Fuente: (Carlson M. O., 2005)

Muchos estudiantes, al no comprender lo que se les pide, responden dando como solución una copia del gráfico del recorrido. (Carlson M. O., 2005).

3) Errores en el lenguaje analítico.

Existen también errores en cuanto se refiere al lenguaje analítico, de manera que cuando a los estudiantes se les pide expresar una variable x en función de otra variable y , la mayoría no entienden que deben de relacionar ambas variables a través de una fórmula de la manera “ $s = \text{una expresión algebraica conteniendo el término } t$ ”

Los alumnos suelen presentar dificultades en comprender el significado de cada símbolo algebraico contenido en una función, aunque se traten de funciones simples. Por ejemplo, si se tiene una función tal que $f(x) = 5x$, la mayoría de los estudiantes no consiguen interpretar que lo que queda contenido entre el paréntesis muestra la variable independiente, que $f(x)$ se trata de la variable dependiente, f es el nombre que se le da a la función y por último $5x$ nos da la relación que existe entre las variables dependiente e independiente.

Todos estos errores pueden producirse por una carencia de sentido en el lenguaje algebraico, es decir, los alumnos utilizan todos estos términos sin llegar a comprender el carácter matemático que albergan (Socas, 2003).

Además de los 3 errores principales analizados, se hace hincapié en que el mundo de la investigación y el de la innovación, toman caminos distintos sin dar indicios de tomar cierto vínculo que los unifique. La mayor parte de los proyectos que se dan en el

área de la renovación del cálculo en América se han desarrollado de manera completamente separada a los trabajos de investigación existentes (Artigue, 1995).

En cuanto se refiere a metodología, muchos docentes optan por utilizar ejemplos de cara a introducir un nuevo término, como es el caso de utilizar problemas que se acerquen a situaciones reales, o mostrar el problema en situaciones que al estudiante le sea familiar o cotidiano, con la finalidad de mostrar una relación entre la realidad y la propia matemática. Además, se suelen utilizar estrategias basadas en el planteamiento geométrico del problema, apoyándose en la interpretación gráfica o geométrica del problema, estimulando visualmente al alumnado para que así alcance a entender el problema en cuestión (Sarmiento Santana, 2011). A continuación se ha analizado un sistema didáctico dados los buenos resultados que está dando hasta el día de hoy, como es el “Método Singapur”.

5.2 Método Singapur

Una de las metodologías que más interés ha despertado dados los buenos resultados obtenidos en las pruebas PISA celebradas en el año 2015 es el denominado “Método Singapur”. Este método se basa en cuatro aspectos principales: el enfoque CPA (concreto – pictórico – abstracto), el currículo en espiral, las variaciones sistemática y perceptual y la comprensión relacional.

Este método para el aprendizaje de las matemáticas se basa en las ideas de tres investigadores matemáticos del siglo XX como son Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp:

Investigador	Aportación al Método Singapur
Bruner (1915-2016). Psicólogo y pedagogo estadounidense que realizó grandes contribuciones dentro de la psicología cognitiva en educación	Enfoque CPA. Currículo en espiral.
Dienes (1916-2014). Matemático húngaro impulsor de la psicomatemática, que introdujo el uso de los denominados bloques lógicos en el aprendizaje de las matemáticas	Variación sistemática. Variación perceptual.
Skemp (1919-1995). Matemático y psicólogo británico autor de la “Psicología del aprendizaje de las matemáticas”, que realizó un extenso estudio sobre la	Comprensión relacional.

comprensión de los estudiantes de distintos términos matemáticos.

Tabla 4 Fundamentación teórica del Método Singapur. Fuente (Linares, 2020)

Contextualizando la situación de Singapur, se trata de una república del sudeste asiático con más de 5 millones de habitantes que, en la última década ha pasado de ser un país principalmente pobre para convertirse en una economía industrial moderna. Uno de los principales motivos de este cambio se debe a su sistema educativo, el cual lleva desde la década anterior implementando y desarrollando el programa “Escuelas que piensan, nación que aprende”. El interés del país por su sistema educativo se refleja en el gasto en educación que es del 20% del presupuesto del país que, comparándolo con España, abarca menos del 10% (Linares, 2020).

Este sistema educativo antepone la eficiencia sobre la equidad, clasificando a los estudiantes en función del rendimiento académico y promocionando a los que tienen mejores resultados, basando así su sistema educativo en la meritocracia y la competitividad entre su alumnado.

La resolución de problemas matemáticos se basa en cinco componentes básicos: conceptos, habilidades, actitudes, metacognición y procesos.



Figura 10 Marco curricular del Método Singapur Fuente: (Linares, 2020)

La resolución de los problemas parte de la vida real donde los alumnos deben de hacerse preguntas, contrastar hipótesis y conjeturas y analizar los conceptos matemáticos dados para cada situación concreta. Se anima a los estudiantes a resolver un problema de varias formas distintas, con el objetivo de centrarse más en la comprensión y explicación del proceso que en el resultado final, proporcionándoles distintas estrategias y métodos de exploración, con el objetivo de evitar reglas o hábitos para la consecución de un problema de manera mecánica.

Como se ha mencionado, el Método Singapur parte de cuatro aspectos metodológicos fundamentales:

- 1) **Enfoque CPA**, en el que los alumnos construyen unos conocimientos a través de tres niveles de representación divididos en función de su dificultad: concreto, pictórico y abstracto. En el primer nivel se comprende un concepto a través de la manipulación de materiales físicos del entorno; en el nivel pictórico se alcanza una mayor dificultad en la comprensión en la que se representan los conceptos anteriores a través de dibujos; por último, en el nivel abstracto se relacionan los conceptos vistos hasta ahora con el lenguaje matemático haciendo uso de símbolos y signos matemáticos
- 2) **Currículo en espiral**, donde los estudiantes trabajan los conceptos a distintos niveles, siendo estos adaptados a las capacidades de los alumnos. Con este método lo que se pretende es introducir un concepto nuevo y trabajar con él durante varios años, aumentando gradualmente la complejidad y abstracción, reforzando así los conocimientos anteriores sobre los que se sustentan los nuevos conocimientos.
- 3) **Variación sistemática**, donde un mismo concepto se analiza de diferentes puntos de vista con distintos grados de complejidad y abstracción. Por otro lado, a partir de la variación perceptual se interiorizan los conocimientos de la forma que más interese al estudiante.
- 4) **Comprensión relacional frente a la comprensión instrumental**, donde el primero permite construir conceptos para dar respuesta a situaciones que se dan en la vida real, mientras que el segundo promueve la memorización de reglas aplicadas a situaciones muy concretas.

6. Proyección de una unidad didáctica

6.1 Título

La unidad didáctica que se presenta se titula “Funciones y Gráficas”. De acuerdo con los criterios establecidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, se desarrollarán los contenidos correspondientes a la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del curso 3º de ESO.

6.2 Justificación

6.2.1 Justificación curricular

Analizando el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se puede observar los estándares de aprendizaje evaluables asociados a los criterios de evaluación para el alumnado de 3º de ESO en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas.

1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.

1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.

1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente.

2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente.

2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.

3.1. Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características.

3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

6.2.2 Justificación en otras áreas de las ciencias

Las funciones tienen un gran impacto en todas las ramas de las ciencias por su capacidad de aplicar una relación entre distintas magnitudes y poder calcular el valor de una de ellas en función de la otra.

Según Ballester Sampedro (2009) en cualquier área de las ciencias, existen leyes en las que se relacionan distintas magnitudes, tales como temperatura-presión, masa velocidad, intensidad-velocidad. Además, mediante la representación gráfica haciendo uso de ejes cartesianos se puede presentar de manera visual la relación entre ambas magnitudes e interpretarla de manera sencilla y rápida.

El primero en utilizar la expresión $f(x)$ fue Euler para representar una función f asociada a un valor x . A partir de este concepto se comienza la utilización del concepto de función tal y como hoy se entiende.

Ballester Sampedro (2009) muestra de manera clara la justificación en varias áreas de las ciencias, como, por ejemplo:

En cinemática, donde expresa la relación entre el espacio recorrido y el tiempo invertido en ello mediante la función $e(t) = v \cdot t$ para el movimiento de un móvil con velocidad uniforme, donde v indica la velocidad del móvil y t el tiempo transcurrido.

En Energía, donde la energía cinética se expresa por $E_c = \frac{1}{2}Mv^2$ obteniendo una función de tipo cuadrático, donde M es la masa y v determina la velocidad

La función del sonido nos determina la intensidad del sonido que podemos percibir en función de la distancia a la que se encuentra el receptor, expresada de la forma $I = \frac{100}{d^2}$, donde I es la intensidad del sonido y d la distancia desde el foco emisor hasta el receptor.

En Economía se puede analizar el estudio de los costes de una empresa mediante una función que determine la producción eficiente, donde para ello la función de costes debe de ser mínima. Esta función se expresa como $C_t(Q) = C_v(Q) + C_f$, donde C_t expresa los costes totales; C_v los costes variables y C_f los costes fijos.

En Termodinámica la ley de Boyle nos determina que la presión de un fluido a temperatura constante se relaciona con el volumen mediante la función $P = \frac{K}{V}$, donde K es un parámetro que varía para cada punto y V representa el volumen. Su representación gráfica es la de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas coinciden con los ejes de coordenadas.

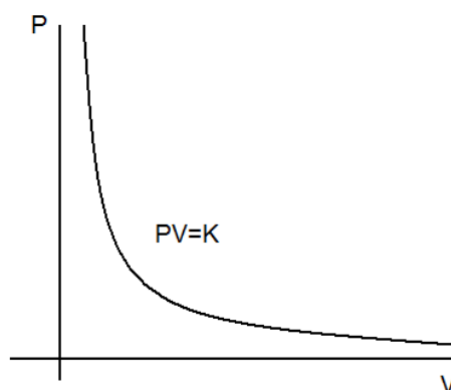


Figura 11 Representación gráfica de la relación P-V de un fluido

6.3 Contextualización del centro y del aula

Para la elaboración de la unidad didáctica se toma como centro docente el IES Fuente de la Peña, localizado al sur de Jaén en la periferia de la ciudad, siendo éste el único centro público de la zona educativa 5, en la que se encuentran otros tres centros concertados (CDP Andrés de Vandelvira, CDP Marcelo Spínola y CDP Santa María de los Apóstoles). Esta zona es limítrofe con la zona 4 (zona sur-este) que no tiene ningún centro público de secundaria, por lo que el centro tiene la adscripción del 33% de uno de los dos centros de primaria (CEIP Jesús-María), existiendo en la zona otros dos centros concertados (CDP Divino Maestro y CDP Pedro Poveda). Debido a esto, el centro se considera atípico, ya que se encuentran más líneas de Bachillerato que de ESO, debido a que la mayor parte del alumnado de los centros adyacentes eligen el centro IES Fuente de la Peña para cursar Bachillerato

Tienen una oferta deportiva escasa, debido a que los polideportivos municipales “oficiales” están muy alejados, consistiendo las instalaciones del barrio en dos campos de deporte, especialmente dedicados a la práctica de fútbol-sala y de fútbol.

También es destacable que en los últimos años se ha detectado en dicha zona donde reside el centro problemas puntuales en el orden social, de seguridad, de salud pública, etc., siendo el consumo de “drogas legales y no legales” (tabaco y, especialmente durante el fin de semana, alcohol) bastante común.

El perfil de la ciudadanía del barrio corresponde a clases sociales relativamente modestas, siendo la tasa de paro similar a la media obtenida durante el primer trimestre del año en Jaén según los datos de la Encuesta de Población Activa, donde el nivel económico de las familias se considera medio-bajo, implicando que la renta “per cápita” media que declaran las familias del alumnado sea inferior a la mitad del salario mínimo interprofesional. En los últimos tiempos ha aumentado considerablemente el número de estudiantes pertenecientes a familias desestructuradas, así como familias con

escasos recursos económicos como consecuencia de la crisis económica. Es por ello que el centro es de Compensación Educativa.

A nivel académico familiar, las familias de los estudiantes tienen escasos estudios académicos: alrededor del 20% posee el título de Bachillerato o estudios universitarios; un 60% posee estudios primarios y un 20% carece de estudios. En cuanto a asistencia al centro por parte de los familiares se considera muy baja, ya que la media suele estar entre 1 o 2 veces por curso, habiendo familias que no acuden nunca. Es por ello que uno de los focos principales de mejora del centro es referido a la participación de los familiares.

En cuanto a los intereses académicos del alumnado de ESO, están encaminados hacia la Formación Profesional de grado medio y superior. Sin embargo, la mayor parte del alumnado de Bachillerato optan por estudios universitarios.

Esta unidad va a ser destinada a un curso de 3º de ESO, dentro de los programas impuestos por la LOMCE, PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento). Dicho programa cumple con los siguientes requisitos:

- El programa se desarrolla en 2º y 3º de ESO.
- Preferentemente los alumnos que optan a este programa son aquellos que presentan dificultades en el aprendizaje no referidas a falta de estudio, además de alumnos que presenten algún tipo de discapacidad.
- El número de alumnos por clase será de entre ocho alumnos como mínimo (seis en el ámbito rural) a quince.
- El objetivo de este programa es el que el alumnado pueda cursar 4º de ESO por la vía ordinaria, logrando obtener el Graduado en ESO.

Concretando en el alumnado, se presentan las siguientes características:

- El grupo consta de 12 alumnos de manera presencial y 1 alumno de manera telemática por las circunstancias del coronavirus, ya que presenta problemas asmáticos y no puede utilizar mascarilla.
- La mayoría del alumnado presenta algún tipo de NEAE (Necesidades Educativas de Aprendizaje Especiales), destacando la gran dificultad que muestran más del 80% de los niños para comprender los contenidos impartidos.
- Todos los alumnos han repetido, o bien en primaria, en secundaria, o en ambos, habiendo repetido 2 años 11 de ellos y 1 año los 2 restantes.

Por otro lado, el aula comprende los siguientes requisitos:

- Distancia entre alumnos acorde a las medidas de seguridad de cara al coronavirus

- Pizarra de tiza y digital
- Proyector de pantalla
- Ordenador de mesa para el profesor
- Gel hidroalcohólico, desinfectante y papel para desinfección de mesas

6.4 Objetivos

6.4.1 Objetivos generales de etapa

Los objetivos de etapa se establecen respecto al criterio establecido en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre. Estos objetivos son aquellos que los estudiantes deben haber trabajado a lo largo de su estancia en la Educación Secundaria Obligatoria y logrado al finalizar la misma.

Analizando el artículo 11 podemos encontrar que la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
5. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
7. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
8. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
9. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
10. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
11. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
12. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

6.4.2 Objetivos del área de matemáticas

Analizando la Orden del 14 de julio de 2016, se encuentra que la enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

Nº item	Objetivos
OM.1.	Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y

	tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
OM.2.	Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
OM.3.	Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
OM.4.	Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presente en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
OM.5.	Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y valorar su belleza.
OM.6.	Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) para realizar cálculos, buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y como ayuda en el aprendizaje.
OM.7.	Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
M.8.	Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

OM.9.	Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
OM.10.	Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
OM.11.	Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Tabla 5 Objetivos específicos del área de matemáticas

Se han denotado los objetivos del área de matemáticas por OM con la finalidad de más adelante relacionar los objetivos del área de matemáticas con los criterios de evaluación y la temporalización.

6.4.3 Objetivos propios del IES Fuente de la Peña en Educación Secundaria Obligatoria

Analizando el Plan de centro, el IES Fuente de la Peña establece los siguientes objetivos propios:

1. Conseguir que tras los cuatro años de la etapa de educación secundaria obligatoria nuestro alumnado alcance el máximo grado de desarrollo de las competencias clave establecidas en la normativa educativa.
2. Lograr que el alumnado del centro adquiriera la titulación de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria, básica para su posterior desarrollo personal, social y educativo.
3. Lograr que todo estudiante continúe con los estudios postobligatorios al terminar su etapa de educación secundaria obligatoria.
4. Desarrollar un sistema de atención a la diversidad de manera coordinada por todos los departamentos y familiares para que se establezca una correcta ejecución y se ajuste a la situación académica y económica de cada alumno, considerando que el centro está establecido como centro de Compensación Educativa.

5. Alcanzar un buen ambiente de convivencia entre el alumnado, a partir de la actuación de todos los miembros de la comunidad educativa, consiguiendo el máximo desarrollo de los procesos educativos.
6. Inculcar entre los estudiantes la necesidad de la formación para el correcto desarrollo de cualquier actividad profesional que llevarán a cabo durante el transcurso de sus vidas.
7. Hacer disfrutar al alumnado con los procesos de aprendizaje, motivándolos y despertando en ellos la curiosidad y las ganas por aprender.
8. Alcanzar el mayor bienestar de todos los miembros de la comunidad educativa, a partir de la satisfacción del trabajo bien hecho y del logro de los objetivos planteados.
9. Mejorar las habilidades del alumnado para trabajar en equipo colaborando, respetando y cooperando con el resto de compañeros y utilizando las herramientas TIC que el centro permita y proporcione con responsabilidad.
10. Desarrollar la conciencia y el compromiso social del alumnado.

6.4.4 Objetivos propios de la unidad

La presente unidad de funciones y gráficas muestra unos objetivos específicos que el alumnado desarrollará en las sesiones y que deben de superar en el examen final. Estos objetivos son:

1. Conocer la descripción cualitativa de gráficas que representen fenómenos del entorno cotidiano.
2. Analizar una gráfica dada y obtener sus características principales.
3. Comparar situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
4. Usar modelos lineales para estudiar situaciones cotidianas y de diferentes ámbitos del conocimiento, haciendo uso para ello de diferentes herramientas como son gráficas y tablas.
5. Conocer la expresión de la ecuación de la recta.
6. Representar gráficamente una situación expresada mediante una tabla o enunciado, y utilizar dicha gráfica para mostrar situaciones de la vida cotidiana.

6.5 Competencias clave

Según el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, el artículo 2 indica que las competencias se definen como capacidades para implementar de manera integrada los contenidos propios de cada etapa educativa y enseñanza, con el objetivo de alcanzar la resolución de problemas complejos y la realización de actividades de manera adecuada.

Las competencias de las que se habla y su relación con la presente unidad didáctica son:

Competencias	Descripción	Desempeños por parte del alumnado
Comunicación lingüística (CCL)	Hacer uso de un lenguaje adecuado, utilizando las estructuras lingüísticas y normas ortográficas y gramaticales para realizar textos escritos y orales Comprender el sentido de un texto escrito u oral. Respetar las normas de comunicación en el aula, ya sea la explicación del profesor o el turno de los compañeros	Describe de manera correcta lo que pretende exponer Comprende la descripción de un texto y lo representa correctamente con ayuda de lenguaje gráfico. Hace uso de un buen lenguaje matemático referido a las funciones y gráficas Hace un buen uso de su turno de palabra, atendiendo en clase y participando cuando se le requiere.
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)	Conocer y utilizar el lenguaje matemático básico, tales como operaciones, geometrías, medición, interpretación gráfica, etc. Resolver problemas y saber relacionar diferentes métodos de resolución.	Comprende y relaciona el concepto de función con el concepto de gráfica. Interpreta adecuadamente un enunciado que describe una gráfica. Resuelve problemas en los que se necesita la interpretación de una gráfica y/o una función.
Competencia digital (CD)	Interpretar softwares de representación gráfica.	Entiende la utilidad y funcionamiento de

	Manejar herramientas digitales para un mayor entendimiento de los contenidos.	programas que representan gráficamente una función Es capaz de graficar funciones sencillas manipulando programas matemáticos.
Aprender a aprender (CAA)	Desarrollar métodos y estrategias que permitan un mayor entendimiento de los contenidos. Evaluar los resultados obtenidos y relacionarlos con lo ya conocido.	El alumno es capaz de elaborar un esquema mental que le permita visualizar lo que ocurre en una gráfica, enunciado o tabla. Cuando obtiene un resultado, utiliza el pensamiento crítico y razona si dicho resultado es coherente o no, acorde a lo conocido previamente.
Competencias sociales y cívicas (CSC)	Desarrollar la capacidad de relacionarse con su entorno y de integrarse con el resto de los compañeros Participar como un compañero más en el diálogo y respetar la opinión de los demás	Se relaciona con el resto de los compañeros de manera natural y cívica. Ante una discrepancia, es capaz de dialogar y mostrar sus opiniones e ideas sin alterarse. En un trabajo en grupo, se expresa sin timidez o miedo, argumentando coherentemente sus pensamientos, poniéndolos en común con el resto de los compañeros
Sentido de iniciativa y espíritu	Proactividad y autonomía ante problemas propuestos	Presenta soluciones a problemas poco guiados por el profesor.

emprendedor (SIEP)	Gestionar el trabajo en equipo	En un trabajo de grupo, muestra su opinión a los compañeros sobre el reparto de tareas y propone soluciones.
Conciencia y expresiones culturales (CEC)	Apreciar los valores culturales y la evolución de la historia matemática	Valora el sentido de las matemáticas en la historia y muestra interés por aprender, además de apreciar el valor de las funciones y las gráficas y su relación con la vida real.

Tabla 6 Competencias clave y relación con la unidad didáctica

6.6 Contenidos

A continuación, se detallan los contenidos que se desarrollan en la presente unidad didáctica. Estos, quedan recogidos en la Orden 14 de julio de 2016:

Contenidos para el bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Nº Item	Item
C.1.1.	Planificación del proceso de resolución de problemas.
C.1.2.	Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación de problemas, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
C.1.3.	Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
C.1.4.	Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
C.1.5.	Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
C.1.6.	Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

C.1.7.	Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.
--------	--

Tabla 7 Contenidos para el bloque 1: procesos, métodos y actitudes en matemáticas

Contenidos para el bloque 4: Funciones	
Nº item	item
C.4.1.	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
C.4.2.	Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
C.4.3.	Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

Tabla 8 Contenidos para el bloque 4: funciones

Se han denotado los contenidos por C. con la finalidad de más adelante relacionar dichos contenidos con los criterios de evaluación y la temporalización.

6.7 Metodología

Hoy en día existen dos tendencias en el aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, están las tendencias conductuales (asociacionistas) donde se considera que aprender es cambiar conductas, donde el aprendizaje de destrezas más complejas se dan gracias a la transmisión de varias destrezas más simples, es decir, la realización de una operación más compleja, por ejemplo, comienza por la operación análoga más simple con pocas cifras, pasando cada vez a una operación más compleja con más cifras. Por otro lado, las interpretaciones cognitivas (estructuralistas) del aprendizaje matemático indican que el aprendizaje consiste en modificar estructuras mentales previas surgidas de experiencias que el estudiante ha vivido hasta entonces mediante el aprendizaje de conceptos. Estos conceptos, dada su complejidad, implica que no pueden descomponerse en conceptos más simples, sino que se aprenden a partir de la

resolución de problemas, o de la realización de tareas más complejas. Cuando el estudiante relaciona los nuevos problemas con los que conocía hasta ahora, éste buscará soluciones por medio de las estructuras y conocimientos previos. A este proceso Piaget lo llama “*asimilación*”. Sin embargo, cuando las estructuras previamente conocidas por el estudiante no le surgen efecto a la hora de resolver el nuevo problema, debido a que la estructura que hasta ahora conoce no le sirve para explicar las nuevas ideas, el estudiante tiene que cambiar su estructura por otra para asimilar el nuevo conocimiento. El proceso de cambio Piaget lo denomina “*acomodación*”, mientras que el proceso de asimilación – acomodación lo denomina “*equilibración*”.

Bruner, psicólogo estadounidense destacaba que el aprendizaje debe de ser **significativo** para que los conocimientos sean adquiridos de la manera más eficiente por el discente. Este aprendizaje lo consideraba significativo cuando se relaciona de manera sensible con las ideas que el aprendiz ya posee. El grado de significación depende del nivel con que se relaciona las ideas finales con las ideas que ya tomaban forma en la estructura cognitiva.

Además, el aprendizaje de los conceptos matemáticos debe darse a partir de experiencias concretas, donde los alumnos puedan trabajar de manera sencilla para descubrir principios y soluciones matemáticas. Para que esta estrategia tome sentido en las estructuras, Bruner indicaba que hay que fomentar que los alumnos formen imágenes perceptivas de las ideas matemáticas.

Tal como se habló en el apartado 4.2 y 5.2 donde se indica que los modelos de aprendizaje basados en el “*Método Singapur*” van desde los conceptos más concretos hasta llegar a los más abstractos, se debe de desarrollar una estrategia que permita, de igual modo, trabajar con objetos concretos antes de pasar a desarrollar otros más abstractos.

Por otro lado, Ausubel, psicólogo y pedagogo estadounidense proponía la **enseñanza por descubrimiento** como medio para lograr un aprendizaje significativo, en el que el aprendizaje es debido a un proceso de relación del alumno con los problemas, en el que el mismo alumno deberá descubrir en el curso de su proceso de resolución de problemas el contenido que le llevará a la resolución final. Esto nos lleva a otra forma de enseñanza de aprendizaje significativo, la basada en la resolución de problemas.

Según (Fortea Bagán, 2019) las investigaciones en didáctica no han llegado a probar que una metodología sea mejor que el resto en cualquier situación de enseñanza-aprendizaje. La eficacia de la metodología depende de varios factores como son:

1. Resultados de aprendizaje u objetivos previstos

2. Características del estudiante (conocimientos previos, capacidades, motivación, etc.)
3. Características del profesor (estilo docente, personalidad, motivación, capacidad docente, etc.)
4. Características de la materia a enseñar (nivel de complejidad, área disciplinar, carácter teórico o práctico, etc.)
5. Condiciones físicas y materiales (número de estudiantes, recursos disponibles, disposición en el aula, etc.)

Debido a tal numerosa complejidad de factores, la mayoría de ellos incontrolables, la investigación didáctica no ha encontrado el “método ideal”, aunque sí que se han obtenido unas conclusiones generales:

- a) Todas las metodologías son equiparables cuando el objetivo es alcanzar objetivos simples en la adquisición y comprensión de conocimientos.
- b) Las metodologías enfocadas en el estudiante son más adecuadas cuando se trata de alcanzar objetivos de memorización a largo plazo, de desarrollo del pensamiento, o del desarrollo de la motivación del estudiante.
- c) La eficacia superior de ciertas metodologías didácticas es ciertamente menos atribuible a ellas por sí mismas que a la cantidad y calidad de trabajo intelectual personal del estudiante que permiten generar.

(Fernández, 2006) propone una clasificación de las metodologías didácticas en función de la participación del profesor docente y de los estudiantes:

- Métodos basados en las distintas maneras de exposición.
- Métodos orientados al trabajo en equipo y a la discusión.
- Métodos fundamentados en el aprendizaje individual y trabajo autónomo.

A partir de esta clasificación, la autora propone una serie de criterios para la selección oportuna de cada metodología interactiva. Dichos criterios se muestran en la Tabla 9.

CRITERIOS DE SELECCIÓN	METODOS DE ENSEÑANZA						
	Exposiciones (Lección magistral)		Discusiones o trabajo en grupo			Aprendizaje individual	
	Formales	Informales	Seminario	Estudio caso	Enseñanza por pares (Proy, ABP, Ap. Coop.)	Dirección de estudios	Trabajo individual Autónomo sin profes.
Niveles de los objetivos cognitivos	INF. (conocer y aplicar)	INF. (conocer y aplicar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)
Capacidad para propiciar un aprendizaje autónomo y continuado	DEBIL	DEBIL	MEDIANO	MEDIANO	ELEVADO	ELEVADO	ELEVADO
Grado de control ejercido por el estudiante	DEBIL	DEBIL	MEDIANO	ELEVADO	ELEVADO	ELEVADO	ELEVADO
Número de estudiantes que se puede abarcar	GRANDE (> 30)	GRANDE (> 30)	MEDIO (15-30)	MEDIO (15-30)	MEDIO (15-30)	PEQUEÑO (1-15)	GRANDE (> 30)
Número de horas de preparación, encuentros con estudiantes y de correcciones	MEDIO	MEDIO	PEQUEÑO	MEDIO	GRANDE	GRANDE	GRANDE

Tabla 9 Criterios para la selección de diversas metodologías. Fuente A. Fernández (2006)

Por último, se incluye una tabla (De Miguel Díaz, 2006) adaptada (Forteza Bagán, 2019) en la que se reúnen las diversas metodologías, entre las que se subrayan las que se utilizan en la presente unidad didáctica.

MÉTODO	DESCRIPCIÓN	FINALIDAD
LECCIÓN MAGISTRAL	Método expositivo consistente en la presentación de un tema lógicamente estructurado con la finalidad de facilitar información organizada siguiendo criterios adecuados a la finalidad pretendida. Centrado fundamentalmente en la exposición verbal por parte del profesor de los contenidos sobre la materia objeto de estudio.	Transmitir Conocimientos y activar procesos cognitivos en el estudiante
RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS	Situaciones donde el alumno debe desarrollar e interpretar soluciones adecuadas a partir de la aplicación de rutinas, fórmulas, o procedimientos para transformar la información propuesta inicialmente. Se suele usar como complemento a la lección magistral.	Ejercitar, ensayar y poner en práctica los conocimientos previos
APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP) (Problem Based Learning –PBL-)	Método de enseñanza-aprendizaje cuyo punto de partida es un problema que, diseñado por el profesor, el estudiante en grupos de trabajo ha de abordar de forma ordenada y coordinada las fases que implican la resolución o desarrollo del trabajo en torno al problema o situación.	Desarrollar aprendizajes activos a través de la resolución de problemas
ESTUDIO DE CASOS (Case Studies) (Case Method)	Análisis intensivo y completo de un hecho, problema o suceso real con la finalidad de conocerlo, interpretarlo, resolverlo, generar hipótesis, contrastar datos, reflexionar, completar conocimientos, diagnosticarlo y, en ocasiones, entrenarse en los posibles procedimientos alternativos de solución.	Adquisición de aprendizajes mediante el análisis de casos reales o simulados
APRENDIZAJE POR PROYECTOS (Learning by Projects) (Project Based Learning)	Método de enseñanza-aprendizaje en el que los estudiantes llevan a cabo la realización de un proyecto en un tiempo determinado para resolver un problema o abordar una tarea mediante la planificación, diseño y realización de una serie de actividades y todo ello a partir del desarrollo y aplicación de aprendizajes adquiridos y del uso efectivo de recursos.	Realización de un proyecto para la resolución de un problema, aplicando habilidades y conocimientos adquiridos
APRENDIZAJE COOPERATIVO	Enfoque interactivo de organización del trabajo en el aula en el cual los alumnos son responsables de su aprendizaje y del de sus compañeros en una estrategia de corresponsabilidad para alcanzar metas e incentivos grupales.	Desarrollar aprendizajes activos y significativos de forma cooperativa
CONTRATO DIDÁCTICO O APRENDIZAJE (Learning Contract)	Alumno y profesor de forma explícita intercambian opiniones, necesidades, proyectos y deciden en colaboración como llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje y lo reflejan oralmente o por escrito. El profesor oferta unas actividades de aprendizaje, resultados y criterios de evaluación; y negocia con el alumno su plan de aprendizaje.	Desarrollar el aprendizaje autónomo

Tabla 10 Metodologías para formar en competencias (Fortea Bagán, 2019). Adaptación de (De Miguel Díaz, 2006)

Es por ello, que se concluye que la mejor metodología es, en realidad, una combinación de varias metodologías, adaptando cada una de ellas y seleccionándolas en función de sus ventajas e inconvenientes, la intención educativa que se desea, y el contexto social e intelectual en el que se desarrolla. En definitiva, varía en función de todos los factores vistos anteriormente.

Por todo esto, en la presente unidad didáctica se desarrolla una combinación de distintas metodologías, adaptando cada una a los diversos factores hablados, para así conseguir que la metodología elegida sea la óptima para el ámbito didáctico que se desea llevar a cabo.

Para empezar, se utilizará un sistema tradicional, o como se indica en la Tabla 10, “lección magistral”, en la que el docente llevará a cabo el método expositivo en la explicación teórica del tema, transmitiendo de manera oral, escrita con ayuda de la pizarra, y visual con ayuda del proyector los diversos contenidos del tema, exponiendo todos los conceptos que los alumnos deben aprender en el desarrollo de la lección. En el ejercicio de esta metodología los alumnos tomarán carácter pasivo, atendiendo y siguiendo la lección con apuntes según el profesor lo estime oportuno. Además, se hará uso del intercambio de opiniones entre profesor y alumnos, tomando estos últimos un papel activo en este proceso metodológico, en el que las participaciones de los alumnos, por un lado, muestran al profesor que están atentos y siguen la lección, y por otro, que lo expuesto hasta ahora es comprensible y claro.

Para afianzar los contenidos explicados por el profesor, y gracias al carácter práctico que desarrolla la materia de matemáticas en la didáctica, se hará uso de la resolución de ejercicios y problemas relacionados con el tema explicado. Primero se utilizarán ejemplos explicativos que muestren la cara práctica de lo comentado hasta el momento, siguiendo por ejercicios que los propios alumnos deberán de realizar de manera individual, tanto en el tiempo de clase que el profesor estime oportuno, como en el trabajo autónomo que los alumnos harán en casa.

Además, es destacable el carácter estructuralista que se busca con la finalidad de alcanzar un aprendizaje significativo para los alumnos, en los que ellos mismos entiendan el proceso a seguir, qué objetivo deben alcanzar, y de qué manera están relacionadas las actividades que se les proponen con la vida real y la mejor o las diferentes maneras de afrontar dichos problemas. Se partirá desde lo más básico y concreto hasta alcanzar los conceptos más abstractos. Con todo esto, se anima al alumno, al igual que en el “método Singapur”, a no buscar el resultado final, sino en centrarse en la comprensión y explicación del proceso.

Para conseguir lo explicado anteriormente, se hará uso del aprendizaje basado en problemas (ABP) (Problem Based Learning – PBL), donde los alumnos en grupos de trabajo buscarán la solución o múltiples soluciones a un problema diseñado por el profesor. También se trabajarán actividades tipo IBL (aprendizaje basado en la investigación) desarrollando de manera coordinada y ordenada las fases que dan lugar a la resolución del problema, además de convertirse en investigadores a través de la puesta en práctica de actividades basadas en la búsqueda y el descubrimiento. Con estas metodologías se consigue que sea el propio alumno el que “construye el conocimiento” a partir de lo que ya conoce. Es decir, el alumno a lo largo de su trabajo deberá de investigar y razonar, de manera coordinada con el grupo, sin “lección magistral” o “exposición teórica” previa. Lo más interesante de estas metodologías es que resultan verdaderamente motivadoras y enriquecedoras debido a que el alumno, a partir de los

conocimientos que ya posee, encontrará sentido y utilidad a lo que ya conoce y a lo que va a aprender, ya que los problemas a los que se enfrentan son simulaciones de problemas reales, o incluso pueden darse casos de problemas reales, enriqueciendo aún más el interés si el tema del problema coincide con sus intereses y gustos.

Con respecto al desarrollo del uso de las herramientas TIC, los alumnos podrán hacer uso de sus teléfonos móviles para poder buscar información, utilizar herramientas gráficas y recursos web que el profesor considere oportuno. Además, se hará uso de la herramienta Classroom como medio digital para mantener en continuo contacto tanto a profesor con alumnos, como a los alumnos entre sí, donde tendrán a mano todos los contenidos y herramientas necesarias que el profesor estime oportuno. Todos los recursos que se utilizarán en las sesiones se describen en el siguiente subapartado.

6.8 Actividades y recursos

6.8.1 Actividades

El desarrollo de las actividades propuestas con la finalidad de afianzar los conceptos explicados, se encuentran en el Anexo I. Dichas actividades tendrán asociadas su correspondiente criterio de evaluación para así más adelante facilitar la evaluación del alumnado.

La finalidad de estas actividades no reside únicamente en la absorción y afianzamiento por parte del alumno de los conceptos explicados, sino también toma como misión mejorar el uso de las TIC en los centros de secundaria, desarrollar sus capacidades de trabajo en equipo, así como la mejora de la comunicación tanto verbal como escrita en el ámbito de las matemáticas.

6.8.2 Recursos

A continuación, se muestran los recursos disponibles para la elaboración de las sesiones en el desarrollo de la unidad didáctica:

- Libro de texto: Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3 ESO. Editorial Anaya. ISBN 978-84-698-7546-6.
- Pizarra de tiza.
- Pizarra tecnológica.
- Proyector.
- Ordenador del profesor.
- Cuaderno de estudiante.
- Calculadora.
- Papel impreso para diferentes tipos de actividades programadas por el profesor.
- Fichas de adaptación curricular proporcionadas por la editorial Anaya

- Conexión a internet por parte del docente
- Página web Geogebra <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es>
- Página web Classroom

6.9 Atención a la diversidad

A continuación, se desarrollan las medidas, programas, planes o actuaciones para la atención a la diversidad establecidas en el capítulo IV del Decreto 111/2016, de 14 de junio, y en el capítulo IV de la Orden de 14 de julio de 2016 en el marco de la planificación de la Consejería competente en materia de educación.

A nivel de Departamento, se implementarán las medidas de atención a la diversidad necesarias para el alumnado que las necesite, ya sean éstas adaptaciones no significativas (en las que se priorizan los objetivos, contenidos y evaluación) como significativas (se modifican los objetivos, contenidos y criterios de evaluación).

Por otra parte, se elaborarán actividades de refuerzo educativo para los alumnos que muestran dificultades para lograr los objetivos en el área de matemáticas, y actividad de ampliación para los que logren estos objetivos con mayor facilidad.

Las actuaciones implementadas en esta unidad didáctica tienen en cuenta intervenciones educativas con la finalidad de dar respuesta a distintos ritmos, motivaciones, situaciones socioeconómicas y culturales, intereses, estilos de aprendizaje y de salud del alumnado. Por todo ello se desarrollan 3 niveles de actuación:

1. **Atención a la diversidad en la programación.** Se contemplará dentro del bloque de funciones aquellos contenidos en los que el alumnado tenga un nivel más heterogéneo, teniendo en cuenta que los alumnos necesitan de distintos tiempos para alcanzar los objetivos programados. Es por ello, que se debe de programar con la finalidad de que todos los alumnos adquieran unos conocimientos mínimos al final de la evaluación, con diversas opciones para recuperar los conocimientos no superados.
También se han de tener en cuenta determinadas actividades, como es el caso de actividades de ampliación o de investigación, las cuales mejoran el trabajo autónomo y dan la oportunidad de implementar el ritmo e intensidad que favorezca en mayor grado a cada alumno.
2. **Atención en la metodología.** La metodología propuesta en el apartado 6.7 y los procedimientos de evaluación planificados fomentan entre el alumnado el trabajo en equipo, así como la posibilidad de aprender por sí mismos, implementando una metodología que incluya un aprendizaje significativo en el que el alumnado tome una participación activa, favoreciendo el trabajo individual y cooperativo, así como el pensamiento racional crítico.

3. **Atención en los materiales y aula.** Como medida en el aula se proponen actividades y tareas en las que el alumnado pondrá en práctica un amplio repertorio de procesos cognitivos, además de implementar actividades que darán lugar al trabajo en equipo para su ejecución.

En cuanto al alumnado, será necesario averiguar cuáles de ellos necesitan de un mayor seguimiento educativo o personalización de las estrategias para planificar refuerzos o ampliaciones, gestionar convenientemente los espacios y tiempos, proponer intervención de recursos humanos y materiales, y ajustar el seguimiento y evaluación de sus aprendizajes. Para todo ello, un proceso que se seguirá será el de la evaluación inicial, realizándose al inicio del curso en la que se puede identificar las competencias que el alumnado tiene adquiridas, más allá de los meros conocimientos, que les permitirán la adquisición de nuevos aprendizajes, destrezas y habilidades.

Por otro lado, a nivel de centro, en el IES Fuente de la Peña se desarrollan diferentes actuaciones según las necesidades específicas del alumnado:

1. Educación compensatoria en 1º y 2º de ESO.
2. Programas de refuerzo educativo: Refuerzo de Matemáticas en 1º, 2º y 3º de ESO.
3. PMAR (Programa para la Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento) en 2º y 3º de ESO
4. Atención al alumnado con materia pendiente del curso/s anterior/es.
5. Refuerzo de materias troncales en 4º de ESO.
6. Atención a alumnado con altas capacidades.

6.9.1 Alumnado con necesidades especiales

A nivel de grupo, se extraen las notas de las instrucciones de 8 de marzo de 2017, 2017 por las que se actualiza el protocolo de detección, identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa:

A) Alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE):

1. Compensatoria (COMP): Aquel que presenta un desfase curricular de al menos dos cursos en la ESO. Este desfase no se explica por la existencia de Necesidades Educativas Especiales (Discapacidad-DIS) o Dificultades de Aprendizaje (DIA) y puede estar relacionado con su historia personal, familiar y/o social, escolarización irregular por pertenecer a familias temporeras o itinerantes, por hospitalización, atención domiciliaria sentencias judiciales que afectan a su escolarización regular al centro educativo, por absentismo y por incorporación tardía al sistema educativo.

2. Dificultades de Aprendizaje (DIA):

A) Dificultades Específicas de Aprendizaje: Alumnado que necesite una atención educativa no ordinaria al presentar desórdenes significativos en procesos cognitivos básicos relacionados con procesos de aprendizaje, que deterioren su rendimiento académico y la correcta ejecución de actividades de la vida cotidiana, sin ser determinadas como discapacidad intelectual, motriz o sensorial, ni por falta de oportunidades para el aprendizaje o por factores socioculturales. Se considera que interfieren en el rendimiento escolar cuando el alumnado muestra un desfase curricular de al menos dos cursos en la Educación Secundaria.

Cuatro tipos: 1) Dificultades específicas de aprendizaje de la lectura o dislexia; 2) en la escritura o disgrafía; 3) en la escritura o disortografía; 4) del cálculo o discalculia.

B) Dificultades de aprendizaje por capacidad intelectual límite (C.I entre 70-80, etc)

C) Dificultades de Aprendizaje por retraso en el lenguaje

D) Dificultades de Aprendizaje derivadas de trastornos por déficit de atención con o sin hiperactividad (medidas específicas que no impliquen recursos específicos para su desarrollo (p.ej ACNo significativa).

B) Alumnado con Necesidades Educativas Especiales: (NEE)

- Trastorno por Déficit de Atención con y sin Hiperactividad: (TDA-H): Patrón persistente de falta de atención, impulsividad e hiperactividad. Supone alteraciones en alguna de estas áreas, aunque en grados diferentes, afectando de forma significativa al aprendizaje escolar y a la adaptación social y familiar. Tipos: Predominio del déficit de atención/Predominio de impulsividad-hiperactividad/ Tipo Combinado (3 síntomas).
- Discapacidad Sensorial (Visual, Auditiva)
- Discapacidad Física
- Discapacidad Intelectual (un C.I. de 70 o inferior)
- Trastornos de la Comunicación
- Trastornos de espectro Autista (Autismo, S.Asperger, S.Rett, Trastorno del Desarrollo no especificado, etc)
- Trastornos Graves de Conducta (TGC)
- Enfermedades raras y crónicas / OTROS trastornos mentales

6.9.2 Medidas extraordinarias para alumnado con NEAE

1. **ACS:** Solo para alumnado con NEE (discapacidad) que tenga un desfase curricular al menos de dos cursos en la materia. Responsable de elaboración maestro de P.T. Deben de estar finalizadas antes de la primera sesión de evaluación según la normativa vigente.

2. **ACNS:** Estas adaptaciones van dirigidas al alumnado con NEAE si presenta un desfase curricular de al menos un curso en la materia. *Se entiende por nivel de competencia alcanzado en la asignatura, el curso del que el alumno/a tiene superados los criterios de evaluación (por tanto, si tiene aprobadas las materias del curso anterior, no existe ese desfase curricular).
3. **Programas Específicos (P.E):** Son un conjunto de actuaciones que tienen como objetivo favorecer el desarrollo de procesos implicados en el aprendizaje (MEMORIA, ATENCIÓN, LENGUAJE Y COMUNICACIÓN, HABILIDADES SOCIALES, GESTIÓN DE EMOCIONES, ETC). Están destinados al alumnado que presenta NEAE.

Tipos:

P.E.1: Programa Específico para el desarrollo comunicativo y lenguaje

P.E.2: Desarrollo Cognitivo

P.E.3: Desarrollo Social y Emocional

P.E.4: Autonomía Personal

6.9.3 Contextualización y actuación sobre el grupo

El grupo al que va destinada la unidad didáctica, nombrando a sus alumnos por sus siglas para respetar sus identidades, presenta las siguientes características:

DIA (Dificultades en el aprendizaje)	COMP (Compensatoria)	DIS (Discapacidad)
C.P.M.A.	D.L.R.	E.M.F.
C.N.M.	G.P.E.O.	M.M.B.
M.R.P.	P.R.P.	

Tabla 11 Alumnos con necesidades de aprendizaje especiales

Se proponen como medidas especiales el programa específico para C.P.M.A., E.M.F., M.R.P y M.M.B. Por otro lado, se propone aula temporal de adaptación lingüística para F.S.

También se propone una adaptación curricular no significativa en la que su elaboración será coordinada por el tutor/a que será el/la responsable de cumplimentar en séneca todos los apartados, salvo el apartado de propuesta curricular que será cumplimentado

por el profesor/a de la materia. Dicha adaptación curricular no significativa será propuesta para los alumnos C.P.M.A., P.R.P y C.N.M.

6.10 Temporalización

En este apartado se expondrá la programación de cada una de las sesiones atendiendo a diversos factores como son: los contenidos que se tratarán, las actividades programadas y la atención a la diversidad.

El desarrollo de la unidad didáctica se llevará a cabo en un total de 8 sesiones. Se detallará para cada sesión, enlazando con lo visto hasta ahora, las actividades propuestas, los objetivos del área de matemáticas al que responde cada sesión, los contenidos a tratar y las competencias clave que se pretenden cubrir.

Siguiendo la temporalización que propone el centro, la unidad de funciones y gráficas irá detrás de sistemas de ecuaciones, desde el 8 de marzo hasta el 19 de marzo de 2021, en total 2 semanas en las que se imparten 4 horas semanales de matemáticas, por lo que hay 8 sesiones de 60 minutos de duración.

Se tendrá en consideración un tiempo de cortesía de 10 minutos entre que el profesor cambia de clase, los alumnos se sientan, permanecen callados, sacan los libros etc... Por tanto, las clases se considerarán de una duración de 50 minutos.

Sesión 1 INTRODUCCIÓN, DEFINICIÓN DE FUNCIÓN Y GRÁFICA	
Contenidos: C.1.2., C.1.4., C.1.5., C.4.1.	Objetivos: OM.1., OM.10.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, SIEP	Actividades: 1, 2 y 10 del anexo I.
Desarrollo de la sesión: - Se comenzará por presentar la lección del “Tema 9 Funciones. Características”. El primer apartado se nombrará como “9.1 Las funciones y sus gráficas” y se dictarán las definiciones de función, variable dependiente e independiente y de representación gráfica (15 minutos) - Explicación de la actividad 1 como ejemplo de lo explicado hasta ahora y puesta en común entre todos los alumnos. Resolución de dudas de los alumnos. (15 minutos). - Realización de la actividad 2 por parte del alumnado en clase, ayudando el profesor de manera individual a quien lo necesite. Si se considera que los alumnos en general están perdidos, el profesor ayudará de manera colectiva utilizando la pizarra y resolviendo alguna de las preguntas (10 minutos). - Presentación de la actividad 10 del anexo I, división de grupos e indicación de la fecha límite (10 minutos).	

Sesión 2 ACTIVIDAD INTERPRETACIÓN GRÁFICA DEL VUELO DE UN AVIÓN	
Contenidos: C.1.2., C.1.3., C.1.5., C.4.1.	Objetivos: OM.1., OM.2., OM.10.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, CSC	Actividades: 3 del anexo I.
Desarrollo de la sesión: - Asignación de grupos (3 minutos) - Reparto de la actividad a cada grupo (2 minutos) - Explicación de la actividad, utilizando además un ejemplo explicativo (10 minutos) - Misión 1 de la actividad (15 minutos) - Misión 2 de la actividad (15 minutos) Se proponen un total de 4 misiones (2 extra a las esperadas) por si sobrara tiempo.	
Sesión 3 CRECIMIENTO/DECRECIMIENTO Y MÁXIMO/MÍNIMO RELATIVO	
Contenidos: C.1.2., C.1.3., C.1.5., C.4.1., C4.2.	Objetivos: OM.1., OM.8., OM.11.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA,	Actividades: 4, 5 y 6 del anexo.
Desarrollo de la sesión: - Presentación del apartado “9.2. Aspectos relevantes de una función” - Explicación de los conceptos de crecimiento/decrecimiento y máximo/mínimo relativo por parte del profesor de manera oral, dictando a los alumnos los apartados para posteriormente comenzar a explicarlos con ejercicios (20 minutos). - Realización del ejercicio 4 por parte del profesor para explicar los conceptos teóricos y resolución de dudas de los alumnos (10 minutos) - Realización por parte de los alumnos de la actividad 5 y corrección en clase por parte del profesor en la pizarra (10 minutos). - Realización por parte de los alumnos de la actividad 6 y corrección en clase por parte del profesor en la pizarra (10 minutos). - Se manda para casa la actividad 6.	
Sesión 4 TENDENCIA, CONTINUIDAD Y PERIODICIDAD	
Contenidos: C.1.2., C.1.3., C.1.5., C.4.1. C.4.2.	Objetivos: OM.1., OM.8. OM.11.

Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, CSC	Actividades: 7, 8 y 9 del anexo.
Desarrollo de la sesión: - Revisión sobre qué alumnos han traído la actividad de la clase anterior hecha y corrección de la actividad por parte del profesor en la pizarra (10 minutos). - Siguiendo el apartado anterior, definición teórica por parte del profesor en la pizarra de los conceptos de tendencias, continuidad y periodicidad y anotación en los cuadernos por parte de los alumnos de estos conceptos. Además, el profesor se ayudará de ejemplos gráficos inventados por él para mostrar las características de lo visto hasta ahora (20 minutos) - Se propone la actividad 7 para que los alumnos hagan en sus cuadernos mientras que el profesor recorre la clase resolviendo dudas para posteriormente resolverlo de manera conjunta con todos los alumnos. (10 minutos). - De igual manera que con la actividad 7 se procederá con la actividad 8 (10 minutos). - Se manda para casa la actividad 9.	
Sesión 5 ACTIVIDADES INTERPRETACIÓN DE GRÁFIAS	
Contenidos: C.1.2., C.1.3., C.1.5., C.4.1.	Objetivos: OM.1., OM.2., OM.10.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, CSC	Actividades: 11 del anexo I.
Desarrollo de la sesión: - Revisión sobre qué alumnos han traído la actividad de la clase anterior hecha y corrección de la actividad por parte del profesor en la pizarra (10 minutos). - Presentación de la actividad que vamos a desarrollar, en la que en grupos de 3 (mismos grupos que vienen haciendo el resto de los trabajos grupales) tendrán que desarrollar las dos actividades que se proponen. Para ello el profesor les explica, leyendo los enunciados de ambos ejercicios, el contexto en el que van a trabajar (20 minutos para cada ejercicio, en total 40 minutos)	
Sesión 6 ACTIVIDAD GRÁFICA DESCONTEXTUALIZADA	
Contenidos: C.1.2., C.1.3., C.1.5., C.4.1.	Objetivos: OM.1., OM.2., OM.9., OM.10.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA, CSC	Actividades: 10 del anexo I.
Desarrollo de la sesión:	

- Presentación por parte de los estudiantes, grupo por grupo, del trabajo de la actividad 10. Los grupos de alumnos irán saliendo a la pizarra para narrar el contexto que han elegido para la gráfica-problema que se les propuso delante de todos sus compañeros, con la finalidad de que se expongan a situaciones de defensa de trabajos delante de otras personas, en este caso, sus propios compañeros y el profesor. El profesor tratará cada trabajo por separado discutiendo tanto con el grupo que lo está exponiendo como con el resto de los compañeros, señalizando las partes más interesantes, ingeniosas, o los errores cometidos (50 minutos).	
Sesión 7 REPASO GLOBAL DE LA UNIDAD	
Contenidos: C.1.2., C.1.4., C.1.5., C.4.1., C.4.2.	Objetivos: OM.1., OM.10.
Competencias Clave: CCL, CMCT, CAA	Actividades: 12 y 13 del anexo I.
Desarrollo de la sesión: - La Sesión 7 corresponderá a un repaso de la unidad vista hasta ahora, enfocado principalmente en la elaboración de problemas por parte de los alumnos en la hora de clase, guiados en todo momento por el profesor que ayudará de manera individual o grupal, dependiendo de la situación.	
Sesión 8 EVALUACIÓN	
Contenidos: C.1.2., C.1.3., C.1.4., C.1.5., C.4.1., C.4.2.	Objetivos: OM.1., OM.2., OM.8., OM.9., OM.10., OM.11.
Competencias Clave: CCL, CMCT, SIEP	Actividades: No procede
Desarrollo de la sesión: - Se realizará una prueba escrita individual en la que se les preguntará por los contenidos trabajados durante toda la unidad didáctica (50-60 minutos).	

6.11 Evaluación

6.11.1 Estándares de aprendizaje evaluables

Los estándares de aprendizaje son una concreción de los criterios de evaluación, donde estos permiten concretar los resultados que se pretenden alcanzar entre los alumnos.

Los estándares de aprendizaje evaluables asociados a los criterios de evaluación de los contenidos de la presente unidad didáctica son:

Estándares de aprendizaje para el bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	
Nº Item	Item
EA.1.1.1	Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.
EA.1.2.2	Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
EA.1.2.3.	Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
EA.1.2.4.	Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
EA.1.2.5.	Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
EA.1.3.1.	Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
EA.1.3.2.	Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.
EA.1.5.1.	Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
EA.1.6.1.	Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
EA.1.6.2.	Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
EA.1.6.3.	Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
EA.1.6.4.	Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

EA.1.6.5.	Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
EA.1.12.1.	Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido, ...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión.
EA.1.12.2.	Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.
EA.1.12.3.	Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 12 Estándares de aprendizaje para el bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

Estándares de aprendizaje para el bloque 4: Funciones	
Nº Item	Item
EA.4.1.1	Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
EA.4.1.2.	Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto.
EA.4.1.3.	Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.

Tabla 13 Estándares de aprendizaje para el bloque 4: Funciones

Se han denotado los estándares de aprendizaje por EA. con la finalidad de, a continuación, relacionar estos con los criterios de evaluación.

6.11.2 Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación quedan recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y en la Orden 14 de julio de 2016. Además, en esta última Orden, podemos encontrar las competencias que se desean desarrollar con cada uno de los criterios de evaluación. También, en el Real Decreto se encuentran los estándares de aprendizaje evaluables. Todo ello se muestra a continuación, junto a los objetivos del área de matemáticas y los contenidos referidos a cada criterio de evaluación que compete a la presente unidad didáctica.

Criterio de evaluación: 1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.

Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
OM.1.	Bloque 1: C.1.3. C.1.6. C.1.7.	CCL CMCT	EA.1.1.1.

Criterio de evaluación: 1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
OM.1.	Bloque 1:	CMCT	EA.1.2.2.
OM.2.	C.1.1.	CAA	EA.1.2.3.
OM.8.	C.1.2.		EA.1.2.4.
OM.9.	C.1.3.		EA.1.2.5.
OM.11.	C.1.5. C.1.6. C1.7.		

Criterio de evaluación: 1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.

Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
OM.1.	Bloque 1:	CCL	EA.1.3.1.
OM.2.	C.1.2.	CMCT	EA.1.3.2.
OM.3.	C.1.3.	CAA	
OM.11.	C.1.5.		

Criterio de evaluación: 1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
OM.6.	Bloque 1:	CCL	EA.1.5.1.
OM.8.	C.1.2.	CMCT	
OM.10.	C.1.3.	CAA	
OM.11.	C.1.4.	SIEP	
	C.1.5.		
	C.1.7.		
Criterio de evaluación: 1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
OM.1.	Bloque 1:	CMCT	EA.1.6.1
OM.2.	C.1.1.	CAA	EA.1.6.2.
OM.3.	C.1.2.	CSYC	EA.1.6.3.
OM.4.	C.1.4.	SIEP	EA.1.6.4.
	C.1.5.		EA.1.6.5.
Criterio de evaluación: 4.1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.			
Objetivos	Contenidos	Competencias Clave	Estándares de aprendizaje
OM.1.	Bloque 4:	CMCT	EA.4.1.1
OM.4.	C.4.1.		EA.4.1.2
OM.6.	C.4.2.		EA.4.1.3
OM.8.	C.4.3.		EA.4.1.4

Tabla 14 Criterios de evaluación

6.11.3 Criterios de calificación

Los criterios de calificación han de ser mostrados al alumnado y conocidos por estos, para que en todo momento sepan qué se espera de ellos y cómo se les va a evaluar, mejorando el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los referentes principales para la evaluación serán los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje mostrados en el apartado anterior. La calificación de cada criterio de evaluación se obtendrá a partir de las logradadas en los estándares de aprendizaje evaluables en los que dicho criterio se concreta.

La calificación final se repartirá en porcentaje de la siguiente manera:

Aspecto	Criterios	Instrumento	Peso
Participación en el desarrollo de la clase y actitud respecto al profesor y resto de compañeros	Participación y actitud	Participación y actitud	10%
Conceptos teóricos de la materia	Grado de conocimiento de la materia	Examen teórico	50%
Trabajos grupales	Capacidad de resolución de actividades grupales	Entrega de actividades grupales	30%
Trabajo autónomo	Trabajo autónomo	Entrega de trabajo autónomo	10%

Tabla 15 Sistema de calificación

7. Conclusiones

En la realización de este Trabajo Final de Máster se ha pretendido alcanzar los objetivos descritos en el Apartado 2, en la que se anotan las siguientes conclusiones:

- Se ha desarrollado con rigor matemático un tema del temario de oposiciones para el ingreso al ejercicio de profesor en la etapa secundaria obligatoria, concretamente el tema 28 destinado a funciones y representación gráfica.
- Se han analizado las disposiciones curriculares vigentes y algunos libros de texto de diversas editoriales para fundamentar la unidad didáctica desde el punto de vista curricular, además de realizar una investigación sobre el estudio y opinión de diversos autores acerca del tema en cuestión, desarrollando tanto las partes positivas como las negativas y contextualizando la situación actual de los libros de texto frente a los nuevos medios de comunicación.
- Se ha realizado una investigación acerca de las dificultades que muestran los alumnos en el aprendizaje del bloque de funciones y gráficas, dando como resultados errores de tres tipos: errores de concepto, de representación gráfica y de lenguaje analítico. Además, se ha profundizado en un método que ha revolucionado la enseñanza en países asiáticos, obteniendo muy buenos resultados en competiciones matemáticas de prestigio internacional.
- Se ha llevado a cabo el desarrollo de una unidad didáctica de la que se pueden sacar distintas conclusiones:
 - El estudio de diversas metodologías implica que no existe ninguna que sea única y perfecta, sino que en el ámbito de las matemáticas se debe de dar un conjunto de éstas que se adapten a diversos factores como son el contenido que se pretende enseñar, las personas físicas como son el docente y alumnos, el entorno familiar, el contexto social y político, los materiales, etc.
 - Se han analizado los objetivos generales de etapa y del área de matemáticas, así como los que el propio instituto recoge en su plan de centro, además de los contenidos que se pretenden desarrollar y de las competencias clave según las referencias normativas.
 - Las actividades que se proponen son de diversa índole, llevándose a cabo tanto la realización de problemas del libro utilizado, como también actividades grupales de tipo aprendizaje basado en problemas y aprendizaje basado en la investigación con la finalidad de promover la iniciativa y el emprendimiento del alumnado, el trabajo en equipo, mejorar las habilidades de pensamiento reflexivo y crítico, integrar los conocimientos matemáticos y asociarlos con la vida real.

- Se ha hecho hincapié en la atención a la diversidad, analizando las medidas, programas, planes o actuaciones para la atención a la diversidad programadas por el centro, y más concretamente para la clase a la que va dirigida la unidad didáctica, considerada como PMAR (Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento). En este apartado se dan también las actuaciones a seguir por parte de los distintos departamentos.
- Por último, en la evaluación se detallan los estándares de aprendizaje evaluables y criterios de evaluación, relacionando estos con los objetivos, contenidos y competencias clave desarrolladas anteriormente y cerrando la unidad didáctica.

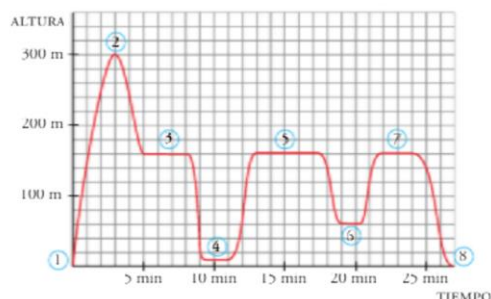
8. Bibliografía

- Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. México: Ingeniería didáctica en educación matemática.
- Ballester Sampedro, S. (2009). Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. *Revista digital: Innovación y experiencias educativas*, 23.
- Beaton, A. E. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA'S Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston Collage.
- Bolivar, A. (2010). *Competencias básicas y currículo*. Madrid: síntesis.
- Campanario, J. M. (2001). ¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 351-364.
- Carlson, M. O. (2005). Key aspects of knowing and Learning the concept of function. . MAA ONLINE, The mathematical Association of America <http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#ce>.
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. . *Research in Collegiate Mathematics Education. III. CBMS Issues in Mathematics Education*, 114-162.
- Carlson, M. P. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. . *Joint Meeting of PME and PMENA* , 165-172.
- De Miguel Díaz, M. (2006). *Metodologías de enseñanza y aprendizaje para el*. Madrid: Alianza.
- Fernández, A. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. . *Educatio Siglo XXI*, 24.
- Fortea Bagán, M. Á. (2019). *Metodologías didácticas para la enseñanza/aprendizaje de competencias*.
- Linares, A. Z. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 263-274.

- López Varona, J. A. (1997). *Ministerio de Educación y Cultura. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación*. Obtenido de <http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/timssmat.pdf?documentId=0901e72b80110725>
- Palop, P. F. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 201-217.
- Piedrahita, A. (1999). El Texto escolar Como instrumento pedagógico: Partidarios Y detractores. *Revista De Ciencias Humanas*, 110-118.
- Sarmiento Santana, M. &. (2011). Unidad didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones matemáticas con ayuda de maple (CO). *XIII Conferencia interamericana de educación matemática*.
- Schwarz, B. B. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for research in Mathematic Education*, 362-389.
- Socas, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 311-322.

Anexo I Actividades propuestas.

Actividad 1.



En la extinción de un incendio, un helicóptero realiza los siguientes movimientos: ① Sale de la base. ② Sube a una cierta altura para tomar perspectiva. ③ Baja a altura de crucero y viaja hasta el embalse. ④ Baja al embalse a llenar los tanques de agua. ⑤ Sube a altura de crucero y viaja hasta el incendio. ⑥ Baja a apagar el fuego. ⑦ Sube a altura de crucero y viaja de vuelta a la base. ⑧ Desciende a la base.

La gráfica que describe el vuelo del helicóptero relaciona dos variables: el tiempo, t , que ha transcurrido desde que salió de la base, y la altura, a , a la que se encuentra el aparato.

tiempo (t) $\rightarrow$ altura (a)

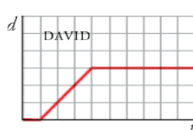
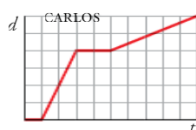
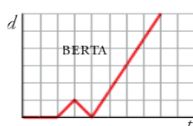
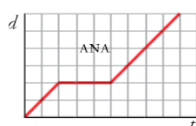
1. Observa la gráfica del helicóptero y responde:

- ¿Qué altura lleva cuando va del embalse al incendio?
- ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja para coger agua? ¿Y para apagar el fuego?
- ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?
- ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 320 m de altura?

Figura 12 Actividad 1. Fuente Ed. Anaya. Pág. 136

Actividad 2.

- 3 Dos hermanas y dos hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (d) - tiempo (t) de cada uno:



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Quién ha salido antes?
- ¿Quién ha llegado más tarde?
- Dos han ido a buscar a sus amigos para ir a clase. ¿Quiénes son?
- ¿A cuál se le ha olvidado algo en casa?
- ¿Cuál no ha ido hoy a clase?
- ¿Quién ha andado más lento en algún momento?
- ¿Quién ha ido más rápido?
- ¿Quién ha estado más tiempo sin moverse?

Figura 13 Actividad 2. Fuente Ed. Anaya. Pág. 137

Actividad 3

Tipo ABP (Aprendizaje Basado en Problemas)

El desarrollo de esta actividad se realizará en una sesión de 55 minutos, en grupos de 3 alumnos, juntándose cada grupo alrededor de una mesa.

Las herramientas que se utilizarán serán de la pizarra tradicional, unas hojas con la actividad impresa a cada grupo, calculadora y bolígrafo propio del alumno.

Se establecerán unos roles concretos definidos en las propias hojas, donde los alumnos serán unos controladores aéreos y el profesor un piloto de un avión.

El profesor explicará en qué consiste la actividad con la primera hoja entregada, primeramente, la toma de roles y el contexto que vamos a tratar en la actividad, seguido de la explicación de cómo se puede graficar el proceso de vuelo de un avión mediante una gráfica, dibujando así tanto el despegue, como el proceso de velocidad a vuelo crucero, el ascenso o descenso de altitud y por último el aterrizaje (Figura 14)



Figura 14 Ejemplo para mostrar a los alumnos las fases de vuelo con la representación gráfica

Se les entrega a los alumnos además el denominado “Manual de control aéreo”, en el que, en primer lugar, se asigna a cada grupo un equipo (equipo 1, equipo 2, etc), y se les indican el proceso de un vuelo normal (despegue, velocidad crucero y aterrizaje), además de, como controladores que son, las pautas que deben de dar a los pilotos en el transcurso del vuelo. Además, se les notifica de dos posibles causas adversas que nos podremos encontrar y las pautas que deben de dar al piloto en dichos casos (por ejemplo, se notifica que, si el avión pierde un motor, éste debe de descender un poco la altitud y mantenerla constante).

Una vez explicado el manual de control aéreo se indica a los alumnos el procedimiento, que consistirá en que el profesor va indicando el proceso en el que se encuentra (por ejemplo, despegando), además de añadir como información la altitud y el tiempo transcurrido. Los alumnos tendrán para cada misión una tabla y un gráfico, por lo que deberán ir anotando en la tabla los datos que el profesor les vaya proporcionando en cada posición. Una vez transcurrida la misión y tomados todos los datos por parte de los alumnos, estos deberán de graficar la misión de vuelo.

A continuación, en la Figura 15 se muestra paso a paso un ejemplo clarificador:

Ejemplo básico del ejercicio:

Profesor: Equipo 1 solicito instrucciones para despegar.

Alumnos: Eleva el avión a velocidad constante.

Profesor: Me encuentro a 8000 metros y he tardado 15 minutos (los alumnos anotan en la tabla la altitud y el tiempo transcurrido). ¿Qué hago ahora equipo 3?

Alumnos: Mantén la velocidad constante.

Profesor: Equipo 4 sigo a 8000 metros, han pasado 300 minutos y veo tierra, solicito información para aterrizar (los alumnos anotan en la tabla la altitud y el tiempo transcurrido más los 15 minutos anteriores, $300+15$).

Alumnos: Aterriza a velocidad constante

Profesor: Equipo 5 he aterrizado en 15 minutos, sin problemas (los alumnos anotan la altitud de 0 metros y el tiempo transcurrido hasta ahora $15+300+15$).

Los alumnos anotarán en cada momento los datos dados por el profesor

Tiempo (min)	Altitud (m)
0	0
15	8000
315	8000
330	0

Una vez terminada la misión, los alumnos recogerán la información de la tabla y la representarán gráficamente

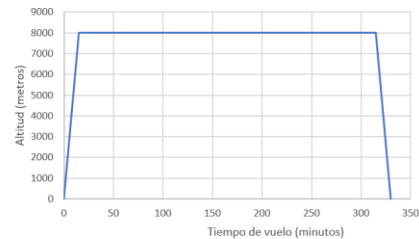


Figura 15 Ejemplo de la actividad 3

Otro ejemplo más completo sería el siguiente:

Ejemplo completo:

Profesor: Equipo 1 solicito instrucciones para despegar

Alumnos: Eleva el avión a velocidad constante

Profesor: Me encuentro a 8000 metros y he tardado 15 minutos (los alumnos anotan en la tabla la altitud y el tiempo transcurrido). ¿Qué hago ahora equipo 3?

Alumnos: Mantén la velocidad constante

Profesor: Equipo 4 sigo a 8000 metros, han pasado 45 minutos y hay una tormenta, solicito información (los alumnos anotan en la tabla la altitud y el tiempo transcurrido más los 15 minutos anteriores, $15+45$ minutos).

Alumnos: Eleva la altitud y mantenla constante

Profesor: Equipo 1, he aumentado la altitud a 9000 metros en 15 minutos y me dispongo a mantener velocidad constante (los alumnos anotan la altitud y el tiempo transcurrido hasta ahora ($15+45+15$ minutos).

Profesor: Equipo 2, sigo a una altitud de 9000 metros después de 40 minutos y veo tierra, solicito información para aterrizar. (los alumnos anotan los 9000 metros a un tiempo de $15+45+15+40$ minutos)

Alumnos: Aterriza a velocidad constante

Profesor: Control he aterrizado en 15 minutos, sin problemas (los alumnos anotan la altitud de 0 metros y el tiempo transcurrido más los 315 anteriores).

Tiempo (min)	Altitud (m)
0	0
15	8000
60	8000
75	9000
115	9000
130	0

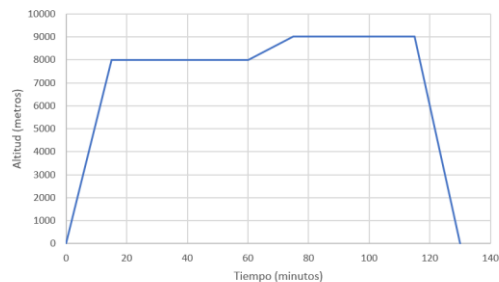


Figura 16 Ejemplo completo de la actividad 3

Las siguientes imágenes muestran las hojas impresas que recibe cada grupo de alumnos:

ACTIVIDAD MISIÓN AÉREA

En el ejército aéreo existen distintos departamentos para el correcto funcionamiento de las aeronaves en las distintas misiones que se realizan.

Equipo de reparaciones y mantenimiento. se encargan de mantener el avión correctamente para que pueda funcionar

Equipo de pilotaje. Son los encargados de pilotar el avión de un lugar a otro

Equipo de control aéreo. Se encargan de estar en contacto con el piloto para darle instrucciones en todo momento, incluyendo situaciones graves durante el vuelo.

En las siguientes misiones, vosotros seréis el **equipo de control aéreo** y el profesor el **piloto** de una misión. Tendréis que darle información al piloto de qué hacer en cada momento, anotando en la tabla todas las situaciones a las que se enfrentará el vuelo y graficando el vuelo final.

El vuelo normal de un avión se puede mostrar en una gráfica de la siguiente manera:



Figura 17 Hoja 1 de la actividad 3

MANUAL DE CONTROL AÉREO

EQUIPO 1

El vuelo normal será:

1. **Despegue:** Eleva el avión a velocidad constante
2. **Velocidad crucero.** Mantén la altitud constante durante el vuelo.
3. **Aterrizaje.** Aterrizo a velocidad constante

Posibles elementos adversos:

Hay una tormenta: Eleva la altitud y mantenla constante

Pierde un motor: Desciende un poco la altitud y mantenla constante

Figura 18 Hoja 2 de la actividad 3

MISIÓN 1

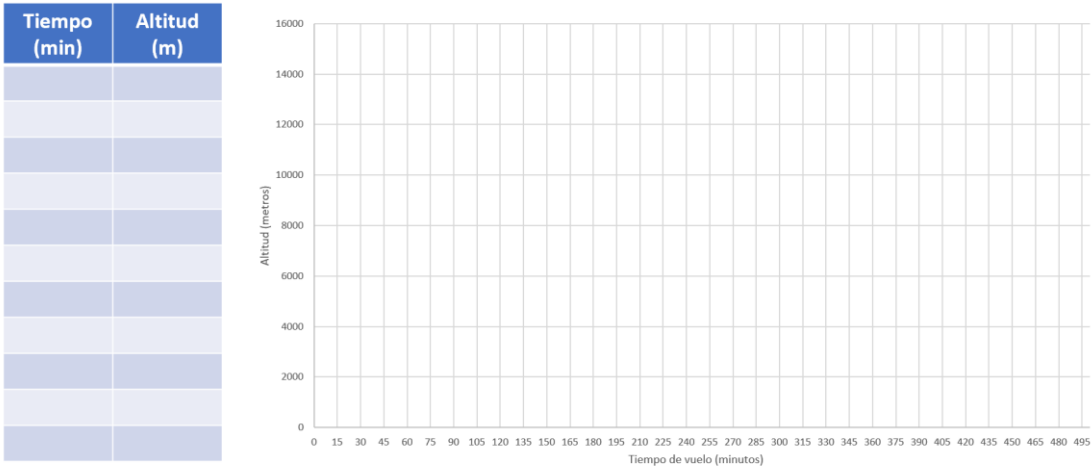


Figura 19 Hoja 3 de la actividad 3

MISIÓN 2

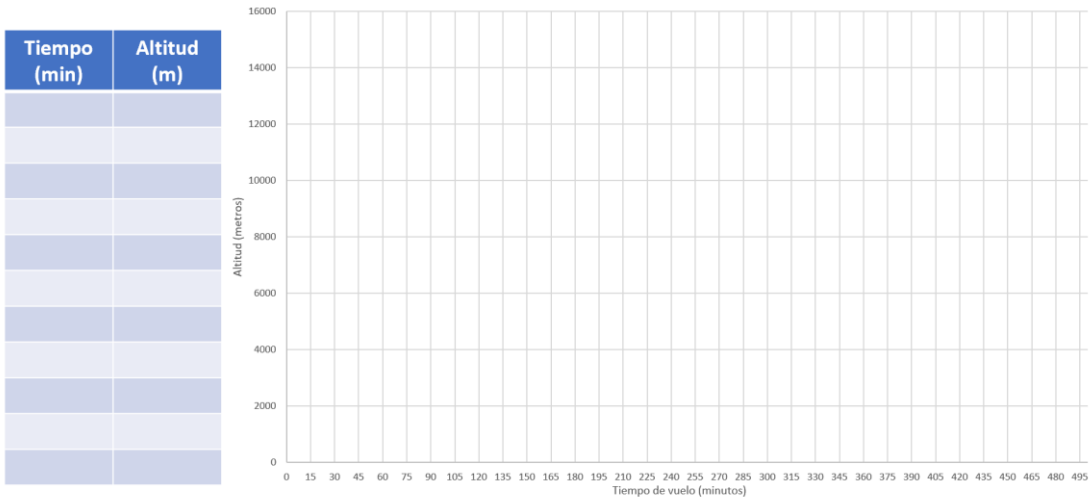


Figura 20 Hoja 4 de la actividad 3

MISIÓN 3

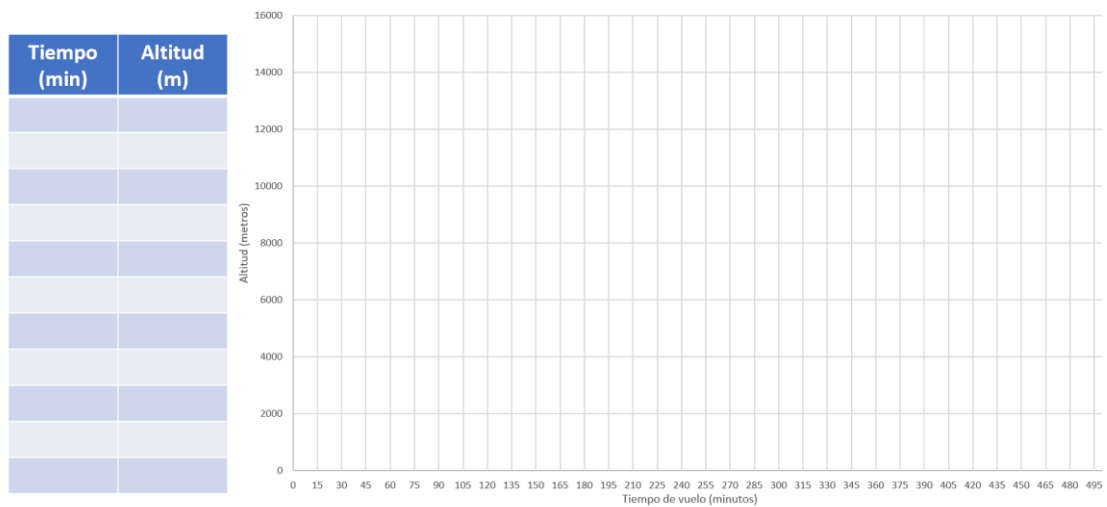


Figura 21 Hoja 5 de la actividad 3

MISIÓN 4

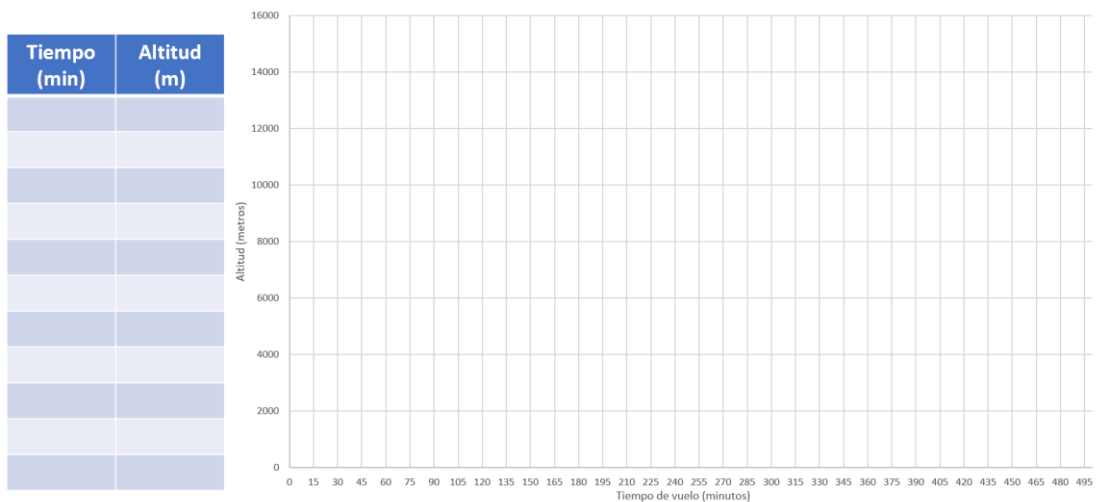


Figura 22 Hoja 6 de la actividad 3

Actividad 4.

- 1 La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.
 - a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.
 - b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?
 - c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justificalo.

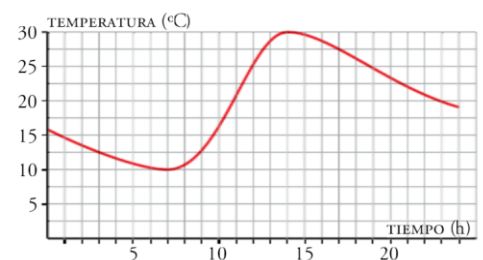
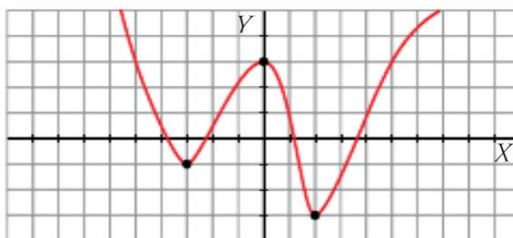


Figura 23 Actividad 4. Fuente Anaya Pág 138

Actividad 5.

- a) Indica en qué puntos de la gráfica hay máximos y mínimos relativos.



- b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Figura 24 Actividad 5. Fuente Anaya Pág 138

Actividad 6

Sobre unos ejes, dibuja una gráfica creciente que tenga dos máximos relativos en $(-2, 4)$ y $(4, 5)$ y un mínimo relativo en $(1, -3)$.

Figura 25 Actividad 6. Fuente Anaya. Pág 138

Actividad 7

La gráfica de la derecha muestra el sueldo mensual de una persona en una empresa a lo largo de su vida.

- ¿Cuánto tiempo lleva la persona en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?
- ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? Suponiendo que se sigue la tendencia, ¿cuánto gana a los 20 años?
- ¿Es una función continua?

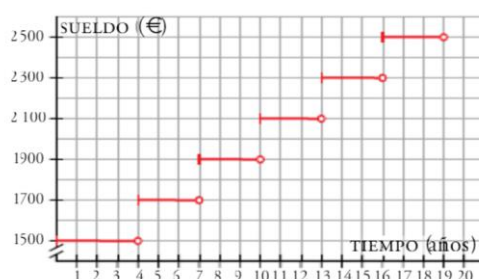


Figura 26 Actividad 7. Fuente Anaya. Pág 140

Actividad 8

Esta gráfica muestra las horas de sol que hay a lo largo del año en Oslo (Noruega).

- ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?
- ¿Cuántas horas de sol hay en el solsticio de invierno? ¿Y en el de verano?
- ¿Aproximadamente en qué momentos del año hay 14 horas de sol?

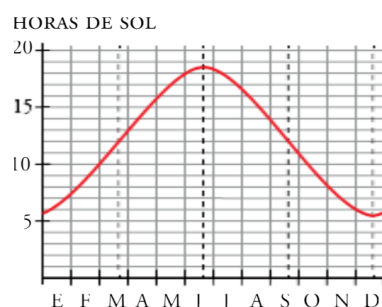
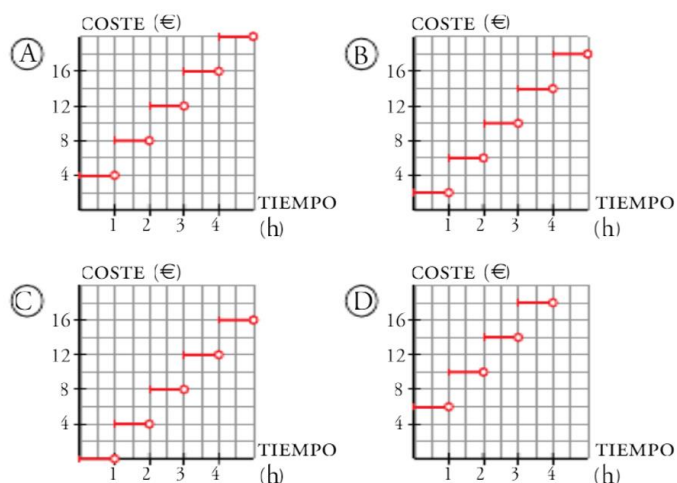


Figura 27 Actividad 8. Fuente Anaya. Pág 141

Actividad 9

La entrada a un parque de atracciones cuesta 2 €, y la pulsera para subir a todas las atracciones, 4 € cada hora o fracción (es decir, que te cobran la hora completa aunque la uses solo un rato).

a) ¿Cuál de estas gráficas representa mejor el coste de entrar y montar en las atracciones?



b) Dibuja en tu cuaderno una gráfica que represente el coste si cobran exactamente por el tiempo que has utilizado la pulsera.

c) Dibuja otra que represente el coste de un bono en el que pagas 16 € para entrar y montarte en todas las atracciones el tiempo que quieras hasta que cierre el parque.

Figura 28 Actividad 9. Fuente Anaya. Pág 145

Actividad 10

Tipo IBL

En la siguiente actividad se les presentará a los alumnos una gráfica descontextualizada, sin enunciado, en la que los alumnos deberán de interpretarla e inventarse una situación que explique el comportamiento de la gráfica.

Para ello los alumnos trabajarán en grupos de 3, donde a cada grupo se le proporcionará las siguientes hojas:

En la hoja número 2 se les muestra la gráfica sin el eje de ordenadas, dejando un espacio para que escriban sobre ella, además de dejando una parte también para que añadan tanto la situación que han elegido como grupo, como la variable del eje de ordenadas que corresponde. Por último, en la parte número tres, deberán de redactar la historia que han inventado.

Actividad 11

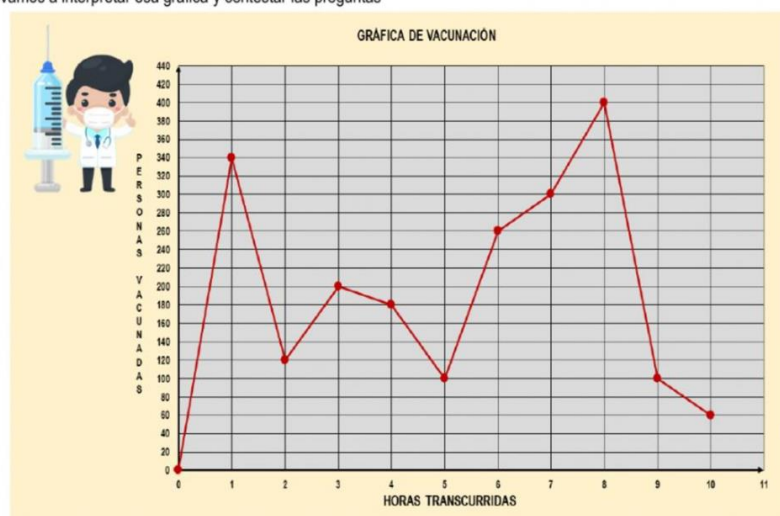
En esta actividad los alumnos en grupos de 3 tendrán que rellenar las fichas que se les entregarán en relación con interpretación de gráficas. En estas fichas tendrán que poner en práctica lo aprendido hasta el momento como son: interpretación de gráficas, intervalos de crecimiento/decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

Consta de dos ejercicios, ambos contextualizados en un entorno real, uno de ellos en relación al número de personas vacunadas en un país; otro, respecto a la presión arterial de un paciente en un hospital.

VACUNACIÓN EN LA COMUNIDAD

En la comunidad de Tula, Tamaulipas se llevó a cabo la campaña de vacunación para los adultos mayores, la información de las personas vacunas se registró en una gráfica,

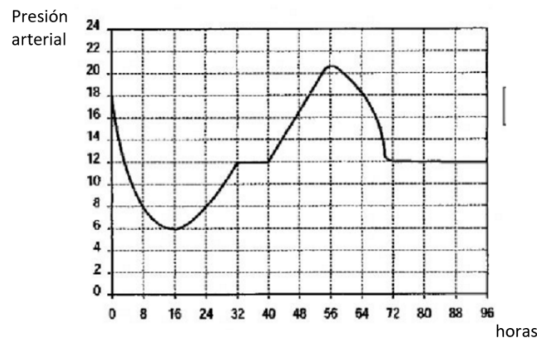
Vamos a interpretar esa gráfica y contestar las preguntas



1. ¿Cuántas personas fueron vacunadas en la primera hora? _____
2. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento? _____
3. Entre la primera y la segunda hora ¿En cuánto disminuyó el número de personas vacunadas? _____
4. ¿Cuáles son los máximos relativos? _____
5. ¿Y los mínimos relativos? _____
6. ¿A qué hora se vacunaron más personas? _____

Figura 31 hoja 1 de la actividad 11

Se ha tomado la presión arterial a un paciente hospitalizado durante un tiempo. Los registros se han representado gráficamente:

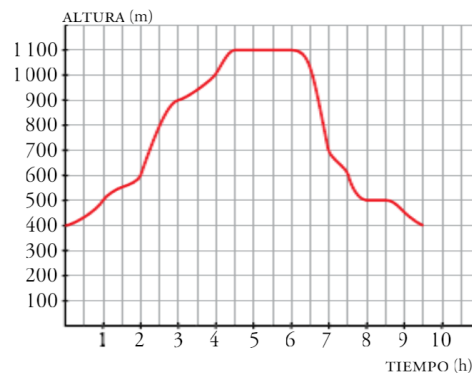


1. ¿Durante cuántas horas se han tomado la presión al paciente? _____
2. ¿Entre qué valores oscilaron la presión del paciente? _____
3. ¿En qué horas la presión se mantuvo constante? _____
4. ¿Cuáles son los máximos relativos? _____
5. ¿Y los mínimos relativos? _____
6. ¿A qué hora se vacunaron más personas? _____
7. ¿A qué hora comenzó el primer aumento de presión? _____
8. ¿A qué hora fue el último descenso de presión? _____
9. ¿Cuál fue la presión del paciente al inicio de la toma de datos? _____

Figura 32 hoja 2 de la actividad 11

Actividad 12

- 1 Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión a cierta montaña:

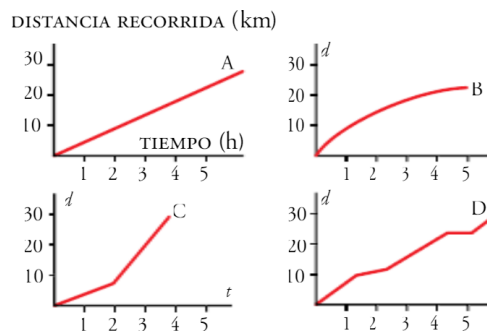


- a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?
- b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?
- c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?
- d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

Figura 33 Actividad 12. Fuente Anaya. Pág. 144

Actividad 13

Las siguientes gráficas nos muestran la distancia recorrida por cuatro senderistas en función del tiempo que dura su marcha:



- Describe el ritmo de cada senderista.
- ¿Quién recorre menos camino?
- ¿Quién camina durante menos tiempo?
- ¿Quién alcanza más velocidad?
- Inventa una gráfica correspondiente a una senderista que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

Figura 34 Actividad 13. Fuente Anaya. Pág. 145