



Universidad de Jaén

Facultad de Ciencias Sociales
y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

Integración numérica. Aplicaciones en economía.

RODRÍGUEZ JIMÉNEZ, CARMEN

ENERO, 2022

RESUMEN

La integración numérica es una herramienta de las matemáticas que nos permite realizar el cálculo de aproximaciones de integrales definidas mediante una serie de procedimientos. En concreto, se van a estudiar distintas fórmulas de cuadratura utilizadas para la obtención de dichas estimaciones de aproximación.

El objetivo de este trabajo es el análisis de las fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes, que son las más usuales en la práctica. Una vez realizado dicho estudio, se procede a la aplicación de la integración numérica en problemas económicos, como son el excedente del consumidor y el cálculo del coste total y del ingreso total.

En el cálculo del excedente del consumidor utilizaremos tanto el método de los trapecios como el método de Simpson, para así comprender el procedimiento a seguir de ambos y ver la diferencia en los resultados. Por otro lado, en el cálculo del coste total y del ingreso total partimos de las funciones de coste marginal y de ingreso marginal y, utilizando el método de los trapecios compuesto, nos dará lugar al resultado exacto del coste total y del ingreso total.

ABSTRACT

Numerical integration is a mathematical tool that allows us to calculate approximations of definite integrals by means of a series of procedures. Specifically, we are going to study different quadrature formulae used to obtain these approximation estimates.

The aim of this work is to analyse the Newton-Côtes quadrature formulae, which are the most common in practice. Once this study has been carried out, we proceed to the application of numerical integration in economic problems, such as consumer surplus and the calculation of total cost and total revenue.

In the calculation of consumer surplus, we will use both the trapezoid method and Simpson's method, in order to understand the procedure to be followed for both and to see the difference in the results. On the other hand, in the calculation of total cost and total revenue we start from the marginal cost and marginal revenue functions and, using the compound trapezoid method, we will get the exact result of total cost and total revenue.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	5
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA.....	6
2.1. La integral definida	6
2.1.1. Propiedades de la integral definida	6
2.2. Teorema Fundamental del Cálculo	7
2.2.1. Teorema Fundamental del Cálculo. Primera parte	7
2.2.2. Teorema Fundamental del Cálculo. Segunda parte.....	8
2.3. La integral definida en la ciencia y tecnología	9
2.3.1. Integrales definidas en la tecnología	10
2.3.2. Integrales definidas en la ciencia.....	10
2.4. Integración numérica	12
2.4.1. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio.....	13
2.4.1.1. Fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes.....	14
3. INTEGRACIÓN APLICADA A PROBLEMAS EN LA ECONOMÍA.....	22
3.1. Aplicación económica al excedente del consumidor	22
3.2. Aplicación económica al coste total y al ingreso total	26
CONCLUSIONES.....	29
BIBLIOGRAFÍA.....	30

1. INTRODUCCIÓN

Para abordar el problema del cálculo de áreas y volúmenes de objetos de un modo más genérico se utiliza el proceso de la integración.

La integral definida es una herramienta clave del cálculo para definir y calcular diversas magnitudes, tales como áreas, volúmenes, longitudes de trayectorias de curvas, probabilidades, promedios, consumo de energía, pesos de diferentes objetos, la fuerza del agua contra las compuertas de una presa, entre otras.

Hay ocasiones en las que una integral definida no puede calcularse con exactitud. En estos casos, es posible aproximar su valor con distintos métodos de integración numérica.

En este trabajo estudiaremos algunos de los métodos de integración numérica y, posteriormente, su aplicación a los problemas económicos que desarrolla, como es el excedente del consumidor.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

2.1. La integral definida

La integral definida permite calcular el valor de un área limitada por curvas. Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ la integral definida de la función $f(x)$ en dicho intervalo es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

La integral definida se representa por $\int_a^b f(x)dx$, siendo a el límite inferior de integración, b el límite superior y $f(x)$ el integrando.

2.1.1. Propiedades de la integral definida

Las propiedades de la integral definida¹ son:

1. Orden de integración. El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de la integración.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

2. Intervalo de longitud nula. Si los límites de integración coinciden, la integral definida es igual a cero.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Aditividad. Si c es un punto interior del intervalo $[a, b]$, la integral definida se puede descomponer como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. La integral definida de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de integrales.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

¹Thomas, George B; Weir, Maurice D; Hass, Joel; Heil, Christopher; García Hernández, Ana Elizabeth (2015),. *Cálculo: una variable*. Grupo Anaya Educacion. pp. 269-282

5. Múltiplo constante. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

6. Si f y g son funciones integrables y $g(x) \leq f(x)$ para $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

2.2. Teorema fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)² proporciona un método abreviado para calcular integrales definidas. Conceptualmente, dicho teorema unifica los estudios de la derivación e integración, mostrando que ambos procesos son mutuamente inversos.

2.2.1. Teorema Fundamental del Cálculo. Primera parte

Sea f una función continua en $[a,b]$ y definiendo una nueva función F en $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Sea c una constante que se encuentra en el interior del intervalo $[a,b]$ y f es continua en c , entonces decimos que F es diferenciable en c y que $F'(c) = f(c)$.

Por otro lado, la antiderivada (también conocida como primitiva) de una función es aquella función que tengo que derivar para encontrar la función del integrando. Hay que tener en cuenta que una función puede tener varias antiderivadas, ya que, si a la antiderivada le añades una constante, ésta siempre va a ser cero al derivarla y, por tanto, nos queda la misma función que si no tuviésemos esa constante.

Si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) y su derivada es $f(x)$ ³,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) \text{ para } x \in (a,b)$$

² El TFC fue enunciado por primera vez de forma completa por Isaac Newton en 1666, aunque se obtuvieron versiones de éste con anterioridad.

³ Rogawski, Jon ; García García, Gloria ; Jimeno Jiménez, Martín, (2016). *Cálculo: una variable*. Editorial Reverte, pp 244-285.

Básicamente, el TFC nos muestra que toda función continua tiene una antiderivada y nos dice cómo construir una usando una integral definida. En la mayoría de los casos el problema radica en encontrar una antiderivada de una función, es decir, dada una función $f(x)$ encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

2.2.2. Teorema Fundamental del Cálculo. Segunda parte

La primera parte del TFC nos muestra cómo construir una antiderivada de cualquier función continua por integración. Ahora bien, si f es continua en $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada o primitiva de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Es conocido como Regla de Barrow. Esta regla nos dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$ en los extremos de dicho intervalo.

Sabiendo que la función $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$, tendremos que $G'(x) = f(x)$ y, por la primera parte del TFC tenemos que $F'(x) = f(x)$, podemos llegar a la conclusión de que $G(x) = F(x) + C$.

Si ambas funciones son antiderivadas de $f(x)$, podemos afirmar que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si queremos conocer el valor de $G(x)$ en a , nos queda la integral $\int_a^a f(t)dt$ lo cual vale 0, ya que hablamos del mismo punto en un área determinada de la función y, por tanto, sabemos que $G(a) = 0$. Si lo que queremos conocer es el valor de $G(x)$ en b , la integral en este caso sería $\int_a^b f(t)dt$.

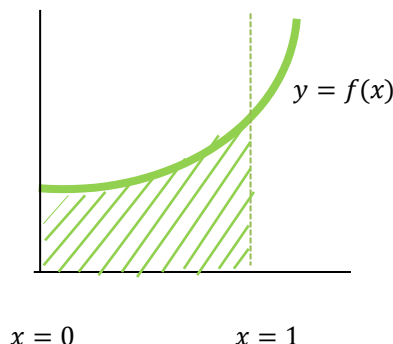
A sabiendas de esto, queremos conocer el valor de $F(b) - F(a)$. Si $F(a) = G(a) + C$, tenemos que $F(a) = 0 + C$ y, si $F(b) = G(b) + C$, obtenemos $F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$. Sustituimos en la diferencia de $F(b) - F(a)$ y nos queda

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - (0 + C)$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

En definitiva, $F(b) - F(a)$ coincide con el área de la función que queremos calcular, se denota como $[F(x)]_a^b$

Ejemplo 1:



Tenemos la función x^2 y queremos calcular su valor por debajo de la curva del área mostrada en la gráfica entre 0 y 1. Hallar su valor utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, sabiendo que

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Sustituimos los valores en la integral

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

2.3. La integral definida en la ciencia y tecnología

Se va a mostrar la aplicación de la integral definida como técnica de cálculo a diferentes magnitudes en diversas ramas del conocimiento. Este cálculo analizar cualitativa y cuantitativamente fenómenos que se presenten en el entorno cotidiano y profesional. Entre ellos podemos determinar el punto de equilibrio del costo de un artículo y el flujo de inversión neta de una empresa; aplicar las leyes de crecimiento poblacional en la biología, determinar variables cinemáticas, dinámicas y eléctricas en física, entre otras.

Se puede decir que el cálculo integral es una herramienta matemática de las que más aplicaciones tiene, ya que permite plantear modelos que resuelven problemas surgidos del mundo real, o aplicarse tanto en la física y en la química como en las ciencias sociales y económicas.

A continuación, vamos a ver algunos ámbitos en los que puede ser aplicada de forma eficiente la integral definida.

2.3.1. Integrales definidas en la tecnología

Es fundamental el uso del cálculo integral para el ámbito de la tecnología, ya que es parte fundamental en el cálculo de superficies, volúmenes y otras medidas que suelen estar determinadas por una función. Así los ingenieros logran hacer cálculos complejos en forma correcta y eficaz para poder construir infraestructuras y la tecnología con la que contamos actualmente y poder desarrollarla en un futuro.

En el ámbito de la tecnología el cálculo integral ayuda a la resolución de problemas de transferencia de calor; cálculo de energía electrónica: cálculo de la superficie terrestre, área y diámetro de perforación; en las estructuras de presas hidráulicas.

En el campo de las construcciones, los arquitectos e ingenieros de estas áreas emplean la integral para obtener el área de superficies irregulares. Las integrales definidas ayudan a buscar el punto exacto donde se encuentra el centro de gravedad, siendo este el punto donde se concentra la masa del cuerpo.

En la mecánica de fluidos, permiten trabajar con la energía de los fluidos, las pérdidas que ocurren en el flujo y, así, poder calcular presiones necesarias, alturas de tanques, necesidades de bombeo y hasta sedimentación en cauces naturales. Otra aplicación importante de la integral definida se encuentra en el cálculo de volumen de un sólido de revolución.

2.3.2. Integrales definidas en la ciencia

Además de ser una parte fundamental para los problemas de la sociedad, también juegan un papel fundamental en la formulación, creación y comprobación de teorías en ciencias, como es el caso de la física.

En la rama de la biología podemos ayudarnos del cálculo integral para la identificación de probabilidad de extinción de una especie animal; el estudio del crecimiento demográfico/poblacional; predecir el desarrollo de bancos de coral, identificando si se reduce o aumenta la cantidad de fósforo disuelto en el agua; cálculo de biomasa, entre otras.

Otra aplicación es en las ciencias de la salud, pudiendo aplicarlas en el cálculo y ajuste de dosis de medicación; para ver volúmenes de filtración renal, tensión arterial; transfusiones sanguíneas; medicinas en pediatría; farmacología; cultivos de hongos y crecimiento de bacterias.

Ejemplo 2:

Se quiere estudiar el aumento de la propagación de la Covid-19 en función del número de habitantes en meses, sabiendo que su aumento va en proporción de $\sqrt{10^{3x}}$. A sabiendas de esto, ¿cuánto será el número de habitantes afectados dentro de 3 meses, si la población actual afectada es de 3500?

Nos piden el número de habitantes afectados por la variante Covid-19 dentro de 3 meses. Para ello vamos a realizar el cálculo a través de una integral definida, que en nuestro caso es $\int f(x)dx = \int \sqrt{10^{3x}}dx$.

Ahora bien, como $\sqrt{10^{3x}} = 10^{3x/2}$, aplicamos el método de sustitución con $u = 3x/2$, de donde obtenemos $du = \frac{3}{2} dx$, entonces:

$$\int \sqrt{10^{3x}} dx = \int 10^{3x/2} dx = \frac{2}{3} \int 10^u du = \frac{2}{3} \cdot \frac{10^u}{\ln 10} + C = \frac{2\sqrt{10^{3x}}}{3 \ln 10} + C$$

Hallamos C, suponiendo que 0 es el momento actual:

$$P(0) = C, \text{ entonces } C = 3500$$

Dentro de 3 meses:

$$P(3) = \frac{2\sqrt{10^9}}{3 \ln 10} + 3500 = 9155,73 + 3500 = 12655,73$$

Es decir, el número de habitantes afectados por la Covid-19 dentro de 3 meses es de 12655,73 habitantes.

Dentro de la biomedicina se usa para el cálculo de corriente de descarga; análisis de señales; construcción de prótesis; fabricación de medicamentos. Se aplica, a su vez, para el conteo de organismos de cálculo de crecimiento exponencial de bacterias y especies; calcular el área de una superficie plana de un dibujo y para el cálculo de áreas y volúmenes en el sistema GPS.

2.4. Integración numérica.

En Análisis Numérico, la integración numérica es utilizada para aproximar numéricamente una integral definida, ya que existen integrales que son difíciles o imposibles de calcular. Nos referimos a aquellas de las que no se dispone de la expresión analítica del integrando $f(x)$, sino sólo de una tabla de valores; o puede ocurrir que, aunque la primitiva sea posible encontrarla, puede ser tedioso o precisa de técnicas muy complicadas. También existen funciones que son integrables, pero la dificultad se basa en que su primitiva no puede ser calculada.

La mayoría de los métodos numéricos aproximan $\int_a^b f(x)dx$ mediante una combinación lineal de valores de f que se denomina **fórmula de cuadratura o de fórmula de integración numérica** $I_{n+1}(f)$.

$$I_{n+1}(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \cdots + a_n f(x_n)$$

Siendo $x_0, x_1, \dots, x_n$ nodos de la fórmula y $a_0, a_1, \dots, a_n$ los pesos de la fórmula.

Para conocer el valor aproximado del área que calcula una integral definida existen los métodos de tipo interpolatorio (los cuáles se dividen en varias reglas a su vez) y los métodos de extrapolación. Dichos métodos surgen por la necesidad de encontrar funciones adecuadas a partir de una serie de datos extraídos de un registro de información o de estudios estadísticos.

Los métodos de tipo interpolatorio se basan en la integración del polinomio que interpola los datos de la función f en el intervalo $[a, b]$. Sin embargo, los métodos de extrapolación se utilizan para calcular valores (mayores o menores) fuera del intervalo de integración, pudiendo dar resultados muy distintos de los reales.

Las fórmulas de cuadratura que vamos a aplicar a la economía son de tipo interpolatorio y, en particular, fórmulas de Newton Cotes.

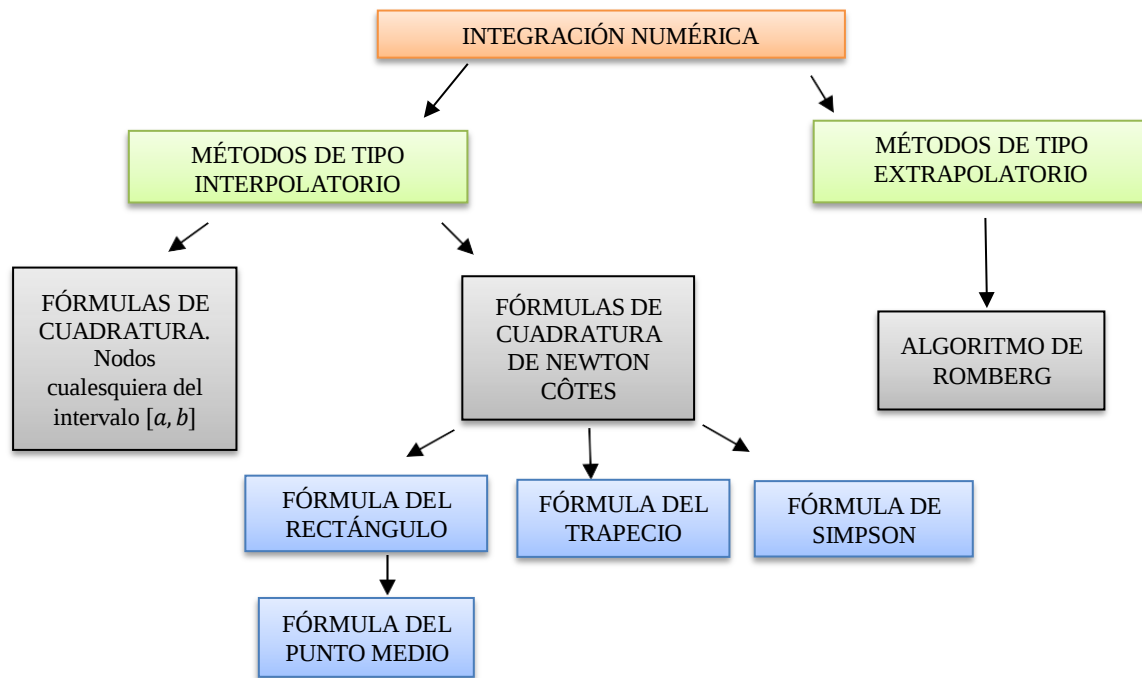


Figura 1. Esquema tipos de integración numérica

Fuente: Elaboración propia

2.4.1. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

Las fórmulas de cuadratura⁴ que vamos a estudiar para estimar el valor de la $\int_a^b f(x)dx$ son de tipo interpolatorio. Dados $n + 1$ nodos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y $n + 1$ datos de la forma $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$, siempre existe un polinomio de grado menor o igual a n , $P(x)$, que interpola estos datos. Además, este polinomio es único.

Al calcular $\int_a^b P(x) dx$ obtenemos una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio:

$$I_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x) dx \cong \int_a^b f(x) dx$$

Cada fórmula de cuadratura tiene un error de cuadratura ya que, al ser resultados aproximados, no podemos conocer los valores con exactitud, por lo que tenemos que saber el margen de error que hay en cada uno de los métodos que vamos a analizar a continuación. El error de cuadratura será

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b E_n(x) dx$$

⁴ Chapra, Steven C ; Canale, Raymond P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. Editorial McGraw-Hill. (sexta edición), pp 249-266.

Donde $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$, que es el error de interpolación. La fórmula de cuadratura será exacta cuando $E(x) = 0$.

2.4.1.1. Fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes

Las fórmulas de cuadratura que se encuadran en este método se diseñaron para los casos donde los nodos que se van a utilizar están igualmente espaciados, ya que forman una partición uniforme del intervalo de integración.

Para obtener un valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$ se realiza el siguiente proceso:

1. Tomar una partición uniforme del intervalo de integración $[a, b]$, $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ donde $h = x_{i+1} - x_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$.
2. Considerando los $n+1$ - elementos de P como nodos, determinamos $(n+1)$ - datos de la forma $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$.
3. Construir el polinomio de grado menor o igual a n que interpola estos datos, $P_n(x)$.
4. A continuación, se realiza $\int_a^b P_n(x)dx$ que nos dará la fórmula de cuadratura

$$I_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)dx \cong \int_a^b f(x)dx$$

Dependiendo del número de nodos dados, podemos obtener diferentes fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes, la fórmula del rectángulo y la del punto medio (1 nodo), la fórmula del trapecio (2 nodos) o la fórmula de Simpson (3 nodos).

- *Fórmula de cuadratura del rectángulo*

La fórmula de cuadratura del rectángulo es una fórmula de tipo interpolatorio que se obtiene cuando solo se tiene un dato de la función en $[a, b]$. Sea $(x_0, f(x_0))$ el dato disponible. El polinomio que interpola este dato, $p_0(x)$, ha de ser de grado cero, es decir, una constante. Entonces $p_0(x) = f(x_0)$.

A continuación, calcular $\int_a^b p_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = f(x_0)(b-a)$.

Por tanto, la fórmula del rectángulo es

$$\int_a^b f(x)dx \cong f(x_0)(b-a) = I_1(f)$$

Gráficamente, esta fórmula aproxima el área bajo la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox mediante el área de un rectángulo de base la amplitud del intervalo $[a,b]$ y con altura $f(x_0)$.

En la **fórmula del rectángulo a la izquierda** aproximamos la integral por el área del rectángulo de base $[a,b]$ y altura $f(a)$. Partimos del nodo $x_0 = a$, por lo que $p_0(x)$ interpola el punto $(a, f(a))$. El grado de $p_0(x)$ será cero ya que tenemos un solo nodo y debe cumplir que $p_0(x_0) = f(a)$,

$$\int_a^b p_0(x) dx = \int_a^b f(a) dx = f(a) x \Big|_a^b = f(a)(b-a)$$

La fórmula del rectángulo a la izquierda es

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx f(a)(b-a)$$

Si se considera el nodo $x_0 = b$, obtenemos la fórmula del rectángulo a la derecha. Siguiendo el mismo proceso obtenemos la **fórmula del rectángulo a la derecha**.

$$\int_a^b p_0(x) dx = \int_a^b f(b) dx = f(b) x \Big|_a^b = f(b)(b-a)$$

La fórmula del rectángulo a la derecha es

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx f(b)(b-a)$$

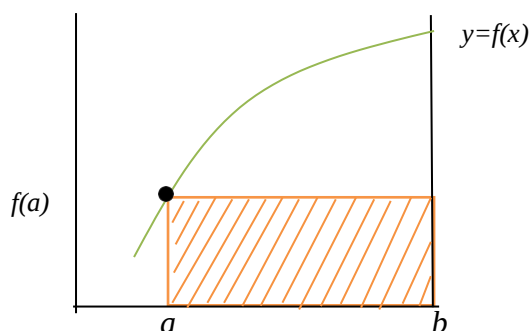


Figura 2. Fórmula del rectángulo con altura $f(a)$ y base $(b-a)$

Fuente: elaboración propia

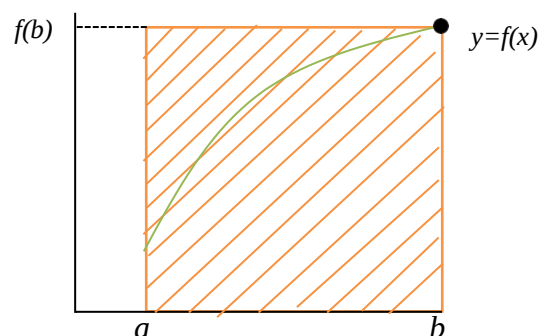


Figura 3. Fórmula del rectángulo con altura $f(b)$ y base $(b-a)$

Fuente: elaboración propia

El error de estas fórmulas del rectángulo es

$$E(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\varepsilon) \text{ para } \varepsilon \in (a,b)$$

La estimación de $\int_a^b f(x)dx$ obtenida se mejora aplicando el método compuesto (fórmula del rectángulo a la izquierda y a la derecha) que consiste en dividir el intervalo en n -subintervalos de igual amplitud h , aplicando a cada uno de ellos el método simple. La amplitud de cada intervalo se calcula $h = \frac{b-a}{n}$, siendo n el número de intervalos en el que hemos dividido el área del rectángulo, siendo del tipo $[x_i, x_{i+1}]$, con $x_{i+1} - x_i = h$, para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$.

La fórmula del rectángulo a la izquierda compuesta es

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

La fórmula el rectángulo a la derecha compuesta es

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

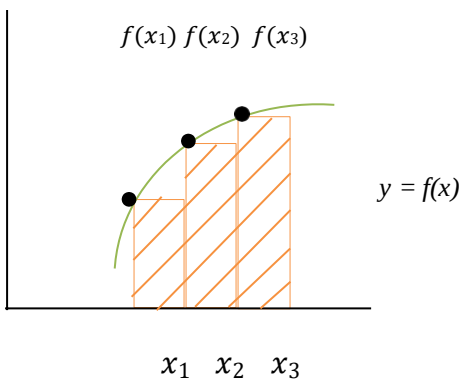


Figura 4. Fórmula del rectángulo compuesta a la izquierda.

Fuente: elaboración propia

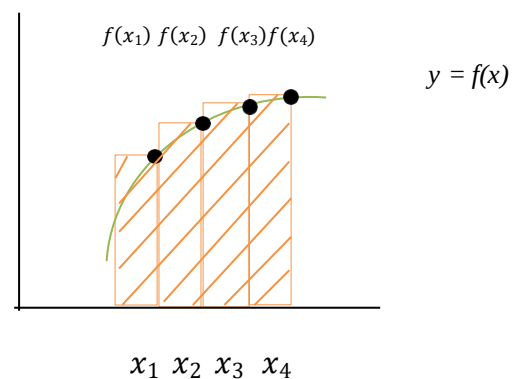


Figura 5. Fórmula del rectángulo compuesta a la derecha.

Fuente: elaboración propia.

- **Fórmula de cuadratura del punto medio**

Es un caso particular de la fórmula del rectángulo. Se obtiene cuando el nodo es el punto medio, $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

El error de cuadratura la fórmula del punto medio es:

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - I(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\varepsilon) \text{ para } \varepsilon \in (a,b)$$

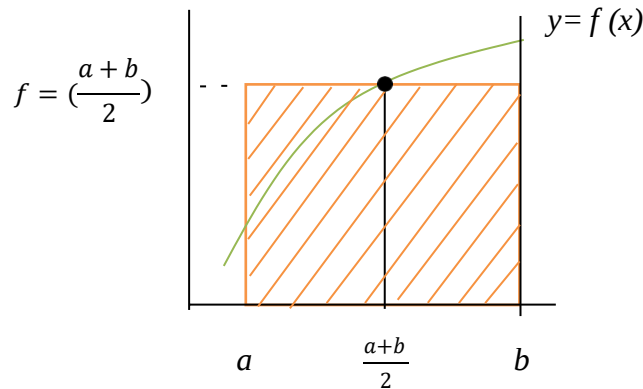


Figura 6. Fórmula del punto medio

Fuente: elaboración propia

La **fórmula del punto medio compuesto** se obtiene dividiendo el intervalo $[a,b]$ en n -subintervalos de igual amplitud $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, aplicando la fórmula del punto medio en cada uno de ellos y, sumando todas

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right), \text{ con } h = \frac{b-a}{n}$$

En este caso, el error de cuadratura está acotado de la siguiente forma:

$$R(f) \leq \frac{M_2}{24} (b-a)h^2$$

Donde M_2 es igual al valor máximo que alcanza el valor absoluto de la segunda derivada de la función dentro del intervalo de integración.

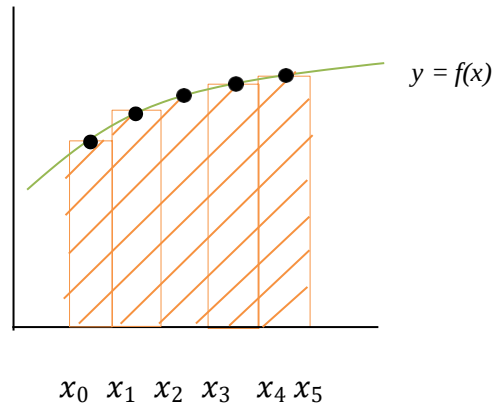


Figura 7. Fórmula del punto medio compuesta

Fuente: elaboración propia

En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ la altura del rectángulo debe ser el f (punto medio) que es igual a $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

- *Fórmula de cuadratura del trapecio*

La fórmula del trapecio es una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio que se obtiene cuando se dispone de dos datos concretos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Aquí contamos con dos nodos $(x_0 = a, x_1 = b)$ por lo que el grado del polinomio que interpola estos puntos es menor o igual a 1.

El polinomio que interpola $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la recta que pasa por estos puntos

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

El polinomio $p_1(x)$ es la recta determinada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Ahora obtendremos la fórmula de cuadratura integrando $p_1(x)$

$$\int_a^b p_1(x) dx = \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right) dx = f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{(b - a)^2}{2}$$

Simplificando, obtenemos

$$\int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = I_2(f)$$

Gráficamente, hemos construido la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ y a continuación, calcular el área bajo dicha recta, el eje $O\bar{X}$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. Es el área de un trapecio.

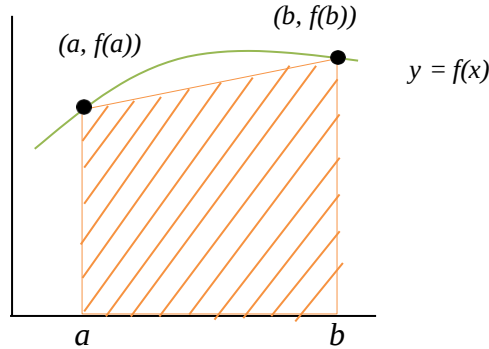


Figura 8. Fórmula del trapecio simple

Fuente: elaboración propia

El error de cuadratura aquí es:

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\varepsilon) \text{ para } \varepsilon \in (a,b)$$

Este método que acabamos de ver se denomina **fórmula del trapecio simple**.

La **fórmula del trapecio compuesta** consiste en dividir el intervalo en varios subintervalos para así mejorar la precisión de los resultados. Esta división del intervalos $[a,b]$ en n -subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ de igual amplitud, h , se representa como

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Por tanto, la regla del trapecio compuesta se puede expresar de manera general como

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

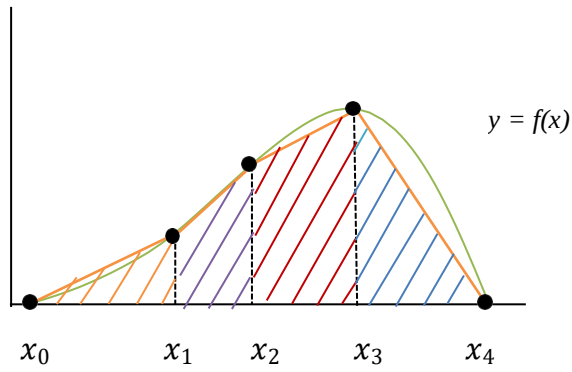


Figura 9. Fórmula del trapecio compuesta

Fuente: elaboración propia

Aquí el error consiste en la suma total de los errores que se obtienen en cada uno de los intervalos en los que hemos dividido el trapecio, es decir, $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$, obteniendo la siguiente acotación:

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

- **Fórmula de cuadratura de Simpson**

La fórmula de Simpson es una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio que se obtiene para estimar $\int_a^b f(x)dx$. Se calcula partiendo de los siguientes tres nodos: $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$. Obtenemos los datos sobre los que calculamos, que son $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ y $(b, f(b))$. En este caso, el grado del polinomio de interpolación $p(x)$ será dos, dando lugar al polinomio $p(x)$. A continuación, calculamos $\int_a^b p(x)dx$.

Por tanto, la fórmula de Simpson simple es

$$I_3(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Gráficamente se representa

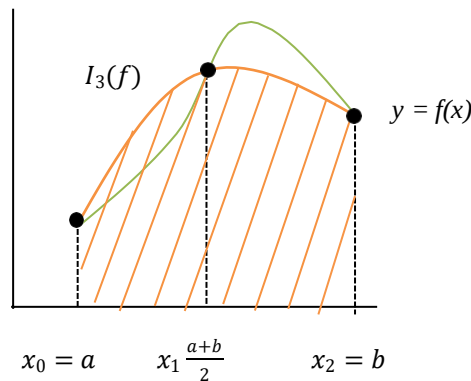


Figura 10. Fórmula de Simpson simple

Fuente: elaboración propia

Para obtener un valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$, vamos a considerar una partición uniforme en el intervalo $[a, b]$, $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ con $x(i+1) = x(i) + h$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$, es decir, $x_i = x_0 + i \cdot h = a + i \cdot h$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $h = \frac{b-a}{n}$.

Con esta partición se hacen n -subintervalos con la misma amplitud en $[a, b]$, de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 0, 1, \dots, n-1$.

A continuación, se aplica la fórmula de cuadratura de Simpson a cada subintervalo con lo que se obtiene un valor aproximado de cada $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ con $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Sumando estas n -aproximaciones, obtendremos la fórmula de Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6} (f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1}))$$

que simplificando

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{6} (f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) + f(b))$$

El error de cuadratura para esta fórmula es

$$Ec = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \text{ para } \xi \in (a, b)$$

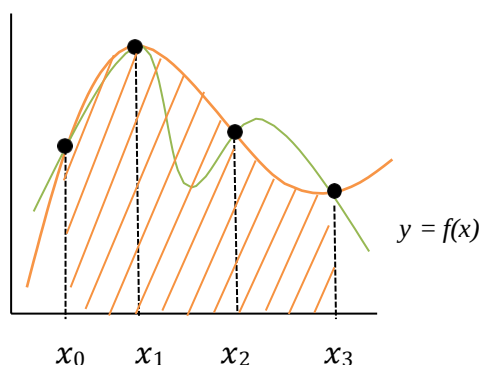


Figura 11. Fórmula de Simpson compuesta
Fuente: elaboración propia.

El error de cuadratura en este caso sería

$$E = (b - a) \frac{h^4}{180} |f^{(4)}(\xi)| \text{ con } \xi \in (a, b)$$

3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA APLICADA A PROBLEMAS EN LA ECONOMÍA

3.1. Aplicación económica al excedente del consumidor

A continuación, estudiaremos el cálculo excedente del consumidor, siendo éste el beneficio que se obtiene al comprar un producto a un determinado precio.

El excedente del consumidor, en términos matemáticos, se define como

$$EC = D - p \cdot q$$

Donde D es la integral de las derivadas hasta el punto de equilibrio, p es el precio de mercado y q es la cantidad de equilibrio. Para su obtención, debemos de integrar la función de demanda, quedándonos entonces

$$\int_0^{q_0} f(x) dx - q_0 p_0$$

Donde $f(x)$ es la función de demanda con precio de equilibrio p_0 y demanda de equilibrio q_0 .

Una vez que conocemos esta fórmula, vamos a proceder a aplicar el **método de los trapecios compuestos** basándonos en un ejemplo.

Ejemplo: Partimos de una función correspondiente a la curva de oferta que sería $p = (2 \cdot q)^2$ y, por otro lado, una función correspondiente a la curva de demanda que sería $p = 580 - q^2$. Primero vamos a hallar el valor de q_0 o punto de equilibrio, por lo que tendremos que igualar ambas funciones. Nos quedaría

$$(2 \cdot q)^2 = 580 - q^2 \quad \rightarrow \quad q_0 = 16$$

Una vez que sabemos que $q_0 = 16$, sustituimos q_0 en cualquiera de las dos funciones anteriores para conocer el valor de p_0 , que en este caso sería 324. Ambos valores se corresponden con p_0 y q_0 , siendo ambas cantidades la cantidad de equilibrio a partir de las cuales podemos averiguar el excedente del consumidor.

Al calcular el excedente del consumidor realizando la integral definida, nos da un resultado de 2730,666667. Esto nos va a servir para comparar la exactitud que nos muestra la aplicación de la integración numérica a problemas tan cotidianos como este.

Una vez conocidos estos valores, sustituimos en la fórmula inicial

$$\int_0^{16} (580 - x^2) dx - 16 \cdot 324$$

A continuación, vamos a estudiar qué valores toma q dividiendo el intervalo $[0,16]$ en 10 subintervalos ($n = 10$), siendo $a = 0$ y $b = 16$. Debemos saber cuál es la amplitud de cada uno de los subintervalos, aplicando la fórmula que vimos anteriormente, es decir, $h = \frac{16-0}{10} = 1,6$.

En la siguiente tabla conoceremos los valores de x en cada nodo:

x_i	0	1,6	3,2	4,8	6,4	8	9,6	11,2	12,8	14,4	16
$f(x_i)$	580	577,44	569,76	556,96	539,04	516	487,84	454,56	416,16	372,64	324

Tabla 1. Datos de la función f en los nodos x_i
Fuente: elaboración propia

Una vez que conocemos los valores en los nodos, y teniendo en cuenta que $h = 1,6$, aplicamos el método de los trapecios compuesto

$$I \cong \frac{1,6}{2} (f(0) + 2 \sum_{i=1}^q f(x_i) + f(16))$$

$$I \cong \frac{1,6}{2} (580 + 2(4490,4) + 324)$$

$$I \cong \frac{1,6}{2} \cdot 9884,8 = 7907,84$$

$$I \cong 7907,84 - (16 \cdot 324) = 2723,84$$

Ahora procedemos a calcular el error de cuadratura dado por

$$E = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

Haciendo la segunda derivada de la función de demanda nos queda un resultado de $f''(x) = -2$ que, acotándola, tendríamos un resultado de $M_2 = 2$. Por tanto, tendríamos que el error de cuadratura es igual a $3,413333333 \cdot 2 = 6.826666667$.

Ahora vamos a ver el resultado si dividimos el intervalo en 100 en vez de en 10, por lo que $n = 100$.

$$h = \frac{b-a}{n} = 0,16$$

Realizando el mismo proceso anterior para reconstruir la tabla y, posteriormente aplicando la fórmula del método del trapecio compuesto, utilizando software

$$I \cong \frac{0,16}{2} (f(0) + 2 \sum_{i=1}^q f(x_i) + f(16))$$

$$I \cong \frac{0,16}{2} (580 + 2(49014,24) + 324)$$

$$I \cong \frac{0,16}{2} \cdot 98932,48 = 7914,5984$$

$$I \cong 7914,5984 - (16 \cdot 324) = 2730,5984$$

Y calculando el error de cuadratura tendríamos

$$E = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

Como ya sabemos que $M_2 = 2$, tendríamos en este caso un el error de cuadratura igual a $0,03433333 \cdot 2 = 0,068266666$.

Una vez estudiado el excedente del consumidor utilizando el método de los trapecios, podemos afirmar que el resultado es mucho más exacto cuando se divide el intervalo en un número mayor de subintervalos, observando también el error que tendríamos en cada caso y que el resultado se acerca más al resultado inicialmente calculado.

Ahora bien, basándonos en los mismos datos de este ejemplo, vamos a ver la diferencia con el **método de Simpson compuesto**. Dividiendo el intervalo en $n = 10$ nos quedaría los mismos nodos en cada subintervalo, tal y como se muestra en la Tabla 1.

Sustituyendo en la fórmula del método de Simpson compuesto

$$\begin{aligned}
 I &\cong \frac{1,6}{6} \left(f(0) + 2 \sum_{i=1}^q f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^q f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(16) \right) \\
 I &\cong \frac{1,6}{6} (580 + 4(2477,6) + 2(2012,8) + 324) \\
 I &\cong \frac{1,6}{6} \cdot 14840 = 7914,66667 \\
 I &\cong 7914,666667 - (16 \cdot 324) = 2730,666667
 \end{aligned}$$

Como se puede observar nos da un resultado exacto, que en nuestro caso coincide con el resultado real del excedente del consumidor, por lo que se puede decir que para polinomios de grado menos o igual que dos es una fórmula de cuadratura que nos proporciona exactitud en el resultado, siendo innecesario hacer el error de cuadratura ya que nos saldría 0 y, por tanto, tampoco tendría sentido dividir el intervalo en 100 subintervalos.

A modo de comparativa, podemos decir que el método de Simpson siempre se va a aproximar más que el método de los trapecios compuesto al resultado real, siempre y cuando se haga la comparativa basándonos en los mismos datos y dividiendo el intervalo de la misma manera en ambos casos.

Por tanto, el punto de equilibrio que se alcanza varía según el método utilizado para su cálculo, siendo el más exacto el calculado por el método de Simpson compuesto, que en este caso tiene un valor de 2730,666667. Este punto de equilibrio nos viene a mostrar la cantidad que los demandantes están dispuestos a comprar, coincidiendo con la cantidad que los oferentes quieren fabricar, por el mismo precio ambos.

3.2. Aplicación económica coste total y al ingreso total

El ingreso marginal (IM) se obtiene cuando se produce un aumento de los ingresos totales como consecuencia de vender una unidad de producto más. Por otro lado, el Coste Marginal (CM) es el coste de producir una unidad adicional de un producto. El punto de equilibrio es cuando se igualan los IM a los CM, es decir, es el punto donde se producen las máximas ganancias para la empresa.

Por tanto,

- Si el $IM > CM$, la empresa debe aumentar la producción.
- Si el $IM < CM$, la empresa debe disminuir la producción.
- Si el $IM = CM$, no se debe de cambiar nada puesto que se están maximizando sus ganancias.

El ingreso marginal es el resultado de dividir el cambio en los ingresos totales entre el número de unidades adicionales. El coste marginal (CM) se calcula como la derivada de la función del coste total (CT) con respecto a la cantidad (Q)

$$CM = \frac{CT'}{Q'} \text{ ó } \frac{\partial CT}{\partial Q}$$

ya que se define como la variación del coste total al variar la cantidad.

Gráficamente se muestran como

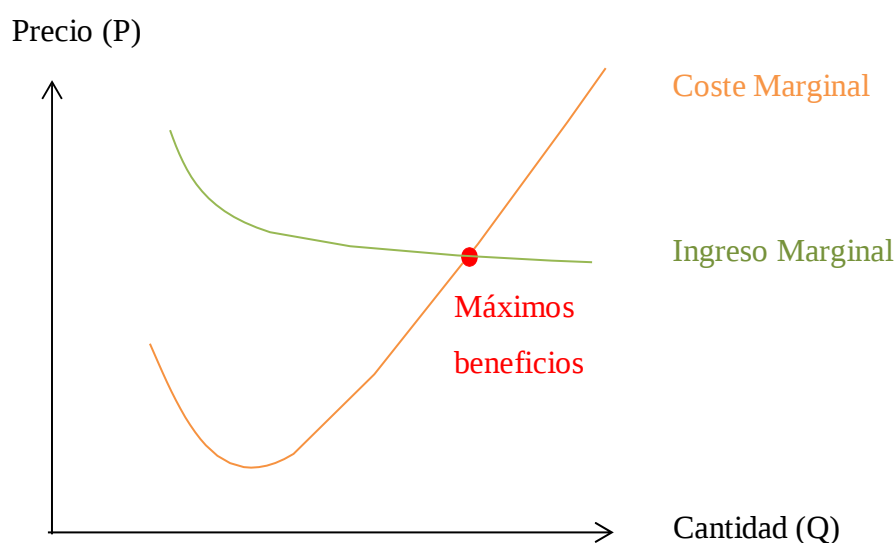


Figura 12: Nivel óptimo de producción
Fuente: elaboración propia

Ejemplo⁵: Se conoce la función de Coste Marginal es $CM'(x) = 70 + 2x$ y la de Ingreso Marginal es $IM'(x) = 6 + 4x$. Se igualan $CM'(x) = IM'(x)$, por lo que se entiende que fabricando 32 unidades se maximiza el beneficio de la producción. Ambas funciones pueden representarse

para el Coste Marginal

$$\int_0^{32} CM(70 + 2x) dx$$

y para el Ingreso Marginal

$$\int_0^{32} IM(6 + 4x) dx$$

En base a dichas funciones, se estima la producción, dividiendo el intervalo $[0,32]$ en 10 subintervalos ($n = 10$), siendo $a = 0$ y $b = 32$. Debemos saber cuál es la amplitud de cada uno de los subintervalos, es decir, $h = \frac{32-0}{10} = 3,2$.

Por tanto, las estimaciones de producción serían

Unidades (x_i)	0	3.2	6.4	9.6	12.8	16	19.2	22.4	25.6	28.8	32
CM (x_i)	70	76.4	82.8	89.2	95.6	102	108.4	114.8	121.2	127.6	134
IM (x_i)	6	18.8	31.6	44.4	57.2	70	82.8	95.6	108.4	121.2	134

Tabla 2. Estimaciones de producción

Fuente: elaboración propia

Realizando dichas estimaciones se puede observar cómo fabricando 32 unidades de armarios se maximiza el beneficio, ya que es el punto donde $CM = IM$.

Ahora bien, con el método del trapecio compuesto vamos a conocer el **coste total variable** de fabricar 32 unidades

$$I \cong \frac{3.2}{2} (CM(0) + 2 \sum_{i=1}^q CM(x_i) + CM(32))$$

$$I \cong \frac{3.2}{2} (70 + 2(918) + 134)$$

⁵ Arya, Jagdish C ; Lardner, Robin W, 2009, Capítulo 15. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Editorial Pearson (5ª Edición). Capítulo 15

$$I \cong \frac{3.2}{2} \cdot 2040 = 3264$$

Por tanto, el coste total variable de fabricar 32 unidades es aproximadamente de 3264 €.

Vamos a utilizar el mismo método para conocer el **ingreso total** por la venta de 32 unidades. Siguiendo los mismos pasos anteriores

$$I \cong \frac{3.2}{2} (IM(0) + 2 \sum_{i=1}^q IM(x_i) + IM(32))$$

$$I \cong \frac{3.2}{2} (6 + 2(630) + 134)$$

$$I \cong \frac{3.2}{2} \cdot 1260 = 2016$$

En este caso, tenemos que el **ingreso total** es aproximadamente de 2016€ al fabricar 32 unidades.

Como hemos dicho anteriormente, la utilidad máxima se alcanza cuando $CM = IM$, es decir, cuando $q = 32$. Suponiendo que tenemos unos costes fijos de 1500€, recalculamos la utilidad máxima.

Los **costes totales** es la suma de los costes totales variables y los costes fijos. Conocemos ambos valores, por lo que

$$CT = CT_{\text{Variables}} + CF_{\text{Fijos}}$$

$$CT = 3264 + 1500 = 4764 \text{ €}$$

y, la utilidad máxima se calcula

$$\text{Utilidad Máxima} = \text{Costes Totales} - \text{Ingresos Totales}$$

$$\text{Utilidad Máxima} = 4764 - 2016 = 2748 \text{ €}$$

CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo es ver cómo se puede aplicar la integración numérica a problemas principalmente económicos. Primero, hemos podido comprobar que con el Teorema Fundamental del Cálculo no se pueden obtener resultados exactos de determinadas integrales. Por ello, se han analizado las distintas fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes, ya que son las más usuales en la práctica, analizando a su vez sus correspondientes errores de cuadratura.

Una vez analizadas dichas fórmulas, hemos podido ver dos aplicaciones en el ámbito económico. La primera aplicación ha sido en el excedente del consumidor, donde se han utilizado tanto el método de los trapecios compuesto como el método de Simpson compuesto. Una vez conocidos los resultados, se ha comprobado el error de cuadratura de cada uno de ellos, pudiendo comprobar como el error del método de Simpson nos da un resultado de 0, siendo este método más exacto que el método de los trapecios compuesto.

Además, se ha realizado una comparación en el método de los trapecios compuesto. Hemos comprobado que, cuanto mayor sea el número de subintervalos, mayor exactitud obtendremos. Esto se observa también en el error de cuadratura, siendo menor cuando hemos dividido el intervalo en 100 subintervalos.

En cuanto a la aplicación al coste total y al ingreso total, hemos podido comprobar cómo, partiendo de la función del coste marginal y del ingreso marginal, podemos obtener resultados exactos a través del método de los trapecios compuesto.

En definitiva, el objetivo de la integración numérica es proporcionar resultados exactos que, de manera analítica, no se pueden calcular. También se ha comprobado que la integración numérica es de aplicación en distintos ámbitos de la vida cotidiana, no sólo en el ámbito matemático.

BIBLIOGRAFÍA

[CAPITULO DE LIBRO] Thomas, George B; Weir, Maurice D; Hass, Joel; Heil, Christopher; Garcia Hernández, Ana Elizabeth (2015). *Cálculo: una variable*. Grupo Anaya Educacion, pp 269-282

[CAPITULO DE LIBRO] Rogawski, Jon; Garcia García, Gloria; Jimeno Jiménez, Martín (2016). *Cálculo: una variable*. Editorial Reverte, pp. 244-285.

[CAPITULO DE LIBRO] Chapra, Steven C; Canale, Raymond P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. Editorial McGraw-Hill. (sexta edición), pp 249-266

[CAPITULO DE LIBRO] Arya, Jagdish C; Lardner, Robin W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Editorial Pearson (5ª Edición), pp 620-635

[LIBRO] Isaacson, Eugene; Keller, Herbert Bishop. (1994). *Analysis of Numerical Methods (Análisis de Métodos Numéricos)*. New York: Dover Publications.