



Universidad de Jaén

Facultad de Ciencias Sociales
y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GRAFOS A LA PLANIFICACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS

Alumna: M^a Amalia Ortega Reyes

Julio, 2020

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, que sin su esfuerzo y a veces su insistencia, no habría comenzado este camino. Gracias por apoyarme siempre.

A los profesores que han conseguido interesarme en sus asignaturas cuando pensaba que nunca me gustaría nada de esta carrera.

A la persona que ha recorrido conmigo este camino, desde el primer día de carrera hasta el último. Mi compañera de fatigas, alegrías, trabajos, estudio, salidas...en la universidad y en casa. A Laura, que siempre serás mi Jaén.

A los que aún lejos están siempre para todo, mis dos hermanos de otra madre, Amanda y Rubén.

A la gente "del barrio" que han hecho de estos años no solo una experiencia académica, sino una experiencia vital inolvidable. Y a todas esas personas que han hecho que se cumpla una frase que escuché al comenzar este camino: "A Jaén se llega llorando, y te irás llorando", y que en mi caso se ha cumplido literalmente. Especialmente a Rubén, Carlos, Marina, Pintxo y Payer.

Aunque se cierre esta etapa, siempre llevaré un cachito de Jaén en el corazón.

ÍNDICE

RESUMEN.....	7
ABSTRACT	9
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS	10
1.1. <i>El problema de los puentes de Königsberg.....</i>	<i>10</i>
1.2. <i>Conceptos básicos de la Teoría de Grafos</i>	<i>11</i>
1.3. <i>Caminos en grafos.....</i>	<i>15</i>
CAPÍTULO 2. GESTIÓN DE PROYECTOS: EL MÉTODO PERT	18
2.1. <i>Motivación</i>	<i>18</i>
2.2. <i>Marco histórico</i>	<i>18</i>
2.3. <i>Gestión de proyectos</i>	<i>19</i>
2.3.2. <i>Estimación del tiempo necesario</i>	<i>20</i>
2.3.3. <i>Condiciones de secuencia</i>	<i>20</i>
2.3.4. <i>Diagrama de red</i>	<i>21</i>
2.4. <i>El antecesor del método PERT: El Diagrama de Gantt.....</i>	<i>23</i>
2.5. <i>El método PERT.....</i>	<i>25</i>
2.5.1. <i>El método PERT en caso de tiempos de actividad conocidos</i>	<i>25</i>
2.5.1.1. <i>Algoritmo para determinar la ruta crítica</i>	<i>28</i>
2.5.1.2. <i>Compensaciones entre tiempo y costo</i>	<i>32</i>
2.5.2. <i>El método PERT en caso de tiempos de actividad inciertos.....</i>	<i>36</i>
CAPÍTULO 3. EJEMPLO DE APLICACIÓN MEDIANTE POM-QM	40
3.1. <i>Planteamiento del problema</i>	<i>40</i>
3.2. <i>Simulación mediante POM-QM de YourPhone</i>	<i>42</i>
3.2.1. <i>Simulación mediante POM-QM de YourPhone para tiempos de actividad conocidos.....</i>	<i>42</i>
3.2.2. <i>Simulación mediante POM-QM de YourPhone para tiempos de actividad inciertos.</i>	

.....	44
3.2.3. Simulación mediante POM-QM de YourPhone con PERT-Costo.	45
BIBLIOGRAFÍA	49
WEBGRAFÍA.....	50

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Mapa de Königsberg.....	10
Figura 2. Representación matemática según Euler del mapa de Königsberg.....	11
Figura 3. Ejemplo de grafo.	13
Figura 4. Grafo circular de orden 7.	14
Figura 5. Ejemplo de grafo dirigido.	15
Figura 6. Ejemplo de subgrafo.	15
Figura 7. Ejemplo de caminos.....	16
Figura 8. Comparación entre representaciones AON y AOA.....	21
Figura 9. Diagrama corregido mediante actividad ficticia.	22
Figura 10. Ejemplo diagrama de Gantt.....	23
Figura 11. Diagrama de Gantt con secuencia.	24
Figura 12. Diagrama de red del ejemplo 2.5.1.1.	27
Figura 13. Ejemplo cálculo ES y EF.	29
Figura 14. Ejemplo cálculo LS y LF.	30
Figura 15. Diagrama de red con actividad C reducida a tres días.	34
Figura 16. Distribución beta para las tres estimaciones de tiempo de actividad en PERT.....	37
Figura 17. Grafo de YourPhone con tiempos conocidos.	43
Figura 18. Grafo de YourPhone con tres escenarios.	44

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Esquema de caminos.....	16
Tabla 2. Tabla de precedencias del ejemplo 2.5.1.1.....	26
Tabla 3. Holgura de las actividades del Ejemplo 2.5.1.1.....	31
Tabla 4. Costes asociados a las tareas.	32
Tabla 5. Tabla de costes al reducir el tiempo de finalización del proyecto.....	33
Tabla 6. Costes incrementales del programa urgente.....	33
Tabla 7. Holgura de las actividades con actividad C reducida en un día.	35
Tabla 8. Ejemplo PERT con estimaciones de tiempo.	39
Tabla 9. Tabla de precedencias de YourPhone para tiempos conocidos.....	41
Tabla 10. Escenarios del ejemplo YourPhone.	42
Tabla 11. Solución de YourPhone con tiempos conocidos.	43
Tabla 12. Solución de YourPhone con tres escenarios.....	45
Tabla 13. Planteamiento PERT-Costo de YourPhone.....	46
Tabla 14. Solución PERT-Costo de YourPhone.....	46

RESUMEN

En este trabajo veremos una introducción a la Teoría de Grafos, como base para la comprensión del tema objeto de estudio del mismo, la metodología PERT (*Programme Evaluation and Review Technique*).

El método PERT es empleado por las empresas en el proceso de planificación y control de proyectos que requieren la coordinación de distintas actividades en una secuencia específica. Veremos cómo surgió, sus antecedentes y el algoritmo del mismo para distintas casuísticas.

Por último, presentamos un ejemplo simulado de aplicación del método a través del programa informático POM-QM.

ABSTRACT

In this project we will see an introduction to Graph Theory, which will help to the understanding of the subject under study, the PERT (*Programme Evaluation and Review Technique*) methodology.

The PERT method is used by companies in the process of planning and controlling their projects when there are different activities that require a specific sequence. We will see how it arose, its background and the algorithm for different cases.

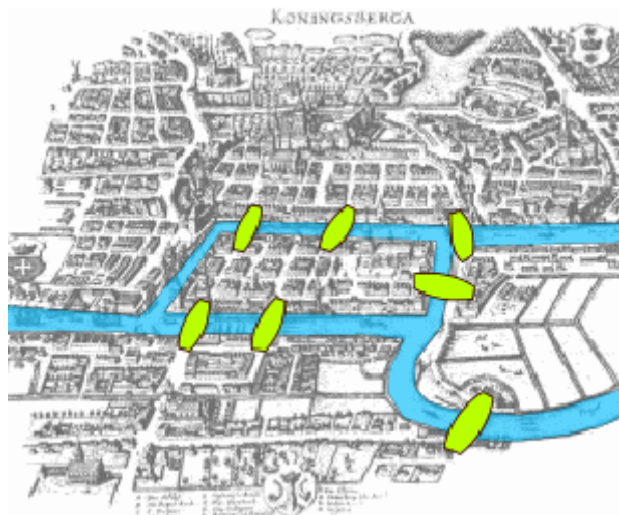
Finally, a practical simulation example will illustrate the application of the method using the software POM-QM.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

1.1. El problema de los puentes de Königsberg

La Teoría de Grafos surge a partir de un célebre problema matemático inspirado por los habitantes de la antigua ciudad de Königsberg (la actual Kaliningrado, Rusia) en el siglo XVIII. Esta ciudad estaba atravesada por el río Preguel, actualmente llamado Pregolya, este se bifurcaba para rodear la isla de Kneiphof causando cuatro regiones distintas. Estas zonas estaban unidas entre sí por siete puentes repartidos a lo largo de la ciudad, como se puede observar en la Figura 1. Estos eran llamados: el puente del herrero, el puente conector, el puente verde, el puente del mercado, el puente de madera, el puente alto y el puente de la miel.

Figura 1. Mapa de Königsberg.



Fuente: Bueso Montero (2012).

Los habitantes de la ciudad se preguntaban si habría un camino que les llevara al punto de partida, fuera cual fuese, recorriendo todos los puentes de la ciudad pero una sola vez. Esto originó el anteriormente citado "problema de los (siete) puentes de Königsberg".

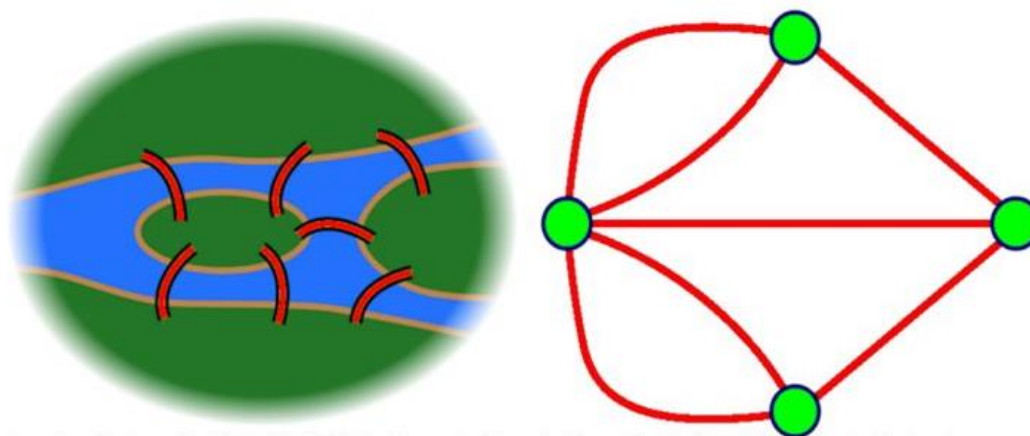
Este problema fue resuelto por Leonhard Euler, uno de los más célebres matemáticos de la historia, en 1736.

Euler concluyó que era imposible realizar dicho recorrido. Para ello hizo un modelo matemático simplificado del problema, obviando los datos que le resultaron innecesarios

(longitud de los puentes, extensión de las áreas geográficas...) y representó las distintas zonas como puntos y los puentes como líneas, como podemos observar en la Figura 2.

El problema planteado por los habitantes de la ciudad quedaba reducido a algo tan simple como si es posible conseguir dibujar la figura lineal (es decir, la situada a la derecha de la Figura 2) sin levantar el bolígrafo del papel y sin repetir ninguna de las líneas dibujadas previamente.

Figura 2. Representación matemática según Euler del mapa de Königsberg.



Fuente: Robinson-García (2014). 'El análisis de redes sociales'.

Euler demostró que para un problema de este tipo, habiendo determinado un punto de inicio y uno de final, solo podría recorrerse si sobre los vértices intermedios inciden un número par de aristas. Solo el primer y último vértices pueden tener un número impar de aristas. Si se desea que el camino sea cerrado, entonces todos los vértices deben cumplir la condición de que sobre ellos incida un número par de conexiones.

De una manera no muy rigurosa y bastante simplificada podemos definir los grafos como representaciones gráficas de problemas más complejos, cuyos elementos están relacionados entre sí. En ellas eliminamos los datos innecesarios, y expresamos los elementos y sus relaciones mediante vértices y aristas. Estas representaciones hacen más fácil la visualización e interpretación de estos problemas y el estudio de sus propiedades.

1.2. Conceptos básicos de la Teoría de Grafos

De una manera más rigurosa vamos a definir lo que es un grafo y los teoremas, definiciones y propiedades más importantes, que permitan la comprensión del método PERT, objeto de este

estudio.

Pese a que no exista una definición formal de grafo que sea universal, a continuación presentamos una definición que aúna los elementos comunes de diversas fuentes.

Definición 1.2.1. Un grafo, G , es una terna $G = (V, E, \partial)$ cuyos elementos son:

1. Un conjunto no vacío de vértices, V . Es importante que al menos haya un vértice para poder ser considerado grafo.
2. Un conjunto de aristas, E . A diferencia de los vértices, el conjunto de aristas sí puede ser un conjunto vacío.
3. Una aplicación, $\partial: E \rightarrow P(V)$, llamada aplicación de incidencia, que conecta cada arista con un subconjunto formado por uno o dos elementos de V , siendo $P(V)$ la clase de todos los subconjuntos de V .

Algunos de los conceptos más utilizados en la Teoría de Grafos son los siguientes:

- El número de vértices se llama *orden del grafo*, y se denota $|V|$.
- Se dice que dos vértices, v_1 y v_2 , son *adyacentes* si existe una arista e que los conecta. En este caso también diremos que v_1 y v_2 son incidentes con e y que e incide sobre v_1 y v_2 .
- Si existen dos aristas, díganse e_1 y e_2 , tales que $\partial(e_1) = \partial(e_2)$; es decir, que sus aplicaciones de incidencia son iguales, siendo distintas aristas, diremos que e_1 y e_2 son *aristas paralelas* o *aristas múltiples*.
- Si los extremos de una arista coinciden (es decir, la arista conecta un vértice consigo mismo) se llama *lazo* o *bucle*.
- Si hay un vértice que no esté conectado con ninguna arista del grafo, diremos que es un *vértice aislado*.
- Si un grafo no tiene ni lazos ni aristas paralelas lo denominaremos *grafo simple*.

Para representar de manera gráfica un grafo debemos representar sus distintos vértices y a través de la aplicación de incidencia ir conectando cada arista con el/los vértices correspondiente/es. Por tanto la manera de representar un grafo no es única.

Ilustraremos estos conceptos citados a través de algunos ejemplos.

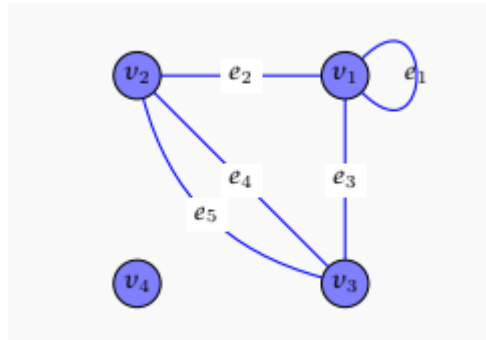
Ejemplo 1.2.1: Consideramos el grafo, G , dado por los siguientes elementos:

- El conjunto de vértices, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

- El conjunto de aristas, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.
- Y la aplicación de incidencia, ∂_G , definida por: $\partial_G(e_1) = \{v_1\}$, $\partial_G(e_2) = \{v_1, v_2\}$, $\partial_G(e_3) = \{v_1, v_3\}$, $\partial_G(e_4) = \{v_2, v_3\}$, $\partial_G(e_5) = \{v_2, v_3\}$.

Vamos a ver en la Figura 3 una representación gráfica de este grafo y comentar los conceptos que hemos mencionado anteriormente.

Figura 3. Ejemplo de grafo.



Fuente: Bueso Montero (2012).

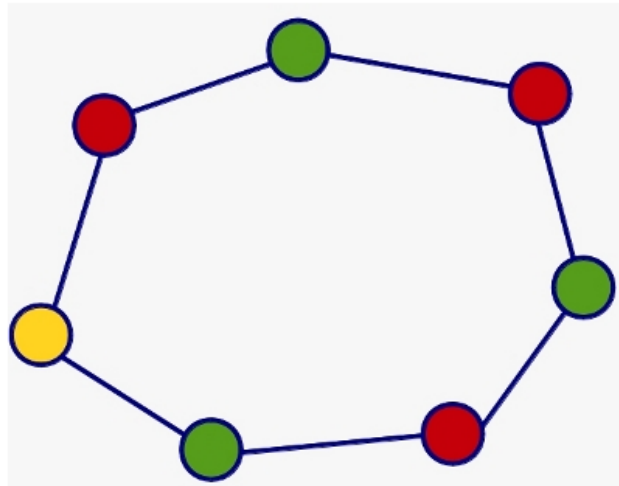
- En el primer vértice, v_1 , podemos observar los siguientes elementos:
 - La arista e_1 forma un lazo. Es decir, $\partial(e_1) = \{v_1\}$
 - Es adyacente a v_2 mediante la arista e_2 , es decir, $\partial(e_2) = \{v_1, v_2\}$.
 - De igual forma es adyacente a v_3 mediante e_3 , $\partial(e_3) = \{v_1, v_3\}$.
- En el segundo y tercer vértice, v_2 y v_3 respectivamente, se pueden observar dos aristas paralelas, e_4 y e_5 , que inciden sobre ambos vértices. $\partial(e_4) = \{v_2, v_3\} = \partial(e_5)$.
- Por último, en el cuarto vértice, v_4 , es un vértice aislado.

Ejemplo 1.2.2: Llamaremos grafo ciclo o circular de orden n , y lo notaremos C_n (siendo $n \geq 3$), al grafo formado por un conjunto de n vértices, $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, n aristas, $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n\}$, y aplicación de incidencia $\partial = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

Es decir, cada vértice está conectado únicamente mediante una arista al siguiente, y el último incide sobre el primero creando un camino circular (no necesariamente con esta forma).

Veremos de manera gráfica en la Figura 4 un ejemplo de un grafo ciclo de orden 7.

Figura 4. Grafo circular de orden 7.



Fuente: Grima, C. (2012).

Definición 1.2.2. Un *grafo dirigido* o *digrafo*, es un grafo $G = (V, E, \partial)$ formado por:

- Un conjunto finito no vacío de vértices, V .
- Un conjunto finito de aristas, E .
- Una aplicación, $\partial: E \rightarrow V \times V$ tal que, para cada arista e , $\partial(e)$ es un par ordenado de V .

El primer elemento de par se denomina *vértice inicial* de e y el segundo, *vértice final* de e . Es decir, cada arista tiene asociado un sentido concreto.

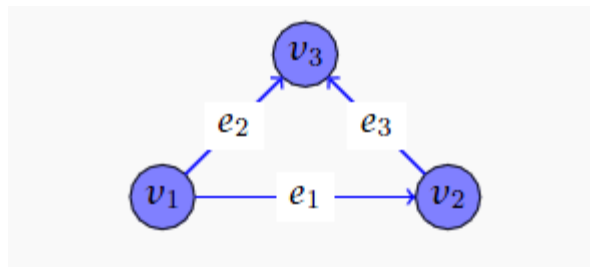
Ejemplo 1.2.3. Vamos a ver un ejemplo gráfico de un grafo dirigido.

Sea un grafo, G , formado por:

- Un conjunto de vértices, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$.
- Un conjunto de aristas, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.
- Una aplicación de incidencia, $\partial = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}\}$.

Este grafo es también a su vez un grafo circular de orden 3 (Figura 5).

Figura 5. Ejemplo de grafo dirigido.

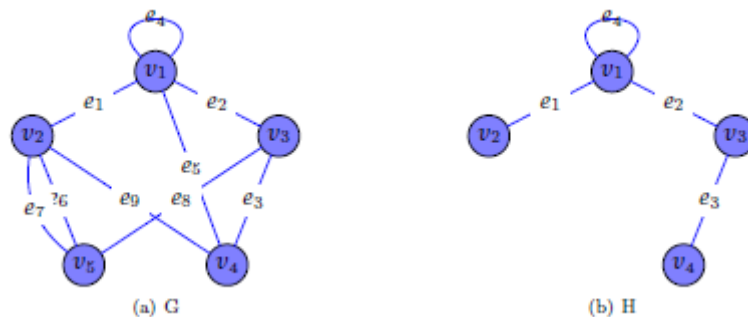


Fuente: Bueso Montero (2012).

Definición 1.2.3. Un grafo H es un *subgrafo* de otro grafo G si todas sus aristas y vértices están contenidos en los de G .

La Figura 6 muestra un ejemplo de subgrafo.

Figura 6. Ejemplo de subgrafo.



Fuente: Bueso Montero (2012).

1.3. Caminos en grafos

Definición 1.3.1. Sea G un grafo. Un *camino* de longitud k es una sucesión de aristas $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ junto con una sucesión de vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k+1}$. De manera que $\partial(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$. Esto se llama camino del vértice v_1 al v_{k+1} .

- Un camino que no tiene aristas repetidas se denomina *recorrido*.
- Un recorrido en el que no hay vértices repetidos se denomina *camino simple*. Aunque se admite la excepción eventualmente de que se repita el primero y el último.
- Llamamos *camino cerrado* a un recorrido en el coinciden el primer y el último vértice.

- Un recorrido que a la vez es un camino cerrado se denomina *circuito*.
- Un circuito que a la vez es un camino simple se llama *ciclo*.

De una manera más esquematizada, podemos observar la Tabla 1.

Tabla 1. Esquema de caminos.

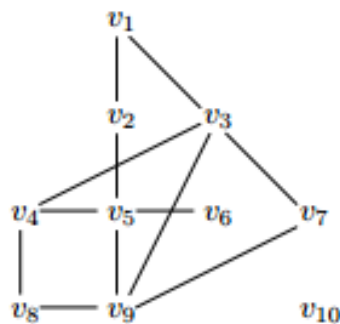
Nombre	Vértices repetidos	Aristas repetidas	Cerrado
Camino	Sí	Sí	No
Camino cerrado	Sí	Sí	Sí
Recorrido	Sí	No	No
Circuito	Sí	No	Sí
Camino simple	No	No	No
Ciclo	No	No	Sí

Fuente: Elaboración propia.

Definición 1.3.2. Un grafo G es *conexo* si existe un camino que une cada par de vértices. En caso contrario lo llamaremos *inconexo*.

Ejemplo 1.3.1. Consideramos el grafo de la Figura 7:

Figura 7. Ejemplo de caminos.



Fuente: García Miranda, 'Introducción a la teoría de grafos'.

- La sucesión $v_7v_3v_9v_5v_4v_8v_9v_3$ es un camino de longitud 7. Al repetirse dos veces la arista que une v_3 y v_9 , no puede considerarse recorrido.
- La sucesión $v_1v_3v_9v_8v_4v_8v_3v_7$ es un camino de longitud 6 que une v_1 y v_7 . Es

recorrido ya que no se repite ninguna arista, sin embargo no es un camino simple, ya que pasa dos veces por el vértice v_3 .

- La sucesión $v_3v_4v_8v_9$ es un camino simple de longitud 3.
- La sucesión $v_1v_3v_7v_9v_3v_4v_5v_2v_1$ es un camino cerrado de longitud 8. Como ninguna arista está repetida, también es un circuito. Sin embargo, se repite un vértice(v_3) y por tanto no es un ciclo.
- La sucesión $v_1v_2v_5v_9v_7v_3v_1$ es un ciclo.

CAPÍTULO 2. GESTIÓN DE PROYECTOS: EL MÉTODO PERT

2.1. Motivación

Gracias a la Teoría de Grafos se pueden resolver multitud de problemas en una gran variedad de ámbitos de la vida real..

Por ejemplo, en el campo de la informática, existen muchas aplicaciones relacionadas con las redes de telecomunicación, redes de sensores, etc.

La Teoría de Grafos se utiliza también para trazar trayectos de forma óptima (como las líneas de autobús), así como el estudio de las redes sociales, movimientos migratorios animales, etc. También tiene importantes aplicaciones en el campo de la empresa. Concretamente, en este capítulo presentamos el método PERT (*Programme and Review Technique*), una herramienta basada en la Teoría de Grafos que se utiliza para administrar la planificación y el control de proyectos con varias actividades distintas que requieren coordinación.

2.2. Marco histórico

Según Balet y Canive, el origen del método PERT se sitúa en 1957, durante la guerra fría entre Estados Unidos y la antigua Unión Soviética y se atribuye su creación a la armada estadounidense.

Hasta el momento había métodos empleados en la gestión de proyectos, como el diagrama de barras de Henry Gantt, pero acababan siendo poco útiles cuando había gran número de actividades o eran muy diversas. Con lo que surgió la necesidad de buscar un nuevo método que solventara los problemas de los existentes.

El almirante estadounidense William. F. Raborn reconoció la necesidad de que su equipo requiriera una planificación integrada y un sistema de control fiable para el programa de misiles balísticos ‘Polaris’. Fue entonces cuando la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina de Estados Unidos, en colaboración con la empresa aeronáutica Lockheed y la firma de ingenieros consultores Booz-Allen&Hamilton se emplearon a fondo para crear una técnica que permitiera relacionar las actividades de un proyecto optimizando el tiempo y los costes.

El citado equipo de investigación debía encontrar una manera de gestionar un proyecto de grandes dimensiones y complejidad durante un plazo de cinco años que requiriera planificar y controlar a doscientas cincuenta empresas, nueve mil empresas subcontratadas y numerosas agencias gubernamentales, dentro del programa Polaris. Gracias al desarrollo de PERT, el proyecto se adelantó dos años a los cinco años previstos inicialmente.

Al mismo tiempo surgió otro método análogo, el CPM (método del camino crítico). Ambos fueron un gran éxito, ya que permitieron programar proyectos de manera óptima, y se siguen empleando hasta nuestros días.

2.3. Gestión de proyectos

En esta sección, presentamos las distintas fases que se deben seguir en la planificación y gestión de proyectos.

Definición 2.3.1. (Taha, 1998): Un *proyecto* es un conjunto de un gran número de actividades interrelacionadas, cada una de las cuales requiere un tiempo concreto de realización y debe cumplir ciertos requisitos, por ejemplo, para empezar una de ellas puede ser necesario haber finalizado otra previamente.

A grandes rasgos, la planificación de un proyecto requiere previamente los siguientes pasos según Mathur y Solow (1996):

1. Conocer el conjunto de actividades que se han de realizar.
2. Estimar el tiempo necesario para realizar cada una de ellas.
3. Establecer las condiciones de secuencia de cada actividad.
4. Dibujar un diagrama de red para dicho proyecto.

A continuación detallamos cada una de estas fases.

2.3.1. Identificación de las actividades

Es necesario en primer lugar identificar las distintas actividades que van a formar parte del proyecto. Esto a priori puede parecer sencillo, sin embargo en la práctica puede no serlo. Algunas de estas actividades pueden ser divididas a su vez en otras tareas más sencillas y, aunque podemos basarnos en ciertas pautas, no hay normas que especifiquen el tamaño o forma que debe tener cada tarea.

En primer lugar, cada tarea tiene que tener un principio y un final específico.

En segundo lugar, debemos tener claro cuáles son las tareas anteriores a la finalización del proyecto y que son necesarias para su progreso y finalización.

Por último, las distintas tareas deben asociarse a un responsable apto para llegar a una conclusión adecuada. No vamos a asignar la planificación de la producción al responsable del

departamento de marketing, por ejemplo.

Es muy importante que se incluyan todas las tareas relevantes a la hora de empezar a planificar, puesto que si olvidamos alguna o surgen tareas que no habían sido planificadas habría que empezar a hacer el proyecto desde cero, o gastaríamos nuevamente nuestros recursos en modificar parte de él.

2.3.2. Estimación del tiempo necesario

El tiempo total de un proyecto dependerá en su gran medida del tiempo de cada una de las tareas que deban realizarse.

Si una empresa ya estaba dedicada a una actividad relacionada con el proyecto, podrá conocer el tiempo que ha empleado en cada tarea o si se han realizado proyectos similares podrá aproximarlos con más exactitud.

Sin embargo no siempre será posible saber con exactitud el tiempo requerido para cada tarea, por ejemplo, si es una empresa de nueva creación, deberá estimar los tiempos de cada actividad, con lo cual pueden surgir ciertos errores, como puede suceder en toda aproximación estadística, entre la estimación y la realidad.

2.3.3. Condiciones de secuencia

El tiempo total del proyecto no tiene por qué corresponder a la suma de los tiempos de las distintas tareas. Dentro de una empresa hay actividades que pueden realizarse en paralelo y otras que requieren necesariamente haber hecho previamente alguna tarea, es decir, hay tareas que son predecesoras de las otras. También hay tareas que no necesitan de ninguna anterior para iniciarse. Por ello hay que tener en cuenta como se relacionan entre sí las distintas tareas. Clarificaremos esta idea a través de un sencillo ejemplo.

Ejemplo 2.3.3.1 Imaginemos una empresa dedicada a la fabricación de automóviles.

Es posible fabricar los faros de los automóviles mientras se fabrican los motores, si la empresa tiene los recursos necesarios. También la empresa puede adquirir alguno de los componentes de otra empresa dedicada a ello (por ejemplo, muchas empresas automovilísticas encargan la fabricación de sus faros a la multinacional Valeo) y mientras fabricar por sí misma otros componentes necesarios. Sin embargo, no es posible ensamblar el vehículo si previamente no tenemos todos sus componentes.

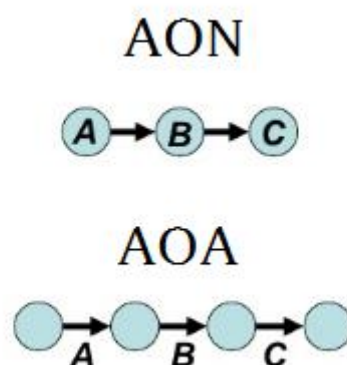
2.3.4. Diagrama de red

Una vez conozcamos todas las tareas y sus relaciones, es útil resumir información mediante un grafo dirigido, es decir, un diagrama de red que permita visualizar, de forma gráfica, las relaciones de precedencia de las actividades que componen el proyecto. Hay dos tipos de representación:

- **AON (*actividades en los nodos*)**: Emplea nodos para representar las tareas y los arcos para indicar las relaciones de precedencia. Se incluyen indicadores de inicio y fin de manera explícita (iniciando y terminando el diagrama con un solo nodo). Es el tipo de presentación más empleado, ya que muchos administradores de proyectos lo consideran más sencillo, especialmente a la hora de explicarlo a usuarios no familiarizados con la materia. Además es la notación más usada en los paquetes de informáticos.
- **AOA (*actividades en los arcos*)**: Representa las tareas mediante los arcos de la red, mientras que los nodos representan eventos o puntos en el tiempo. En esta representación, el primer evento es el inicio del proyecto, mientras que el último es el de terminación del mismo.

En este trabajo utilizaremos ambas notaciones indistintamente. Veamos en la Figura 8 un ejemplo comparativo de ambas.

Figura 8. Comparación entre representaciones AON y AOA.



Fuente: Elaboración propia.

Una vez explicadas las fases, puntualizaremos algunos requisitos que debe cumplir un diagrama de red AOA para que se considere correcto:

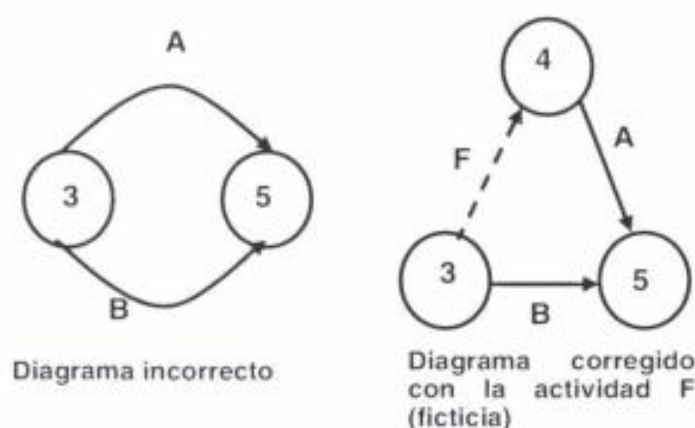
- Debe haber un nodo (vértice) inicial, que marque el comienzo del proyecto. A este se unirán aquellas actividades que no tengan precedencias.
- Antes de comenzar una actividad, sus predecesoras deben haber finalizado.
- El proyecto debe tener un final, representado con un último nodo o vértice.
- La numeración de los nodos debe cumplir la condición de que el nodo que suceda a otro debe tener una numeración superior a la anterior.
- Dos nodos no pueden estar conectados por varias actividades.
- Las actividades(arcos) deben estar dirigidas de izquierda a derecha.
- Si dos actividades pueden ser realizadas simultáneamente debe verse reflejado en la red.

Cuando surjan problemas a la hora de representar arcos o nodos podemos solventarlo de varias maneras:

- Combinando nodos, de manera que reemplazamos dos por uno sencillo.
- Creando una actividad ficticia, que no tendrá un tiempo asignado, pero facilitará la representación
- Creando un nodo ficticio.

Veamos en la Figura 9 cómo solventar mediante una actividad ficticia un diagrama incorrecto con representación AOA.

Figura 9. Diagrama corregido mediante actividad ficticia.



Fuente: Rincón Abril (2001).

2.4. El antecesor del método PERT: El Diagrama de Gantt

El diagrama de Gantt fue desarrollado por Henry Laurence Gantt a comienzo del siglo XX, concretamente en 1917. Es una herramienta empleada en la planificación y programación de tareas a lo largo de un periodo determinado. Facilita la comprensión de los procesos, ya que muestra gráficamente las tareas, su duración y secuencia concreta a lo largo del calendario general del proyecto. Nos permite observar el inicio de cada tarea, las tareas previas o aquellas que transcurren de manera paralela.

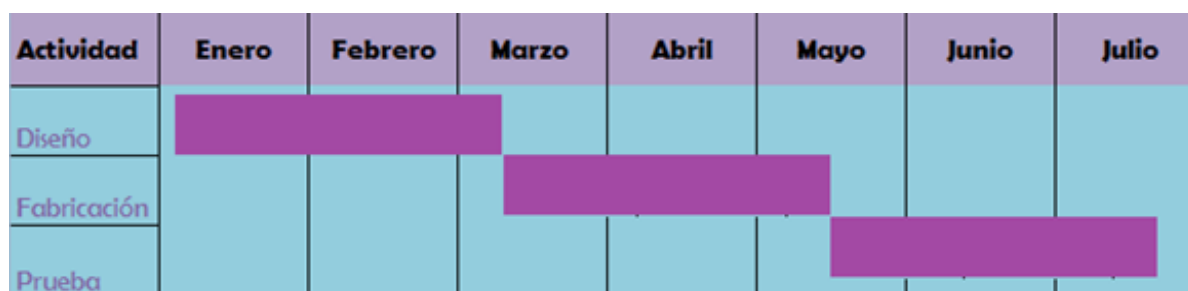
Según Rodríguez de León (2014), la ventaja de este método es que es muy gráfico y facilita la comprensión visual. Es un sistema de coordenadas donde:

- En el eje de abscisas se representan los tiempos (que pueden aparecer en días, semanas, meses...)
- En el eje de ordenadas se representan las distintas tareas desde el inicio al final del proyecto.

Cada tarea se muestra dentro de este sistema de coordenadas con una línea o barra cuya extensión es igual al tiempo necesario para completarla.

La Figura 10 un sencillo ejemplo, donde tenemos tres actividades: diseño, fabricación y prueba, cuya realización se planifica para los meses de enero a julio.

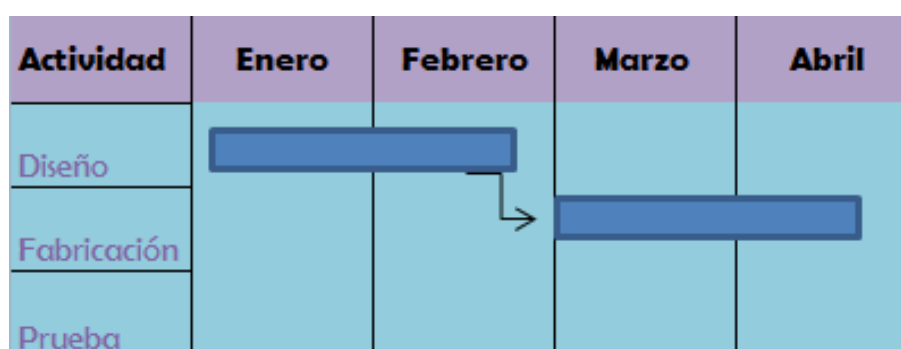
Figura 10. Ejemplo diagrama de Gantt.



Fuente: Elaboración propia.

Si una tarea es secuencial, puede usarse una flecha para especificar que una tarea requiere que se haya completado la anterior, como podemos observar en la Figura 11.

Figura 11. Diagrama de Gantt con secuencia.



Fuente: Elaboración propia.

Este método proporciona una serie de ventajas e inconvenientes que detallamos a continuación, según Villanueva (2018) y Klastorin (2016).

Ventajas:

- Proporciona una vista general del proyecto simplificada.
- Facilita la visión de actividades de una manera clara.
- Da la secuencia de orden de las actividades.
- Estima el tiempo total de un proyecto.
- Divide el proyecto en etapas y ayuda a gestionar el tiempo de cada actividad.
- Muestra las incompatibilidades.

Inconvenientes:

- Muestra carencias cuando hay un gran número de actividades.
- Se debe conocer de antemano la planificación del proyecto.
- No permite evaluar las repercusiones de los atrasos en actividades.
- No muestra adecuadamente las interrelaciones entre las actividades y los recursos. Por ejemplo, no considera el costo.
- Imposibilita el movimiento de las actividades críticas.
- La coordinación del trabajo es mínima.

Para suplir las desventajas del diagrama de Gantt, se han desarrollado modelos y técnicas para la planificación óptima de proyectos, como el conocido método de evaluación y revisión de proyectos (PERT), objeto de este trabajo.

2.5. El método PERT

El método PERT (*Project Evaluation and Review Techniques*), donde centraremos el resto de este trabajo, es un método de gran utilidad para la gestión de proyectos, especialmente en las fases de planificación y control, en las que hace falta coordinar varias actividades diferentes en una secuencia específica, solventando las carencias que tenía el diagrama de Gantt.

El PERT proporciona, no solo el orden de las actividades que optimiza el proyecto, sino también el tiempo total esperado para concluir el proyecto. Además, el gerente será capaz de observar las actividades que necesitan más recursos y supervisarlas o encontrar los fallos en el sistema de planificación.

Según Campins y Velasco (2013) los obstáculos para el incremento de la productividad muchas veces no están en la falta de recursos financieros o tecnología sino:

- En los cuellos de botella.
- Cambio en la preparación de la tecnología empleada.
- El tamaño de los lotes.
- Determinar las prioridades.
- La incertidumbre ocasionada por la variabilidad en la ejecución de los trabajos.
- La contabilidad de costes.
- El balance de la planta.

Analizaremos los conceptos básicos del PERT para dos casuísticas: cuando los tiempos de actividad son conocidos y cuando estos son inciertos y es necesario aproximarlos.

2.5.1. El método PERT en caso de tiempos de actividad conocidos

Como hemos comentado anteriormente, en la gestión de proyectos es necesario seguir una serie de pasos: conocer el conjunto de actividades que se han de realizar, estimar el tiempo necesario para realizar cada una de ellas (en este apartado se va a suponer que el tiempo es conocido), las condiciones de secuencia y dibujar un diagrama de red para dicho proyecto.

Para el desarrollo del método hacemos una tabla donde se muestren las actividades, los predecesores y los tiempos estimados, que nos facilitará la realización del diagrama de red, esta es llamada "tabla de precedencias".

Veremos a través de un ejemplo cómo realizar dicha tabla.

Ejemplo 2.5.1.1: Imaginemos que nuestro proyecto consta de seis actividades, que llamaremos *A, B, C, D, E* y *F*. Con lo cual ya tenemos identificadas nuestras tareas.

Sabemos que el tiempo, en días, de cada tarea es:

- Tarea *A*: 2 días.
- Tarea *B*: 3 días.
- Tarea *C*: 4 días.
- Tarea *D*: 6 días.
- Tarea *E*: 2 días.
- Tarea *F*: 8 días.

Por otra parte establecemos el orden o precedencias inmediatas de cada una de ellas, a saber:

- La tarea *A* no requiere de ninguna otra antes de realizarse.
- La tarea *B* requiere de la realización previa de la tarea *A*.
- La tarea *C* debe ser precedida por la tarea *A*.
- Para llevar a cabo la tarea *D* deben haberse realizado previamente las tareas *B* y *C*.
- La tarea *E* no requiere de ninguna precedencia.
- La tarea *F* necesita que haya finalizado previamente la tarea *E*.

Ahora hacemos la tabla de precedencias, que resuma la información de que disponemos (Tabla 2):

Tabla 2. Tabla de precedencias del ejemplo 2.5.1.1.

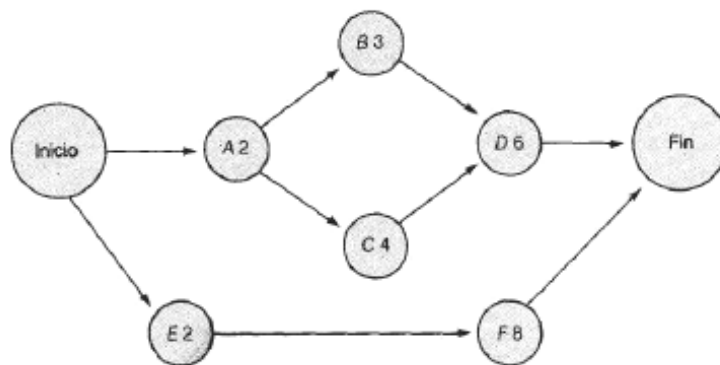
Actividad	Predecesores inmediatos	Tiempo en días
A	Ninguno	2
B	A	3
C	A	4
D	B, C	6
E	Ninguno	2
F	E	8

Fuente: Elaboración propia.

Una vez hecha la tabla, continuemos con nuestro ejemplo. Ahora con nuestros datos ordenados podemos realizar nuestro diagrama de red. Al igual que dijimos cuando hablábamos de la representación de un grafo, este diagrama no es único y podrá representarse de varias maneras.

Veamos a través de la Figura 12 una de las representaciones gráficas de nuestro ejemplo mediante representación AON.

Figura 12. Diagrama de red del ejemplo 2.5.1.1.



Fuente: Bierman, Bonini y Hausman (1994).

Una vez representado el diagrama de red del proyecto, necesitamos un algoritmo que permita estimar el tiempo de finalización del mismo. Para ello hay que tener en cuenta el tiempo de duración de las actividades y las relaciones de precedencia entre las mismas. A continuación, introducimos algunos conceptos previos, necesarios para establecer dicho algoritmo.

Definición 2.5.1.1: Una *actividad crítica* es aquella cuya demora genera un retraso en la terminación del proyecto completo.

Definición 2.5.1.2: Una *ruta* se define como una secuencia de actividades enlazadas dentro de un proyecto.

Definición 2.5.1.3: La *ruta crítica* es la secuencia de actividades que mayor tiempo requiere para llevarlas a cabo, desde el inicio del proyecto hasta el final o, en otras palabras, aquella que determina el tiempo mínimo para concluir el proyecto.

Definición 2.5.1.4: La *holgura* es el tiempo que puede demorarse una actividad sin que el proyecto se extienda mas allá de su fecha límite.

La ruta crítica es importante porque aparte de que consigue que no se pueda reducir más el tiempo del proyecto, destaca las actividades que deben efectuarse con mayor rapidez para que sea posible esta reducción de tiempo. Al igual que hace posible, por ejemplo, que se detecten los cuellos de botella del proyecto.

2.5.1.1. Algoritmo para determinar la ruta crítica

Para hallar la ruta crítica en una red realizaremos dos etapas de cálculos, los "cálculos hacia delante", que van desde el primer al último vértice, y los "cálculos hacia atrás", desde el nodo de terminación hacia el de inicio.

Para ello establecemos previamente las siguientes definiciones:

Definición 2.5.1.1.1: El menor tiempo de inicio para cada actividad i , que denominaremos ES_i , es el momento más anticipado en el cual puede comenzar la actividad, suponiendo que sus predecesores también han empezado en el momento más anticipado posible.

Definición 2.5.1.1.2: El menor tiempo de terminación de la actividad i , que denominaremos EF_i , es el tiempo más anticipado en el que acaba una actividad, suponiendo que sus predecesores comenzaron en el momento más anticipado posible.

Definición 2.5.1.1.3: El mayor tiempo de terminación de la actividad i , que denominaremos LF_i , es el momento más tardío en el cual puede terminar la actividad, sin afectar la fecha límite del proyecto, suponiendo que las actividades posteriores se llevan a cabo según lo planificado.

Definición 2.5.1.1.4: El mayor tiempo de inicio para cada actividad i , que denominaremos LS_i , es la diferencia entre su mayor tiempo de terminación y su duración estimada.

Comenzamos con la primera etapa del algoritmo. Para hallar estos valores hacia delante de cada actividad hay que realizar los siguientes pasos:

1. El menor tiempo de inicio de la primera actividad es cero, $ES_1 = 0$.
2. Luego se suma a ES_1 el tiempo estimado de la primera actividad para obtener el menor tiempo de finalización de la primera actividad, EF_1 .
3. Considerar cualquier actividad que verifique que todos sus predecesores inmediatos tengan tiempos ES_i y EF_i conocidos.
4. El menor tiempo de inicio de dicha actividad es igual al mayor de los valores EF_i de sus predecesores inmediatos.
5. Calculamos el menor tiempo de finalización de la actividad sumando su tiempo

estimado de duración a su menor tiempo de inicio.

6. Repetir los pasos 3, 4 y 5 hasta que queden determinados los menores tiempo de inicio y finalización de todas las actividades.

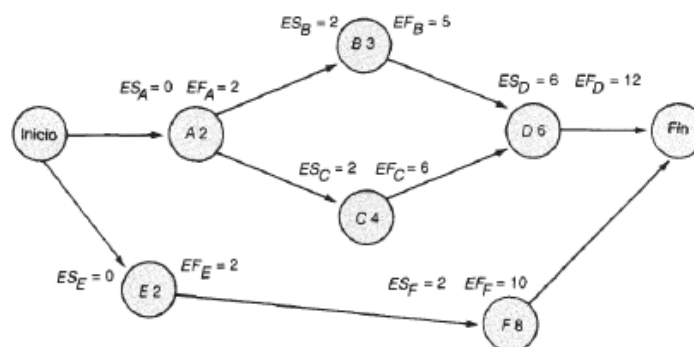
Para hallar los valores hacia atrás de cada actividad hay que realizar los siguientes pasos:

1. Se comienza por el final del diagrama de red y se le asigna al mayor tiempo de finalización de la última tarea un valor igual a su menor tiempo de finalización. En la práctica el mayor tiempo de finalización de la última actividad normalmente es la fecha límite del proyecto.
2. Después se resta el tiempo estimado para realizar la última actividad, obteniendo su mayor tiempo de inicio.
3. Considerar cualquier actividad cuyos sucesores tengan ya calculados los valores de LS_i y LF_i .
4. El mayor tiempo de finalización de esta actividad será igual al menor de los valores LS de sus sucesores inmediatos.
5. Calculamos el mayor tiempo de inicio de la actividad restando a su mayor tiempo de finalización el tiempo estimado para concluir la tarea.
6. Repetir los pasos 3, 4 y 5 hasta que queden determinados los mayores tiempos de inicio y finalización de todas las actividades.

Ilustraremos estos pasos a partir del Ejemplo 2.5.1.2 y la Figura 13.

Ejemplo 2.5.1.2. Considerando el ejemplo anterior, vamos a calcular sus ES y EF al igual que sus LF y LS , es decir el menor y mayor tiempo de inicio y terminación del diagrama de la Figura 12.

Figura 13. Ejemplo cálculo ES y EF .

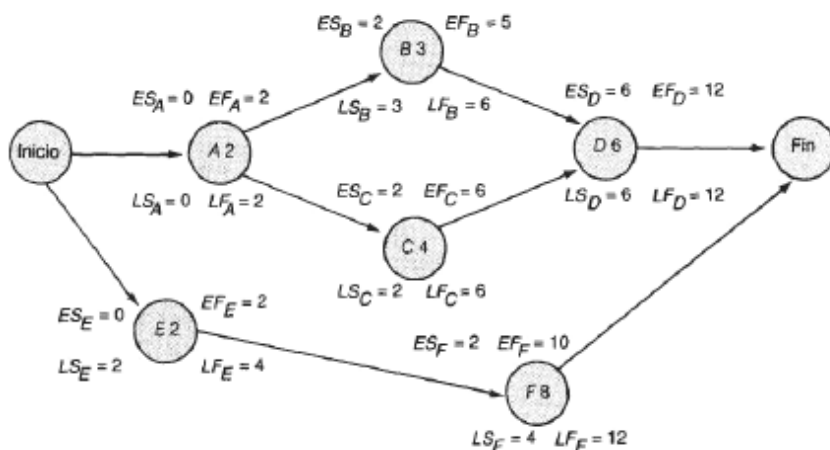


Fuente: Bierman, Bonini y Hausman (1994).

- Como podemos apreciar en la Figura 13, las primeras actividades son la A y la E . Por tanto, según lo explicado, ES_A y ES_E serán 0.
- La actividad A tarda dos días, por tanto $EF_A = 2$.
- Lo mismo ocurre con la actividad E , que por los mismos motivos $EF_E = 2$.
- Si continuamos por el camino surge desde A , hacia las actividades B y C , ambos ES serán 2, puesto que es el EF del nodo anterior.
- El $EF_B = 2 + 3 = 5$, ya que sumamos el tiempo del nodo B .
- El $EF_C = 2 + 4 = 6$, por el mismo motivo.
- Como la actividad D requiere de dos actividades previas su ES será la mayor de las dos EF anteriores, es decir, $EF_C = 6 = ES_D$. Sumando el tiempo de la actividad D , $EF_D = 6 + 6 = 12$.
- Continuamos por el camino que surge a partir del vértice E hacia el F , al ser $EF_E = 2$, ES_F será también 2 y, sumando el tiempo de la tarea F , obtenemos $EF_F = 10$.
- Antes de llegar al final, el mayor de los dos tiempos que inciden sobre el último vértice o nodo es el que escogemos como fecha límite del proyecto, en este caso $EF_D = 12$ días.

Ahora continuamos con el mayor tiempo de inicio y terminación, ilustrado en la Figura 14.

Figura 14. Ejemplo cálculo LS y LF.



Fuente: Bierman, Bonini y Hausman (1994).

- Observamos que las últimas actividades antes de llegar al fin del proyecto son D y F ,

por lo tanto su LF es igual al límite del proyecto, 12 días.

- Si cogemos desde el final del proyecto el camino inverso que sigue hacia el nodo o vértice D , como su tiempo de realización es de 6 días, el $LS = 12 - 6 = 6$.
- Al ser $LS_D = 6$, coincidirá con LF_B y LF_C , al ser D su actividad sucesora. Si restamos a cada uno su tiempo de realización, $LS_B = 6 - 3 = 3$ y $LS_C = 6 - 4 = 2$. Cogemos el menor de los valores para continuar el algoritmo, en este caso LS_C .
- Restamos a LS_C el tiempo de la actividad A , con lo que $LS_A = 2 - 2 = 0$.
- Por otra parte, el otro camino que continúa por F desde el final del proyecto, que necesita 8 días, $LS_F = 12 - 8 = 4$.
- Restando a LS_F el tiempo de E , obtenemos que $LS_E = 4 - 2 = 2$.

Una vez ilustrado el cálculo de los tiempos de inicio y finalización, continuamos con el cálculo de holguras y la ruta crítica.

Para determinar la holgura de cada actividad, basta calcular la diferencia entre sus LS y ES , que coincidirá con la diferencia entre su LF y su EF .

Las actividades cuya holgura sea cero determinarán la ruta crítica, puesto que son aquellas que retrasarán el proyecto en caso de no ser correctamente atendidas.

Ejemplo 2.5.1.3. Continuando con los datos del Ejemplo 2.5.1.1. y los cálculos posteriores realizados en el Ejemplo 2.5.1.2, vamos a calcular la holgura de cada tarea en la Tabla 3. Las calcularemos de ambas formas para asegurarnos de que los cálculos son correctos.

Tabla 3. Holgura de las actividades del Ejemplo 2.5.1.1.

Actividad	LS	ES	Holgura	LF	EF	Holgura
A	0	0	0	2	2	0
B	3	2	1	6	5	1
C	2	2	0	6	6	0
D	6	6	0	11	12	0
E	2	0	2	4	2	2
F	4	2	2	11	10	2

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos observar las actividades *A, C* y *D* tienen holgura cero y, por tanto, forman la ruta crítica.

2.5.1.2. Compensaciones entre tiempo y costo

En este apartado, vamos a considerar que la ejecución de cada actividad del proyecto tiene asociado un coste, que puede englobar:

- Costes directos: Derivados de la actividad en sí, como por ejemplo, el uso de materia prima. En caso de que la tarea se eliminara, este tipo de costes desaparecerían.
- Costes indirectos: Proviene de la capacidad de producción. Por ejemplo, el alquiler del local. No desaparecen aunque una actividad se elimine.

En los apartados anteriores, hemos supuesto que los tiempos de cada actividad eran fijos, pero esto no tiene por qué ser así. A menudo en la práctica, si aumentamos los costes en ciertos recursos podremos reducir algunos de los tiempos de ciertas tareas. Ahora bien, aquí será el encargado o gerente de cada sección el que tendrá que decidir si compensa o no reducir el tiempo del proyecto a cambio de aumentar el coste para la empresa. En este caso lo que aumentaría serían los costes directos.

Habría que tener en cuenta los recursos de la empresa y la urgencia de cada tarea. Pero al menos de manera teórica es posible encontrar la ruta óptima. O reducir al mínimo el tiempo de una tarea concreta que consideremos urgente.

Ejemplo 2.5.1.2.1. Vamos a ver a través del Ejemplo 2.5.1.1. qué pasaría si necesitáramos hacer un programa urgente, y cómo al reducir el tiempo de cada tarea aumentaría el coste total del proyecto. Supongamos que las tareas que teníamos anteriormente tienen unos costes asociados, tal y como se indica en la Tabla 4.

Tabla 4. Costes asociados a las tareas.

Actividad	Tiempo (normal)	Coste (€)
A	2	100
B	3	200
C	4	300
D	6	500
E	2	180
F	8	1000

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos observar, al sumar los costes totales, la realización del proyecto costaría en total 2280€. Supongamos que queremos conseguir una finalización más temprana del proyecto, aunque ello suponga un coste adicional para la empresa (pues, normalmente, reducir la duración normal de las tareas supone el uso de recursos adicionales). Concretamente, consideremos los tiempos y costos recogidos en la Tabla 5.

Tabla 5. Tabla de costes al reducir el tiempo de finalización del proyecto.

Actividad	Tiempo programa urgente (días)	Coste programa urgente (€)
A	1,5	150
B	2	250
C	3	375
D	4,5	740
E	1,5	210
F	5,5	1200

Fuente: Elaboración propia.

Ahora el proyecto supondría un coste total de 2925€. Sin embargo ¿Es realmente necesario invertir en todas las actividades del proyecto? ¿O solo algunas de ellas deberían ser tratadas como urgentes?

Las actividades que no estaban en la ruta crítica ya tienen tiempo de holgura, por tanto reducir el tiempo de estas no reduciría el tiempo del proyecto.

Debemos fijarnos en las que sí estaban inicialmente en la ruta crítica, es decir, la ruta *ACD*. Al reducir el tiempo de estas sí que conseguiremos reducir el tiempo total del proyecto.

A partir de las tablas 4 y 5, podemos calcular los costes incrementales por día de las actividades de la ruta crítica inicial mostradas en la Tabla 6.

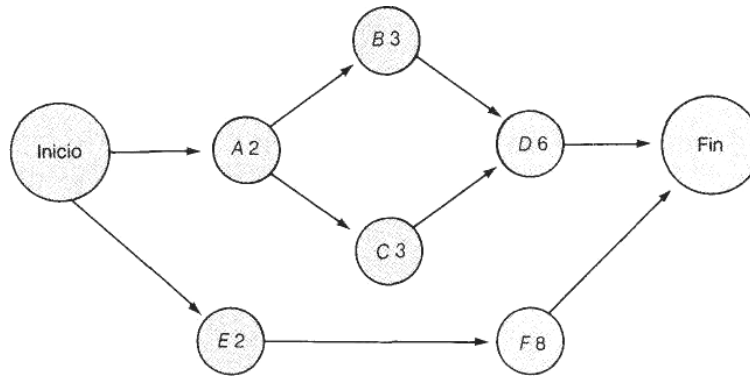
Tabla 6. Costes incrementales del programa urgente.

Actividad	Días de reducción	Coste incremental €	Coste incremental por día €
A	0,5	50	100
C	1	75	75
D	1,5	240	160

Fuente: Elaboración propia.

De las tres actividades de la ruta crítica la que menos coste supone reducir un día es la *C*, por 75€. Si el administrador del proyecto decide reducir en un día esa actividad, obtendríamos el diagrama de red observado en la Figura 15.

Figura 15. Diagrama de red con actividad *C* reducida a tres días.



Fuente: Bierman, Bonini y Hausman (1994).

Volvamos a hacer el algoritmo para calcular los tiempos de holgura y observar el efecto que causa en el proyecto la reducción de la actividad *C* en un día sobre la ruta crítica.

Comenzamos con los menores tiempos de inicio y terminación de cada actividad:

- Las primeras actividades son la *A* y la *E*. Por tanto, ES_A y ES_E serán 0.
- La actividad *A* tarda dos días, por tanto $EF_A = 2$.
- Lo mismo ocurre con la actividad *E*, $EF_E = 2$.
- Si continuamos por el camino surge desde *A*, hacia las actividades *B* y *C*, ambos ES serán 2, puesto que es el EF del nodo anterior.
- El $EF_B = 2 + 3 = 5$, ya que sumamos el tiempo del nodo *B*.
- El $EF_C = 2 + 3 = 5$, por el mismo motivo.
- Como la actividad *D* requiere de dos actividades previas su ES será la mayor de las dos EF anteriores, es decir, $EF_B = EF_C = 5 = ES_D$. Sumando el tiempo de la actividad *D*, $EF_D = 6 + 5 = 11$.
- Continuamos por el camino que surge a partir del vértice *E* hacia el *F*, al ser $EF_E = 2$, ES_F será también 2 y, sumando el tiempo de la tarea *F*, obtenemos $EF_F = 10$.
- Antes de llegar al final, el mayor de los dos tiempos que inciden sobre el último vértice o nodo es el que escogemos como fecha límite del proyecto, en este caso $EF_D = 11$ días.

Continuamos con los mayores tiempos de inicio y terminación de las actividades del proyecto:

- Observamos que las últimas actividades antes de llegar al fin del proyecto son D y F , por lo tanto su LF es igual al límite del proyecto, 11 días.
- Si cogemos desde el final del proyecto el camino inverso que sigue hacia el nodo D , como su tiempo de realización es de 6 días, el $LS = 11 - 6 = 5$.
- Al ser $LS_D = 5$, coincidirá con LF_B y LF_C , al ser D su actividad sucesora. Si restamos a cada uno su tiempo de realización, $LS_B = 5 - 3 = 2 = LS_C$. En este caso no importa cuál de las dos actividades cojamos puesto que sus valores son idénticos.
- Restamos a LS_C o LS_B el tiempo de la actividad A , con lo que $LS_A = 2 - 2 = 0$.
- Por otra parte, el otro camino que continúa por F desde el final del proyecto, que necesita 8 días, $LS_F = 11 - 8 = 3$.
- Restando a LS_F el tiempo de E , obtenemos que $LS_E = 3 - 2 = 1$.

Finalmente calculamos los tiempo de holgura de cada actividad en la Tabla 7.

Tabla 7. Holgura de las actividades con actividad C reducida en un día.

Actividad	LS	ES	Holgura	LF	EF	Holgura
A	0	0	0	2	2	0
B	2	2	0	5	5	0
C	2	2	0	5	5	0
D	5	5	0	11	11	0
E	1	0	1	3	2	1
F	3	2	1	11	10	1

Fuente: Elaboración propia.

Ahora tenemos dos rutas críticas, ACD y ABD , ambas con 11 días. La actividad C no podría reducirse más, aunque podríamos reducir B y la ruta ABD sería más breve, pero la otra no sufriría cambios. Si queremos reducir el tiempo de la primera ruta deberíamos modificar A o D .

En resumen, podemos ir buscando las distintas rutas críticas y adaptar nuestro presupuesto a los distintos resultados, o buscar el tiempo que requiramos si no importa el coste.

2.5.2. El método PERT en caso de tiempos de actividad inciertos

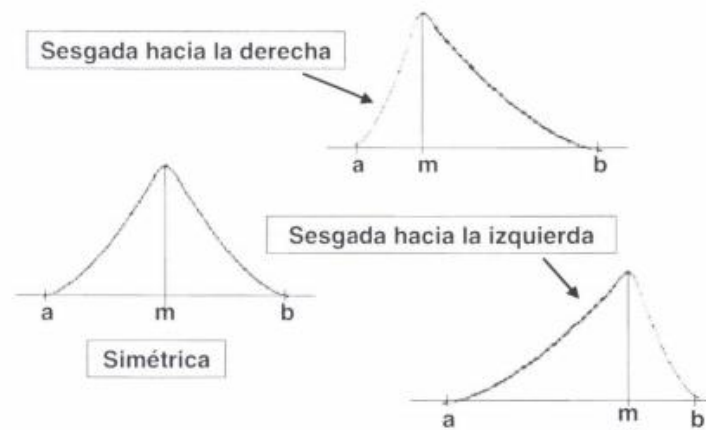
En el caso anterior hemos supuesto que los tiempos de realización de cada tarea eran conocidos. Esto sucede cuando las tareas son conocidas o existen datos de otras empresas, por ejemplo. Pero no siempre es así. A veces, cuando comenzamos un proyecto desde cero, o se modifica el sistema productivo, los tiempos de cada actividad pueden no ser conocidos. En estas situaciones será necesario utilizar un enfoque probabilístico y aproximar el tiempo de las tareas. Una de las técnicas más utilizadas para obtener el tiempo estimado es el método de estimación múltiple o de varias estimaciones. Consiste en utilizar tres estimaciones del tiempo de duración de cada actividad, para reflejar tres escenarios distintos. Concretamente, para cada actividad i , consideraremos los siguientes tiempos:

- a_i : Tiempo más optimista, menos probable pero posible en el caso de que todo salga de la mejor manera posible.
- b_i : Tiempo más pesimista, menos probable pero posible en el caso de que todo salga de la peor manera posible
- m_i : Tiempo más probable, es la estimación más realista y coincide con la moda estadística.

Se supone que la duración para cada actividad sigue una distribución beta con un punto modal m , y sus puntos extremos a y b . La distribución beta es un buen patrón para modelizar la duración de una actividad sobre un intervalo finito, ya que es una distribución unimodal, con un rango de valores acotado, y adopta formas muy diversas dependiendo de los valores de sus parámetros.

Podemos ver a través de la Figura 16 la función de densidad de esta distribución de manera gráfica según si es simétrica, sesgada a la derecha o la izquierda.

Figura 16. Distribución beta para las tres estimaciones de tiempo de actividad en PERT.



Fuente: Fuente: Rincón Abril (2001).

Para continuar será necesario conocer los parámetros fundamentales de esta distribución, la media y su desviación típica.

- Media: $\mu_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$, que estima el tiempo esperado para la actividad
- Desviación típica: $\sigma_i = \frac{b_i - a_i}{6}$, que nos dará una medida de la dispersión que presenta el tiempo de cada actividad con respecto a su media.

Si suponemos que existe un número suficientemente grande de actividades críticas, podemos apoyarnos en el Teorema Central del Límite para determinar la distribución aproximada del tiempo de duración del proyecto, al que denominaremos T .

- Teorema Central del Límite: La suma de n variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, converge en distribución (cuando $n \rightarrow \infty$) a una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media y varianza iguales a la suma de las medias y de las varianzas de las n variables aleatoria, respectivamente.

Como el tiempo de duración del proyecto es la suma de los tiempos de las actividades críticas, este teorema garantiza que T converge en distribución a una ley normal con:

- El valor esperado igual a la suma de los valores esperados de las actividades de la ruta crítica.
- La varianza de la distribución igual a la suma de las varianzas de las actividades de la

ruta crítica.

Es decir:

$$T \rightarrow N \left[\mu = \sum_i^n \mu_i, \sigma^2 = \sum_i^n \sigma^2 \right]$$

Para poder utilizar esta aproximación supondremos:

- Las actividades determinadas como críticas lo seguirán siendo.
- Que los tiempos de cada actividad son estadísticamente independientes
- La ruta crítica está formada por un gran número de actividades.

A partir de aquí volveríamos a usar el algoritmo que vimos en el apartado anterior y calculamos el tiempo de terminación esperado para el proyecto completo.

Por último, podemos calcular la probabilidad de que una ruta crítica acabe en un número determinado de días, t , si teniendo su media y su desviación típica, relacionamos estas variables aleatorias con la distribución normal estándar de manera que:

$$P(T \leq t) = P \left[Z \leq \frac{t - \mu}{\sigma} \right]$$

Ejemplo 2.5.2.1. Veamos en la Tabla 8 un ejemplo de una serie de actividades con sus tres estimaciones de tiempo, optimista, pesimista y más probable.

Además añadiremos la varianza y la desviación típica del tiempo de duración de cada actividad calculada según las fórmulas que hemos visto anteriormente.

Tabla 8. Ejemplo PERT con estimaciones de tiempo.

Actividad	a	b	m	Valor esperado (días)	Desviación Típica (días)	Varianza
A	1	3	2	2	0.33	0.11
B	1	5	3	3	0.67	0.45
C	2	6	4	4	0.67	0.45
D	4	8	6	6	0.67	0.45
E	1	3	2	2	0.33	0.11
F	1	15	8	8	2.33	5.43

Fuente: elaboración propia.

La ruta crítica es *ACD*, como vimos en el ejemplo del apartado anterior

La varianza del tiempo total de duración del proyecto sería igual a la suma de las varianzas de los tiempos de las actividades de la ruta crítica; es decir:

$$\sigma^2 = 0.11 + 0.45 + 0.45 = 1.01$$

Hemos definido la varianza como el cuadrado de la desviación típica, por tanto, también podemos definir la desviación estándar como la raíz cuadrada de su varianza. Por lo que:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.01} = 1.005 \text{ días.}$$

La manera de interpretar este resultado es que si el tiempo para acabar la ruta crítica era de 12 días en condiciones normales, puede haber una variabilidad de 1.005 días en el proceso.

¿Qué pasaría si quisiéramos saber la probabilidad de que acabáramos el proyecto en 14 días?

$$P \left[Z \leq \frac{14-12}{1.005} \right] = P[Z \leq 2] = 0.977$$

Es decir, la probabilidad de concluir el proyecto en 14 días es del 97.7%.

CAPÍTULO 3. EJEMPLO DE APLICACIÓN MEDIANTE POM-QM

3.1. Planteamiento del problema

Supongamos la empresa YourPhone se dedica a la fabricación de teléfonos móviles. La empresa ha decidido lanzar un nuevo producto de última tecnología al mercado. Para ello se requerirán las siguientes tareas:

- Hacer un estudio de mercado, donde encuestará 200 clientes. El tratamiento de los datos los llevará a cabo el responsable de investigación de mercados del departamento de marketing.
- Diseño del nuevo producto en función de las conclusiones obtenidas tras el estudio de mercado.
- Por un lado, el departamento de marketing llevará a cabo la creación de una campaña de marketing que posicione el producto.
- Por otro, el departamento de producción ajustará la maquinaria del sistema productivo para poder comenzar la fabricación.
- Reajustada la maquinaria, el departamento comprará las materias primas necesarias.
- La empresa fabricará 4 componentes necesarios para la fabricación de su nuevo producto.
- Y comprará a otra empresa especializada las pantallas para sus teléfonos.
- Una vez fabricados los componentes y adquiridas las pantallas son ensamblados para conseguir el producto terminado.
- Por otra parte la empresa había encargado a un asociado especializado la realización de las cajas y libros de instrucciones para el producto.
- El producto será embalado en una caja con sus instrucciones.
- Por último el producto será transportado a los puntos de distribución de la marca para su puesta en venta en el mercado.

La tabla de precedencias (Tabla 9) para este ejemplo sería la siguiente:

Tabla 9. Tabla de precedencias de YourPhone para tiempos conocidos.

Actividad	Descripción actividad	Predecesoras	Duración (días)
A	Estudio de mercado	-	15
B	Diseño del producto	A	20
C	Diseño campaña marketing	B	10
D	Ajustes maquinaria	B	8
E	Aprovisionamiento materias primas	D	6
F	Fabricación componente 1	E	3
G	Fabricación componente 2	E	4
H	Fabricación componente 3	E	3
I	Fabricación componente 4	E	5
J	Compra pantallas	E	2
K	Ensamblaje	F,G,H,I,J	2
L	Aprovisionamiento cajas e instrucciones	B	8
M	Embalaje del producto	K,L	2
N	Transporte a los puntos de distribución	M,C	5

Fuente: Elaboración propia.

Además, añadiremos en la siguiente tabla los escenarios optimista y pesimista de nuestro ejemplo, para hacer la simulación en los dos escenarios que hemos visto en el apartado anterior.

Observemos la Tabla 10.

Tabla 10. Escenarios del ejemplo YourPhone.

Actividad	Predecesoras	Duración (días)	Escenario optimista	Escenario pesimista
A	-	15	12	18
B	A	20	18	22
C	B	10	9	12
D	B	8	6	10
E	D	6	5	8
F	E	3	2	5
G	E	4	3	5
H	E	3	2	5
I	E	5	3	7
J	E	2	1.5	3
K	F,G,H,I,J	2	1	3
L	B	8	6	9
M	K,L	2	1.5	4
N	M,C	5	4	8

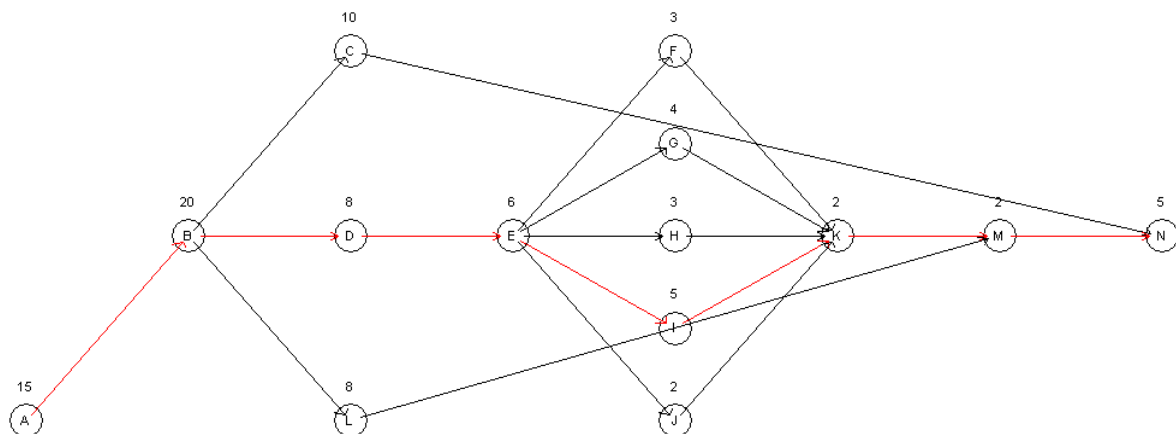
Fuente: Elaboración propia.

3.2. Simulación mediante POM-QM de YourPhone

3.2.1. Simulación mediante POM-QM de YourPhone para tiempos de actividad conocidos

Si introducimos en el programa nuestra tabla de precedencias para tiempos conocidos, obtendremos el siguiente grafo (Figura 17), con representación AON:

Figura 17. Grafo de YourPhone con tiempos conocidos.



Fuente: elaboración propia a través de POM-QM.

Ya podemos observar la ruta crítica marcada en rojo por el mismo programa, aunque ahora interpretaremos los resultados a partir de la Tabla 11 de una manera más exhaustiva.

Tabla 11. Solución de YourPhone con tiempos conocidos.

	Activity time	Early Start	Early Finish	Late Start	Late Finish	Slack
Project	63					
A	15	0	15	0	15	0
B	20	15	35	15	35	0
C	10	35	45	48	58	13
D	8	35	43	35	43	0
E	6	43	49	43	49	0
F	3	49	52	51	54	2
G	4	49	53	50	54	1
H	3	49	52	51	54	2
I	5	49	54	49	54	0
J	2	49	51	52	54	3
K	2	54	56	54	56	0
L	8	35	43	48	56	13
M	2	56	58	56	58	0
N	5	58	63	58	63	0

Fuente: elaboración propia a través de POM-QM.

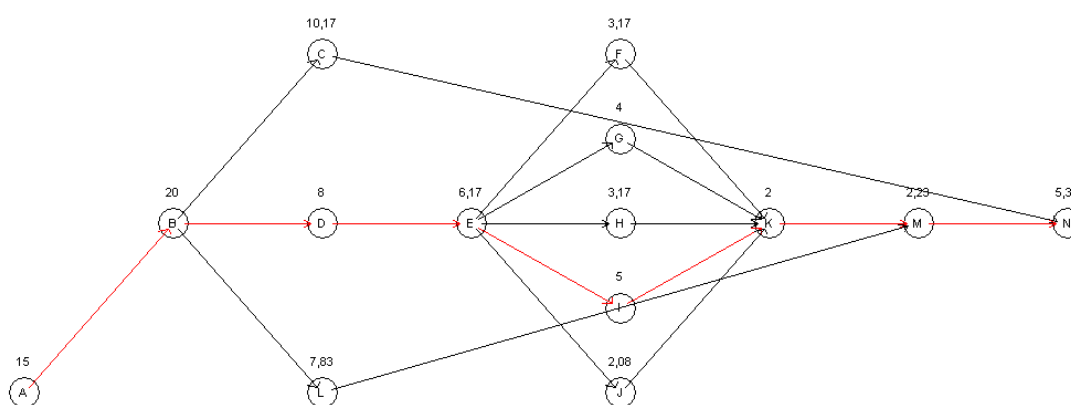
Podemos observar que en la primera columna nos aparecen los tiempos de cada actividad, y en la primera fila nos da el tiempo calculado por el programa de la ruta crítica, 63 días.

En las siguientes columnas el programa calcula sus ES , EF , LF y LS que usa para calcular la holgura de cada actividad en la última columna. Los tiempos de holgura que aparecen en rojo (al igual en el grafo) son los que son igual a cero y componen la ruta crítica de nuestro proyecto, en este caso sería $ABDEIKMN$.

3.2.2. Simulación mediante POM-QM de YourPhone para tiempos de actividad inciertos.

Si introducimos en el programa nuestra tabla de precedencias, sin embargo ahora optamos por la opción de los tres escenarios, obtendremos el siguiente grafo (Figura 18):

Figura 18. Grafo de YourPhone con tres escenarios.



Fuente: elaboración propia a través de POM-QM.

Podemos, una vez más, ver la ruta crítica marcada con las aristas en rojo. Y en lugar de aparecer sobre cada actividad el tiempo que introdujimos en el primer ejemplo, el programa nos hace una aproximación del tiempo en función de los escenarios optimista y pesimista, que aparece en la primera columna de la Tabla 12.

Tabla 12. Solución de YourPhone con tres escenarios.

	Activity time	Early Start	Early Finish	Late Start	Late Finish	Slack	Standard Deviation
Project	63,73						1,82
A	15	0	15	0	15	0	1
B	20	15	35	15	35	0	,67
C	10,17	35	45,17	48,23	58,4	13,23	,5
D	8	35	43	35	43	0	,67
E	6,17	43	49,17	43	49,17	0	,5
F	3,17	49,17	52,33	51	54,17	1,83	,5
G	4	49,17	53,17	50,17	54,17	1	,33
H	3,17	49,17	52,33	51	54,17	1,83	,5
I	5	49,17	54,17	49,17	54,17	0	,67
J	2,08	49,17	51,25	52,08	54,17	2,92	,25
K	2	54,17	56,17	54,17	56,17	0	,33
L	7,83	35	42,83	48,33	56,17	13,33	,5
M	2,23	56,17	58,4	56,17	58,4	0	,43
N	5,33	58,4	63,73	58,4	63,73	0	,67

Fuente: elaboración propia a través de POM-QM.

Esta vez el tiempo total que se requiere para la conclusión del proyecto es de 63.73 días.

Una vez más aparecen en rojo las actividades cuyo tiempo de holgura es cero, que son aquellas que forman la ruta crítica.

Además en este caso el programa calcula la desviación típica o estándar de cada actividad y la desviación típica de la duración del proyecto: $\sigma = 1.82$ días.

Es decir, que el tiempo total de duración del proyecto presenta una variabilidad de 1.82 días respecto del tiempo total estimado.

3.2.3. Simulación mediante POM-QM de YourPhone con PERT-Costo.

Supongamos ahora que queremos reducir el tiempo de algunas actividades, incurriendo en gastos adicionales que la empresa está dispuesta a asumir.

Observamos en la Tabla 13 a cuántos días se puede reducir cada actividad y el coste de dicha reducción:

Tabla 13. Planteamiento PERT-Costo de YourPhone.

	Activity time	Crash time	Normal Cost	Crash Cost
A	15	10	2000	2500
B	20	18	5000	5500
C	10	8	2000	2300
D	8	6	1500	2000
E	6	5	500	600
F	3	2	600	800
G	4	3	700	800
H	3	2	800	900
I	5	4	750	1000
J	2	1,5	800	900
K	2	1	1100	1500
L	8	6	1200	1500
M	2	1	1200	1400
N	5	4	2500	2750

Fuente: elaboración propia a través de POM-QM.

El programa nos devuelve la siguiente solución (Tabla 14):

Tabla 14. Solución PERT-Costo de YourPhone.

	Normal time	Crash time	Normal Cost	Crash Cost	Crash cost/pd	Crash by	Crashing cost
Project	63	49					
A	15	10	2000	2500	100	5	500
B	20	18	5000	5500	250	2	500
C	10	8	2000	2300	150	0	0
D	8	6	1500	2000	250	2	500
E	6	5	500	600	100	1	100
F	3	2	600	800	200	0	0
G	4	3	700	800	100	0	0
H	3	2	800	900	100	0	0
I	5	4	750	1000	250	1	250
J	2	1,5	800	900	200	0	0
K	2	1	1100	1500	400	1	400
L	8	6	1200	1500	150	0	0
M	2	1	1200	1400	200	1	200
N	5	4	2500	2750	250	1	250
TOTALS			20650				2700

Fuente: elaboración propia a través de POM-QM.

Podemos observar como el tiempo total de duración del proyecto se reduce de 63 a 49 días. Por otra parte, el coste total del proyecto inicial es de 20650€, mientras que si queremos

reducir la duración del proyecto tendríamos un coste incremental de 2700€.

En vista de los resultados, el responsable del proyecto podrá decidir si considera rentable asumir este coste extra a cambio de reducir la duración del mismo.

CONCLUSIONES

En este Trabajo Fin de Grado hemos realizado una introducción a la Teoría de Grafos y su utilidad para representar problemas de nuestra vida diaria, así como algunas de sus propiedades y características más importantes, que dan paso a la comprensión del tema objeto de estudio, el método PERT.

Una vez centrados en el tema objeto de este trabajo, el método PERT, empleado para la planificación y control de proyectos con un gran número de tareas que requieren coordinación, hemos analizado tanto el caso en que los tiempos de duración de las tareas son conocidos, como el caso en que dichos tiempos son desconocidos y deben estimarse.

Por último, hemos realizado un ejemplo de simulación a través del programa POM-QM que ilustre los conocimientos adquiridos durante la realización de este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bierman, H., Bonini, C. y Hausman, W. (1994). *Análisis cuantitativo para la toma de decisiones*. McGRAW-HILL.
2. Bueso Montero, J. L. (2012). *Estructuras algebraicas y matemática Discreta*. Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada.
3. Campins Masrera, J.A. y Velasco Sánchez, J. (2013). *Gestión de la producción en la empresa: planificación, programación y control*. Ediciones pirámide.
4. Klastorin, F. (2016). *Administración de proyectos*. Editorial Alfaomega.
5. Mathur, K. y Solow D. (1996). *Investigación de operaciones: el arte de la toma de decisiones*. Prentice Hall Hispanoamericana.
6. Rincón Abril, L.A. (2001). *Investigación de operaciones para ingenierías y administración de empresas*. Impresora Feriva S.A.

WEBGRAFÍA

1. Balet, R. y Canive T. "*¿Quién inventó PERT?*". Disponible on-line: <https://www.sinnaps.com/blog-gestion-proyectos/quien-invento-pert> (fecha de consulta 08/06/2020).
2. García Miranda, J. "*Introducción a la teoría de grafos*". Disponible on-line: <https://www.ugr.es/~jesusgm/Curso%202005-2006/Matematica%20Discreta/Grafos.pdf> (fecha de consulta 25/06/2020).
3. Grima, C. (2012). "*¿Por qué sólo cuatro colores?*". Disponible on-line: <https://naukas.com/2012/05/23/por-que-solo-cuatro-colores/> (fecha de consulta 25/06/2020).
4. Robinson-García, N. (2014). "*El análisis de redes sociales. Definición y aplicaciones*". Disponible on-line: <https://nrobinsongarcia.wordpress.com/2014/01/13/el-analisis-de-redes-sociales-definicion-y-aplicaciones/> (fecha de consulta 25/06/2020).
5. Rodríguez de León, L. (2014). "*Planificación estratégica II, diagrama de Gantt*". Disponible on-line <https://www.enp.edu.uy/images/libros/Diagrama%20de%20Gantt.pdf> (fecha de consulta 26/06/2020).
6. Villanueva, C. (2018). "Gestión de proyectos: ¿Qué es y para qué sirve un diagrama de Gantt?". Disponible on-line: <https://blog.teamleader.es/diagrama-de-gantt> (fecha de consulta 26/06/2020).