Centro de Estudios de Postgrado

Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN TERCERO DE ESO

Alumna: García López, María de los Ángeles

Tutores: Prof. D. Miguel Ángel García Muñoz
Dpto. Álgebra

Prof. D. Samuel Gómez Moreno
Dpto. Matemática Aplicada

Junio, 2020

“Los maestros deben entender que nada que no pase por la emoción nos sirve en nuestro aprendizaje. Solo se aprende aquello que se ama´´

Francisco Mora, catedrático de filosofía humana y doctor en neurociencias

Índice general

1. Resumen y palabras claves **1**

2. Introducción **3**

3. Objetivos **5**

4. Fundamentación epistemológica: Sistemas de ecuaciones lineales **7**

4.1. Introducción 7

4.2. Sistemas de ecuaciones lineales. Generalidades 7

4.2.1. Definiciones 7

4.2.2. Tipos de sistemas 9

4.2.3. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones 9

4.2.4. Sistemas homogéneos y no homogéneos 10

4.3. Regla de Cramer 11

4.3.1. Cómo transformar un sistema que no es de Cramer a uno que si lo es 12

4.4. Teorema de Rouché 13

4.4.1. Rango de una matriz 14

4.4.2. Teorema de Rouché 16

4.5. Método de Gauss–Jordan 17

4.5.1. Sistemas lineales equivalentes 17

4.5.2. Transformaciones elementales sobre un sistema 17

4.5.3. Método de Gauss 18

4.5.4. Método de Gauss–Jordan 22

4.6. Eliminación lineal de parámetros 26

4.7. Aplicaciones a la geometría 29

4.7.1. Caso de dos planos en $\mathbb{R}^3$ 29

4.7.2. Caso de tres planos $\mathbb{R}^3$ 31

4.7.3. Caso de dos rectas en $\mathbb{R}^3$ 34

4.7.4. Caso de una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ 37

5. Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza 39

5.1. Invención de problemas 39

5.2. Problemas de comprensión en bachillerato 42

6. Fundamentación curricular 45

6.1. Mismo tema; distintos niveles; misma editorial 45

6.2. Mismo tema; mismo nivel; distinta editorial 51

7. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica 61

7.1. Título 61

7.2. Justificación 61

7.3. Contextualización del centro y del aula 62

7.4. Objetivos 63

7.4.1. Objetivos generales de la etapa de ESO 63

7.4.2. Objetivos de Matemáticas orientadas de las enseñanzas académicas 65

7.4.3. Objetivos unidad sistemas de ecuaciones 66

7.5. Competencias clave 67

7.6. Contenidos 68

7.7. Metodología 69

7.8. Actividades y recursos 70

7.9. Atención a la diversidad 82

7.9.1. Adaptación curricular en el aula 83

7.10. Temporalización 84

7.10.1. Desarrollo de la unidad didáctica 84

7.11. Evaluación 91

8. Conclusiones 99

Bibliografía. 101

Anexo 1: Demostraciones 103

Anexo 2: Otra investigación relacionada sobre la enseñanza/aprendizaje 113

Índice de figuras

4.1. Planos coincidentes (elaboración propia) 30
4.2. Planos paralelos (elaboración propia) 30
4.3. Planos Secantes (elaboración propia) 31
4.4. Planos coincidentes (elaboración propia) 31
4.5. Tres planos paralelos (elaboración propia) 32
4.6. Dos planos coincidentes y uno paralelo (elaboración propia) 32
4.7. Tres planos intersecados en una recta (elaboración propia) 33
4.8. Dos planos paralelos y uno secantes (elaboración propia) 33
4.9. Tres planos secantes 2 a 2 (elaboración propia) 34
4.10. Tres planos intersecados en un punto común (elaboración propia) 34
4.11. Rectas coincidentes (elaboración propia) 35
4.12. Rectas paralelas (elaboración propia) 36
4.13. Rectas secantes (elaboración propia) 36
4.14. Rectas se cruzan (elaboración propia) 36
4.15. Recta contenida en un plano (elaboración propia) 37
4.16. Recta paralela a un plano (elaboración propia) 38
4.17. Recta secante a un plano (elaboración propia) 38

1. Representación gráfica (elaboración propia) 103

Índice de tablas

5.1. Clasificación de sistemas (elaboración propia) 44

6.1. Criterios 2º ESO (BOE) 46
6.2. Criterios 3º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas (BOE) 47
6.3. Criterios 3º ESO orientado a las enseñanzas académicas (BOE) 48
6.4. Criterios 4º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas (BOE) 49
6.5. Criterios 4º ESO orientado a las enseñanzas académicas (BOE) 50
6.6. Comparación ejercicios (elaboración propia) 59

7.1. Temporalización del curso (elaboración propia). 84
7.2. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (I) (Real Decreto 1105/2014) 92
7.3. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (II) (Real Decreto 1105/2014) 93
7.4. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (III) (Real Decreto 1105/2014) 94
7.5. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (IV) (Real Decreto 1105/2014) 95
7.6. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 2 (I)(Real Decreto 1105/2014) 96
7.7. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 2 (II)(Real Decreto 1105/2014) 97

Capítulo 1

Resumen y palabras claves

Resumen

El objetivo general de este trabajo es la comprensión de los sistemas de ecuaciones en profundidad, para luego poder explicarlo a los alumnos con claridad y soltura.

En este trabajo vamos a aplicar todo lo aprendido a lo largo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, durante el curso 2019/2020. Para ello nos vamos a basar en el tema de sistemas de ecuaciones lineales.

Empezaremos exponiendo el tema 16 de las oposiciones que es el relacionado con los sistemas. Seguidamente realizamos una revisión de la bibliografía relacionada con la investigación en Didáctica de las Matemáticas en esta temática sobre cómo mejorar la comprensión del alumnado acerca de los sistemas. Después haremos un análisis didáctico de diferentes libros de texto para Educación Secundaria Obligatoria, y terminaremos desarrollando una unidad didáctica en torno a esta materia.

Palabras clave: Sistemas, ecuaciones, educación secundaria, didáctica de las matemáticas.

Abstract

The main objective of this work is to comprehend the systems of equations deeply, with the aim of explain them clearly to the learners in the future.

In this work it will be applied the key points learnt throughout the Master's Degree in Compulsory Secundary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, in the speciality of Mathematics, during the 2019/2020 academic year. Therefore, the topic will be based on the system of lineal equations.

Firstly, it will be explained the topic number 16 from the public examination, which is the one dealing with systems. Secondly, a bibliographical revision related to the investigation in didactics of mathematics applied to this topic will appeared, having in mind how to improve the learners' comprehension about these systems. Hereafter a didactic analysis will be made of the different high school textbooks, developing a didactic unit about this matter at the end.

Keywords: Systems, equations, secundary education, didactics of mathematics.

Capítulo 2

Introducción

En este trabajo fin de máster (TFM) de la especialidad en matemáticas vamos a aplicar todo lo aprendido a lo largo del curso 2019/2020, centrándonos en el tema de sistemas de ecuaciones. Este tema surgió debido a que es un tema muy importante del álgebra, que no siempre queda lo suficientemente claro, y es muy útil para otras materias.

Según la Orden 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, el estudio de los sistemas de ecuaciones debe empezar a impartirse en segundo, aunque después sigue viéndose en todos los cursos superiores, como es el caso de tercero que será donde nos centremos en este trabajo posteriormente.

En primer lugar veremos los objetivos que tenemos a la hora de realizar este trabajo.

Con respecto a la estructura del trabajo, podemos destacar 4 grandes bloques.

1. En primer lugar nos encontramos con la fundamentación epistemológica, donde desarrollaremos el tema 16 de las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, el cual se basa en los sistemas de ecuaciones. En esta parte daremos algunas definiciones necesarias para la comprensión de todo lo que le sigue. Daremos algunos resultados importantes como la regla de Cramer, el teorema de Rouché y los métodos de Gauss y Gauss–Jordan. Para finalizar descubriremos algunas aplicaciones de los sistemas a la geometría, en concreto cómo clasificar las intersecciones de planos y rectas en $\mathbb{R}^3$.

2. En segundo lugar encontraremos la fundamentación didáctica, donde tenemos tres investigaciones en Didáctica sobre este tema de donde se extraen dificultades, errores o fenómenos que intervienen en los procesos de instrucción matemáticos en torno a esta temática, en particular, el primero trata sobre cómo ver el aprendizaje de los alumnos durante toda la ESO mediante invención de problemas, el

segundo sobre el problema de comprensión en el bachillerato, y por último, cómo anexo, tenemos uno sobre la incorporación de las TIC en las aulas de matemáticas.

3. En tercer lugar veremos la fundamentación curricular en la que compararemos diferentes libros de texto y veremos cómo van en consonancia con la ley; para ello primero compararemos diferentes niveles para ver cómo va evolucionando el aprendizaje de los alumnos según van avanzando de curso; en segundo lugar compararemos el mismo nivel, pero de diferentes editoriales, para comparar cómo afrontan cada una el mismo tema y ver sus posibles "fallos" y "aciertos".

4. En cuarto lugar y último tenemos la proyección didáctica, en la que realizamos una unidad didáctica para 3º ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. La unidad didáctica va dirigida al tema de sistemas de ecuaciones.

Por último tenemos un apartado con la valoración general que sacamos después de realizar todo este trabajo.

Nota: En el presente TFM, se utilizará el masculino genérico, el cual engloba a ambos sexos; tal y como establece la Real Academia Española (RAE).

Capítulo 3

Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es la comprensión de los sistemas de ecuaciones en profundidad, para luego poder explicarlo a los alumnos con claridad y soltura.

1. Como objetivo inicial nos planteamos poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos en el Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, durante el curso 2019/2020.

2. El objetivo de la fundamentación epistemológica es poder abordar un tema matemático con total rigor y poder enunciar y demostrar teoremas muy conocidos con total normalidad. También tenemos como objetivo poder enfrentarnos a un texto matemático de alto nivel y poder comprenderlo sin dificultad.

3. El objetivo de la fundamentación didáctica es saber buscar artículos interesantes sobre un tema en concreto en revistas de alto nivel, tanto nacionales como internacionales. También es interesante saber qué tipo de revistas son más convenientes según el tema de investigación que se pretenda encontrar y según respecto al nivel académico que vaya enfocada la correspondiente investigación.

4. El objetivo de la fundamentación curricular es conocer los contenidos que llegan a manos de nuestros futuros alumnos mediante libros de texto. Así podemos saber de qué forma llegan los conocimientos a los alumnos, y si son o no los apropiados para su comprensión o hay alguna otra forma de explicar lo mismo, pero de manera más fácil y asequible para el alumnado.

5. El objetivo de la proyección didáctica es aprender a hacer una unidad didáctica desde cero, sin necesidad de utilizar las unidades didácticas estándar de algunas editoriales, ya que así podemos adaptarlas a nuestro alumnado según sus necesidades académicas. También aprender a diseñar y desarrollar actividades relacionadas con la temática elegida.

Capítulo 4

Fundamentación epistemológica: Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Introducción

En este capítulo vamos a ver de forma detallada la discusión y resolución de sistemas lineales de m ecuaciones con n incógnitas. Para ello veremos en primer lugar algunas definiciones relevantes para después poder ver el teorema de Rouché, la regla de Cramer y el método de Gauss–Jordan.

El teorema de Rouché vendrá acompañado por el teorema de Rouché–Frobenius como consecuencia de este. El método de Gauss–Jordan irá precedido del método de Gauss para su mejor comprensión. Descubriremos los tipos de sistemas que hay, así como algunas propiedades de los mismos.

También expondremos algunas aplicaciones de los sistemas en la geometría y la relación que tienen los sistemas con la eliminación lineal de parámetros.

4.2. Sistemas de ecuaciones lineales. Generalidades

A continuación revisaremos los conceptos básicos de sistemas de ecuaciones lineales que nos serán útiles para las secciones siguientes.

4.2.1. Definiciones

Empezaremos con algunas definiciones necesarias para la comprensión del tema.

Definición 4.2.1. *Ecuación lineal*

Una **ecuación lineal (o ecuación algebraica de primer grado)** con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una igualdad del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ son valores conocidos del cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$ (normalmente este cuerpo $\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; en nuestro caso supondremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Se denomina **miembro** de la ecuación a cada una de las expresiones que se encuentran a ambos lados del igual. En cada miembro, se denominan **términos** a cada una de las expresiones que están separadas por signos $+$ o $-$, si no están entre paréntesis.

Denominaremos **coeficientes** a los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y llamaremos **término independiente** al elemento b.

Definición 4.2.2. *Solución de una ecuación lineal*

Sea la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, una **solución de dicha ecuación lineal** será una n-upla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ que verifique que $a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_n\gamma_n = b$.

Definición 4.2.3. *Sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas*

Un **sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas y coeficientes en** $\mathbb{K}$ es un conjunto de m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas y con los coeficientes perteneciendo al cuerpo $\mathbb{K}$ visto anteriormente. Lo representaremos como:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\}$$

donde $a_{ij} \in K$ representa el coeficiente de la incógnita x_j en la i-ésima ecuación, y donde $b_i \in \mathbb{K}$ es el término independiente de la i-ésima ecuación $i \in \{1, ..., m\}$ y $j \in \{1, ..., n\}$.

La i-ésima ecuación se abrevia $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ de modo que el sistema se representa mediante

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Se abreviará su designación llamándolo sistema, sistema de ecuaciones, sistema lineal, sistema de ecuaciones lineales, ... , etc.

Definición 4.2.4. *Solución del sistema de ecuaciones lineales*

Una **solución del sistema de ecuaciones lineales** es cualquier n-upla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

que verifique todas y cada una de las ecuaciones del sistema, es decir que se verifique:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad \\ a_{m1}\gamma_1 + a_{m2}\gamma_2 + \cdots + a_{mn}\gamma_n = b_m. \end{array}\right\}$$

Definición 4.2.5. *Solución general de un sistema de ecuaciones lineales*

La **solución general de un sistema de ecuaciones** es el conjunto de todas las soluciones de dicho sistema.

4.2.2. Tipos de sistemas

En primer lugar vamos a definir los diferentes tipos de sistemas con los que nos podemos encontrar, atendiendo a las soluciones que presenten.

Definición 4.2.6. *Sistema compatible (determinado o indeterminado)*

Diremos que un sistema es **compatible** si admite al menos una solución. Si tiene una única solución diremos que el sistema es **compatible determinado**; si tiene infinitas soluciones, diremos que el sistema es **compatible indeterminado**.

Definición 4.2.7. *Sistema incompatible*

Diremos que un sistema es **incompatible** si no tiene solución.

Proposición 1.

Si un sistema tiene más de una solución, entonces necesariamente tiene infinitas soluciones.

La demostración de este resultado se encuentra en el anexo “Demostraciones”.

Comentario: La imposibilidad de tener un número finito de soluciones (mayor que 1) es propia de los sistemas lineales. Por ejemplo, la ecuación no lineal $x^3-6x^2+11x-6=0$ tiene las tres soluciones $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3$.

4.2.3. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\}$$

podemos definir las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

A la matriz A la llamaremos **matriz de coeficientes**, a la matriz B **matriz de términos independientes** y a la matriz $(A \mid B)$ **matriz ampliada**.

A partir de estas matrices podemos escribir el sistema de ecuaciones en forma abreviada mediante

$$AX = B,$$

siendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ la matriz de incógnitas. (Como puede verse, el superíndice t denotará transposición).

Ejemplo

Sea en sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x_1 \quad +x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 7, \\ 5x_2 + 4x_3 + x_4 & = 1, \\ 2x_1 \quad +5x_2 + 2x_3 + 9x_4 & = 3. \end{array}\right\}$$

Las matrices asociadas a este sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 9 & 3 \end{array}\right).$$

4.2.4. Sistemas homogéneos y no homogéneos

Definición 4.2.8. *Sistema homogéneo*

Un sistema $AX = B$ es **homogéneo** si el vector B es el vector nulo, es decir $B = (0, 0, \cdots, 0)^t$, en este caso lo representaremos como $AX = 0$.

Definición 4.2.9. *Sistema no homogéneo*

Un sistema $AX = B$, es **no homogéneo** si B no es $(0, 0, \cdots, 0)^t$.

Proposición 2.

Dado un sistema homogéneo $AX = 0$, se verifican las siguientes propiedades:

1. El sistema es compatible, ya que al menos admite la solución trivial $X = (0, 0, \cdots, 0)^t$.

2. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ una solución de un sistema, entonces, para todo $k \in \mathbb{R}$ se tiene que $(k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n)$ también es solución.

3. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ son dos soluciones distintas del sistema homogéneo, entonces $\alpha + \beta$ es también solución.

La demostración de este resultado se encuentra en el anexo “Demostraciones”.

4.3. Regla de Cramer

En primer lugar vamos a hacer algunas definiciones necesarias y una proposición relevante.

Definición 4.3.1. *Sistema lineal cuadrado*

Un **sistema lineal cuadrado** es un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir, un sistema del tipo:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\}$$

En este caso la matriz A será una matriz cuadrada $n \times n$.

Definición 4.3.2. *Sistema de Cramer*

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina **sistema de Cramer** si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir, es un sistema lineal cuadrado y la matriz de coeficientes A tiene determinante no nulo, es decir, $|A| \equiv det(A) \neq 0$. El sistema sería del tipo:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}\right\}$$

y la matriz de coeficientes, A, sería no singular.

Proposición 3.

Un sistema cuadrado es de Cramer si y sólo si es sistema compatible determinado, es decir, tiene solución única.

La demostración de este resultado se encuentra en el anexo “Demostraciones”.

Teorema 1. *Regla de Cramer*

La única solución de un sistema de Cramer viene dada por:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\mid A \mid} \quad \text{con} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{donde} \quad \Delta_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}.$$

La demostración de ese resultado puede verse en el anexo “Demostraciones”.

4.3.1. Cómo transformar un sistema que no es de Cramer a uno que sí lo es

Para que un sistema sea de Cramer hemos visto anteriormente que dicho sistema tiene que tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y que el determinante de la matriz de coeficientes sea no nulo, es decir, que dicha matriz sea de rango máximo, de modo que las ecuaciones sean independientes.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\}$$

veamos cómo podemos pasar de un sistema que no es de Cramer a uno que sí lo es, siempre que sea posible.

Supongamos que el número de incógnitas es mayor al número de ecuaciones $(m < n)$; entonces tendremos que buscar un menor de la matriz A que tenga el mayor rango posible y tomaremos las variables que se utilizan para este menor como incógnitas y las demás variables las veremos como parámetros.

Si estamos en el caso contrario, es decir mayor número de ecuaciones que de incógnitas $(m > n)$ tendremos que buscar también un menor de la matriz A que tenga el mayor rango posible y aseguramos que el resto de ecuaciones se puedan eliminar. En el caso en que el menor sea de dimensión menor que n estaríamos en el caso anterior, si el menor es de dimensión n tendríamos un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas y con el determinante de la matriz no nulo, luego estaríamos ante un sistema de Cramer.

Ejemplo

Sea el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z + t \quad &= 1, \\ 2x - 3y - z - t \quad &= 2. \end{aligned}\right\}$$

La matriz de coeficientes y matriz ampliada vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Vemos que el rango de las dos matrices es dos ya que se verifica que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0.$$

Por tanto tomamos como incógnitas x e y, y como parámetros z y t. Nos queda el sistema de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} x + y = 1 - 2\lambda - \mu, \\ 2x - 3y = 2 + \lambda + \mu, \end{aligned}\right\}$$

y así hemos conseguido pasar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y con el determinante de la matriz de coeficientes distinto de cero, (que este sería un sistema de Cramer).

4.4. Teorema de Rouché

En esta sección nuestro objetivo es conocer el teorema de Rouché, también conocido como teorema de Rouché-Frobenius. Para ello, en primer lugar, tenemos que ver algunos conceptos relevantes.

4.4.1. Rango de una matriz

Empezaremos viendo algunas definiciones necesarias.

Definición 4.4.1. *Submatriz*

Sea A una matriz de orden $m \times n$, diremos que una **submatriz** suya es otra matriz (de menor dimensión $m' \times n'$ con $m' \leq m$ y $n' \leq n$) que se obtiene al suprimir ciertas filas y/o columnas de la matriz de partida A.

Ejemplo

Sea A una matriz de 3×3, veamos que A' es una submatriz suya de 2×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definición 4.4.2. *Menor de orden r*

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Se denomina **menor de orden** r de la matriz A al determinante de toda submatriz cuadrada que se pueda extraer de A tomando los elementos de la intersección de r filas y r columnas.

Ejemplo

Sea A una matriz de 4×3, veamos un menor suyo de orden 3 y otro de orden 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad | A' |= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 18, \quad | A'' |= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -9$$

Definición 4.4.3. *Rango*

Diremos que el **rango** de la matriz A es r, si se verifican las siguientes condiciones:

- Se puede extraer de la matriz A un menor de orden r con determinante no nulo.
- En caso que existan todos los menores de A de orden mayor que r son nulos.

Al rango de la matriz A lo notaremos como $rg(A) = r$.

Ejemplo

Sea A una matriz, veamos cual es su rango:

$$| A |= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0,$$

como el determinante de la matriz A es cero, su rango será menor que 3, veamos si es 2.

$$| A |= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0,$$

luego como existe un menor de orden 2 con determinante no nulo, diremos que $rg(A) = 2$.

Observación

Para que el rango de la matriz A sea r es suficiente con que los menores de orden $r+1$ sean nulos, para que el resto de menores de orden superior a r sean también nulos.

Propiedades

1. Sea A una matriz cualquiera, si intercambiamos entre sí dos filas (o dos columnas), obtenemos una matriz B que coincide en rango con A, es decir, $rg(A) = rg(B)$.

2. Si la matriz A tiene una fila (o columna) de ceros, si la matriz B es igual que A pero sin esa fila (o columna) de ceros, entonces sus rangos coinciden, es decir, $rg(A) = rg(B)$.

3. Fijados m y n, la única matriz $m \times n$ con rango igual a cero es la matriz nula.

4. Para toda matriz de orden $m \times n$ se verifica: que su rango es mayor o igual que cero y menor o igual que el mínimo de m y n, es decir, $0 \leq rg(A) \leq \text{mín}(m, n)$.

5. Si A una matriz cualquiera y A^t su traspuesta, entonces sus rangos coinciden, es decir $rg(A) = rg(A^t)$.

6. Para toda matriz cuadrada A de orden n, se verifica que el determinante de A es distinto de cero si y solo si el rango de A es n, es decir, $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n$.

Proposición 4.

Sea A una matriz cualquiera, su rango coincide con el número de filas y columnas linealmente independientes. Es decir, si sabemos cuántas filas o columnas son linealmente independientes, de aquí obtendríamos el rango de la matriz A.

Más adelante veremos que el rango de una matriz lo podemos calcular mediante el método de Gauss y el método de Gauss-Jordan.

4.4.2. Teorema de Rouché

Vamos a trabajar con un sistema cualquiera de ecuaciones lineales, es decir de m ecuaciones y n incógnitas, de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\}$$

Recordemos que llamamos A a la matriz de coeficientes y $(A \mid B)$ a la matriz ampliada, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Teorema 2. *Teorema de Rouché*

Sea un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ de orden ($m \times n$). Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. $AX = B$ es compatible determinado (solución única) si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) = n$.

2. $AX = B$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones) si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) < n$.

3. $AX = B$ es incompatible (sin solución) si y sólo si $rg(A \mid B) \neq rg(A)$, ($rg(A \mid B) = r + 1$, $rg(A) = r$).

La demostración de este resultado se encuentra en el anexo “Demostraciones”.

Corolario 1. *Teorema de Roché–Frobenius*

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineal general sea compatible es que la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tengan el mismo rango, es decir:

$$\text{Un sistema es compatible} \Leftrightarrow rg(A) = rg(A \mid B)$$

Corolario 2.

En el caso de los sistemas homogéneos siempre se verifica que $rg(A) = rg(A \mid B)$, por tanto los sistemas homogéneos siempre son compatibles.

4.5. Método de Gauss–Jordan

Para descubrir el método de Gauss–Jordan primero tenemos que dar algunas definiciones necesarias, hasta que veamos el método de Gauss y por último expondremos el método de Gauss–Jordan.

4.5.1. Sistemas lineales equivalentes

Definición 4.5.1. *Sistemas equivalentes*

Diremos que dos sistemas lineales con el mismo número de incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son **equivalentes** si tienen la misma solución general. Es decir, sean los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{c} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \vdots \\ c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \cdots + c_{pn}x_n = d_p, \end{array}\right\} (2)$$

diremos que estos sistemas son equivalentes si se verifica que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es solución de (1) si y sólo si también es solución de (2).

Esto implica que si ambos sistemas son incompatibles, entonces son equivalentes.

Observación

Para que dos sistemas sean equivalente es necesario que tengan el mismo número de incógnitas, pero no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones, es decir, m puede ser distinto de p.

4.5.2. Transformaciones elementales sobre un sistema

Dado un sistema de ecuaciones lineales, podemos hacer transformaciones a dicho sistema para obtener un sistema equivalente al de partida. Para ver las transformaciones que se pueden hacer veamos el siguiente

Teorema 3. *Propiedad fundamental de la equivalencia*

Dado un sistema de ecuaciones lineales, obtendremos un sistema equivalente si:

1. Intercambiamos dos ecuaciones.

2. Multiplicamos una ecuación por un número real no nulo.

3. A una ecuación cualquiera le sumamos un múltiplo cualquiera de otra ecuación distinta.

La demostración de este resultado la pueden encontrar en el anexo "Demostraciones".

Corolario 3.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales es suficiente con resolver un sistema equivalente suyo.

Ejemplo

El sistema (1) tiene por soluciones $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$, por lo que es equivalente al sistema (2).

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x - y + 2z &= 2, \\ 2x + 4y - 3z &= 3. \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 1, \\ z &= 1. \end{aligned}\right\} (2)$$

4.5.3. Método de Gauss

El método de Gauss consisten en transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente, de modo que el nuevo sistema tenga una matriz escalonada.

De esta forma, resolviendo el sistema escalonado equivalente (mucho más fácil de resolver que el inicial) tendríamos la solución del sistema de partida.

Para esta sección ha sido de gran ayuda consultar la referecia [15]

Definición 4.5.2. *Pivote*

Sea A una matriz cualquiera. Llamaremos **pivote** de una columna de A al primer elemento no nulo de dicha columna, si es que hay alguno.

Definición 4.5.3. *Matriz escalonada*

Sea A una matriz cualquiera, decimos que es **matriz escalonada** si verifica:

1. Si A tiene columnas compuestas enteramente por ceros éstas son las últimas columnas de la matriz.

2. El pivote de cada columna no nula es 1.

3. El pivote de cada columna no nula está más a la derecha que el de la fila anterior.

Ejemplos

Las siguientes matrices son escalonadas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.5.4. *Sistema escalonado*

Un **sistema escalonado** es aquel sistema cuya matriz de coeficientes es escalonada.

El método de Gauss consiste en transformar el sistema original en un sistema escalonado equivalente al de partida, ya que esto nos facilita la resolución del sistema mediante la resolución en escalera. Los pasos a seguir para realizar este método lo más simple posible son los siguientes:

1. La primera ecuación tiene que tener coeficiente no nula para la incógnita x_1, en caso de no serlo lo conseguimos mediante transformaciones elementales.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\} \qquad \text{siendo } a_{11} \neq 0.$$

2. El coeficiente de x_1 debe ser 1, para que esto ocurra la forma más sencilla es dividir esta primera ecuación por el coeficiente de x_1.

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + \widetilde{a_{12}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n = \widetilde{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\}$$

3. Se elimina la incógnita x_1 las restantes ecuaciones (ecuaciones por debajo de la que estamos tratando), para ello restamos la primera multiplicada por el número conveniente. Con esto conseguimos que la incógnita x_1 aparezca sólo en la primera

ecuación.

$$\left.\begin{aligned} x_1+ \quad \widetilde{a_{12}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n &= \widetilde{b_1}, \\ \widetilde{a_{22}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{2n}}x_n &= \widetilde{b_2}, \\ \widetilde{a_{32}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{3n}}x_n &= \widetilde{b_3}, \\ &\vdots \\ \widetilde{a_{m2}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{mn}}x_n &= \widetilde{b_m}. \end{aligned}\right\}$$

4. Dejando fija la primera ecuación repetimos los pasos anteriores para el resto de ecuaciones con la incógnita x_2.

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad +\widetilde{a_{12}}x_2 \quad +\widetilde{a_{13}}x_3 + \cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n &= \widetilde{b_1}, \\ x_2 \qquad +\widehat{a_{23}}x_3 + \cdots + \widehat{a_{2n}}x_n &= \widehat{b_2}, \\ \widehat{a_{33}}x_3 + \cdots + \widehat{a_{3n}}x_n &= \widehat{b_3}, \\ &\vdots \\ \widehat{a_{m3}}x_3 + \cdots + \widehat{a_{mn}}x_n &= \widehat{b_m}. \end{aligned}\right\}$$

5. Repitiendo el proceso tantas veces como sea posible obtenemos un sistema escalonado.

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad +\widetilde{a_{12}}x_2 \quad + \cdots\cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n &= \widetilde{b_1}, \\ x_2 \qquad + \cdots\cdots + \widehat{a_{2n}}x_n &= \widehat{b_2}, \\ &\vdots \\ x_r + \cdots + \overline{a_{rn}}x_n &= \overline{b_r}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{con } r \leq m.$$

Nota: Las ecuaciones del tipo $0 = 0$ se verifican para cualquier asignación de valores a las incógnitas, luego pueden ser eliminadas.

Ejemplo

Aplicaremos el método de Gauss al siguiente sistema.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 6, \\ 3x + 2y - z &= 4, \\ -x - 2y + 2z &= -1. \end{aligned}\right\}$$

1. Se verifica que $a_{11} = 2 \neq 0$, luego podemos pasar al siguiente paso.

2. Tenemos que conseguir que $2x$ de la primera ecuación pase a ser x, para ello basta

con restarle la primera ecuación a la segunda obteniendo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 4z = -4, \\ 3x + 2y - z = 4, \\ -x - 2y + 2z = -1. \end{array}\right\}$$

3. Tenemos que eliminar los coeficientes de la variable x en las ecuaciones segunda y tercera. Para hacerlo en la segunda tendremos que restar la primera ecuación multiplicada por 3 a la segunda. Para la tercera basta con sumar la primera y la tercera.

$$\left.\begin{array}{rrr} x & +y & -4z = -4, \\ & -y & +11z = 10, \\ & -y & -2z = -3. \end{array}\right\}$$

4. El coeficiente de y en la segunda ecuación tiene que ser 1, para ello basta multiplicar la segunda ecuación por -1.

$$\left.\begin{array}{rrr} x & +y & -4z = -4, \\ & y & -11z = -10, \\ & -y & -2z = -3. \end{array}\right\}$$

Ahora repetimos el proceso para conseguir un cero como coeficiente de y en la tercera ecuación es suficiente con sumar las ecuaciones segunda y tercera.

$$\left.\begin{array}{rrr} x & +y & -4z = -4, \\ & y & -11z = -10, \\ & & -13z = -13. \end{array}\right\}$$

Por último, el coeficiente de z en la tercera ecuación debe ser 1, para ello tenemos que dividir dicha ecuación por -13.

$$\left.\begin{array}{rrr} x & +y & -4z = -4, \\ & y & -11z = -10, \\ & & z = 1. \end{array}\right\}$$

Ya tendríamos el sistema escalonado equivalente al de partida, para obtener el valor de las incógnitas se hace mediante el método de ir resolviendo las ecuaciones del sistema de abajo arriba, conocido como el método de resolución en escalera.

Discusión del sistema

Vamos a distinguir los diferentes casos que nos pueden aparecer después de este procedimiento.

1. Puede que cuando hayamos terminado de aplicar el método de Gauss una de las ecuaciones resultantes sea del tipo $0x_i = b_i$ con $b_i \neq 0$, lo cual es una ecuación inconsistente ya que por un lado tenemos que $b_i = 0$ y por otro que $b_i \neq 0$, por tanto este sistema es incompatible y como es un sistema equivalente al de partida, podemos decir que el sistema de partida es un sistema incompatible.

2. Si no ocurre lo del apartado anterior para ninguna de las ecuaciones resultantes y además el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, diremos que este sistema es compatible determinado, y por tanto el sistema de partida por ser equivalente también será un sistema compatible determinado.

3. Puede ocurrir que tengamos una ecuación del tipo $0x_i = 0$, entonces esta incógnita x_i podría tomar valores arbitrarios (al ser x_i arbitrario puede que haya más incógnitas que también sean arbitrarias), luego estaríamos ante un sistema compatible indeterminado ya que tiene infinitas soluciones, esto es debido a que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones no triviales [1] (en el caso que $m = n$), es decir, ecuaciones del tipo $0x_i = 0$. Por tanto el sistema de partida por ser equivalente a este sería un sistema compatible indeterminado.

4. En el caso que $m > n$ tendremos que ver si se verifican las ecuaciones E_n hasta E_m, en caso de que esto no suceda diremos que el sistema es incompatible. Si todas las ecuaciones se verifican seguiremos resolviendo las ecuaciones desde E_n hasta E_1 de manera ascendente.

4.5.4. Método de Gauss–Jordan

El método de Gauss–Jordan está basado en el método de Gauss visto anteriormente, la diferencia es que en lugar de transformar el sistema en un sistema escalonado, lo que hace es que el sistema sea escalonado reducido, es decir, consiste en que al finalizar el método la matriz equivalente a A sea escalonada reducida.

[1] Diremos que una ecuación es trivial cuando sea del tipo $0 = 0$, en cualquier otro caso las ecuaciones serán no triviales

Definición 4.5.5. *Matriz escalonada reducida*

Sea A una matriz cualquiera, diremos que es **matriz escalonada reducida** si además de ser escalonada verifica que cada pivote es el único elemento no nulo de la correspondiente columna.

Ejemplos

Las siguientes matrices son escalonadas reducidas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.5.6. *Sistema escalonado reducido*

Un **sistema escalonado reducido** es aquel sistema cuya matriz de coeficientes es escalonada reducida.

El método de Gauss–Jordan no es más que el método de Gauss ampliado, es decir, en lugar de que nos queden ecuaciones por resolver después de aplicar el método (como pasa con el método de Gauss), con este nuevo método obtenemos el valor de las incógnitas directamente sin necesidad de resolver ninguna ecuación. Los pasos a seguir para realizar el método de Gauss–Jordan lo más simple posible son los siguientes:

1. La primera ecuación tiene que tener coeficiente no nula para la incógnita x_1, en caso de no serlo lo conseguimos mediante transformaciones elementales.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \qquad\qquad \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned}\right\} \qquad \text{siendo } a_{11} \neq 0.$$

2. El coeficiente de x_1 debe ser 1, para que esto ocurra la forma más sencilla es dividir esta primera ecuación por el coeficiente de x_1.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \widetilde{a_{12}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n = \widetilde{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \qquad\qquad \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned}\right\}$$

3. Se elimina la incógnita x_1 las restantes ecuaciones (ecuaciones por debajo de la

que estamos tratando), para ello restamos la primera multiplicada por el número conveniente. Con esto conseguimos que la incógnita x_1 aparezca sólo en la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{rr} x_1 + & \widetilde{a_{12}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n = \widetilde{b_1}, \\ & \widetilde{a_{22}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{2n}}x_n = \widetilde{b_2}, \\ & \widetilde{a_{32}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{3n}}x_n = \widetilde{b_3}, \\ & \vdots \qquad\quad \\ & \widetilde{a_{m2}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{mn}}x_n = \widetilde{b_m}. \end{array}\right\}$$

4. Se repiten los pasos anteriores con la incógnita x_2, además se repite el paso 3 pero para los elemento de encima de x_2.

$$\left.\begin{array}{rrr} x_1 & & +\widetilde{a_{13}}x_3 + \cdots + \widetilde{a_{1n}}x_n = \widetilde{b_1}, \\ & x_2 & +\widehat{a_{23}}x_3 + \cdots + \widehat{a_{2n}}x_n = \widehat{b_2}, \\ & & \widehat{a_{33}}x_3 + \cdots + \widehat{a_{3n}}x_n = \widehat{b_3}, \\ & & \vdots \qquad\quad \\ & & \widehat{a_{m3}}x_3 + \cdots + \widehat{a_{mn}}x_n = \widehat{b_m}. \end{array}\right\}$$

5. Repitiendo el proceso tantas veces como sea posible obtenemos un sistema escalonado reducido.

$$\left.\begin{array}{cccr} x_1 & & & = \overline{b_1}, \\ & x_2 & & = \overline{b_2}, \\ & & & \vdots \\ & & x_r & = \overline{b_r}, \end{array}\right\} \qquad \text{con } r \leq m.$$

Ejemplo

Aplicaremos el método de Gauss al siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 6, \\ 3x + 2y - z = 4, \\ -x - 2y + 2z = -1. \end{array}\right\}$$

1. Se verifica que $a_{11} = 2 \neq 0$, luego podemos pasar al siguiente paso.

2. Tenemos que conseguir que $2x$ de la primera ecuación pase a ser x, para ello basta

con restarle la primera ecuación a la segunda obteniendo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-4z=-4, \\ 3x+2y-z=4, \\ -x-2y+2z=-1. \end{array}\right\}$$

3. Tenemos que eliminar los coeficientes de la variable x en las ecuaciones segunda y tercera. Para hacerlo en la segunda tendremos que restar la primera ecuación multiplicada por 3 a la segunda. Para la tercera basta con sumar la primera y la tercera.

$$\left.\begin{array}{cccr} x & +y & -4z & =-4, \\ & -y & +11z & =10, \\ & -y & -2z & =-3. \end{array}\right\}$$

4. El coeficiente de y en la segunda ecuación tiene que ser 1, para ello basta multiplicar la segunda ecuación por -1.

$$\left.\begin{array}{cccr} x & +y & -4z & =-4, \\ & y & -11z & =-10, \\ & -y & -2z & =-3. \end{array}\right\}$$

   Ahora repetimos el proceso para conseguir un cero como coeficiente de y en la tercera ecuación es suficiente con sumar las ecuaciones segunda y tercera, para hacer cero el coeficiente de y en la primera ecuación basta con restar la segunda ecuación a la primera.

$$\left.\begin{array}{cccr} x & & +7z & =8, \\ & y & -11z & =-10, \\ & & -13z & =-13. \end{array}\right\}$$

   El coeficiente de z en la tercera ecuación debe ser 1, para ello tenemos que dividir dicha ecuación por -13,.

$$\left.\begin{array}{cccr} x & & +7z & =8, \\ & y & -11z & =-10, \\ & & z & =1. \end{array}\right\}$$

   Por último, los coeficientes de z de la primera y segunda ecuación deben ser cero, para ello, en el caso de la primera tenemos que restar la tercera multiplicada por 7 a la primera, en el caso de la segunda tenemos que sumar la tercera multiplicada por 11 a la segunda.

$$\left.\begin{aligned} x \qquad &= 1, \\ y \quad &= 1, \\ z &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Ya tendríamos el sistema escalonado reducido equivalente al de partida, que nos da directamente el valor de las incógnitas sin necesidad de resolver ninguna ecuación.

Observación

Una vez vistos los métodos de Gauss y Gauss–Jordan podemos definir el rango de una forma mucho más sencilla que la anterior, aunque para poder utilizarla, previamente hay que realizar el método de Gauss–Jordan. Sea A una matriz cualquiera, diremos que el rango de A ($rg(A)$) es el número de pivotes de la matriz escalonada reducida equivalente a A.

4.6. Eliminación lineal de parámetros

La eliminación lineal de parámetros es el "proceso inverso" de la resolución de un sistema compatible indeterminado, ya que para poder usar este proceso la solución tiene que depender de al menos un parámetro. Nos permite pasar de la solución al sistema original. Es decir, partiendo de ecuaciones paramétricas nuestro objetivo es llegar a ecuaciones implícitas.

Las soluciones de un sistema expresado en ecuaciones paramétricas, en general es de la siguiente forma, suponemos que $m > n$ para que el número de ecuaciones sea mayor que el número de incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n}, \\ x_2 &= b_2 + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n}, \\ &\vdots \\ x_m &= b_m + \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_n a_{mn}. \end{aligned}\right\}$$

Para resolver el sistema anterior lo que tenemos que hacer es resolver dicho sistema o uno equivalente pero tomando ahora como incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Para ello el sistema que vamos a resolver es uno equivalente al anterior que va a ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} = x_1 - b_1, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n} = x_2 - b_2, \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_n a_{mn} = x_m - b_m. \end{array}\right\}$$

Definiendo las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x_1 - b_1 \\ x_2 - b_2 \\ \vdots \\ x_m - b_m \end{pmatrix},$$

$$(A \mid C) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & x_m - b_m \end{array}\right),$$

el sistema quedaría de la siguiente forma:

$$A\Lambda = C.$$

Ahora usando el Teorema de Rouché visto anteriormente tenemos que este sistema tiene solución si y sólo si el rango de A es igual al rango de $(A \mid C)$, es decir:

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = rg \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & x_m - b_m \end{array}\right).$$

Suponiendo que el $rg(A) = r$ con $r \leq n$, entonces para que tenga solución se tiene que verificar que $rg(A \mid C) = r$. Si el rango de A es r, esto equivale a decir que todos sus menores de orden $r + 1$ son nulos y que al menos uno de los menores de orden r es no nulo, luego podemos suponer (sin perdida de generalidad) que el menor de orden r

no nulo es el formado por las primeras r filas y r columnas, es decir:

$$det(A_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Como necesitamos que $rg(A \mid C) = r$, esto equivale a decir que todos sus menores de orden $r+1$ son nulos y que al menos uno de los menores de orden r es no nulo. Luego se verifica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & x_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & x_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & x_r - b_r \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tr} & x_t - b_t \end{vmatrix} = 0, \quad \text{con} \quad t = r+1, ..., n,$$

y las ecuaciones que obtenemos de resolver todos estos determinantes serían las ecuaciones implícitas que estamos buscando.

También podemos ver otro tipo de eliminación parámetros en el caso que los parámetros estuviesen en los coeficientes que acompañan a las incógnitas o los términos independientes, para ello tendríamos diferentes tipos de sistemas dependiendo del valor que tome dicho parámetro. Para ver esto con mayor facilidad vamos a ver un ejemplo:

Ejemplo

Veamos cómo resolver el siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor que tome el parámetro k.

$$\left.\begin{aligned} px + y \quad &= 1, \\ x + (p+1)y \quad &= 1, \\ x + py \quad &= 1. \end{aligned}\right\}$$

En este caso tendríamos la siguiente matriz ampliada

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} p & 1 & 1 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & p & 1 \end{array}\right).$$

En primer lugar vamos a calcular el determinante de esta matriz

$$det(M) = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = p(p+1) + 1 + p - (p+1) - 1 - p^2 = p - 1.$$

Luego para que el determinante sea nulo necesitamos que $p - 1 = 0$, por tanto, $p = 1$ Veamos los diferentes posibilidades que tenemos:

1. En el caso $p = 1$ tendríamos que el $det(M) = 0$ y por tanto veamos cuál es el rango de la matriz de coeficientes.

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

   Luego el sistema en este caso sería compatible determinado, ya que el rango de la matriz ampliada coincide con el número de incógnitas.

2. En el caso $p \neq 1$ tendríamos que $det(M) \neq 0$ y por tanto tendríamos que el sistema es incompatible.

4.7. Aplicaciones a la geometría

Una aplicación geométrica interesante de los sistemas de ecuaciones consiste en analizar las posiciones relativas entre rectas y planos en $\mathbb{R}^3$. Estudiaremos todos los casos posibles.

4.7.1. Caso de dos planos en $\mathbb{R}^3$

Sean los planos $\Pi \equiv Ax + By + Cz - D = 0$ y $\Pi' \equiv A'x + B'y + C'z - D' = 0$. Los puntos de corte de Π y Π' se obtienen como soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz = D, \\ A'x + B'y + C'z = D'. \end{aligned}\right\}$$

Tomando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right),$$

podemos clasificar la intersección de dos planos de la siguiente forma:

1. Si el rango de M es 1 y coincide con $\widetilde{M}$, entonces los planos son coincidentes,ya que al tener ambas matrices rango 1 quiere decir que las ecuaciones de los dos planos son proporcionales, y por tanto dan como resultado el mismo plano.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 1 \Rightarrow \text{ planos coincidentes.}$$

Figura 4.1: Planos coincidentes (elaboración propia)

2. Si el rango de M es 1 y el rango de $\widetilde{M}$ es 2, entonces los planos son paralelos, ya que al tener la matriz ampliada rango mayor que la matriz de coeficientes esto es debido a que los términos independientes de los dos planos no son proporcionales y por tanto son paralelos.

$$rg(M) = 1 \;\; rg(\widetilde{M}) = 2 \Rightarrow \text{ planos paralelos.}$$

Figura 4.2: Planos paralelos (elaboración propia)

3. Si el rango de M es 2, necesariamente coincide con el rango de $\widetilde{M}$, y los planos son secantes (se cortan en una recta), ya que tienen ambas matrices el rango máximo y esto quiere decir que sus coeficientes no son proporcionales, y por tanto se cortan.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 2 \Rightarrow \text{ planos secantes.}$$

Figura 4.3: Planos Secantes (elaboración propia)

4.7.2. Caso de tres planos $\mathbb{R}^3$

Sean los planos $\Pi \equiv Ax + By + Cz - D = 0$, $\Pi' \equiv A'x + B'y + C'z - D' = 0$ y $\Pi'' = A''x + B''y + C''z - D'' = 0$. Los puntos de corte se obtienen estudiando el sistema::

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz = D, \\ A'x + B'y + C'z = D', \\ A''x + B''y + C''z = D''. \end{aligned}\right\}$$

Tomando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, es decir:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right).$$

Podemos clasificar la intersección de tres planos de la siguiente forma:

1. Si el rango de M es 1 y coincide con el rango de $\widetilde{M}$, entonces los planos son coincidentes, ya que al tener ambas matrices rango 1 quiere decir que las ecuaciones de los tres planos son proporcionales, y por tanto dan como resultado el mismo plano..

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 1 \Rightarrow \text{ planos coincidentes.}$$

Figura 4.4: Planos coincidentes (elaboración propia)

2. Si el rango de M es 1 y el rango de $\widetilde{M}$ es 2, entonces tenemos dos opciones: que los tres planos sean paralelos o que dos de ellos son coincidentes y uno paralelo. Serán los tres planos paralelos si se verifican las siguientes igualdades $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ y $\frac{A''}{A'} = \frac{B''}{B'} = \frac{C''}{C'} \neq \frac{D''}{D'}$, en caso contrario tendremos dos planos coincidentes y uno paralelo. Esto ocurre debido a que al tener rango diferente las dos matrices y que la diferencia sea de de 1, significa que al menos 1 plano es paralelo al resto, los otros dos planos pueden ser paralelos o coincidentes dependiendo de si hay o no proporcionalidad entre sus términos independientes.

$$rg(M) = 1 \;\; rg(\widetilde{M}) = 2 \Rightarrow \text{3 planos paralelos o 2 coincidentes y 1 paralelo.}$$

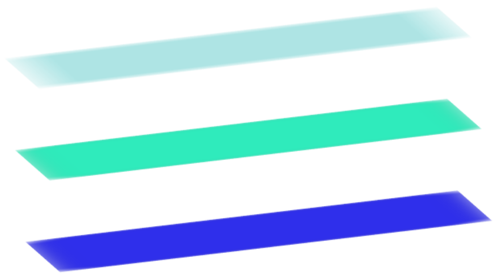


Figura 4.5: Tres planos paralelos (elaboración propia)

Figura 4.6: Dos planos coincidentes y uno paralelo (elaboración propia)

3. Si el rango de M es 2 y coincide con el rango de $\widetilde{M}$, entonces los planos se intersecan en una recta. Esto ocurre ya que tienen ambas matrices el mismo rango y esto quiere decir que sus coeficientes no son proporcionales, y por tanto se cortan.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 2 \Rightarrow \text{ planos intersecan en una recta.}$$

Figura 4.7: Tres planos intersecados en una recta (elaboración propia)

4. Si el rango de M es 2 y el rango de $\widetilde{M}$ es 3, entonces tenemos dos opciones: que dos de ellos sean paralelos y uno secante o son secantes dos a dos. Serán dos planos paralelos y uno secante si se verifican alguna de las siguientes igualdades $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ o $\frac{A''}{A'} = \frac{B''}{B'} = \frac{C''}{C'} \neq \frac{D''}{D'}$ o $\frac{A}{A''} = \frac{B}{B''} = \frac{C}{C''} \neq \frac{D}{D''}$, en caso contrario tendremos planos secantes dos a dos. Esto ocurre debido a que al tener rango diferente las dos matrices y que la diferencia sea de de 1, siendo la matriz ampliada de rango máximo, luego no pueden ser coincidentes. En el caso de 2 paralelos y una secante es se verifica que no hay proporcionalidad de dos términos independientes, en cualquier otro caso son secantes dos a dos ya que no hay proporcionalidad entre los coeficientes de los diferentes planos y por tanto se tienen que cortar.

$rg(M) = 2 \;\; rg(\widetilde{M}) = 3 \Rightarrow$ 2 paralelos y 1 secante o secantes dos a dos.

Figura 4.8: Dos planos paralelos y uno secantes (elaboración propia)

Figura 4.9: Tres planos secantes 2 a 2 (elaboración propia)

5. Si el rango de M es 3 y coincide con el rango de $\widetilde{M}$, entonces los planos se intersecan en un punto. Esto ocurre ya que ambas matrices tienen rango máximo y por tanto no hay ninguna proporcionalidad entre los coeficientes y términos independientes de los diferentes planos.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 3 \Rightarrow \text{ planos intersecan en un punto en común.}$$

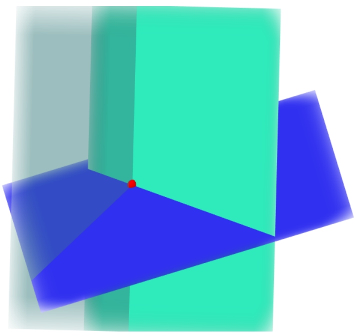


Figura 4.10: Tres planos intersecados en un punto común (elaboración propia)

4.7.3. Caso de dos rectas en $\mathbb{R}^3$

Las rectas en $\mathbb{R}^3$ se pueden describir como intersección de dos planos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} A_1x + A_2y + A_3z - A_4 = 0, \\ B_1x + B_2y + B_3z - B_4 = 0, \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} C_1x + C_2y + C_3z - C_4 = 0, \\ D_1x + D_2y + D_3z - D_4 = 0, \end{cases}$.

Para ver los puntos donde se cortan tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + A_2y + A_3z = A_4, \\ B_1x + B_2y + B_3z = B_4, \\ C_1x + C_2y + C_3z = C_4, \\ D_1x + D_2y + D_3z = D_4. \end{aligned}\right\}$$

Tomando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{array}\right).$$

Podemos clasificar la intersección de dos rectas de la siguiente forma:

1. Si el rango de M es 2 y coincide con el rango de $\widetilde{M}$, entonces las rectas son coincidentes. Esto ocurre ya que cada recta esta representada por dos planos, rango 2 quiere decir que sólo hay una recta ya que la otra es proporcional a la primera y por tanto son rectas coincidentes.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 2 \Rightarrow \text{ rectas coincidentes.}$$

Figura 4.11: Rectas coincidentes (elaboración propia)

2. Si el rango de M es 2 y el rango de $\widetilde{M}$ es 3, entonces las rectas son paralelas. Esto ocurre debido a que el rango de la matriz ampliada supera al de la matriz de coeficientes en 1, luego aunque los coeficientes sean proporcionales, el término independiente no, por tanto hay dos planos paralelos que dan lugar a dos rectas paralelas.

$$rg(M) = 2 \;\; rg(\widetilde{M}) = 3 \Rightarrow \text{ rectas paralelas.}$$

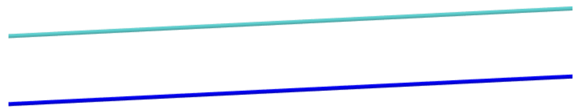


Figura 4.12: Rectas paralelas (elaboración propia)

3. Si el rango de M es 3 y coincide con $\widetilde{M}$, entonces las rectas son secantes. Esto ocurre ya que ambas matrices tienen rango 3, hay tres planos que no son proporcionales, luego da lugar a dos rectas secantes ya que tiene un plano proporcional al menos a uno del resto de los planos.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 3 \Rightarrow \text{ rectas secantes.}$$

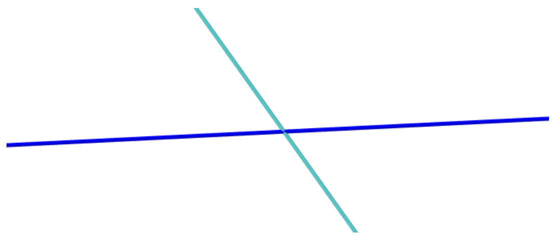


Figura 4.13: Rectas secantes (elaboración propia)

4. Si el rango de M es 3 y el rango de $\widetilde{M}$ es 4, entonces las rectas se cruzan. Esto se debe a que al ser la matriz ampliada de rango máximo todos los términos independientes son no proporcionales, pero al tener la matriz de coeficientes rango 3 hay un plano proporcional al resto, luego las rectas se cruzan.

$$rg(M) = 3 \;\; rg(\widetilde{M}) = 4 \Rightarrow \text{ rectas que se cruzan.}$$

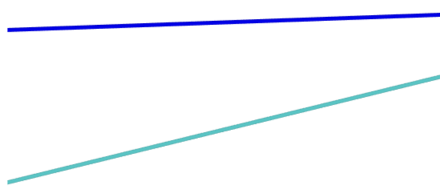


Figura 4.14: Rectas se cruzan (elaboración propia)

4.7.4. Caso de una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$

Veamos la recta como intersección de dos planos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} A_1x + A_2y + A_3z - A_4 = 0 \\ B_1x + B_2y + B_3z - B_4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\Pi \equiv Ax+By+Cz-D = 0$. Tenemos el siguiente sistema para ver los puntos comunes:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + A_2y + A_3z = A_4, \\ B_1x + B_2y + B_3z = B_4, \\ Ax + By + Cz = D. \end{aligned}\right\}$$

Tomando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A & B & C \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A & B & C & D \end{array}\right).$$

Podemos clasificar la intersección de una recta y un plano de la siguiente forma:

1. Si el rango de M es 2 y coincide con el rango de $\widetilde{M}$, entonces la recta está contenida en el plano. Esto se debe a que el rango de ambas matrices coincide y como es 2, esto quiere decir que hay dos planos proporcionales y por tanto la recta está contenida en el plano.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 2 \Rightarrow \text{ recta contenida en plano.}$$

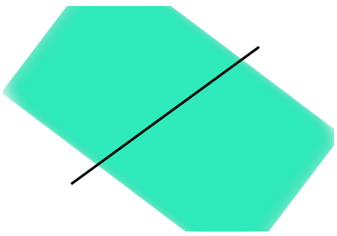


Figura 4.15: Recta contenida en un plano (elaboración propia)

2. Si el rango de M es 2 y el rango de $\widetilde{M}$ es 3, entonces la recta es paralela al plano. Esto ocurre la matriz ampliada tiene rango máximo pero la matriz de coeficientes sólo 2, luego hay proporcionalidad de coeficientes pero no de términos indepen-

dientes, lo que da lugar a una recta paralela al plano.

$$rg(M) = 2 \;\; rg(\widetilde{M}) = 3 \Rightarrow \text{ recta paralela al plano.}$$

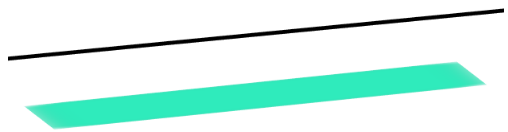


Figura 4.16: Recta paralela a un plano (elaboración propia)

3. Si el rango de M es 3 y coincide con el rango de $\widetilde{M}$, entonces la recta es secante al plano. Esto es debido a que ambas matrices tienen rango máximo y por tanto no hay proporcionalidad ni en coeficientes ni en términos independientes por lo que necesariamente la recta tienen que ser secante al plano.

$$rg(M) = rg(\widetilde{M}) = 3 \Rightarrow \text{ recta secante al plano.}$$

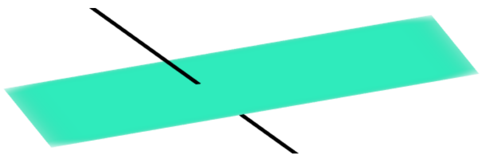


Figura 4.17: Recta secante a un plano (elaboración propia)

Capítulo 5

Fundamentación didáctica: investigaciones sobre aprendizaje y/o la enseñanza

Para esta sección hemos buscado diferentes artículos en revistas muy prestigiosas. En primer lugar hemos visto un artículo sobre la invención de problemas para ver el aprendizaje en sistemas de ecuaciones, que se encuentra en la revista Enseñanza de las ciencias, y me pareció algo novedoso; este artículo lo pueden encontrar en la biografía en la referencia [10]. En segundo lugar veremos un artículo sobre los problemas de comprensión de los alumnos en los sistemas de ecuaciones en bachillerato, que se encuentra en la revista Números, me ha parecido un artículo interesante ya que en el se ve las dificultades que tienen los alumnos después de toda la etapa de ESO y bachillerato; este artículo lo pueden encontrar en la biografía en la referencia [14]. Por último, por falta de espacio en el anexo 2 podemos encontrar otro artículo sobre la incorporación de las TIC en las aulas, este artículo se encientra en las X Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria, es un artículo sobre algo que ya se está usando en las aulas, ya que las TIC están cada vez más introducidas en la educación; este artículo lo pueden encontrar en la biografía en la referencia [1].

5.1. Invención de problemas

En el artículo que nos vamos a centrar mayoritariamente para esta sección es “Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas” de Elena Fernández-Millán y Marta Molina (Universidad de Granada). Este artículo tiene como objetivo indagar en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico que adquieren los estudiantes en la ESO mediante la actividad de invención de problemas.

"Los objetivos específicos son:

1. Identificar las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema.

2. Distinguir el significado que dan los estudiantes a las incógnitas y operaciones contenidas en las ecuaciones y sistemas."

Para esta investigación tomaron como muestra a 20 estudiantes de 4º ESO de matemáticas en la opción A. Estos estudiantes desde primero han estado familiarizándose con los tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones a los que se van a enfrentar en este estudio.

Para la recogida de datos de esta investigación se diseñó un cuestionario formado por siete tareas (cinco ecuaciones y dos sistemas) y en cada una de ellas se les pidió al alumnado que inventara un problema en el cual estuviera implicado el uso de la ecuación o el sistema dado.

Tanto las ecuaciones como los sistemas tienen solución única, y tanto los coeficientes como términos independientes son números enteros para que esto no sea un inconveniente a la hora de inventar el problema.

"Después de un primer análisis de los enunciados formulados por los estudiantes, definimos dos grupos de categorías. Las categorías sintácticas atienden a la forma y las semánticas al significado de los problemas planteados."

Como categorías sintácticas tenemos las siguientes:

- A- Conservación de términos y operaciones.
- B- Presencia de incógnitas operando.
- C- Relación entre coeficiente/s e incógnita/s.
- D- Igual número de incógnitas.

Las categorías A y B tienen como respuestas Sí o No, pero las categorías C y D dependen de la categoría B, es decir, solo son analizables cuando en la categoría B aparece un Sí; en caso de ser No tenemos otra posible respuesta para estas categorías que será No Analizable (N/A); teniendo también la posibilidad de Sí o No en el caso de aparecer Sí en la categoría B.

Algunos ejemplos del artículo donde lo anterior se ve más claro son los siguientes.

Ejemplo 1

La expresión dada es $8 = x + 6$ y el problema inventado es el siguiente: "La suma de dos números consecutivos pares da 8. Calcula qué dos números son." La traducción simbólica a este enunciado es $2x + 2x + 2 = 8$, o lo que es lo mismo $2x + 2(x + 1) = 8$. Veamos ahora qué categorías sintácticas cumple y cuáles no.

- A - No, ya que en la expresión dada hay una única suma y en problema inventado hay al menos dos sumas, lueg no se conservan las operaciones.
- B - Sí, en el problema inventado aparece la incógnita operando con coeficientes.
- C - No, la relación entre coeficientes e incógnitas no es la correcta.
- D - Sí, en el problema inventado solo aparece una incógnita al igual que en la expresión dada.

Ejemplo 2

La expresión dada es $2x - 1 = 9$ y el problema inventado es el siguiente: "Si tengo 9 globos y mi madre me da uno más pero se me explotan la mitad ¿cuántos globos me quedan?" La traducción simbólica a este enunciado es $(9 + 1)/2 = x$. Veamos ahora qué categorías sintácticas cumple y cuáles no.

- A - No, ya que en la expresión dada no hay ninguna fracción y en problema inventado sí.
- B - No, ya que en el problema inventado aparece la incógnita sin operar con coeficientes y en la expresión dada sí.
- C - N/A
- D - N/A

Ejemplo 3

La expresión dada es

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y = 69, \\ x + y = 15, \end{aligned}\right\}$$

y el problema inventado es el siguiente: "Roberto ha ido al centro comercial y se ha comprado 5 camisetas y 3 chaquetas, gastándose 69€ y Alba que le ha acompañado ha comprado una camiseta y una chaqueta para su novio igual que la de Roberto gastándose 15€ en total. ¿Cuántos es el valor de una camiseta?¿Y de la chaqueta?" La traducción simbólica a este enunciado es

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y = 69, \\ x + y = 15. \end{aligned}\right\}$$

Veamos ahora qué categorías sintácticas cumple y cuales no.

1. A - Sí, ya que conserva los términos y las operaciones.
2. B - Sí, ya que las incógnitas se encuentran operando con otros elementos.
3. C - Sí, ya que relaciona bien las incógnitas y sus coeficientes.
4. D - Sí, ya que hay el mismo número de incógnitas.

Como categorías semánticas tenemos las siguientes:

- E - Da significado a las incógnitas.
- F - Da significado a las estructuras aditivas.
- G - Da significado a las estructuras multiplicativas.

Todas estas categorías tienen como posibles valores Sí, No y No analizable (N/A). En la categoría E será N/A cuando en la categoría B aparezca un No. En las categorías F y G serán N/A cuando en la ecuación original no hay estructura aditivo o multiplicativa.

A la hora de que un alumno se le plantea algo diferente, en este caso en lugar de darles un problema y que ellos extraigan la ecuación o sistema adecuado tienen que hacerlo a la inversa; dado una ecuación o un sistema tienen que inventar un problema que dé como solución la ecuación o el sistema dado.

"En este estudio se han identificado características de las ecuaciones y sistemas que dificultaron la tarea de inventar problemas, y el significado que los estudiantes atribuyeron a las operaciones e incógnitas contenidas en las operaciones dadas. Las citadas características son: el número de incógnitas superior a uno, la misma incógnita a ambos lados del signo de igual , coeficientes diferentes superiores a dos, y la presencia de estructuras multiplicativas entre incógnitas."

En este artículo se ve que a los alumnos les es más fácil inventar problemas cuando todas las relaciones son aditivas que cuando hay alguna relación multiplicativa. También se ve que el problema viene de la incomprensión por parte de los alumnos tanto de las operaciones matemáticas como del simbolismo algebraico. La solución a este problema de incomprensión es intentar que los alumnos comprendan perfectamente cuándo se debe usar cada operación y aprender las definiciones del simbolismo algebraico y cuándo tienen que usar cada una de ellas.

5.2. Problemas de comprensión en bachillerato

El artículo en el que nos centraremos en esta sección es "Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato" de Félix Martínez de la Rosa y Soledad María Saéz Martínez (Universidad de Cádiz). En este artículo se estudia la preparación de los alumnos de Bachillerato en sistemas de ecuaciones lineales y si sus conocimientos son necesarios a la hora de llegar a la universidad.

Los sistemas lineales tienen un papel importante en las matemáticas de Bachillerato, tanto a nivel algebraico, gráfico como aspecto verbal. Con esto nos referimos a la comprensión de los enunciados que se les plantea en los problemas. Esto es algo que muchos alumnos no terminan de desarrollar ya que se saben resolver todo tipo de problemas sin ninguna dificultad, pero si tienen un enunciado y tienen que "adivinar" qué procedimiento seguir, los alumnos no saben por dónde seguir.

"Los alumnos cuando llegan a la universidad llevan el siguiente esquema mental para la resolución de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

1. Si no hay parámetros, se calcula el determinante de la matriz de coeficientes aplicando la regla de Sarrus. Si es distinto de cero el determinante se calcula por la regla se Cramer. Si es cero, se prescinde de una o dos ecuaciones y se resuelven una o dos incógnitas en función del resto.

2. Si hay parámetros, sus valores se obtienen igualando a cero el determinante de la matriz de coeficientes y para estos valores se resuelve el sistema como en el paso anterior.

Lo que hacen que los alumnos sigan este criterio sin más y no se paren a reflexionar que hacen en cada paso."

Según el BOE y el BOJA el estudiante de segundo de Bachillerato de Ciencias debe estudiar matrices, determinantes, rangos y sistemas de ecuaciones. En las pruebas de acceso a la universidad deben saber clasificar un sistema de ecuaciones lineales de no más de tres incógnitas y que dependa de un parámetro como mucho, y resolverlo. Sin embargo en el bachillerato de Ciencias Sociales es en primero donde se dan los sistemas de ecuaciones y en segundo álgebra matricial y programación lineal, y nos llama la atención que en las pruebas de acceso a la universidad por esta rama no se evalúa el conocimiento de discusión y resolución de sistemas lineales.

Es cierto que el segundo año de bachillerato a los alumnos se les intenta preparar para obtener la mayor calificación en las pruebas de acceso a la universidad y así poder estudiar lo que le guste y no verse obligado a estudiar algo ajeno a su verdadero interés al no haber obtenido una nota suficiente. Debido a esto es cierto que muchas veces los profesores debido al poco tiempo que tienen solo se centran en que sus alumnos aprendan a resolver los ejercicios que se van a encontrar en estas pruebas, y no se suelen parar a explicar el porqué ese procedimiento es mejor que otro; simplemente le dicen a los alumnos que esta es la forma en la que se resuelve este tipo de ejercicio.

En este estudio se ven los contenidos que estudian los alumnos basándose en dos libros de texto de editoriales diferentes (Santillana y Anaya), que son las que normalmente se usan en los centros educativos.

El rango es uno de los conceptos que los alumnos no terminan de comprender bien del todo, ya que es un concepto un poco más abstracto, y las definiciones que se dan tampoco son del toda claras.

En referencia a la clasificación de los sistemas de ecuaciones, los libros lo hacen con la siguiente clasificación de las matrices escalonadas que se obtienen al realizar el método de Gauss.

$\left(\begin{array}{cccc\|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$	Si $a \neq 0$ y si tiene el mismo número de ecuaciones no nulas que de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
$\left(\begin{array}{cccc\|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & b \end{array}\right)$	Si $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$ y tiene menor número de ecuaciones no nulas que de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
$\left(\begin{array}{cccc\|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$	Si $b \neq 0$ el sistema no tiene solución, luego el sistema es incompatible.

Tabla 5.1: Clasificación de sistemas (elaboración propia)

Con esto podemos ver que los alumnos siempre tienen un esquema claro en su cabeza de cómo clasificar un sistema, aunque seguramente la mayoría no saben el por qué ocurre esto y no otra cosa.

Capítulo 6

Fundamentación curricular

Esta sección la vamos a abordar de dos formas distintas. En primer lugar vamos a comparar el mismo tema pero de diferentes cursos para ver la evolución de contenidos que deben estudiar los alumnos según su nivel. En segundo lugar vamos a comparar dos libros del mismo nivel pero de diferentes editoriales para ver si los contenidos son los mismos o no y en que se centra más cada editorial.

6.1. Mismo tema; distintos niveles; misma editorial

Aunque, el contenido de la unidad que hemos desarrollado se centra en 3º ESO de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, concretamente en el tema de sistemas de ecuaciones. Para ello vamos a ver el temario que se da en 2º ESO para ver la base que tienen los alumnos cuando llegan a 3º ESO; veremos también el temario de los dos 3º ESO para ver la diferencia de conceptos entre una y otra, y por último veremos el temario de los dos 4º ESO para ver si los conceptos de 3º ESO son necesarios para abordar este temario. Para hacer este estudio nos vamos a central en la editorial ANAYA para todos los niveles, he elegido esta editorial para hacer esta comparación ya que tiene todos sus libros en abierto y es muy fácil acceder a ellos vía internet.

Empezaremos analizando el temario de 2º ESO. Para ello veamos primero cuáles son los criterios del BOE para este curso.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas	Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	- Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma. - Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Tabla 6.1: Criterios 2º ESO (BOE)

En el libro de texto de 2º ESO cabe destacar que es la primera vez que se introduce este concepto para los alumnos, el tema dedicado a los sistemas de ecuaciones es el tema 8, y tiene la siguiente estructura.

1. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
    a) Representación gráfica de una ecuación lineal.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
3. Métodos para la resolución de sistemas lineales.
    a) Método de sustitución.
    b) Método de igualación.
    c) Método de reducción.
4. Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones.

En este caso el temario se ajusta perfectamente al BOE, aunque el método gráfico no se ve como un método concreto, simplemente desde el principio se ve la representación gráfica de una ecuación lineal de dos incógnitas y a lo largo del tema todo se a ilustrando gráficamente.

Veamos ahora el temario de 3º ESO orientadas a las enseñanzas aplicadas. Para ello analizaremos primero cuáles son los criterios del BOE para este curso.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.	Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos.	- Resuelve ecuaciones de segundo grado completas e incompletas mediante procedimientos algebraicos y gráficos. - Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos. - Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Tabla 6.2: Criterios 3º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas (BOE)

En el libro de texto de 3º ESO orientadas a las enseñanzas aplicadas, el tema dedicado a los sistemas de ecuaciones es el tema 8, y tiene la siguiente estructura.

1. Ecuaciones con dos incógnitas.
    a) Representación gráfica de una ecuación lineal.
2. Sistemas de ecuaciones.
3. Número de soluciones de un sistema lineal.
    a) Sistemas sin solución.
    b) Sistemas con infinitas soluciones.
4. Método de sustitución.
5. Método de igualación.
6. Método de reducción.
7. Regla práctica para resolver sistemas lineales.
8. Traducción de enunciados a sistemas de ecuaciones.

En este caso ocurre al igual que en el caso anterior: se ajusta perfectamente a lo pedido en el BOE. Lo único reseñable es que la parte de resolución gráfica no tiene un apartado concreto, pero si se utiliza a lo largo de todo el tema. También es de destacar que se incita a utilizar el software Geogebra para la resolución de los ejercicios y problemas de este tema y así usar recursos tecnológicos como nos pide el BOE.

Vamos ahora con el temario de 3º ESO orientado a las enseñanzas académicas. Para ello primero transcribimos cuáles son los criterios del BOE para este curso:

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Tabla 6.3: Criterios 3º ESO orientado a las enseñanzas académicas (BOE)

En el libro de texto de 3º ESO orientado a las enseñanzas académicas, el tema dedicado a los sistemas de ecuaciones es el tema 7, y tiene la siguiente estructura.

1. Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones.
    a) Representación gráfica.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
3. Sistemas equivalentes.
4. Número de soluciones de un sistema.
    a) Sistemas sin solución.
    b) Sistemas con infinitas soluciones.
5. Métodos de resolución de sistemas.
    a) Método de sustitución.
    b) Método de igualación.

c) Método de reducción.

d) Reglas prácticas para resolver sistemas lineales.

6. Sistemas de ecuaciones no lineales.

7. Resolución de problemas mediante sistemas.

En este caso también se ajusta perfectamente a lo pedido por el BOE, usando también como recurso tecnológico el software Geogebra. Además, en este caso, se amplía el conocimiento de los alumnos introduciendo los sistemas de ecuaciones no lineales.

Con respecto al temario de 4º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas, los criterios del BOE para este curso son:

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
- Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. - Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.	Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas.	Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Tabla 6.4: Criterios 4º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas (BOE)

En el libro de texto de 4º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas, el tema dedicado a los sistemas de ecuaciones es el tema 7, y tiene la siguiente estructura.

1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas.

   a) Representación gráfica.

   b) Casos especiales.

2. Sistemas de ecuaciones lineales.

   a) Número de soluciones de un sistema.

3. Resolución de sistemas de ecuaciones.

   a) Método de sustitución.

   b) Método de igualación.

c) Método de reducción.

4. Sistemas de ecuaciones lineales más complejos.

5. Sistemas no lineales.

6. Resolución de problemas mediante sistemas.

En este caso, como en todos los anteriores (como cabe esperar) se ajusta perfectamente a los contenidos pedidos en el BOE, y amplían el conocimiento de los alumnos con los sistemas de ecuaciones no lineales.

Por último, el temario de 4º ESO orientado a las enseñanzas académicas, presenta los criterios del BOE siguientes:

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
- Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. - Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas	Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.	- Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. - Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.

Tabla 6.5: Criterios 4º ESO orientado a las enseñanzas académicas (BOE)

En el libro de texto de 4º ESO orientadas a las enseñanzas académicas, el tema dedicado a los sistemas de ecuaciones es el tema 3, que también se dedica a recordar los tipos de ecuaciones y a introducir las inecuaciones, y tiene la siguiente estructura:

1. Ecuaciones.

   a) Ecuaciones de segundo grado.

   b) Ecuaciones bicuadradas $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

   c) Ecuaciones con la x en el denominador.

   d) Ecuaciones con radicales.

e) Ecuaciones exponenciales.

f) Ecuaciones logarítmicas.

g) Ecuaciones del tipo $(\dots)\cdot(\dots)\cdot(\dots)=0$.

2. Sistemas de ecuaciones lineales.

3. Sistemas de ecuaciones no lineales.

4. Inecuaciones con una incógnita.

   a) Representación gráfica de una inecuación.

   b) Resolución algebraica de una inecuación.

   c) Sistemas de inecuaciones.

En este caso se ajusta exactamente a lo pedido por el BOE, incluyendo los sistemas no lineales, y los sistemas de inecuaciones que no queda muy claro si están o no incluidos en el BOE ya que pone solo sistemas y no especifica si son sistemas de ecuaciones solo o también incluyen los sistemas de inecuaciones.

Pasamos ahora a analizar la relación entre los contenidos de los distintos niveles.

Se ve claramente que de 2º ESO a 3º ESO orientado a las enseñanzas aplicadas no hay mucha diferencia; se da prácticamente lo mismo, y lo único que se introduce nuevo es el número de soluciones de un sistema lineal. Sin embargo, en 3º ESO orientado a las enseñanzas académicas sí que se introducen muchas cosas nuevas: los sistemas equivalentes, el número de soluciones de un sistema lineal y sistemas de ecuaciones no lineales.

Respecto a 4º ESO orientadas a enseñanzas aplicadas se repasa lo visto en 3º ESO orientadas a las enseñanzas aplicadas y se amplía estudiando sistemas de ecuaciones lineales más complejos, que básicamente son sistemas de ecuaciones donde los coeficientes y términos independientes son fracciones y sistemas no lineales. Sin embargo, en 4º ESO orientado a las enseñanzas académicas ya ni siquiera se le dedica un tema entero a los sistemas de ecuaciones y ya se dan por conocidos los métodos de resolución de sistemas vistos en el curso anterior; se vuelve a hacer énfasis en los sistemas de ecuaciones no lineales y se amplía viendo los sistemas de inecuaciones.

6.2. Mismo tema; mismo nivel; distinta editorial

En esta sección nos vamos a centrar en el análisis de dos libros de texto de distintas editoriales del mismo nivel académico, en nuestro caso nos vamos a centrar en 3º ESO orientadas a las enseñanzas académicas.

Empezaremos revisando los contenidos que aborda cada editorial y los compararemos. Para ello vamos a utilizar los libros de texto de las editoriales Anaya y Oxford. He elegido estas editoriales para hacer esta comparación debido a lo siguiente: en el caso de Anaya por ser accesible vía internet y Oxford por tener familiares que tenían esa editorial en su centro.

En el caso de la editorial Anaya los puntos a tratar en el tema de sistemas de ecuaciones son los siguientes (como ya hemos visto en la sección anterior):

1. Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones.
    a) Representación gráfica.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
3. Sistemas equivalentes.
4. Número de soluciones de un sistema.
    a) Sistemas sin solución.
    b) Sistemas con infinitas soluciones.
5. Métodos de resolución de sistemas.
    a) Método de sustitución.
    b) Método de igualación.
    c) Método de reducción.
    d) Reglas prácticas para resolver sistemas lineales.
6. Sistemas de ecuaciones no lineales.
7. Resolución de problemas mediante sistemas.

En el caso de la editorial Oxford los puntos a tratar en el tema de sistemas de ecuaciones son los siguientes:

1. Sistemas de ecuaciones lineales.
2. Número de soluciones de un sistema.
3. Métodos de resolución de sistemas.
    a) Método de sustitución.

   b) Método de igualación.
   c) Método de reducción.

4. Resolución de sistemas: método gráfico.

Hay una gran diferencia a la hora de introducir el tema ya que en Anaya se empieza viendo un contexto histórico para que los alumnos vean de dónde surgió este concepto matemático y por qué es importante su estudio. En Oxford simplemente se introduce viendo algún caso de la vida cotidiana donde son útiles los sistemas de ecuaciones; en este caso con la química, lo cuál también me parece interesante ya que lo que van a aprender no solo les será útil para esta asignatura, sino para otras muchas.

Los dos temas van precedidos del tema de ecuaciones, sin embargo en Anaya deciden dedicar un primer apartado a ver las ecuaciones de dos incógnitas, sus soluciones y ver su representación gráfica. En el caso de Oxford esto se hace también en el primer apartado pero lo titulan como sistemas de ecuaciones lineales, aunque en este caso no se trata nada sobre la representación gráfica.

Veamos ahora la comparación de cómo definen en cada uno solución de una ecuación con dos incógnitas.

Anaya: "Solución de una ecuación con dos incógnitas es todo par de valores que hacen cierta la igualdad. Las ecuaciones lineales son polinómicas de primer grado: $ax+by = c$. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones."

Oxford: "Una ecuación lineal con dos incógnitas, x e y, es una igualdad que puede expresarse de la forma $ax + by = c$, donde:

- a y b son números reales conocidos, llamados coeficientes de la ecuación.
- c es otro número real conocido denominado término independiente.

Una solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de números (x_0, y_0) que, al sustituirlo por x e y, verifica la igualdad: $ax_0 + by_0 = c$. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones."

En el caso de Oxford primero definen ecuación de dos incógnitas, dándole nombre a los términos, después definen una solución posible, y por último especifican que hay infinitas soluciones. En Anaya primero dan la definición de solución, dejando ver que la solución no es única, después definen ecuación con dos incógnitas y, por último, hacen hincapié en que hay infinitas soluciones.

Personalmente me gusta más la definición de Oxford porque me parece más completa al darle nombre a los diferentes términos y me gusta más el orden en el que aparecen los conceptos. A favor de Anaya diré que me parece muy adecuado que se introduzca la representación gráfica de estas ecuaciones de dos incógnitas, ya que así los alumnos pueden llegar a comprender el concepto mucho mejor.

Comparemos ahora la forma que tiene de introducir el concepto de solución de un sistema de ecuaciones.

Anaya: "Dos ecuaciones forman un sistema de ecuaciones cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar una solución común. Cuando dos ecuaciones forman un sistema, las ponemos de esta forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Se llama solución de un sistema de ecuaciones a la solución común a ambas."

Oxford: "Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, está formado por dos ecuaciones lineales de los que se buscan soluciones comunes. La solución de un sistema de ecuaciones lineales es un par de números (x_0, y_0) que es solución de las dos ecuaciones a la vez."

En este caso me parece más apropiada la definición de Anaya ya que la veo más representativa de cara a los alumnos, pero lo que no me gusta es que trata a la solución como si fuese única y existiese siempre.

Respecto a los sistemas equivalentes en Anaya le dedican un apartado entero dándole más importancia que en Oxford (donde solo dan su definición), aunque ambas definiciones son prácticamente iguales.

Anaya: "Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.

Oxford: Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen la misma solución."

Este es un concepto sencillo pero que puede causar algo de dificultad en los alumnos ya que no es algo que se vea normalmente; por eso en el caso de Anaya se ve muy bien ya que se ve su representación gráfica y además hay un ejercicio resuelto para más claridad.

Veamos ahora cómo tratan el número de soluciones de un sistema de ecuaciones.

Anaya:

- "Los sistemas que no tienen solución se llaman incompatibles. Gráficamente, son dos rectas paralelas que no tienen ningún punto en común.

- Los sistemas que tienen infinitas soluciones se llaman indeterminados. Gráficamente, son dos rectas coincidentes: todos sus puntos son comunes."

Oxford:

- "Un sistema de ecuaciones lineales es compatible cuando tiene solución. Si los coeficientes del sistema no son proporcionales, la solución es única; en este caso se dice que el sistema es compatible determinado.
- Un sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado cuando tiene infinitas soluciones. Esto sucede si las ecuaciones son equivalentes, es decir, si sus coeficientes y términos independientes son proporcionales.
- Un sistema de ecuaciones lineales es incompatible cuando no tiene solución. Esto sucede si los coeficientes de las ecuaciones son proporcionales entre sí, pero no lo son con respecto a los términos independientes."

En este caso en Anaya ni siquiera se habla del caso compatible determinado, pero me gusta mucho que hablen de cómo se ve cada caso gráficamente. En el caso de Oxford sí que contemplan todos los casos, pero la explicación puede ser un poco "liosa" para los alumnos.

Comparemos ahora los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. Lo haremos método a método, empezando por el método de sustitución (para sistemas compatibles determinados).

Anaya: "Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y "sustituirla" en la otra. En la práctica los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve esta ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Se obtiene, así, la solución del sistema."

Oxford: "Este método de sustitución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra.

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

2. Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación y resolvemos.

3. Hayamos el valor de la otra incógnita sustituyendo en la primera expresión.”

Veamos ahora el método de igualación.

Anaya: “Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e “igualar” las expresiones resultantes.

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2. Se igualan las expresiones dando lugar a una ecuación con una solo incógnita.

3. Se resuelve esta ecuación.

4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5. Se obtiene, así, la solución del sistema.”

Oxford: “Este método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema e igualar las expresiones obtenidas.

1. Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.

2. Igualamos ambas expresiones y resolvemos la ecuación.

3. Hallamos el valor de la otra incógnita sustituyendo en una de las primeras expresiones obtenidas.”

Veamos, por último, el método de reducción.

Anaya: “Este método consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas, pero con distinto signo. Sumando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene una ecuación con solo una incógnita (se ha “reducido” el número de incógnitas).

1. Se preparan las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convengan).

2. Al sumarlas, desaparece una de las incógnitas.

3. Se resuelve la ecuación resultante.

4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5. Se obtiene, así, la solución del sistema.”

Oxford: “El método de reducción consiste en hallar un sistema de ecuaciones lineales equivalentes tal que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos y sumar ambas ecuaciones para reducirlas a una única ecuación.

1. Determinamos ecuaciones equivalentes en la que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos.
2. Sumamos las ecuaciones y resolvemos la que resulta.
3. Hayamos el valor de la otra incógnita sustituyendo en una de las ecuaciones del sistema.”

En todos los casos anteriores los métodos son los mismos y por tanto los pasos a dar son prácticamente iguales, pero en el caso de Anaya se hace más detallado, es decir, se hace pasito a pasito, y en el caso de Oxford se agrupan varios procedimientos en un mismo paso, es decir, en un único paso se hace lo que en Anaya necesita dos o tres pasos. Pero al fin y al cabo los pasos son los mismos ya estén más o menos detallados.

En el caso de Oxford hay otro método más que es el método gráfico, que ya se vio de alguna forma en Anaya cuando analizamos el número de soluciones posibles.

Si la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales son

- “Dos rectas secantes, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte determinan la solución del sistema.
- Dos rectas coincidentes, el sistema es compatible indeterminado y todos los puntos de la recta tienen como coordenadas sus soluciones.
- Dos rectas paralelas, el sistema es incompatible (no tiene solución).”

En Anaya también se dan unas “reglas” para saber cuándo usar un método u otro.

- “El método de sustitución es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1 o -1 en alguna de las ecuaciones.
- El método de igualación es parecido al de sustitución y se suele utilizar en las mismas circunstancias que este.
- El método de reducción es muy cómodo de aplicar cuando una incógnita tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o bien sus coeficientes son uno múltiplo del otro.”

En este caso me parecen “reglas” adecuadas para que los alumnos comprendan cuál es el método más adecuado para cada caso; pero yo hubiese puesto que el método de igualación se suele usar cuando una misma incógnita tiene por coeficientes 1 o -1 en ambas ecuaciones, para así poder diferenciarlo un poco del método de sustitución.

El siguiente apartado en el libro de Anaya es el de sistemas no lineales. Esto, en concreto, no es necesario introducirlo (ya que no está en el BOE) pero es una forma de que los alumnos vean que los sistemas no solo son de ecuaciones lineales, sino que puede haber sistemas de tantos tipos como tipos de ecuaciones haya, incluso que cada ecuación del sistema sea de un tipo distinto. En el libro de Oxford este concepto aparece en el apartado de avanza, que es un apartado dedicado en cada tema a aspectos relacionadas con el tema pero un poco más sofisticadas.

El último apartado de Anaya se refiere a la resolución de problemas mediante sistemas. En este apartado se da un camino a seguir para poder resolver problemas, que es el siguiente:

1. “Identificar los elementos que intervienen y nombrar las incógnitas.

2. Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.

3. Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

4. Interpretar la solución ajustándola al resultado.”

En Oxford no se dedica ningún apartado en concreto a la resolución de problemas mediante sistemas pero sí hay una gran cantidad de ejercicios propuestos que son problemas en los cuáles los alumnos deben previamente identificar de qué sistema se trata.

En lo referente a los ejercicios propuestos, hay una gran diferencia respecto a la cantidad, ya que en Anaya por cada apartado suele haber 2 ejercicios propuestos y casi siempre al menos uno resuelto, mientras que en Oxford hay una gran cantidad de ejercicios propuestos por cada apartado (7 u 8 ejercicios) y ninguno resuelto. Los dos tienen al final una gran cantidad de ejercicios de todos los apartados para que los alumnos puedan seguir practicando. Hay ejercicios de diferentes dificultades, que yo voy a utilizar denominándolos como dificultad baja, medio o alta. En el caso de Anaya solo los ejercicios de la parte final tienen el indicador de nivel, dejando los ejercicios de cada apartado sin este indicador, pero siendo estos ejercicios de dificultad baja o media. Sin embargo en el caso de Oxford todos los ejercicios tienen el indicador de dificultad, tanto los de los apartados como los finales.

Veamos ahora un estudio comparando la dificultad de estos ejercicios.

En esta tabla se puede apreciar claramente que en Anaya hay gran diferencia entre los distintos niveles de dificultad, predominando con casi un 60 % los ejercicios de dificultad

	Anaya	Oxford	Porcentaje Anaya	Porcentaje Oxford
Dificultad baja	25	17	35,71 %	24.64 %
Dificultad media	41	25	58,57 %	36,23 %
Dificultad alta	4	27	5,72 %	39,13 %
Total	70	69		
Ejercicios resueltos	18	2		

Tabla 6.6: Comparación ejercicios (elaboración propia)

media, seguido con un 35 % los de dificultad baja y por último con casi un 6 % los de dificultad alta. En el caso de Oxford esto esta más equilibrado, y en este caso predominan los de dificultad alta con casi un 40 %, seguidos de los de dificultad media con un 36 % y por último los de dificultad media con casi un 25 %.

También cabe destacar el total de ejercicios resueltos de un libro y otro, mientras que en Anaya hay un total de 18 ejercicios resueltos repartidos por todos los apartados del tema, en Oxford sólo hay 2 ejercicios resueltos y se encuentran uno en los métodos de resolución de sistemas y el otro en apartado de actividades finales.

En este caso al ser un tema poco intuitivo veo necesario la necesidad de poner ejercicios resueltos en casi todas partes ya que a los alumnos les es más fácil comprender la teoría explicada si a continuación pueden ver un ejercicio resuelto.

Capítulo 7

Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica

En esta sección del TFM desarrollaremos una unidad didáctica de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º ESO. Se contextualizará el aula y el centro donde se desarrollaría la unidad didáctica, teniendo en cuenta los objetivos deseados, la metodología utilizada, actividades y recursos necesarios, atención a la diversidad, temporalización y evaluación.

7.1. Título

Vamos a desarrollar la unidad didáctica de sistemas de ecuaciones, en el caso de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 3º ESO.

7.2. Justificación

Los sistemas de ecuaciones están dentro de la rama del álgebra, que es una de las grandes ramas de las matemáticas, y una de las más importantes; fue una de las primeras en aparecer debido a su necesidad en la población, ya que era necesario para contar.

Me he decantado por la realización de la unidad didáctica de sistemas de ecuaciones debido a que es un tema muy importante en la enseñanza y que los alumnos no llegan a comprender bien hasta donde pueden serle útiles, ya que este concepto no solo se usan en esta materia sino también en muchas otras como pueden ser física, química, tecnología, etc. Por ejemplo en química se usan para el ajuste de reacciones químicas.

Este tema es necesario que los alumnos lo comprendan y lo interioricen bien desde el principio porque aunque es un concepto un poco abstracto y raro para ellos al principio, al final es de gran utilidad a lo largo de toda su carrera educativa y en su vida cotidiana, ya que podrán resolver problemas de su vida que sin estos recursos no serían capaces de resolver o al menos no con tanta facilidad.

7.3. Contextualización del centro y del aula

En mi caso me voy a centrar en el centro Escuelas Profesionales de la Sagrada Familia (EEPP SAFA) de Úbeda en la provincia de Jaén, ya que voy a realizar mis prácticas en este centro.

SAFA es una red de centros que están repartidos por toda Andalucía y que tienen un gran número de alumnos, cerca de los 20.000 alumnos, y atienden también a la juventud más necesitada, atendiendo a 875 alumnos con necesidades educativas especiales.

El centro es concertado y se encuentra en la Avenida Cristo Rey nº 17 de Úbeda (Jaén), una de las avenidas principales de la ciudad, siendo uno de los centros más grandes de la localidad ya que tiene todas las etapas educativas como son:

- Infantil.
- Primaria.
- ESO.
- Bachillerato.
- Formación profesional básica.
- Programa de mejora del aprendizaje y el rendimiento.
- Ciclos formativos de grado medio.
- Ciclos formativos de grado superior.
- Escuela universitaria de magisterio.

Al tener un gran número de alumnos para que no se mezclen entre ellos se dedica un edificio para los alumnos de ESO y otro edificio para los alumnos de la enseñanza post-obligatoria centrando en cada pasillo los alumnos del mismo nivel.

Este centro de SAFA cuentan con muchísimas instalaciones y servicios como son:

- Residencia escolar
- Comedor escolar

- Pabellón deportivo cubierto
- Biblioteca
- Aula matinal
- Propuesta familia-escuela
- Actividades extraescolares
- Voluntariado Arrupe
- Asociación de padres y madres
- Grupo Scouts
- Red solidaria de jóvenes asociación
- Radio escolar (107.7 FM)
- Centro de lenguas modernas
- Auxiliar de conversación.

El centro es de gran reputación ya que desde el 2002 cumplen con las normas ISO 9001 y 14001 certificado por AENOR avalando la Calidad y el Comportamiento Medioambiental que lleva a cabo el centro.

Con respecto a las aulas son aulas de lo más habituales, con sus dos pizarras una de tiza y otra digital con su cañón correspondiente, cada alumno tiene su mesa, estando las mesas distribuidas en grupos de dos o tres.

7.4. Objetivos

7.4.1. Objetivos generales de la etapa de ESO

Según el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los objetivos de la educación secundaria obligatoria son los siguientes:

1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores

comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

5. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

7. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

8. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

9. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

10. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

11. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la

educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

12. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

7.4.2. Objetivos de Matemáticas orientadas de las enseñanzas académicas

Según la Orden de 14 de julio de 2016, la enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

7.4.3. Objetivos unidad sistemas de ecuaciones

De acuerdo con los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje desarrollados en el RD 1105/2014 y el Decreto 144/2016, proponemos los objetivos de la unidad de sistemas de ecuaciones los siguientes:

1. Realiza una lectura comprensiva de los problemas, diferenciando entre datos necesarios e innecesarios, y analizando sus relaciones entre ellos, con el contexto del problema, con el planteamiento y con la solución.

2. Analiza situaciones, en contextos matemáticos, identifica patrones y leyes matemáticas, valora su utilidad y se apoya en ellos para resolver problemas y ejercicios.

3. Utiliza el lenguaje algebraico, resuelve ejercicios, aplicándolo, y expone los resultados de forma correcta y simplificada.

4. Analiza problemas resueltos y procesos desarrollados, valora las ideas clave, reflexiona sobre ellos y los utiliza en situaciones similares como pautas o guías del aprendizaje.

5. Interpreta, plantea y resuelve problemas relacionados con sus intereses y con la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

6. Valorar la importancia en la vida cotidiana de los sistemas de ecuaciones.

7.5. Competencias clave

Según el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, las competencias del currículo son las siguientes:

1. Comunicación lingüística (CCL).

2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).

3. Competencia digital (CD).

4. Aprender a aprender (CAA).

5. Competencias sociales y cívicas (CSC).

6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).

7. Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Según la Orden de 14 de julio de 2016, las competencias clave relacioneadas con la unidad de sistemas de ecuaciones que entre dentro del bloque de álgebra son las siguientes:

1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida. CMCT, CAA.

2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos. CMCT.

3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola. CMCT.

4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos. CCL, CMCT, CD, CAA.

7.6. Contenidos

Los contenidos son los conceptos que se les enseña a los alumnos para llegar a alcanzar los objetivos. Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014 la definición de contenidos es: conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.

Estos contenidos vienen dados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, y de la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

En esta unidad didáctica tenemos que tener en cuenta los contenidos del bloque 1 (Procesos,métodos y actitudes en matemáticas) y del bloque 2 (Números y álgebra).

Los contenidos necesarios del bloque 1 para la realización de la unidad didáctica son:

1.1 Planificación del proceso de resolución de problemas.

1.2 Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

1.3 Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

1.4 Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

1.5 Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

1.6 Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

1.7 Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. Y para facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

Los contenidos necesarios del bloque 2 para la realización de la unidad didáctica son:

2.1 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).

2.2 Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.

2.3 Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

7.7. Metodología

La metodología didáctica según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014 es el conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.

Tenemos diferentes tipos de características y principios metodológicos (Luque-Cañada, 2020):

- **Metodología activa:** Integrar a los alumnos en la dinámica general del aula y en la adquisición y configuración de los aprendizajes, haciendo que reflexionen de manera crítica sobre su propio aprendizaje, sus logros, dificultades y método de trabajo. El alumno debe participar en su propio proceso de aprendizaje e ir aumentando su autonomía.

- **Metodología motivadora:** Motivar a los alumnos a partir de sus intereses, necesidades y expectativas. Un alumno motivado aprende más fácilmente, lo que le reporta una gran autoestima. Por este motivo se valorarán los esfuerzos de los alumnos en el día a día del aula.

- **Metodología integradora:** El alumno debe sentirse parte del grupo, con capacidad de ser consciente del punto de vista de sus compañeros. Por ello es importante que se dé una interacción del alumno con el aula, fomentando no sólo el aprendizaje vertical, sino también el horizontal.
- **Aprendizajes significativos:** Introducir las UD con una actividad basada en un problema de la vida real, sacado del entorno del alumno si es posible, para facilitar la construcción de aprendizajes significativos. Proponer actividades relacionadas con otras materias y con los temas transversales para que comprueben la utilidad de lo aprendido.
- **Diversidad del alumnado:** Establecer actividades de aprendizaje diferenciadas y grupos de trabajo flexibles. La heterogeneidad de los alumnos, nos lleva a atender tanto a la diversidad de situaciones de acceso como a las realidades y características individuales.
- **Metodología realista:** En el sentido que los contenidos estén, por un lado, totalmente estructurados y adecuados a la clase, para conseguir que los alumnos aprendan gradualmente, como que sirvan de instrumento de análisis crítico de la realidad, es decir, contenidos contextualizados.
- **Fomentar la interdisciplinaridad:** Es fundamental que el alumno relacione los contenidos de las diversas materias, y no las estudie aisladamente.
- **Alejada de enfoques uniformes y homogéneos:** Qué no vaya dirigida al alumno ”tipo”, sino que se adecue a distintos tipos de alumnos y por tanto a distintos tipos de razonamiento y ejecución.

No hay una metodología mejor que otra en todos los aspectos, por ello es importante ir intercalándolas según el momento, ya que depende del concepto o del alumnado la metodología más efectiva para que este comprenda con claridad lo que queremos transmitirle.

7.8. Actividades y recursos

Los requisitos que deben cumplir las actividades de enseñanza-aprendizaje son los siguientes(Luque-Cañada, 2020):

- **Claridad:** Los alumnos deben de saber que se les pide en cada actividad.

- **Papel activo del alumno:** Deben posibilitar que cada alumno regule el ritmo de ejecución y aprendizaje propio. El alumno es el protagonista.

- **Adaptaciones individualizadas:** Las actividades deben ser suficientes, equilibradas e idóneas, atendiendo a las necesidades individuales de los alumnos.

- **Disfrutar aprendiendo:** Deben tener un carácter lúdico y motivante.

- **Consonancia intereses del alumno:** Deben proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los alumnos, con el fin de captar su interés y que resulten motivadoras. Partir del nivel de desarrollo del alumnado y de sus aprendizajes previos.

- **Graduadas:** Deben permitir el desarrollo de forma graduada de los distintos contenidos. Para atender a la diversidad las actividades deben presentar grados de dificultad.

- **Distintas agrupaciones:** Deben promover la familiarización con el entorno de la sesión y abarcar todas las posibles formas de agrupamiento de los alumnos.

- **Autonomía personal:** Deben presentar una coherencia interna con el fin que el alumno sea capaz de guiar su aprendizaje y seguir sus razonamientos. Posibilitar que los alumnos realicen aprendizajes significativos por sí solos.

Las actividades se clasifican según el fin que queramos conseguir con su realización. Una posible clasificación es la siguiente(Luque-Cañada, 2020):

- **Actividades de diagnóstico (DIAG):** Permiten realizar un cómputo del nivel de los alumnos.

- **Actividades de introducción (INT):** Permiten adaptarse al posterior ritmo de trabajo.

- **Actividades de motivación (MOT):** Buscan la implicación y “motivación´´ del alumno.

- **Actividades de aprendizaje (AP):** Adquirir destrezas procedimentales y conceptuales.

- **Actividades de desarrollo (DES):** Permiten desarrollar y fijar los contenidos propuestos.

- **Actividades de consolidación (CON):** Buscan reforzar los aprendizajes.

- **Actividades creativas (CRE):** Posibilitan a partir de una idea desarrollar la creatividad.
- **Actividades de conclusión (CONC):** Permiten ser conscientes de los objetivos conseguidos.
- **Actividades de síntesis (SIN):** Diferencian los objetivos más importantes a conseguir.
- **Actividades resumen (RESU):** Permiten al alumno observar los procesos obtenidos.
- **Actividades de evaluación (EV):** Determinan el grado de consecución de los objetivos.
- **Actividades de recuperación (RECU) y de ampliación (AMP):** Permiten individualizar la enseñanza.

Las actividades de esta unidad didáctica se realizarán individuales, en parejas o grupos según sea la actividad y el objetivo que tengamos para realizarla, en parejas o grupo fomentamos el trabajo cooperativo y conseguimos que unos alumnos aprendan de otros.

Los recursos didácticos que vamos a usar en esta unidad didáctica son los usuales:

- **Recursos materiales:** Lápiz y papel.
- **Recursos impresos:** Libros de texto y material fotocopiado.
- **Recursos audiovisuales:** Proyector y pantalla digital.
- **Recursos tecnológicos:** Calculadora, tablets, ordenadores y móviles.
- **Recursos informáticos:** Geogebra.
- **Recursos humanos:** Profesor de matemáticas, alumnado, profesores de otras materias, tutor del curso y padres.
- **Recursos ambientales:** Aula habitual y aula TIC.

A continuación se desarrollarán todas las actividades de la unidad didáctica ordinarias que se realizarán a lo largo de las 12 sesiones.

Actividad 1.1 ¿Dónde crees que es fundamental en la vida cotidiana el uso de los sistemas de ecuaciones? ¿Crees que nos hacen la vida más fácil o si no existieran la vida seguiría igual?

Actividad 2.1 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

1. $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5, \\ 7x + 5y = 13. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0, \\ 3x - y = 3. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 3, \\ 3x + 7y = 17. \end{array}\right\}$

Actividad 2.2 Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

1. $\left.\begin{array}{r} x + y = 5, \\ 2x - y = -2. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 8x + 3y = 5, \\ -2x + 2y = 7. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = -7, \\ 3x + 2y = -7. \end{array}\right\}$

Actividad 2.3 Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

1. $\left.\begin{array}{r} -7x + 3y = 33, \\ 7x + 5y = -1. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 3, \\ 2x + y = 0. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} -2x + 3y = 1, \\ 4x + y = -23. \end{array}\right\}$

Actividad 2.4 Resuelve los siguientes sistemas por el método más conveniente:

1. $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5, \\ 7x + 2y = 11. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0, \\ 3x - y = 3. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 3, \\ 2x + 3y = 8. \end{array}\right\}$

Actividad 3.1 Una fábrica de aceite ha mezclado dos tipos de aceite diferentes, el primero de mayor calidad a 3 € el litro y la segunda de menor calidad a 2,20 € el litro. Obteniendo un total de 16 litros de calidad intermedia a 2,50 € el litro. ¿Qué cantidad de aceite se ha usado de cada tipo?

Actividad 3.2 Juan tiene un total de 36 billetes de 5 € y 10 €, con un valor total de 240€. ¿Cuántos billetes tiene Juan de 10€?¿Y de 5€?

Actividad 3.3 Tenemos un examen tipo test de 10 preguntas, en el que los aciertos suman 1 punto y los fallos restan 0,5 puntos. Si has sacado un 5,5 en el examen sin dejar ninguna respuesta en blanco, ¿cuántas preguntas correctas has tenido?¿y cuántos fallos?

Actividad 4.1 Clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones según su número de soluciones:

1. $\left.\begin{array}{r} x+y=2, \\ x-y=0. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x+y=5, \\ x-2y=5. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 3x-4y=3, \\ x+y=2. \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} x+y=2, \\ 2x+2y=4. \end{array}\right\}$

Actividad 4.2 Clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones según su número de soluciones:

1. $\left.\begin{array}{r} x+y=5, \\ x-y=-1. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x+y=7, \\ x-2y=-5. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 4x-3y=-1, \\ 2x+y=3. \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} x+y=2, \\ 2x+2y=4. \end{array}\right\}$

Actividad 4.3 Encuentra al menos un sistema equivalente para cada uno de los sistemas de la actividad anterior.

Actividad 6.1 Representar gráficamente los siguientes sistemas con ayuda de Geogebra.

1. $\left.\begin{array}{c} 4x+3y=13, \\ x+2y=7. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{c} 3x-4y=3, \\ 6x+8y=6. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{c} x+y=2, \\ x-2y=-1. \end{array}\right\}$

Actividad 6.2 Representar gráficamente los siguientes sistemas con ayuda de Geogebra.

1. $\left.\begin{array}{c} x+y=5, \\ x-y=-1. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{c} 2x+y=7, \\ x-2y=-5. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{c} 4x-3y=-1, \\ 2x+y=3. \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{c} x+y=2, \\ 2x+2y=4. \end{array}\right\}$

Actividad 7.1 Representar gráficamente los siguientes sistemas con ayuda de Geogebra.

1. $\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=5, \\ x-y=1. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=41, \\ x^2-y^2=9. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{c} x=2y-3, \\ x=2y^2-8y+9. \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{c} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1. \end{array}\right\}$

Actividad 12.1 (Ampliación) Resuelve los siguientes acertijos matemáticos.

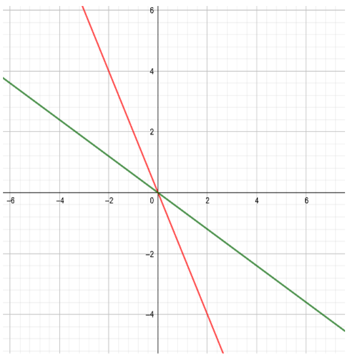
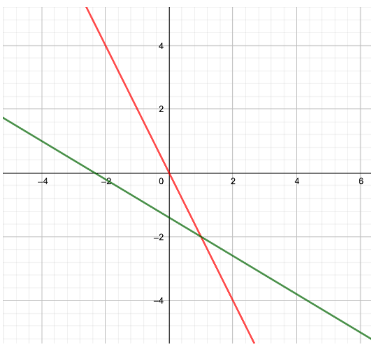
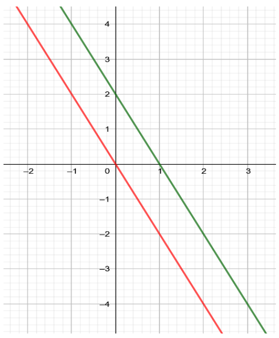
1. Tienes nueve sacos de monedas iguales, de las cuales uno está lleno de monedas falsas que pesan un poco menos que las demás. Con la ayuda de un peso de balanza (solo puedes pesar dos cosas a la vez y te dice si su peso es igual o un lado pesa más que otro). averiguar cuál es el saco de las monedas falsas haciendo sólo dos pesadas.

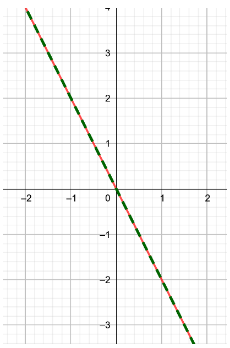
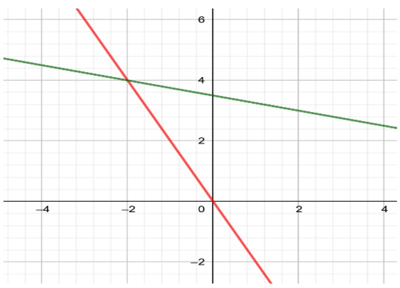
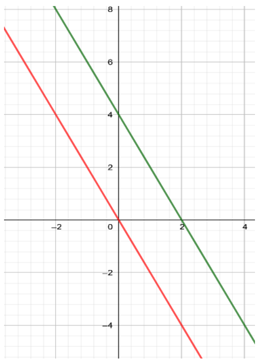
2. Un granjero que iba acompañado de un lobo, una oveja y una lechuga para volver a su casa tenía que cruzar un río. El granjero dispone de una barca para cruzar el río pero solo pueden ir dos en la barca. Si el lobo se queda solo con la oveja se la come y si la oveja se queda sola con la lechuga se la come. ¿Cómo puede cruzar el granjero y todas sus acompañantes a la otra orilla sin que nadie sufra daños? (Pista: Se pueden dar tantos viajes de ida y vuelta como se quiera).

Actividad 12.2 Buscar algún acertijo matemático original y resolverlo.

Veamos por último las actividades destinadas a la atención a la diversidad, para ello tendremos actividades de refuerzo y actividades de ampliación para cubrir todas las necesidades de nuestros alumnos.

Actividad 13.1 Analizar las siguientes representaciones gráficas y sacar toda la información necesaria para obtener el sistema que representa y su solución.

La actividad anteriormente presentada es de trabajo cooperativo de tipo 1,2,4; ya que en primer lugar trabajarán individualmente, luego en parejas y por último en grupos de cuatro.

Actividades de refuerzo

En este caso las actividades van a ser de un nivel un poco más bajo pero cumpliendo todos los objetivos deseados para que nadie se quede atrás en el aprendizaje.

Actividad 1 Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:

1. $x + y = 3$
2. $x - y = 0$
3. $2x + y = 2$

Actividad 2 Resolver los siguientes sistemas por todos los métodos conocidos (sustitución, igualación y reducción) y representar gráficamente.

1. $\left.\begin{array}{r} x + y = 5, \\ x - y = 3. \end{array}\right\}$
2. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0, \\ x - y = 3. \end{array}\right\}$
3. $\left.\begin{array}{r} x + y = 4, \\ -x + y = 0. \end{array}\right\}$

Actividad 3 Ver si los siguientes sistemas son equivalentes.

1. $\left.\begin{array}{r} x + y = 5, \\ x - y = 3. \end{array}\right\}$
2. $\left.\begin{array}{l} x = 4, \\ y = 1. \end{array}\right\}$
3. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 9, \\ x + 2y = 6. \end{array}\right\}$

Actividades de ampliación

Para los alumnos más aventajados tendremos una serie de actividades de un nivel un poco más alto para que así estos alumnos estén motivados y sigan aprendiendo a su ritmo y no se vean frenados por el nivel de la clase.

Actividad 1 Resolver los siguientes sistemas por todos los métodos conocidos (sustitución, igualación y reducción), representar gráficamente y clasificar según su número de soluciones.

1. $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5, \\ x - 3y &= 3. \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}y &= 0, \\ 7x - \tfrac{1}{5}y &= 3. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 4, \\ -3x + 2y &= 0. \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{2}{5}y &= 0, \\ \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{5}y &= 3. \end{aligned}\right\}$

Actividad 2 Ver si los siguientes sistemas son equivalentes.

1. $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 10, \\ x - y &= 3. \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2, \\ 2x + y &= 9. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + y &= 3, \\ x + \tfrac{1}{2}y &= \tfrac{9}{2}. \end{aligned}\right\}$

Actividad 3 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

1. $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8, \\ x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 5, \\ \sqrt{x} + y &= 3. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x^3 + 3y &= 4, \\ -2x^3 + y &= -1. \end{aligned}\right\}$

Actividad 4 Completar las casillas vacías para convertir el siguiente cuadrado en un cuadrado mágico.

3		
		1
	5	

Un cuadrado mágico es en el que filas, columnas y diagonales suman lo mismo.

Actividad 5 Un joyero ha mezclado 10 kg de oro del 98 %, con 6 kg de 90 % para formar 16 kg de 95 %. ¿Cuántos kg ha de añadir a esta mezcla de cada tipo para formar 32 kg de oro de 93 % de pureza?

Actividad 6 Ajustar las siguientes reacciones químicas usando sistemas de ecuaciones.

- $Br_2 + H_2 \to HBr$
- $HCl + Ca(OH)_2 \to CaCl_2 + H_2O$
- $HNO_3 + Fe \to Fe(NO_3)_2 + H_2$

Por último vamos a ver las diferentes pruebas de evaluación que realizaremos a lo largo de toda la unidad. En primer lugar veamos la prueba de evaluación inicial que realizaremos en la primera sesión, para así poder ver en el nivel de conocimiento que se encuentran los alumnos.

Prueba de evaluación inicial

Ejercicio 1 ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales?

Ejercicio 2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. $\left.\begin{array}{c} x+y=2, \\ x-y=0. \end{array}\right\}$
2. $\left.\begin{array}{c} 2x+y=3, \\ x-2y=-1. \end{array}\right\}$
3. $\left.\begin{array}{c} 3x-4y=3, \\ -20x+14y=-20. \end{array}\right\}$
4. $\left.\begin{array}{c} x+y=2, \\ 2x+2y=4. \end{array}\right\}$

Ejercicio 3 ¿Cuántos métodos conoces para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales? Enumerarlos y explicar en que consisten.

Ejercicio 4 Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x+2y=1, \\ x-y=-3. \end{array}\right\}$$

A continuación vamos a ver el examen propuesto para la evaluación de los conocimientos de la unidad de sistemas de ecuaciones, con esta prueba podremos comprobar si los alumnos han alcanzado los objetivos. En el caso de que la gran mayoría no alcance un objetivo será nuestra responsabilidad ya que nuestro deber es prepararles para que ellos puedan alcanzar todos los objetivos propuestos para esta unidad.

Examen Unidad 7: Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 1 (1.5 puntos) Clasificar los sistemas de ecuaciones según su número de soluciones, poner un ejemplo para cada tipo.

Ejercicio 2 (3 puntos) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por los métodos usuales, indicando en cada caso el método utilizado.

1. $$\left.\begin{array}{r}2x+y=4,\\-4x+3y=2.\end{array}\right\}$$

2. $$\left.\begin{array}{r}5x+y=4,\\x-y=2.\end{array}\right\}$$

3. $$\left.\begin{array}{r}-2x+3y=1,\\2x-5y=-3.\end{array}\right\}$$

Ejercicio 3 (1.5 puntos) Hallar dos números naturales que su suma sea 45 y su cociente sea $3/2$.

Ejercicio 4 (1.5 puntos) Si vas de compras con tus amigos y te compras un pantalón y dos camisas pagas un total de 48 €, mientras que tu amigo Juan comprando dos pantalones y una camisa paga un total de 51 €. Sabiendo que todos los pantalones cuestan lo mismo y las camisas tienen todas el mismo precio, ¿cuánto vale un pantalón?¿y una camisa?

Ejercicio 5 (1.5 puntos) ¿Son los siguientes sistemas equivalentes?, en caso de no serlo dar un sistema equivalente a cada apartado.

1. $$\left.\begin{array}{r}x+2y=4,\\2x-y=3.\end{array}\right\}$$

2. $$\left.\begin{array}{r}2x+y=3,\\2x-2y=0.\end{array}\right\}$$

3. $$\left.\begin{array}{r}-x+2y=5,\\x-y=-2.\end{array}\right\}$$

Ejercicio 6 (1 puntos) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\left.\begin{array}{r} x^2+2y^2=3, \\ x+y=0. \end{array}\right\}$$

A continuación tenemos el examen propuesto para la recuperación de la unidad 7 en el caso de no superar como mínimo con un 5 el examen anteriormente presentado, este examen también podrán hacerlo el resto de alumnos para subir nota, y es altamente recomendable para aquellos alumnos que hayan obtenido una calificación entre el 5 y el 6.5 ya que les servirá de refuerzo. Esta prueba está pensada para los alumnos que no han superado los objetivos en la prueba anterior puedan superarlos en esta.

Examen de recuperación Unidad 7: Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 1 (1.5 puntos) Clasificar los sistemas de ecuaciones según su número de soluciones, poner un ejemplo para cada tipo.

Ejercicio 2 (3 puntos) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por los métodos usuales, indicando en cada caso el método utilizado.

1. $\left.\begin{array}{r} x+2y=4, \\ 3x-4y=2. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 5x+y=4, \\ 2x-2y=4. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5, \\ 3x-6y=-2. \end{array}\right\}$

Ejercicio 3 (1.5 puntos) Hallar dos números naturales que su suma sea 44 y su cociente sea $7/4$.

Ejercicio 4 (1.5 puntos) Si vas de compras con tus amigos y te compras una sudadera y tres bañadores pagas un total de 65 €, mientras que tu amigo Juan comprando dos sudaderas y dos bañadores paga un total de 70 €. Sabiendo que todas las sudaderas cuestan lo mismo y los bañadores tienen todos el mismo precio, ¿cuánto vale una sudadera?¿y un bañador?

Ejercicio 5 (1.5 puntos) ¿Son los siguientes sistemas equivalentes?, en caso de no serlo dar un sistema equivalente a cada apartado.

1. $\left.\begin{array}{r} x+2y=4, \\ 2x-y=3. \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x+y=5, \\ 2x-2y=2. \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} -x+2y=5, \\ x-y=-2. \end{array}\right\}$

Ejercicio 6 (1 puntos) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=5, \\ x+y=3. \end{array}\right\}$$

7.9. Atención a la diversidad

Según el Decreto 111/2016 en el capítulo VI se centran en la atención a la diversidad, centrándose el artículo 20 en las medidas y programas para la atención a la diversidad:

- Se establece para la etapa de la ESO el conjunto de actuaciones educativas de atención a la diversidad dirigidas a dar respuesta a las diferentes capacidades, ritmos y estilos de aprendizaje, motivaciones, intereses, situaciones socioeconómicas y culturales, lingüísticas y de salud del alumnado, con la finalidad de facilitar la adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que le impida alcanzar la titulación de Educación Secundaria Obligatoria.
- En la ESO se organizará, con carácter general, desde criterios de flexibilidad organizativa y atención inclusiva, con el objeto de favorecer las expectativas positivas del alumnado sobre sí mismo y obtener el logro de los objetivos y las competencias clave de la etapa.

La respuesta educativa a la atención a la diversidad desde los programas de refuerzo para satisfacer las necesidades educativas de forma puntual en algún alumno o grupo en su proceso de aprendizaje según el Decreto 111/2016, es la siguiente:

- Programas de refuerzo de materias generales del bloque de asignaturas troncales para primer y cuarto curso.
- Programas de refuerzo para la recuperación de los aprendizajes no adquiridos para el alumnado que promocione sin haber superado todas las asignaturas.
- Planes específicos personalizados orientados a la superación de las dificultades detectadas en el curso anterior.

- Programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento.

Los Programas de Adaptaciones Curriculares buscan el máximo desarrolla de las competencias clave y ajustarán la metodología y adaptarán los procedimientos, los tiempos y los apoyos para una correcta evaluación del alumnado.

Dichas adaptaciones curriculares se basan en los principios de normalización, inclusión social y escolar, flexibilización de la enseñanza y personalización de la enseñanza, estas adaptaciones están dirigidas a los siguientes alumnos:

- Alumnos que se incorporan tardíamente al sistema educativo.
- Alumnos con dificultades graves de aprendizaje.
- Alumnos con necesidades de compensación educativa.
- Alumnos con altas capacidades intelectuales.
- Alumnos con necesidades educativas especiales.

También tendríamos que tener en cuenta a los alumnos TDA y TDAH para estas adaptaciones aunque no siempre son necesarias.

7.9.1. Adaptación curricular en el aula

En este caso como no tenemos un aula en concreto para la que va dirigida la unidad didáctica de 3º ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, haremos dos tipos de adaptaciones curriculares una para un alumno con dificultades graves en el aprendizaje y otra para una alumna con altas capacidades intelectuales.

En el caso del alumno con dificultades graves en el aprendizaje el profesor deberá de estar más atento a él y resolver todas sus dudas e intentar ayudarle en todo lo posible para que puede avanzar al mismo ritmo o lo más cerca posible del resto de compañeros. Se les mandarán actividades de refuerzo para tener un seguimiento mayor de su evolución, así como se intentará tenerlo motivado en todo momento para que no se rinda y lo siga intentando y así poder eliminar cualquier bloqueo y no tener miedo a equivocarse ni ha participar en clase. En clase se le sentará con el resto de alumnos para que les puedan ayudar, ya que ellos deben de tener un nivel educativo un poco más alto. En el caso de este alumno nos centraremos en que aprenda a entender en como se hacen los procedimientos y no se base sólo en memorizar los pasos a seguir sin comprender que está haciendo en cada paso.

En el caso de la alumna con altas capacidades intelectuales le haremos un programa de enriquecimiento curricular para que la alumna no se aburra en clase y pueda seguir avanzando a su ritmo. En este programa la alumna permanecerá en el aula usual pero realizará actividades de un nivel de dificultad un poco superior al nivel de sus compañeros, pudiendo avanzar temario de cursos superiores si fuese necesario para el enriquecimiento académico de la alumna. También puede ser útil aplicar la estrategia de trabajo cooperativo o tutoría entre iguales, donde ella adquiera el papel de mentora y ayude a sus compañeros a superar sus dificultades.

7.10. Temporalización

Las sesiones que vamos a tratar son las referentes al curso 2019/2020. La temporalización que vamos a realizar es de todo el curso de 3º ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, basándonos en el temario de la editorial ANAYA.

Sabiendo que se dedican 4 horas semanales a esta asignatura en Andalucía y teniendo un total de 140 horas lectivas a lo largo de todo el curso, la temporalización sería la siguiente:

Unidad	Título	Nº sesiones
1	Fracciones y decimales	8
2	Potencias y raíces	8
3	Problemas aritméticos	8
4	Progresiones	10
5	El lenguaje algebraico	11
6	Ecuaciones	10
7	**Sistemas de ecuaciones**	**13**
8	Funciones y gráficas	10
9	Funciones lineales	8
10	Problemas métricos	12
11	Cuerpos geométricos	8
12	Transformaciones geométricas	10
13	Tablas y gráficos estadísticos	8
14	Parámetros estadísticos	8
15	Azar y probabilidad	8

Tabla 7.1: Temporalización del curso (elaboración propia).

7.10.1. Desarrollo de la unidad didáctica

En esta sección vamos a desarrollar cada una de las sesiones de la unidad didáctica detalladamente.

Sesión 1: Introducción

Desarrollo: La clase empezará viendo el contexto histórico de como surgieron los sistemas de ecuaciones (15 min) y proponiendo a los alumnos la actividad 1.1 que consiste en pensar donde se pueden usar los sistemas de ecuaciones en la vida real y debate en clase sobre esto (15 min).

A continuación haremos una prueba de evaluación inicial para ver el nivel de los alumnos sobre este tema (30 min).

Contenidos: 1.4, 1.6

Evaluación: Inicial.

Objetivos: 6.

Tipos de actividades: INT, MOV y DIAG.

Organización: Individual y grupal.

Recursos: Humanos.

Metodología: En la primera parte de la clase tendremos primero una metodología expositiva y motivadora introduciendo el tema y luego activa e interactiva en la realización de la actividad 1.2.

Tarea para casa: Buscar los métodos más comunes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sesión 2: Métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineal

Desarrollo: La clase empezará preguntando a los alumnos cuales son los métodos más comunes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y en que consiste cada uno (10 min).

Continuaremos viendo los diferentes métodos de resolución de los sistemas (método de sustitución, igualación y reducción) con ejemplos de cada uno de estos métodos (40 min).

Los alumnos comenzarán realizando parte de las actividades 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 que consisten en resolver diferentes sistemas mediante los métodos explicados anteriormente (10 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4

Objetivos: 2, 3, 4, 6.

Tipos de actividades: AP, MOT, DES.

Organización: Individual y grupal.

Recursos: Libro de texto y pizarra.

Metodología: En la primera parte de la clase tendremos primero una metodología activa e interactiva al resolver las dudas de la tarea del día anterior. Cuando estemos explicando la teoría será una metodología expositiva. Mientras los alumnos trabajan individualmente será autónoma.

Tarea para casa: Finalizar las actividades 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 propuestas en clase.

Sesión 3: Métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineal

Desarrollo: La clase empezará resolviendo en la pizarra la tarea del día anterior. (40 min).

Explicaremos en que consiste el trabajo grupal que tendrán que exponer en la sesión 11 (5 min).

Los alumnos realizaran por parejas las actividades 3.1, 3.2 y 3.3 que son problemas de los que tienen que sacar un sistema y resolverlo (15 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tipos de actividades: AP, MOT, DES.

Organización: Parejas y grupal.

Recursos: Libro de texto y pizarra.

Metodología: En la primera parte de la clase tendremos primero una metodología activa e interactiva al resolver la tarea del día anterior en la pizarra. Mientras los alumnos trabajan por parejas será colaborativa.

Tarea para casa: Finalizar las actividades 3.1, 3.2 y 3.3 propuestas en clase.

Sesión 4: Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal

Desarrollo: En primer lugar corregiremos las actividades del día anterior (15 min).

Continuaremos viendo la teoría de cuántas soluciones puede tener un sistema, como se reconoce gráficamente y como se llaman los sistemas dependiendo del número de soluciones que tengan e introduciremos el concepto de sistemas equivalentes (20 min).

Los alumnos realizaran la actividad 4.1 que consiste en clasificar los sistemas según el número de soluciones que tengas y representarlos gráficamente, en la que trabajaran primero individualmente (5 min) y después en parejas (10 min).

Para finalizar los alumnos corregirán la actividad 4.1 en la pizarra (10 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 2.1

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3

Objetivos: 1, 2, 3, 6.

Tipos de actividades: AP, MOT.

Organización: Individual, parejas y grupal.

Recursos: Libro de texto y pizarra.

Metodología: En la primera parte de la clase tendremos primero una metodología activa e interactiva al igual que al final de la clase. Cuando estemos explicando la teoría será una metodología expositiva. Mientras los alumnos trabajan individualmente o en pareja la metodología es colaborativa.

Tarea para casa: Realizar la actividad 4.2 que será similar a la actividad 4.1 y la 4.3 que será sobre sistemas equivalentes.

Sesión 5: Método gráfico con Geogebra

Desarrollo: La clase empezará resolviendo en la pizarra la tarea del día anterior. (25 min).

Explicaremos como se pueden resolver sistemas con la ayuda de Geogebra, explicando como se representan las rectas que componen los sistemas y como hallar sus soluciones, para ello pondremos diferentes ejemplos para que se vean los diferentes tipos de sistemas y soluciones (35 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 2.1, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 2.4

Objetivos: 2, 3, 4, 5, 6.

Tipos de actividades: AP, MOT, DES, CRE.

Organización: Grupal.

Recursos: Pizarra digital (Geogebra) y pizarra.

Metodología: En la primera parte de la clase tendremos primero una metodología activa e interactiva al resolver la tarea del día anterior en la pizarra. En la segunda parte será explicativa y motivadora.

Tarea para casa: Descargar Geogebra en su ordenador o móvil y ver un poco como funciona.

Sesión 6: Método gráfico con Geogebra

Desarrollo: Nos desplazaremos al aula TIC para que todos los alumnos puedan tener un ordenador para realizar las actividades 6.1, 6,2 por parejas, que consisten en resolver sistemas que ya los habían resuelto anteriormente por los diferentes métodos u otros nuevos sistemas. (25 min).

A continuación haremos un debate de si creen que esta herramienta les puede ser útil para la resolución de sistemas (15 min).

Por último le dejaremos lo que queda de clase para que trabajen en la exposición de grupo de la sesión 11 (20 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 2.1, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 2.4

Objetivos: 2, 3, 5, 6.

Tipos de actividades: AP, MOT, DES, CRE.

Organización: Parejas y grupal.

Recursos: Ordenadores y Geogebra.

Metodología: En la primera parte mientras los alumnos trabajan en parejas la metodología es colaborativa. Después en el debate tenemos una metodología activa e interactiva, al igual que al final cuando trabajan en grupo.

Tarea para casa: No se les mandará tarea.

Sesión 7: Sistemas de ecuaciones no lineales

Desarrollo: Empezaremos viendo cuales son las ecuaciones lineales, para después poder introducir los sistemas de ecuaciones no lineales y enseñarles a resolverlos (30 min).

Los alumnos realizarán individualmente la actividad 7.1 sobre resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. (20 min).

Corregiremos en la pizarra la actividad 7.1 (10 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3. 2.4

Objetivos: 2, 3, 4, 5, 6.

Tipos de actividades: AP, MOT, DES.

Organización: Individual.

Recursos: Pizzarra y pizarra digital.

Metodología: En la primera parte de la clase tendremos una metodología explicativa y motivadora al explicar los sistemas de ecuaciones no lineales. Después cuando el alumno trabaja individualmente la metodología es autónoma. En la última parte será activa e interactiva mientras resolvemos la actividad en la pizarra.

Tarea para casa: Repasar todo el tema y sacar todas las dudas para poder resolverlas en la siguiente sesión.

Sesión 8: Repaso de la unidad

Desarrollo: Resolveremos las dudas de los alumnos y haciendo los ejercicios en los que tengan dudas (60 min). En el caso de no haber dudas, los alumnos se pondrán a trabajar en el trabajo grupal que tienen que exponer en la sesión 11.

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.3, 2.4

Objetivos: 2, 3, 5, 6.

Tipos de actividades: CRE, CONC, SIN, CON, RESU.

Organización: Individual y grupal.

Recursos: Ordenadores, pizarra digital y pizarra.

Metodología: Mientras resolvemos las dudas tenemos una metodología activa e interactiva. En el caso de no haber dudas tendremos una metodología colaborativa mientras trabajan en grupo.

Tarea para casa: No se les mandará tarea.

Sesión 9: Examen

Desarrollo: Dedicaremos toda la sesión a la realización del examen de la unidad (60 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.1, 2.3, 2.4

Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tipos de actividades: EV.

Organización: Individual.

Recursos: Humanos.

Metodología: La metodología será en todo momento autónoma ya que el alumno debe realizar el examen individualmente.

Tarea para casa: No se mandará tarea.

Sesión 10: Resolución del examen

Desarrollo: Resolveremos el examen en la pizarra y resolveremos todas las dudas respecto a este (40 min).

Haremos un debate sobre que les ha parecido el tema y si el examen está ajustado a lo explicado en clase y luego debatiremos sobre ello (20 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.8, 1.9, 1.10, 2.1, 2.3, 2.4

Objetivos: 4.

Tipos de actividades: CONC, SIN, CON.

Organización: Grupal.

Recursos: Pizarra.

Metodología: En la resolución del examen tendremos una metodología activa e interactiva ya que lo resolveremos entre todos y también posteriormente en el debate.

Tarea para casa: No se les mandará tarea.

Sesión 11: Exposición grupal

Desarrollo: Tendremos una sesión de exposiciones grupales de 4 o 5 personas por grupo, cada grupo tendrá que resolver un sistema por los tres métodos y hacer su representación gráfica (60 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 2.1, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 2.1, 2.3, 2.4

Objetivos: 2, 3, 4, 5, 6.

Tipos de actividades: CRE, SIN, RESU .

Organización: Grupal.

Recursos: Pizarra digital y pizarra.

Metodología: A lo largo de toda la sesión tendremos una metodología explicativa por parte del grupo que realiza su exposición y activa e interactiva por parte del resto de los alumnos.

Tarea para casa: No hay tarea.

Sesión 12: Examen de recuperación

Desarrollo: Los alumnos que no hayan superado el examen de la sesión 9 tendrán que realizar dicho examen para poder superar este tema. El resto de alumnos podrán presentarse a dicho examen para subir nota. Los alumnos que no quieran presentarse a este examen tendrán que realizar las actividades 12.1 y 12.2 que consisten en resolver acertijos matemáticos (60 min).

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.1, 2.3, 2.4

Objetivos: 1, 2, 3, 5.

Tipos de actividades: EV, RECU, AMP.

Organización: Individual.

Recursos: Humanos.

Metodología: Tendremos una metodología autónoma a lo largo de toda la sesión.

Tarea para casa: No se les mandará tarea.

Sesión 13: Trabajo cooperativo

Desarrollo: Los alumnos tendrán que realizar la actividad 13.1 que consiste en partiendo de la representación de un sistema hallar dicho sistema.

Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3

Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 2.1, 2.3, 2.4
Objetivos: 1, 2, 3, 5.
Tipos de actividades: CRE, MOV.
Organización: Individual, parejas y grupos.
Recursos: Humanos.
Metodología: La metodología será cooperativa para la realización de esta tarea.
Tarea para casa: No se les mandará tarea.

7.11. Evaluación

Según el artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato tenemos las siguientes definiciones de criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Los criterios de evaluación son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.

Los estándares de aprendizaje evaluables son especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.

En el mismo Real Decreto 1105/2014 encontramos los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de 3º ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Dentro del bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) tenemos los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables:

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 1.2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.

Tabla 7.2: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (I) (Real Decreto 1105/2014)

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 1.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 1.6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.

Tabla 7.3: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (II) (Real Decreto 1105/2014)

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	1.7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 1.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	1.9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	1.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

Tabla 7.4: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (III) (Real Decreto 1105/2014)

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	1.11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 1.11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 1.12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 1.12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 7.5: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 1 (IV) (Real Decreto 1105/2014)

Veamos ahora los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque 2 (Números y álgebra).

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
2.1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.	2.1.1. Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), indica el criterio utilizado para su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 2.1.2. Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período. 2.1.3. Halla la fracción generatriz correspondiente a un decimal exacto o periódico. 2.1.4. Expresa números muy grandes y muy pequeños en notación científica, y opera con ellos, con y sin calculadora, y los utiliza en problemas contextualizados. 2.1.5. Factoriza expresiones numéricas sencillas que contengan raíces, opera con ellas simplificando los resultados. 2.1.6. Distingue y emplea técnicas adecuadas para realizar aproximaciones por defecto y por exceso de un número en problemas contextualizados, justificando sus procedimientos. 2.1.7. Aplica adecuadamente técnicas de truncamiento y redondeo en problemas contextualizados, reconociendo los errores de aproximación en cada caso para determinar el procedimiento más adecuado. 2.1.8. Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos.

Tabla 7.6: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 2 (I)(Real Decreto 1105/2014)

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
	2.1.9. Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones. 2.1.10. Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.
2.3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.	2.3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana. 2.3.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado. 2.3.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.
2.4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	2.4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta criticamente el resultado obtenido.

Tabla 7.7: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje Bloque 2 (II)(Real Decreto 1105/2014)

Capítulo 8

Conclusiones

Tras la realización de ese TFM, con el que ponemos fin al máster, del cuál tengo una experiencia muy buena, ya que hemos estudiado todo lo necesario para poder llegar a ser buen docente.

A lo largo del máster he aprendido lo necesario que es saber buscar e interpretar las leyes que tiene que cumplir una unidad didáctica para que sea correcta y cumpla objetivos, competencias clave, criterios de evaluación, etc. La necesidad de que todo lo anterior descrito se cumpla es para que aunque cada unidad didáctica sea personal dependiendo del docente como del alumnado, todas tienen una base común.

También hay algo muy interesante que para ser buen docente no es suficiente con saber mucho de la materia a explicar, sino también es necesario saber comprender a los alumnos (aunque no siempre es fácil) y saber ponernos en su piel. A veces es necesario ser más que profesor y saber escuchar y apoyarles en sus problemas personales, ya que hay alumnos que tienen una situación complicada en casa por diversos temas (padres divorciados, dificultad económica, problemas de conducta, etc.) y es de gran ayuda que estemos con ellos y le apoyemos en todo lo que esté en nuestra mano.

Algo importante para llegar a ser un buen profesor de matemáticas es saber matemáticas de alto nivel, ya que esto te hace ver las cosas de forma diferente y a la hora de explicar las matemáticas te puede dar “trucos´´ para que el alumnado comprenda con mayor facilidad los contenidos necesarios para conseguir alcanzar los objetivos requeridos según su nivel.

He comprendido lo ventajoso que puede llegar a ser utilizar todos los recursos que tenemos en nuestras manos, como pueden ser las TIC, ya que ahora que la tecnología ha avanzado tanto y prácticamente todo el mundo tiene un móvil, este se puede usar para aprender y no sólo para el ocio.

También son importantes las diferentes pruebas de evaluación que son necesarias para mejorar la calidad de su enseñanza. En primer lugar es muy importante hacer una prueba inicial para saber el punto de aprendizaje del que partimos, y así poder adecuarnos a sus necesidades. La prueba de evaluación es necesaria para saber si el alumnado ha llegado a conseguir los objetivos propuestos. Por último la evaluación de recuperación es importante para dar una segunda oportunidad de conseguir estos objetivos. Para mi gusto la evaluación continua es la más acertada ya que no sólo nos centramos en la nota de un examen, sino también en el esfuerzo del alumno, ya que puede ser que por mucho que el alumno se esfuerce no consiga aprobar el examen, pero esto no significa que no haya trabajo simplemente que le cuesta más trabajo que a otros compañeros y necesita ayuda.

Las adaptaciones a la diversidad son de las cosas más importantes por no decir la más importante, ya que es lo que nos garantiza una educación que da a cada alumno exactamente lo que necesita para aprender, con esto garantizamos que todos los alumnos van avanzando pero cada uno a su ritmo.

Por último es importante que como futuros docentes apliquemos todo lo aprendido en el máster, para así poder llegar a ser muy buenos en nuestro trabajo y que los alumnos se sientan cómodos en clase y las matemáticas que son las gran odiadas pasen a ser más interesantes y los alumnos pongan más interés en aprenderlas.

Bibliografía

[1] Carrillo, M.; Esquembre, F. & Prendes, M.P. (2013). Una apuesta por las TIC para la enseñanza de los sistemas lineales. X Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria, pp. 1023-1035

[2] Colera, J.; Gaztelu, I.; Oliveira, M. & Colera, J. [Ed.] (2015), Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO. España: Editorial Anaya.

[3] De Diego, B.; Llerena, A. & Padilla, F. [Ed.] (2000), Temas de oposiciones a profesores de enseñanza secundaria: Matemáticas. Madrid, España: Editorial Deimos.

[4] De Lucas, M.; Rodríguez, M. & Rey, M. [Ed.] (2016), Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO. España: Editorial Oxford University Press.

[5] [Eliminación de parámetros en sistemas]. (s.f.) Recuperado de https://ekuatio.com/eliminacion-de-parametros-en-sistemas-de-ecuaciones-lineales-ejercicios-resueltos/

[6] España. Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de junio de 2016, nº 122, pp. 27-45.

[7] España. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de 100 aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de julio de 2016, nº 144, pp. 108-396.

[8] España. Orden EDC/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación

primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 de enero de 2015, nº 25, pp. 6986-7003.

[9] España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, nº 3, pp. 169-546.

[10] Fernández-Millán, E.; Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. Enseñanza de las ciencias, volumen 34, Núm. 1, pp. 53-71.

[11] Keith, W. [Ed.] (2003). Sistemas de ecuaciones lineales. Algebra lineal con aplicaciones (1-15). España: Editorial Mcgraw Hill

[12] López, B. (2018). Tema 16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss–Jordan [archivo PDF]. Recuperado de https://docplayer.es/74700348-Tema-16-discusion-y-resolucion-de-sistemas-de-ecuaciones-lineales-teorema-de-rouche-regla-de-cramer-metodo-de-gauss-jordan.html

[13] Luque Cañada, L. (2020). Aprendizaje y enseñanza en matemáticas (I y II). Universidad de Jaén.

[14] Martínez, F. ; Sáez, S. (2014, Marzo). Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato. Números, volumen 85, pp. 41-48.

[15] Merino, L; Santos, E [Ed.] (2006). Sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes. Álgebra lineal con métodos elementales (1-68) España: Editorial Paraninfo.

[16] [Método de Cramer]. (s.f.) Recuperado de http://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apuntes/DYCRE_1_T1_MaEm_U6L02.pdf

[17] Tema 16 Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss–Jordan [archivo PDF]. (s.f.) Recuperado de http://mural.uv.es/juanmur/OPOS/tema16.pdf

Anexo 1: Demostraciones

En este anexo veremos algunas demostraciones necesarias en la fundamentación epistemológica y que por espacio no hemos podido incluir en el capítulo correspondiente.

Proposición 1 (pg 9).

Si un sistema tiene más de una solución, entonces necesariamente tiene infinitas soluciones.

Demostración.

Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ dos soluciones distintas de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$ es también solución del sistema, ya que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\lambda\alpha_j + (1-\lambda)\beta_j] = \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i,$$

y esto prueba que el sistema admite infinitas soluciones. □

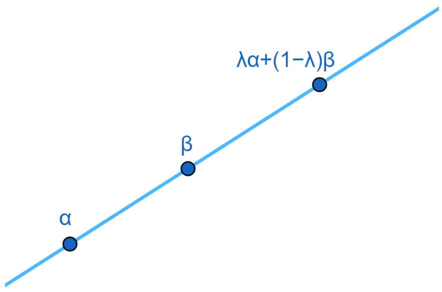


Figura 1: Representación gráfica (elaboración propia)

Proposición 2 (pg. 11)

Dado un sistema homogéneo $AX = 0$, se verifican las siguientes propiedades:

1. El sistema es compatible, ya que al menos admite la solución trivial $X = (0, 0, \cdots, 0)^t$.

2. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ una solución de un sistema, entonces, para todo $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$ se tiene que $(k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n)$ también es solución.

3. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ son dos soluciones distintas del sistema homogéneo, entonces $\alpha + \beta$ es también solución.

Demostración.

Sea un sistema homogéneo $AX = 0$. Por simplicidad para la demostración lo representaremos como $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

1. Es trivial, ya que si $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, veamos que α es solución.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}0 = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

2. Por hipótesis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es solución del sistema homogéneo, es decir, verifica $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$. Entonces para todo $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k\alpha_j) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = k0 = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

3. Por hipótesis tenemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son soluciones distintas del sistema homogéneo, es decir, se verifica $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, m$. Como $((\alpha_1 + \beta_1), (\alpha_2 + \beta_2), \ldots, (\alpha_n + \beta_n))$ es solución del sistema homogéneo.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0 + 0 = 0,$$

entonces $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ es, también, solución.

□

Proposición 3 (pg.12)

Un sistema cuadrado es de Cramer si y sólo si es sistema compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Demostración.

1. Sistema de Cramer $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

   Expresemos el sistema en forma matricial, es decir, $AX = B$. Por hipótesis tenemos que el sistema es de Cramer, es decir, según su definición tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y, además, $det(A) \neq 0$.

   Debido a que $det(A) \neq 0$ tenemos la existencia de A^{-1}, luego multiplicando por la izquierda ambos miembros del sistema por A^{-1} obtendremos:

   $$AX = B \; \rightarrow \; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \; \rightarrow \; IX = A^{-1}B \; \rightarrow \; X = A^{-1}B.$$

   Siendo X la única solución del sistema, el sistema sería compatible determinado.

2. Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Sistema es de Cramer.

   Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la única solución del sistema que expresándolo de forma vectorial sería $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, siendo a_j con $j = 1, 2, \cdots, n$ los vectores columna de la matriz A y siendo $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$. Se verifica entonces que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$.

   Supongamos que $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ es solución del sistema homogéneo asociado $AX = 0$, es decir, se verifica $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n = 0$.

   Entonces otra solución del sistema original $AX = B$ sería $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$, ya que:

   $$a_1(\alpha_1 + \beta_1)_+a_2(\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + a_n(\alpha_n + \beta_n) =$$
   $$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) + (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n) = b + 0 = b.$$

   Pero, como por hipótesis tenemos que la solución es única, estas dos soluciones tienen que ser iguales, es decir, $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1, \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n = \alpha_n$, y por tanto $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$. Con esto hemos demostrado que todas las columnas del sistema son linealmente independientes [1] y esto implica que $det(A) \neq 0$, luego el sistema es de Cramer.

$\square$

[1] Dos vectores α y β son linealmente dependientes si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando $\alpha = \lambda\beta$. En el caso en que esta igualdad no se verifique para ningún $\lambda \in \mathbb{R}$ los vectores son linealmente independientes.

Teorema 1 Regla de Cramer (pg. 12)

La única solución de un sistema de Cramer viene dada por:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\mid A \mid} \quad \text{con} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{donde} \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j)}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demostración.

Vamos a expresar el sistema en forma vectorial, es decir, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, siendo los a_j con $j = 1, 2, \ldots, n$, los vectores columna de la matriz A.

En la demostración vamos a usar las siguientes propiedades de determinantes:

1. La linealidad respecto de la j-ésima columna.
2. Un determinante con dos columnas iguales es nulo.

Veamos ahora como podemos expresar Δ_j.

$$\begin{aligned} \Delta_j &= det(a_1, a_2, ..., \overset{j)}{b}, ..., a_n) = det(a_1, a_2, ..., \overbrace{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n}^{j)}, ..., a_n) \\ &= x_1\, det(a_1, a_2, ..., \overset{j)}{a_1}, ..., a_n) + ... + x_j\, det(a_1, a_2, ..., \overset{j)}{a_j}, ..., a_n) + ... \\ &+ x_n\, det(a_1, a_2, ..., \overset{j)}{a_n}, ..., a_n) = x_j\, det(a_1, a_2, ..., \overset{j)}{a_j}, ..., a_n) = x_j \mid A \mid . \end{aligned}$$

Despejando obtenemos $x_j = \Delta_j / \mid A \mid$. □

Propiedad 6 (pg.15)

Para toda matriz cuadrada A de orden n, se verifica que el determinante de A es distinto de cero si y solo si el rango de A es n, es decir, $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n$.

Demostración.

- $det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = n.$

  Como se verifica que $det(A) \neq 0$ y la matriz A es cuadrada de orden n, entonces por la definición de rango tenemos que el menor de orden r con determinante no nulo es en este caso $r = n$, y no hay menores de A de orden mayor que n, por tanto concluimos que $rg(A) = n$.

- $rg(A) = n \Rightarrow det(A) \neq 0.$

Como se verifica que $rg(A) = n$, entonces por la definición de rango deducimos que el menor de orden n de la matriz A es no nulo, pero como la matriz A es cuadrada de orden n, el menor de orden n es la propia matriz A, por tanto concluimos que $det(A) \neq 0$.

$\square$

Teorema 2 Teorema de Rouché (pg. 16)

Sea un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ de orden ($m \times n$). Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. $AX = B$ es compatible determinado (solución única) si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) = n$.

2. $AX = B$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones) si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) < n$.

3. $AX = B$ es incompatible (sin solución) si y sólo si $rg(A \mid B) \neq rg(A)$, ($rg(A \mid B) = r + 1, rg(A) = r$).

Demostración.

Representaremos el sistema en forma vectorial, es decir, denotaremos las columnas de la matriz A como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y la columna de términos independientes como b. El sistema sería $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

1. En primer lugar veremos que la compacidad del sistema $AX = B$ equivale a que $rg(A \mid B) = rg(A)$.

   Es claro que el sistema tendrá solución si y sólo si b es combinación lineal de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, esto es equivalente a decir que la última columna de $(A \mid B)$ (es decir la columna b) es combinación lineal de las n columnas anteriores de $(A \mid B)$ (es decir las columnas de A). Luego esto implica que si a la matriz A le añadimos la columna b el rango de la nueva matriz $(A \mid B)$ coincide con el rango de A, por tanto obtenemos que $rg(A) = rg(A \mid B)$.

2. El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) < n$.

   Por el apartado anterior tenemos que el sistema es compatible $\Leftrightarrow rg(A \mid B) = rg(A)$, luego quedaría por probar que es indeterminado si y sólo si $rg(A) < n$.

   Bastaría con ver que hay dos soluciones distintas si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) < n$.

Supongamos que hay dos soluciones diferentes $x_j = \alpha_j$ y $x_j = \beta_j$ con $j = 1, 2, \ldots, n$. En tal caso se verifica que:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j = b \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j = b.$$

Restando obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) a_j = 0 \ \text{(donde 0 representa una columna de ceros).}$$

Como las soluciones son distintas al menos algún $\alpha_j - \beta_j$ tiene que ser distinto de cero, luego esto implica que hay columnas en A linealmente dependientes y por tanto $rg(A) < n$.

Recíprocamente, si $rg(A \mid B) = rg(A) < n$ entonces por ser $rg(A \mid B) = rg(A)$ hay al menos una solución $x_j = \alpha_j$ con $j = 1, 2, \ldots, n$. Por ser $rg(A) < n$ hay alguna combinación lineal de las columnas de A igual a cero con los coeficientes de dicha combinación no todos nulos, es decir, se verifica $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n = 0$ con no todos los $\lambda_j = 0$ con $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \lambda_j) a_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = b + 0 = b.$$

luego $x_j = \alpha_j + \lambda_j$ es solución del sistema distinta de $x_j = \alpha_j$, ya que al menos un λ_j es distinto de cero. Y sabemos que si la solución no es única entonces hay infinitas soluciones y por tanto el sistema es compatible indeterminado.

3. El sistema es compatible determinado si y sólo si $rg(A \mid B) = rg(A) = n$.

   Por el primer apartado tenemos que el sistema es compatible $\Leftrightarrow rg(A \mid B) = rg(A)$, luego quedaría por probar que es determinado si $rg(A) = n$.

   En el apartado anterior hemos visto que el sistema es compatible indeterminado si y sólo si $rg(A) < n$, y como $rg(A) \leq n$, entonces solo nos queda la posibilidad de que $rg(A) = n$.

   Por tanto si el sistema es compatible y no es indeterminado la única opción es que sea compatible determinado, luego llegamos a que un sistema es compatible determinado si y sólo si $rg(A) = n$.

4. Por último veamos que el sistema es incompatible si y sólo si $rg(A \mid B) \neq rg(A)$.

Si el sistema es incompatible, es decir no tiene solución, y por tanto no existe ninguna n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verificando $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, entonces todas las columnas de la matriz $(A \mid B)$ son linealmente independientes, luego $rg(A \mid B) \neq rg(A)$.

Recíprocamente, si $rg(A \mid B) \neq rg(A)$, entonces la última columna de $(A \mid B)$ es linealmente independiente de las columnas de A, luego no existe ninguna combinación lineal tal que se verifique $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, luego el sistema no tiene solución y por tanto decimos que el sistema es indeterminado.

$\square$

Teorema 3 (Propiedad fundamental de la equivalencia) (pg.18)
Dado un sistema de ecuaciones lineales, obtendremos un sistema equivalente si:

1. Intercambiamos dos ecuaciones.

2. Multiplicamos una ecuación por un número real no nulo.

3. A una ecuación cualquiera le sumamos un múltiplo cualquiera de otra ecuación distinta.

Demostración.

Para todos los casos vamos a partir del sistema general:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} (1)$$

1. Supongamos que intercambiamos las dos primeras ecuaciones (por comodidad y sin pérdida de generalidad). Entonces el sistema equivalente sería

$$\left.\begin{array}{c} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} (2)$$

Luego las ecuaciones de los dos sistemas son las mismas salvo el orden y para ser solución del sistema tiene que ser solución de todas las ecuaciones, luego una solución de (1) también lo será de (2) y viceversa.

2. Supongamos que multiplicamos la primera ecuación (por comodidad, sin pérdida de generalidad) por un número $k \neq 0$, y obtendríamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \cdots + ka_{1n}x_n = kb_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} (2)$$

Está claro que al ser todas las ecuaciones de ambos sistemas iguales excepto la primera ecuación, una solución de (1) será también solución de (2) y viceversa.

Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ solución de (1), es decir, en particular verifica $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1$, veamos que entonces se cumple $ka_{11}\alpha_1 + ka_{12}\alpha_2 + \cdots + ka_{1n}\alpha_n = kb$.

$$ka_{11}\alpha_1 + ka_{12}\alpha_2 + \cdots + ka_{1n}\alpha_n = k(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n) = kb.$$

De forma similar se prueba que toda solución de (2) lo es de (1).

3. Supongamos que cambiamos la primera ecuación (por comodidad, sin pérdida de generalidad) por una combinación lineal de todas las ecuaciones del sistema y el coeficiente de esta ecuación no nulo. El sistema quedaría:

$$\left.\begin{array}{c} k_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + k_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = k_1b_1 + \cdots + k_mb_m, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} (3)$$

Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ solución de (1), es decir, en particular verifica $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1$, veamos que entonces se cumple $k_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + k_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = k_1b_1 + \cdots + k_nb_n$, lo cual es trivial por ser $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ solución de (1).

Ahora hay que probar que ser solución de (3) (con $k_1 \neq 0$) implica ser solución de (1).

Sea $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ solución de (3), es decir, en particular verifica $k_1(a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n) + \cdots + k_m(a_{m1}\beta_1 + \cdots + a_{mn}\beta_n) = k_1b_1 + \cdots + k_mb_m$, por lo que se verifica que $a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n = b_1$, y por tanto $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ también es solución de (1).

$\square$

Anexo 2: Otra investigación relacionada sobre la enseñanza/aprendizaje

1. Incorporación de TIC para la enseñanza de las matemáticas

En la actualidad la incorporación de TIC en las aulas esta siendo muy efectiva, pero lo importante es saber usarlas bien para que los alumnos vean el potencial que pueden tener las TIC para su aprendizaje, ya que debido a los avances en la tecnología se pueden hacer muchas cosas que antes no eran posibles.

En el caso de las matemáticas podemos usar el software Geogebra, que es un software totalmente gratuito y por ello no supondría ningún coste a los centros educativos ni a las familias de los alumnos. Con Geogebra los alumnos pueden visualizar, experimentar y ver de forma más rápida que pasa si cambio algo. Con esto lo que queremos es que los alumnos vean como se trabaja en la vida real y no que vean las matemáticas como un simple recetario de los pasos que tienen que seguir para resolver un tipo de problema concreto, ya que la mayoría de los alumnos se aprenden estos pasos a seguir pero no saben el porqué se dan esos pasos y no otros, y su aprendizaje matemático se basa en aprender estos pasos sin saber que se hace en cada paso.

Este software es muy recomendable para la parte de geometría ya que los alumnos pueden ver todo más visual y así comprender mucho mejor de que se habla en clase, ya que no es lo mismo ver una foto o dibujo de un objeto geométrico que poder crearlo por ti mismo y ver como es dicho objeto y poder rotarlo para verlo de todas las formas posibles.

Geogebra también es recomendable para la parte algebraica, ya que los alumnos pueden ver el álgebra como la parte de las matemáticas en las que ponemos números y letras aleatorias pero que no tienen ninguna relación entre sí. Con este software podemos demostrarle que todo esto tiene una representación gráfica y así ellos poder familiarizarse con esto y comprender mejor el porqué ponemos esos números y letras y no otros.

En nuestro caso, para estudiar sistemas de ecuaciones es muy recomendable para que vean la parte gráfica y como se podrían resolver estos sistemas si se sabe su representación gráfica. En el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas según la posición de las rectas el sistema será compatible determinado (si las rectas son secantes), compatible indeterminado (si las rectas son coincidentes) o incompatible (si las rectas son paralelas).

Los alumnos pueden ver que cada ecuación de los sistemas nos da una recta y la solución del sistema viene dada dependiendo de los puntos de corte entre las diferentes rectas. También pueden ver como las rectas varían según su pendiente y su puntos de corte con los ejes de coordenadas. En estos casos la herramienta que nos ofrece el software de deslizador es muy importante ya que los alumnos pueden ver como las rectas van cambiando según vamos cambiando un parámetro en ellas y así también introducirlos en los sistemas con parámetros.

Para hacer este estudio me he basado mayormente en el artículo "Una apuesta por las TIC para la enseñanza de los sistemas lineales" de M. Carrillo García; F. Esquembre Martinez; M.P. Prendes Espinosa de la Facultad de Matemáticas- Facultad de Educación de la Universidad de Murcia.

En el artículo anteriormente mencionado se hace un estudio de como las TIC pueden mejorar la comprensión de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales de dos variables, el estudio se llevará a cabo con alumnos de 3º ESO de un instituto de Cartagena.

En el estudio se hace un primer cuestionario tanto a alumnos como a profesores para ver de la base de la que partimos y así saber al final del estudio si ha habido un avance significativo o no. Después se les enseña a los alumnos a utilizar el software Geogebra y ver las ventajas que este puede tener a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales, viendo así la relación entre la solución de un sistema y su representación gráfica. Por último se le hace un segundo cuestionario al finalizar para ver como de productivo ha sido el estudio, y en este caso la mayoría de los alumnos están muy satisfechos con la experiencia y han comprendido mucho mejor los conceptos de sistema y su solución.

También le preguntan a alumnos del curso superior e inferior para ver sus opiniones al respecto. En el caso de 4º ESO los alumnos creen que Geogebra les sería una herramienta muy útil para otro tipo de funciones como las funciones cuadráticas y sobre todo las logarítmicas, exponenciales e inversas, y no solo para funciones lineales.

"Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándole problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello." (Polya, 1945).